

00098.00

41022 0009800

Fecha: 22-7-76

ARCHIVO de DOCUMENTOS

Original NO SALE de la oficina

CELADE



CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Distribución interna

Albino Bocaz

Serie B, N° 23.
Febrero 1972.
50.

CALCULO APROXIMADO DE LA TASA
DE INCREMENTO ANUAL

00098.00
(4022)

I N D I C E

	<u>Página</u>
1. Introducción	1
2. Deducción de las aproximaciones	2
3. Algunos ejemplos numéricos	5
4. Determinación del tamaño de la población en un instante cualquiera	7
5. Tiempo a que se alcanza un tamaño determinado	9
6. Caso de crecimiento exponencial simple	10



900026124 - BIBLIOTECA CEPAL

1. Introducción

Se trata de presentar diversas aproximaciones de la tasa de incremento anual que evitan el uso de tabla de logaritmos.

No quiere decir esto que las aproximaciones se obtengan de manera más rápida que usando una tabla de logaritmos, sino que el mayor tiempo que pueda demorar el cálculo de estas aproximaciones está largamente compensado por el uso de operaciones sencillas.

En el presente artículo se presentan 6 aproximaciones diversas, desde la r_I que presenta un mayor grado de aproximación hasta la fórmula para r_{VI} que es la que tiene un grado menor de exactitud, pero que es la más sencilla de todas. Esta fórmula ya ha sido propuesta por Jacob Siegel en su artículo "Aproximación de la tasa anual promedio de cambio" aparecido en la revista "Estadística" de IASI N° 52 de septiembre de 1956, páginas 426-431.

La base en que se apoyan las fórmulas aproximadas se encuentra en el desarrollo en serie de $\log_e(1+x)$; que presenta una mayor rapidez de convergencia cuanto más pequeño es x .

Las fórmulas aproximadas permiten deducir además cuántos años se requieren para que una población tenga un tamaño dado con respecto a un año base, interesando por ejemplo saber -en forma aproximada- cuántos se requieren para que se duplique una población que anualmente tiene una tasa de incremento "r".

En este artículo se indica además cómo es posible por medio de la operación de elevación a potencia e interpolación lineal, si se conoce el tamaño de la población inicial y la tasa de incremento, determinar el tamaño en un instante "t" cualquiera.

2. Deducción de las aproximaciones

Si denotamos por:

r = tasa de incremento anual

P_0 = población total, en el año 0

P_t = población total, en el año t

t = número cualquiera de años, contados desde el origen
Estas cuatro cantidades están ligadas por la relación:

$$P_t = P_0(1+r)^t \quad (1)$$

que permite determinar cualquiera de ellas si se conocen 3 determinadas.

La relación (1) puede escribirse en la forma:

$$\log_e P_t/P_0 = t \log_e (1+r) \quad (2)$$

y si hacemos los cambios de variable:

$$v = 2(P_t - P_0)/(P_t + P_0); \quad \theta = r/(r+2) \quad (3)$$

la relación (2) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\log_e (1+vt/2)/(1-vt/2) = t \log_e (1+\theta)/(1-\theta) \quad (4)$$

siendo: $(vt/2)$ y (θ) cantidades generalmente pequeñas.

Puesto que los desarrollos en potencias de (x) de $\log_e(1+x)$ y $\log_e(1-x)$ son convergentes para $-1 < x \leq 1$ y $-1 \leq x < 1$ respectivamente, podemos desarrollar en potencias de $(vt/2)$ y (θ) las expresiones contenidas en la relación (4), con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \log_e (1+vt/2)/(1-vt/2) = & (vt/2 - v^2t^2/8 + v^3t^3/24 - v^4t^4/64 + v^5t^5/160 \mp \dots) + \\ & + (vt/2 + v^2t^2/8 + v^3t^3/24 + v^4t^4/64 + v^5t^5/160 + \dots) \end{aligned}$$

o sea

$$\log_e (1+vt/2)/(1-vt/2) = vt(1+v^2t^2/12 + v^4t^4/80 + \dots) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \log_e (1+\theta)/(1-\theta) = & (\theta - \theta^2/2 + \theta^3/3 - \theta^4/4 + \theta^5/5 + \dots) + \\ & + (\theta + \theta^2/2 + \theta^3/3 + \theta^4/4 + \theta^5/5 + \dots) \end{aligned}$$

o sea

$$\log_e(1+\theta)/(1-\theta) = 2 \theta(1 + \theta^2/3 + \theta^4/5 + \dots) \quad (6)$$

De las relaciones (5) y (6) podemos deducir las aproximaciones:

$$\log_e(1+vt/2)/(1-vt/2) \doteq vt/\sqrt{1-v^2t^2/6} \quad (7)$$

$$\log_e(1+\theta)/(1-\theta) \doteq 2 \theta/\sqrt{1-2 \theta^2/3}$$

y reemplazando estas aproximaciones en la relación (4), luego de reducir se tiene la aproximación para la tasa de incremento:

$$(2+r_I)/2 r_I = \sqrt{\left(\frac{t}{2} \frac{P_t+P_o}{P_t-P_o}\right)^2 - \frac{t^2-1}{6}} \quad (8)$$

Si en esta relación se supone que la cantidad $\left(\frac{t}{2} \frac{P_t+P_o}{P_t-P_o}\right)^2$ es relativamente grande con respecto a $\frac{t^2-1}{6}$, se llega a relación menos aproximada:

$$\frac{1}{r_{II}} = \frac{t}{6} \left[3 \frac{P_t+P_o}{P_t-P_o} - \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{P_t-P_o}{P_t+P_o} \right] - \frac{1}{2} \quad (9)$$

desarrollando el binomio solamente en sus primeros dos términos.

En esta relación (9) corrientemente el término $\left(\frac{1}{t^2}\right)$ será relativamente pequeño, con lo cual esa relación puede escribirse en la forma menos aproximada:

$$\frac{1}{r_{III}} = \frac{t}{6} \left(3 \frac{P_t+P_o}{P_t-P_o} - \frac{P_t-P_o}{P_t+P_o} \right) - \frac{1}{2} \quad (10)$$

que constituye una tercera forma de aproximar el valor de la tasa de incremento "r".

Esta fórmula es de relativa facilidad de aplicación y da en general resultados muy satisfactorios aún con tasas de incremento relativamente altas.

También de la relación (10) puede deducirse una fórmula para "r" que tiene relativa facilidad de cálculo. En efecto si denotamos por A la cantidad

$$A = \frac{t}{2} \left[3(P_t + P_o)/(P_t - P_o) - (P_t - P_o)/(P_t + P_o) \right] \quad (11)$$

una aproximación para "r" está dada por la relación:

$$r_{IV} = 3/A \left[1 + (3/A)/2 \right] \quad (12)$$

esto es, que calculamos previamente el valor de $(3/A)$ y luego corregimos ese valor en $\frac{1}{2}$ más la mitad del valor encontrado para $(3/A)$. La corrección de la mitad de $(3/A)$ que se introduce depende del valor de $(3/A)$ encontrado, de tal manera que si esta última cantidad es relativamente pequeña, será suficiente como aproximación para "r", el valor de

$$r_V = 3/A \quad (13)$$

De esta relación aproximada se puede pasar a una relación menos aproximada aún, si se supone que A es prácticamente igual a

$$\frac{3t}{2} \cdot \frac{P_t + P_o}{P_t - P_o} \quad (14)$$

con lo cual una aproximación de menos exactitud para la tasa de incremento es:

$$r_{VI} = \frac{2}{t} \frac{P_t - P_o}{P_t + P_o} \quad (15)$$

relación, que como bien se sabe, corresponde a la aproximación propuesta por Jacob Siegel.

Nota:

Debe destacarse un hecho de importancia que se cumple con las fórmulas (8) y (9) que constituyen las expresiones de mayor seguridad para estimar el valor de "r". Si en estas expresiones hacemos $t=1$, las fórmulas reproducen exactamente el valor de "r", o sea las dos aproximaciones propuestas son compatibles en uno de los extremos. No quiere eso decir que para valores de P_t y P_o y la variable "t" que signifique valores especiales de "r" las fórmulas resulten menos aproximadas que las posteriores.

3. Algunos ejemplos numéricos

Veamos a través de algunos ejemplos numéricos el grado de precisión de cada una de las aproximaciones encontradas.

Ejemplo 1^{1/}

Para la ciudad de Caracas se dispone de la siguiente información:

$$P_{1941} = 324.6 \quad P_{1950} = 693.9$$

Primera aproximación

$$\frac{2+r_I}{2r_I} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} \cdot \frac{1\ 018.5}{369.3}\right)^2 - \frac{80}{6}}$$

$$\frac{2+r_I}{2r_I} = \sqrt{(12.411)^2 - 13.33} = \sqrt{140.70} = 11.86$$

$$r_I = 2/22.72 = \underline{8.80\ \%}$$

Segunda aproximación

$$\frac{2+r_{II}}{r_{II}} = \frac{9}{3} \left(3 \cdot \frac{1\ 018.5}{369.3} - 0.99 \frac{369.3}{1\ 018.5} \right) = 3(8.274 - 0.359) = 23.745$$

$$r_{II} = 2/22.745 = \underline{8.79\ \%}$$

Tercera aproximación

$$A = \frac{9}{2} \left(3 \frac{1\ 018.5}{369.3} - \frac{369.3}{1\ 018.5} \right) = 4.5(8.274 - 0.363) = 4.5(7.911) = 35.60$$

$$\frac{1}{r_{III}} = \frac{35.60}{3} - \frac{1}{2} = 11.366 ; \quad r_{III} = 1/11.366 = \underline{8.80\ \%}$$

1/ Valores tomados del trabajo de Carmen A. Miró: La población de América Latina en el siglo XX, CELADE A/48, Santiago, Chile, 1965.

Cuarta aproximación

$$r_{IV} = \frac{1}{11.866} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11.866} \right) \right] = 8.43(1.042) = \underline{8.78 \%}$$

Quinta aproximación

$$r_V = 1/11.866 = \underline{8.43 \%}$$

Sexta aproximación

$$r_{VI} = \frac{2}{9} \cdot \frac{369.3}{1018.5} = \frac{0.363}{4.5} = \underline{8.07 \%}$$

Ya que el valor de "r" usando logaritmos es 8.808 por ciento, se puede ver que las 4 primeras aproximaciones son suficientes y por lo tanto, la de más facilidad de cálculo de ellas es la que debe usarse.

Ejemplo 2

Para la ciudad de Panamá se tiene:

$$P_{1950} = 164.1 \quad P_{1960} = 237.4$$

Usando la tercera aproximación, se tiene:

$$\frac{1}{r} = \frac{10}{6} \left(3 \frac{401.5}{73.3} - \frac{73.3}{401.5} \right) - \frac{1}{2} = \frac{10}{6}(16.432 - 0.182) - \frac{1}{2}$$

$$r = 1/26.583 = \underline{3.762 \%}$$

siendo el valor de "r" calculado por logaritmos 3.7617 por ciento, la aproximación dada por (10) es bastante satisfactoria.

Ejemplo 3

Para una ciudad en que la población se duplica en 5 años

Usando la aproximación tercera se tiene:

$$\frac{1}{r_{III}} = \frac{5}{6} \left(3 \frac{3}{1} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} = 8.667 \left(\frac{5}{6} \right) - \frac{1}{2} = 7.222 - 0.500 = 6.722$$

$$r_{III} = 1/6.722 = \underline{14.88 \%}$$

siendo el valor dado por el uso de logaritmos 14.87 por ciento.

4. Determinación del tamaño de la población en un instante cualquiera

Una vez determinado el valor de la tasa de incremento "r", es posible determinar también el valor de la población total P_t sin necesidad de recurrir a la tabla de logaritmos.

Valores de sumo interés serán siempre los tamaños de la población a 5 y 10 años desde la última población disponible, la que corresponde generalmente a un valor censal.

Si la población en un instante cualquiera es P_i , su tamaño 5 años después será

$$P_i(1+r)^5$$

y para 10 años después se tendrá:

$$P_i(1+r)^{10}$$

Estas potencias pueden calcularse fácilmente con la máquina de cálculo de la siguiente manera:

Se determina primero el valor del término $(1+r)$ y se eleva al cuadrado con lo cual se obtiene $(1+r)^2$. Esta cantidad se vuelve a elevar al cuadrado con lo que conseguimos $(1+r)^4$.

La cantidad recién obtenida la multiplicamos por el valor de $(1+r)$ y se obtiene de esa manera el valor de $(1+r)^5$. Si esta cantidad se eleva al cuadrado se tiene inmediatamente el valor de $(1+r)^{10}$.

Así por ejemplo, para la población estimada para la ciudad de Buenos Aires para los años 1970 y 1980, en base a los datos siguientes:

$$P_{1947} = 4\ 595.3 \quad P_{1960} = 6\ 734.3$$

se tendría para el valor de "r":

$$\frac{1}{r} = \frac{13}{6} \left(3 \frac{11\ 329.6}{2\ 139.0} - \frac{2\ 139.0}{11\ 329.6} \right) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{13}{6} (15.890 - 0.189) - \frac{1}{2} = 33.519 \quad r = 1/33.519 = \underline{2.98\ \%}$$

De esa manera:

$$(1+r) = 1.0298 \quad (1+r)^2 = 1.0605 \quad (1+r)^4 = 1.1247 \quad (1+r)^5 = 1.1582 \quad (1+r)^{10} = 1.3414$$

con lo cual la población estimada para 1970 y 1980 sería respectivamente:

$$P_{1970} = 6\,734.3(1.3414) = \underline{9\,033.4} \quad P_{1980} = 6\,734.3(1.7994) = \underline{12\,117.7}$$

Con los valores disponibles: $(1+r)$; $(1+r)^2$; $(1+r)^4$; $(1+r)^5$; $(1+r)^{10}$ es posible determinar cualquier valor de P_t incluyendo fracciones de año.

Así por ejemplo si se quisiera el valor de población para el año P_{1974} se tendría que disponer del valor de $(1+r)^{14}$, el que se obtiene multiplicando el valor de $(1+r)^{10}$ por el valor de $(1+r)^4$. Para este caso

$$(1+r)^{14} = (1.1247)(1.3414) = \underline{1.5087}$$

con lo cual la población para 1974 sería del orden de: $6\,734.3(1.5087) = \underline{10\,160.0}$

Si en cambio se deseara el valor de población para 1977, se tendría que disponer del valor de $(1+r)^{17}$ el cual se obtiene por multiplicación de $(1+r)^5$ por $(1+r)^{10}$ lo que nos da $(1+r)^{15}$ el que a su vez se multiplica por $(1+r)^2$. Para nuestro caso se tendría:

$$(1+r)^{17} = (1.0605)(1.1582)(1.3414) = \underline{1.6476}$$

y de esa manera la población estimada para 1977 bajo la hipótesis de crecimiento tipo interés compuesto sería:

$$P_{1977} = 6\,734.3(1.6476) = \underline{11\,095.4}$$

En el caso que se desee la población para valores de "t" que contienen fracciones de año se calculan los valores de la potencia de $(1+r)$ para los valores enteros de "t" que encierran el valor fraccionario. Así por ejemplo, si deseamos la población para el valor de $t = 14.3$, por ejemplo, debemos tener los valores de $(1+r)^{14}$ y $(1+r)^{15}$ y luego interpolar linealmente entre estos valores para obtener el valor de $(1+r)^{14.3}$.

Veamos por ejemplo, el caso de la ciudad de México para el cual se dispone de la siguiente información

$$P_{1950} = 2\,884.1 \quad P_{1960} = 4\,666.0$$

El valor estimado de la tasa de incremento es:

$$\frac{1}{r} \doteq \frac{10}{6} \left(3 \frac{7\,550.1}{1\,781.9} - \frac{1\,781.9}{7\,550.1} \right) - \frac{1}{2} = \frac{10}{6} (12.711 - 0.236) - \frac{1}{2} = 20.792$$

$$r = \underline{4.81 \%}$$

con lo cual los valores de las diversas potencias de $(1+r)$ son:

$$(1+r) = 1.0481 ; (1+r)^2 = 1.0985 ; (1+r)^4 = 1.2067 ; (1+r)^5 = 1.2647 ; (1+r)^{10} = 1.5995$$

y de allí obtenemos:

$$(1+r)^{14} = 1.9301 ; (1+r)^{15} = 1.0229$$

con lo cual el valor de interpolación lineal para 14.3 será:

$$1.9301(0.7) + 2.0229(0.3) = \underline{1.9579}$$

y el valor estimado de población para marzo de 1974 será:

$$P_{14.3} = 4\,666.0(1.9579) = \underline{9\,135.6}$$

5. Tiempo a que se alcanza un tamaño determinado

Otro de los problemas que puede interesar es determinar el tiempo al cual la población alcanza un tamaño determinado, como ser el tiempo a que se duplica una población cuya tasa de incremento es "r".

En este caso la fórmula aproximada (10) puede proveer también una aproximación aceptable para el valor de "t" a que se produce la situación requerida.

De la fórmula (10) se deduce que "t" es aproximadamente igual a:

$$t \doteq \left(1 + \frac{2}{r} \right) / \left(v - \frac{1}{3v} \right) \quad (16)$$

siendo

$$v = (P_t + P_o) / (P_t - P_o) \quad (17)$$

De esta fórmula se deduce que el tiempo necesario para que una población se duplique ($v = 3$) es aproximadamente igual a:

$$t \doteq \frac{9}{26} \left(1 + \frac{2}{r} \right) \quad (18)$$

que para "r" bastante pequeño puede reducirse a:

$$t \doteq 9/(13r) \quad (19)$$

De esa manera si $r = 2.5$ por ciento

$$t = 9/(13 \cdot 0.025) = 360/13 = \underline{27.7} \text{ años}$$

Para el caso de triplicación se tiene para $v = 2$, con lo cual (16) nos da:

$$t \doteq \frac{6}{11} \left(1 + \frac{2}{r}\right) \quad (20)$$

que para "r" bastante pequeño se reduce a:

$$t = 12/11r \quad (21)$$

De esa manera si la tasa de incremento es de 2.5 por ciento, la población se triplicará al cabo de

$$t = 480/11 = \underline{43.6} \text{ años}$$

6. Caso de crecimiento exponencial simple

En este caso la fórmula que da el tamaño de la población en el instante "t" está dada por la relación:

$$P_t = P_0 e^{\alpha t} \quad (22)$$

siendo " α " la elasticidad del crecimiento.

Se puede encontrar una fórmula aproximada para determinar " α " de la siguiente manera:

La fórmula (22) puede escribirse:

$$\log_e P_t/P_0 = \alpha t \quad (23)$$

haciendo el cambio

$$v = \frac{2}{t} \frac{P_t - P_0}{P_t + P_0}$$

se tiene

$$\log_e \frac{1 + vt/2}{1 - vt/2} = \alpha t \quad (24)$$

lo que puede desarrollarse en potencias de $vt/2$:

$$\begin{aligned} & (vt/2 - v^2 t^2/8 + v^3 t^3/24 - v^4 t^4/64 + v^5 t^5/80 - \dots) + \\ & + (vt/2 + v^2 t^2/8 + v^3 t^3/24 + v^4 t^4/64 + v^5 t^5/160 + \dots) = \varrho t \end{aligned} \quad (25)$$

lo que luego de reducir nos da:

$$vt(1 + v^2 t^2/12 + v^4 t^4/80 + \dots) = \varrho t \quad (26)$$

que nos permite escribir aproximadamente como estimación de " ϱ ":

$$\frac{1}{\varrho I} \doteq \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{t^2}{6}} \quad (27)$$

relación que si se supone que la cantidad $\frac{1}{v^2}$ es relativamente grande frente a $t^2/6$, permite llegar a la aproximación:

$$\frac{1}{\varrho II} \doteq \frac{t}{6} \left(3 \frac{P_t + P_o}{P_t - P_o} - \frac{P_t - P_o}{P_t + P_o} \right) \quad (28)$$

Ejemplo

Para la ciudad de Río de Janeiro se tiene:

$$P_{1950} = 2\,335.9 \quad P_{1960} = 3\,223.4$$

usando la aproximación dada por la relación (28) se tiene:

$$\frac{1}{\varrho} \doteq \frac{10}{6} \left(3 \frac{5\,559.3}{887.5} - \frac{887.5}{5\,559.3} \right) = \frac{10}{6} (18.792 - 0.160) = \frac{10}{6} (18.632)$$

$$\varrho \doteq 6/186.32 = \underline{3.22\%}$$

con lo cual la ley del crecimiento exponencial simple para Río de Janeiro es:

$$P_t = 3\,223.4 e^{0.0322 t}$$

Nota

Una vez que se ha obtenido el valor de " ϱ " puede determinarse el valor de e usando la aproximación:

$$e^{\varrho} \doteq 1 + \varrho \frac{1 + \varrho/6}{1 - \varrho/3} \quad (29)$$

que constituye una aproximación aceptable para valores de " ρ " tan altos como 50 por ciento.

Para el caso recién indicado de la ciudad de Río de Janeiro se tiene:

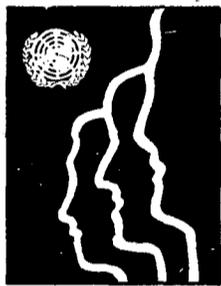
$$e^{0.0322} = 1 + 0.0322 \frac{6.0322}{5.9356} = 1 + 0.0327 = 1.03272$$

siendo igual al valor dado por la tabla de la función e^x .

Una vez obtenido el valor de e se puede determinar los valores de $e^{\rho t}$ siguiendo el mismo procedimiento de elevación a potencia indicado en el punto 4.

COMPARACIONES ENTRE LOS r EXACTOS Y r_{III} PARA $t = 5, 10, 20, 30$ AÑOS

$\frac{P_t}{P_0}$	t = 5		t = 10		t = 20		t = 30			
	r	r_{III}	r	r_{III}	r	r_{III}	r	r_{III}		
	(por mil)		(por mil)		(por mil)		(por mil)			
1.05	9.80	9.80	1.05	4.89	4.89	1.10	4.78	4.78	3.18	3.18
1.10	19.24	19.24	1.10	9.58	9.58	1.20	9.16	9.16	6.09	6.09
1.15	28.35	28.35	1.15	14.07	14.07	1.30	13.20	13.20	8.78	8.78
1.20	37.14	37.14	1.20	18.40	18.40	1.40	16.97	16.97	11.28	11.28
1.25	45.64	45.64	1.25	22.56	22.56	1.50	20.48	20.48	13.61	13.61
1.30	53.88	53.88	1.30	26.58	26.58	1.60	23.78	23.78	15.79	15.79
1.35	61.86	61.87	1.35	30.46	30.46	1.70	26.88	26.82	17.84	17.84
1.40	69.61	69.63	1.40	34.22	34.22	1.80	29.83	29.81	19.78	19.78
1.45	77.14	77.17	1.45	37.85	37.85	1.90	32.61	32.59	21.63	21.61
1.50	84.47	84.51	1.50	41.38	41.38	2.00	35.27	35.23	23.37	23.35
			1.55	44.80	44.80	2.10	37.79	37.74	25.04	25.00
			1.60	48.12	48.12	2.20	40.21	40.13	26.63	26.58
			1.65	51.35	51.35	2.30	42.52	42.42	28.15	28.08
			1.70	54.49	54.48	2.40	44.74	44.62	29.61	29.52
			1.75	57.56	57.54	2.50	46.88	46.72	31.01	30.91
			1.80	60.54	60.52	2.60	48.93	48.73	32.36	32.23
			1.85	63.45	63.42	2.70	50.92	50.68	33.66	33.50
			1.90	66.29	66.25	2.80	52.83	52.55	34.92	34.72
			1.95	69.06	69.02	2.90	54.68	54.33	36.13	35.90
			2.00	71.77	71.71	3.00	56.47	56.07	37.30	37.04



**CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CELADE**

Sede: J.M. Infante 9. Casilla 91. Teléfono 257806
Santiago (Chile)

Subsede: Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
Apartado Postal 5249
San José (Costa Rica)