
estudios estadísticos y prospectivos

Elementos teóricos del ajuste estacional de series económicas utilizando X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS

Francisco G. Villarreal



NACIONES UNIDAS



División de Estadística y Proyecciones
Económicas

Santiago de Chile, diciembre del 2005

Las opiniones expresadas en este documento, que no ha sido sometido a revisión editorial, son de exclusiva responsabilidad del autor y pueden no coincidir con las de la Organización.

Publicación de las Naciones Unidas
ISSN impreso 1680-8770
ISSN electrónico 1680-8789

ISBN: 92-1-322840-6
LC/L.2457-P

Nº de venta: S.05.II.G.203

Copyright © Naciones Unidas, diciembre del 2005. Todos los derechos reservados
Impreso en Naciones Unidas, Santiago de Chile

La autorización para reproducir total o parcialmente esta obra debe solicitarse al Secretario de la Junta de Publicaciones, Sede de las Naciones Unidas, Nueva York, N.Y. 10017, Estados Unidos. Los Estados miembros y sus instituciones gubernamentales pueden reproducir esta obra sin autorización previa. Sólo se les solicita que mencionen la fuente e informen a las Naciones Unidas de tal reproducción.

Índice

Resumen	5
1. Introducción	7
2. El ajuste estacional	9
2.1 Enfoques utilizados en el ajuste estacional.....	9
2.2 Pasos necesarios para realizar el ajuste estacional	10
3. Ajuste previo y proyección utilizando modelos de regresión con residuales ARIMA	13
3.1 Metodología de ajuste previo	14
3.2 Selección de método de transformación	14
3.3 Identificación de variables de regresión	15
3.4 Identificación del modelo ARIMA.....	17
3.5 Estimación	19
3.6 Proyecciones.....	20
4. Métodos de ajuste estacional	21
4.1 X-11	24
4.2 SEATS	32
5. Comparaciones de X-12-ARIMA y TRAMO- SEATS	45
Bibliografía	49
Anexo	53
A.1 Operadores de series de tiempo	55
A.2 Procesos estocásticos y estacionaridad.....	55
A.3 Procesos ARIMA.....	57
A.4 Análisis en el dominio del tiempo	63
A.5 Análisis en el dominio de la frecuencia.....	65
A.6 Filtros lineales	67
6. Serie Estudios estadísticos y prospectivos: números publicados	75

Índice de figuras

Figura 1	Proceso de ajuste estacional.....	11
Figura 2	Categorías de valores atípicos	16
Figura 3	Espectro de una serie de tiempo observada trimestralmente	23
Figura 4	Ganancia de la media móvil 2x4	26
Figura 5	Ganancia de la media móvil 3x3	27
Figura 6	Ganancia del filtro de Henderson de 7 términos.....	28
Figura 7	Ganancia de la media móvil 3x5	29
Figura 8	Ganancia de una media móvil 3x3 y una media móvil 3x5	30
Figura 9	Función de ganancia de los filtros estacionales para series trimestrales en X-11.....	31
Figura 10	Descomposición canónica	37
Figura 11	Función de ganancia del filtro WK.....	40
Figura 12	Efecto de la aplicación de un filtro lineal	69
Figura 13	Espectro de la función de ganancia del filtro lineal.....	70

Índice de recuadros

Recuadro 1	Factorización de polinomios AR	35
Recuadro 2	Problemas de factorización de polinomios MA.....	36
Recuadro 3	Descomposición canónica	37
Recuadro 4	Teorema de descomposición de Wold	57

Resumen

Existen diversos métodos de ajuste estacional, los cuales son utilizados de manera rutinaria tanto en la producción, como en el análisis de series de tiempo económicas en Bancos Centrales, Oficinas de Estadística, así como en diversas agencias públicas y privadas.

Si bien la disponibilidad de procedimientos automáticos de ajuste facilitan el procesamiento masivo de series, su uso indiscriminado puede convertir a los diferentes métodos en “cajas negras” para los usuarios.

Con el fin de que los usuarios no expertos cuenten con las herramientas necesarias para explotar la gama de capacidades de los programas de ajuste, y que al mismo tiempo conozcan sus limitaciones; en este documento se realiza una descripción de los procedimientos utilizados.

En particular, se describen los procedimientos utilizados bajo los enfoques paramétrico y no paramétrico de descomposición de series de tiempo; tal como se implementan en los programas de ajuste estacional X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS.

El objetivo es proveer una introducción a las herramientas y conceptos utilizados, por lo tanto en la discusión se enfatiza la intuición detrás de los diferentes procedimientos, los cuales se detallan de manera informal.

1. Introducción

El análisis de series de tiempo tiene dos objetivos básicos: El primero es contar con una descripción sistemática de las características fundamentales de las series observadas. El segundo objetivo es obtener información acerca de los probables valores futuros de la serie de tiempo, a partir de la caracterización de las propiedades de la serie.

Con respecto al primer objetivo, una serie de tiempo puede ser caracterizada por los siguientes componentes:

- Tendencia de largo plazo.
- Variación cíclica.
- Variación estacional.
- Variación residual.

La noción de descomponer una serie observada en varios componentes (no observados) data por lo menos de los esfuerzos realizados en el siglo XVII, para determinar la posición de un planeta.¹ En el contexto del análisis económico, ya en 1919 en el número inaugural del *Review of Economic Studies*; Persons, propone la descomposición de series de tiempo en estos cuatro componentes.

Esta descomposición, permite realizar un mejor análisis de los fenómenos económicos, al dotar al analista con una herramienta para aislar las diferentes causas de variación de una serie. Por ejemplo, una descomposición de este tipo permite evaluar el estado de una economía, reconociendo tanto los efectos estacionales como el punto en el ciclo en donde se encuentra en un momento determinado.

¹ Para una visión histórica del ajuste estacional, ver el capítulo 1 de Ladiray y Quenneville (2001)

En este documento se realiza una descripción de los métodos cuantitativos utilizados en este tipo de descomposición. El objetivo es proveer una introducción teórica a las herramientas y conceptos utilizados en los paquetes de cómputo de ajuste estacional.

Por ello, en la exposición se enfatiza el desarrollo de la intuición detrás de la aplicación de las herramientas; detallando de manera informal los algoritmos y procedimientos específicos en aquellos casos en los que estos ilustran claramente su aplicación. En el anexo se proveen detalles, de naturaleza más técnica, de algunos de los conceptos y herramientas utilizados.

El análisis está enfocado a los procedimientos utilizados en los programas de ajuste estacional X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS:

X-12-ARIMA (Findley, et. al. 1998), fue desarrollado por la oficina del censo de los Estados Unidos.(U.S. Census Bureau 2000) a partir de los programas de ajuste estacional Census X-11 (Shishkin, et. al. 1967) de la oficina del censo de los Estados Unidos, y X-11-ARIMA (Dagum 1980, 1988) de la oficina de estadística de Canadá. El programa cuenta con dos módulos: el módulo RegARIMA, el cual se encarga de realizar el ajuste previo a la serie, y el módulo X-11 que se encarga de realizar el ajuste estacional propiamente.²

TRAMO y SEATS son en realidad dos programas: El programa TRAMO,³ que realiza los ajustes previos para poder llevar a cabo el ajuste estacional, el cual está basado en el trabajo de Gómez y Maravall (1994). Y el programa SEATS,⁴ que realiza el proceso de ajuste estacional, el cual esta basado en el trabajo de Burman (1980) y Hillmer y Tiao (1982). Ambos programas fueron desarrollados por Agustín Maravall y Víctor Gómez del Banco de España (Gómez y Maravall 1997).

El resto del documento esta ordenado como sigue:

En la sección 2 se realiza una breve introducción a los enfoques metodológicos utilizados en el ajuste estacional, así como a las etapas que de manera general constituyen a ambos procesos de ajuste. Posteriormente, en la sección 3, se describe a detalle el procedimiento utilizado por RegARIMA y TRAMO para preparar la serie de tiempo original para el ajuste estacional. La sección 4 detalla la metodología utilizada por el módulo X-11, y el programa SEATS en la descomposición de la serie de tiempo. La sección 5 concluye examinando los resultados de algunos trabajos comparativos entre X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS.

² El módulo de ajuste estacional se conoce como X-11 ya que esta basado en la mecánica utilizada en el programa Census X-11.

³ Time Series Regression with Arima noise, Missing observations and Outliers.

⁴ Signal Extraction in Arima Time Series.

2. El ajuste estacional

2.1 Enfoques utilizados en el ajuste estacional

Actualmente, existe una gran variedad de métodos disponibles para realizar el ajuste estacional de series económicas.⁵ No obstante lo anterior, se pueden distinguir dos tendencias en el enfoque utilizado para realizar dicho ajuste: el enfoque no paramétrico (ó empírico), y el enfoque paramétrico (ó basado en modelos).

El enfoque no paramétrico, permite estimar los componentes no observados de una serie de tiempo sin recurrir a la especificación de un modelo estadístico para la serie de tiempo analizada. Por ello, este tipo de procedimiento también se conoce como enfoque empírico.

Usualmente bajo este enfoque, los componentes se estiman mediante la aplicación sucesiva de filtros lineales,⁶ los cuales pueden ser interpretados como regresiones locales en intervalos móviles en el tiempo.

En todo caso, aunque no se considera explícitamente un modelo estadístico; para todos los procedimientos empíricos es posible encontrar un modelo estadístico óptimo que aproxima los resultados del procedimiento.⁷ Por ello, a este enfoque también se le conoce como de modelos implícitos.

⁵ Para una discusión más amplia de los métodos existentes, ver Fischer (1995) ó Ladiray y Quenneville (2001).

⁶ Para una introducción breve de los filtros lineales y algunas de sus propiedades ver la sección A.6 en el Anexo.

⁷ Para una aproximación del filtro utilizado en el módulo X-11, ver Depoutot y Planas (1998).

La metodología de ajuste estacional utilizada en el programa X-12-ARIMA es el ejemplo más utilizado de este tipo de enfoque.

Por su parte, en el enfoque paramétrico se parte de la especificación explícita de un modelo estadístico para la serie de tiempo observada o bien para los componentes.

En algunas aplicaciones se supone la existencia de un modelo determinístico; mientras que en otras se supone que los modelos que describen el comportamiento de la serie y sus componentes son modelos estocásticos.⁸ Una vez que los modelos han sido identificados, la estimación de los componentes se realiza utilizando estimadores óptimos dadas las restricciones impuestas por el modelo.

SEATS es la aplicación más reciente de este enfoque, también conocido como basado en modelos.

Ambos enfoques tienen ventajas y desventajas, tanto desde el punto de vista teórico como desde el empírico. Para entender mejor las ventajas y desventajas de los diferentes métodos, conviene conocer los procedimientos que están siendo comparados. Por ello, la discusión de las comparaciones entre X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS se posterga hasta la sección 5 .

Antes de entrar de lleno a la descripción de los métodos utilizados por X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS, en la siguiente sección se describen los pasos que conforman de manera típica el proceso de ajuste estacional.

2.2 Pasos necesarios para realizar el ajuste estacional

El proceso de ajuste estacional se puede describir de manera general en seis pasos⁹ (ver figura 1), los cuales son comunes a ambas aplicaciones:

1. Antes de comenzar cualquier tipo de ajuste, el usuario debe familiarizarse con las series de tiempo que se pretenden ajustar. El objetivo es contar con los elementos necesarios para seleccionar los parámetros de ajuste más adecuados para que la serie ajustada refleje las características pertinentes de la serie original.
2. Como se describe en la sección 3, antes de descomponer la serie de tiempo, es necesario realizar un ajuste previo que tiene dos objetivos:
 - (a) Evitar que el proceso de descomposición se vea afectado por la presencia de no linealidades en la serie.
 - (b) Mejorar la estabilidad de los componentes estimados ante la incorporación de nuevas observaciones de la serie de tiempo.
3. Antes de utilizar la serie preajustada,¹⁰ es necesario determinar si tanto los ajustes previos como el modelo utilizado son los apropiados. Para lo cual, es necesario realizar una serie de diagnósticos para evaluar la bondad del ajuste.¹¹ Cuando los diagnósticos indican algún problema es necesario volver a la etapa de preajuste y realizar los cambios necesarios para asegurar que los diagnósticos sean satisfactorios.

Figura 1

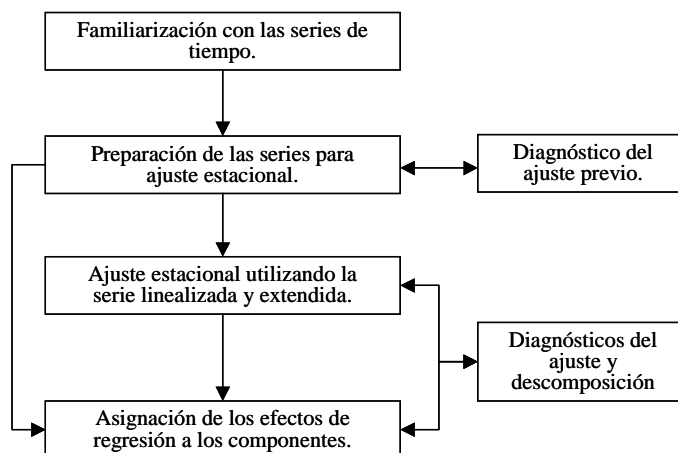
⁸ Para una discusión más detallada de la diferencia entre modelos determinísticos y modelos estocásticos ver la sección 2.1 en Kaiser y Maravall (2000), ó bien la sección 1.2 en Planas (1997b).

⁹ Banco Central Europeo (2000).

¹⁰ También se le conoce como serie linealizada.

¹¹ La modelación se realiza siguiendo el proceso propuesto por Box y Jenkins. Para una breve discusión ver la sección A.3 del anexo.

PROCESO DE AJUSTE ESTACIONAL



4. Una vez que se cuenta con una serie que puede ser sometida a un proceso de ajuste estacional, dependiendo de la aplicación, se utilizan diversas herramientas para descomponer la serie en sus componentes básicos; las cuales se detallan en la sección 4 .
5. En la siguiente etapa se reincorporan los diferentes efectos identificados en la etapa 2. Dependiendo de las características de la serie, estos efectos se asignan a los diferentes componentes. Por ejemplo en la mayoría de los casos los desplazamientos de nivel son asignados al componente tendencia-ciclo, mientras que los efectos de calendario son asignados al componente estacional.¹²
6. Antes de finalizar el proceso, se realiza otra serie de diagnósticos para evaluar la descomposición y asignación de efectos, realizadas respectivamente en las etapas 4 y 5. Como en el caso del preajuste en aquellos casos en los que los diagnósticos evidencian algún problema es necesario volver a la etapa pertinente y determinar que modificaciones son necesarias para mejorar los diagnósticos.

Con este mapa del procedimiento general de ajuste estacional en mente, en la siguiente sección se detalla el procedimiento que utilizan el módulo RegARIMA, y el programa TRAMO para realizar el ajuste previo y los diagnósticos correspondientes. Posteriormente en la sección 4 se detalla los procedimientos de ajuste estacional utilizados por el módulo X-11, y el programa SEATS.

¹² Ambos tipos de efectos se discuten con más detalle en la sección 3.3.

3 Ajuste previo y proyección utilizando modelos de regresión con residuales ARIMA.

Como se detalla en la sección 4, tanto X-12-ARIMA como TRAMO-SEATS, utilizan filtros lineales para descomponer la serie de tiempo. Por ello, antes de realizar el ajuste estacional es necesario realizar un ajuste previo de manera que la serie *preajustada* pueda ser interpretada como la realización de un proceso estocástico lineal.¹³ Para este fin, en el ajuste previo se identifica y se corrige el efecto de observaciones faltantes, observaciones atípicas y efectos de calendario.

Adicionalmente, como se detalla en la sección A.6 en el anexo; cuando un filtro lineal no es simétrico,¹⁴ la serie filtrada sufre desplazamientos de fase, lo cual implica que los puntos en el tiempo en que ocurren los cambios de tendencia de la serie filtrada no corresponderán a los de la serie original.

Para solucionar este problema sin tener que recurrir a la utilización de filtros asimétricos, se reemplazan los valores todavía no observados de la serie con las proyecciones obtenidas de un modelo ARIMA. Este procedimiento, propuesto por Estela Dagum (1975) de Statistics Canada, minimiza las revisiones realizadas a los componentes conforme se van observando más puntos de la serie de tiempo.

Aunque ambas aplicaciones difieren en la manera de implementar estos ajustes, conceptualmente la metodología es idéntica. A continuación se describe de manera general el

¹³ Para una breve introducción a los procesos estocásticos, ver la sección A.2 del anexo.

¹⁴ Es decir cuando no se pueden utilizar el mismo número de observaciones hacia ambos lados de un dato central, como ocurre hacia los extremos de una serie de tiempo finita.

proceso de ajuste previo; posteriormente se detallan algunas de las diferencias entre RegARIMA y TRAMO.

3.1 Metodología de ajuste previo

A partir de la serie de tiempo observada:

$$Y = (Y_0, \dots, Y_t, \dots, Y_T)$$

donde $0 < \dots < t < \dots < T$, se supone que la serie obedece un proceso del tipo:

$$Y_t = X_t' \beta + Z_t \quad (1)$$

donde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$ es un vector de coeficientes de regresión, $X = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector de n regresores determinísticos, y Z_t es una variable estocástica que obedece un proceso ARIMA.^{15 16}

$$\phi(L)\delta(L)Z_t = \theta(L)\varepsilon_{zt} \quad (2)$$

donde L es el operador de rezago,¹⁷ $\phi(L)$, $\delta(L)$ y $\theta(L)$ son polinomios finitos en L , y ε_{zt} es una variable estocástica que se supone proviene de una distribución normal con media 0, y varianza σ_z^2 .

El polinomio $\delta(L)$ esta asociado al orden de integración del proceso, el polinomio $\phi(L)$ esta asociado al proceso autorregresivo, mientras que $\theta(L)$ denota al polinomio de medias móviles. En particular se utiliza la siguiente especificación multiplicativa para los polinomios:

$$\begin{aligned} \delta(L) &= (1 - L)^d (1 - L^s)^D \\ \phi(L) &= (1 + \phi_1 L + \dots + \phi_p L^p)(1 + \Phi_1 L^s + \dots + \Phi_P L^{s \times P}) \\ \theta(L) &= (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)(1 + \Theta_1 L^s + \dots + \Theta_Q L^{s \times Q}) \end{aligned} \quad (3)$$

donde s indica el número de observaciones por año. En los tres casos los operadores con superíndice s están asociados a los factores estacionales. Este es un modelo ARIMA general de orden (p,d,q)(P,D,Q) $_s$.

Para ajustar el modelo de regresión con residuales ARIMA (Ecuaciones 1–2) se procede de la siguiente manera:

3.2 Selección de método de transformación

Como se detalla en la sección A.2 del anexo, para poder realizar inferencia acerca de series de tiempo, usualmente se supone que la serie a ser analizada es estacionaria en covarianza. Este supuesto implica, entre otras propiedades, que la serie de tiempo tiene una varianza acotada.

Por ello, antes de poder estimar un modelo de regresión con residuales ARIMA es necesario determinar si la serie de tiempo tiene, efectivamente, una varianza acotada. En particular esto significa que es necesario determinar si el modelo es aplicable al nivel de la serie o a alguna transformación de esta.

¹⁵ El modelo puede incluir una constante μ , equivalente a la media de la serie en diferencia $\delta(L)z_t$.

¹⁶ Para detalles con respecto a los procesos ARIMA y su caracterización, ver la sección A.3 del Anexo.

¹⁷ Para una breve descripción de los operadores utilizados en el análisis de series de tiempo, ver sección A.1 del anexo.

En TRAMO, las opciones disponibles son trabajar con la serie de tiempo en nivel, o trabajar con el logaritmo natural.¹⁸ En RegARIMA las opciones están dadas por la familia de transformaciones Box-Cox,¹⁹ en donde el nivel y el logaritmo de la serie son casos particulares.

En el proceso automático, RegARIMA compara los criterios de información de Akaike (AIC)²⁰ de la regresión estimada en niveles y en logaritmos, escogiendo la especificación con el criterio de información menor.

Por su parte en el proceso automático, TRAMO divide la serie original en submuestras (indizadas por i), y estima para cada submuestra i una regresión del rango sobre la media $rango_i = \zeta_0 + \zeta_1 media_i + \eta_i$. Si el coeficiente de regresión de la media ζ_1 es mayor a un valor determinado, entonces se utiliza el logaritmo de la serie.

Cuando el resultado de la regresión no es concluyente se utiliza una comparación de los criterios de información de Schwartz (SBC)²¹ del modelo estimado en niveles y en logaritmos, escogiendo la especificación cuyo criterio de información sea menor.

Con respecto a los diagnósticos de la transformación de la serie original, RegARIMA informa con respecto a la transformación utilizada y provee los criterios de información de Akaike correspondientes, con lo cual es posible comparar las diferentes transformaciones.

Por su parte TRAMO reporta los estimadores de los coeficientes ζ_0 y ζ_1 de la regresión del rango sobre la media estimada, sin embargo no se presentan ni los errores estándar ni las pruebas de t para los coeficientes. Con respecto a la transformación el programa informa de la transformación utilizada, mas no del criterio utilizado en su selección.

3.3 Identificación de variables de regresión

El siguiente paso es determinar los componentes del vector X en la ecuación (1). Estos regresores determinísticos se pueden clasificar en tres categorías:

1. **Valores atípicos.**²² Ambos programas cuentan con rutinas para identificar automáticamente los siguientes tipos de valores atípicos, los cuales se muestran gráficamente en la figura 2.

Figura 2
CATEGORÍAS DE VALORES ATÍPICOS

¹⁸ En el resto del documento cuando se menciona logaritmo, se refiere al logaritmo natural.

¹⁹ Formalmente una transformación Box-Cox esta definida como:

$$f(x_t) = (x_t^\lambda - 1)/\lambda$$

La transformación más conocida de esta familia es tomar el límite cuando λ tiende a cero, lo cual es equivalente a utilizar el logaritmo natural de la serie. Esta transformación es apropiada cuando la magnitud de las variaciones es proporcional al nivel de la serie.

²⁰ El criterio de información de Akaike esta definido como:

$$AIC = T \ln(SSE) + 2n$$

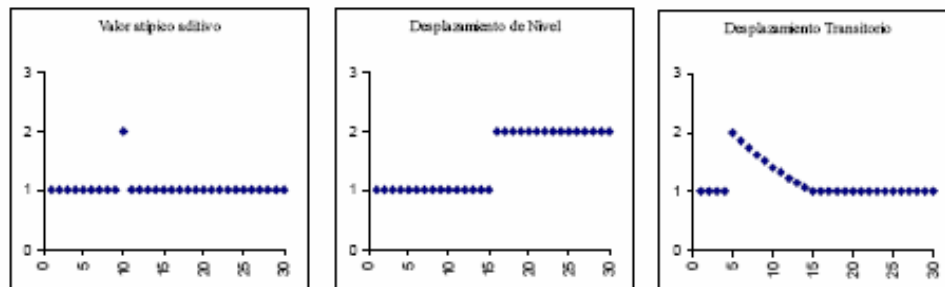
donde T es el número de observaciones utilizadas en la regresión, SSE es la suma de residuales cuadráticos de la regresión estimada, y n es el número de coeficientes estimados.

²¹ El criterio de información de Schwartz (ó Bayesiano) se define como:

$$SBC = T \ln(SSE) + n \ln(T)$$

donde T , SSE , y n están definidos como en la nota anterior.

²² Adicionalmente a los mencionados, RegARIMA permite estimar otro valor atípico denominado "Rampa Transitoria", el cual es básicamente un desplazamiento de nivel que ocurre de manera gradual. Por su parte TRAMO permite incorporar cualquier valor atípico que pueda ser descrito por combinaciones de los polinomios $1/(1 - \delta L)$ y $1/(1 - \delta L^s)$.



- (a) *Valores atípicos aditivos*. Se refiere a saltos repentinos que ocurren en una fecha particular y no afectan las observaciones subsiguientes.
 - (b) *Desplazamientos de nivel*. Se refiere a saltos repentinos que afectan permanentemente el nivel de la serie.
 - (c) *Desplazamientos transitorios*. Se refiere a saltos repentinos cuyo efecto decae en el tiempo.
2. **Efectos de calendario**. Estos efectos son producto de fechas específicas en el calendario. Ambos programas consideran el efecto de las fiestas de Pascua,²³ el efecto de los días de comercio,²⁴ el número de días en cada mes y el efecto de los años bisiestos.²⁵ Los efectos de calendario se incorporan al modelo utilizando variables mudas (dummies).
 3. **Efectos especiales**. En algunos casos es necesario intervenir una serie para recoger el efecto de eventos exógenos que no pueden ser recogidos por el modelo. Estos pueden ser cambios de base, desastres naturales, etc. Los dos programas permiten al usuario definir regresores, lo cual brinda la flexibilidad de incorporar efectos no considerados de manera estándar.

Antes de identificar los valores atípicos, la rutina automática determina si los efectos de calendario son significativos. Para ello se estima el modelo (ecuaciones 1 y 2) incorporando los efectos de calendario en el vector X , y suponiendo que el proceso ARIMA obedece al modelo de la aerolínea.²⁶ La estimación se realiza como se detalla en la sección 3.5.

Una vez que se ha determinado la significancia de los efectos de calendario, se identifica de manera preliminar el modelo ARIMA a ser utilizado tal como se describe en la sección 3.4. Posteriormente se inicia la identificación automática de valores atípicos. La rutina utilizada²⁷ es un proceso iterativo similar al utilizado en las regresiones paso a paso (stepwise) para encontrar la mejor especificación de un modelo de regresión:

1. *Adición hacia adelante*. Utilizando los residuales de la regresión estimada; se calculan para cada observación, estadísticos t para las diferentes categorías de valores atípicos.

²³ Donde la duración del efecto puede ser definida por el usuario.

²⁴ Existen dos especificaciones disponibles: una en donde se consideran sólo días hábiles e inhábiles; y otra en donde cada día de la semana puede tener un efecto diferente.

²⁵ Adicionalmente RegARIMA considera el efecto de los días de operación para series financieras, así como algunos feriados móviles de los Estados Unidos.

²⁶ El modelo de la aerolínea, está dado por:

$$(1 - L)(1 - L^s)Z_t = (1 + \theta L)(1 + \Theta L^s)\varepsilon_t^z$$

El modelo fue propuesto por Box y Jenkins (1984) para modelar las ventas mensuales de pasajes en avión. Sin embargo, se ha encontrado que el modelo es conveniente para describir un gran número de series de tiempo económicas.

²⁷ La rutina automática está basada en el trabajo de Tsay (1986), en donde se identifican los valores atípicos de manera individual; y en el trabajo de Chen y Liu (1993) donde se extiende la metodología para identificar valores atípicos espurios.

Para aquellos coeficientes cuyo estadístico t en valor absoluto sea mayor a cierto valor crítico ξ , se selecciona el de mayor valor absoluto. En caso de que no se haya identificado ningún valor atípico el algoritmo termina y se procede a la realización de diagnósticos descrita en la sección 3.5.

2. *Eliminación hacia atrás.* Cuando en la etapa anterior se identifica algún valor atípico, este se incorpora en el vector X de la ecuación (1) y se estiman los coeficientes del modelo modificado. Utilizando los residuales de la nueva regresión se evalúan los estadísticos t de los valores atípicos. Si existen coeficientes cuyo estadístico t en valor absoluto sea menor al valor crítico ξ , se selecciona el coeficiente con menor significancia, se elimina del vector X y se reestima el modelo. Posteriormente se repite el paso 1 y se itera hasta que no se puede identificar ningún nuevo valor atípico, o no se puede eliminar ninguno de los valores atípicos ya considerados.

RegARIMA cuenta con un proceso adicional de identificación de valores atípicos a través del análisis del componente irregular obtenido una vez que se aplican el filtro de ajuste estacional. Los detalles de este proceso se pueden consultar en Findley, et. al. (1998), en Ladiray y Quenneville (2001), ó de manera más breve en Banco Central Europeo (2000).

En ambos programas se obtiene un reporte completo de los coeficientes de los efectos de calendario y de los valores atípicos, incluyendo errores estándar, estadísticos t ; y en el caso de los valores atípicos las categorías y fechas de ocurrencia.

3.4 Identificación del modelo ARIMA

En este contexto, la identificación es en el sentido de la mecánica de modelación propuesta por Box y Jenkins: Para el modelo de los residuales Z_t (ecuación 2); se determinan tanto el orden de integración, como los ordenes de los polinomios autorregresivos y de medias móviles. Es decir, se determinan los polinomios $\delta(L)$, $\phi(L)$ y $\theta(L)$ del modelo ARIMA (ecuación 3)

En ambos programas el usuario puede definir el modelo ARIMA a ser utilizado, siempre y cuando se respeten las siguientes restricciones con respecto al orden del modelo:²⁸

	RegARIMA	TRAMO
Variables Autorregresivas	$p + P \leq 24$	$p \leq 3, P \leq 1$
Medias Móviles	$q + Q \leq 24$	$q \leq 3, Q \leq 1$
Diferencias	$d + D \leq 24$	$d \leq 2, D \leq 1$

²⁸ Para el caso de RegARIMA se debe observar la restricción: $(p + P) + (q + Q) + (d + D) < 25$

3.4.1 Rutina semiautomática en RegARIMA

La rutina de identificación semiautomática de RegARIMA estima cinco modelos predeterminados.²⁹ La aplicación considera aceptable todos los modelos cuyos estadísticos de error medio de proyección absoluto³⁰ y de Box-Ljung³¹ sean menores a ciertos límites pre-establecidos.³²

De entre los modelos candidatos, se escoge el que presenta menores estadísticos. Para aquellos casos en que ninguno de los modelos de la rutina automática sea aceptable, el programa ofrece la opción de calcular una serie de diagnósticos, descritos más adelante, para que el usuario determine el modelo más adecuado.

Cuando se utiliza la rutina semiautomática de RegARIMA, el programa reporta la estructura de los modelos considerados, así como los estadísticos de error de predicción fuera de la muestra en promedio porcentual. Adicionalmente cuando son significativos se presentan los estadísticos de Box-Pierce.

3.4.2 Rutina Automática en TRAMO

En TRAMO, la rutina de selección automática de modelo consta de dos pasos:

1. Se identifica el orden de integración de la serie observada, es decir se determina el polinomio $\delta(L)$ de la ecuación (3).

Como se describe en la sección A.3 del anexo la estabilidad de un modelo ARMA depende de las características del polinomio autorregresivo. Por ello, para identificar el orden de integración se ajustan sucesivamente modelos AR y ARMA a la serie para determinar el número de raíces unitarias en el polinomio autorregresivo.

En el proceso se identifican tanto las raíces regulares como las estacionales hasta un orden de integración máximo de dos diferencias regulares y una estacional, es decir $\delta(L) = (1 - L)^2(1 - L^s) = \Delta^2\Delta_s$ en la ecuación (3).

En el procedimiento³³ se explota el hecho que los coeficientes asociados a raíces unitarias tienen una propiedad conocida como superconsistencia; lo cual significa que para muestras suficientemente grandes, los coeficientes convergen “rápidamente” a su valor verdadero.

2. Una vez que el orden de integración ha sido identificado, se utiliza la transformación estacionaria $\delta(L)Z_t$ para determinar el orden de los polinomios del modelo ARMA, es decir se determinan los ordenes de los polinomios $\phi(L)$ y $\theta(L)$ en la ecuación (3).

²⁹ Las alternativas son modelos ARIMA de orden no estacional (0,1,1), (0,1,2), (2,1,0), (0,2,2) y (2,1,2) y orden estacional (0,1,1)_s en todos los casos. El usuario puede definir un conjunto alternativo de modelos.

³⁰ Ver la sección A.3 en el anexo.

³¹ El estadístico de Box-Ljung esta dado por:

$$Q = n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\rho_j^2}{n-j}$$

donde n es el número de observaciones utilizadas, ρ_j es la j -ésima autocorrelación y j es el número de autocorrelaciones utilizadas.

³² Se puede demostrar que el estadístico Q converge a una distribución Chi-cuadrado con j grados de libertad, i. e. $Q \rightarrow \chi_j^2$. El error medio de proyección absoluto es una medida de la “certeza” del modelo escogido para realizar proyecciones; mientras que el estadístico de Box-Ljung mide la “aleatoriedad” de los residuales del modelo ARIMA (ecuación 2)

³³ El procedimiento esta basado en el trabajo de Tiao y Tsay (1983), y Tsay (1984); y se describe detalladamente en Gómez y Maravall (2001a).

La idea básica detrás del procedimiento utilizado en la determinación de los ordenes del modelo ARMA, es buscar el modelo ARMA cuya función de autocovarianza teórica se ajuste mejor a la función de autocovarianza de la serie de tiempo observada.³⁴

El algoritmo utilizado³⁵ evalúa los modelos candidatos de acuerdo al criterio de información de Schwartz, favoreciendo el uso de modelos balanceados³⁶ de orden relativamente bajo. El orden máximo de los polinomios ARMA regulares es 3, i. e. $(p, q) \leq 3$; mientras que para los polinomios ARMA estacionales el orden máximo es 2, i. e. $(P, Q) \leq 2$.

Con respecto a los diagnósticos de la rutina automática, TRAMO reporta la estructura del modelo y sus criterios de información, sin embargo esta información solo se reporta para el caso del modelo que fue seleccionado.

3.5 Estimación

La estimación de los coeficientes del modelo (ecuaciones 1 y 2) se lleva a cabo utilizando el siguiente proceso iterativo:

Condicionales en el vector de coeficientes β en la ecuación (1) se estiman los coeficientes del modelo ARIMA (ecuación 2), maximizando la función de verosimilitud.³⁷ Posteriormente, condicionales en los parámetros del modelo ARIMA recién estimados; se obtienen estimadores de los coeficientes en β utilizando mínimos cuadrados generalizados.

Se continúa iterando hasta que las diferencias de los coeficientes estimados entre un paso y el siguiente son menores a cierto nivel pre-establecido. En la práctica, ambos pasos se implementan utilizando el filtro de Kalman; el cual es un algoritmo que permite estimar mínimos cuadrados generalizados de manera iterativa.³⁸

Con respecto a los diagnósticos de los coeficientes del modelo, adicionalmente a la información de los regresores determinísticos mencionada anteriormente, ambos programas reportan el valor de los coeficientes estimados para el modelo ARIMA con errores estándar. Así mismo se presenta información con respecto a las raíces complejas de los polinomios del modelo ARIMA seleccionado.

RegARIMA presenta adicionalmente una serie de criterios de información relacionados con la función de verosimilitud del modelo seleccionado.

Adicionalmente, ambos programas realizan una serie de diagnósticos sobre los residuales de la regresión para determinar si el modelo ARIMA utilizado describe apropiadamente las características de la serie de tiempo.

Asimismo, las dos aplicaciones presentan estadísticos descriptivos de los residuales y realizan diagnósticos de normalidad, sesgo y kurtosis de la distribución de los residuales. RegARIMA presenta adicionalmente el histograma de los residuales.

Finalmente, con respecto a los diagnósticos de correlación serial, ambos programas calculan autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales con sus respectivos errores estándar, y realizan el diagnóstico de Box-Ljung. Así mismo los programas calculan la autocorrelación y realizan el

³⁴ Para más detalles de las propiedades de la función de autocovarianza ver la sección A.4 en el anexo.

³⁵ El algoritmo está basado en el método de identificación de Hannan y Rissanen (1982), el cual se explica brevemente en la sección A.3 del anexo.

³⁶ Los modelos balanceados son modelos cuyos órdenes p y q son de magnitud similar.

³⁷ Es decir se estima la función de verosimilitud concentrada, para más detalles ver la sección A.3.1 en el anexo.

³⁸ El algoritmo del filtro de Kalman se describe brevemente en la sección A.6 del anexo. Para una discusión detallada, ver Harvey (1989) ó Hamilton (1994). Para detalles de su utilización en la estimación de los parámetros del modelo (1-2), ver Gómez y Maravall (1994).

diagnóstico de Box-Ljung para el caso de los residuales cuadráticos. TRAMO realiza una evaluación no paramétrica de correlación serial utilizando un diagnóstico de corridas en los residuales.

3.6 Proyecciones

Como se mencionó anteriormente, para mejorar la estabilidad de los estimadores de los componentes de la serie de tiempo, se extiende la serie de tiempo observada con proyecciones. Ambos programas calculan tanto las proyecciones, como los errores estándar y los intervalos de confianza asociados a cada observación proyectada.

Las proyecciones se realizan utilizando el filtro de Kalman; el cual garantiza que las proyecciones obtenidas sean de error cuadrático de proyección mínimo, bajo los siguientes supuestos:

- El modelo identificado es el correcto, lo cual significa que tanto las variables de regresión incorporadas en el vector X de la ecuación (1) como el modelo ARIMA de la ecuación (2) son los correctos.
- Los coeficientes estimados son consistentes, es decir que los coeficientes estimados son igual a los verdaderos coeficientes.
- Durante el periodo proyectado no se observan ni desplazamientos de nivel, ni valores atípicos aditivos.

Cabe mencionar que si la serie original fue transformada, las proyecciones primero se obtienen en la escala transformada y después se transforman al nivel original. Dado que las transformaciones consideradas son no-lineales, las proyecciones obtenidas de esta manera son de error medio de proyección cuadrático mínimo para la transformación, pero en general no lo son para la serie original.

Ambos programas reportan los errores de los pronósticos fuera de la muestra del modelo seleccionado. Adicionalmente, RegARIMA puede presentar los errores de los pronósticos obtenidos con los modelos alternativos.

4 Métodos de ajuste estacional

Como se mencionó en la introducción la caracterización de una serie de tiempo considera varios componentes no observados. En la práctica estos componentes son un componente combinado de tendencia-ciclo, un componente estacional que captura los movimientos periódicos de frecuencia menor a un año, y un componente irregular que captura el movimiento errático de la serie.

En esta sección se describen los métodos utilizados por X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS para identificar y estimar cada uno de estos componentes. Para ello, en la sección se supone que la serie de tiempo analizada es una serie trimestral que ha sido sujeta al proceso de ajuste previo descrito en la sección 2.2, es decir los procesos descritos en esta sección son aplicados a la serie de tiempo linealizada Z_t , de la ecuación (1).

Ambas aplicaciones consideran dos formas funcionales para la descomposición de la serie Z_t , una forma funcional aditiva. La cual resulta bastante útil para exponer los conceptos, pero es utilizada rara vez en la práctica:³⁹

$$Z_t = T_t + S_t + I_t \quad (4)$$

en donde T_t denota el componente de tendencia-ciclo, S_t denota al componente estacional e I_t denota el componente irregular.

³⁹ Esta forma se suele utilizar cuando se trabaja con series estacionarias, o bien con series que presentan valores negativos.

Adicionalmente se considera una forma funcional multiplicativa:

$$Z_t = T_t S_t I_t$$

la cual es apropiada cuando las oscilaciones de la serie son proporcionales a su nivel. Ya que esta es una característica común en las series de tiempo económicas, esta es la forma funcional que las aplicaciones utilizan de manera habitual.

Adicionalmente el módulo X-11 dispone de otras formas funcionales para atender características específicas de algunas series económicas:⁴⁰

- Descomposición log-aditiva:

$$Z_t = \exp(T_t + S_t + I_t) \iff \ln(Z_t) = T_t + S_t + I_t$$

esta descomposición se utiliza principalmente con fines de investigación, ya que es necesario realizar algunos ajustes tanto en el estimador de tendencia, como en la manera en la que se identifican algunos valores atípicos.

- Descomposición pseudo-aditiva:

$$Z_t = T_t(S_t + I_t - 1)$$

esta descomposición fue desarrollada por la oficina de estadística del Reino Unido, y es utilizada para realizar el ajuste estacional de series que periódicamente registran valores cercanos a cero; como puede ocurrir por ejemplo, en el caso de la producción agrícola de algunos productos disponibles sólo una parte del año.

Para exponer la mecánica de descomposición, en el resto de la sección se considera sólo el caso de la forma funcional aditiva (4). Como se discute en la sección A.5 del anexo en algunos contextos, como este, resulta conveniente analizar las propiedades de una serie de tiempo en el dominio de la frecuencia.⁴¹ Por ello, antes de detallar los procedimientos utilizados en cada programa, a continuación se utiliza el análisis espectral para ilustrar el objetivo básico de los filtros de ajuste estacional.

En la figura 3 se presenta el espectro⁴² que típicamente se observa en una serie de tiempo macroeconómica con observaciones trimestrales. La manera más conveniente de interpretar el espectro es como una medida de la variabilidad de una serie de tiempo en diferentes frecuencias. Esta interpretación permite asociar los picos de la gráfica, conocidos como picos espectrales, a componentes con diferentes frecuencias.

En la gráfica se explota la simetría de la función del espectro alrededor de cero, y el hecho que las funciones trigonométricas completan un ciclo con frecuencia 2π ; para restringir las frecuencias analizadas al rango $[0, \pi]$.⁴³

Figura 3

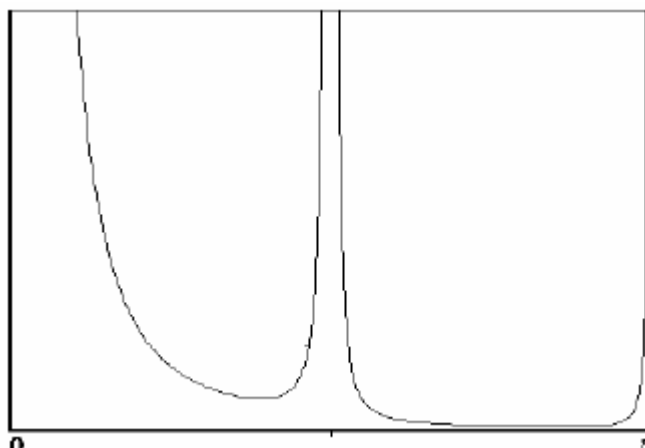
⁴⁰ Para mas detalles, ver Findley et. al. (1988).

⁴¹ Conocido también como análisis espectral.

⁴² Formalmente se trata del pseudo-espectro ya que presenta picos infinitos.

⁴³ Para más detalles ver la sección A.5 en el anexo.

ESPECTRO DE UNA SERIE DE TIEMPO OBSERVADA TRIMESTRALMENTE



Los movimientos con frecuencia cercana a π son movimientos periódicos que se observan a la mayor frecuencia posible, es decir cada dos trimestres.⁴⁴ Conforme la frecuencia tiende a cero, los picos se asocian a movimientos con periodos cada vez más largos. Por ejemplo, en la gráfica 3 se observan picos espectrales alrededor de las frecuencias $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ y $\omega = \pi$. El pico espectral alrededor de la frecuencia $\omega = 0$ captura el comportamiento de un componente que presenta oscilaciones de muy largo plazo, por ello los picos espectrales alrededor de esta frecuencia están asociados al componente tendencia-ciclo.

Por su parte los picos espectrales alrededor de las frecuencias $\omega = \frac{\pi}{2}$ y $\omega = \pi$ capturan el comportamiento de componentes que se observan anual y semestralmente, por lo que los picos espectrales alrededor de estas frecuencias se asocian al componente estacional. Finalmente se puede observar que el espectro de la serie de tiempo entre las frecuencias mencionadas es menor, mas no llega a ser cero. Este fenómeno esta asociado a la existencia de un componente irregular, al cual usualmente se le asocia un espectro constante.

Cabe destacar que en la medida que los diferentes componentes son más estables los picos espectrales se hacen más angostos.

El objetivo de los métodos de ajuste estacional es transformar la serie de tiempo de manera que la serie transformada no presente picos espectrales en las frecuencias estacionales. Para ello ambas aplicaciones utilizan diferentes combinaciones de filtros lineales.

Como se detalla en la sección A.5, el espectro de la función de ganancia de un filtro provee una herramienta útil para determinar que parte de la variación original es eliminada por el filtro. Por ejemplo, si la función de ganancia de un filtro es igual a cero entre las frecuencias ω_1 y ω_2 , e igual a 1 entre las frecuencias ω_3 y ω_4 (donde $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 \in [0, \pi]$) esto significa que el filtro elimina toda la variación en el rango $[\omega_1, \omega_2]$ mientras que mantiene intacta la serie en el rango $[\omega_3, \omega_4]$.

Con esto en mente; los programas de ajuste estacional buscan utilizar filtros cuya función de ganancia sea igual a cero alrededor de las frecuencias estacionales y uno en el resto de la serie. En otras palabras el filtro de ajuste estacional debe eliminar, en la medida de lo posible, el efecto estacional sin afectar al resto de los componentes. En la práctica esto es equivalente a estimar el componente estacional $S_t = Z_t - (T_t + I_t)$ de la ecuación (4).⁴⁵

⁴⁴ Si la función completara un ciclo cada trimestre, se observaría una constante y no una función periódica.

⁴⁵ A la suma de los componentes de tendencia ciclo e irregular se le conoce como la serie ajustada estacionalmente:

$$SA_t = T_t + I_t$$

En las siguientes dos secciones se detalla como se instrumenta el filtrado recién descrito en el módulo X-11 de X-12-ARIMA, y en el programa SEATS, respectivamente.

4.1 X-11

Ya que el módulo de ajuste estacional en X-12-ARIMA esta basado en la combinación de medias móviles utilizada en el método X-11, se le sigue denominando X-11.

Como ya se mencionó con anterioridad, X-11 pertenece al enfoque empírico, lo que significa que el modelo identificado por RegARIMA para la serie linealizada Z , no es utilizado en la estimación de los componentes. A pesar de no estar basado en un modelo estadístico, uno de los atractivos del módulo X-11, es que se basa en un algoritmo muy sencillo para estimar dichos componentes:

4.1.1 Algoritmo Básico

El algoritmo básico se describe en los siguientes cinco pasos:⁴⁶

1. A partir de la descomposición aditiva (ecuación 4), el primer paso del algoritmo es utilizar una media móvil para estimar el componente de tendencia-ciclo, T_t . La media móvil utilizada debe de cumplir con tres objetivos: por un lado tiene que representar lo mejor posible el componente de tendencia ciclo, adicionalmente debe eliminar el componente estacional, y finalmente debe reducir al máximo el componente irregular.
2. Utilizando el componente de tendencia-ciclo recién estimado, se obtiene un estimador preliminar de la suma de los componentes estacional e irregular:⁴⁷

$$(S_t + I_t)^p = Z_t - T_t \quad (5)$$

3. Utilizando una media móvil sobre el estimador preliminar de la suma de los componentes estacional e irregular (5), se obtiene un estimador preliminar del componente estacional. De manera similar al paso 1, la media móvil utilizada debe de representar lo mejor posible el componente estacional, reduciendo al máximo el componente irregular.
4. Ya que uno de los objetivos del ajuste es que la serie ajustada respete las características básicas de la serie original, el siguiente paso es centrar la estimación preliminar del componente estacional, de manera que los totales de la serie ajustada correspondan a los totales de la serie ajustada. Esto se realiza normalizando los coeficientes de la media móvil utilizada, de manera que la suma de los mismos en un año sea igual a cero;⁴⁸ después de lo cual se obtiene el estimador del componente estacional S_t .
5. Una vez que se han estimado tanto el componente de tendencia-ciclo, como el componente estacional, se obtiene la serie ajustada estacionalmente como:

$$SA_t = Z_t - S_t = T_t + I_t \quad (6)$$

⁴⁶ Para más detalles ver Findley, et. al. (1998) y Ladiray y Quenneville (2001).

⁴⁷ El superíndice P indica que se trata de una estimación preliminar.

⁴⁸ Es decir, $\sum_{j=1}^s m_j = 0$; donde m_j son los ponderadores de la media móvil, y s representa el número de observaciones por año.

Utilizando este algoritmo el problema de ajustar estacionalmente una serie de tiempo, se reduce a la elección de las medias móviles más adecuadas.

El módulo X-11 utiliza este algoritmo dos veces, escogiendo diferentes medias móviles, de manera que en cada paso la estimación de los componentes se realiza de manera más fina. A continuación se describen las medias móviles que por defecto utiliza en cada etapa el módulo X-11, y se discuten sus propiedades:

4.1.2 Estimación preliminar

En esta etapa, se utiliza el algoritmo básico una vez para estimar de manera preliminar la serie ajustada estacionalmente. El módulo X-11 utiliza, en el caso de series trimestrales, una media móvil⁴⁹ 2×4 sobre la serie linealizada Z_t .⁵⁰

$$T_t^p = M_{2 \times 4}(L)Z_t$$

donde

$$M_{2 \times 4}(L) = \frac{1}{8}(L^{-2} + 2L^{-1} + 2 + 2L + 2L^2)$$

A partir de la función de transferencia⁵¹ de la media móvil $M_{2 \times 4}(L)$ se obtiene su función de ganancia, la cual se gráfica en la figura 4. Como se puede observar el filtro tiene una ganancia de 1 cerca de la frecuencia $\omega = 0$, y va decayendo conforme la frecuencia aumenta.

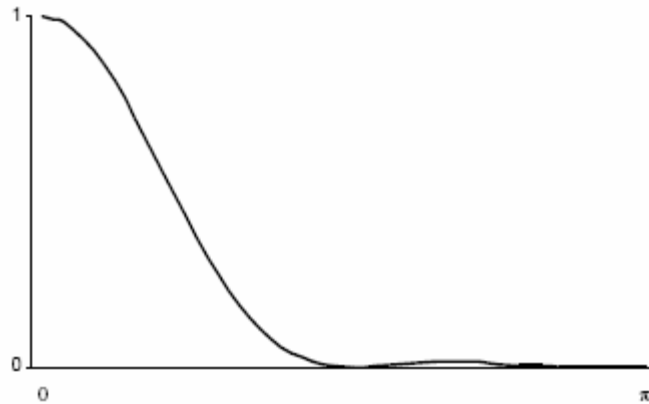
⁴⁹ En la sección A.6 del anexo se describen de manera general las medias móviles utilizadas en X-11.

⁵⁰ El superíndice p denota una estimación preliminar.

⁵¹ La función de transferencia de esta media móvil esta dada por:

$$M_{2 \times 4}(\omega) = \frac{1}{8} [2 + 4 \cos(\omega) + 2 \cos(2\omega)]$$

Figura 4
GANANCIA DE LA MEDIA MÓVIL 2X4



Esto significa que el filtro extrae la tendencia de la serie Z_t , por lo tanto $(1 - M_{2 \times 4})Z_t = (S_t + I_t)^p$. Este tipo de media móvil se conoce como filtro de tendencia.

Una vez que se obtiene el estimador preliminar de la suma de los componentes estacional como en el paso 2 del algoritmo, X-11 utiliza una media móvil 3×3 para estimar de manera preliminar el componente estacional:

$$S_t^{p*} = M_{3 \times 3}(L)(S_t + I_t)^p$$

donde

$$M_{3 \times 3}(L) = \frac{1}{9}(L^{-8} + 2L^{-4} + 3 + 2L^4 + L^8)$$

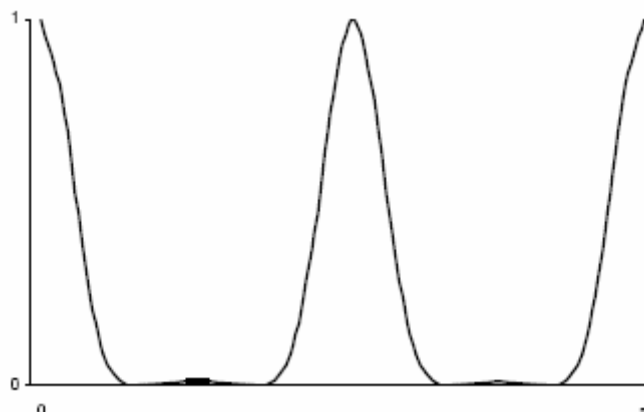
Tal como se realizó anteriormente, a partir de la función de transferencia⁵² de la media móvil $M_{3 \times 3}$ se obtiene la gráfica de su ganancia. Como se puede observar en la figura 5, el efecto de este filtro es eliminar todos los movimientos entre las frecuencias $\omega = 0$ y $\omega = \pi/2$, y entre las frecuencias $\omega = \pi/2$ y $\omega = \pi$.

Ya que el componente $(S_t + I_t)$ por construcción, no tiene tendencia; el resultado es que se elimina el componente irregular y se extrae el componente estacional. Este tipo de media móvil se conoce como filtro estacional.

⁵² La función de transferencia de esta media móvil es:

$$M_{3 \times 3}(\omega) = \frac{1}{9} [3 + 4 \cos(4\omega) + 2 \cos(8\omega)]$$

Figura 5
GANANCIA DE LA MEDIA MÓVIL 3X3



Para normalizar el componente estacional se utiliza el filtro de tendencia $M_{2 \times 4}$ descrito anteriormente de la siguiente manera:

$$S_t^p = [1 - M_{2 \times 4}(L)] S_t^{p*}$$

A partir de esta operación, en donde al componente estacional preliminar se le resta su tendencia, se obtiene un estimador preliminar de la serie ajustada estacionalmente $SA^p = Z_t - S_t^p$.

4.1.3 Estimación del componente estacional

En la segunda etapa del proceso de ajuste X-11 utiliza otra vez el algoritmo básico utilizando un conjunto de medias móviles de efecto similar, cuyo objetivo es suavizar los estimadores preliminares de los componentes.

En particular para obtener el estimador intermedio del componente de tendencia se utiliza un tipo de media móvil más sofisticado, conocido como filtro de Henderson.⁵³

$$T_t^I = H_n(L) SA^p$$

donde $H_n(L)$ denota el filtro de Henderson de n términos, y el superíndice I denota que se trata de un estimador intermedio.

En el caso en el que el usuario no determine la longitud del filtro de Henderson a utilizar, X-12-ARIMA utiliza una rutina basada en razones de ruido a señal⁵⁴ para determinar la longitud adecuada.⁵⁵

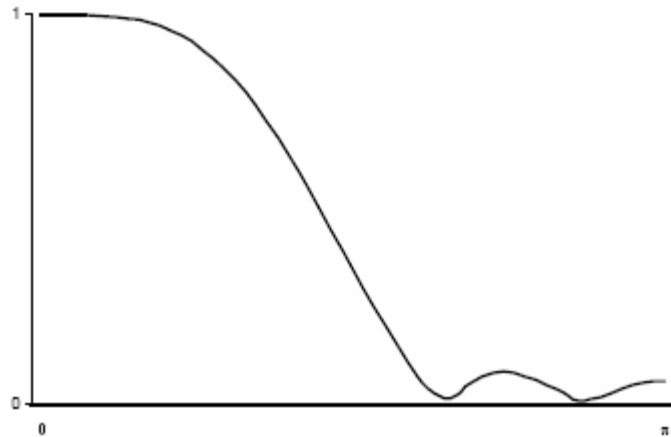
⁵³ El filtro de Henderson se describe brevemente en la sección A.6 del anexo.

⁵⁴ La idea es evaluar una razón, entre la variabilidad del componente irregular con respecto a la del componente de tendencia-ciclo. Entre mas variable sea el componente irregular en términos relativos, es decir entre mas ruido exista, la longitud del filtro utilizado es mayor. El efecto de utilizar un filtro de mayor longitud es suavizar más la serie de tendencia.

⁵⁵ Para el caso de una serie trimestral, la longitud del filtro de Henderson puede ser 5 ó 7 términos.

Figura 6

GANANCIA DEL FILTRO DE HENDERSON DE 7 TÉRMINOS



En la figura 6 se muestra la ganancia del filtro de un filtro de Henderson de 7 términos.⁵⁶

Si bien el efecto global es similar al del filtro $M_{2 \times 4}$ descrito anteriormente, es decir se trata de un filtro que extrae la tendencia de una serie; la ganancia del filtro de Henderson no es cero en la frecuencia estacional $\omega = \pi/2$.

Por esta razón en la primera etapa no se utiliza el filtro de Henderson para estimar la tendencia, ya que si se utilizara sobre la serie sin un ajuste estacional previo, la tendencia obtenida tendría cierta estacionalidad.

Una vez que se obtiene el estimador intermedio del componente de tendencia, se estima el componente estacional sin normalizar, S_t^* , aplicando una media móvil 3×5 al estimador intermedio de la suma de los componentes estacional e irregular:

$$S_t^* = M_{3 \times 5}(L)(S_t + I_t)^I$$

donde

$$M_{3 \times 5} = \frac{1}{15}(L^{-12} + 2L^{-8} + 3L^{-4} + 3 + 3L^4 + 2L^8 + L^{12})$$

y

$$(S_t + I_t)^I = [1 - H_n(L)] SA_t^p$$

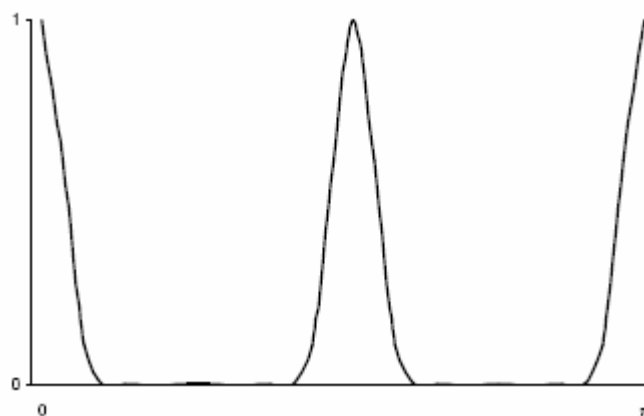
La ganancia del filtro se ilustra en la figura 7.

⁵⁶ La función de transferencia de un filtro de Henderson de n términos es:

$$H_n(\omega) = h_0 + 2 \sum_{j=1}^l h_j \cos(\omega j)$$

donde h_j son los ponderadores del filtro de Henderson, los cuales se calculan de acuerdo a la fórmula dada en la sección A.6 del anexo.

Figura 7
GANANCIA DE LA MEDIA MÓVIL 3X5



De la misma manera que en la etapa anterior, el estimador del componente estacional se normaliza utilizando una media móvil 2×4 :

$$S_t = [1 - M_{2 \times 4}(L)] S_t^*$$

con lo cual se obtiene el estimador final del componente estacional S_t , y por lo tanto la serie ajustada estacionalmente, $SA_t = Z_t - S_t$.

4.1.4 Estimación de los componentes de tendencia e irregular

En la última etapa del procedimiento se vuelve a aplicar el filtro de tendencia de Henderson a la serie ajustada estacionalmente para obtener el estimador final del componente de tendencia:

$$T_t = H_n(L)SA_t$$

a partir del cual se obtiene el estimador final del componente irregular:

$$I_t = SA_t - T_t = [1 - H_n(L)]SA_t$$

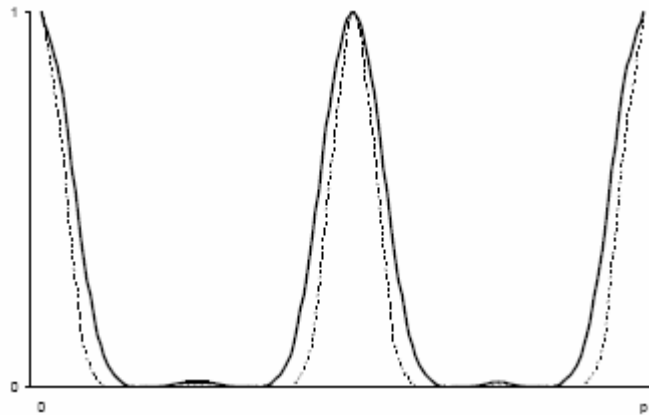
Cabe mencionar que el filtro de Henderson utilizado en esta etapa no necesariamente es igual al utilizado en la etapa anterior.

4.1.5 Los Filtros Combinados de X-11

En la figura 8 se comparan las ganancias de los filtros estacionales 3×3 y 3×5 . Claramente se puede observar que el filtro estacional utilizado en la segunda etapa elimina el efecto estacional en un rango de frecuencias más angosto,⁵⁷ es decir de la primera a la segunda etapa el filtrado se va haciendo más fino, tal como se mencionó anteriormente.

⁵⁷ Lo cual se debe a que se utiliza un filtro más largo.

Figura 8
GANANCIA DE UNA MEDIA MÓVIL 3X3 (—)
Y UNA MEDIA MÓVIL 3X5 (---)



La combinación sucesiva de filtros utilizada en X-11 para obtener el componente estacional, puede ser interpretada como la aplicación de un solo filtro lineal. Este filtro combinado, al cual a veces se refiere como filtro X-11 se puede expresar como:

$$M_{X11,S}(L) = [1 - M_T(L)]M_{S2}(L)[1 - H(L)\{1 - [1 - M_T(L)]M_{S1}(L)[1 - M_T(L)]\}] \quad (7)$$

donde $M_T(L)$ es el filtro de tendencia utilizado en la primera etapa, M_{S1} y M_{S2} son los filtros estacionales utilizados en la primera y en la segunda etapa respectivamente, $H(L)$ es el filtro de tendencia de Henderson, y $M_{X11,S}(L)$ denota el filtro combinado de X-11 utilizado para obtener el componente estacional S_t . Es decir

$$S_t = M_{X11,S}(L)Z_t$$

A partir del filtro estacional (7), se pueden expresar los filtros para cada uno de los componentes como:

$$M_{X11,SA}(L) = 1 - M_{X11,S}(L) \text{ Serie Ajustada Estacionalmente} \quad (8)$$

$$M_{X11,T}(L) = H(L)M_{X11,SA}(L) \text{ Tendencia}$$

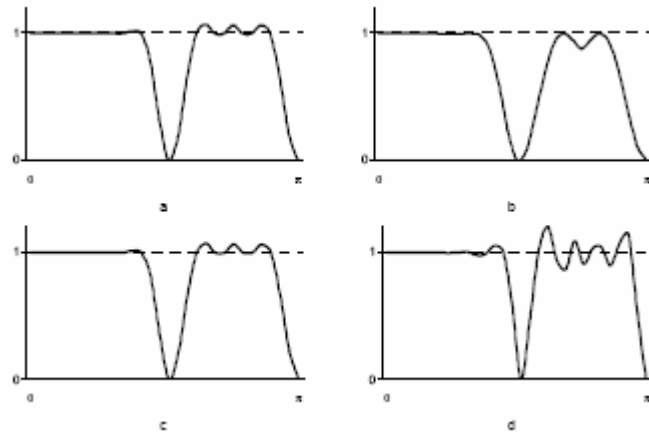
$$M_{X11,I}(L) = 1 - M_{X11,T}(L) \text{ Irregular}$$

Conociendo la función de transferencia de cada una de las medias móviles utilizadas en X-11 se puede obtener la ganancia de los filtros X-11 para cada uno de sus componentes, lo cual permite evaluar el efecto del procedimiento utilizado por X-11 en la serie Z_t .

En la figura 9 se gráfica la ganancia de los filtros de ajuste estacional X11 (8) para el caso de una serie trimestral.⁵⁸ En todos los casos el filtro de Henderson utilizado es de 7 términos.

⁵⁸ En Bell y Monsell (1992) se presenta un catálogo completo de las ganancias de todas las combinaciones de filtros simétricos disponibles en X-11, para frecuencias mensuales y trimestrales

Figura 9
FUNCIÓN DE GANANCIA DE LOS FILTROS ESTACIONALES PARA
SERIES TRIMESTRALES EN X-11. (A) DEFAULT (B) 3X3 (C) 3X5 (D) 3X9



El caso (a) *default*, es aquel en el que en la primera etapa se utiliza un filtro estacional 3×3, y en la segunda un filtro estacional 3×5; en el caso (b) 3×3, se utiliza el filtro estacional 3×3 en ambas etapas y así sucesivamente.

Resulta claro que en todos los casos el filtro de ajuste estacional opera como un filtro de paso de banda (band-pass), ya que se observa una ganancia de 0 alrededor de las frecuencias estacionales $\pi/2$ y π , y una ganancia cercana a 1 en el resto de las frecuencias.

Basta inspeccionar la ganancia del filtro 3×3 en el panel (b) con la ganancia del filtro 3×9 en el panel (d), para confirmar que como se mencionó anteriormente, el rango en el que opera cada filtro alrededor de las frecuencias estacionales se hace más angosto en la medida que se utilizan filtros más largos.

Esto significa que la elección del filtro estacional debe ser realizada en función de las características de la serie de tiempo. Por ejemplo para una serie de tiempo cuyos picos espectrales sean mas anchos, lo que significa que su componente estacional es relativamente inestable, es conveniente utilizar un filtro de menor longitud para asegurar que la serie ajustada no tenga estacionalidad residual.

Finalmente se puede observar que exceptuando el caso 3×3 en el panel (b), todos los filtros de ajuste estacional X11 presentan una ganancia mayor a uno entre las frecuencias estacionales. Una ganancia superior a uno significa que el filtro ampliará la variabilidad de la serie Z_{it} en estas frecuencias.

Ya que este rango de frecuencias esta asociado a movimientos de corto plazo, las series ajustadas por X-11 presentan mayor variabilidad de corto plazo que las series sin ajustar.

4.1.6 Diagnósticos

Los diagnósticos disponibles en el módulo X-11 están basados, como el proceso de ajuste estacional, en herramientas empíricas. Debido en buena medida a la base de usuarios con la que cuentan los programas de la familia X-11, y al volumen de contribuciones realizadas en mas de 30 años, los diagnósticos disponibles en X-12-ARIMA para el modulo de ajuste estacional cubren un área bastante amplia.

Una descripción detallada de todos los diagnósticos disponibles para la etapa de ajuste estacional se encuentra fuera del alcance de este documento, por ello a continuación simplemente se mencionan algunos de los diagnósticos disponibles:⁵⁹

Se estiman diversas medidas empíricas con respecto a la calidad del ajuste estacional. Las cuales evalúan, entre otras cosas; las contribuciones de los diferentes componentes a la serie original, la estabilidad de los componentes estacionales, la aleatoriedad del componente irregular, así como la presencia de estacionalidad residual en el componente irregular.

Adicionalmente se puede obtener el espectro de algunos de los componentes, así como estimar diversas estadísticas con respecto a la evolución de las revisiones en los componentes conforme se observan más datos de la serie de tiempo. También es posible obtener una estimación de la revisión que sufren los componentes cuando se utilizan pronósticos de la serie original o datos observados en el ajuste estacional.

4.2 SEATS

El programa SEATS pertenece a las aplicaciones del enfoque basado en modelos. El procedimiento de descomposición se lleva a cabo en dos partes: En la primera, a partir del modelo ARIMA identificado por TRAMO en la etapa de ajuste previo descrito en la sección 3, SEATS identifica modelos ARIMA para cada uno de los componentes. En la segunda parte, se estiman los componentes utilizando un filtro lineal que esta basado en el modelo identificado para cada componente en la primera etapa.

4.2.1 Identificación de los modelos para los componentes

Marco Teórico

Para simplificar la exposición del marco general y los supuestos detrás de la metodología de descomposición utilizada por SEATS; se supone que los componentes no observados son simplemente un componente de señal, denotado por C_{1t} , y un componente de ruido, denotado por C_{2t} .⁶⁰

Básicamente, la metodología para identificar los componentes consiste en factorizar el modelo ARIMA de la serie linealizada, en modelos ARIMA para cada componente:

$$\phi_j(L)C_{jt} = \theta_j(L)\varepsilon_{jt} \quad (9)$$

donde $j = 1, 2$, de manera que se cumplan los siguientes requisitos:

1. La agregación de los componentes debe replicar el modelo identificado para la serie linealizada, es decir:

$$Z_t = \sum_j C_{jt} \quad (10)$$

2. El modelo utilizado debe replicar las características asociadas a cada componente.

El marco teórico bajo el cual se realiza la descomposición de la serie de tiempo, se basa en los siguientes supuestos:

⁵⁹ En la sección 4 de Ladiray y Quenneville (2001) se detallan todas las tablas obtenidas del programa, en particular la sección 4.5 describe los diagnósticos de calidad de ajuste estacional.

⁶⁰ Más adelante para ilustrar la metodología se vuelve al caso general en donde $Z_t = T_t + S_t + I_t$.

- a1. Los componentes no observables no están correlacionados.⁶¹
- a2. Con respecto a la estructura de los modelos de los coeficientes, se supone que:
 - i. Las innovaciones, ε_{jt} de los modelos de los componentes (9) son variables aleatorias independientes que se distribuyen normalmente con media cero y varianza σ_j^2 .
 - ii. Ningún par de polinomios $\{\phi_j(L), \theta_j(L)\}$ comparte la misma raíz.⁶²
 - iii. Los polinomios $\phi_j(L)$ y $\theta_j(L)$, de orden p_j y q_j respectivamente; pueden tener raíces unitarias o incluso fuera del círculo unitario. Sin embargo los polinomios $\phi_j(L)C_{jt}$ deben ser estacionarios.
- a3. Los diferentes polinomios $\phi_j(L)$ no comparten raíces unitarias.⁶³

Bajo estos supuestos, despejando (9) para cada uno de los componentes, y sustituyéndolos en (10) se verifica después de un poco de álgebra que (9-10) implican que Z_t obedece el siguiente proceso:

$$\phi_1(L)\phi_2(L)Z_t = \phi_2(L)\theta_1(L)\varepsilon_{1t} + \phi_1(L)\theta_2(L)\varepsilon_{2t}$$

Con lo cual se satisface el primer requisito, es decir la suma de los componentes resulta en un modelo ARIMA similar al de la ecuación (2), en particular se tiene que Z_t obedece el proceso ARIMA:

$$\phi_z(L)Z_t = \theta_z(L)\varepsilon_{zt} \quad (11)$$

donde:

$$\phi_z(L) = \phi_1(L)\phi_2(L) \quad (12)$$

$$\theta_z(L)\varepsilon_{zt} = \phi_2(L)\theta_1(L)\varepsilon_{1t} + \phi_1(L)\theta_2(L)\varepsilon_{2t} \quad (13)$$

Ya que se supone que los polinomios autorregresivos no comparten raíces unitarias, el orden del proceso $\phi_z(L)$ es igual a $p_z = p_1 + p_2$, donde p_j es el orden del polinomio $\phi_j(L)$ para $j = 1, 2$.

Por su parte, dado que se supone que las innovaciones ε_{1t} y ε_{2t} , son independientes y se distribuyen normalmente. La ecuación (13) implica que el proceso ε_{zt} también se distribuye normalmente con media 0 y varianza σ_{zt} ; además el orden del polinomio $\theta_z(L)$ esta restringido por $q_z \leq \max(p_2 + q_1, p_1 + q_2)$ donde q_j es el orden del polinomio $\theta_j(L)$, para $j = 1, 2$.

Adicionalmente se realiza el siguiente supuesto:

- a4. El proceso de media Móvil $\theta_z(L)\varepsilon_{zt}$ es invertible.

Identificación de los polinomios AR

⁶¹ Aunque este supuesto no es estrictamente necesario; se justifica por la idea de que, por lo menos en el corto plazo, la evolución de cada uno de los componentes se debe a diferentes factores.

⁶² Este supuesto garantiza que el error mínimo cuadrado de los estimadores de los componentes este acotado.

⁶³ Este supuesto implica que los diferentes componentes no tienen picos espectrales en la mismas frecuencias.

Para identificar los modelos de los componentes no observados, SEATS comienza por la identificación de los polinomios autorregresivos de cada componente.

El espectro de un proceso ARIMA esta dado por:⁶⁴

$$s(\omega) = \sigma^2 \frac{\theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})} \quad (14)$$

de donde resulta claro que los picos (infinitos) espectrales dependen de las raíces del polinomio autorregresivo.

Explotando este resultado; SEATS factoriza las raíces del polinomio $\phi_z(L) = \phi(L)\delta(L)$ del modelo identificado por TRAMO para la serie linealizada Z_t :⁶⁵

$$\phi(L)\delta(L)Z_t = \theta_z(L)\varepsilon_{zt}$$

en el dominio de la frecuencia, para identificar los polinomios de los componentes no observables de manera que se satisfaga el requisito numero dos. Es decir, de manera que los modelos de los componentes repliquen las características asociadas a cada componente.

Para ilustrar la factorización recién descrita, en el recuadro 1 se utiliza el ejemplo utilizado por Kaiser y Maravall (2000).

Identificación de los polinomios MA

Una vez que los polinomios autorregresivos de los componentes han sido identificados, la estructura del modelo de la serie linealizada (ecuación 2) y la ecuación (13) implican $\max(p_2 + q_1, p_1 + q_2) + 1$ restricciones para identificar $q_1 + q_2 + 2$ coeficientes restantes, es decir los polinomios MA de los componentes y las varianzas de las innovaciones.

En el caso general en el que $\max(p_2 + q_1, p_1 + q_2) < q_1 + q_2 + 1$, el sistema no esta identificado,⁶⁶ por lo cual es imposible encontrar una descomposición aceptable sin imponer restricciones adicionales.

Esto significa que no es posible factorizar de manera única el polinomio MA de la serie Z_t para obtener los polinomios MA de los componentes y la varianza de sus innovaciones, de manera que los espectros de todos los componentes sean no-negativos.

⁶⁴ El espectro de un proceso ARIMA se obtiene evaluando su función de autocovarianza:

$$\gamma(L) = \sigma^2 \frac{\theta(L)\theta(L^{-1})}{\phi(L)\phi(L^{-1})}$$

en $L = e^{-i\omega}$; tal como se explica en la sección A.6 del anexo.

⁶⁵ Ver ecuación (2)

⁶⁶ En este caso el problema de identificación es en el sentido clásico del término; no al sentido del término en la metodología de Box y Jenkins en donde se refiere a la especificación de un modelo.

Recuadro 1
FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS AR

Suponiendo que el componente de señal C_{1t} está definido como:

$$C_{1t} = T_t + S_t$$

donde T_t es un componente de tendencia y S_t es un componente estacional; y suponiendo que el componente de ruido es igual al componente irregular, i. e. $C_{2t} = I_t$, el cual obedece un proceso de ruido blanco con distribución normal y varianza σ_I^2 .

En este caso, la factorización se realiza de manera que los picos espectrales alrededor de la frecuencia $\omega = 0$ estén asociados a las raíces del polinomio autorregresivo del componente de tendencia, mientras que los picos espectrales alrededor de las frecuencias estacionales $\omega = \pi/2$ y $\omega = \pi$ se asociarán a las raíces del polinomio autorregresivo del componente estacional.

Suponiendo que el modelo identificado por TRAMO sea:

$$\Delta\Delta^4 Z_t = \theta(L)\varepsilon_{zt} \quad (15)$$

el polinomio $\Delta\Delta^4 = (1-L)(1-L)^4$ se puede factorizar como $\Delta^2\varrho = (1-L)^2(1+L+L^2+L^3)$, donde ϱ es la diferencia estacional definida en la sección A.1 del anexo.

El espectro del polinomio $\Delta^2 = (1-L)^2$ es igual a $2(1-2\cos(\omega)+\cos(2\omega))$, mientras que el espectro del polinomio $\varrho = (1+L+L^2+L^3) = (1+L)(1+L^2)$ es igual a $4(1+\cos(\omega))(1+\cos(2\omega))$. Por lo que el espectro de Z_t es igual a:

$$s_z(\omega) = \sigma_{z_t} \frac{\theta(e^{-i\omega})}{[2(1-2\cos(\omega)+\cos(2\omega))][4(1+\cos(\omega))(1+\cos(2\omega))]}$$

Del análisis del denominador del espectro de Z_t resulta claro que los picos espectrales se observarán en $\omega = 0$, producto de la raíz del polinomio Δ^2 ; así como en $\omega = \frac{\pi}{2}$ y $\omega = \pi$ producto de las raíces del polinomio ϱ .

Por lo tanto, dado el modelo (15) para la Z_t , el procedimiento utilizado por SEATS determina que el polinomio autorregresivo del componente de tendencia es igual a Δ^2 , mientras que el polinomio autorregresivo del componente estacional es igual a la diferencia estacional ϱ , es decir

$$\Delta^2 T_t = \theta_T(L)\varepsilon_{Tt} \quad (16)$$

$$\varrho S_t = \theta_S(L)\varepsilon_{St}$$

donde las innovaciones se distribuyen independientemente obedeciendo distribuciones normales con media cero y varianzas σ_T^2 y σ_S^2 respectivamente.

Para ilustrar el problema, en el recuadro 2 se retoma el ejemplo de Kaiser y Maravall introducido anteriormente.

Recuadro 2

PROBLEMAS DE FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS MA

Utilizando la factorización obtenida del polinomio AR de la serie Z_t , el análogo de la ecuación (13) para el ejemplo se puede escribir como:

$$\theta_z(L)\varepsilon_{zt} = \varrho\theta_T(L)\varepsilon_{Tt} + \Delta^2\theta_S(L)\varepsilon_{St} + \Delta\Delta^4I_t \quad (17)$$

donde se supone que el componente irregular es simplemente ruido blanco.

Si TRAMO identificó que $\theta_z(L)\varepsilon_{zt}$ es un proceso MA(5), entonces para que todos los términos en el lado derecho de (17) sean también MA(5) se requiere que el polinomio $\theta_T(L)$ sea de orden 2, i. e. $q_T = 2$; mientras que el polinomio $\theta_S(L)$ debe ser de orden 3, i. e. $q_S = 3$.

Igualando la función de autocovarianza de ambos lados de (17) se obtienen 6 restricciones. Sin embargo las incógnitas son 8: los tres coeficientes en $\theta_T(L)$, los dos coeficientes en $\theta_S(L)$, más las tres varianzas de las innovaciones de los componentes. Por lo tanto no es posible identificar los 8 parámetros de manera única, de hecho existen infinitas combinaciones de parámetros que satisfacen las restricciones.

Claramente una solución al problema de identificación, es restringir el orden de los polinomios MA de los componentes de manera que el orden del polinomio MA de alguno de los componentes sea menor al del orden del polinomio AR respectivo; es decir $q_T < p_T$ y/o $q_S < p_S$. Este es el enfoque utilizado en la llamada modelización de series de tiempo estructurales.⁶⁷

SEATS utiliza una alternativa que no requiere la imposición de restricciones en el orden de magnitud de los polinomios MA de los componentes no observados. Este enfoque es conocido como la descomposición canónica.⁶⁸

La descomposición canónica consiste en maximizar la varianza del componente irregular, σ_I^2 ; al mismo tiempo que se minimiza la varianza de los demás componentes. En el dominio de la frecuencia minimizar la varianza de un componente es equivalente a inducir un cero en los espectros de los componentes canónicos, T_t y S_t .⁶⁹

⁶⁷ Ver Harvey (1989).

⁶⁸ Propuesta originalmente por Box, et. al. (1978).

⁶⁹ En términos generales se puede maximizar la varianza de cualquier componente, en cuyo caso los demás componentes son conocidos como canónicos. Sin embargo, Hillmer y Tiao (1982) demostraron que al maximizar la varianza del componente irregular se minimiza la varianza de los demás componentes, lo cual tiene sentido en un ejercicio de ajuste estacional.

En el recuadro 3, se ilustra el efecto de la descomposición canónica.

Recuadro 3
DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

Suponiendo que el componente de tendencia obedece un camino aleatorio

$$\Delta T_t = \xi_t \quad (18)$$

donde ξ_t es ruido blanco con varianza igual a uno. El espectro de T_t es igual a

$$s_T(\omega) = \frac{1}{2(1 - \cos(\omega))}$$

el cual alcanza un mínimo en la frecuencia $\omega = \pi$ igual a $s_T(\pi) = 1/4$.

Como se mencionó anteriormente; la descomposición canónica es equivalente a inducir ceros en los espectros de los componentes canónicos. Analizando el denominador de la expresión analítica del espectro de un proceso ARIMA (14), resulta claro que inducir un cero en el espectro es, a su vez, equivalente a tener una raíz unitaria en el polinomio MA de los componentes canónicos.

Por ello, el espectro de la descomposición canónica de la tendencia de obedece un camino aleatorio esta dado por:

$$s_T^*(\omega) = s_T(\omega) - \frac{1}{4} = \frac{1 + \cos(\omega)}{4(1 - \cos(\omega))}$$

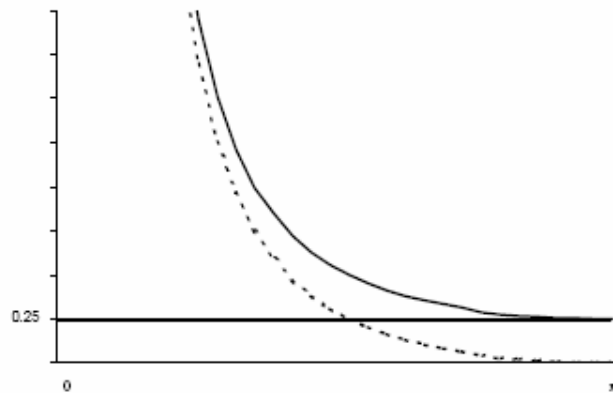
lo cual corresponde al siguiente modelo para la tendencia canónica:

$$\Delta T_t = (1 + L)\nu_t^*$$

donde ν_t^* es ruido blanco con varianza igual a $\frac{1}{4}$.

Figura 10

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA: CAMINO ALEATORIO (—) TENDENCIA CANÓNICA (- - -)



En la figura (10) se ilustra el efecto de la descomposición canónica para (18). Como se puede observar la descomposición canónica puede ser vista como un problema de asignación de ruido entre los componentes, el cual se resuelve asignando todo el ruido al componente irregular.

Para terminar la sección, se retoma el ejemplo de Kaiser y Maravall, en donde el modelo identificado para la serie Z_t tiene un polinomio MA de orden 5. Para el caso de la tendencia (ecuación 16) la descomposición canónica junto con la restricción de que el polinomio MA de la tendencia debe ser de orden dos implica la siguiente descomposición:

$$\phi_T(L) = (1 + \theta_{T1}L)(1 + L)$$

donde θ_{T1} es un coeficiente a estimar en la siguiente etapa. Para el caso del componente estacional se procede de manera similar.

4.2.2 Estimación de los componentes

Como en la sección anterior; para entender mejor el funcionamiento del filtro utilizado para estimar los componentes recién identificados, y sus propiedades; en la exposición se supone que la serie observada puede ser descompuesta en un componente de señal, y un componente de ruido, como en (10).

Estimadores Óptimos

Bajo el supuesto de normalidad de las innovaciones, el estimador óptimo⁷⁰ de la señal se obtiene al calcular la esperanza condicional de la señal sobre la serie observada, i. e. $\hat{C}_{1t} = E(C_{1t} | Z_1, \dots, Z_T)$. Incluso cuando se relaja el supuesto de normalidad la esperanza condicional permite obtener el estimador lineal con error cuadrático medio mínimo.

Para calcular la esperanza condicional, se puede recurrir al filtro de Kalman o bien al filtro de Wiener-Kolmogorov. Ambos filtros⁷¹ son óptimos en el sentido que minimizan el error cuadrático medio. SEATS utiliza el filtro de Wiener-Kolmogorov (WK).

El filtro, cuya derivación se describe en la sección A.6 del anexo, fue desarrollado para su utilización en series estacionarias; sin embargo bajo algunos supuestos adicionales se ha extendido su aplicación a series no estacionales.^{72 73}

Aunque el filtro se deriva utilizando una serie de tiempo infinita, en la práctica, SEATS implementa el filtro utilizando un proceso iterativo conocido como algoritmo de Burman-Wilson,⁷⁴ el cual permite estimar los componentes de manera eficiente, utilizando un número finito de pronósticos de la serie original.

Como se discute en el anexo, el filtro WK es un filtro lineal que se puede expresar como la razón entre la función de autocovarianza del componente a estimar, $g_j(L)$, y la función de autocovarianza de la serie observada $g_z(L)$

Por ejemplo, el estimador del componente de señal se obtiene como:

$$\hat{C}_{1t} = W_1(L)Z_t \quad (19)$$

donde el filtro WK es igual a:

⁷⁰ Es decir el estimador de error cuadrático medio mínimo.

⁷¹ Los dos filtros son equivalentes. Para el caso de series estacionarias ver, por ejemplo, Burridge y Wallis (1988); para el caso de series no estacionarias, ver Gómez (1999).

⁷² Ver Cleveland y Tiao (1976).

⁷³ Una extensión similar ha sido desarrollada para el filtro de Kalman, ver Kohn y Ansley (1987).

⁷⁴ Ver Burman (1980).

$$W_1(L) = \frac{g_1(L)}{g_z(L)}$$

Una de las ventajas de utilizar modelos paramétricos, es que el filtro WK se puede expresar como una función de los parámetros de los modelos de la serie observada de los modelos de los componentes considerados.

En el caso de SEATS, en donde se supone que tanto la serie observada como los componentes obedecen un proceso ARIMA; el filtro para los componentes de señal y de ruido se pueden escribir respectivamente como:⁷⁵

$$W_1(L) = k_1 \frac{\theta_1(L)\theta_1(L^{-1})\phi_2(L)\phi_2(L^{-1})}{\theta_z(L)\theta_z(L^{-1})} \quad (20)$$

$$W_2(L) = k_2 \frac{\theta_2(L)\theta_2(L^{-1})\phi_1(L)\phi_1(L^{-1})}{\theta_z(L)\theta_z(L^{-1})}$$

donde $k_j = \frac{\sigma_j^2}{\sigma^2}$ es la razón entre la varianza de las innovaciones del componente j y la varianza de las innovaciones de la serie observada.

Para entender mejor la operación del filtro, es conveniente realizar el análisis en el dominio de la frecuencia. Dado que se supone que los componentes son ortogonales, utilizando la transformada de Fourier en (19) el espectro del estimador del componente de señal, $s_{\hat{\Gamma}}(\omega)$, esta dado por:

$$s_{\hat{\Gamma}}(\omega) = \left[\frac{s_1(\omega)}{s_z(\omega)} \right]^2 s_z(\omega) = \left[\frac{s_1(\omega)}{s_z(\omega)} \right] s_1(\omega) \quad (21)$$

donde $s_1(\omega)$ y $s_z(\omega)$ son, respectivamente, el espectro del componente de señal y de la serie observada.

Bajo el supuesto de ortogonalidad, el espectro de la serie observada se puede expresar como

$$s_z(\omega) = s_1(\omega) + s_2(\omega) \quad (22)$$

Notando que la expresión en corchetes en (21), la cual es la ganancia del filtro WK,⁷⁶ es menor o igual a uno; la ecuación (22) implica que $s_{\hat{\Gamma}}(\omega) \leq s_1(\omega)$ en todo el rango de frecuencias, con lo cual el estimador obtenido siempre es más estable que el componente teórico de señal.

Alternativamente, utilizando (22), la ganancia del filtro WK se puede escribir como:

$$\frac{s_1(\omega)}{s_z(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{s_2(\omega)}{s_1(\omega)}}$$

Esta expresión permite obtener una interpretación intuitiva del filtro WK. Cuando la contribución del componente de señal en cierta frecuencia ω^* es relativamente alta, es decir cuando

⁷⁵ Para obtener la expresión (20) se utiliza (12); lo cual permite mostrar explícitamente la dependencia del filtro de los parámetros de ambos componentes.

⁷⁶ En el caso del filtro de Wiener-Kolmogorov, la ganancia del filtro es igual a la función de respuesta de frecuencia.

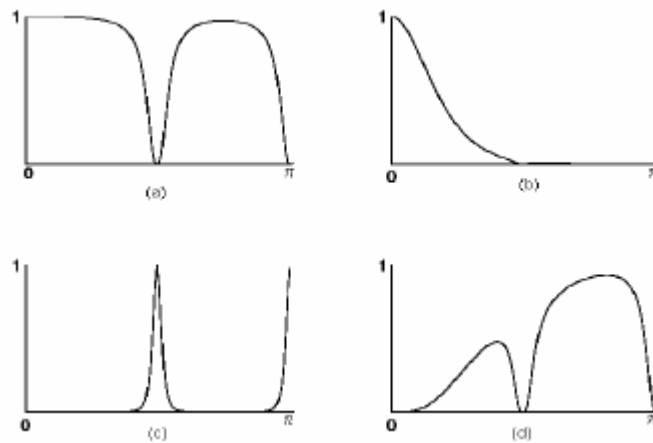
$[s_2(\omega^*)/s_1(\omega^*)] \rightarrow 0$; la ganancia del filtro tiende a uno. Esto significa que, en esa frecuencia particular, la mayor parte del espectro de la serie observada se utiliza para estimar la señal.

De manera similar cuando la contribución del componente de señal es relativamente baja, la ganancia del filtro tiende a cero. Lo cual significa que en esa frecuencia el espectro del estimador tiende a cero.

Para ilustrar la operación del filtro, en la figura 11 se grafica la ganancia del filtro WK para los componentes estimados por SEATS. Se puede observar en los paneles (b), (c) y (d) las ganancias para los componentes de tendencia, estacional e irregular respectivamente.

Figura 11

**FUNCIÓN DE GANANCIA DEL FILTRO WK: (A) AJUSTE ESTACIONAL
(B) TENDENCIA (C) FACTOR ESTACIONAL (D) FACTOR IRREGULAR**



En el caso de la tendencia y el componente estacional, resulta claro que el filtro elimina las frecuencias que no están asociadas a los componentes respectivos. Así la ganancia del filtro del componente de tendencia es cercano a uno en el rango de frecuencias bajas y va decayendo conforme aumenta la frecuencia. Por su parte la ganancia del filtro del componente estacional muestra ganancias cercanas a uno, alrededor de las frecuencias estacionales, y cero en el resto del rango.

La ganancia del filtro del componente irregular refleja el efecto de la descomposición canónica; en donde al componente irregular se le asigna toda la variación que no es asignada a los demás componentes. Por ello, la ganancia es igual a cero en la frecuencia cero y va creciendo conforme la ganancia del filtro de tendencia va decreciendo, con dos valles en las frecuencias estacionales, que reflejan la variación asignada al componente estacional.

De manera similar al caso de los filtros utilizados en X-11, la combinación de los filtros WK de los componentes en SEATS puede ser interpretada como un solo filtro de ajuste estacional. La ganancia del filtro de ajuste estacional implementado por SEATS se muestra en el panel (a). Claramente este filtro elimina los movimientos alrededor de las frecuencias estacionales sin afectar el resto de la serie.

Errores de Estimación

En la estimación de los componentes existen dos tipos de errores. Los errores de estimación final y los errores de revisión. Los primeros se dan por las diferencias en las propiedades estocásticas de los estimadores y de los componentes. Por su parte los errores de revisión ocurren debido a que en los extremos de la serie, el filtro WK se aplica a pronósticos de la serie.

Para entender el origen de las diferencias en las propiedades estocásticas del componente teórico y de su estimador, conviene reescribir la expresión del estimador del componente de señal (19), utilizando (20) y (11), como:

$$\hat{C}_{1t} = k_1 \frac{\theta_1(L)}{\phi_1(L)} \hat{\varepsilon}_{1t} \quad (23)$$

donde:

$$\hat{\varepsilon}_{1t} = \frac{\theta_1(L^{-1})\phi_2(L^{-1})}{\theta_z(L^{-1})} \varepsilon_{zt} \quad (24)$$

Comparando el modelo del estimador (23) con el modelo del componente (9); resulta claro que si bien ambos modelos comparten los polinomios AR y MA en el operador de rezago L . El estimador de la pseudo-innovación⁷⁷ (24) sigue un proceso ARMA en el operador de adelanto L^{-1} ⁷⁸; mientras que en el modelo teórico del componente, se supone que es una variable aleatoria sin correlación serial.

Ya que el estimador de la señal depende del polinomio AR del ruido $\phi_2(L^{-1})$, sus propiedades estocásticas dependen no sólo de las propiedades estocásticas del componente teórico de señal sino también del componente teórico de ruido. Por lo que aunque la estimación se realiza bajo el supuesto de ortogonalidad de los componentes, los estimadores obtenidos están correlacionados.

Lo anterior significa que si bien el estimador y el componente comparten la misma transformación estacionaria, tanto los espectro como las funciones de autocovarianza de ambos elementos difieren.

Formalmente el error de estimación final se define como:

$$e_t = C_{1t} - \hat{C}_{1t} \quad (25)$$

Sustituyendo las expresiones para el componente y su estimador, se puede demostrar después de un poco de álgebra, que la función de autocovarianza del error de estimación final es igual a la función de autocovarianza del proceso ARMA definido por:

$$\theta_z(L)e_t = \theta_1(L)\theta_2(L)\varepsilon_{\xi t}$$

donde $\varepsilon_{\xi t}$ es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza $k_1 k_2 / \sigma_z^2$.

Como se ha mencionado anteriormente, para poder utilizar los filtros simétricos descritos en este documento es necesario extender la serie, hacia adelante y hacia atrás.

Para ello se reemplazan los valores de la serie que todavía no han sido observados por los pronósticos del modelo ARIMA identificado para la serie observada Z_t , los cuales se denotan por \hat{Z}_t . Este procedimiento permite obtener estimadores preliminares en los extremos de la serie. Sin embargo, ya que los pronósticos se realizan con cierto error, dichos estimadores preliminares estarán contaminados por el error de pronóstico.

⁷⁷ Que de hecho es el estimador con el mínimo error cuadrático medio.

⁷⁸ Hay que notar que aunque el estimador de las pseudo-innovaciones sigue un proceso ARMA, las pseudo-innovaciones no son pronosticables ya que el proceso ARMA esta definido en realizaciones futuras.

Conforme se añaden mas observaciones a la serie, los pronósticos se van reemplazando por sus valores históricos, con lo cual el estimador preliminar se va revisando. La discrepancia entre los estimadores preliminares, obtenidos a lo largo del tiempo, es conocida como el error de revisión. El cual para el estimador obtenido en la fecha t ,⁷⁹ se puede expresar como:

$$r_{1t} = \widehat{C}_{1t} - E(\widehat{C}_{1t} | Z_1, \dots, Z_t)$$

donde $E(\widehat{C}_{1t} | Z_1, \dots, Z_t)$ es la esperanza del estimador de la señal condicional en la observación de la serie hasta el momento t .

Expresando el estimador como una función de las innovaciones de la serie observada:

$$\widehat{C}_{1t} = \nu_1(L)\varepsilon_{zt}$$

donde:

$$\nu_1(L) = W(L) \frac{\theta_z(L)}{\phi_z(L)} = k_1 \frac{\theta_1(L)}{\phi_1(L)} \frac{\theta_1(L^{-1})\phi_2(L^{-1})}{\theta_z(L^{-1})}$$

la esperanza condicional se puede expresar como⁸⁰

$$E(\widehat{C}_{1t} | Z_1, \dots, Z_t) = \sum_{j=-\infty}^0 \nu_{1,j}\varepsilon_{t+j}$$

Por lo tanto el error de revisión total en el estimador concurrente de la señal esta dado por el proceso de media móvil infinito:

$$r_{1t} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_{1,j}\varepsilon_{t+j} \quad (26)$$

mientras que los errores para cualquier estimador preliminar calculado en el momento $t+k$, para $k \neq 0$, es igual a:

$$r_{1,t+k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \nu_{1,j}\varepsilon_{t+j}$$

Pierce (1980), demostró que los procesos MA de los errores de estimación son estacionarios, por lo que la varianza del error de estimación se obtiene como:

$$V[r_{1,t+k}] = \sum_{j=k+1}^{\infty} \nu_{1,j}^2$$

⁷⁹ Conocido también como estimador concurrente.

⁸⁰ Donde $\nu_{1,k}$ es el k -ésimo elemento de la serie definida por:

$$\nu_1(L) = \dots + \nu_{1,-k}L^{-k} + \dots + \nu_{1,-1}L^{-1} + \nu_{1,0} + \nu_{1,1}L + \dots + \nu_{1,k}L^k + \dots$$

4.2.3 Diagnósticos

La mayoría de los diagnósticos disponibles en SEATS, explotan el enfoque paramétrico para realizar inferencia con respecto a la calidad del ajuste estacional.

En particular es posible realizar un análisis del error de estimación descrito anteriormente, a través de la comparación de la variabilidad de los componentes teóricos y sus estimadores, así como información con respecto a la contribución de cada uno de los componentes estimados a la varianza de la serie observada.

Con respecto al error de revisión; se presenta información con respecto al tamaño de las revisiones, y la velocidad de convergencia conforme se agregan más observaciones a la serie de tiempo. Finalmente, en la versión para Windows; disponible a través del sitio web del Banco de España; es posible realizar un análisis gráfico bastante completo, incluyendo comparaciones entre las funciones de autocovarianza y espectros de los componentes teóricos y sus estimadores.

5 Comparaciones de X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS

Como se mencionó anteriormente, ambos enfoques tienen ventajas y desventajas; sin que hasta la fecha exista un consenso con respecto al “mejor” método de ajuste estacional.

Por ejemplo, al enfoque no paramétrico se le critica que los procedimientos no sean óptimos y que no estén basados en modelos explícitos, lo cual dificulta la inferencia estadística de los estimadores obtenidos. Por su parte, si bien los procedimientos paramétricos son óptimos y permiten realizar inferencia; es un hecho que un modelo de series de tiempo no es un modelo económico, por lo que subsisten dudas con respecto a la modelización.

Adicionalmente en ambos tipos de enfoque se resalta la dificultad de identificar, a priori, algunos elementos de los componentes de los cuales se puede saber poco, como puede ser la naturaleza de los valores atípicos observados. También, en ambos casos, existen dudas con respecto a la calidad de los resultados cuando se trabaja con series que están fuertemente perturbadas.

Es importante mencionar que el hecho de que la teoría económica no brinde una descripción formal de los componentes en los cuales se descompone una serie de tiempo, hace prácticamente imposible llegar a una conclusión con respecto a la superioridad de uno u otro método de ajuste estacional. Ya que sin una descripción formal de los componentes, el problema de ajuste estacional no está bien definido.

A principios de la década de 1980, en la literatura estadística se realizó un esfuerzo importante por definir algún criterio objetivo de comparación; sin embargo, no se alcanzó un consenso alrededor de ninguno de los criterios propuestos.⁸¹

No obstante lo anterior, existen diversos estudios en donde se han evaluado bajo diversos criterios tanto teóricos como empíricos, el desempeño de ambos programas.⁸² Probablemente el estudio comparativo más completo es el realizado por la unidad de estadísticas industriales de la Oficina Estadística de la Unión Europea, Eurostat. A continuación se discuten algunos detalles de dicho estudio.

En el primer documento de este estudio, Fischer (1995) planteó las dificultades de realizar una comparación objetiva entre los métodos de ajuste estacional, y propuso una serie de criterios teóricos y empíricos para realizar dicha evaluación. Considerando los resultados de este documento, Eurostat decidió enfocar el estudio en la comparación de X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS.

El estudio realizado por Eurostat se centró en el estudio de algunas propiedades teóricas de ambos métodos, con el fin de destacar ventajas y desventajas. Las conclusiones de dicho estudio se encuentran detalladas en Planas (1997c), y se resumen a continuación.

Ajuste Previo. Dossé y Planas (1996a) realizaron una comparación de los procedimientos utilizados en RegARIMA y TRAMO. De la comparación concluyen que ambos métodos están basados en la misma metodología y que bajo supuestos equivalentes se obtienen resultados similares en ambos módulos. Así mismo, encuentran que además de ser más rápida, la rutina automática utilizada en TRAMO es preferible a la rutina semiautomática de RegARIMA .

Adicionalmente, Planas (1997b) realizó una comparación de los algoritmos utilizados para llevar a cabo la estimación de los parámetros utilizando máxima verosimilitud. En el documento concluye que los algoritmos arrojan resultados similares en la mayoría de los casos. Sin embargo, destaca que en el caso en el que el coeficiente del polinomio autorregresivo estacional se encuentra cerca de uno, los resultados obtenidos por TRAMO en muestras grandes tienen menor error cuadrático medio.⁸³

Ajuste Estacional de Series con Comportamiento Extremo. En particular se investigó el ajuste estacional cuando el comportamiento de los componentes es casi determinístico, y en el otro extremo el ajuste cuando el comportamiento de los componentes es muy inestable.

Cuando el comportamiento del componente estacional es muy estable, las raíces del polinomio de media móvil del modelo identificado para la serie observada son raíces unitarias, lo cual significa que el filtro WK se vuelve indeterminado. Maravall y Planas (1998) examinan el procedimiento utilizado para estimar modelos no invertibles en SEATS y comparan los resultados con los obtenidos utilizando X-12-ARIMA, el cual debido a su naturaleza empírica nunca se enfrenta al problema de invertibilidad.

Las conclusiones del documento son que la rutina utilizada en SEATS es válida. Adicionalmente encuentran que SEATS arroja resultados más estables de los obtenidos en X-12-ARIMA. Este resultado es atribuible a la relativa rigidez de los filtros disponibles en el módulo X-11, los cuales no permiten distribuir la variabilidad entre el componente estacional y el componente irregular de manera satisfactoria.

⁸¹ Ver Bell y Hillmer (1984) para más detalles.

⁸² En los siguientes sitios web se pueden encontrar varias referencias útiles:

- Oficina del Censo de los Estados Unidos: <http://www.census.gov/srd/www/x12a/>
- Banco de España: <http://www.bde.es/servicio/software/econom.htm>
- Proyecto de ajuste estacional de EUROSTAT: <http://europa.eu.int/en/comm/eurostat/research/noris4/>

⁸³ Ya que normalmente no es posible trabajar con series económicas de longitud suficiente. Planas (1997b) sugiere que cuando se estime un modelo poco parsimonioso con series de tiempo cortas se utilice mínimos cuadrados, en vez de máxima verosimilitud.

Cuando los patrones de los componentes no observados son inestables, el modelo identificado por TRAMO no admite una descomposición aceptable; por lo cual tiene que ser aproximado por SEATS. Tal como en el caso anterior, X-12-ARIMA no se enfrenta a este problema.

Fiorentini y Planas (1997) evalúan la aproximación utilizada por SEATS y comparan los resultados con los obtenidos por X-12-ARIMA. Los autores concluyen que a pesar de que la aproximación utilizada por SEATS introduce variabilidad adicional a la estimación de los componentes; los resultados obtenidos son más estables que los obtenidos por el módulo X-11, el cual no es capaz de adaptarse a la variabilidad del componente estacional.

Revisiones de los Datos Ajustados. Dossé y Planas (1996b) examinan las revisiones que sufren los componentes estimados cuando se agregan observaciones a la serie de tiempo observada. Para el caso del componente estacional encuentran que SEATS en general resulta en un componente más estable.

Aunque encuentran que la velocidad de convergencia en X-12-ARIMA es mayor a la velocidad observada en SEATS, atribuyen este resultado al tamaño de las revisiones. Con respecto al componente de tendencia, en general el espectro del componente de tendencia en SEATS tiende a ser más rápido que en X-12-ARIMA. Por lo que la interpretación de los resultados no es tan clara, ya que las diferencias se deben a que los componentes miden diferentes aspectos de la serie.

Estabilidad de los Componentes Estimados. Para evaluar este aspecto, Depoutot y Planas (1998) desarrollaron una medida de la distancia entre filtros, con el fin de aproximar los filtros utilizados por el módulo X-11 con el modelo de la aerolínea. Una vez que encuentran una correspondencia entre los filtros, realizan una comparación del ajuste estacional obtenido con ambos métodos utilizando algunas de las series que Fischer y Planas (1998) encontraron están bien descritas por este modelo.

Los resultados de dicho trabajo indican que tanto las series ajustadas estacionalmente como las series de tendencia obtenidas utilizando SEATS, son más estables que las obtenidas utilizando el módulo X-11.

Planas (1996) estudió el origen de la mayor variabilidad en la serie ajustada estacionalmente obtenida por el módulo X-11 con respecto a la obtenida por SEATS. Este resultado llama la atención, ya que en el proceso de identificación SEATS maximiza la variabilidad del componente irregular. En el documento, Planas concluye que la mayor variabilidad del ajuste obtenido por el módulo X-11 se debe a que en la mayoría de los casos, la ganancia del filtro es mayor a uno entre las frecuencias estacionales. Dado que estas frecuencias están asociadas a movimientos de corto plazo, el resultado es que la serie ajustada estacionalmente muestra más variabilidad que la serie original.

Como resultado de este estudio, Eurostat adoptó y recomienda TRAMO-SEATS para realizar el ajuste estacional de series económicas.

Es importante mencionar, sin embargo, que existen otros estudios en donde las conclusiones no son tan claras. Por ejemplo, a pesar de que en el estudio realizado por el Banco Central Europeo (2000), encuentran resultados muy similares a los del estudio de Eurostat, en las conclusiones enfatizan que, a pesar de las falencias teóricas de X-12-ARIMA, no es recomendable menospreciar la diversidad de herramientas empíricas asociadas a la familia X-11; las cuales siguen siendo utilizadas por la mayoría de Bancos Centrales y Oficinas de Estadística alrededor del mundo.⁸⁴

⁸⁴ Ver Kikut y Ocampo (2005) para una conclusión similar en el contexto latinoamericano.

Bibliografía

- Banco Central Europeo, (2000), "Seasonal Adjustment of Monetary Aggregates and HICP for the Euro Area", Banco Central Europeo, Frankfurt
- Bell, W.R. y B.C. Monsell, (1992), "X-11 Symmetric Linear Filters and their Transfer Functions", *U.S. Census Bureau Research Report No. 92/15*, U.S. Census Bureau
- Bell, W.R. y S.C. Hillmer, (1984), "Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol 2.
- Box, G.E.P., y G.M. Jenkins, (1984), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 2da. Ed., Holden Day, San Francisco.
- Box, G.E.P., S.C. Hillmer y G.C. Tiao, (1978), "Analysis and Modelling of Seasonal Time Series", en *Seasonal Analysis of Time Series*, Zellner, A. (ed), U.S. Bureau of the Census, Washington, D.C.
- Burman J.P., (1980), "Seasonal Adjustment by Signal Extraction", *Journal of the Royal Statistical Society Series A*, Vol. 143.
- Burridge, P., y K.F. Wallis, (1988), "Prediction Theory for Autoregressive Moving Average Processes", *Econometric Reviews*, Vol. 7.
- Caporello, G. y A. Maravall, (1994), "Program TSW. Revised Manual Version May 2004", Documento Ocasional No. 0408, Banco de España.
- Chen, C. y L.M. Liu, (1993), "Joint Estimation of Model Parameters and Outlier Effects in Time Series", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88.
- Cleveland, W.P. y G.C. Tiao, (1976), "Decomposition of Seasonal Time Series: a Model for the X-11 Program", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 71.
- Dagum E.B. (1988), "The X-11-ARIMA/88 Seasonal Adjustment Method", Statistics Canada
- _____ (1980), "The X-11-ARIMA Seasonal Adjustment Method", Statistics Canada

- Dagum E.B., (1975), "Seasonal Factor Forecasts from ARIMA Models", *Proceedings of the International Institute of Statistics*, 40ésima Sesión.
- Depoutot, R. y C. Planas, (1998), "Comparing Seasonal Adjustment and Trend extraction Filters with Application to a Model-Based Selection of X-11 Linear Filters", Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat
- Dossé, J. y C. Planas (1996a) "Pre-adjustment in Seasonal Adjustment Methods: A Comparison of REGARIMA and TRAMO", Documento de Trabajo No. D3/SA/07, Eurostat
- Dossé, J. y C. Planas (1996b) "Revisions in Seasonal Adjustment Methods: An Empirical Comparison", Documento de Trabajo No. D3/SA/08, Eurostat
- Findley, D.F., Monsell B.C., Bell W.R., Otto M.C., y Chen B., (1998), "New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol 16.
- Fiorentini, G. y C. Planas, (1997), " Non-Admissibility and the Specification of Unobserved Components Models" , Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat.
- Fischer, B. y C. Planas, (1998), " Large Scale Fitting of ARIMA Models and Stylised Facts of Economic Time Series" , Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat.
- Fischer, B., (1995), " Decomposition of Time Series, Comparing Different Methods in Theory and in Practice" , Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat.
- Gómez. V., (1999), " Three Equivalent Methods for Filtering Nonstationary Time Series" , *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 17.
- Gómez V. y A. Maravall, (2001a), " Automatic Modelling Methods for Univariate Series" , en Peña, D. G.C. Tiao, y R.S. Tsay (eds.) *A Course in Time Series Analysis*, John Wiley and Sons, Nueva York.
- _____ (2001b), " Seasonal Adjustment and Signal Extraction in Economic Time Series" , en Peña, D. G.C. Tiao, y R.S. Tsay (eds.) *A Course in Time Series Analysis*, John Wiley and Sons, Nueva York.
- _____ (1997), " Programs TRAMO and SEATS, Instructions for the User" Banco de España
- _____ (1994), " Estimation, Prediction, and Interpolation for Nostationary Series with the Kalman Filter" , *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 89, No. 426.
- _____ (1992), " Time Series Regression with ARIMA Noise and Missing Observations - Program TRAMO" , Documento de Trabajo 92/81, Departamento de Economía, European University Institute.
- Hamilton, J., (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton NJ.
- Hannan, E.J. y J. Rissanen, (1982), " Recursive Estimation of Mixed Autoregressive-Moving Average Order" , *Biometrika*, Vol. 69.
- Harvey, A.C., (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge
- Henderson, R., (1916), " Note on Graduation by Adjusted Average" , *Transactions of the American Society of Actuaries*, Vol. 17.
- Hillmer, S.C. y G.C. Tiao, (1982), " An ARIMA-Model Based Approach to Seasonal Adjustment" , *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 77.
- Kaiser, R. y A. Maravall, (2000), " Notes on Time Series Analysis, ARIMA Models and Signal Extraction" , Documento de Trabajo 0012, Banco de España
- Kikut, A.C. y A.N. Ocampo, (2005) " Ajuste Estacional de Series Económicas con TRAMO/SEATS y Census X12-ARIMA" , Documento de Trabajo del Banco Central de Costa Rica.
- Kohn, R. y C.F. Ansley, (1987), " Signal Extraction for Finite Nonstationary Time Series" , *Biometrika*, Vol. 74.
- Ladiray, D. y B. Quenneville, (2001), " Seasonal Adjustment with the X-11 Method" en *Lecture Notes in Statistics* 158, 220 pp., Springer Verlag New York Inc., New York
- Maravall, A., (1988) " A Note on Minimum Mean Squared Error Estimation of Signals with Unit Roots" , *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 12.
- Maravall, A. y C. Planas, (1998), " Signal Extraction in Non-Invertible Models" Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat.
- Persons W.M., (1919), " Indices of Business Conditions" , *Review of Economic Statistics*, 1.
- Pierce, D.A. (1980), " Data Revisions in Moving Average Seasonal Adjustment Procedures" , *Journal of Econometrics*, Vol 14, No. 1.
- Planas, C., (1998), " Linear Signal Extraction with Intervention Techniques in Non Linear Time Series" , Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat
- _____ (1997a), " Applied Time Series Analysis: Modelling, Forecasting, Unobserved Component Analysis and the Wiener-Kolmogorov Filter" , Eurostat, Luxemburgo.

- _____ (1997b), “ Estimation of AutoRegressive Moving Average Models: A Comparative Study” , Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat.
- _____ (1997c), “ The Analysis of Seasonality in Economic Statistics: A Survey of Recent Developments” , Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat.
- _____ (1996), “ Short-Term Variability in Seasonally Adjusted Time Series”, Documento del Grupo de Trabajo en Ajuste Estacional, Eurostat.
- Shishkin, J., A. H. Young y J.C. Musgrave, (1967), “ The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program” *U.S. Census Bureau Technical Paper 15*, U.S. Census Bureau
- Tiao, G. y R. S. Tsay, (1983), “ Consistency Parameters of Least Square Estimates of Autoregressive Parameters in ARMA Models” , *The Annals of Statistics*, Vol. 11.
- Tsay, R.S. (1984), “ Regression Models with Time Series Errors”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 79.
- Tsay, R.S. (1986), “ Time Series Model Specification in the Presence of Outliers” *Journal of the American Statistical Association*, Vol, 79.
- U.S. Census Bureau (2000), “ X-12-ARIMA Reference Manual Version 0.2.7”, Washington D.C.

Anexo

Herramientas y conceptos del análisis de series de tiempo

En este anexo se detallan brevemente algunas de las herramientas y conceptos utilizados en la exposición.⁸⁵ Para una introducción detallada en el contexto del ajuste estacional ver Kaiser y Maravall (2000) ó Planas (1997). Para una introducción formal ver, ver Hamilton (1994)

La sección A.1 introduce algunos operadores, que permiten expresar los modelos de series de tiempo de manera concisa. La sección A.2 introduce algunos conceptos básicos de análisis de series de tiempo. La sección A.3 introduce brevemente los procesos ARIMA. Las secciones A.4 y A.5 describen las herramientas básicas de análisis de series de tiempo. Finalmente la sección A.6 describe los filtros lineales y algunas de sus propiedades.

A.1 Operadores de series de tiempo

El operador de rezago L se define como:⁸⁶

$$L^k x_t = x_{t-k}$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Los polinomios en el operador de rezago toman la siguiente forma:

$$\phi(L) = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots + \phi^p L^p$$

Las p raíces del polinomio se obtienen resolviendo $\phi(L) = 0$ para L .

Los operadores de diferenciación, o de diferencia, se definen como:

$$\Delta^d = (1 - L)^d$$

$$\Delta_d = 1 - L^d$$

Finalmente, en el contexto de ajuste estacional se define la diferencia estacional como:

$$\vartheta = 1 + L + L^2 + \dots + L^{s-1} = \sum_{j=0}^{s-1} L^j$$

donde s es el número de periodos observados por año.

A.2 Procesos estocásticos y estacionaridad

En términos generales un **proceso estocástico** es una variable aleatoria, X , cuyas realizaciones obedecen a una distribución $f_t(X)$. Si se supone que X es multidimensional,⁸⁷ i. e. $X = (x_1, x_2, \dots, x_T) = \{x_t\}_t$, y que el índice $t = 1, 2, \dots, T$ denota tiempo, entonces se puede definir a una serie de tiempo como una realización particular del proceso estocástico X .

⁸⁵ A lo largo del anexo, \mathbb{C} representa el conjunto de números complejos, \mathbb{R} representa el conjunto de números reales, y finalmente \mathbb{Z} se refiere al conjunto de los números enteros.

⁸⁶ Potencias negativas del operador de rezago definen al operador de adelanto: $F^k = L^{-k}$, e.g. $F^2 x_t = x_{t+2}$.

⁸⁷ Donde la dimensión puede ser infinita.

Dado que una serie de tiempo representa una sola observación de la distribución del proceso estocástico, para poder realizar inferencia acerca de series de tiempo habitualmente se realizan los siguiente supuestos:

1. *El proceso estocástico es estacionario en covarianza.*⁸⁸

Un proceso estocástico, $\{x_t\}_t$, es estacionario en covarianza si se cumplen las siguientes condiciones:

- a. El proceso tiene media constante: $E(x_t) = \mu$, donde $\mu \in \mathbb{R}$
- b. El proceso tienen varianzas acotada: $E[x_t - E(x_t)]^2 = \gamma_0 < \infty$
- c. La covarianza del proceso: $E[x_t - E(x_t)][x_{t-k} - E(x_{t-k})] = \gamma_k$, depende exclusivamente de la distancia entre las observaciones, k ; no del momento en el cual se observan, t .

En economía, la mayor parte de las series de interés son de hecho no estacionarias; sin embargo, utilizando transformaciones relativamente simples, se puede obtener una serie estacionaria a partir de una serie no estacionaria.

En los casos mas comunes una media constante se obtiene tomando diferencias de la serie, mientras que una varianzas acotada se obtiene utilizando transformaciones de la familia Box-Cox.⁸⁹ En la práctica para obtener series estacionarias se utiliza alguna combinación de ambas técnicas, además de la eliminación de observaciones atípicas.

2. *El proceso estocástico se distribuye normalmente.*

Dado que la distribución normal esta totalmente caracterizada por los primeros dos momentos, se puede demostrar que un proceso estocástico estacionario que se distribuye normalmente es de hecho, estacionario en sentido estricto. Es decir la distribución conjunta es normal multivariada y es invariante a translaciones en el tiempo. Lo cual garantiza que transformaciones no lineales de la serie también serán estacionarias.

El fundamento teórico de la modelación de series de tiempo, utilizando modelos lineales, esta dado por el siguiente resultado:

⁸⁸ La estacionaridad en covarianza también es conocida como: estacionaridad en sentido débil, estacionaridad de segundo orden, ó simplemente como estacionaridad.

⁸⁹ Ver nota 19 en la sección 3.2

Recuadro 4

TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE WOLD

Toda serie estacionaria en covarianza puede ser expresada como la suma de una función determinística, $c(t)$; y una sucesión infinita de variables aleatorias no correlacionadas, e_t :

$$x_t = c(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j} \quad (29)$$

$$\text{donde } \psi_0 = 1 \text{ y } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty .$$

$$x_t = c(t) + \psi(L)e_t$$

Ya que siempre se puede calcular la media de un proceso estacionario, el problema de caracterizar una serie de tiempo es equivalente a estimar los coeficientes del polinomio $\psi(L)e_t$. El problema con esta estrategia es que se trata de un polinomio infinito. Por ello, en la modelación de series de tiempo usualmente se utilizan procesos estocásticos autorregresivos de media móvil (ARMA por sus siglas en inglés). Los procesos ARMA pueden ser interpretados como una aproximación a la parte estocástica del teorema de descomposición de Wold.

Antes de describir las herramientas básicas de análisis de series de tiempo, a continuación se describen algunas características de los procesos ARIMA .

A.3 Procesos ARIMA

El ruido blanco es uno de los procesos estocásticos más sencillos, sin embargo sirve de base para construir modelos de series de tiempo más generales. Formalmente el ruido blanco es un proceso estocástico $\{\varepsilon_t\}_t$ estacionario en covarianza, con media cero $E(\varepsilon_t) = 0$ y covarianza:

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \gamma_\tau = \begin{cases} \sigma^2 & \text{para } \tau = t \\ 0 & \text{para } \tau \neq t \end{cases}$$

en algunas aplicaciones se supone adicionalmente que los elementos de la sucesión son independientes, o que provienen de una distribución normal.

Un proceso de media móvil de orden 1, MA(1), esta definido de la siguiente manera:

$$x_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

donde ε_t es ruido blanco.

Este proceso tiene media $E(x_t) = \theta e_{t-1}$, varianza $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta^2)$ y autocovarianza

$$\gamma_k = \begin{cases} -\sigma^2\theta & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

La generalización de un proceso MA(1) es un proceso MA(q):

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (30)$$

$$x_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

Es fácil demostrar que cualquier modelo MA(q) con coeficientes constantes es estacionario, si las raíces del polinomio $\theta(L) = 0$ tienen módulo fuera del círculo unitario entonces se dice que el proceso es invertible; es decir, se puede expresar de manera alternativa como un proceso autorregresivo infinito.

Un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1), está definido de la siguiente manera:

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (31)$$

donde ε_t es ruido blanco.

Iterando sobre (31) se obtiene la siguiente expresión:

$$x_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \cdots + \phi^k\varepsilon_{t-k} + \phi^{k+1}x_{t-k-1} \quad (32)$$

Ya que el proceso $\{\varepsilon_t\}_t$ es estacionario, suponiendo que $|\phi| < 1$, se puede demostrar que el último término de la ecuación (32) desaparece cuando $k \rightarrow \infty$, por lo que el proceso AR(1) se puede expresar como:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

El proceso AR(1) tiene media $E(x_t) = 0$ y autocovarianza: $\gamma_k = \left\{ \frac{\sigma^2\phi^k}{(1-\phi^2)} \right\}$. La generalización de un proceso AR(1) es un proceso AR(p):

$$x_t - \phi_1x_{t-1} - \phi_2x_{t-2} - \cdots - \phi_px_{t-p} = \varepsilon_t \quad (33)$$

$$\phi(L)x_t = \varepsilon_t$$

La generalización de la condición de estacionaridad del modelo AR(1), $|\phi| < 1$, es que las raíces del polinomio $\phi(L) = 0$ tengan módulo fuera del círculo unitario. De manera análoga a la condición de invertibilidad de los procesos MA, si un proceso AR es estacionario el proceso tiene una representación equivalente como una media móvil infinita.

Una clase de procesos general que agrupa a los procesos AR(p) y MA(q) como casos especiales es la clase de procesos autorregresivos con media móvil ARMA(p,q):

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (34)$$

$$\phi(L)x_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

donde ε_t es ruido blanco. Es importante notar que la estacionaridad de un proceso ARMA(p,q) depende solamente de las raíces del polinomio autorregresivo.

Como se mencionó anteriormente en economía la mayoría de las series de interés son no estacionarias por lo que normalmente se considera la generalización de modelos ARMA para procesos integrados de orden d , es decir series con media no constante que recuperan una media constante cuando se toman d diferencias del proceso.

Formalmente el proceso x_t integrado de orden d , $x_t \sim I(d)$, en donde para cada t :

$$\phi(L)\Delta^d x_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (35)$$

donde los polinomios $\phi(L)$ y $\theta(L)$ están definidos como en (34), y ε_t es ruido blanco; es conocido como un proceso integrado autorregresivo con media móvil (ARIMA por sus siglas en inglés) de orden (p,d,q)

Box y Jenkins (1984) generalizaron la clase de procesos ARIMA para trabajar con series que presentan estacionalidad. La idea básica es que si una serie de tiempo se observa s veces al año, las observaciones de un periodo en el año deben de ser similares a las del mismo periodo en años subsecuentes.

Un proceso ARIMA estacional se puede expresar como:

$$\Phi(L^s)\Delta_s^D x_t = \Theta(L^s)\varepsilon_t \quad (36)$$

donde los polinomios $\Phi(L^s)$ y $\Theta(L^s)$ son finitos en L^s de orden P y Q respectivamente, y satisfacen las condiciones de estacionaridad e invertibilidad. El operador Δ_s^D es la diferencia estacional definida en A.1 y dado que en el caso mas general las observaciones de periodos sucesivos estarán correlacionadas se supone que las innovaciones ε_t obedecen a su vez un proceso ARIMA (p,d,q):

$$\phi(L)\Delta^d \varepsilon_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (37)$$

donde ε_t es ruido blanco. Combinando (36) y (37) se obtiene el proceso ARIMA (p,d,q)(P,D,Q):

$$\phi(L)\Phi(L^s)\Delta^d \Delta_s^D x_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t \quad (38)$$

A.3.1 Metodología de modelación Box y Jenkins

Box y Jenkins desarrollaron a principios de los años 70 (ver Box y Jenkins 1984) una metodología general para modelar procesos ARIMA, a la cual se le conoce como metodología Box-Jenkins. Básicamente la metodología consiste en un proceso recursivo de tres etapas:

Identificación

En la primera etapa se determinan tanto el orden de integración de la serie de tiempo X_t , como el orden de los polinomios AR y MA regulares y estacionales. Para ello la principal herramienta es el análisis de la función de autocovarianza del proceso, la cual se discute con más detalle en la sección A.4 más adelante.

Una vez que el orden de integración ha sido identificado, el modelo ARIMA se puede interpretar como un modelo ARMA para la transformación estacionaria $\Delta^d x_t$ de la serie. A continuación se describe el método más utilizado de identificación y estimación de coeficientes de un modelo ARMA:

El Método de Hannan-Rissanen

El método de identificación y estimación desarrollado por Hannan y Rissanen (1982), parte de la estimación preliminar de un modelo AR(k) para obtener un estimador de las innovaciones del proceso ε_t .

Utilizando esta estimación, $\hat{\varepsilon}_t$, se busca el orden de los polinomios AR y MA por mínimos cuadrados utilizando los criterios de información de Akaike y de Schwartz.

El método consiste en los siguientes pasos:

1. Multiplicando ambos lados de (33) por x_t y tomando expectativas se obtiene un conjunto de ecuaciones conocidas como ecuaciones de Yule-Walker:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad (39)$$

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 - \dots - \phi_{k_{\max}} \gamma_{k_{\max}}$$

donde γ_k es la k -ésima autocovarianza y $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$. Una vez que se resuelven las ecuaciones de Yule-Walker,⁹⁰ se obtienen los coeficientes de un modelo $AR(k_{\max})$

2. A continuación se estima el criterio de información de Akaike⁹¹ para cada uno de los modelos AR estimados, y se escoge el modelo $AR(k)$ que tenga el menor criterio de información.
3. Se estiman los residuales del modelo escogido.
4. Se estiman los coeficientes de modelos ARMA(p,q) por mínimos cuadrados hasta el orden $p \leq \text{Min}(p_{\max}, k)$ y $q \leq q_{\max}$, donde p_{\max} y q_{\max} son valores definidos a priori.
5. A partir de los residuales de los modelos ARMA(p,q) estimados en el paso anterior se estima el criterio de información de Schwartz⁹² para cada modelo ajustado y se escoge el modelo con el menor criterio de información.

Estimación

⁹⁰ Habitualmente se utiliza el algoritmo de Levinson-Durbin; el cual es un proceso iterativo para resolver las ecuaciones de Yule-Walker donde primero se ajusta un modelo AR(1), luego un AR(2) y así sucesivamente hasta que se obtienen los coeficientes de AR(p)

⁹¹ Ver nota al pie 20 en la sección 3.2

⁹² Ver nota al pie 21 en la sección 3.2

Normalmente para estimar el modelo recién identificado se utiliza el método de mínimos cuadrados o el método de máxima verosimilitud. A continuación se ilustra la metodología para el caso más sencillo, para una introducción detallada ver Hamilton (1994).

En una muestra aleatoria de T observaciones, la probabilidad de cada observación esta dada por $f(x_j, \psi)$. En virtud de la independencia de cada observación, la probabilidad conjunta es igual a:

$$f(x_1, \dots, x_T, \psi) = f(x_1, \psi)f(x_2, \psi) \cdots f(x_T, \psi) \quad (40)$$

$$L(\psi) = \prod_{j=1}^T f(x_j, \psi)$$

Esta función es conocida como la función de verosimilitud del conjunto de parámetros ψ dado el conjunto de observaciones X_t

El método de máxima verosimilitud consiste en encontrar el conjunto de parámetros $\psi = (\phi, \theta)$ que maximizan la función de verosimilitud (40), de la serie de tiempo; la cual se supone obedece un proceso ARIMA como el de la ecuación (35).

Bajo los supuestos de que las innovaciones en (35) son independientes, distribuidas normalmente con varianza σ^2 , y que los valores iniciales del proceso son conocidos, el logaritmo de la función de verosimilitud esta dado por:

$$\ln L(\psi, \sigma^2) = -\frac{1}{2}T \ln(2\pi) - T \ln(\sigma^2) - \frac{S(\psi)}{2\sigma^2} \quad (41)$$

donde:

$$S(\psi) = \sum_{j=1}^T \varepsilon_t^2$$

es la suma cuadrática de las innovaciones en (35).

Si se “concentra” el estimador de la varianza fuera de la ecuación (41) utilizando $\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\psi)}{T}$ la función a maximizar se convierte en:

$$-\frac{S(\psi)}{2\sigma^2} \quad (42)$$

donde se omite una constante que desaparece en la optimización. De la expresión (42) resulta claro que bajo los supuestos realizados la maximización de la función de verosimilitud es equivalente a la minimización de la suma de cuadrados.

Una vez que los parámetros del modelo han sido estimados, el siguiente paso es realizar una evaluación del modelo recién ajustado. Bajo los supuestos realizados, los residuales de la ecuación estimado deben de comportarse como variables independientes que obedecen una distribución normal idéntica.

Por ello, de la diversidad de diagnósticos existentes los más frecuentemente utilizados tienen que ver con la independencia de los residuales, la normalidad de su distribución y la constancia de la varianza. Adicionalmente existen diagnósticos para determinar si existen quiebres estructurales,

evaluar la significancia de la regresión, etc. Para una introducción detallada de los diagnósticos de modelos ARIMA ver Hamilton (1994).

Inferencia

Una vez que los diagnósticos del modelo tentativo satisfacen ciertos criterios, se puede proceder a la fase de inferencia. A continuación se describe brevemente como se utilizan los modelos ARIMA para realizar pronósticos; la cual es, sin duda, la aplicación mas utilizada de los modelos ARIMA .

Sea $\hat{x}_{T+k|T}$ el pronóstico del valor x_{T+k} obtenido a partir de las observaciones (x_1, \dots, x_T) . Claramente el objetivo al realizar el pronóstico es que este sea tan cercano al valor verdadero como sea posible, por ello la certeza de los pronósticos se evalúa utilizando el criterio de error cuadrático medio (MSE), dado por:

$$MSE(\hat{x}_{T+k|T}) = E[(x_{T+k} - \hat{x}_{T+k|T})^2]$$

donde $E[\cdot]$ es el operador de esperanza.

Se puede demostrar que el pronóstico con MSE mínimo se obtiene a partir de la esperanza de $\hat{x}_{T+k|T}$ condicional en el conjunto (x_1, \dots, x_T) . Bajo el supuesto de normalidad la esperanza condicional es una combinación lineal de los elementos en (x_1, \dots, x_T) , que para un modelo ARIMA (p,d,q) como (35) se puede escribir como:

$$\hat{x}_{T+q|T} = \delta_1 \phi_1 \hat{x}_{T+q-1|T} + \dots + \delta_{p+d} \phi_{p+d} \hat{x}_{T+q-p-d} + \theta_q \varepsilon_T$$

$$\hat{x}_{T+k|T} = \delta_1 \phi_1 \hat{x}_{T+k-1|T} + \dots + \delta_{p+d} \phi_{p+d} \hat{x}_{T+k-p-d} + \theta_q \varepsilon_T \text{ para } k > d$$

donde los pronósticos de j pasos adelante ($j = 1, 2, \dots, k$), se obtienen recursivamente a partir de:

$$\hat{x}_{T+1|T} = \delta_1 \phi_1 x_T + \dots + \delta_{p+d} \phi_{p+d} x_{T-p-d+1} + \theta_1 \varepsilon_T + \dots + \theta_q \varepsilon_{T-q+1}$$

Alternativamente utilizando el teorema de descomposición de Wold (29) el pronóstico de k pasos adelante se puede escribir como:

$$\hat{x}_{T+k|T} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+k} \varepsilon_{t-j}$$

donde $\psi(L) = \frac{\theta(L)}{\delta(L)\phi(L)}$.

Por lo tanto el error del pronóstico se puede escribir como:

$$x_{T+k} - \hat{x}_{T+k|T} = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j \varepsilon_{T+k-j}$$

Se puede demostrar fácilmente que independientemente del modelo utilizado ψ_1 siempre es igual a uno, por lo que el error de un paso adelante siempre es igual a ε_{T+1} , por ello es que a la sucesión de $\{\varepsilon_t\}_t$ se le conoce también como innovaciones.

Ya que las innovaciones son independientes con media cero y varianza σ^2 el error cuadrático medio del pronóstico k pasos adelante es igual a:

$$MSE(\hat{x}_{T+k|T}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2$$

Finalmente explotando el supuesto de normalidad, el intervalo de confianza para el pronóstico de k pasos adelante se puede construir como:

$$\left[\hat{x}_{T+k|T} - C_{1-\alpha/2} \sqrt{MSE(\hat{x}_{T+k|T})}, \hat{x}_{T+k|T} + C_{1-\alpha/2} \sqrt{MSE(\hat{x}_{T+k|T})} \right]$$

donde $C_{1-\alpha/2}$ es el valor crítico de la distribución normal estándar que se excede con probabilidad $(1 - \alpha/2)$.

Como se mencionó anteriormente, el análisis de series de tiempo puede ser realizado en dos dominios, los cuales bajo los supuestos realizados son equivalentes.

El primer dominio es el del tiempo, en donde se analiza la relación de una observación x_t con observaciones pasadas y futuras de la serie de tiempo. El segundo dominio es el de la frecuencia, en donde se analizan las regularidades en los movimientos de la serie. La elección de dominio esta determinado por la naturaleza del análisis que se pretende realizar.

A continuación se describen ambos tipos de análisis:

A.4 Análisis en el dominio del tiempo

El segundo momento de un proceso estocástico estacionario esta dado, en términos generales, por la función de autocovarianza:⁹³

$$g(L) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (L^k + L^{-k}) \quad (43)$$

Para un proceso estacionario que ha sido parametrizado, la función de autocovarianza (43), es una función de k y de los parámetros que caracterizan al proceso estocástico.

Resulta conveniente contar con una medida del segundo momento que no tenga escala, para ello se normaliza la función de autocovarianza dividiendo por la varianza del proceso, lo cual permite obtener la función de autocorrelación:

$$r(L) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k (L^k + L^{-k}) \quad (44)$$

donde $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \in [-1, 1]$, y en particular $\rho_0 = 1$.

Una de las características básicas de una serie de tiempo estacionaria es que su función de autocorrelación; o alternativamente su contraparte muestral, el correlograma,⁹⁴ eventualmente tiende

⁹³ La función de autocovarianza se puede escribir así, ya que para un proceso estacionario, $\gamma_k = \gamma_{-k}$ para todo valor de k .

⁹⁴ El correlograma esta dado por:

a cero. Por ejemplo, bajo el supuesto de estacionaridad se puede demostrar⁹⁵ que la k -ésima autocorrelación de un proceso AR(p) (ecuación 33) obedece la misma ecuación recursiva que la serie de tiempo para toda $k > p$:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (45)$$

por lo que dependiendo de la naturaleza de las raíces del polinomio⁹⁶ $\phi(L) = 0$, la función de autocorrelación de un proceso AR(p) estacionario puede decaer hacia cero de manera monotónica u oscilando como una función sinusoidal.

Para un proceso MA(q) la k -ésima autocovarianza se puede expresar como:

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-k} \theta_{k-i} \theta_i \text{ para } k = 0, 1, \dots, q$$

$$\gamma_k = 0 \text{ para } k > q$$

donde σ^2 es la varianza del proceso $\{\varepsilon_t\}$ en (30). Por lo tanto la función de autocorrelación de un proceso MA(q) se corta abruptamente después del q -ésimo rezago.

Para un proceso ARIMA (p,q) la k -ésima autocorrelación es una función de los parámetros de los polinomios $\phi(L)$ y $\theta(L)$ hasta el q -ésimo rezago a partir del cual la función de autocorrelación se comporta como la ecuación (45).

En general para un proceso ARMA(p,q) estacionario la función de autocovarianza esta dada por:

$$g(L) = \sigma^2 \frac{\theta(L)\theta(L^{-1})}{\phi(L)\phi(L^{-1})}$$

Dado que el análisis de las autocovarianzas de una serie de tiempo estacionaria permiten caracterizarla de manera análoga a la caracterización de la distribución de una variable aleatoria utilizando los momentos de la distribución, la función de autocovarianza es la herramienta básica de análisis en el dominio del tiempo.

A.5 Análisis en el dominio de la frecuencia

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}$$

⁹⁵ Utilizando las ecuaciones de Yule-Walker descritas en la sección A.3 Ver Hamilton (1994) para detalles.

⁹⁶ Dependiendo si las raíces son reales o complejas.

Para entender mejor los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia, resulta conveniente pensar en una serie de tiempo como la suma ponderada de varias series o componentes (no observables) con diferentes comportamientos.

Por ejemplo; como se menciona en la introducción, una serie de tiempo puede ser vista como la suma (o producto) de un componente de tendencia, un componente cíclico, un componente estacional y un componente irregular. De esta manera, la varianza total de la serie de tiempo se puede interpretar como la suma de las contribuciones de los componentes no observables, los cuales varían a diferentes frecuencias. El análisis en el dominio de la frecuencia, o análisis espectral, se ocupa de determinar las contribuciones de los diferentes componentes, al comportamiento de la serie de tiempo de interés.

La función de autocovarianza para una serie de tiempo estacionaria (ecuación 43), evaluada en $e^{-i\omega}$, esta dada por:

$$g(e^{-i\omega}) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j}$$

donde $e^{-i\omega}$ es la representación exponencial de un número complejo.⁹⁷ Dividiendo esta expresión por 2π se obtiene el espectro del proceso:

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} g(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \left(\gamma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} \right)$$

Utilizando el teorema de De Moivre,⁹⁸ y utilizando algunos algunos resultados trigonométricos,⁹⁹ el espectro se puede expresar como:¹⁰⁰

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j) \right] \quad (46)$$

⁹⁷ Un número complejo se puede expresar como

$$z = a + bi$$

donde $z \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Alternativamente utilizando la identidad de Euler, se puede expresar como un exponente de la siguiente manera:

$$z = me^{iA}$$

donde $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ denota el módulo de z ; y A , definido como $\cos \omega = \frac{b}{r}$, representa su argumento. En un gráfico polar, A representa el ángulo formado por el vector $a + bi$; el cual tiene cateto adyacente a , cateto opuesto b , e hipotenusa m .

⁹⁸ El teorema de De Moivre permite establecer la siguiente identidad:

$$\exp(-i\omega j) = \cos(-\omega j) - i \sin(-\omega j)$$

⁹⁹ En particular:

$$\sin(0) = \cos(\pi) = 0$$

$$\sin(\pi) = \cos(0) = 1$$

$$\sin(-\omega) = -\sin(\omega)$$

$$\cos(-\omega) = -\cos(\omega)$$

¹⁰⁰ Esta representación del espectro (53) es conocida también como la transformada de Fourier de la función de autocovarianza.

Similarmente si en vez de utilizar la función de autocovarianza, se utiliza la función de autocorrelación se obtiene la función de densidad espectral:

$$s^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\rho_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \cos(\omega j) \right]$$

El espectro caracteriza a la serie de tiempo en el dominio de la frecuencia, de la misma manera que la función de autocovarianza la caracteriza en el dominio del tiempo.

Es importante notar que dado que la función coseno completa un ciclo con frecuencia 2π , i. e. $\cos(\omega j) = \cos[(\omega + 2\pi m) j] \forall j, m \in \mathbb{Z}$, y que es una función simétrica, i. e. $\cos(\omega) = \cos(-\omega)$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, el análisis del espectro (46) se puede restringir a las frecuencias en el rango $[0, \pi]$.

El supuesto de estacionaridad en covarianza de la serie de tiempo garantiza la existencia del espectro, así como que el espectro sea una función continua de ω , la cual toma valores no negativos para todo valor de ω .

Similar a la manera en que a partir de la función de autocovarianza es posible calcular el espectro, si se conoce el espectro se pueden calcular las autocovarianzas de un proceso estocástico. Para ello se utiliza la transformada inversa de Fourier, dada por:¹⁰¹

$$\gamma_j = \int_{-\pi}^{\pi} s(\omega) \cos(\omega j) d\omega = 2 \int_0^{\pi} s(\omega) \cos(\omega j) d\omega \quad (47)$$

lo cual justifica la aseveración realizada anteriormente con respecto a la equivalencia del análisis en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

Evaluando la ecuación (47) en $j = 0$, se obtiene:

$$\gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} s(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\pi} s(\omega) d\omega$$

A partir de esta expresión se ve claramente que la varianza de un proceso se puede interpretar como la suma de espectro en todo el rango de frecuencias, tal como se mencionó al inicio del anexo.

Restringiendo el rango de integración a $[0, \omega_1]$ donde $\omega_1 < \pi$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{2}{\gamma_0} \int_0^{\omega_1} s(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_1} s^*(\omega) d\omega$$

la cual representa la proporción de la varianza que esta asociada a los componentes con frecuencia menor o igual a ω_1 . Por lo tanto si una serie de tiempo tiene un componente importante con frecuencia ω_1 , la gráfica del espectro mostrara un pico alrededor de esta frecuencia.

El periodo¹⁰² de una serie se define como $\tau = 2\pi/\omega$. Por ejemplo, si la frecuencia de muestreo es trimestral; un pico espectral en $\omega = \pi$, (con periodo 2) está asociado a un componente observado semestralmente. Un pico espectral en $\omega = \pi/2$, (con periodo 4), está asociado a un movimiento que

¹⁰¹ La segunda identidad se establece a partir de la simetría del espectro alrededor de cero.

¹⁰² El periodo en este contexto es la longitud de un ciclo medido en términos de la frecuencia de muestreo.

se observa anualmente. Finalmente un pico espectral alrededor de la frecuencia $\omega = 0$ (lo cual implica un periodo que tiende a infinito), está asociado a un componente de tendencia.

Cómo se discute en la sección 4 del documento, los métodos de ajuste estacional utilizan filtros lineales. Por ello, en la siguiente sección se discuten brevemente sus características.

A.6 Filtros lineales

Un filtro lineal se define como:

$$a(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j L^j \quad (48)$$

donde los ponderadores son reales, i. e. $a_j \in \mathbb{R}$; no dependen del tiempo y satisfacen $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$.

Aplicando el filtro lineal $a(L)$ a un proceso estocástico estacionario, x_t , da como resultado un nuevo proceso estocástico:

$$y_t = a(L)x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x_{t-j} \quad (49)$$

donde las propiedades de x_t se transmiten a y_t por medio del filtro lineal $a(L)$. Para examinar el efecto que tiene el filtro lineal es conveniente realizar el análisis en el dominio de la frecuencia.

Utilizando la transformada de Fourier discutida en A.5, se obtiene el espectro del filtro lineal aplicado a x_t (49):

$$s_y(\omega) = |a(e^{-i\omega})|^2 s_x(\omega)$$

donde:

$$a(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j}$$

es conocido como la respuesta de frecuencia¹⁰³ del filtro lineal. Esta función describe como el espectro de la serie x_t es afectado por la aplicación del filtro $a(L)$.

Dado que la respuesta de frecuencia puede resultar en valores complejos resulta conveniente expresarla como:¹⁰⁴

$$a(e^{-i\omega}) = G(\omega)e^{-iF(\omega)} \quad (50)$$

donde:

$$G(\omega) = |a(e^{-i\omega})| \quad (51)$$

¹⁰³ También se conoce como función de transferencia.

¹⁰⁴ Ver notas al pie 97 y 98.

y

$$F(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{-\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \sin(\omega j)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cos(\omega j)} \right] \quad (52)$$

son respectivamente el módulo y el argumento de la respuesta de frecuencia.

En este contexto el módulo, $G(\omega)$, es conocido como la ganancia del filtro; el cual determina la medida en la que la amplitud de los movimientos observados en cierta frecuencia en el espectro de x_t son transferidos al espectro de y_t . Por ejemplo una ganancia de cero alrededor de la frecuencia $\omega_1 \in [0, \pi]$ significa que el proceso filtrado no mostrará movimientos alrededor de dicha frecuencia.

Por su parte el argumento, $F(\omega)$, es conocido como el desplazamiento de fase del filtro, el cual esta asociado a desplazamientos de la serie en el dominio del tiempo.¹⁰⁵ Es importante notar que cuando $a_j = a_{-j}$ para toda j , es decir cuando se trata de un filtro simétrico; el desplazamiento de fase del filtro es igual a cero,¹⁰⁶ i. e. $F(\omega) = 0$.

Para ilustrar el impacto de ambos efectos¹⁰⁷ se considera la serie $x_t = \sin(\pi t/3)$ y el filtro lineal $a(L) = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 L^j$. El resultado se ilustra en la figura 12, donde la línea sólida representa la serie original y la línea punteada representa la serie filtrada.

Del análisis gráfico se destacan dos efectos: Por un lado las oscilaciones de la serie filtrada son de amplitud menor a las de la serie original. Adicionalmente los cambios de tendencia de las series ocurren en diferentes momentos en el tiempo, es decir hay un desplazamiento de la serie filtrada con respecto a la original.

¹⁰⁵ A veces el desplazamiento de fase se expresa como $F(\omega)/\omega$, lo cual permite expresar el desfase en unidades de tiempo.

¹⁰⁶ Para entender esta propiedad de los filtros lineales, se utilizan los siguientes resultados trigonométricos:

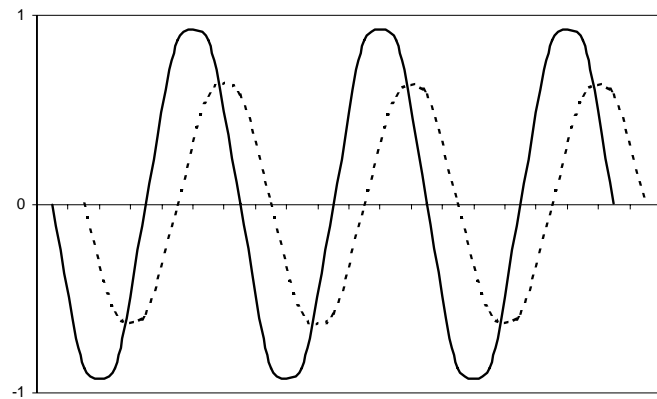
$$\sin(-\omega) + \sin(\omega) = 0$$

$$\sin(0) = 0$$

Esto implica que cuando $h_j = h_{-j}$, el producto $\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \sin(\omega j)$ en (59) es igual a cero, lo cual a su vez implica que $F(\omega) = 0$ dado que $\tan^{-1}(0) = 0$.

¹⁰⁷ El ejemplo fue tomado de Ladiray y Quenneville (2001).

Figura 12
EFFECTOS DE LA APLICACIÓN DE UN FILTRO LINEAL
 Serie original (---) serie filtrada (—)



A partir de la respuesta de frecuencia del filtro:

$$a(e^{-i\omega}) = \frac{1}{3} (1 - e^{-i\omega} - e^{-2i\omega})$$

se obtienen su ganancia y desplazamiento de fase:

$$G(\omega) = \left| \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(\omega)) \right|$$

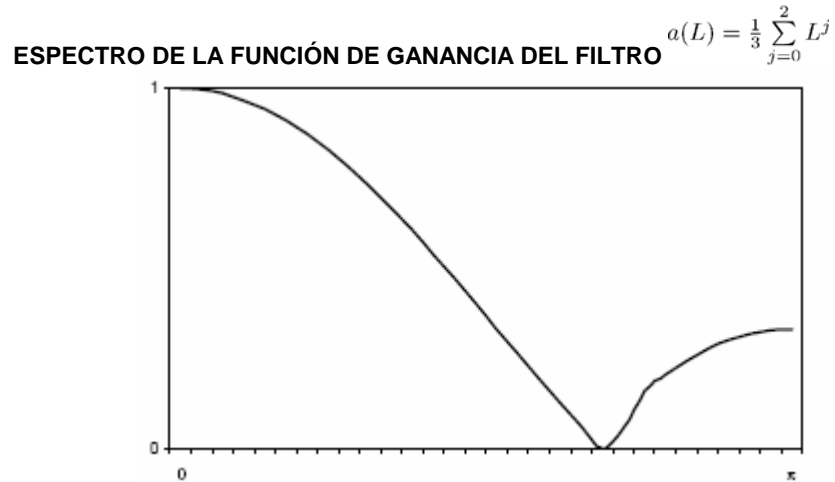
$$F(\omega) = -\omega$$

La función de ganancia evaluada en $\omega \in [0, \pi]$ se gráfica en la figura 13, en la cual se aprecia como la función de ganancia caracteriza el efecto del filtro en el rango $[0, \pi]$.

Claramente, la ganancia del filtro es igual a cero en la frecuencia $\omega = 2\pi/3$. Esto significa que el filtro remueve el efecto de cualquier componente de la serie x_t que tenga fluctuaciones con periodo 3. Por ejemplo, si se trata de una serie de tiempo mensual el filtro eliminará cualquier efecto cuatrimestral presente en la serie.

Normalizando el desplazamiento de fase se obtiene que $F(\omega)/\omega = -1$. Esto significa que el filtro introduce un desfase temporal de un periodo en la serie filtrada. Por esta razón en las herramientas de ajuste estacional los filtros utilizados siempre son simétricos.

Figura 13



A continuación se describen brevemente los filtros lineales utilizados por X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS.

A.6.1 El filtro de Kalman

Para poder utilizar el algoritmo recursivo conocido como el filtro de Kalman;¹⁰⁸ es necesario expresar el sistema dinámico de interés como un modelo de Espacio de Estados, los cuales se pueden representar de manera general como:¹⁰⁹

$$y_t = A'x_t + H'\xi_t + w_t \quad (53)$$

$$\xi_t = F\xi_{t-1} + v_t \quad (54)$$

en donde y_t es una serie observable, x_t es una serie de variables predeterminadas exógenas,¹¹⁰ ξ_t es un vector de variables de estado no observables, A , H y F son matrices de parámetros, mientras que los vectores w_t y v_t son innovaciones vectoriales que se comportan como:

$$w_t \sim \mathcal{N}(0, R)$$

$$v_t \sim \mathcal{N}(0, Q)$$

Se supone que los vectores w_t y v_t , son independientes para toda t , es decir $E(w_t v_\tau) = 0, \forall t, \forall \tau$. La ecuación (53) se conoce como la ecuación de observación, y la ecuación (54) se conoce como la ecuación de estado.

El algoritmo del filtro de Kalman explota la estructura lineal de la representación, y el hecho de que las perturbaciones sean Gaussianas permiten proyectar, para cada t los primeros dos

¹⁰⁸ Para una descripción detallada del filtro de Kalman, ver Hamilton (1994) capítulo 13.

¹⁰⁹ En el caso más general las matrices A , H y F pueden variar en el tiempo, sin embargo para fines ilustrativos se suponen constantes sin pérdida de generalidad.

¹¹⁰ Por exogeneidad se debe entender que x_t no contiene información acerca de ξ_{t+s} , w_{t+s} para $s = 0, 1, 2, \dots$ más allá de la contenida en $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1$. Por ejemplo puede incluir rezagos de y o variables que no estén correlacionadas con ξ_t ni con w_t , para toda t .

momentos de ξ_t , condicionales en la información disponible en $t-1$. Después actualiza la proyección para el momento t incorporando la información disponible en t de manera que el error cuadrático de la proyección se va minimizando en cada paso.

En particular el algoritmo de Kalman consta de los siguientes pasos:

1. El filtro de Kalman se inicializa con los dos primeros momentos incondicionales de ξ_1 :¹¹¹

$$\xi_1^* = E(\xi_1)$$

$$P_1^* = E[(\xi_1 - \xi_1^*)(\xi_1 - \xi_1^*)']$$

2. Después se itera para $t = 1, \dots, T$ sobre las siguientes ecuaciones, para obtener los dos primeros momentos condicionales:

$$\xi_{t+1}^* = F\xi_t^* + K_t(y_t - A'x_t - H'\xi_t^*)$$

$$P_{t+1}^* = (F - K_t H')P_t^* F' + Q$$

donde la matriz K_t , conocida como la matriz de ganancia de Kalman, esta dada por:

$$K \equiv F P_t^* H (H' P_t^* H + R)^{-1}$$

3. Finalmente se calcula la proyección de la serie observable y_t^* :

$$y_t^* = A'x_t + H'\xi_t^*$$

la cual tiene un error cuadrático dado por:

$$MSE_{y_t} = H' P_t^* H + R$$

A.6.2 Las medias móviles de X-11

Las medias móviles utilizadas en X-11 pueden ser visto como combinaciones (convoluciones)¹¹² de medias móviles simples.

En general X-11 utiliza medias móviles del tipo $m \times n$, lo cual significa que se trata de una media móvil que resulta de la combinación de una media móvil de m elementos y un promedio simple de n elementos.

¹¹¹ Normalmente el valor inicial de ξ_1^* se supone igual a cero, mientras que el valor inicial de la matriz de covarianza P_1^* se obtiene de la siguiente relación: $(P_1^*)^{-1} = [I - (F \otimes F)]^{-1} \text{vec}(Q)$ donde I es la matriz identidad, \otimes es el producto de Kronecker, y $\text{vec}()$ es un operador matricial que ordena las columnas de una matriz en un solo vector.

¹¹² Una convolución se define como:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

la cual mide la coincidencia entre dos funciones: f y g , mientras g se desliza sobre f .

Para obtener estimadores del componente estacional, las medias móviles utilizadas¹¹³ son del tipo $3 \times n$:

$$M_{3 \times n}(L) = \frac{1}{3 \times n} (L^{-s} + 1 + L^s)(L^{-sk} + \dots + L^{-s} + 1 + L^s + \dots + L^{sk})$$

donde s es el número de observaciones por año, y $k = \frac{s-1}{2}$. Las opciones disponibles en X-12-ARIMA para n son 3,5,9 y 12.

Por su parte para obtener estimadores del componente de tendencia ciclo, se cuenta con dos tipos de filtro:¹¹⁴ filtros del tipo $2 \times s$, y medias móviles de Henderson.

Para una serie que se observa s veces al año el filtro del tipo $2 \times s$ esta dado por:

$$M_{2 \times s}(L) = \frac{1}{2 \times s} (L^{-2} + L^{-1})(1 + L + L^2 + \dots + L^s)$$

El filtro de Henderson¹¹⁵ de n términos se define como:

$$H_n(L) = \sum_{j=-l}^l h_j L^j$$

donde $l = \frac{n-1}{2}$ y

$$h_j = \frac{315 [(m-1)^2 - j^2] (m^2 - j^2) [(m+1)^2 - j^2] (3m^2 - 16 - 11j^2)}{8m(m^2 - 1)(4m^2 - 1)(4m^2 - 9)(4m^2 - 25)}$$

donde $m = l + 2$.

Los ponderadores h_j , se obtienen a partir de un problema de optimización que busca maximizar el grado de alisado de la serie filtrada, sujeto a ciertas restricciones. Para una discusión detallada de su derivación ver el la sección A.1 en el anexo de Findley, et. al. (1998), ó la sección 3.2 en Ladiray y Quenneville (2001).

En X-12-ARIMA se pueden utilizar filtros de Henderson de orden n igual a 9, 13, 17 y 23 términos para series mensuales, y orden n igual a 5 y 7 términos para series trimestrales.

A.6.3 El filtro de Wiener-Kolmogorov

Suponiendo que una serie de tiempo x_t se puede descomponer en una señal s_t y ruido r_t independiente de la señal, entonces la serie de tiempo se puede escribir como:

$$x_t = s_t + r_t \quad (55)$$

Si se conocen las funciones de autocovarianza de los procesos s_t y r_t es posible encontrar un estimador de la señal utilizando un proceso de filtrado:¹¹⁶

¹¹³ Conocidos como filtros estacionales.

¹¹⁴ Conocidos como filtros de tendencia.

¹¹⁵ Desarrollado por Robert Henderson (1916) para su uso en trabajo actuarial.

¹¹⁶ Lo cual es equivalente a calcular la esperanza de s_t condicional en la observación de la serie de tiempo x_t .

$$\hat{s}_t = W(L)x_t$$

Para estimar los ponderadores óptimos del filtro $W(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j L^j$, se utiliza un criterio de minimización del error cuadrático medio de la estimación. Dicho error se puede definir como:

$$MSE(\hat{s}_t) = s_t - \hat{s}_t$$

En virtud del teorema de proyección ortogonal, para minimizar el error cuadrático medio se impone la siguiente restricción:

$$E[(s_t - \hat{s}_t)x_{t-k}] = cov[s_t - \hat{s}_t, x_{t-k}] = \gamma(s_t - \hat{s}_t, x_{t-k}) = 0$$

para $k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty$. Por lo tanto para cada k se tiene que:

$$\gamma(s_t x_{t-k}) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j \gamma(x_{t-j}, x_{t-k}) = 0$$

Evaluando esta expresión en $e^{-i\omega}$ se puede expresar en el dominio de la frecuencia como:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} g_{xs}(\omega) d\omega - \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j e^{-i\omega j} \right) g_x(\omega) d\omega = 0$$

donde g_{xs} es el espectro cruzado¹¹⁷ entre la señal y la serie de tiempo.

En el caso de que la serie de tiempo sea estacionaria,¹¹⁸ la integral es finita por lo que para toda $k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty$, se cumple lo siguiente:

$$g_{xs}(\omega) - W(e^{-i\omega})g_x(\omega) = 0$$

Esto significa que el filtro de extracción de señal óptimo, conocido como el filtro de Wiener-Kolmogorov, está dado por:

$$W(e^{-i\omega}) = \frac{g_{xs}(\omega)}{g_x(\omega)}$$

Bajo el supuesto de independencia de los componentes de la serie el filtro de Wiener-Kolmogorov se puede escribir como:

$$W(e^{-i\omega}) = \frac{g_s(\omega)}{g_x(\omega)} \quad (56)$$

¹¹⁷ El espectro cruzado es el equivalente de la covarianza entre dos variables en el dominio de la frecuencia.

¹¹⁸ Se puede demostrar que bajo ciertos supuestos adicionales, el filtro de Wiener Kolmogorov también minimiza el error cuadrático medio cuando se aplica a series no estacionarias. Para más detalles ver Maravall (1988).

es decir como la razón entre el espectro de la señal y el espectro de la serie de tiempo. Equivalentemente el filtro de Wiener-Kolmogorov se puede expresar en el dominio del tiempo como la razón entre la función de autocovarianza de la señal con respecto a la de la serie de tiempo.

Es importante notar que el filtro de extracción de ruido es simplemente el complementario del filtro de la señal, es decir:

$$1 - \frac{g_s(\omega)}{g_x(\omega)}$$

por lo que no es necesario calcular el espectro del ruido para obtener su estimador.

Dado que el valor absoluto de (56) representa la ganancia del filtro, si la señal domina al ruido la ganancia del filtro sera cercana a uno, mientras que en el caso contrario la ganancia del filtro de la señal sera cercana a cero.

Suponiendo que la señal en (55) obedece un proceso ARMA:

$$\phi(L)s_t = \theta(L)\varepsilon_t^s$$

donde ε_t^s es un proceso de ruido blanco con varianza σ_s^2 ; y que el ruido en (55) es un proceso de ruido blanco con varianza σ_n^2 , entonces se tiene que:

$$x_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t^s + r_t$$

El espectro de la señal, y de la serie de tiempo están dados, respectivamente, por:

$$g_x(\omega) = \sigma_s^2 \frac{\theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})} + \sigma_n^2$$

$$g_s(\omega) = \sigma_s^2 \frac{\theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})}$$

por lo que el filtro de Wiener-Kolmogorov (56) esta dado por:

$$W(e^{-i\omega}) = \frac{\sigma_s^2 \theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega})}{\sigma_s^2 \theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega}) + \sigma_n^2 \phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})}$$

o de manera equivalente en el dominio del tiempo:

$$W(L) = \frac{\sigma_s^2 \theta(L)\theta(F)}{\sigma_s^2 \theta(L)\theta(F) + \sigma_n^2 \phi(L)\phi(F)}$$

donde $F = L^{-1}$.

Se puede observar que el filtro de Wiener-Kolmogorov es simétrico, y que depende de los coeficientes de los modelos de la serie de tiempo y de sus componentes.



NACIONES UNIDAS

Serie

CEPAL

estudios estadísticos y prospectivos

Números publicados

1. Hacia un sistema integrado de encuestas de hogares en los países de América Latina, Juan Carlos Feres y Fernando Medina (LC/L.1476-P), N° de venta: S.01.II.G.7, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
2. Ingresos y gastos de consumo de los hogares en el marco del SCN y en encuestas a hogares, Heber Camelo (LC/L.1477-P), N° de venta: S.01.II.G.8, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
3. Propuesta de un cuestionario para captar los ingresos corrientes de los hogares en el marco del SCN 1993, Jorge Carvajal (LC/L.1478-P), N° de venta: S.01.II.G.9, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
4. Enfoques para la medición de la pobreza. Breve revisión de la literatura, Juan Carlos Feres y Xavier Mancero (LC/L.1479-P), N° de venta: S.01.II.G.10, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
5. Proyecciones latinoamericanas 2000-2001, Alfredo Calcagno, Sandra Manuelito y Gunilla Ryd (LC/L.1480-P), N° de venta: S.01.II.G.11, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
6. La vulnerabilidad social y sus desafíos, una mirada desde América Latina, Roberto Pizarro (LC/L. 1490-P), N° de venta: S.01.II.G.30, (US\$ 10.00), febrero, 2001. [www](#)
7. El método de las necesidades básicas insatisfechas (NBI) y sus aplicaciones en América Latina, Juan Carlos Feres y Xavier Mancero (LC/L. 1491-P), N° de venta: S.01.II.G.31 (US\$ 10.00), febrero, 2001. [www](#)
8. Escalas de equivalencia: reseña de conceptos y métodos, Xavier Mancero (LC/L.1492-P), N de venta: S.01.II.G.32, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
9. Consideraciones sobre el índice de Gini para medir la concentración del ingreso, Fernando Medina (LC/L.1493-P), N° de venta: S.01.II.G.33, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
10. Los desafíos del Mercosur ante la devaluación de la moneda brasileña, Arturo O'Connell (LC/L.1498-P), N° de venta: S.01.II.G.40, (US\$ 10.00), febrero, 2001. [www](#)
11. La medición del desarrollo humano: elementos de un debate, Xavier Mancero (LC/L.1548-P), N° de venta: S.01.II.G.61, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
12. Países industrializados: resumen de las proyecciones 2000-2001, Gunilla Ryd (LC/L.1519-P), N° de venta S.01.II.G.62, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
13. Perspectivas de América Latina en el nuevo contexto internacional 2001, Centro de Proyecciones Económicas (CPE), (LC/L.-P), N° de venta S.01.II.G., (US\$ 10.00), mayo, 2001. [www](#)
14. La pobreza en Chile en el año 2000, Juan Carlos Feres (LC/L.1551-P), N° de venta S.01.II.G.92, (US\$ 10.00), mayo, 2001. [www](#)
15. La convertibilidad argentina: ¿un antecedente relevante para la dolarización de Ecuador?, Alfredo Calcagno y Sandra Manuelito (LC/L.1559-P), N° de venta S.01.II.G.104., (US\$ 10.00), junio, 2001. [www](#)
16. Proyecciones latinoamericanas 2001-2002, Alfredo Calcagno, Sandra Manuelito y Gunilla Ryd (LC/L.1688-P), N° de venta: S.02.II.G.3, (US\$ 10.00), enero, 2002. [www](#)
17. Países industrializados: resumen de las proyecciones 2001-2002, Gunilla Ryd (LC/L.1702-P), N° de venta S.02.II.G.13, (US\$ 10.00), febrero, 2002. [www](#)
18. Países industrializados: un análisis comparativo de las proyecciones 2002-2003, Gunilla Ryd (LC/L.1868-P), N° de venta S.03.II.G.39, (US\$ 10.00), marzo, 2003. [www](#)
19. Proyecciones de América Latina y el Caribe, 2003, Centro de Proyecciones Económicas (CPE), (LC/L.1886-P), N° de venta S.03.II.G.52, (US\$ 10.00), abril, 2003. [www](#)
20. Reseña de programas sociales para la superación de la pobreza, Marcia Pardo (LC/L.1906-P), N° de venta S.03.II.G.64, (US\$ 10.00), mayo, 2003. [www](#)

21. Registros Administrativos, calidad de los datos y credibilidad pública: presentación y debate de los temas sustantivos de la segunda reunión de la Conferencia Estadística de las Américas de la CEPAL, Graciela Echegoyen (comp), (LC/L.2007-P), N° de venta S.03.II.G.168, (US\$ 10.00), noviembre, 2003. [www](#)
22. Apertura y cambio estructural de la economía brasileña, Alejandro Vargas, (LC/L.2024-P), N° de venta S.03.II.G.188, (US\$ 10.00), noviembre, 2003. [www](#)
23. Tendencias y extrapolación del crecimiento en América Latina y el Caribe, Hubert Escaith, (LC/L.2031-P), N° de venta S.03.II.G.193, (US\$ 10.00), noviembre, 2003. [www](#)
24. El desarrollo económico de América Latina entre dos épocas de globalización-una agenda de investigación, Albert Carreras, André A. Hofman, Xavier Tafunell y César Yáñez, (LC/L.2033-P), N° de venta S.03.II.G.197, (US\$ 10.00), noviembre, 2003. [www](#)
25. Potential output in Latin America: a standard approach for the 1950-2002 period, André A. Hofman, Heriberto Tapia, (LC/L.-2042P), N° de venta S.03.II.G.205, (US\$ 10.00), noviembre, 2003. [www](#)
26. Estados Unidos: ¿Una nueva economía, o más de lo mismo?, Gunilla Ryd (LC/L.2043-P), N° de venta S.03.II.G.202, (US\$ 10.00), diciembre, 2003. [www](#)
27. Proyecciones de América Latina y el Caribe, 2004, Centro de Proyecciones Económicas (CPE), (LC/L.2144-P), N° de venta S.04.II.G.72, (US\$ 10.00), mayo, 2004. [www](#)
28. Un enfoque contable y estructural al crecimiento y la acumulación en Brasil y México, (1983-2000), (LC/L.2188-P), N° de venta S.04.II.G.116, (US\$ 10.00), septiembre, 2004. [www](#)
29. Crecimiento económico, creación y erosión de empleo: un análisis intersectorial, Gabriel Gutiérrez (LC/L.2199-P), N° de venta S.04.II.G.125, (US\$ 10.00), octubre, 2004. [www](#)
30. Cuentas ambientales: conceptos, metodologías y avances en los países de América Latina y el Caribe, Farid Isa, Marcelo Ortúzar y Rayén Quiroga, (LC/L.2229-P), N° de venta: S.04.II.G.151, (US\$ 10.00), enero, 2005. [www](#)
31. Metodología de proyecciones económicas para América Latina, Centro de Proyecciones Económicas (CPE), (LC/L.2296-P), N° de venta S.05.II.G.44, (US\$ 10.00), abril, 2005. [www](#)
32. América Latina y el Caribe: proyecciones 2005, Centro de Proyecciones Económicas (CPE), (LC/L.2297-P), N° de venta S.05.II.G.45, (US\$ 10.00), abril, 2005. [www](#)
33. El acuerdo de libre comercio Mercosur-CAN: una evaluación cuantitativa, Daniel Berrettoni y Martín Cicowiez (LC/L.2310-P), N de venta S.05.II.G.59, (US\$ 10.00), abril, 2005. [www](#)
34. Indicadores sociales en América Latina y el Caribe, Simone Cecchini, (LC/L.2383-P), N° de venta S.05.II.G.127, (US\$ 10.00), septiembre, 2005. [www](#)
35. Propuesta metodológica para el desarrollo y la elaboración de estadísticas ambientales en países de América Latina y el Caribe, Dharmo Rojas, (LC/L.2398-P), N° de venta S.05.II.G.143, (US\$ 10.00), septiembre, 2005. [www](#)
36. Demanda de exportaciones e importaciones de bienes y servicios para Argentina y Chile, Claudio Aravena, (LC/L.2434-P), N° de venta S.05.II.G.180, (US\$ 10.00), diciembre 2005. [www](#)
37. Tópicos sobre el Modelo de Insumo-Producto: teoría y aplicaciones, Andrés Ricardo Schuschny, (LC/L.2444-P, N° de venta S.05.II.G.191, (US\$ 10.00), diciembre 2005. [www](#)
38. Elementos teóricos del ajuste estacional de series económicas utilizando X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS, Francisco Villarreal (LC/L.2457-P), N° de venta S.05.II.G.203, (US\$ 10.00), diciembre 2005. [www](#)

-
- El lector interesado en adquirir números anteriores de esta serie puede solicitarlos dirigiendo su correspondencia a la Unidad de Distribución, CEPAL, Casilla 179-D, Santiago, Chile, Fax (56-2) 210 2069, correo electrónico: publications@eclac.cl.

WWW Disponible también en Internet: <http://www.cepal.org/> o <http://www.eclac.org>

Nombre:

Actividad:

Dirección:

Código postal, ciudad, país:

Tel.:.....Fax:E.mail:.....