F. RATH

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

(DISTRIBUCION RESTRINGIDA)

T.63/2

METODOS RAPIDOS PARA LA CONSTRUCCION DE TABLAS ABREVIADAS DE MORTALIDAD

Por T. N. E. Greville

(Traducción del Instituto Interamericano de Estadística, publicada en la Revista Estadística, N° 45, Washington D.C., diciembre, 1954, reproducida para consulta exclusiva del personal docente y estudiantes del Centro Latinoamericano de Demografía).

Santiago, Chile

1963

76

METODOS RAPIDOS PARA LA CONSTRUCCION DE TABLAS ABREVIADAS DE MORTALIDAD.

I. Introducción.

En los recientes años los sociólogos, los oficiales de salud pública y los estudiosos de los problemas de población han ido tomando un creciente interés en las tablas de mortalidad como una descripción de la variación debida a la edad de las probabilidades de muerte y de sobrevivencia. Como resultado del interés en este asunto se ha concentrado la atención en métodos rápidos para la construcción de tablas abreviadas de mortalidad. Algunos de los métodos más útiles e interesantes han sido ideados por personas que no son actuarios y, probablemente por esta razón, no han recibido la atención que merecen de estos últimos. El propósito de este trabajo es poner algunos de estos métodos en conocimiento de los actuarios y también mostrar que ciertas fórmulas que han sido adelantadas por sus creadores sobre bases puramente empíricas tienen realmente una válida base matemática.

Considerando los métodos sugeridos más recientemente para la construcción de tablas abreviadas de mortalidad deben tenerse en mente dos puntos. El primero es que las estadísticas de población y de fallecimientos sobre las que deben basarse las tablas están dadas frecuentemente sólo en grupos de edades quinquenales o decenales. Aún cuando fueran dados los datos por años simples de edad son a menudo considerados como no dignos de confianza y se prefiere el agrupamiento de cinco en cinco o de diez en diez años. El segundo punto a tenerse presente es que los valores de ${}_nL_x = T_x - T_{x+n}$ son de particular interés a los estudiosos de los problemas de población, como las tasas de sobrevivencia deducidas de aquellos son usadas para las predicciones de la población con el propósito de determinar los grupos quinquenales o decenales en la población.

Todos los métodos que yo propongo discutir empiezan con la razón ${}_nm_x$, la tasa central de muerte para el período de edad x a x + n. Esta es el cociente del promedio anual de muertes en este grupo de edad durante el período base sobre la población de este mismo grupo de edad en la mitad de dicho período. Luego se usa una fórmula aproximada que relaciona ${}_nm_x$ con ${}_nq_x$ a fin de derivar valores de esta última función. Es entonces fácil derivar valores de l_x para las edades "límites" de los grupos de edades empleados, de los cuales las otras funciones de las tablas de mortalidad que deseen son luego computadas. Tal método ha sido sugerido por los editores del Journal of the Institute of Actuaries [1; 2, p. 121-122].[1] Sin embargo el método más satisfactorio de este tipo que hasta ahora ha sido sugerido es incuestionablemente el de Reed y Merrell (3) al cual se presta particular atención en la discusión que sigue. Agradezco al Dr. Harold F. Dorn del United States Public Health Service, por su bondad en llamar mi atención sobre alguna literatura relacionada con el asunto y en hacerme conocer ciertas técnicas por él introducidas.

1/ Los números dentro de corchetes se refieren a la bibliografía al final de este trabajo.

II. Ejemplo Numérico.

La discusión de los aspectos técnicos de estos métodos abreviados estará algo facilitada dando primero un ejemplo numérico de la aplicación de tal método. Por razones de conveniencia al comparar resultados, usaré los mismos datos ilustrativos previamente empleados por Dublin y Lotka [4, cap. XIV] y por Reed y Merrell [3], i.e., aquel relativo a los hombres blancos del Estado de Connecticut para el período 1929-31. Un método muy sencillo, que difiere en varios aspectos del de Reed y Merrell, será usado. Como hay algún interrogante sobre la aplicabilidad de métodos abreviados para la derivación de tasas de mortalidad para las edades cero y uno, se asumirá en el siguiente ejemplo que dichas tasas han sido obtenidas por los mismos métodos usados por Dublin y Lotka, y los valores dados por ellos 4, p. 330

Los datos básicos para esta ilustración son las cifras contenidas en las columnas 2 y 3 del cuadro 1. Están basadas en las cifras tomadas de los informes del Censo y están dadas por Dublin y Lotka 4, p. 318 y 330 y por Reed y Merrell 3, p. 696 . La columna 4 muestra los valores resultantes de $_{n}m_{x}$, que forman la base de las computaciones subsiguientes. Finalmente, las columnas 5-7 exhiben el cálculo de $_{n}q_{x}$ para cada intervalo de edad por una fórmula aproximada, que es la fórmula (6a) presentada más adelante, con la constante k igual a .09.

Ver Cuadro 2.

El cuadro 2 muestra el resto de los cálculos para la tabla abreviada de mortalidad. El procedimiento requiere poca explicación, excepto para la columna 12, que da los valores de $_{n}L_{x}$. Los valores de L_0 y L_1 fueron obtenidos por la fórmula (17) con su forma especial (16) para el grupo final de edades cien y más.

Ver Cuadro 3.

El cuadro 3 presenta una comparación de los valores obtenidos por el método abreviado con los valores correspondientes tomados de la tabla completa construida por Dublin y Lotka [4, p. 335] . Las poblaciones y muertes para la edad central de cada intervalo quinquenal de edades de esta última tabla han sido calculadas por una fórmula basada en la subdivisión de los intervalos por la fórmula modificada de Jenkins de interpolación osculatoria hasta las diferentes quintas. Los valores pivotales de q_x fueron luego obtenidos para las edades siete a noventisiete por intervalos quinquenales. La serie fue extendida más allá de la edad de noventisiete asumiendo que las terceras diferencias eran constantes. Con los valores pivotales de q_x los valores para todas las edades siete y más fueron interpolados por la fórmula de Jenkins. Las tasas de mortalidad para las edades bajo cinco años fueron calculadas con referencia a los nacimientos y muertes registrados en los cinco años precedentes; y los valores para las edades cinco y seis fueron insertados por interpolación ordinaria.

El rápido método usado en esta ilustración no ha sido elegido por ser uno de los más refinados o exactos de los métodos abreviados sino porque es sencillo, directo y fácil de comprender y no requiere el empleo de los logaritmos. Todos los cálculos para los cuadros 1 y 2 fueron hechos por el autor en una hora y veinte minutos en una máquina de calcular Friden con multiplicación automática.

III. RELACION ENTRE ${}_nm_x$ Y ${}_nq_x$

El aspecto básico referente a la clase de método para la construcción de una tabla de mortalidad que se va a considerar es la relación matemática que se supone existir entre ${}_nm_x$ y ${}_nq_x$. Hay varias relaciones que pueden ser empleadas. Quizás la más simple es obtenida suponiendo que l_x es una función lineal en el intervalo de edad. Esta consideración lleva a la ecuación:

$$
{}_nq_x = \frac{2n \cdot {}_nm_x}{2 + n \cdot {}_nm_x} \qquad (1)
$$

que, para el caso particular de n = 1, se convierte en la fórmula ampliamente conocida por los actuarios [5, p.5]. Otra posible suposición es que l_x puede ser representada por una función exponencial. Ello conduce a la ecuación:

$$
\operatorname{colog}_e \, {}_np_x = n \cdot {}_nm_x , \qquad (2)
$$

relación también familiar a los actuarios en el caso especial de n = 1 [5,p. 16].

Se derivan ahora ecuaciones más precisas de la misma forma general que las ecuaciones (1) y (2).* Aplicando la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin, tenemos:

$$
l_x = \sum_{h=0}^{\infty} {}_nd_{x+nh} = \frac{1}{n}\int_x^{\infty} {}_nd_t \, dt + \frac{1}{2}\, {}_nd_x - \frac{n}{12}\frac{d}{dx}\, {}_nd_x + \dots
$$

$$
= \frac{1}{n}\int_x^{\infty} (l_t - l_{t+n})dt + \frac{1}{2}\, {}_nd_x - \frac{n}{12}\frac{d}{dx}\left({}_nL_x \, {}_nm_x\right) + \dots \qquad (3)
$$

Observando que $\frac{d}{dx}\, {}_nL_x = \frac{d}{dx}(T_x - T_{x+n}) = -l_x + l_{x+n} = -{}_nd_x$,

la ecuación (3) se puede escribir bajo la forma:

$$
l_x = \frac{1}{n}(T_x - T_{x+n}) + \frac{1}{2}\, {}_nd_x - \frac{n}{12}\left[-{}_nd_x \, {}_nm_x + {}_nL_x \frac{d}{dx}\, {}_nm_x\right] + \dots \qquad (4)
$$

Sustituyendo ${}_nd_x$ por ${}_nL_x \, {}_nm_x$, tenemos:

$$
l_x = \frac{1}{n}\, {}_nL_x + \frac{1}{2}\, {}_nL_x \, {}_nm_x + \frac{n}{12}\left[{}_nL_x \, {}_nm_x^2 + {}_nL_x \frac{d}{dx}\, {}_nm_x\right] + \dots
$$

$$= {}_nL_x \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\ {}_nm_x + \frac{n}{12}\left({}_nm_x^{\ 2} + \frac{d}{dx}\ {}_nm_x \right) + \ldots \right. \tag{5}$$

Dividiendo ${}_nd_x$ por cada uno de los miembros de la ecuación (4), se obtiene:

$$ {}_nq_x = \frac{{}_nm_x}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\ {}_nm_x + \frac{n}{12}\left({}_nm_x^{\ 2} - \frac{d}{dx}\ {}_nm_x\right) + \ldots} \tag{6}$$

ó:

$$ {}_nq_x = \frac{2n\ .\ {}_nm_x}{2 + n\ .\ {}_nm_x + \frac{n^2}{6}\left({}_nm_x^{\ 2} - \frac{d}{dx}\ {}_nm_x\right) + \ldots} \tag{7}$$

que es una ecuación de la misma forma general que la ecuación (1).

Con el fin de derivar una ecuación de la forma de la ecuación. (2) escribiremos:

$$ {}_np_x = 1 - {}_nq_x = \frac{2 - n\ .\ {}_nm_x + \frac{n^2}{6}\left({}_nm_x^{\ 2} - \frac{d}{dx}\ {}_nm_x\right) + \ldots}{2 + n\ .\ {}_nm_x + \frac{n^2}{6}\left({}_nm_x^{\ 2} - \frac{d}{dx}\ {}_nm_x\right) + \ldots}$$

luego:

$$\operatorname{colog}_e {}_np_x = \log_e\left[1 + \frac{n}{2}\ {}_nm_x + \frac{n^2}{12}\left({}_nm_x^{\ 2} - \frac{d}{dx}\ {}_nm_x\right) + \ldots\right] -$$

$$- \log_e\left[1 - \frac{n}{2}\ {}_nm_x + \frac{n^2}{12}\left({}_nm_x^{\ 2} - \frac{d}{dx}\ {}_nm_x\right) + \ldots\right]$$

lo que da previo desarrollo y simplificación:

$$\operatorname{colog}_e {}_np_x = n.\ {}_nm_x + \frac{n^3}{12}\ {}_nm_x\ \frac{d}{dx}\ {}_nm_x + \ldots \tag{8}$$

que es una ecuación de la misma forma general que la ecuación. (2)

El primer interrogante que surge en la actual aplicación de las fórmulas (7) y (8) concierne a la evaluación de la derivada de ${}_nm_x$. Se desprende que una gran exactitud no es necesaria ya que la condiciones en las que esta derivada interviene, están en la de ajustamientos no rigurosos que no tienen gran influencia en los resultados de los valores de ${}_nq_x$. Si se supone que la función ${}_nm_x$ puede ser representada por un polinomio, se encuentra que:

$$\frac{d}{dx}\,{}_nm_x = \frac{{}_nm_{x+n} - {}_nm_{x-n}}{2n} \qquad (9)$$

ó:

$$\frac{d}{dx}\,{}_nm_x = \frac{-\,{}_nm_{x+2n} + 8\,{}_nm_{x\mp n} + {}_nm_{x-2n}}{12n}, \qquad (10)$$

según que se haya considerado un polinomio de segundo o cuarto grado. Estas fórmulas sin embargo no son aplicables cuando grupos de edad vecinos o inmediatos no contienen el mismo número de años.

Como una alternativa, puede observarse que la muy conocida fórmula para la derivada de ${}_np_x$ [5,p. 17] da:

$$\frac{d}{dx}\,\text{colog}_e\,{}_np_x = \mu_{x+n} - \mu_x.$$

Por tanto, diferenciando la ecuación (8) se tiene aproximadamente:

$$\frac{d}{dx}\,{}_nm_x = \frac{1}{n}\,(\mu_{x+n} - \mu_x).$$

Sustituyendo esta aproximación en la ecuación (8) da, finalmente,

$$\text{colog}_e\,{}_np_x = n\cdot{}_nm_x\left[1 + \frac{n}{12}\,(\mu_{x+n} - \mu_x)\right].$$

Esta es la fórmula dada (para el caso de n = 5) por los redactores de JIA [1, p. 301; 2,p. 121-122]. Sin embargo, en la aplicación práctica de esta fórmula se ha considerado necesario aproximar la expresión entre paréntesis en función de los valores de ${}_nm_x$. Esto hace a la fórmula equivalente a la ecuación (8), usada en conjunción con la aproximación. (9).

Ya que ${}_nm_x$ es aproximadamente igual a la fuerza de mortalidad en el medio del período, una suposición más lógica es que ${}_nm_x$ sea una función exponencial, de acuerdo con la ley de Gompertz. Si:

$${}_nm_x = Bc^x,$$

entonces:

$$\frac{d}{dx}\,{}_nm_x = k\cdot{}_nm_x,$$

al hacer:

$$k = \log_e c.$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones (6) y (8) se tiene:

$${}_nq_x = \frac{{}_nm_x}{\frac{1}{n} + {}_nm_x\left[\frac{1}{2} + \frac{n}{12}\,({}_nm_x - k)\right]} \qquad (6a)$$

y:

$$\text{colog}_e\,{}_np_x = n\cdot{}_nm_x + \frac{k}{12}\,n^3 - {}_nm_x^2 \qquad (8a)$$

Como una moderada variación en el valor de k tiene pequeño efecto en el valor de ${}_nq_x$ excepto en las edades avanzadas, en que la mayor parte de las tablas de mortalidad siguen la ley de Gompertz muy estrechamente, y en las edades muy jóvenes que son generalmente tratadas por un método diferente, k puede ser tomada con seguridad como una constante en toda la tabla. Henderson expresa 6, p. 90 que para prácticamente todas las experiencias de mortalidad el $\log_{10} c$ se halla entre 0.035 y 0.45. Por consiguiente, $k = \log_e c$ caería entre 0.080 y 0.104.

Es interesante observar que Reed y Merrell después de considerar las ecuaciones (1) y (2), no satisfactorias para las edades avanzadas sugieren sobre bases empíricas la ecuación:

$$ {}_nq_x = 1 - e^{-n.\,{}_nm_x - an^3.\,{}_nm_x^2}, \qquad (11) $$

que es una relación exactamente equivalente a la ecuación (8a) si a se hace igual a $\frac{k}{12}$. Ajustando esta curva a las 33 tablas de las series de Glover de 1910, determinaron el valor de a igual a 0.008. Esto correspondería a un valor de k igual a 0.096, valor bien enmarcado dentro de la amplitud dada por Henderson, Reed y Merrell han publicado extensas tablas de la función (11), con a = 0.008, ambas para n = 5 y n = 10 y también para n = 3 de amplitud limitada, con el fin de emplearla en el intervalo de edad de dos a cinco. Con la ayuda de estas tablas un buen calculista puede construir enteramente una tabla abreviada de mortalidad en menos de dos horas.

Aunque un ensayo indicaría que la ecuación (6a) da generalmente casi tan buenos resultados que la ecuación (8a), esta última tiene teóricamente ciertas ventajas. En ambos casos ${}_nq_x = 0$ cuando ${}_nm_x = 0$. Sin embargo, en la ecuación (8a), ${}_nq_x$ tiende a la unidad como debería ser, cuando ${}_nm_x$ se incrementa sin límite, mientras en la ecuación (6a) hay un punto más alto del cual ${}_nq_x$ deja de incrementarse al mismo tiempo que ${}_nm_x$, siendo entonces su límite cero. Por otra parte si se desea emplear un valor de k distinto de 0.096 (correspondiente al de a = 0.008) para el que no se dispone de tablas, la ecuación (6a) es algo más fácil de emplear ya que los cálculos no incluyen el uso de logaritmos. Puede mencionarse, sin embargo, que, si se usa la ecuación (8a), los logaritmos de l_x pueden obtenerse por restas sucesivas de los $\operatorname{colog}_e {}_np_x$ (primero convertidos a los de base 10).

Las tablas abreviadas de mortalidad construidas mediante los cuadros de Reed y Merrell basados en el valor de la constante a = 0.008, parecen

CUADRO 4. VALORES CORRESPONDIENTES DE c^5, k, Y a

c^5	k	a	c^5	k	a
1.35	.0600	.0050	1.60	.0940	.0078
1.40	.0673	.0056	1.65	.1002	.0083
1.45	.0743	.0062	1.70	.1061	.0088
1.50	.0811	.0068	1.75	.1119	.0093
1.55	.0877	.0073	1.80	.1176	.0098

ser suficientemente exactas para la mayoría de los fines prácticos. Sin embargo, si se desea emplear un valor más exacto de la constante k o l se pueden calcular las razones de los valores adyacentes a ${}_nm_x$ y utilizar el hecho de que bajo los supuestos en que se basan las fórmulas anteriores estas razones serían iguales a c^n. En la práctica, la razón variará, por supuesto, algo en las diferentes edades y será necesario tomar un valor promedio. Es solamente en las edades avanzadas (digamos encima de setenta) que un cambio en k o en l tiene un apreciable efecto sobre ${}_nq_x$; por consiguiente, solamente las razones de ${}_nm_x$ por encima de aquella edad necesitan ser consideradas al llegar al promedio. Del valor supuesto para c^n, se puede encontrar el de k o el de c. Como n es comúnmente igual a 5, el cuadro 4 puede ser de utilidad.

IV. EDADES MUY JOVENES

Se considera generalmente que las poblaciones censales de menos de dos años son muy deficientes para ser utilizadas sin alguna corrección de la omisión en el empadronamiento. Reed y Merrell concluyeron que, por lo menos dentro de los Estados Unidos, el grado de omisión en el empadronamiento es una función de tasa de mortalidad en aquellas edades y han derivado fórmulas empíricas combinando el ajustamiento de la omisión en el empadronamiento con el ajustamiento de m_x a q_x, habiendo dado cuadros de estas funciones en su artículo. Sin embargo muchos otros probablemente preferirán, cuando es posible, usar información adicional, tal como la estadística de nacimientos, con el fin de derivar las tasas de mortalidad para las edades cero y uno.

Reed y Merrell parecen haber considerado que si no fuera por la omisión en el empadronamiento, la expresión (11) (con a = 0.008) sería aplicable tanto a las edades cero y uno como para el resto de la duración de la vida. [3, p. 690]. Consideraciones teóricas indicarían que en un período de mortalidad decreciente $k = \log_e c$ (y por consiguiente a en la fórmula de Reed y Merrell) sería negativa, y cálculos aproximados basados en recientes Tablas de Mortalidad de los Estados Unidos indican para la edad cero un valor de cerca -0.3 para a en vez de 0.008. El hecho es, sin embargo, que para un intervalo de edad de solamente un año, este ajustamiento no es de mucha consecuencia, siendo en tal intervalo la ecuación (11) suficientemente aproximada para fines prácticos. Sin embargo, la ecuación (1) o la ecuación (2) serían algo preferibles, ya que el ajustamiento adicional contenido en la ecuación (11) tiene una dirección equivocada.

V. POBLACION DE UNA TABLA DE MORTALIDAD

El cálculo de los valores de l_x y de ${}_nd_x = l_x - l_{x+n}$ partiendo de ${}_nq_x$ no requiere explicación o comentario.
Sin embargo la computación de la columna ${}_nL_x$ introduce algunas preguntas. Dos métododos distintos de obtener ${}_nL_x$ han sido sugeridos. El primero [7] está basado en el supuesto que ${}_nm_x$ tiene el mismo valor en la población real y en la población de la tabla de mortalidad (población estacionario) y emplea la relación:

$$ {}_nL_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nm_x} \tag{12}$$

Este es el método más directo y evidente. El otro consiste en utilizar la relación:

$$ {}_nL_x = \int_0^n l_{x+t}\,dt \qquad (13) $$

que tiene significado en la práctica, usando una fórmula aproximada de integración tal como:

$$ {}_nL_x = \frac{n}{2}\left(l_x + l_{x+n}\right) + \frac{n}{24}\left({}_nd_{x+n} - {}_nd_{x-n}\right) \qquad (14) $$

Este método aproximado, aunque menos directo y en teoría menos exacto, produce generalmente resultados superiores en la práctica. Ello es porque los valores de l_x obtenidos por el proceso abreviado contienen inexactitudes e irregularidades pero resulta que el efecto en el valor de ${}_nL_x$ en la ecuación (13) debido a los ligeros errores cometidos en l_x es menos que el efecto en la ecuación (12) de los correspondientes errores cometidos en ${}_nd_x$ y ${}_nm_x$. Una demostración matemática de este hecho sería interesante.

De la ecuación (13) podemos escribir aplicando el Teorema del Valor Medio:

$$ {}_nL_x = n\,l_{x+\theta} $$

en que θ es un número entre o y n. Por consiguiente, si d $({}_nL_x)$ denota el error en el valor de ${}_nL_x$, tenemos:

$$ \frac{d\,({}_nL_x)}{{}_nL_x} = \frac{d\,(l_{x+\theta})}{l_{x+\theta}} $$

De esto se sigue que un porcentaje dado de error en los valores de l_x tenderán a producir casi el mismo porcentaje de error en ${}_nL_x$. Por otra parte, la ecuación (12) da:

$$ \frac{d({}_nL_x)}{{}_nL_x} = \frac{d\,({}_nd_x)}{{}_nd_x} - \frac{d({}_nm_x)}{{}_nm_x} . $$

Esto indica que, cuando es usada la ecuación (12), un porcentaje dado de error sea en ${}_nd_x$ o en ${}_nm_x$ tiende a producir casi el mismo porcentaje de error en ${}_nL_x$. Sin embargo, es obvio que errores de determinada magnitud en los valores de l_x tenderían a producir errores de la misma magnitud absoluta (y por tanto errores de porcentaje mucho más grandes) en ${}_nd_x$. Igualmente, los valores de ${}_nm_x$ probablemente contienen mayores errores relativos que los valores de l_x. Esto explica por qué en la práctica la fórmula aproximada de integración da mejores resultados.

Reed y Merrell usaron el método aproximado de integración, no sobre las bases de las consideraciones anteriores, sino porque no desearon hacer el planteamiento que ${}_nm_x$ tiene el mismo valor en la población real y en la población estacionaria y consideraron a la ecuación(11) como una relación puramente empírica entre los valores observados de ${}_nm_x$ y los valores de ${}_nq_x$ en la tabla de mortalidad. Sugieren [3, p. 684] que los valores de ${}_nm_x$ en la población real y en la estacionaria difieren como consecuencia de dos causas: (a) el proceso de suavizamiento y (b) la diferencia en la distribución de edades dentro del intervalo de edad x a x + n. Es de presumir que las diferencias debidas a la causa (a) serían de naturaleza irregular y no podrían ser posiblemente ajustadas por ninguna fórmula empírica como la de que se trata. Puede suponerse, por tanto, que fueron las diferencias debidas a la causa (b) que condujeron a Reed y Merrell a rechazar el método más directo para el cálculo de ${}_nL_x$. Cálculos de muestras hechos por el autor indican que las diferencias encontradas en la práctica entre los dos conjuntos de valores de ${}_nm_x$ son usualmente de naturaleza irregular y parece que se deben principalmente a la causa (a).

Debería notarse que la fórmula (14) es aplicable solamente cuando los intervalos de edades, vecinos, contienen ambos el mismo número de años que aquel para el cual se calcula ${}_nL_x$. Cuando no es este el caso se puede entonces o regresar a la fórmula (12) ó emplear la siguiente fórmula aproximada de integración más general:

$$\left.\begin{aligned} {}_nL_x = \frac{n}{12}\Bigg[&- \frac{n^2(n+2r)}{m(m+n)(m+n+r)}\, l_{x-m} + \frac{n^2+6\,mr+2n\,(2m+r)}{m\,(n+r)}\, l_x + \\ &+ \frac{n^2+6\,mr+2n\,(m+2r)}{r(m+n)}\, l_{x+n} - \frac{n^2\,(2m+n)}{r(n+r)\,(m+n+r)}\, l_{x+n+r} \Bigg] \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Si hay un último intervalo de edades de emplitud indefinida conteniendo todas las edades por encima de una edad específica y, el procedimiento más satisfactorio es usar la ecuación (12) bajo la forma especial:

$$T_y = \frac{l_y}{m_y} = L_y\,, \qquad (16)$$

donde m_y representa el cociente de la media anual de defunciones por la población central en el príodo completo de edades y y más. En relación con el penúltimo intervalo de edades no habrá valor de l_x para más allá de la edad y a fin de ser sustituido en la ecuación (14) o en la (15). Si y es una edad suficientemente avanzada, puede ser suficiente hacer igual a cero el valor de l correspondiente a la edad más avanzada requerida en la fórmula. Otra posibilidad es utilizar una fórmula aproximada de integración conteniendo sólo tres valores de l_x, cuya forma más general es:

$${}_nL_{y-n} = \frac{n}{6}\; - \frac{n^2}{m\,(n+n)}\, l_{y-m-n} + \frac{3m+n}{m}\, l_{y-n} + \frac{3m+2n}{m+n}\, l_y$$

Que si m = n, se reduce a:

$$nL_{y-n} = \frac{n}{12}\left[- l_{y-2n} + 8\, l_{y-n} + 5\, l_y \right]$$ [2]

Una tercera alternativa (quizás la más sencilla) es, por supuesto, emplear la ecuación (12) para este intervalo.

2/ Esta fórmula fué señalada al autor por el Dr. Harold F. Dorn, del United States Public Health Service.

Para los años de edad cero a uno y uno a dos, particularmente considerados, y que son usualmente considerados como intervalos separados, se recomiendan métodos especiales. En este caso el decrecimiento con la edad en la tasa de mortalidad es tan rápido que debe prestarse particular atención a la distribución de las defunciones dentro del año de edad. Podemos escribir:

$$L_x = l_x - h_x \cdot d_x = (1 - h_x)\, l_x + h_x \cdot l_{x+1}, \tag{17}$$

donde h_x denota la proporción del total de defunciones d_x, que ocurren de la edad x a la edad x + 1 en un determinado año calendario entre los l_x individuos que alcanzan la edad x en el mismo año calendario.

Entonces $1 - h_x$ es la proporción de defunciones d_x que ocurren entre aquellos que alcanzan la edad x en el año anterior. Glover ha publicado valores de h_x de x = o a x = 5, basado en algunas antiguas estadísticas alemanas [8, p. 339]. El valor de h_o para personas blancas en Estados Unidos parece hoy día ser mayor que el dado por Glover, estando en la vecindad de o.80.

VI. PROMEDIO DE VIDA FUTURA.

Otra función que aún es frecuentemente empleada es el promedio de vida futura, o, como se demomina generalmente, la esperanza de vida. Si se obtienen valores de ${}_nL_x$, los valores de ${}_nT_x$ pueden, por supuesto, ser derivados acumulando los valores de la columna ${}_nL_x$ de abajo hacia arriba. La esperanza completa de vida está entonces dada por la relación usual:

$$\overset{o}{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Los procedimientos abreviados dados por Reed y Merrell [3, p. 695] y por los redactores de JIA [2, p. 122] para pasar directamente de los valores de l_x a los de e_x están basados en la integración aproximada.

VII. TASAS DE MORTALIDAD PARA CADA AÑO DE EDAD.

Si se desea calcular tasas de mortalidad para cada año de edad como parte de la tabla abreviada de mortalidad, puede hacerse empleando la relacián usual:

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

después de haber obtenido primero los necesarios valores intermedios de l_x mediante interpolación. Cualquiera de las fórmulas standard de interpolación pueden, por supuesto, ser utilizadas para este propósito. La interpolación entre los valores de log l_x, en vez de entre los propios valores de l_x, dará usualmente resultados más exactos, pero el incremento de la exactitud no justifica a menudo el trabajo adicional que ello requiere.

BIBLIOGRAFIA

1. Editors of JIA. Note appended to the article "On a Short Method of Constructing an Abridged Mortality Table, by George King, JIA, XLVIII, 301-3.

2. Wolfenden, H. H. Population Statistic and Their Compilation. ("Actuarial Studies," N° 3.) New York, Actuarial Society of America, 1925.

3. Reed, L. J., and Merrell, M. "A Short Method for Constructing an Abridged Life Table", American Journal of Hygiene, vol. XXX, N° 2. Reprinted by de U. S. Bureau of the Census as Vital Statistic - Special Reports, Vol. IX N° 54. All page references are to the Census publication

4. Dublin, L. I., and Lotka, A. J. Length of Life. New York, Ronald Press Co., 1936.

5. Spurgeon, E. F. Life Contingencies, London Macmillan & Co. Ltda. 1938.

6. Henderson, R. Mathematical Theory of Graduation. ("Actuarial Studies," N° 4) New York, Actuarial Society of America, 1938.

7. Doering C. R. and Forbes, A. L. "A Skeleton Life Table," Proceedings of the National Academy of Sciences, XXIV, 400-405.

8. Glover, J.W. United States Life Tables, 1890,1900,1910, and 1901-1910. Washington, Government Printing Office, 1921.

***

CUADRO 1. COMPUTACION DE LA TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD PARA HOMBRES BLANCOS EN CONNECTICUT, 1929-31

Intervalo de edad	Población estimada julio 1, 1930	Defunciones registradas 1929-31	Tasa promedia anual de muerte			Probabilidad de (x) morir antes de la edad x + n
			$\frac{1}{3}$ col. 3 dividido por col. 2	$\frac{1}{2} + \frac{n}{12}$ por $({}_nm_x - .09)$	$\frac{1}{n}$ + col.4	Col. 4 ÷ col. 6
x a x + n			${}_nm_x$			${}_nq_x$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2 - 5	41,200	420	.003398	.478350	.334959	.01014
5 - 10	75,745	402	.001769	.463237	.200819	.00881
10 - 15	80,063	324	.001349	.463062	.200625	.00672
15 - 20	72,786	481	.002203	.463418	.201021	.01096
20 - 25	62,926	572	.003030	.463762	.201405	.01504
25 - 30	56,987	549	.003211	.463838	.201489	.01594
30 - 35	57,853	634	.003653	.464022	.201695	.01811
35 - 40	63,759	949	.004961	.464567	.202305	.02452
40 - 45	58,119	1,283	.007358	.465566	.203426	.03617
45 - 50	49,748	1,592	.010667	.466945	.204981	.05204
50 - 55	41,119	2,050	.016618	.469424	.207801	.07997
55 - 60	31,862	2,270	.023748	.472395	.211218	.11243
60 - 65	28,103	2,658	.031527	.475636	.214995	.14664
65 - 70	19.309	2,823	.048734	.482806	.223529	.21802
70 - 75	12,658	2,691	.070864	.492027	.234867	.30172
75 - 80	6,897	2,123	.102605	.505252	.251841	.40742
80 - 85	3.096	1,440	.156008	.527503	.282295	.55264
85 - 90	1,055	727	.229700	.558208	.328220	.69984
90 - 95	256	236	.307292	.590538	.381468	.80555
95 - 100	34	43	.421569	.638154	.469026	.89882
100 y más	3	6	.666667			1.00000

CUADRO 2. COMPUTACION DE LA TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD PARA HOMBRES BLANCOS EN CONNECTICUT, 1929 - 31

Intervalo de edad	Probabilidad de (x) morir antes de la edad x + n	Sobrevivientes a la edad exacta x, de una generación de 100.000 nacidos vivos	Fallecidos en el intervalo x a x + n	Población estacionaria en el intervalo x a x + n	Población estacionaria de edad x, y más	Espectativa de vida de los sobrevivientes a la edad x
	Columna 7	Columna 10 menos la columna 11 (líneas superiores)	Columna 9 por Columna 10	Columna 11 dividida por la Columna 4	Suma de las cifras de la columna 12, para esta línea y todas las de abajo	Columna 13 ÷ la columna 10
xax + n	nqx	l_x	d_x	L_x	T_x	$\overset{o}{e}_x$
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
0 - 1	.06207	100,000	6,207	95,034*	5,976,828	59.77
1 - 2	.00754	93,793	707	93,376*	5,881,794	62.71
2 - 5	.01014	93,086	944	277,810	5,788,418	62.18
5 - 10	.00881	92,142	812	459,016	5,510,608	59.81
10 - 15	.00672	91,330	614	455,152	5,051,592	55.31
15 - 20	.01096	90,716	994	451,203	4,596,440	50.67
20 - 25	.01504	89,722	1,349	445,215	4,145,237	46.20
25 - 30	.01594	88,373	1,409	438,804	3,700,022	41.87
30 - 35	.01811	86,964	1,575	431,152	3,261,218	37.50
35 - 40	.02452	85,389	2,094	422,092	2,820,066	33.14
40 - 45	.03617	83,295	3,013	409,486	2,407,974	28.91
45 - 50	.05204	80,282	4,178	391,675	1,998,488	24.89
50 - 55	.07997	76,104	6,086	366,229	1,606,813	21.11
55 - 60	.11243	70,018	7,872	331,481	1,240,584	17.72
60 - 65	.14664	62,146	9,113	289,054	909,103	14.63
65 - 70	.21802	53,033	11,562	237,247	620,049	11.69
70 - 75	.30172	41,471	12,513	176,578	382,802	9.23
75 - 80	.40742	28.958	11,798	11,985	206,224	7.12
80 - 85	.55264	17.160	9,483	60,785	91,239	5.32
85 - 90	.69984	7,677	5,373	23,391	30,454	3.97
90 - 95	.80555	2,304	1,856	6,040	7,063	3.07
95 - 100	.89882	448	403	956	1,023	2,28
Sobre 100	1.00000	45	45	67	67	1.49

* Para el método de cálculo, véase el texto.

CUADRO 3. COMPARACION DE LAS FUNCIONES DE UNA TABLA COMPLETA Y DE UNA ABREVIADA DE MORTALIDAD PARA HOMBRES BLANCOS EN CONNECTICUT, 1929-31

Intervalo de edad x a x + n	1,000 nqx		Porcentaje de diferencia en nqx $100\frac{col.3-col.2}{col.2}$	lx		e_x^o	
	Tabla completa	Tabla abreviada		Tabla completa	Tabla abreviada	Tabla completa	Tabla abreviada
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0 - 1	62,07	62.07	0.00	100,000	100,000	59.77	59.77
1 - 2	7.54	7.54	0.00	93,793	93,793	62.70	62.71
2 - 5	9.99	10.14	+ 1.50	93,086	93,086	62.17	62.18
5 - 10	8.52	8.81	+ 3.40	92,156	92,142	59.78	59.81
10 - 15	6.83	6.72	- 1.61	91,371	91,330	55.28	55.31
15 - 20	10.79	10.96	+ 1.58	90.747	90.716	50.64	50.67
20 - 25	14.65	15.04	+ 2.66	89,768	89.722	46.15	46.20
25 - 30	15.95	15.94	- 0.06	88,453	88,373	41.81	41.87
30 - 35	18.21	18.11	- 0.55	87,042	86,964	37.45	37.50
35 - 40	24.63	24.52	- 0.45	85.457	85,389	33.09	33.14
40 - 45	35.87	36.17	+ 0.84	83.352	83.295	28.86	28.91
45 - 50	53.01	52.04	- 1.83	80.362	80.282	24.84	24.89
50 - 55	79.83	79.97	+ 0.18	76,102	76,104	21.08	21.11
55 - 60	111.03	112.43	+ 1.26	70,027	70,018	17.68	17.72
60 - 65	149.79	146.64	- 2.10	62,252	62,146	14.57	14.63
65 - 70	216.34	218.02	+ 0.78	52.927	53,033	11.68	11.69
70 - 75	301.40	301.72	+ 0.11	41,477	41,471	9.20	9.23
75 - 80	409.55	407.42	- 0.52	28,976	28.958	7.08	7.12
80 - 85	551.52	552.64	+ 0.20	17.109	17.160	5.30	5.32
85 - 90	695.96	699.84	+ 0.62	7,673	7,677	3.92	3.97
90 - 95	822.35	805.55	- 2.04	2.336	2.304	2.88	3.07
95 - 100	939.76*	898.82	- 4.36	415	448	1.98	2.28
100 y más	1.000.00	1.000.00	0.00	25	45	1.20	1.49

* Este valor fué erróneamente dado como 879.51 por Reed y Merrell (3, p. 699).