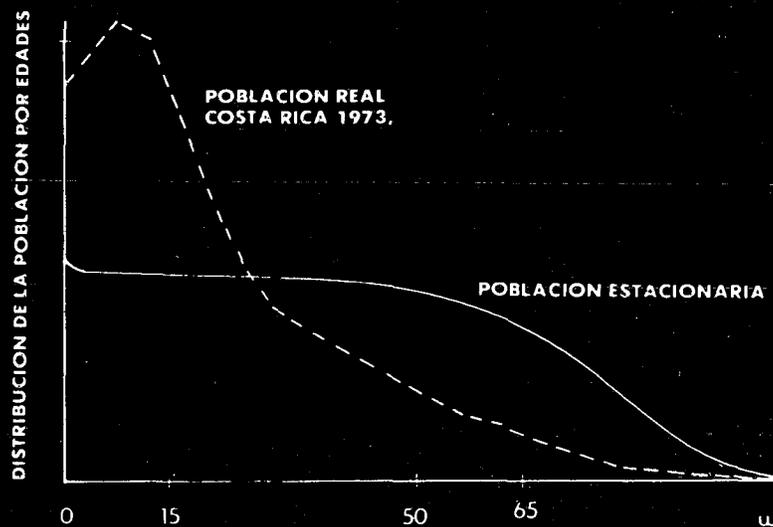


TABLAS DE MORTALIDAD



Antonio Ortega

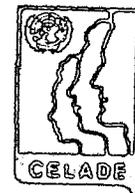
Centro Latinoamericano de Demografía



TABLAS DE MORTALIDAD

Antonio Ortega

SERIE 8. No.1008



Centro Latinoamericano de Demografía

San José, Costa Rica

Enero de 1982



El gráfico de la portada corresponde a una aplicación de la tabla de vida presentada en las páginas 172-175

Los datos y opiniones que figuran en este trabajo son de responsabilidad del autor, sin que el Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE) sea necesariamente partícipe de ellos

NOTA PRELIMINAR

La tabla de mortalidad es la herramienta más importante para el análisis de la mortalidad, siendo este estudio de interés tanto para los demógrafos como para los diversos profesionales vinculados a los temas de salud pública y de desarrollo económico y social en general. Los presentes apuntes han sido preparados para facilitar el desarrollo de las clases de esta materia, en el Curso Regional Intensivo de Demografía que se imparte en CELADE-San José en el segundo semestre de cada año, para estudiantes de los países de América Central, Panamá y el Caribe.

Se analizan en este documento algunos conceptos introductorios, las diversas funciones de la tabla, las probabilidades de vida y de muerte, el concepto de población estacionaria, las relaciones de supervivencia, las tablas modelo de mortalidad de Naciones Unidas y de Coale-Demeny, la construcción de tablas abreviadas y completas y algunas aplicaciones de la tabla de mortalidad en estudios de la población. Tales temas son de gran interés con fines de análisis demográfico y son retomados más adelante, de una u otra forma, durante el desarrollo del curso. Al final de cada capítulo se incluyen algunos ejemplos ilustrativos con las soluciones correspondientes. Para complementar el estudio de cada uno de los temas considerados, se recomienda consultar la bibliografía indicada al final.

Las primeras ideas sobre la tabla de vida fueron desarrolladas por John Graunt en su libro "Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality", publicado en 1662, en el cual se presentó información referida a una generación de personas, la cual se reducía gradualmente por defunciones. Esta idea representó un tremendo avance, desde la simple tasa bruta de mortalidad a un nuevo método de representar los patrones de mortalidad por edad. El siguiente evento importante en la historia de las tablas de vida, es

la elaboración de las llamadas tablas de vida de Halley, publicadas en 1693, y basadas en los registros de nacimientos y defunciones de los años 1687 a 1691 de la ciudad polaca de Breslau. Durante el siglo 18 se elaboraron varias tablas utilizando procedimientos rudimentarios e información de defunciones exclusivamente.

La primera tabla construida sobre los principios modernos actuales, tomando en cuenta las defunciones y la población expuesta al riesgo de muerte, fue elaborada por Milne en 1815, para la ciudad inglesa de Carlisle. Se obtuvo con ella una esperanza de vida al nacer de 38.72 años, para los dos sexos combinados. Desde entonces se ha publicado un gran número de tablas; las primeras de ellas se refirieron fundamentalmente a los países de Europa, mientras que en el siglo actual, especialmente durante los últimos 30 o 40 años, se han construido tablas para la mayoría de los países del mundo. Puede encontrarse una lista bastante completa de las tablas de vida nacionales disponibles, en los Anuarios Demográficos de las Naciones Unidas.

*

* *

CONTENIDO

	Página
NOTA PRELIMINAR.....	i
Capítulo 1. CONCEPTO Y FUNCIONES DE LA TABLA	
Concepto de tabla de mortalidad. Diversos tipos de tablas. Diagrama de Lexis. Funciones de la tabla: Sobrevivientes. Defunciones. Probabilidades de vida y de muerte. Tiempo vivido. Diversas formas de cálculo. Esperanza de vida. Funciones continuas de la tabla de vida: Tasa instantánea de mortalidad por edad. Ejercicios. Respuesta a los ejercicios.....	1
Capítulo 2. POBLACION ESTACIONARIA	
Conceptos introductorios. Población total. Número de personas con edades comprendidas entre x , $x+n$. Nacimientos. Muertes. Tasas de natalidad y mortalidad. Relación entre ${}_n^m x$ y ${}_n^q x$. Diversos supuestos. Relaciones de supervivencia. Estimación de la esperanza de vida al nacer a partir de relaciones de supervivencia. Ejercicios. Respuesta a los ejercicios.....	39
Capítulo 3. TABLAS MODELO DE MORTALIDAD	
Objetivos. Las Tablas Modelo de las Naciones Unidas. Forma de elaboración, críticas. Las Tablas Modelo de Coale y Demeny: Descripción de las cuatro familias de tablas. El sistema de Brass. Breve referencia a otras tablas modelo. Ejercicios. Respuesta a los ejercicios.....	69

Capítulo 4. CONSTRUCCION DE TABLAS ABREVIADAS

Introducción. Construcción de tablas abreviadas mediante métodos clásicos: Ajuste preliminar de los datos. Cálculo de las probabilidades de muerte. Cálculo de las restantes funciones de la tabla. Construcción de tablas utilizando relaciones de supervivencia intercensales. Elaboración de tablas a partir de preguntas especiales. Ejercicios. Respuesta a los ejercicios.....	87
--	----

Capítulo 5. TABLAS COMPLETAS DE MORTALIDAD

Introducción. Ajuste preliminar de los datos. Cálculo de las probabilidades de muerte para los menores de dos años, de dos a cuatro años y de cinco años y más. Suavizamiento de las probabilidades de muerte mediante la fórmula de Whittaker-Henderson. Ejemplo numérico. Cálculo de las restantes funciones de la tabla completa. Ejercicios. Respuesta a los ejercicios.....	123
--	-----

Capítulo 6. APLICACIONES DE LA TABLA DE MORTALIDAD EN ESTUDIOS DE LA POBLACION

Estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad. Análisis de la mortalidad por causas de muerte. Estudios de fecundidad, reproductividad y crecimiento de la población. Fijación de metas y evaluación de programas de salud. Estudios sobre estructura por edad de la población. Análisis mediante tablas de decremento múltiple. Ejercicios de repaso general de la materia.....	161
Anexo: TABLAS DE MORTALIDAD DE ALGUNOS PAISES SELECCIONADOS...	185
BIBLIOGRAFIA.....	193

Capítulo 1.

CONCEPTO Y FUNCIONES DE LA TABLA

1.1 Concepto de tabla de mortalidad. Diversos tipos de tablas

La tabla de mortalidad, también llamada tabla de vida, es un instrumento o esquema teórico que permite medir las probabilidades de vida y de muerte de una población, en función de la edad y para un período de tiempo determinado.

La utilidad de este tipo de análisis por edades, reside en que la mortalidad es muy diferencial según esta variable. Idealmente la mortalidad debería ser nula o casi nula en las primeras edades, aumentando después de los 60 o 70 años (gráfico 1a.); pero en la práctica está muy lejos de este comportamiento. Como se sabe la mortalidad es alta en las primeras

edades, luego baja rápidamente hasta un mínimo muy cercano a cero a los 10 o 12 años, después aumenta en forma relativamente lenta hasta los 35 o 40 años y de ahí en adelante crece más rápidamente, llegando a superar incluso los niveles de las primeras edades (gráfico 1b)

Gráfico 1 a.

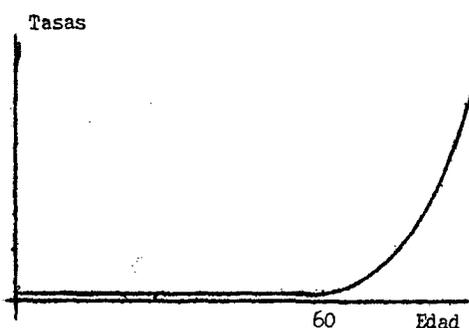
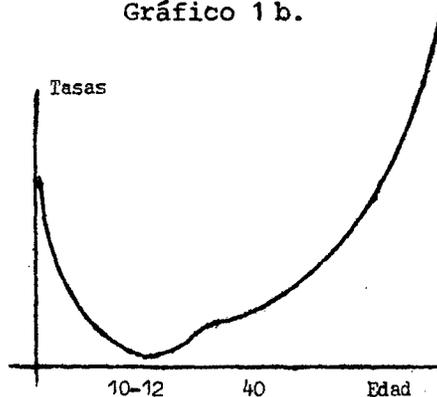


Gráfico 1 b.



Esta forma de U es más o menos general entre los países, pero el nivel así como la relación entre los diversos tramos de edades varían considerablemente, encontrándose países que tienen una mortalidad infantil y juvenil relativamente baja en relación con la mortalidad adulta, y viceversa.

La mortalidad también es diferencial por sexo, regiones geográficas, grupos étnicos, etc., por lo cual resulta de interés construir tablas separadas según esos atributos. También es útil calcular tablas por estado civil, clases sociales, condición de actividad e inactividad y algunas otras características de la población, aunque generalmente no se cuenta con la información necesaria para tal propósito.

Además de describir el comportamiento de la mortalidad por edades, la tabla de vida proporciona la esperanza de vida al nacer, e_0^o , que es uno de los indicadores más importantes del nivel de mortalidad de una población.

La tasa bruta de mortalidad, como se sabe, tiene la ventaja de ser un indicador sencillo y único, pero también el inconveniente de estar afectado por la distribución por edades de la población. A su vez, las tasas de mortalidad por edades están más o menos libres de dicha distribución, pero el nivel de la mortalidad viene dado por un conjunto de indicadores que dificulta su comparación. En cambio la esperanza de vida al nacer participa de las ventajas de estos dos indicadores.

Por otra parte, la tabla de vida puede ser asimilada a un modelo de población, llamado población estacionaria, en el cual la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad y en consecuencia la tasa de crecimiento natural es igual a cero. Dicho modelo proporciona las relaciones de supervivencia (que permite proyectar la población por edades) y otros indicadores demográficos.

El concepto original de tabla de vida consiste en seguir una generación o cohorte a lo largo del tiempo, determinando a cada edad el número de sobrevivientes, hasta que la generación se extingue. La tabla así construida se llama *tabla por generaciones*, porque sigue una generación a lo largo del tiempo. En consecuencia, en este caso los sobrevivientes son sometidos a las condiciones de mortalidad de cada uno de los años por los cuales van pasando. Estas tablas casi no se utilizan, ya que para elaborarlas se hace necesario seguir la generación por mucho tiempo, hasta que fallece el último sobreviviente, proporcionando además una medición referida a condiciones muy diferentes de mortalidad.

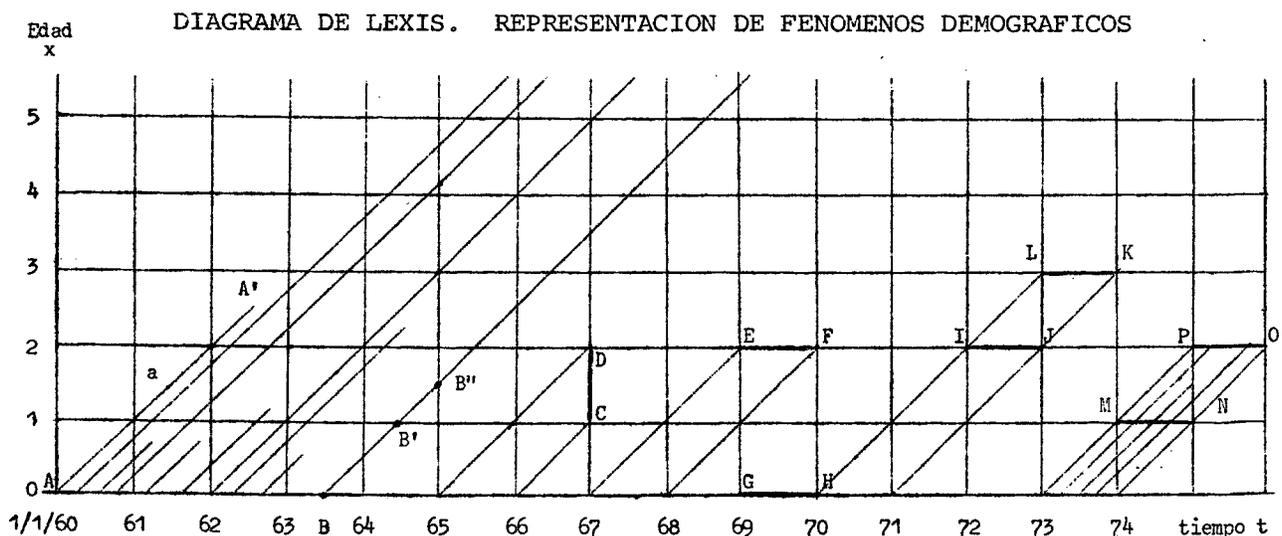
Las tablas más usuales son las *del momento* o *de contemporáneos* las cuales se basan en la mortalidad observada durante un mismo período de tiempo, de todos los miembros de una población real. En este caso, se somete una generación o cohorte hipotética de personas, en todas las edades, a las condiciones de mortalidad de ese mismo período, que puede ser un año o un promedio de dos o tres años. En general, cuando se habla de tablas de mortalidad se está haciendo referencia a este último tipo de tablas.

Se denominan *tablas completas*, aquéllas en que las diferentes funciones se elaboran para cada año de edad. Esto es una simple convención ya que una tabla donde se presentan las funciones por meses, sería más completa que la anterior. Por su parte las *tablas abreviadas* son aquéllas en que las diferentes funciones se calculan por grupos de edades, corrientemente grupos quinquenales. No obstante en las tablas abreviadas, cuando es posible, entre 0 y 5 años se incluyen las diversas funciones para cada edad, como en una tabla completa, ya que dentro de dicho intervalo la mortalidad varía mucho con la edad y esta información resulta de gran utilidad para la planificación de la salud y otros usos.

1.2 Diagrama de Lexis

El diagrama de Lexis es útil para representar fenómenos demográficos en el tiempo y para facilitar la interpretación de diversas tasas y otros indicadores demográficos. Fue introducido por W. Lexis en un libro (*Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik*) escrito en 1875. Tiene la siguiente estructura:

Gráfico 2



-En el eje horizontal se representa el tiempo t , y en el vertical la edad x desde el momento del nacimiento (aunque también podría incluirse otra variable como la duración del matrimonio, la participación en la actividad económica, etc.)

-Cada individuo de una población se representa por una línea de 45 grados a cada uno de los ejes, partiendo de la edad $x = 0$ y del momento del nacimiento en t . Por ejemplo un nacimiento ocurrido el 1° de enero de 1960 se ubica en el punto A, es decir, en $x = 0$ y $t = 1/1/60$. A medida que transcurre el tiempo el punto se desplaza sobre la línea a , llamada *línea de vida*, que se detiene cuando el niño fallece. Si este niño fallece supongamos el 30 de junio de 1962, la línea se detiene en A' que corresponde en la abscisa a esa fecha y en la ordenada a la edad de 2 años y medio. De igual modo se pueden representar otras líneas de vida, tal como se indica en el gráfico 2 donde unas líneas continúan hasta después de los 5 años y otras se interrumpen a diversas edades.

-Las líneas horizontales del diagrama representan aniversarios o cumpleaños, y las líneas verticales el paso de un año civil a otro. Por ejemplo la persona B, nacida el 30 de junio de 1963, pasa de la edad 0 a 1, en B' al atravesar la línea horizontal, mientras que en B" al atravesar la línea vertical pasa del año 1964 a 1965.

-Un *segmento* cualquiera del diagrama representa el número de líneas de vida que cruzaron por ese segmento. Por ejemplo:

\overline{CD} representa el número de personas nacidas en 1965 que llegaron con vida al año 1967, o bien, es el número de personas con un año cumplido al 1° de enero de 1967. Se simboliza N_1^{67} .

\overline{EF} es el número de personas nacidas en 1967 que llega con vida a los 2 años de edad, o bien, es el número de personas que alcanzan la edad exacta 2 durante 1969. Se simboliza E_2^{69} .

\overline{GH} es igual al número de nacimientos ocurridos durante 1969. Se simboliza por B^{69} o E_0^{69} .

-Cuando en el Diagrama de Lexis se hace un corte vertical, referido a un instante dado, las líneas de vida cortadas por el segmento corresponden a personas que tienen una edad *cumplida* x ; es el tipo de información que se obtiene al levantar un censo de población. Por ejemplo \overline{JL} , son las personas con dos años cumplidos al 1° de enero de 1973. Por el contrario cuando se hace un corte horizontal, todas las líneas de vida cortadas por un segmento constituyen habitantes de edad *exacta* x . Por ejemplo \overline{IJ} representa el número de personas que alcanzan la edad exacta 2 durante 1972. Este último es un concepto más teórico, que se utiliza especialmente para el cálculo de probabilidades a partir de datos reales.

-Una *superficie* cualquiera del diagrama, comprende el número de personas cuyas líneas de vida se interrumpen dentro de esa área. Por ejemplo:

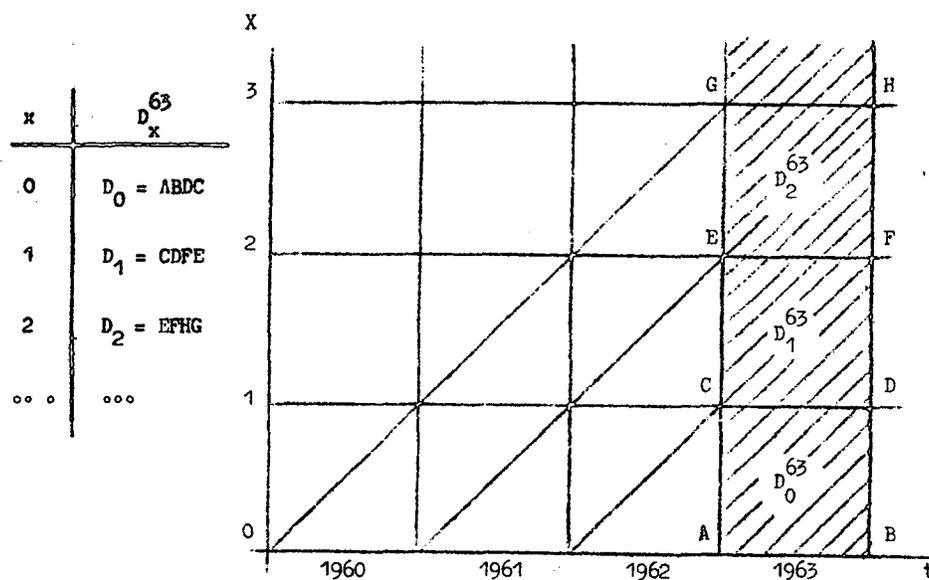
IJKL comprende las muertes con 2 años cumplidos de edad, de la generación de niños nacidos en 1970. Es igual a $\overline{IJ} - \overline{LK}$.

IJL comprende las muertes con 2 años cumplidos de edad, ocurridas en 1972, de la generación de niños nacidos en 1970. Es igual a $\overline{IJ} - \overline{JL}$.

-Por último, cuando así se indica expresamente, una superficie puede hacer referencia al tiempo vivido por una población dentro del tramo considerado. Por ejemplo, si se supone que nacen tres personas en 1973, dos de las cuales llegan con vida a la edad 2 y la tercera fallece a la edad de un año y medio, el tiempo vivido por estas tres personas en el tramo de 1 a 2 años, o sea en la superficie MNOF, será de dos años y medio.

Las estadísticas vitales proporcionan información de defunciones por edades para cada año civil, lo cual en el Diagrama de Lexis correspondería a la parte sombreada del gráfico 3. Este tipo de información comprende para cada edad defunciones de dos generaciones. Así por ejemplo, para la edad 2, o sea en el cuadro $EFHG = D_2^{63}$, las defunciones del triángulo superior EHG corresponden a nacimientos de 1960, mientras que las del triángulo inferior EFH corresponden a nacimientos de 1961.

Gráfico 3



Debido a esta circunstancia, de que las estadísticas vitales mezclan la información de dos generaciones distintas, en algunos países se presentan los cuadros de defunciones clasificados según dos variables: la edad al fallecer y el año de nacimiento. Por ejemplo para la población masculina de Francia se tiene el siguiente cuadro de las defunciones de 1955:

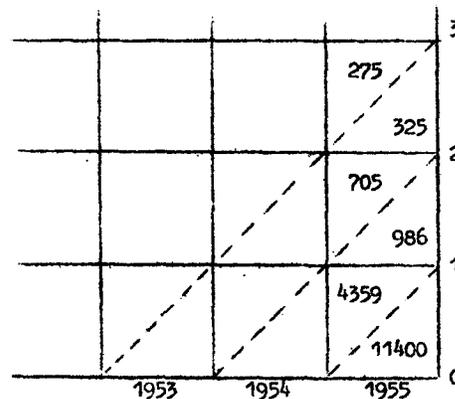
Cuadro 1

FRANCIA: DEFUNCIONES MASCULINAS, SEGUN EL AÑO DE NACIMIENTO Y EL AÑO DE EDAD EN 1955

Año de nacimiento	Edad en años cumplidos	Número de fallecidos
1955	0	11 400
1954	0	4 359
1954	1	986
1953	1	705
1953	2	325
1952	2	275
1952	3	218
...

Con esta información, se pueden separar las defunciones de cada generación, para diversos usos demográficos. En el Diagrama de Lexis tendríamos:

Gráfico 4

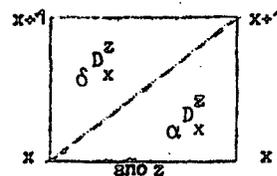


En los países de América Latina donde los datos básicos contienen errores de cierta importancia que no justifican tanto refinamiento, las defunciones se presentan sólo por edades, sin distinguir el año de nacimiento. Con los datos de Francia se tabularían entonces 15 759 defunciones para la edad 0, 1 691 defunciones de personas de 1 año cumplido, etc.

Para fines de análisis demográfico se hace necesario, en ciertos casos, separar las defunciones de cada generación, para lo cual se emplean comúnmente los denominados *factores de separación*. Siendo para una edad x , y un año Z cualesquiera

(1)

$$D_x^Z = {}_\alpha D_x^Z + \delta D_x^Z$$



donde ${}_\alpha D$ y δD representan las defunciones de los triángulos inferior y superior respectivamente, se denomina factor de separación (δ_x^Z) a la relación

(2)

$$\delta_x^Z = \frac{\delta D_x^Z}{D_x^Z}$$

Con los datos ya dados de Francia, los factores de separación para las edades 0, 1 y 2 resultan: $\delta_0 = 0.28$; $\delta_1 = 0.42$; $\delta_2 = 0.46$.

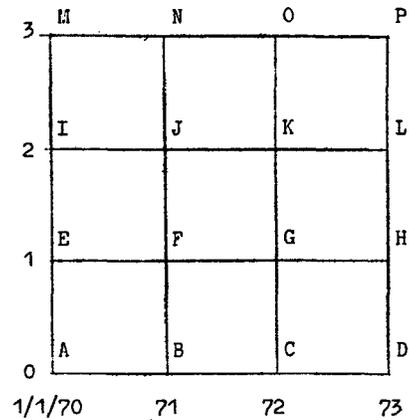
Teniendo las defunciones por edades y los factores de separación, se pueden estimar las muertes ${}_\alpha D_x$ y δD_x de cada generación.

A su vez conociendo los nacimientos, las defunciones por edades y los factores de separación, se puede estimar la población a una edad cumplida (N_x), o a una edad exacta (E_x) de esas generaciones. Es frecuente hacer dichas estimaciones para el cálculo de probabilidades de muerte de menores de 5 años.

Ejemplo:

Dado el siguiente diagrama de Lexis, indicar a qué funciones de la población corresponden los siguientes segmentos y superficies:

- a) \overline{BC} e) \overline{OP}
 b) Sup FGKJ f) \overline{DP}
 c) Sup GHPO g) Sup FHLJ
 d) \overline{GK} h) \overline{IM}



Resp.:

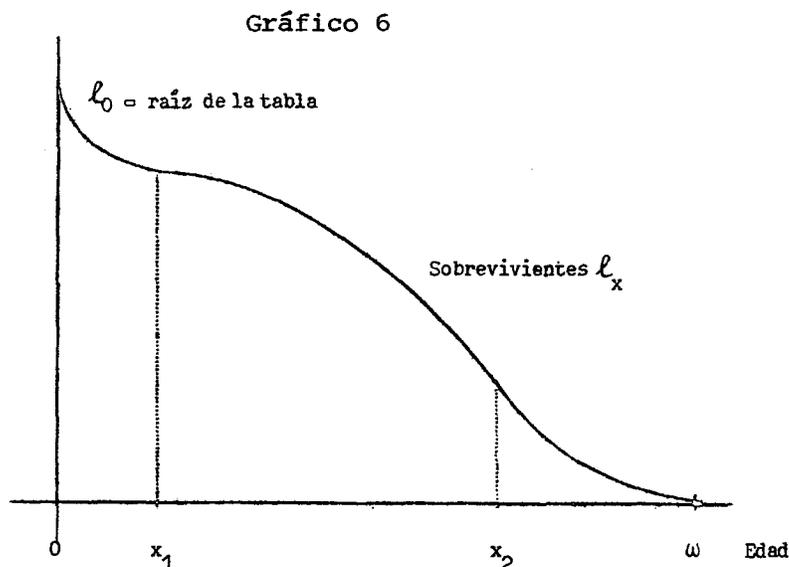
Gráfico 5

- a) B^{71} e) E^{72}_3
 b) D^{71}_1 f) ${}_3N^{73}_0$
 c) ${}_2D^{72}_1$ g) D^{71-72}_1
 d) N^{72}_1 h) N^{70}_2

1.3 Funciones de la tabla de mortalidad: Sobrevivientes, Defunciones, Probabilidades de vida y de muerte

Se considerarán ahora las diversas funciones que contiene una tabla de mortalidad, su significado y la fórmula de cálculo de cada una de ellas. Tal conocimiento es de gran importancia, porque estas funciones, así como las probabilidades de vida y muerte que de ellas se derivan, son de uso frecuente en diversos problemas demográficos.

1.3.1. Función l_x . Representa el número de sobrevivientes que, de una generación inicial de l_0 nacimientos alcanzan con vida la edad exacta x . El valor inicial l_0 se conoce como la *raíz de la tabla*. Su comportamiento gráfico es el siguiente:



Por su naturaleza se trata de una función positiva, decreciente. Aunque su forma varía de un país a otro, generalmente presenta una curvatura hacia arriba hasta los 10 o 12 años, luego una curvatura hacia abajo hasta los 60 o 70 años, y nuevamente hacia arriba en las últimas edades.

Se acostumbra fijar como raíz de la tabla una constante arbitraria tal como 100 000 o la unidad. Una vez fijada dicha raíz, esta función depende solamente de la edad x , a diferencia de la mayoría de las funciones de la tabla que dependen tanto de la edad x como de la amplitud del intervalo n .

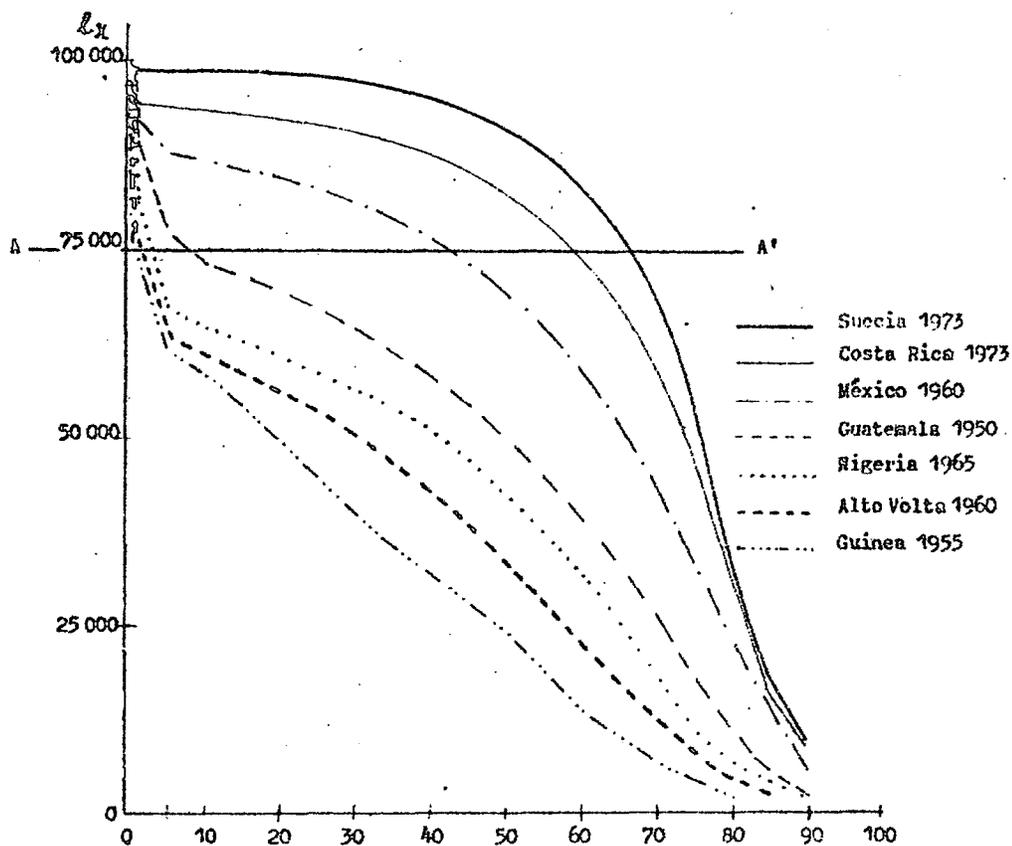
Se designa con ω (omega) la edad en la cual el número de sobrevivientes se hace igual a cero. Usualmente ω toma valores cercanos a los 100 años, pero este punto no tiene mayor importancia para propósitos demográficos, donde generalmente se trabaja con la población de las últimas edades en forma agrupada, por lo cual las tablas corrientemente se elaboran hasta una edad suficientemente avanzada, como por ejemplo 85 o 90 años, y luego se considera un grupo abierto final.

Los sucesivos valores de l_x de la tabla no resultan de la observación directa de una población, estableciendo el número de sobrevivientes correspondiente a cada una de las edades, sino que se calculan a partir de otras funciones de la tabla, del modo que se indica más adelante.

En el gráfico 7 se presentan los valores de la función l_x correspondientes a varios países seleccionados, lo cual permite observar el comportamiento real de esta función para diferentes niveles de mortalidad. Haciendo un corte horizontal en AA' se puede observar que mientras en Suecia la generación l_x se reduce al 75 por ciento alrededor de los 65 años de edad, en las tablas de mayor mortalidad consideradas dicha reducción ocurre antes de alcanzar los 5 años.

A pesar de las grandes diferencias de mortalidad existentes entre los diversos países considerados en el gráfico, las curvas mantienen los patrones generales de mortalidad indicados, alcanzando niveles cercanos a cero alrededor de los 100 años de edad, donde mueren los últimos sobrevivientes de la cohorte original.

Gráfico 7

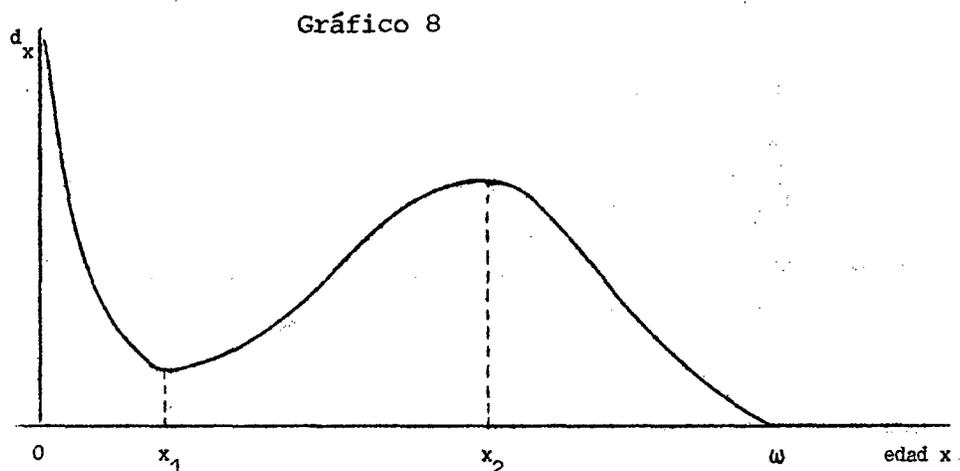
COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION l_x EN VARIOS PAISES SELECCIONADOS

Fuente: Naciones Unidas, Anuario Demográfico, 1974

1.3.2 Función d_x . Representa el número de muertes ocurridas entre los componentes del grupo l_x entre las edades exactas x y $x+1$. Es por lo tanto,

$$(3) \quad d_x = l_x - l_{x+1}$$

El comportamiento gráfico de esta función es el siguiente:



donde los puntos x_1 y x_2 corresponden a las edades en que la función l_x cambia de curvatura. Generalmente el mínimo x_1 se produce alrededor de la edad 10, mientras que el máximo relativo x_2 ocurre alrededor de los 70 u 80 años. Después de la edad x_2 el número de defunciones disminuye, no por descenso de la mortalidad, sino porque el número de sobrevivientes de la generación l_x es cada vez más reducido.

Si las defunciones se calculan para un intervalo de edades cualquiera n , puede escribirse la fórmula más general

$$(4) \quad {}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

que representa el número de muertes ocurridas entre los componentes del grupo l_x entre las edades exactas x y $x+n$.

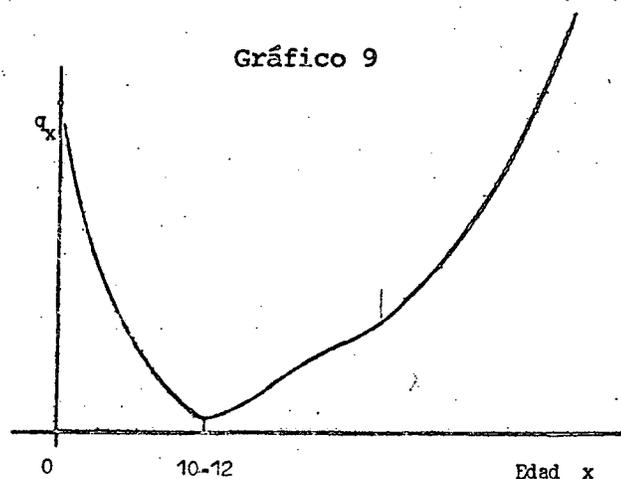
De la relación (3) se deduce fácilmente que la suma de las defunciones desde la edad x en adelante hasta ω da la función l_x , vale decir:

$$(5) \quad l_x = \sum_{x=x}^{\omega} d_x$$

1.3.3 Probabilidad de muerte q_x . Representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x de fallecer dentro del año que sigue al momento en que alcanza dicha edad. En símbolos:

$$(6) \quad q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Su comportamiento gráfico es el siguiente:



Si la probabilidad se calcula para un intervalo de edades de n años, la fórmula sería

$$(7) \quad {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{n d_x}{l_x}$$

Como toda probabilidad, se trata de una relación entre los casos favorables (al acontecimiento) y los casos posibles, donde los casos favorables son parte de los posibles. Por lo tanto dicha probabilidad varía entre 0 y 1, según que no fallezca ninguno o mueran todas las l_x personas en el intervalo considerado.

Si se conocen los valores de ${}_nq_x$ para cada edad o grupos de edades, y una raíz arbitraria l_0 , se pueden obtener los sucesivos valores de l_x y ${}_nd_x$, en la siguiente forma

$$(8) \quad l_x {}_nq_x = {}_nd_x$$

$$(9) \quad l_x - {}_nd_x = l_{x+n}$$

1.3.4 Probabilidad de sobrevivencia p_x . Representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x de sobrevivir un año, es decir, de alcanzar con vida la edad $x+1$. En símbolos:

$$(10) \quad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Dado que cada componente del grupo l_x o sobrevive a la edad $x+1$ o muere antes de alcanzar esa edad, deberá verificarse necesariamente que

$$(11) \quad p_x + q_x = 1$$

de donde

$$(12) \quad p_x = 1 - q_x$$

En forma más general, para un intervalo de n años, la fórmula sería

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

si $n = 0$, ${}_0 p_x = 1$; mientras que si $n = \omega - x$, ${}_{\omega-x} p_x = 0$.

Ejemplo

Utilizando la tabla de mortalidad femenina de Guatemala de 1950 presentada en el anexo, calcular:

- La probabilidad de que una persona de 20 años exactos sobreviva a los 40 años.
- La probabilidad de que una persona de 20 años exactos, fallezca entre los 30 y los 45

Resp.:

$$a) \quad {}_{20}p_{20} = \frac{l_{40}}{l_{20}} = \frac{52\ 931}{64\ 870} = \underline{0.81595}$$

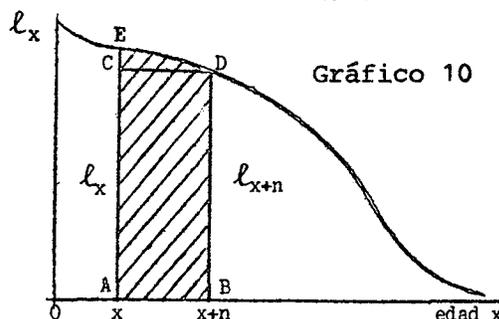
- Para cumplirse esta probabilidad, la persona debe sobrevivir primero de los 20 a los 30 años, y luego fallecer en los 15 años siguientes, es decir,

$$({}_{10}p_{20})({}_{15}q_{30}) = \frac{l_{30}}{l_{20}} \cdot \frac{l_{30} - l_{45}}{l_{30}} = \frac{l_{30} - l_{45}}{l_{20}} = \frac{59\ 218 - 49\ 592}{64\ 870} = \underline{0.14839}$$

1.4 Tiempo vivido entre las edades x , $x+n$

Dada la función l_x , su integral entre dos edades cualesquiera $x, x+n$, es igual matemáticamente a la superficie encerrada por la curva el eje de las x y las ordenadas l_x y l_{x+n} . En términos demográficos esta superficie representa el tiempo vivido, o el número de años-persona vividos por la generación l_x entre las edades $x, x+n$. Se simboliza ${}_nL_x$.

$$(14) \quad {}_nL_x = \int_x^{x+n} l_x \, dx = ABDE$$



Este tiempo puede descomponerse para fines analíticos en el tiempo vivido por las personas que sobreviven al final del intervalo y los que mueren dentro de él. En términos gráficos estas partes corresponden a las superficies

ABDC que representa el tiempo vivido dentro del intervalo $x, x+n$ por las l_{x+n} personas que llegan con vida a la edad $x+n$. Es igual a:

$$n \cdot l_{x+n}$$

CDE que es el tiempo vivido dentro del intervalo $x, x+n$ por las ${}_n d_x$ personas que fallecen dentro del intervalo. Suponiendo que cada una de estas personas vive en promedio ${}_n k_x$ años, el tiempo vivido por las ${}_n d_x$ personas sería: ${}_n k_x \cdot {}_n d_x$

De este modo se puede establecer la igualdad

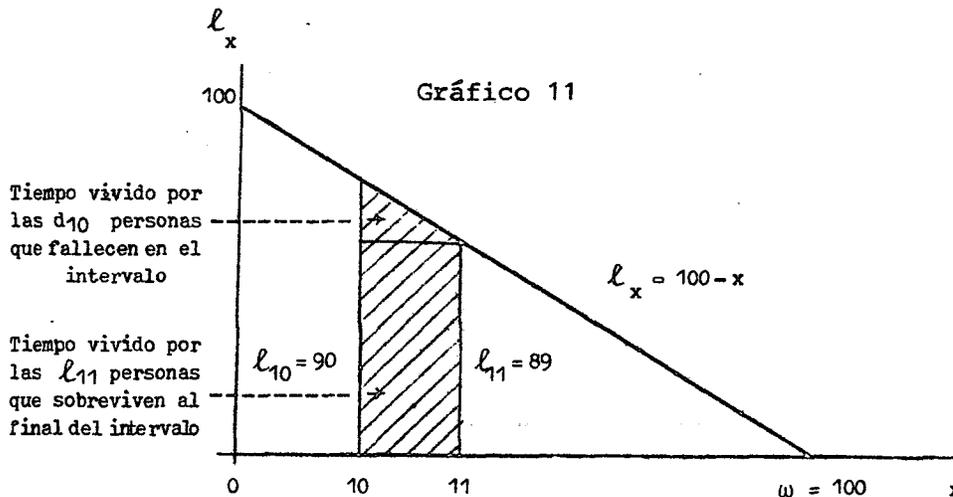
$$(15) \quad {}_n L_x = n \cdot l_{x+n} + {}_n k_x \cdot {}_n d_x$$

donde n es la amplitud del intervalo de edades, l_{x+n} las personas que sobreviven a la edad $x+n$, ${}_n d_x$ las personas fallecidas entre $x, x+n$, y ${}_n k_x$ el tiempo medio vivido dentro del intervalo por cada una de las ${}_n d_x$ personas que fallecen.

1.4.1 Cálculo del tiempo vivido. Resulta evidente que si la función l_x tiene una fórmula matemática conocida, el valor del tiempo vivido L_x puede calcularse exactamente; bastaría con resolver la integral correspondiente.

Por ejemplo, si $l_x = 100 - x$, el tiempo vivido entre 10 y 11 años exactos es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 L_{10} &= \int_{10}^{11} l_x dx = \int_{10}^{11} (100 - x) dx \\
 &= 100x - \frac{x^2}{2} \Big|_{10}^{11} = 100(11-10) - \frac{11^2 - 10^2}{2} \\
 &= 100 - \frac{121 - 100}{2} \\
 &= 89.5 \text{ años-persona}
 \end{aligned}$$



Generalmente esto no sucede, es decir, la función l_x no tiene una forma matemática conocida, sino que solamente se conoce su valor para determinadas edades exactas 0, 1, 2, etc. En este caso es necesario recurrir a fórmulas aproximadas.

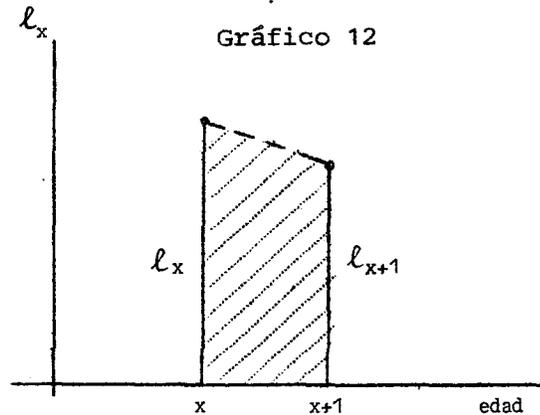
Se verán por separado las fórmulas de cálculo utilizadas para los grupos centrales, en las primeras edades y para el grupo abierto final.

a) Grupos centrales ($x \geq 5$ años)

En el caso más sencillo de tablas completas, es decir cuando el intervalo de edades n es igual a uno, el cálculo del tiempo vivido puede efectuarse con suficiente exactitud, admitiendo que en cada intervalo $x, x+1$ la función de supervivencia l_x es lineal.

Bajo este supuesto, el tiempo vivido en cada edad es igual al área de un trapecio, siendo la fórmula de cálculo la siguiente:

$$(16) \quad L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$



A medida que la amplitud del intervalo de edades considerado aumenta, el error que se comete al aplicar la fórmula de los trapecios tiende a ser mayor y la fórmula se vuelve inaplicable.

En el caso de tablas abreviadas, donde corrientemente se trabaja por grupos quinquenales, la relación más empleada para el cálculo del tiempo vivido es la que se deriva de la tasa central de mortalidad ($5m_x$). Según se verá más adelante (en pág. 44);

$$(17) \quad 5^m_x = \frac{5^d_x}{5^L_x}$$

de donde:

$$(18) \quad {}_5L_x = \frac{{}_5d_x}{m_x}$$

De esta manera conociendo la tasa central de mortalidad, que es la función básica en la construcción de la tabla de vida, una vez obtenida la probabilidad de muerte y las defunciones, se puede calcular el tiempo vivido. Sin embargo esta fórmula no siempre puede aplicarse, ya que en algunos casos no se conoce la tasa central de mortalidad (como por ejemplo, cuando se construyen tablas de vida relacionando la población por edades de dos censos sucesivos, o bien cuando se elaboran tablas modelo).

Otra fórmula, citada por Greville^{1/} y por Keyfitz^{2/}, es la de los trapecios modificada, la cual para grupos quinquenales de edades toma la forma siguiente:

$$(19) \quad {}_5L_x = \frac{5}{2} (l_x + l_{x+5}) + \frac{5}{24} ({}_5d_{x+5} - {}_5d_{x-5})$$

que resulta de suponer que por los valores conocidos de l_{x-5} , l_x , l_{x+5} y l_{x+10} pasa una curva de tercer grado.

b) Primeras edades ($x = 0, 1, 2, 3, 4$)

En las primeras edades las muertes se distribuyen más irregularmente, por lo cual la fórmula de los trapecios no proporciona buenos resultados.

1/ Greville, T.N.E., Métodos rápidos para la construcción de tablas abreviadas de mortalidad, CELADE, Serie D., No. 10., Santiago, Chile.

2/ Keyfitz, N., Introducción a la matemática de la población, CELADE, Serie E. No. 18, Santiago, Chile.

Por ello, la relación más utilizada para el cálculo del tiempo vivido es la siguiente:

$$(20) \quad L_x = f_x l_x + (1 - f_x) l_{x+1}$$

donde f_x es el factor de separación de las muertes. Dicha relación puede derivarse fácilmente con ayuda del Diagrama de Lexis, en la forma que se indica a continuación.

Según se verá más adelante, al introducir el concepto de población estacionaria, se puede establecer la siguiente relación entre los valores de las funciones l_x , d_x y L_x .

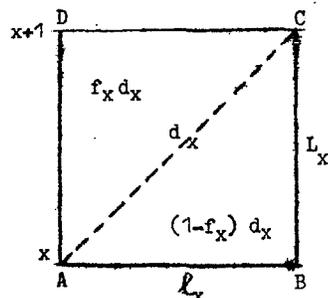


Gráfico 13

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= l_x \\ \overline{BC} &= L_x \\ ABCD &= d_x \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición del factor de separación, las defunciones del triángulo superior son iguales a $f_x d_x$ y las del inferior $(1-f_x) d_x$. De aquí resulta:

$$(21) \quad L_x = l_x - (1 - f_x) d_x$$

$$(22) \quad = l_x - (1 - f_x) (l_x - l_{x+1})$$

$$(20) \quad = f_x l_x + (1 - f_x) l_{x+1}$$

que es la relación ya indicada. Para la edad 0 el factor de separación δ_0 vale alrededor de 0.15 a 0.35, dependiendo del nivel de la mortalidad. Para las edades 1 a 4 los factores de separación son más difíciles de calcular por falta de información adecuada. En algunas tablas se ha tomado directamente $\delta_x = 0.50$ para $x = 1, 2, 3$ y 4 , lo cual equivale a la fórmula de los trapecios. En otras tablas se han usado los factores de separación de Glover ^{3/} siguientes, obtenidos en base a estadísticas de Alemania de comienzos de siglo:

FACTORES DE SEPARACION DE GLOVER

$x \dots$	1	2	3	4
$\delta_x \dots$	0.41	0.47	0.48	0.48

Si la relación (20) se refiere a un intervalo de edades n cualquiera, entonces toma la forma siguiente:

$$(23) \quad {}_nL_x = n \delta_x \ell_x + (n - n \delta_x) \ell_{x+n}$$

donde δ_x es el factor de separación del grupo de edades $x, x+n$. Desarrollando el paréntesis, se llega a la expresión más general:

$$(24) \quad {}_nL_x = n \ell_{x+n} + n \delta_x n^d_x$$

^{3/} Greville, Thomas N.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States, Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1946.

Por otra parte, al definir el concepto de tiempo vivido (pág. 17), se obtuvo la relación

$$(15) \quad {}_nL_x = n \ell_{x+n} + {}_n k_x {}_n d_x$$

donde ${}_n k_x$ es el número medio de años vividos en el intervalo $x, x+n$ por cada una de las ${}_n d_x$ personas que fallecen dentro de dicho intervalo. Comparando las relaciones (15) y (24) se tiene que:

$$(25) \quad {}_n k_x = n \cdot {}_n \delta_x$$

o bien

$$(26) \quad {}_n \delta_x = \frac{{}_n k_x}{n}$$

Por lo tanto, el factor de separación ${}_n \delta_x$ puede interpretarse también como la proporción del tiempo total vivido en el intervalo $x, x+n$ por las ${}_n d_x$ personas que fallecen dentro del mismo.

Reemplazando el valor de $n \cdot {}_n \delta_x = {}_n k_x$ en la relación (23) se llega a la fórmula

$$(27) \quad {}_nL_x = {}_n k_x \ell_x + (n - {}_n k_x) \ell_{x+n}$$

más usualmente empleada para el cálculo del tiempo vivido.

En la construcción de las Tablas Modelo de Mortalidad de las Naciones Unidas ^{4/}, el cálculo de ${}_4L_1$ se hizo suponiendo ${}_4k_1 = 1.9$, en cuyo caso la relación (27) toma la siguiente forma:

$$(28) \quad {}_4L_1 = \underline{1.9} \ell_1 + \underline{2.1} \ell_5$$

c) Grupo abierto final ($x+$)

Para el cálculo del tiempo vivido correspondiente al grupo abierto final $L_{x+} = {}_{\omega}L_x$, donde x es generalmente igual a 70, 75, 80 u 85 años, suelen usarse las siguientes relaciones:

(i) El procedimiento más usual es el derivado de la tasa central de mortalidad bajo la forma especial

$$(29) \quad {}_{\omega}L_x = \frac{d}{\omega m_x} = \frac{\ell_x}{\omega m_x}$$

donde ${}_{\omega}m_x$ es la tasa central de mortalidad del grupo abierto de x a ω años. En algunos casos, especialmente cuando no se conoce el valor de ${}_{\omega}m_x$, o cuando éste está visiblemente afectado por los errores de la información básica, se emplean otras relaciones.

(ii) Para la elaboración de las Tablas Modelo de las Naciones Unidas ya citadas, se calcularon tablas con un grupo abierto final de 85 años y más, calculándose el tiempo vivido mediante la siguiente fórmula:

$$(30) \quad L_{85+} = \ell_{85} \cdot \log \ell_{85}; \quad \text{siendo } \ell_0 = 100\ 000$$

^{4/} Naciones Unidas, Manual III. Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad.
ST/SOA/Serie A/25.

Esta es una relación empírica que se verifica en forma aproximada. Para los países de América Latina tiende en general a subestimar el valor de L_{85+} . Además, no puede aplicarse cuando la edad inicial del intervalo abierto final es diferentes de 85.

(iii) En la construcción de las Tablas Modelo de Coale y Demeny^{5/}, las tablas se elaboraron con un grupo abierto final de 80 años y más. La relación usada para el cálculo del tiempo vivido fue la siguiente:

$$(31) \quad L_{80+} = 3.725 l_{80} + 0.0000625 l_{80}^2; \text{ siendo } l_0 = 100\ 000$$

Según las tablas de vida disponibles para los países de América Latina, esta relación tiende también a subestimar el cálculo del tiempo vivido.

(iv) Dados los problemas señalados y teniendo en cuenta además que no se dispone de relaciones para otras edades, se calcularon aquí algunas fórmulas adicionales. Para ello se tomaron como base 40 tablas de mortalidad de diversos países de América^{6/}, con las cuales se calcularon por mínimos cuadrados ecuaciones de regresión de la forma:

$$(32) \quad \frac{L_{x+}}{l_x} = a + b l_x$$

para las edades 70+, 75+, 80+ y 85+. De esta manera se obtuvieron las relaciones:

^{5/} Coale, A.J. y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton, New Jersey, 1966.

^{6/} Son las tablas de uno y otro sexo de Argentina 1947 y 1960; Costa Rica 1950, 1963 y 1973; Cuba 1970; Chile 1952-53 y 1960-61; Guatemala 1950 y 1964; México 1940, 1950 y 1960; Panamá 1960 y 1970; Barbados 1946; Canadá 1966 y 1971; Estados Unidos 1971 y 1972.

$$(33) \quad L_{70+} = 6.632 l_{70} + 0.0000833 l_{70}^2$$

$$(34) \quad L_{75+} = 5.505 l_{75} + 0.0000722 l_{75}^2$$

$$(35) \quad L_{80+} = 4.424 l_{80} + 0.0000674 l_{80}^2$$

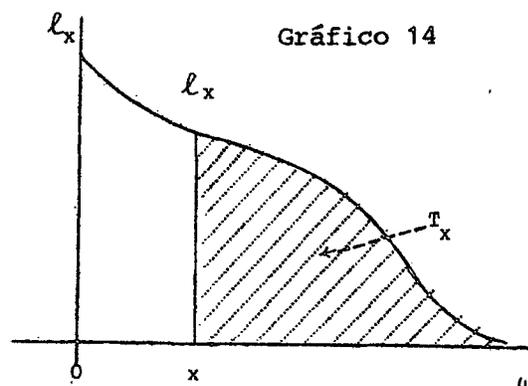
$$(36) \quad L_{85+} = 3.584 l_{85} + 0.0000688 l_{85}^2$$

siendo, como en los casos anteriores, $l_0 = 100\,000$.

1.5 Tiempo vivido entre x y ω (T_x)

Se ha visto ya el número de años vividos por la generación o cohorte entre las edades x y $x+n$ (${}_nL_x$). Haciendo ahora el límite superior $x+n = \omega$ se obtiene

$$(37) \quad T_x = \int_x^{\omega} l_x dx$$



que representa el número de años-persona vividos por la generación l_x entre las edades x y ω .

Descomponiendo el intervalo de edades se tiene:

$$(38) \quad T_x = \int_x^{x+1} l_x d_x + \int_{x+1}^{x+2} l_x d_x + \dots$$

$$(39) \quad = L_x + L_{x+1} + \dots$$

$$(40) \quad T_x = \sum_{x=x}^{\omega} L_x$$

Vale decir que la función T_x puede expresarse en función de L_x y calcularse acumulando dicha función desde la edad final ω hacia arriba. Por ejemplo:

Edad	L_x	T_x
82	23 212	142 034
83	20 599	118 822
84	18 083	98 223
85+	80 140	80 140

1.6 Esperanza de vida a la edad x (e_x^o)

Dividiendo el tiempo vivido T_x por el número de personas l_x se obtiene la esperanza de vida a la edad x

$$(41) \quad e_x^o = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_x^{\omega} l_x dx}{l_x}$$

que representa el número de años que en promedio vive la generación desde la edad x en adelante, hasta el final de la vida.

En particular si $x = 0$, se llega a la esperanza de vida al nacer (l_0^0) que es una medida resumen de la mortalidad general, la cual no está afectada por la estructura por edades de la población.

Debido al fuerte efecto de la mortalidad infantil sobre la esperanza de vida al nacer, y a los errores que suele afectar a la información de las primeras edades, es frecuente usar también la esperanza de vida a la edad 1 o 5 como medida comparativa del nivel general de la mortalidad. Otros valores usados generalmente son, la esperanza de vida a la edad 15 o 20, que corresponde al inicio de la vida activa y reproductiva, y la esperanza de vida a la edad 65, la cual mide la mortalidad de las últimas edades, donde ocurren la mayoría de las muertes en los países de mortalidad moderada y baja.

1.7 En resumen, el significado de cada una de las funciones de la *tabla de vida* es el siguiente:

- l_x : Representa el número de personas que sobreviven a la edad exacta x , de una generación inicial de l_0 nacimientos.
- ${}_n d_x$: Representa el número de muertes ocurridas entre las edades exactas x y $x+n$, de una generación inicial de l_0 nacimientos.
- ${}_n q_x$: Es la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x de fallecer antes de alcanzar la edad exacta $x+n$.
- ${}_n L_x$: Es el número de años-persona vividos por la generación l_0 entre las edades x y $x+n$.

T_x : Es el número de años-persona vividos por la generación l_0 entre las edades x y ω .

e_x^o : Representa el número de años que en promedio vive la generación, desde la edad x en adelante, hasta el final de la vida.

1.8 Funciones continuas de la tabla de vida: Tasa instantánea de mortalidad por edad (μ_x)

Esta tasa es muy usada en el desarrollo teórico de diversos temas demográficos. Se define indistintamente como un límite derivado de la probabilidad de muerte (${}_nq_x$) o de la tasa central de mortalidad (${}_n m_x$), según la siguiente relación:

$$(42) \quad \mu_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_nq_x}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x$$

En el primer caso, reemplazando la probabilidad de muerte ${}_nq_x$ en términos de la función l_x y haciendo algunos cambios algebraicos convenientes se tiene:

$$(43) \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_nq_x}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n \cdot l_x} = - \frac{1}{l_x} \left[\lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_{x+n} - l_x}{n} \right]$$

en la última expresión, dentro del corchete, aparece el límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento de la variable, para el incremento de la variable tendiendo a cero, es decir, la derivada de la función l_x ; luego:

$$(44) \quad \mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} = -\frac{d \ln l_x}{dx}$$

Si el punto de partida es la tasa central de mortalidad, se tiene entonces el cociente entre las defunciones y el tiempo vivido que, en el límite, conduce al mismo resultado.

Conociendo la tasa instantánea de mortalidad por edad μ_x , se pueden calcular otras funciones de la tabla de mortalidad. De la ecuación básica (44) se obtiene:

$$(45) \quad \frac{dl_x}{l_x} = -\mu_x dx$$

la cual, después de integrar entre 0 y x da:

$$(46) \quad l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_x dx}$$

se obtiene así el número de sobrevivientes en función de la tasa instantánea de mortalidad. Si en lugar de integrar entre 0 y x , se lo hace entre x y $x+n$, se llega a la probabilidad de sobrevivencia ${}_n p_x$.

Ejemplo:

Calcular la función de sobrevivencia l_x y la esperanza de vida e_x^0 , bajo el supuesto de que la tasa instantánea de mortalidad es constante con respecto a la edad.

Si $\mu_x = \mu$, de acuerdo con (44) será

$$\mu = -\frac{1}{l_x} \frac{d l_x}{d x}$$

lo cual resolviendo da:

$$l_x = l_0 e^{-\mu x}$$

A su vez, según la definición de esperanza de vida, y reemplazando el valor encontrado de l_x se obtiene

$$\begin{aligned} e_x^0 &= \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega} l_{x+t} dt \\ &= \frac{1}{e^{-\mu x}} \int_0^{\omega} e^{-\mu(x+t)} dt = \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

es decir que, si la tasa instantánea de mortalidad es independiente de la edad, la esperanza de vida es también constante.

A continuación se incluyen algunos ejercicios de repaso de los temas vistos en este capítulo, principalmente los referidos a la interpretación y cálculo de las diversas funciones de la tabla de vida. Las respuestas se presentan por separado (en la página 35), con el fin de que se intente resolver cada ejercicio antes de consultar la solución correspondiente.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 1

(Ver respuestas en pág.35)

1. Indicar con símbolos a qué es igual cada una de las siguientes probabilidades y explicar con palabras su significado:
 - a) ${}_5p_{30}$; b) ${}_5q_{17}$

2. Utilizando la tabla completa de mortalidad masculina de Costa Rica de 1972-1974 presentada en el anexo, calcular el valor de las probabilidades indicadas en el ejercicio anterior.

3. En la misma tabla de vida, encontrar los siguientes valores:
 - a) El número de defunciones entre los 2 y los 5 años exactos.
 - b) La tasa de mortalidad infantil.
 - c) El tiempo vivido por la generación l_x entre los 43 y los 45 años exactos.
 - d) El número de años que se espera que viva una persona, una vez que alcanza los 65 años de edad.

4. En base a la tabla de vida masculina de Guatemala de 1950 presentada en el anexo, calcular la probabilidad de que una persona con 20 años exactos fallezca entre los 40 y los 50 años exactos.

5. Dados los valores de $q_0 = 0.05356$; $q_1 = 0.00867$; $q_2 = 0.00323$ y la raíz arbitraria $l_0 = 100\ 000$, calcular los valores de l_1 , l_2 , d_1 y d_2 .

6. Sabiendo que $q_0 = 0.05520$ y ${}_5q_0 = 0.06720$ calcular el valor de ${}_4q_1$.

7. Indicar si las siguientes relaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

a) $L_x > l_{x+1}$ ()

b) $T_{80} < T_{85}$ ()

c) $l_x = d_x + l_{x+1}$ ()

d) $L_8 + L_9 = T_8 - T_{10}$ ()

e) $l_0 = {}_w d_0$ ()

8. Calcular el número medio de años vividos entre los 1 y 5 años de edad por las personas que fallecen dentro de dicho intervalo, o sea el valor de ${}_4k_1$, implícito en la tabla de vida masculina de México de 1969-71 presentada en el anexo. Comparar el resultado obtenido con el valor ${}_4k_1 = 1.90$ utilizado en la construcción de las Tablas Modelo de Mortalidad de las Naciones Unidas.

9. A partir de los siguientes valores de l_x correspondientes a la tabla de vida masculina de Costa Rica de 1972-1974, calcular el tiempo vivido ${}_5L_{35}$ y ${}_5L_{40}$ por el método de los trapecios. Comparar los resultados con los obtenidos en la tabla de Costa Rica, que se indican también en el cuadro:

Grupos de edades	l_x	${}_5L_x$
35 - 39	89 025	441 943
40 - 44	87 655	434 166
45 - 49	85 875	

10. Suponiendo que los nacimientos de los años 1969 y 1970 de una determinada región, son iguales a 1 200 y 1 250 respectivamente, que las de funciones de 0 y 1 año de edad son:

Edad	1969	1970
0	90	80
1	40	36

y que los factores de separación valen $f_0 = 0.30$, $f_1 = 0.50$, calcular con la ayuda del diagrama de Lexis, el número de personas menores de un año y con un año cumplido, al 1° de enero de 1971.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.

$$\text{R.1 a)} \quad {}_5p_{30} = \frac{l_{35}}{l_{30}}$$

es la probabilidad de que una persona con 30 años exactos lle-
que con vida a los 35 años (o sobreviva 5 años).

$$\text{b)} \quad {}_5q_{17} = \frac{l_{17} - l_{22}}{l_{17}} = \frac{{}_5d_{17}}{l_{17}}$$

es la probabilidad de que una persona con 17 años exactos muera
antes de cumplir los 22 años.

$$\text{R.2 a)} \quad {}_5p_{30} = \frac{l_{35}}{l_{30}} = \frac{89\ 025}{90\ 136} = \underline{0.98767}$$

$$\text{b)} \quad {}_5q_{17} = \frac{l_{17} - l_{22}}{l_{17}} = \frac{92\ 335 - 91\ 601}{92\ 335} = \frac{734}{92\ 335} = \underline{0.00795}$$

$$\text{R.3 a)} \quad {}_3d_2 = l_2 - l_5 = 93\ 852 - 93\ 280 = \underline{572}$$

$$\text{b)} \quad q_0 = \underline{0.05520}$$

$$\text{c)} \quad {}_{11}L_{43} = T_{43} - T_{54} = 2\ 703\ 307 - 1\ 778\ 116 = \underline{925\ 191}$$

$$\text{d)} \quad e_{65}^o = 14.04 \text{ años}$$

- R.4 Para cumplirse la probabilidad indicada la persona debe sobrevivir primero desde los 20 a los 40 años y luego fallecer en los 10 años siguientes, vale decir:

$$({}_{20}p_{20})({}_{10}q_{40}) = \frac{l_{40}}{l_{20}} \cdot \frac{l_{40} - l_{50}}{l_{40}} = \frac{l_{40} - l_{50}}{l_{20}} = \frac{52\,820 - 44\,739}{64\,331} = \underline{0.12562}$$

R.5

x	q_x	l_x	d_x
0	0.05356	100 000	5 356
1	0.00867	94 644	821
2	0.00323	93 823	303

$$R.6 \quad {}_4d_1 = {}_5d_0 - d_0 = l_0 ({}_5q_0 - q_0)$$

$$l_1 = l_0 - d_0 = l_0 - l_0 q_0 = l_0 (1 - q_0)$$

$${}_4q_1 = \frac{{}_4d_1}{l_1} = \frac{{}_5d_0 - d_0}{1 - q_0} = \frac{0.06720 - 0.05520}{1 - 0.05520} = \underline{0.01270}$$

R.7 a) V ; b) F ; c) V ; d) V ; e) V.

R.8 Partiendo de la relación (15) referida al grupo 1-4, y despejando ${}_4k_1$ se tiene :

$${}_4L_1 = {}_4l_5 + {}_4k_1 {}_4d_1$$

$${}_4k_1 = \frac{{}_4L_1 - {}_4l_5}{{}_4d_1}$$

Reemplazando los valores de ${}_4L_1$, l_5 y ${}_4d_1$ de la tabla masculina de México, resulta:

$${}_4q_1 = \frac{362\,764 - 4(89\,675)}{3\,104} = 1.31$$

Para otras tablas de vida se obtienen valores de ${}_4k$, más o menos similares. Por lo tanto puede decirse que el valor ${}_4k_1 = 1.90$ utilizado en la construcción de las Tablas Modelo de las Naciones Unidas, sobreestima el cálculo del tiempo vivido ${}_4L_1$.

$$R.9 \quad {}_5L_{35} = \frac{5}{2} (l_{35} + l_{40}) = \frac{5}{2} (89\,025 + 87\,655) = \underline{441\,700} \text{ años-persona}$$

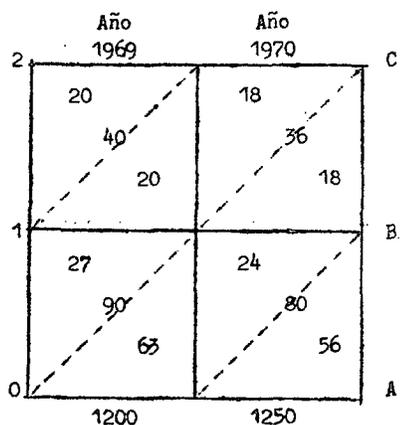
$${}_5L_{40} = \frac{5}{2} (l_{40} + l_{45}) = \frac{5}{2} (87\,655 + 85\,875) = \underline{433\,825} \text{ años-persona}$$

Dado que se trata de un tramo de edades en el cual la función l_x tiene curvatura hacia abajo, el método de los trapecios subestima el tiempo vivido, pero la diferencia es pequeña, del orden de los 300 años-personas, lo que representa un error inferior al 1 por mil.

$$R.10 \quad N_0^{71} = \overline{AB} = 1\,250 - 56 = \underline{1\,194}$$

$$N_1^{71} = \overline{BC} = 1\,200 - 63 - 24 - 18 = \underline{1\,095}$$

Gráfico 15



Capítulo 2.

POBLACION ESTACIONARIA

2.1 Conceptos introductorios

Se ha visto ya el concepto de tabla de mortalidad, que consiste en seguir una generación o cohorte hipotética de personas a través del tiempo, sometiéndola a determinadas condiciones de mortalidad y estableciendo a cada edad el número de sobrevivientes.

Una segunda interpretación de la tabla de vida resulta al considerarla como un modelo de población estacionaria. Una *población estacionaria es un modelo teórico en el cual la población total así como la distribución por edades no cambia en el tiempo.* En este modelo la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad y, en consecuencia, la tasa de

crecimiento natural es igual a cero. Tal población hipotética puede ser obtenida suponiendo que los nacimientos anuales son constantes e iguales a ℓ_0 , y sometiénolos a la ley de mortalidad invariable de la tabla de vida.

A fin de derivar las principales características (vale decir, la población total, el número de defunciones, etc.) del modelo de población estacionaria, se obtendrán primero algunas relaciones básicas, (fórmulas (47) a (50)^{7/} suponiendo que la mortalidad por edad se mantiene constante a través del tiempo, y luego, agregando el supuesto de que los nacimientos anuales en t son iguales a ℓ_0 , se llegará al caso particular de la población estacionaria.

Designando $N(t)$ la población total en el momento t , $B(t)$ los nacimientos anuales en t , y $p(x) = \ell_x/\ell_0$ la probabilidad de supervivencia desde el nacimiento hasta la edad x , la cual se supone constante, entonces la población total en el momento t está formada por la suma de todas las personas que habiendo nacido en $t-x$ han sobrevivido hasta el momento t , teniendo entonces la edad x . Esta suma se obtiene dando a x todos los valores posibles desde 0 a ω . Se obtiene así:

$$(47) \quad N(t) = \int_0^{\omega} B(t-x) p(x) dx$$

Haciendo un simple cambio de los límites de la integral, se obtiene el número de personas de un grupo de edades cualquiera; por ejemplo para las edades x_1, x_2 es

$$(48) \quad N^t(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} B(t-x) p(x) dx$$

^{7/} Lotka, Alfred. J., Teoría analítica de las Asociaciones Biológicas, CELADE, Serie E, No. 5, Santiago, Chile, páginas 63 y siguientes.

Análogamente, las defunciones totales $D(t)$ se obtienen multiplicando las personas que han sobrevivido a la edad x en el momento t , o sea $B(t-x) p(x)$, por la tasa instantánea de mortalidad por edad $\mu(x)$ y sumando todas las edades, es decir:

$$(49) \quad D(t) = \int_0^{\omega} B(t-x) p(x) \mu(x) dx$$

Y finalmente las defunciones de un grupo de edades x_1, x_2 se obtienen, como en el caso de la población por edades, cambiando los límites de la integral

$$(50) \quad D^t(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} B(t-x) p(x) \mu(x) dx$$

2.2 Población estacionaria: Principales características

Las cuatro relaciones anteriores se basan en el supuesto de mortalidad por edad constante. Agregando ahora el supuesto de que los nacimientos anuales en t son iguales a l_0 , se llega entonces a las siguientes características de la población estacionaria.

Haciendo $B(t-x) = l_0$ en la relación (47) se obtiene la *población total*

$$(51) \quad N(t) = \int_0^{\omega} l_0 \frac{l_x}{l_0} dx = \int_0^{\omega} l_x dx = T_0 = \text{constante}$$

y haciendo otro tanto en (48) se obtiene la *población estacionaria por edades*:

$$(52) \quad N(x, x+n) = \int_x^{x+n} l_x dx = {}_n L_x = \text{constante}$$

Por su parte las *defunciones totales* resultan, reemplazando los nacimientos en la relación (49) y recordando la definición de $\mu(x)$ dada en la sección 1.8 (pág.31)

$$(53) \quad D(t) = -\int_0^{\omega} l_0 \frac{l_x}{l_0} \frac{1}{l_x} \frac{d l_x}{dx} dx = -\int_0^{\omega} d l_x \\ = - (l_{\omega} - l_0) = l_0$$

Finalmente las *defunciones por edades* se obtienen reemplazando l_0 en la relación (50), o bien directamente integrando entre x y $x+n$ en la (53):

$$(54) \quad D(x, x+n) = -\int_x^{x+n} d l_x = - (l_{x+n} - l_x) = {}_n d_x$$

Con esta información se pueden derivar las tasas de natalidad y mortalidad. La *tasa bruta de natalidad*, que es igual al cociente entre los nacimientos anuales y la población total, será

$$(55) \quad b = \frac{B(t)}{N(t)} = \frac{l_0}{T_0} = \frac{1}{e_0^o}$$

e igualmente la *tasa bruta de mortalidad*,

$$(56) \quad d = \frac{D(t)}{N(t)} = \frac{l_0}{T_0} = \frac{1}{e_0^o}$$

Por último, la *tasa de crecimiento natural*, que es la diferencia entre las tasas brutas de natalidad y mortalidad, será igual a cero

$$(57) \quad r = b - d = 0$$

En resumen, si se tiene una población en la cual la mortalidad por edad es constante y los nacimientos anuales en t son iguales a l_0 , entonces la población total así como la población por edades permanece invariable, la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad, y las diversas características (T_0 , ${}_nL_x$, d_x , etc.) corresponden a la tabla de mortalidad considerada. Dicho modelo se denomina *población estacionaria*.

La interpretación de las funciones l_x , ${}_nd_x$, ${}_nL_x$ y T_x en la población estacionaria es la siguiente:

- l_x : Es el número de personas que alcanza la edad exacta x en cada año. Tiene una significación similar al valor de E_x de una población real.
- ${}_nd_x$: Es el número de personas que fallece cada año con edades comprendidas entre x y $x+n$. Tiene un significado similar al valor de ${}_nD_x$ de una población real.
- ${}_nL_x$: Representa el número de personas que en cualquier momento tiene edades comprendidas entre x y $x+n$. Su significado es análogo al valor de ${}_nN_x$ de una población real.
- T_x : Es el número de personas que en cualquier momento tiene edades comprendidas entre x y ω . Su significado es análogo al valor de ${}_\omega N_x$ de una población real.

Por último las funciones n^q_x y e_x^0 tienen en la población estacionaria la misma interpretación que en la tabla de vida.

Ejemplo:

Dado el siguiente diagrama de Lexis, indicar a qué funciones de la población estacionaria corresponden los siguientes segmentos y superficies:

- a) \overline{AB} ; e) Sup FGON
 b) \overline{HL} ; f) Sup FHLJ
 c) \overline{CO} ; g) \overline{GH}
 d) Sup BCGF; h) \overline{AC}

Resp.:

- a) l_0 ; e) ${}_2d_1$
 b) L_1 ; f) $2d_1$
 c) ${}_3L_0$; g) l_1
 d) d_0 ; h) $2l_0$

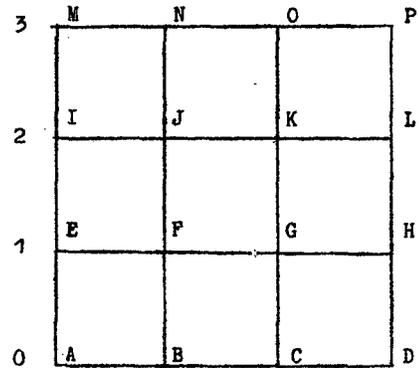


Gráfico 16

2.3 Relación entre n^m_x y n^q_x en la población estacionaria

Esta comparación es de gran importancia, ya que la fase fundamental en la construcción de una tabla de vida, según se verá posteriormente, es la conversión de las tasas centrales de mortalidad, en probabilidades de muerte de cada grupo de edades establecido.

Empecemos por definir estas funciones:

$$n^q_x = \frac{d_x}{l_x};$$

$$n^m_x = \frac{d_x}{nL_x}$$

La función ${}_nq_x$ es una probabilidad, o sea es igual a los casos favorables dividido por los casos posibles. El numerador siempre constituye una parte del denominador y, en los casos extremos, puede comprender a ninguno o todos los valores del denominador; por lo tanto la probabilidad varía entre 0 y 1.

En la función ${}_nm_x$ tenemos en el numerador las defunciones y en el denominador la población estacionaria con edades entre x y $x+n$, lo que es igual al tiempo vivido por la población de ese grupo de edades. Esta función varía también entre 0 y 1, aunque excepcionalmente puede tomar valores superiores.

En general la probabilidad de muerte (${}_nq_x$) es algo menos de n veces el valor de la tasa central de mortalidad (${}_nm_x$). Por ejemplo según la tabla de vida masculina de Costa Rica de 1973,

$x, x+n$	n	${}_nm_x$	${}_nq_x$	$\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x}$
0-1	1	0.05762	0.05520	0.958
10-15	5	0.00073	0.00364	4.986
30-40	10	0.00279	0.02753	9.867

Tanto ${}_nm_x$ como ${}_nq_x$ pueden ser expresados en términos de l_x

$$(58) \quad {}_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} l_x dx}$$

$$(59) \quad {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Esto significa que si se conoce la forma de l_x , la función que relaciona los dos tipos de tasas podría ser determinada explícitamente. Pero la función l_x tiene una forma matemática compleja y varía entre una y otra población, de modo que no es fácil de establecer.

Veamos la relación entre ${}_n^m x$ y ${}_n^q x$ suponiendo primero que la función l_x varía en forma lineal, luego que l_x varía en forma exponencial, y por último suponiendo que se conocen los factores de separación ${}_n^b x$.

a) Si se postula que la función l_x varía en forma lineal en el intervalo $x, x+n$, lo cual equivale a decir que las muertes se distribuyen uniformemente dentro del intervalo, se tiene:

$$(60) \quad {}_n^m x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} l_x dx} = \frac{l_x - l_{x+n}}{\frac{l_x + l_{x+n}}{2} \cdot n}$$

Multiplicando numerador y denominador por $2/l_x$:

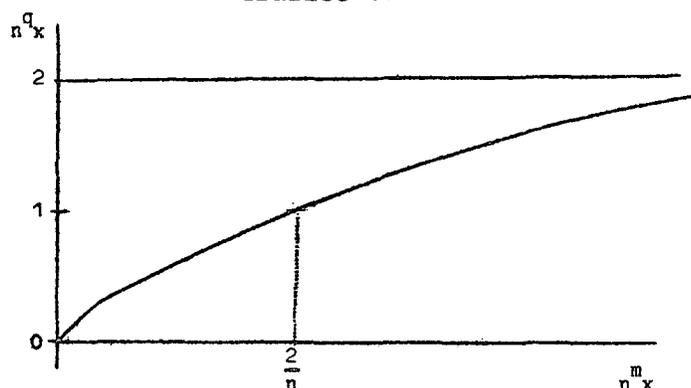
$$(61) \quad {}_n^m x = \frac{2 \cdot {}_n^q x}{n(1 + \frac{{}_n^p x})} = \frac{2 \cdot {}_n^q x}{2n - n \cdot {}_n^q x}$$

Despejando ${}_n^q x$, en esta última expresión resulta:

$$(62) \quad {}_n^q x = \frac{2 \cdot n \cdot {}_n^m x}{2 + n \cdot {}_n^m x} = \frac{n \cdot {}_n^m x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_n^m x}$$

que es la relación entre ${}_n^m x$ y ${}_n^q x$ bajo el supuesto de que l_x varía en forma lineal en el intervalo $x, x+n$. Dicha relación tiene el siguiente comportamiento gráfico:

Gráfico 17



Quando ${}_n m_x$ vale cero, ${}_n q_x$ también vale 0, pero cuando ${}_n m_x$ crece la curva tiende hacia 2, por lo cual no es válida para tasas centrales muy elevadas. El campo de variación de ${}_n m_x$ es:

$$(63) \quad 0 \leq {}_n m_x \leq 2/n$$

en cuyo intervalo la probabilidad de muerte varía entre 0 y 1.

En particular, si $n = 1$, la relación (62) toma la forma siguiente, muy usualmente empleada en la construcción de tablas completas:

$$(64) \quad q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x}$$

b) Si se supone que la función l_x varía en forma exponencial en el intervalo $x, x+n$

$$(65) \quad l_x = e^{a+bx}$$

se tiene el siguiente desarrollo que puede verse en Reed y Merrell ^{8/}:

$$(66) \quad {}_n m_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\int_x^{x+n} \ell_x dx} = \frac{e^{a+bx} - e^{a+b(x+n)}}{\int_x^{x+n} e^{a+bx} dx}$$

Resolviendo la integral por sustitución (haciendo $u = a + bx$) se llega a la siguiente expresión:

$$(67) \quad {}_n m_x = \frac{e^{a+bx} - e^{a+b(x+n)}}{\frac{1}{b} [e^{a+b(x+n)} - e^{a+bx}]} = -b$$

A su vez:

$$(68) \quad {}_n q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{e^{a+bx} - e^{a+b(x+n)}}{e^{a+bx}} = 1 - e^{bn}$$

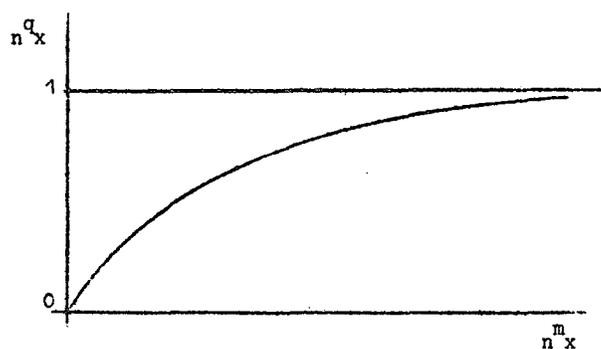
Reemplazando $b = -\frac{1}{{}_n m_x}$, se obtiene:

$$(69) \quad {}_n q_x = 1 - e^{-n} {}_n m_x$$

que es la relación bajo el supuesto que ℓ_x varía en forma exponencial entre x , $x+n$. En este caso la fórmula toma el siguiente comportamiento gráfico:

^{8/} Reed, Lowell J. y Merrell, Margaret, Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D. No. 49, Santiago, Chile.

Gráfico 18



es decir, para $n^m_x = 0$, $n^q_x = 0$, y su límite superior es igual a 1, lo cual está de acuerdo con los valores que puede tomar la probabilidad de muerte n^q_x .

c) Relación a través del factor de separación. Por último, si se conocen los factores de separación n^f_x , entonces se puede establecer la siguiente relación entre los valores de la probabilidad de muerte con los de la tasa central de mortalidad de la población estacionaria.

Ya se ha visto en la sección 1.4.1 (págs. 23 y 24) que:

$$(23) \quad n^L_x = (n^f_x) l_x + (n - n^f_x) l_{x+n}$$

$$(27) \quad = n^k_x l_x + (n - n^k_x) l_{x+n}$$

donde n^f_x es el factor de separación de las muertes y $n^k_x = n^f_x$ es el tiempo vivido en el intervalo $x, x+n$ por cada una de las personas que fallecen en dicho intervalo.

Reemplazando esta última expresión en la tasa central de mortalidad, se tiene:

$$(70) \quad {}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \frac{{}_n d_x}{{}_n k_x \ell_x + (n - {}_n k_x) \ell_{x+n}}$$

Dividiendo numerador y denominador por ℓ_x y despejando ${}_n q_x$, se llega a la relación final:

$$(71) \quad {}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{{}_n m_x + (n - {}_n k_x)}$$

fórmula que permite calcular los valores de ${}_n q_x$ conociendo las tasas centrales de mortalidad ${}_n m_x$ y los factores de separación. En el caso de que estos últimos no se conozcan, pueden obtenerse de otra tabla de referencia, que tenga un nivel de mortalidad comparable.

Por otra parte, si la función ℓ_x es lineal en el intervalo $x, x+n$, en cuyo caso ${}_n \bar{q}_x = 0.50$, o bien ${}_n k_x = n/2$, reemplazando el valor de ${}_n k_x$ en la relación (71) se llega a la fórmula (62) ya vista.

Se han obtenido así tres relaciones que vinculan la tasa central de mortalidad con la probabilidad de muerte, las cuales serán retomadas más adelante, en la construcción de tablas de mortalidad.

2.4 Relaciones de supervivencia

Hemos visto las probabilidades de sobrevivir de la forma ${}_n p_x = l_{x+n} / l_x$, referidas a personas de edad *exacta* x . Para propósitos demográficos se utilizan más frecuentemente otro tipo de probabilidades que permiten obtener los sobrevivientes de un grupo de personas con edad *cumplida* x , llamadas *relaciones de supervivencia*.

Mientras las probabilidades de sobrevivir dependen de la edad inicial x y del período que comprende la probabilidad n , las relaciones de supervivencia dependen de tres variables: la edad inicial del intervalo de edades x , la amplitud del intervalo de edades n y el período que comprende la probabilidad, m .

Consideremos primero las relaciones de supervivencia para intervalos de cinco años ($n = m = 5$) y luego para un intervalo de edades y de tiempo cualesquiera.

2.4.1 Relaciones de supervivencia para intervalos de cinco años. Estas son las relaciones más comúnmente utilizadas para proyecciones de población.

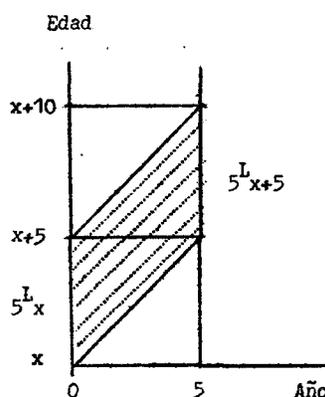
En una población estacionaria, el número de personas que en un momento determinado tienen x a $x+4$ años cumplidos, son ${}_5 L_x$. Al cabo de cinco años el total de sobrevivientes de este grupo está dado por ${}_5 L_{x+5}$. La relación entre estas dos cantidades, representa la probabilidad que tienen las personas de x a $x+4$ años cumplidos, en la población estacionaria, de

estar con vida cinco años después. Se simboliza con ${}_5P_{x,x+4}$, donde el subíndice de la derecha representa el grupo de edades en años cumplidos y el de la izquierda el período que comprende la probabilidad.

Es por lo tanto,

$$(72) \quad {}_5P_{x,x+4} = \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x}$$

Gráfico 19

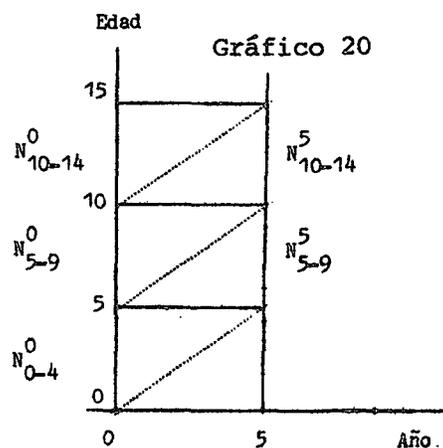


Por ejemplo, con datos de la tabla de vida femenina de Costa Rica, año 1973, para $x = 0$,

$${}_5P_{0-4} = \frac{{}_5L_5}{{}_5L_0} = \frac{471\ 093}{475\ 941} = 0.98981$$

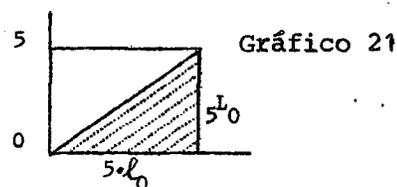
Factores de esta forma son los que se aplican a grupos reales de personas que en un momento determinado tiene x a $x+4$ años cumplidos, a fin de obtener el número esperado de sobrevivientes al cabo de cinco años. Procediendo de este modo con las personas de cada grupo de edades de un momento determinado o cualquiera, se puede obtener el número de sobrevivientes cinco años después. Esto es:

$$\begin{aligned}
 N_{0-4}^0 \cdot {}_5P_{0-4} &= N_{5-9}^5 \\
 N_{5-9}^0 \cdot {}_5P_{5-9} &= N_{10-14}^5 \\
 N_{10-14}^0 \cdot {}_5P_{10-14} &= N_{15-19}^5 \\
 &\dots \quad \dots
 \end{aligned}$$



Para obtener los sobrevivientes de los nacimientos ocurridos en el quinquenio considerado, se utiliza otro tipo de relación, obtenida también de la población estacionaria, llamada *relación de supervivencia al nacimiento*. Se simboliza con ${}_5P_b$ donde b indica que se trata de una relación de supervivencia para los nacimientos mientras que el 5 representa el número de años de nacimientos considerados, que es igual a la amplitud del intervalo de edades de los sobrevivientes al final del período.

$$(74) \quad {}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{5 \cdot l_0}$$



Esta relación de supervivencia al nacimiento ${}_5P_b$, representa la probabilidad que tienen los niños nacidos durante un quinquenio, en la población estacionaria, de estar con vida al final del mismo.

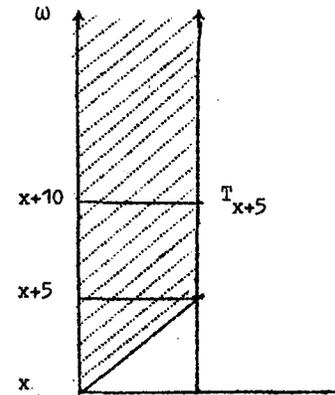
Aplicando esta relación a los nacidos durante un quinquenio en una población real, se pueden obtener los sobrevivientes de esos nacimientos:

$$(75) \quad B^{0-5} \cdot {}_5P_b = N_{0-4}^5$$

Finalmente para el grupo abierto final de edades, la relación de supervivencia toma la forma:

$$(76) \quad {}_5P_{x \text{ y más}} = \frac{L_{x+5 \text{ y más}}}{L_{x \text{ y más}}} = \frac{T_{x+5}}{T_x}$$

Gráfico 22



Representa la probabilidad que tienen las personas de x años y más de la población estacionaria, de estar con vida cinco años después.

Si por ejemplo, $x = 80$,

$${}_5P_{80 \text{ y más}} = \frac{L_{85 \text{ y más}}}{L_{80 \text{ y más}}} = \frac{T_{85}}{T_{80}}$$

Con datos de la tabla femenina de Costa Rica de 1973 resultaría:

$${}_5P_{80 \text{ y más}} = \frac{114\ 784}{268\ 750} = 0.42710$$

Multiplicando relaciones de supervivencia de este tipo por la población real del grupo abierto final, se obtienen los sobrevivientes de este grupo:

$$(77) \quad N_{80 \text{ y más}}^0 \quad {}_5P_{80 \text{ y más}} = N_{85 \text{ y más}}^5$$

Resumiendo: las relaciones de supervivencia para grupos quinquenales de edades, proyectadas por cinco años, son las siguientes:

$$(72) \quad {}_5^P x, x+4 = \frac{{}_5^L x+5}{{}_5^L x}$$

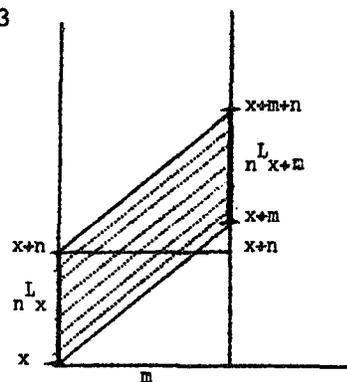
$$(74) \quad {}_5^P b = \frac{{}_5^L 0}{5 \cdot l_0}$$

$$(76) \quad {}_5^P x \text{ y más} = \frac{L_{x+5} \text{ y más}}{L_x \text{ y más}} = \frac{T_{x+5}}{T_x}$$

2.4.2 Caso general: intervalo de edad cualquiera n , proyectado por m años. En este caso la relación de supervivencia toma la siguiente forma:

$$(78) \quad {}_m^P x, x+n-1 = \frac{{}_n^L x+m}{{}_n^L x}$$

Gráfico 23

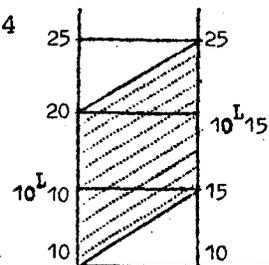


donde x es la edad, n la amplitud del intervalo de edades y m el período proyectado. Representa la probabilidad que tienen las personas de x a $x+n-1$ años cumplidos, en la población estacionaria, de estar con vida m años después.

Por ejemplo

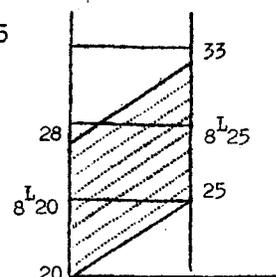
$$5^P_{10-19} = \frac{10^L_{15}}{10^L_{10}}$$

Gráfico 24



$$5^P_{20-27} = \frac{8^L_{25}}{8^L_{20}}$$

Gráfico 25



Al aplicar las relaciones de supervivencia de la población estacionaria a poblaciones reales, surge un pequeño problema teórico en la medida en que, dentro de cada grupo considerado, la población real tenga una composición por edades diferente de la estacionaria. Este modelo tiene, como se ha indicado, una tasa de crecimiento $\lambda = 0$, por lo cual su composición por edades es más vieja que la correspondiente a una población real con tasa de crecimiento positiva, ya que a medida que λ baja, la estructura de la población tiende a envejecer.

El error que se comete por este efecto, es generalmente mayor en el grupo abierto final, o bien donde se consideran grupos de edades relativamente grandes (digamos de 15 o 20 años). Por ejemplo, según puede verse en los cálculos siguientes, si se proyecta la población masculina de Costa Rica que tenía 60 a 79 años de edad en 1973, por un período de cinco años, en base a relaciones de supervivencia quinquenales tomadas de la tabla de vida masculina de ese año, se obtienen 33 360 personas sobrevivientes. En cambio si se hace la misma estimación utilizando una sola relación

de supervivencia por 20 años (${}_5P_{60-79}$), tomada de la misma tabla, se obtienen sólo 32 731 sobrevivientes, lo cual representa, aproximadamente, un error por defecto del orden del 2 por ciento.

Estimación 1 (Considerando cuatro relaciones de supervivencia por grupos quinquenales de edad):

$$N_{65-84}^{78} = \sum_{x=60}^{75} N_{x,x+4}^{73} ({}_5P_{x,x+4})$$

$x, x+4$	$N_{x,x+4}^{73}$	${}_5P_{x,x+4}$	$N_{x,x+4}^{78}$
60-64	16 197	.87596	
65-69	11 976	.81179	14 188
70-74	8 721	.73011	9 722
75-79	4 921	.62643	6 367
80-84			3 083
TOTAL	41 815		<u>33 360</u>

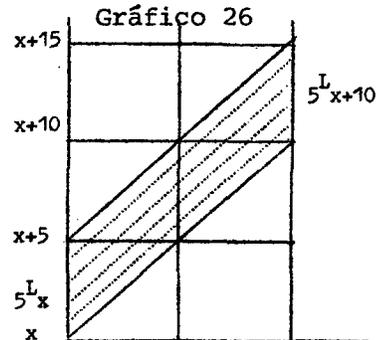
Estimación 2 (Considerando una sola relación de supervivencia de un grupo de 20 años de edad):

$$N_{65-84}^{78} = N_{60-79}^{73} \cdot ({}_5P_{60-79})$$

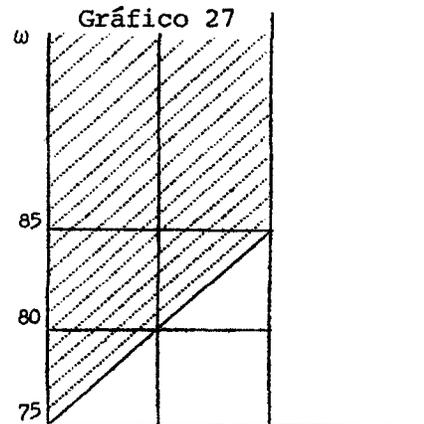
$$= 41\ 815 \cdot (0.78277) = \underline{32\ 731}$$

Por otra parte, se pueden hacer diversos tipos de combinaciones con relaciones de supervivencia conocidas, para obtener otras. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}({}_5P_x, x+4)({}_5P_{x+5, x+9}) &= \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} \cdot \frac{{}_5L_{x+10}}{{}_5L_{x+5}} \\ &= \frac{{}_5L_{x+10}}{{}_5L_x} = \\ &= {}_{10}P_{x, x+4}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}({}_{5}P_{75 \text{ y más}})({}_{5}P_{80 \text{ y más}}) &= \frac{L_{80+}}{L_{75+}} \cdot \frac{L_{85+}}{L_{80+}} = \\ &= \frac{L_{85+}}{L_{75+}} = {}_{10}P_{75 \text{ y más}}\end{aligned}$$



2.5 Estimación de la esperanza de vida al nacer a partir de las relaciones de supervivencia

Resulta de gran utilidad disponer de una fórmula rápida para calcular la esperanza de vida al nacer a partir de las relaciones de supervivencia por edades, sin necesidad de pasar por las restantes funciones de la tabla de vida. Tal necesidad se presenta por ejemplo, al hacer proyecciones de población, donde las ${}_5P_x$ estimadas deben ajustarse en cada quinquenio a un nivel de esperanza de vida preestablecido.

Sean las siguientes relaciones de supervivencia quinquenales, a partir de las cuales se desea calcular la esperanza de vida al nacer.

$${}_5P_b; {}_5P_{0-4}; {}_5P_{5-9}; {}_5P_{10-14}; \dots; {}_5P_{80-84}; {}_5P_{85} \text{ y más}$$

De acuerdo a la definición de las relaciones de supervivencia, dado un ${}_5l_0$ arbitrario pueden calcularse los valores de ${}_5L_0, {}_5L_5, \dots, {}_5L_{85}, L_{90+}$ en la siguiente forma:

$${}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{5l_0}; \quad \text{de donde:} \quad {}_5L_0 = 5l_0 {}_5P_b$$

$${}_5P_{0-4} = \frac{{}_5L_5}{{}_5L_0}; \quad \text{de donde:} \quad {}_5L_5 = {}_5L_0 \cdot {}_5P_{0-4}$$

$$= 5l_0 {}_5P_b {}_5P_{0-4}$$

.....

.....

$${}_5P_{80-84} = \frac{{}_5L_{85}}{{}_5L_{80}}; \quad \text{de donde:} \quad {}_5L_{85} = {}_5L_{80} \cdot {}_5P_{80-84}$$

$$= 5l_0 {}_5P_b {}_5P_{0-4} \dots$$

$${}_5P_{75-79} {}_5P_{80-84}$$

Para el grupo abierto final, es necesario expresar $L_{90} \text{ y más}$ en función de $({}_5L_{85})$ y $({}_5P_{85} \text{ y más})$. A partir de la identidad $L_{90} \text{ y más} = L_{90} \text{ y más}$ multiplicando y dividiendo por ${}_5L_{85}$, teniendo en cuenta que ${}_5L_{85}$ es igual a $L_{85} \text{ y más} - L_{90} \text{ y más}$ y luego dividiendo numerador y denominador por $L_{85} \text{ y más}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 L_{90 \text{ y más}} &= 5^{L_{85}} \frac{\frac{L_{90 \text{ y más}}}{L_{85 \text{ y más}}}}{\frac{L_{85 \text{ y más}} - L_{90 \text{ y más}}}{L_{85 \text{ y más}}}} = 5^{L_{85}} \frac{5^{P_{85 \text{ y más}}}}{1 - 5^{P_{85 \text{ y más}}}} \\
 &= 5 \ell_0 5^{P_b} 5^{P_{0-4}} \cdots 5^{P_{80-84}} \frac{5^{P_{85 \text{ y más}}}}{1 - 5^{P_{85 \text{ y más}}}}
 \end{aligned}$$

Reemplazando finalmente cada uno de los valores de 5^L_χ en

$$(79) \quad T_0 = 5^{L_0} + 5^{L_5} + 5^{L_{10}} + \dots + 5^{L_{85}} + L_{90 \text{ y más}}$$

y dividiendo por ℓ_0 , se llega a la siguiente fórmula final, donde para abreviar se han omitido todos los subíndices 5 que van a la izquierda de cada relación de supervivencia:

$$\begin{aligned}
 (80) \quad e_0^o &= 5^{P_b} + 5^{P_b} P_0 + 5^{P_b} P_0 P_5 + 5^{P_b} P_0 P_5 P_{10} + \dots + \\
 &+ 5^{P_b} P_0 P_5 \dots P_{80} + 5^{P_b} P_0 P_5 \dots P_{80} \frac{5^{P_{85 \text{ y más}}}}{1 - 5^{P_{85 \text{ y más}}}}
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.

(Ver respuestas en pág. 64)

1. Indicar con símbolos a qué es igual cada una de las siguientes relaciones de supervivencia, y expresar con palabras su significado.

a) ${}_5P_{15-19}$; b) ${}_5P_b$; c) ${}_5P_{70}$ y más

2. Calcular las siguientes relaciones de supervivencia a partir de los valores de ${}_nL_x$ de la tabla de mortalidad femenina de Guatemala de 1950.

${}_1P_b$; ${}_5P_{20-24}$; ${}_{10}P_{35-39}$; ${}_{15}P_{70}$ y más

3. Indicar a qué es igual cada una de las siguientes relaciones de supervivencia.

${}_2P_b$; ${}_4P_{7-9}$; ${}_9P_{16-23}$; ${}_{10}P_{75}$ y más

4. Dado el siguiente gráfico de Lexis, referido a una población estacionaria, indicar el significado de cada una de las relaciones siguientes:

a) $\overline{AB} - \overline{EF}$

d) $\overline{CI} = \overline{BH} = \overline{AG}$

b) $\overline{DE} - \overline{HI}$

e) $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$

c) $\frac{\overline{FI}}{\overline{BE}}$

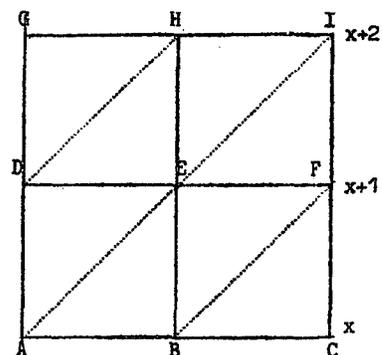


Gráfico 28

5. Indicar si las siguientes relaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

a) $m_x < q_x$ ()

b) ${}_5P_{0-4} {}_5P_{5-9} = {}_{10}P_{0-4}$ ()

c) ${}_5P_b < {}_5P_0$ ()

d) $q_0 \cdot q_1 = {}_2q_0$ ()

e) $P_b = \frac{\ell_0 - (1-b_0) d_0}{\ell_0}$ ()

6. Dadas las siguientes relaciones de supervivencia decenales:

$x, x+9$	${}_{10}P_{x, x+9}$
Nacimientos	0.86218
0-9	0.95874
10-19	0.94961
20-29	0.91816
30-39	0.90003
40-49	0.86357
50-59	0.74289
60-69	0.61478
70 y +	0.39654

a) Calcular, suponiendo $\ell_0 = 100\ 000$, los valores de ${}_{10}L_x$, T_x y e_0^o .

b) Verificar el valor de la esperanza de vida al nacer utilizando la fórmula acumulativa de la página 60.

7. A continuación se indican algunos valores de funciones de la tabla de vida. Deberá señalarse si esta información disponible es suficiente o insuficiente para calcular la relación de supervivencia del grupo 25-29 al cabo de 10 años (${}_{10}P_{25-29}$). Si es suficiente indique la forma de realizar el cálculo; si no es suficiente señale cuáles el dato que hace falta.

Entre ${}_nL_x$ y l_x rige la relación ${}_nL_x = \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n})$

T_{30} ; T_{40} ; T_{25} ; ${}_5q_{30}$; l_{30} ; l_{50} ; ${}_{10}d_{30}$

8. Dada la tasa central de mortalidad $m_{80-84} = 0.1060$ y el número medio de años vividos en ese grupo de edades ${}_5k_{80} = 2.47$, calcular la probabilidad de muerte ${}_5q_{80}$ utilizando las relaciones (62), (69) y (71).

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE CAPITULO 2

$$R.1 \quad a) \quad {}_5^P_{15-19} = \frac{{}_5^L_{20}}{{}_5^L_{15}}$$

Relación de supervivencia para las personas de 15-19 años, al cabo de 5 años. Representa la probabilidad que tienen las personas de 15 a 19 años cumplidos, en la población estacionaria, de estar con vida 5 años después.

$$b) \quad {}_5^P_b = \frac{{}_5^L_0}{5 \cdot \ell_0}$$

Relación de supervivencia al nacimiento. Mide la probabilidad que tienen los niños nacidos durante un quinquenio, en la población estacionaria, de estar con vida al final de dicho quinquenio.

$$c) \quad {}_5^P_{70 \text{ y más}} = \frac{L_{75 \text{ y más}}}{L_{70 \text{ y más}}} = \frac{T_{75}}{T_{70}}$$

Relación de supervivencia para el grupo abierto final. Representa la probabilidad que tienen las personas de 70 años y más, en la población estacionaria, de estar con vida 5 años después.

$$R.2 \quad a) \quad {}_1^P_b = \frac{L_0}{\ell_0} = \frac{89\ 262}{100\ 000} = \underline{0.89262}$$

$$b) \quad {}_5^P_{20-24} = \frac{{}_5^L_{25}}{{}_5^L_{20}} = \frac{304\ 082}{318\ 095} = \underline{0.95595}$$

$$c) \quad {}_{10}^P_{35-39} = \frac{{}_5^L_{45}}{{}_5^L_{35}} = \frac{239\ 662}{273\ 103} = \underline{0.87755}$$

$$d) \quad {}_{15}^P_{70 \text{ y} +} = \frac{T_{85}}{T_{70}} = \frac{20\ 832}{243\ 825} = \underline{0.08544}$$

$$\text{R.3 a) } {}_2P_6 = \frac{{}_2L_0}{2 \cdot l_0}$$

$$\text{b) } {}_4P_{7-9} = \frac{{}_3L_{11}}{3L_7}$$

$$\text{c) } {}_9P_{16-23} = \frac{{}_8L_{25}}{8L_{16}}$$

$$\text{d) } {}_{10}P_{75 y+} = \frac{{}_L85+}{L_{75+}}$$

$$\text{R.4 a) } l_x - l_{x+1} = d_x$$

$$\text{b) } l_{x+1} - l_{x+2} = d_{x+1}$$

$$\text{c) } \frac{{}_Lx+1}{L_x} = p_x$$

$$\text{d) } 2L_x$$

$$\text{e) } \frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x$$

R.5 a) F; b) V; c) F; d) F; e) V

R.6 a)

$x, x+9$	10^L_x	T_x	e_x^o
0-9	862 180	5 243 373	52.43
10-19	826 606	4 381 193	
20-29	784 954	3 554 587	
30-39	720 713	2 769 633	
40-49	648 663	2 048 920	
50-59	560 166	1 400 257	
60-69	416 142	840 091	
70-79	255 836	423 949	
80 y +	168 113	168 113	

$$10^L_0 = 10^l_0 10^P_b = \underline{862\ 180}$$

$$10^L_{10} = 10^L_0 10^P_{0-9} = 862\ 180 (0.95874) = \underline{826\ 606}$$

.....

$$L_{80y+} = 10^L_{70} \frac{10^P_{70+}}{1 - 10^P_{70+}} = 255\ 836 (0.6571107) = \underline{168\ 113}$$

$$b) e_o^o = 10^P_b + 10^P_b 10^P_0 + 10^P_b 10^P_0 10^P_{10} + \dots + 10^P_b 10^P_0 10^P_{10} \dots$$

$$10^P_{60} + 10^P_b 10^P_0 10^P_{10} \dots 10^P_{60} \frac{10^P_{70+}}{1 - 10^P_{70+}} = \underline{52.43 \text{ años}}$$

R.7 Suficiente

$$10^P_{25-29} = \frac{5^L_{35}}{5^L_{25}} = \frac{\frac{5}{2} \left[(\ell_{30} - \ell_{30} \cdot 5q_{30}) + (\ell_{30} - 10d_{30}) \right]}{T_{25} - T_{30}}$$

$$\text{R.8} \quad 5q_{80} = \frac{2 (5) 5^m_{80}}{2 + (5) 5^m_{80}} = \frac{2 (5) 0.1060}{2 + (5) 0.1060} = \underline{0.4190}$$

$$5q_{80} = 1 - e^{-5} 5^m_{80} = 1 - e^{-5(0.1060)} = \underline{0.4114}$$

$$5q_{80} = \frac{5 (0.1060)}{1 + (5 - 2.47) (0.1060)} = \underline{0.4179}$$

Los valores de 5^m_{80} y 5^k_{80} fueron tomados de la tabla femenina de Costa Rica de 1973, siendo 0.4179 el valor correcto de la probabilidad de muerte. Los otros dos cálculos efectuados dan una idea del error que introducen dichas fórmulas.

Capítulo 3.

TABLAS MODELO DE MORTALIDAD

3.1 Objetivos de las tablas modelo

Como se sabe, no existen datos confiables de mortalidad en gran parte de los países en desarrollo, lo que dificulta su utilización para fines de análisis demográfico y de planificación económica y social.

Para suplir en parte estas deficiencias, se han preparado diversos *modelos de mortalidad* que muestran una transición de la mortalidad al variar desde los niveles más altos a los más bajos conocidos. Dichas tablas fueron elaboradas en base a un número relativamente grande de tablas de mortalidad reales de países que tienen información confiable. Por lo tanto no representan las condiciones de ningún país particular, sino más bien la experiencia promedio correspondiente a cada nivel dado de mortalidad general considerado.

Las tablas modelo de mortalidad constituyen un instrumento de gran utilidad para hacer estimaciones de la mortalidad en países con datos fragmentarios, como marco general de referencia en el estudio de la mortalidad de un país particular, para fines de proyecciones de población y otros usos.

Entre los diversos modelos elaborados, se comentarán aquí las Tablas Modelo de Naciones Unidas, las Tablas de Coale y Demeny y el Sistema de Brass.

3.2 Las Tablas Modelo de Mortalidad de Naciones Unidas ^{9/}

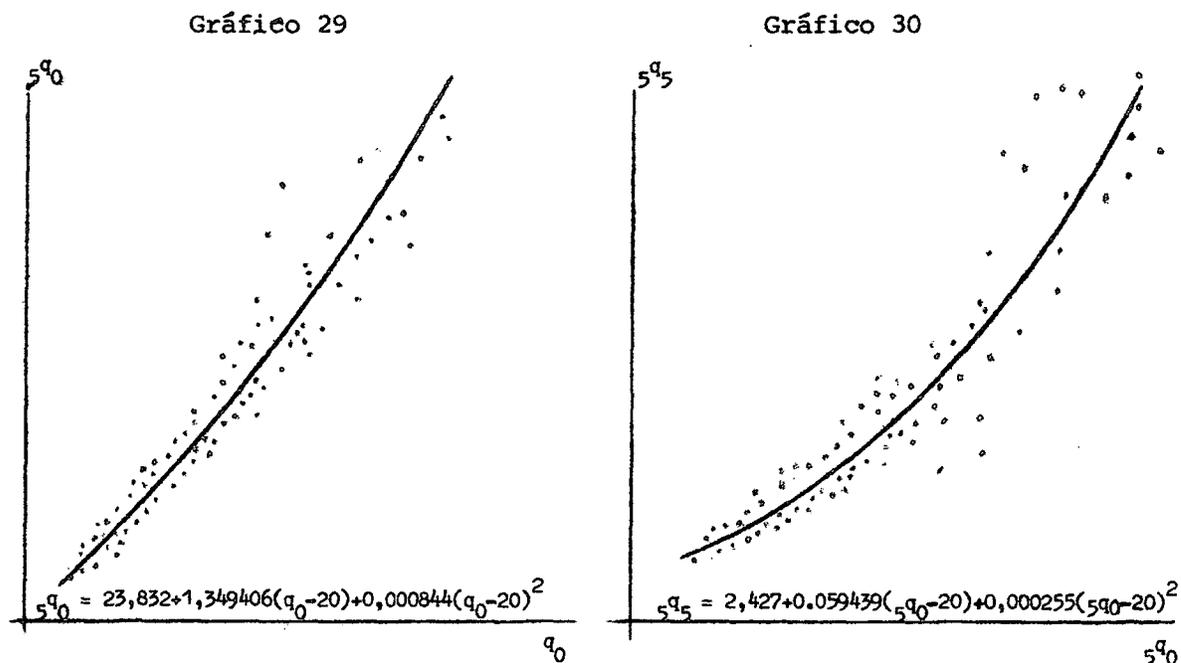
Fueron preparadas en 1955, siendo las primeras que se han construido y la base para otras tablas modelo más refinadas, preparadas con posterioridad.

Para su elaboración se utilizaron 158 tablas de mortalidad correspondientes al período de 1900 a 1950, publicadas en los Anuarios Demográficos de las Naciones Unidas. La selección se hizo teniendo en cuenta la más amplia extensión geográfica posible, una distribución adecuada en el tiempo, la exclusión de períodos de mortalidad particularmente elevada y una escala uniforme de grupos de edades. Estos propósitos no se lograron cabalmente, ya que la mayoría de las tablas pertenecen a países de Europa y América del Norte, estando muy poco representados los países en desarrollo. Las tablas consideradas comprenden una gama de mortalidad que va desde poco más de 20 años de esperanza de vida para las tablas de la India de principios de siglo, hasta más de 70 años en algunas tablas de los Países Bajos, Reino Unido y Nueva Zelanda.

^{9/} Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad. Tablas modelo de mortalidad para países insuficientemente desarrollados. ST/SOA/Serie A/22, y Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, ST/SOA/Serie A/25. Manual III.

Para cada tabla de vida se calcularon las probabilidades de muerte $q_0, {}_5q_0, {}_5q_5, \dots, {}_5q_{85}$ correspondiente a la población de ambos sexos.

En una serie de diagramas de dispersión se graficaron las probabilidades de muerte en pares sucesivos. Se comenzó la serie con las tasas q_0 y ${}_5q_0$, luego ${}_5q_0$ con ${}_5q_5$, después ${}_5q_5$ con ${}_5q_{10}$ y así sucesivamente. Estas observaciones se ajustaron por medio de una función de segundo grado, empleándose el método de los mínimos cuadrados. En los gráficos 29 y 30 se presentan las dos primeras relaciones calculadas. Cada punto de estos gráficos corresponde a una tabla de vida.



Con las 17 ecuaciones de regresión así calculadas y valores arbitrarios de q_0 se elaboraron 40 modelos de mortalidad, correspondientes a la población de ambos sexos. El primero de ellos corresponde a una probabilidad de muerte $q_0 = 20$ por mil, que es un nivel un poco inferior al más

bajo encontrado en las 158 tablas. Los 16 modelos siguientes corresponden a niveles de q_0 que van de 25 a 100 por mil, variando de 5 en 5 por mil, mientras que los restantes 23 modelos corresponden a niveles de mortalidad infantil de 110 a 330 por mil, variando de 10 en 10 por mil.

Se calcularon luego tablas de vida modelo para cada sexo en base a índices de mortalidad masculina y femenina respecto a la de ambos sexos, tomados de las 158 tablas.

Por último, en el Manual III de las Naciones Unidas se adaptaron estas tablas de mortalidad de modo que representaran una sucesión cronológica de tablas, en una situación típica de mortalidad decreciente, principalmente para fines de proyecciones de población. En diversos países, se ha observado que cuando la mortalidad es moderada o alta, se logra en promedio una ganancia de 2.5 años en la esperanza de vida por quinquenio. Por lo tanto los valores de q_x se interpolaron para intervalos correspondientes a esperanzas de vida de 20, 22.5, 25, etc. años. Después de los 65 años de esperanza de vida la ganancia supuesta por quinquenio es menor, conforme a la tendencia observada en los países de más baja mortalidad. En total aparecen en el Apéndice del Manual III 24 modelos de mortalidad por sexo, con esperanzas de vida que van desde 20 a 73.9 años para la población de ambos sexos.

Gabriel y Ronen en un artículo publicado en 1958 ^{10/} critican la técnica usada para la construcción de estas tablas modelo, mediante ecuaciones de recurrencia sucesivas, las cuales introducirían un sesgo acumulado.

^{10/} Gabriel, K.R. y Ronen, I., Estimación de la mortalidad a partir de tasas de mortalidad infantil, CELADE, Serie DS No. 22. Traducción del artículo "Estimates of Mortality from Infant Mortality Rates" publicado en Population Studies, Vol. XI, No. 2, 1958.

En vez de ello, Gabriel y Ronen calcularon los valores de ${}_5q_x$, utilizando las mismas 158 tablas, mediante ecuaciones lineales sobre q_0 de la forma:

$$(81) \quad {}_5q_x = a + b q_0$$

Comparando las estimaciones de esperanza de vida al nacer así obtenidas con las de las tablas Modelo de Naciones Unidas, se encontraron que estas últimas sobreestiman la esperanza de vida de 1 a 3 años para valores de q_0 comprendidos entre 40 y 200 por mil.

Por otra parte, las Tablas de Naciones Unidas son modelos de un solo parámetro, en el sentido de que una vez fijado el nivel de mortalidad de una edad cualquiera, queda determinada una única tabla de mortalidad. Esto no corresponde estrictamente con la realidad, donde un nivel dado de mortalidad en las primeras edades puede estar asociado con niveles de mortalidad muy diferentes en las edades avanzadas.

3.3 Las Tablas Modelo de Coale y Demeny ^{11/}

Las críticas encontradas en la aplicación de las tablas de Naciones Unidas y la nueva información disponible en los últimos años, llevaron a Coale y Demeny a elaborar, en 1965, cuatro conjuntos de tablas modelo, que los autores designaron como familia Este, Norte, Sur y Oeste. Para su construcción se utilizaron 326 tablas de mortalidad de los cinco continentes, en su mayoría referidas al período 1900 a 1960.

^{11/} Coale, A.J. y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966.

Para ello se calculó primero un modelo preliminar de un parámetro, graficando las 326 tablas y promediando las tasas que tenían el mismo rango de mortalidad. Luego se examinaron las desviaciones de cada tabla de vida, con respecto al modelo preliminar. En esta etapa se eliminaron aquellas tablas que mostraban desviaciones muy grandes e injustificadas. Como resultado de este análisis se pudo distinguir cuatro patrones de mortalidad por edad, representativos de amplias regiones geográficas, según el siguiente detalle:

1. Familia Este

-Comprende las tablas de vida de Austria, Alemania, Checoslovaquia, Norte y Centro de Italia, Hungría y Polonia. Con respecto a las tablas de mortalidad promedio preliminares, muestran una alta mortalidad en la infancia y después de los 50 años.

2. Familia Norte

-Comprende las tablas de Noruega, Suecia hasta 1920 e Islandia.
-Se caracteriza por una baja mortalidad infantil y después de los 45 o 50 años de edad.

3. Familia Sur

-Comprende las tablas de España, Portugal y Sur de Italia.
-Muestran una alta mortalidad entre los menores de 5 años, baja mortalidad de 40 a 60 años y alta mortalidad nuevamente después de los 65 años.

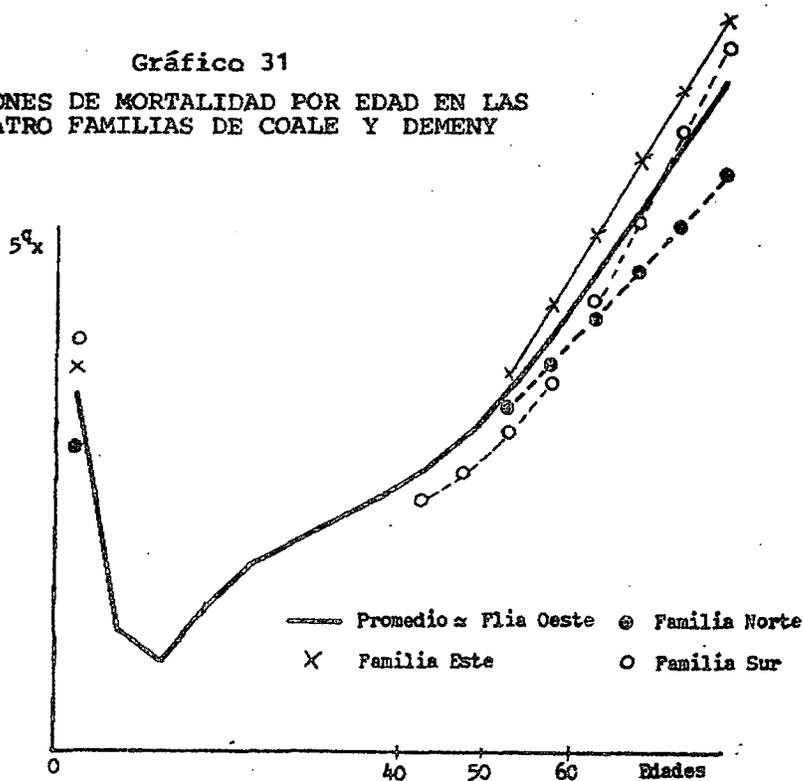
4. Familia Oeste

-Comprende las tablas de Australia, Canadá, Estados Unidos, Israel, Japón, Nueva Zelanda, Sudáfrica y los países de Europa Occidental.

-No muestran un patrón persistente y sistemático de desviación con respecto a las tablas modelo preliminares. En otras palabras, es un grupo residual, que queda después de haber eliminado las tablas de los grupos Este, Sur y Norte.

En el gráfico 31 se presenta en forma esquemática, el comportamiento de los cuatro patrones considerados. La línea continua corresponde a la situación promedio, que coincide aproximadamente con la familia Oeste. Por su parte la familia Este (marcada con X) presenta con respecto al promedio una mortalidad más alta en las primeras edades y después de los 50 años. A su vez la familia Norte, muestra una baja mortalidad en las primeras edades y después de los 45 años, mientras que la familia Sur se caracteriza por una alta mortalidad en las primeras edades -más alta aún que la familia Este-, luego una mortalidad por debajo del promedio entre los 40 y 60 años, y vuelve a ser elevada en las últimas edades. Este esquema varía ligeramente según el nivel de mortalidad considerado.

Gráfico 31
PATRONES DE MORTALIDAD POR EDAD EN LAS
CUATRO FAMILIAS DE COALE Y DEMENY



Para cada una de estas cuatro familias de tablas se calcularon, por sexo, ecuaciones de regresión lineales de ${}_nq_x$ y $\log {}_nq_x$, con respecto a la esperanza de vida a la edad 10, e_{10}^o :

$$(82) \quad {}_nq_x = A_x + B_x e_{10}^o$$

$$(83) \quad \log {}_nq_x = A'_x + B'_x e_{10}^o$$

Los valores de ${}_nq_x$ estimados a partir de la regresión logarítmica resultaron superiores para valores observados de e_{10}^o muy altos o bajos, e inferiores en el rango intermedio. Después de un análisis de estas regresiones, los autores derivaron las probabilidades de muerte de la relación (82) para valores bajos de e_{10}^o , de la relación (83) para valores altos de e_{10}^o y mediante un promedio de las relaciones (82) y (83) en el rango intermedio.

En total se elaboraron para cada familia 24 tablas por sexo, con un nivel mínimo de esperanza de vida al nacer de la población femenina de 20 años para el llamado Nivel 1, luego 22.5 años de esperanza de vida para el Nivel 2 y así sucesivamente hasta $e_{10}^o = 77.5$ para el Nivel 24. En el caso de la población masculina la esperanza de vida resultó un poco inferior.

Las Tablas Modelo de Coale y Demeny constituyen un modelo más flexible que el de Naciones Unidas, ya que ofrecen cuatro patrones diferentes de mortalidad por edad, de modo que puede seleccionarse entre ellos un modelo más apropiado o afín con las características de la población que se está estudiando. No obstante, cada una de estas cuatro familias continúa siendo un modelo de un solo parámetro.

Entre las diferentes tablas modelo existentes, las de Coale y Demeny son las más usadas en la actualidad. Los autores sugieren utilizar el modelo Oeste en su aplicación a los países en desarrollo, cuando no haya información confiable para determinar los patrones de mortalidad por edad que prevalecen.

Ejercicio:

Suponiendo que el número de sobrevivientes femeninos a la edad exacta 2 es $l_2 = 0.91318$, estimar la tasa de mortalidad infantil correspondiente en las Tablas Modelo de Coale-Demeny, familia Oeste.

Resp.

En las tablas indicadas (pág. (42)), el valor de $l_2 = 0.91318$ se encuentra entre los niveles 16 y 17, a los cuales les corresponde los siguientes valores de l_1

l_2	Nivel	l_1
0.89936	16 ($e_0^0 = 57.5$)	0.91823
0.91419	17 ($e_0^0 = 60.0$)	0.92934

Interpolando linealmente resulta para $l_2 = 0.91318$ un nivel en las tablas modelo de 16.93 ($e_0^0 = 59.8$) y un valor de $l_1 = 0.92858$. Por lo tanto la tasa de mortalidad infantil da:

$$q_0 = 1 - 0.92858 = \underline{0.07142}$$

3.4 El sistema de tablas de vida modelo de Brass ^{12, 13, 14/}

William Brass señala que en la realidad hay situaciones mucho más extremas que las que Coale y Demeny han supuesto. Cita el caso de países como Turquía, la URSS y Bulgaria con experiencias de mortalidad que, comparadas con la de Coale-Demeny, muestran una mortalidad mucho más alta en la niñez y mucho más baja en la población adulta. En otros casos la relación o el desvío es contrario. Esto lo llevó a crear el denominado "sistema logito" el cual utilizó para el análisis de la mortalidad de los países del Africa.

El sistema de Brass es distinto a los anteriores, en el sentido de que no comprende un conjunto de tablas de vida, sino que es una relación matemática que puede generar un infinito sistema de relaciones.

La relación fundamental es:

$$(84) \quad Y(x) = \alpha + \beta Y_{\Delta}(x)$$

siendo

$$(85) \quad Y(x) = \text{logito}(1-l_x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-l_x}{l_x}$$

$$(86) \quad Y_{\Delta}(x) = \text{logito}(1-l_x^{\Delta}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-l_x^{\Delta}}{l_x^{\Delta}}$$

12/ Brass, W., Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados, CELADE, Serie E., No. 14, 1974

13/ Brass, W., Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (fecundidad y mortalidad), San José, Costa Rica, 16-24 de setiembre de 1971. Serie DS. No. 9.

14/ Chackiel, J., "El modelo de mortalidad de Brass", Notas de Población, No. 25, CELADE, Abril, 1981.

donde l_x corresponde a la función de sobrevivencia que se desea describir con el modelo y l_x^s corresponde a una tabla de referencia, llamada tabla estándar. Para efectos de los cálculos se toma $l_0 = 1$ de modo que l_x es un valor comprendido entre 0 y 1. Por su parte α y β son dos parámetros que están relacionados con el nivel y el patrón de la mortalidad. Si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, los valores de l_x coinciden con los de la tabla estándar. Variando α se modifica el nivel, es decir se obtienen valores de l_x más altos o más bajos que los de la tabla estándar, mientras que cambiando β se modifican los patrones de mortalidad por edad.

Brass utiliza generalmente como estándar dos tipos de tablas ^{15/}, una llamada "estándar general" derivada de las Tablas Modelo de Naciones Unidas, y una "estándar africana", que tiene una mortalidad infantil más baja y juvenil más alta que la general. Sin embargo, puede utilizarse como estándar cualquier tabla apropiada, incluso una tabla modelo. En este último caso, haciendo $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ se reproduciría dicha tabla modelo, mientras que variando β se cambia el patrón de mortalidad, con lo cual se pone de manifiesto la mayor flexibilidad de este sistema.

Otra ventaja del modelo de Brass es que permite respetar en mayor medida los datos observados de un país. Por ejemplo, se puede construir una tabla de vida en base a información fragmentaria disponible sobre mortalidad al comienzo de la vida y para determinadas edades adultas, reproduciendo tales niveles.

Entre los inconvenientes del sistema de Brass puede mencionarse que las estimaciones están afectadas por la tabla estándar que se elija, y por otra parte, que si la información básica utilizada contiene errores, entonces la mayor flexibilidad del sistema puede conducir a valores más alejados de la realidad y de la experiencia promedio de otros países.

^{15/} Brass, W., "Métodos..." op.cit. págs. 63 y 146.

3.5 Breve referencia a otras tablas modelo

Finalmente se hará una ligera referencia a algunas otras tablas modelo de mortalidad, entre ellas, las nuevas tablas modelo que acaba de elaborar la División de Población de las Naciones Unidas.

Lederman y Breas, en un trabajo publicado en 1959, han desarrollado una metodología en base al *análisis de los componentes principales*, el cual permite determinar los factores más importantes que explican el nivel y los patrones de mortalidad por edad. Dichos autores determinaron tres componentes principales ^{16/}.

Bourgeois-Pichat, por su parte, ha elaborado tres series de tablas modelo, introduciendo desviaciones en uno y otro sentido en los patrones de mortalidad por edad de las tablas modelo de Naciones Unidas. Estas tablas fueron utilizadas para derivar estimaciones de diversos parámetros demográficos en países con estadísticas incompletas. ^{17/}

A su vez Sully Lederman, en un documento publicado por el INED en 1969 ^{18/}, desarrolla una nueva metodología para elaborar tablas modelo utilizando técnicas de regresión múltiple para estimar las probabilidades de muerte en función de la esperanza de vida al nacimiento y de la mortalidad de determinadas edades.

Muy recientemente, debido a las mejoras en la calidad de la información de los países en desarrollo y a las nuevas técnicas de evaluación y

^{16/} Lederman, S., y Breas, J., "Les dimensions de la mortalité", Population, 14^e année, octobre-diciembre 1959, No. 4.

^{17/} Naciones Unidas, El concepto de población estable, ST/SOA/Serie A/39. Anexo II.

^{18/} Lederman, S., Nouvelles tables-types de mortalité, I N E D , Travaux et Documents, Paris 1969 Cahiers No. 53.

corrección de datos disponibles, la División de Población de las Naciones Unidas ha elaborado Nuevas Tablas Modelo de Mortalidad ^{19/}, las cuales todavía no han sido publicadas. Las mismas están basadas en tablas de vida seleccionadas, de países en desarrollo de América Latina, Asia y Africa.

Como punto de partida se analizaron las metodologías usadas por Coale-Demeny, Lederman y el análisis de los componentes principales, seleccionándose este último procedimiento como el más adecuado al tipo de información disponible.

El análisis de las tablas básicas permitió distinguir cuatro patrones principales de mortalidad, designados como Patrón Latinoamericano, Chileno, de Asia del Sur y del Lejano Oriente, además de un Patrón Promedio General. En cada caso se elaboraron 41 tablas modelo para cada sexo con esperanza de vida de 35, 36... hasta 75 años. Las tablas básicas de mortalidad de los países de América Central consideradas ^{20/}, fueron agrupadas en el primero de estos cuatro patrones.

Próximamente se publicarán estas tablas modelo, las cuales contendrán, además de las tablas abreviadas por sexo, patrones de mortalidad por edad desglosados para los menores de cinco años, tablas modelo interpoladas por edades simples y modelos de población estable.

^{19/} Heligman, Larry, Construction of New United Nations Model Life Table System, Seminar on Methodology and Data Collection in Mortality Studies, UIECP, Dakar, 7-10 de julio de 1981.

^{20/} Costa Rica 1962-64 y 1972-74, El Salvador 1970-72, Guatemala 1963-65, Honduras 1960-62 y 1973-75.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.

(Ver respuestas en pág. 84)

1. En relación con las Tablas Modelo de Mortalidad de las Naciones Unidas, se pide calcular los valores de ${}_5q_x$ de ambos sexos, para $x = 0$ y 5 correspondiente al modelo No. 3, partiendo de una mortalidad infantil $q_0 = 30$ por mil, y utilizando las ecuaciones de regresión calculadas para tal fin (ver gráficos 29 y 30, pág. 71).
2. Se conocen los valores de la función l_x de una tabla de mortalidad masculina y de una tabla de mortalidad femenina

x	l_x^H	l_x^M
0	100 000	100 000
1	85 622	87 625
5	80 180	82 136
10	78 599	80 515

Se postula que ocurren 105 nacimientos de hombres por cada 100 de mujeres. Con estos datos elaborar una tabla de vida que refleje la mortalidad del conjunto de la población (ambos sexos) y que tenga una raíz a la edad 0, igual a 100 000.

3. A partir de las ecuaciones lineales sobre q_0 calculadas por Gabriel y Ronen, presentadas en el cuadro 2 del documento DS No. 22 de CELADE, calcular las probabilidades de muerte ${}_5q_x$, para $x = 10, 30$ y 50, correspondientes a una mortalidad infantil $q_0 = 0.080$. Comparar los resultados con los siguientes valores obtenidos en las Tablas Modelo de las Naciones Unidas:

$${}_5q_{10} = 0.00711; \quad {}_5q_{30} = 0.01781; \quad {}_5q_{50} = 0.04886$$

4. Utilizando las Tablas Modelo de Coale-Demeny, calcular las probabilidades de muerte femeninas.

$$q_0; \quad {}_5q_{20}; \quad {}_5q_{40}; \quad {}_5q_{60} \quad \text{Y} \quad {}_5q_{75}$$

correspondientes a las familias Norte, Sur, Este y Oeste, para una esperanza de vida al nacer igual a 60 años, y comparar los resultados con el esquema presentado en el gráfico 31.

5. Dado el valor de $l_2^F = 0.93613$, correspondiente a la población femenina, el cual fue derivado de la información censal sobre hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes por sexo, calcular con ayuda de las Tablas Modelo de Coale-Demeny, familia Oeste, la relación de supervivencia al nacimiento femenina ${}_5P_b^F$.
6. Dado el valor de $l_1^A = 0.90650$ de una tabla estándar, se pide calcular:
- el logito correspondiente,
 - el logito $\gamma(1)$ de otra tabla vinculada a la anterior por los parámetros $\alpha = 0.20$ y $\beta = 1.10$,
 - el valor de l_1 de esta nueva tabla.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.

$$\begin{aligned}
 \text{R.1} \quad {}_5q_0 &= 23.832 + 1.349406 (q_0 - 20) + 0.000844 (q_0 - 20)^2 \\
 &= 23.832 + 13.494 \qquad \qquad \qquad + 0.0844 \\
 &= \underline{37.41\%}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_5q_5 &= 2.427 + 0.059439 ({}_5q_0 - 20) + 0.000255 ({}_5q_0 - 20)^2 \\
 &= 2.427 + 1.0348 \qquad \qquad \qquad + 0.0773 \\
 &= \underline{3.54\%}
 \end{aligned}$$

R.2 Si se postula que ocurren 105 nacimientos masculinos por cada 100 femeninos, basta multiplicar la raíz l_0 de la tabla masculina por 1.05 con lo cual todos los valores de l_x de dicha tabla resultarán multiplicados por ese factor. Luego se suman los valores de l_x de hombres y mujeres así ponderados, y finalmente se divide por 2.05 para volver a la raíz convencional $l_0^{\text{AS}} = 100\ 000$. En símbolos:

$$l_x^{\text{AS}} = \frac{1.05 l_x^{\text{H}} + l_x^{\text{M}}}{2.05}$$

fórmula con la cual se obtienen los siguientes valores de l_x correspondientes a la tabla de ambos sexos:

x	$1.05 l_x^{\text{H}}$	l_x^{M}	Σ	$l_x^{\text{AS}} = \Sigma / 2.05$
0	105 000	100 000	205 000	100 000
1	89 903	87 625	177 528	86 599
5	84 189	82 136	166 325	81 134
10	82 529	80 515	163 044	79 534

$$\begin{aligned} \text{R.3 } {}_5q_{10} &= -0.001\ 516 + 0.1352\ (0.080) \\ &= \underline{0.00930} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_5q_{30} &= 0.001\ 856 + 0.2878\ (0.080) \\ &= \underline{0.02488} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_5q_{50} &= 0.025\ 698 + 0.4376\ (0.080) \\ &= \underline{0.06071} \end{aligned}$$

Las tablas de Naciones Unidas estiman para el mismo valor de q_0 :

$${}_5q_{10} = 0.00711 ; \quad {}_5q_{30} = 0.01781 ; \quad {}_5q_{50} = 0.04886$$

Se verifica de este modo que las probabilidades de muerte calculadas a partir de las ecuaciones derivadas por Gabriel y Ronen utilizando la misma información básica que Naciones Unidas, conduce a resultados bastante superiores.

R.4 Si las cuatro familias tuvieran los mismos patrones de mortalidad por edad, las probabilidades de muerte de cada grupo de edades deberían ser iguales en los cuatro modelos, puesto que el cálculo se efectúa para la misma esperanza de vida. Por el contrario, debido a los diferentes patrones, los resultados son los siguientes:

Grupos de edades	Probabilidades de muerte (por mil)			
	F.Norte	F. Sur	F. Este	F. Oeste
0-	65.65	94.71	89.42	70.66
20-24	16.53	12.67	13.02	16.50
40-44	30.33	21.52	24.89	30.24
60-64	94.63	85.19	104.44	109.32
75-79	339.17	376.95	402.32	372.85

En el modelo Norte la mortalidad infantil es la más baja de las cuatro familias, y otro tanto ocurre con la probabilidad de muerte de las últimas edades, lo cual está de acuerdo con el esquema del gráfico 31. Los resultados correspondientes a las tres familias restantes siguen también muy de cerca el comportamiento representado en dicho gráfico.

- R.5 En las Tablas Modelo de Coale-Demeny (pág. (42)), el valor $l_2^F = 0.93613$ cae entre los niveles 18 y 19, a los cuales les corresponde las siguientes relaciones de supervivencia al nacimiento:

l_2^F	Nivel	${}_5P_b^F$
0.92820	18 ($e_0^O = 62.5$)	0.93024
0.94143	19 ($e_0^O = 65.0$)	0.94282

Interpolando linealmente resulta para $l_2^F = 0.93613$ un nivel igual a 18.60 ($e_0^O = 61.5$) y una relación de supervivencia al nacimiento ${}_5P_b^F = \underline{0.93779}$.

$$R.6 \quad a) \quad Y_\delta(1) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-l_1}{l_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-0.90650}{0.90650} = \underline{-1.13581}$$

$$b) \quad Y(1) = \alpha + \beta Y_\delta(1) = 0.20 + 1.10 (-1.13581) = \underline{-1.04940}$$

$$c) \quad Y(1) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-l_1}{l_1}$$

de donde despejando l_1 se obtiene:

$$l_1 = \frac{1}{1 + e^{2 Y(1)}} = \frac{1}{1 + e^{2(-1.04940)}} = \underline{0.89079}$$

Capítulo 4.

CONSTRUCCION DE TABLAS ABREVIADAS

4.1 Introducción

Para la mayoría de los propósitos demográficos y de salud pública en que se emplea la tabla de vida, el grado de exactitud o detalle necesario no es tan grande como el que proporciona la tabla completa, ni la calidad de las estadísticas básicas justifica tanto refinamiento. En estas condiciones, la tabla abreviada de mortalidad, la cual se elabora mediante métodos simplificados, por grupos de 5 o 10 años de edad, es la más corrientemente utilizada. Con estas tablas pueden obtenerse estimaciones de la mortalidad en diferentes fechas o áreas geográficas, o se puede analizar la evolución de la mortalidad en períodos cortos de tiempo, reservándose la metodología de la tabla completa para la elaboración de tablas decenales que se preparan cada vez que se hace un nuevo censo de población, especialmente en los países de la región que cuentan con información básica más confiable.

Los principales métodos para construir tablas abreviadas son los denominados *métodos clásicos*, los cuales se utilizan cuando las estadísticas de defunciones, nacimientos y población son confiables, o tienen omisiones y errores de poca importancia que pueden evaluarse y corregirse. En caso contrario, cuando las omisiones de los registros de las estadísticas vitales son más considerables, suelen utilizarse otros *métodos indirectos*, tales como aquéllos que se basan en relaciones de supervivencia intercensales, o en información proporcionada por preguntas especiales incluidas en censos o encuestas.

En este capítulo se verá principalmente la elaboración de tablas abreviadas utilizando métodos clásicos, haciéndose referencia más adelante a algunos de los otros métodos mencionados.

4.2 Métodos clásicos

Son aquéllos que utilizan información proveniente del censo y de las estadísticas vitales. El punto de partida de todos ellos son las tasas centrales de mortalidad de la población real, a partir de las cuales se calculan las probabilidades de muerte y las restantes funciones de la tabla.

Dada la gran utilidad de la tabla de vida para propósitos demográficos y de salud pública, se han desarrollado numerosos métodos rápidos para construir tablas abreviadas. Spiegelman ^{21/}, en el capítulo 5 de su libro "Introducción a la Demografía", hace una recopilación de algunos de los

^{21/} Spiegelman, M., Introducción a la Demografía, Fondo de Cultura Económica, México, 1968.

métodos principales, entre los cuales se encuentran el método de Reed y Merrell ^{22/}, que es el más frecuentemente utilizado, los métodos de Greville ^{23/} y King ^{24/}, la construcción de tablas mediante referencia a una tabla tipo ^{25/} y el método de la tabla de vida de los Estados Unidos de 1959-61 ^{26/}.

En lo que sigue se verá la construcción de tablas abreviadas siguiendo el Método de Reed y Merrell, excepto para los menores de 5 años, donde esta metodología es menos satisfactoria, por lo cual se empleará uno de los precedimientos propuestos por Greville. Se considerarán tres pasos principales: el ajuste preliminar de las estadísticas de población, nacimientos y defunciones; el cálculo de las probabilidades de muerte de cada grupo de edades; y la derivación de las restantes funciones de la tabla.

4.2.1 Ajuste preliminar de los datos. Esta primera etapa de la construcción de una tabla, está destinada a corregir los errores y problemas de diverso tipo que presenta la información básica, especialmente los que se refieren a la omisión de personas censadas, y del número de muertes registradas en las estadísticas vitales, lo cual afecta directamente el nivel de mortalidad estimado.

-
- ^{22/} Reed, L.J. y Merrell, H., Un método rápido para la construcción de una tabla abreviada, CELADE, Serie D. No. 49., Santiago, Chile.
- ^{23/} Greville, T.M.E., "Short Methods of Constructing Abridged Life Tables", Record of the American Institute of Actuaries, 32:29 (junio, 1943). CELADE ha publicado una reproducción de este artículo en la Serie D, No. 10.
- ^{24/} King, G., "On a Short Method of Constructing an Abridged Mortality Table", Journal of the Institute of Actuaries, 48:294 (julio, 1914).
- ^{25/} Sirken, H.G., Comparison of Two Methods of Constructing Abridged Life Tables by Reference to a Standard Table, National Center for Health Statistics, Serie 2, no. 4, febrero de 1964.
- ^{26/} Greville, T.M.E., Methodology of the National, Regional and State Life Tables for the United States: 1959-1961, National Center for Health Statistics, Washington, 1967.

El censo de población generalmente presenta omisiones de importancia entre los niños de uno y otro sexo menores de 5 años, omisiones de hombres jóvenes, una exageración del número de personas de 60 años y más, y una subenumeración general de personas de todas las edades, que dependiendo de la organización censal y otros factores relacionados, puede ser del orden del 2 al 5 por ciento o aún más.

Las estadísticas vitales, por su parte, contienen todavía omisiones de importancia en la mayoría de los países de América Latina, por lo cual resulta necesario hacer siempre una evaluación preliminar de sus cifras antes de construir una tabla.

Tanto los métodos de evaluación del censo como de las estadísticas vitales se verán dentro del curso más adelante, en la materia Evaluación y Ajuste de Datos, o puede verse también en los apuntes de Chackiel y Macció disponibles sobre este tema ^{27/}.

Otro problema de menor importancia, vinculado con el ajuste preliminar de los datos, es el relativo al ajuste de la población desde la fecha del censo hasta mediados de año. Para este propósito puede calcularse primero la población total al 30 de junio, mediante una tasa de crecimiento apropiada (que puede ser la tasa de crecimiento intercensal), ajustándose luego la población por edades, en forma proporcional al número de personas.

Cuando se habla de tablas abreviadas, se está haciendo referencia en todos los casos a tablas del momento o de contemporáneos, vale decir, a tablas elaboradas en base a la información de un mismo año, o de un promedio de dos o tres años. Lo más usual es hacer la tabla para el año en el

^{27/} Chackiel, J., y Macció, G., Evaluación y corrección de datos demográficos, CELADE, Serie B, No.39, Santiago, Chile.

cual se levantó el censo de población, a fin de tener una información más confiable del número de personas de cada grupo de edades. En cuanto a las defunciones, se toma generalmente las defunciones de tres años alrededor del censo, para disminuir el efecto de variaciones aleatorias, o bien de años que tengan una mortalidad particularmente alta o baja.

4.2.2 Cálculo de las probabilidades de muerte. Se considera por separado el cálculo de las probabilidades de muerte de 0 a 4 años de edad, y desde los 5 años en adelante, en vista de la distinta metodología utilizada. Para los menores de 5 años las tasas generalmente se obtienen por edades simples, utilizando la información de muertes de menores y las de nacimientos, ya que la población censada de 0 a 4 años frecuentemente está subenumerada. En cambio, desde los 5 años de edad en adelante, las tasas generalmente se calculan por grupos quinquenales, a partir de la información por edades obtenida del censo y del registro de defunciones.

a) Cálculo de las probabilidades de muerte de 0 a 4 años

Para estas edades se seguirá el método utilizado por Greville ^{28/}, para la construcción de las tablas de mortalidad de los Estados Unidos de 1939-1941. El mismo consiste básicamente en descomponer el cálculo de las probabilidades de vida de cada edad en dos partes (que se simbolizan con las letras alfa y delta), con el propósito de tomar en consideración la experiencia *completa* de mortalidad de cada uno de los tres años considerados. A continuación se detallan las relaciones básicas necesarias y la forma de cálculo.

^{28/} Greville, T.M.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1946. De -

La probabilidad de muerte q_x puede escribirse

$$(87) \quad q_x = 1 - p_x$$

donde p_x representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x de sobrevivir un año. Sobre la base de esta relación pueden obtenerse las probabilidades de muerte entre 0 y 5 años, expresando las p_x en función de dos probabilidades, en la siguiente forma:

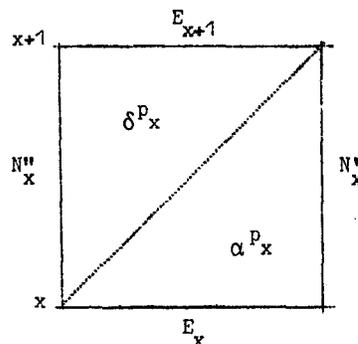
$$(88) \quad p_x = {}_a p_x \cdot \delta p_x$$

siendo:

$$(89) \quad {}_a p_x = \frac{N'_x}{E_x}$$

$$(90) \quad \delta p_x = \frac{E_{x+1}}{N''_x}$$

Gráfico 32



donde:

$N'_x = N_x^z + N_x^{z+1} + N_x^{z+2}$ representa el número de personas de edad comprendida entre x y $x+1$ al 1° de enero de los años $z, z+1, z+2$.

$N''_x = N_x^{z-1} + N_x^z + N_x^{z+1}$ es el número de personas de edad comprendida entre x y $x+1$ al 1° de enero de los años $z-1, z, z+1$.

$E_x = E_x^{z-1} + E_x^z + E_x^{z+1}$ es el número de personas que alcanzan la edad x durante el período $z-1$ a $z+1$.

Conceptualmente ${}_x p_x$ representa la probabilidad que tiene una persona que alcanza la edad x durante el período $z-1$ a $z+1$, de llegar con vida al término del año en que cumple dicha edad, mientras que ${}_\delta p_x$ representa la probabilidad de que una persona de edad alcanzada x al principio de los años $z-1$, z y $z+1$ llegue con vida a la edad $x+1$. El producto de estas dos probabilidades da una p_x referida a un intervalo de un año de edades.

Para el cálculo de los valores de E_x y N'_x y N''_x se requieren los nacimientos de los años $z-6$ a $z+1$ (o sea de 8 años) corregidos por omisión, las defunciones corregidas de 0 a 4 años de edad para los mismos años calendario y los factores de separación para las mismas edades y años.

Los factores de separación más importantes son los de menores de un año; para el resto de las edades puede tomarse directamente 0.50. Multiplicando las defunciones de cada edad por los factores de separación, se obtienen las muertes de cada generación ${}_x D_x$ y ${}_\delta D_x$.

Luego, restando de los nacimientos las defunciones de cada generación se puede calcular bajo el supuesto de población cerrada, la población a una edad cumplida (N_x) o exacta (E_x). Por ejemplo,

$$(91) \quad B^z = E_0^z$$

$$(92) \quad B^z - \frac{D^z}{\alpha} = N_0^{z+1}$$

$$(93) \quad N_0^{z+1} - \frac{D_0^{z+1}}{\delta} = E_1^{z+1}$$

y así sucesivamente. Un diagrama de Lexis puede facilitar su cálculo.

Una vez obtenidos los valores de E_x , N'_x y N''_x , aplicando las relaciones (87) a (90) se obtienen las probabilidades de muerte q_x para las edades 0, 1, 2, 3 y 4.

b) Cálculo de las probabilidades de muerte (${}_5q_x$) desde los 5 años de edad en adelante

El punto de partida para el cálculo de las probabilidades de muerte en estas edades, son las tasas centrales de mortalidad de la población real

$$(94) \quad {}_5m_x = \frac{{}_5\bar{D}_x}{{}_5N_x}$$

En el numerador se toma un promedio de las defunciones de los años $z-1$ a $z+1$, con el propósito de disminuir el efecto de las variaciones aleatorias. Por su parte en el denominador se incluye la población al 30 de junio del año z , que es el año en que se levantó el censo. Dado que normalmente el censo se efectúa en otra fecha, será necesario trasladar dicha población hasta mediados de año, en la forma ya indicada en 4.2.1.

Una vez calculadas las tasas centrales de mortalidad, es conveniente *ajustarlas* para evitar que sus irregularidades se trasladen a las diversas funciones de la tabla. Para ello el procedimiento más usado es el ajuste gráfico, imponiéndose la condición de que las tasas ajustadas ${}_5m_x^a$, al ser aplicadas a la población, deben reproducir aproximadamente el total de defunciones de 5 años y más.

$$(95) \quad \sum_{x=5}^{\omega} {}_5N_x ({}_5m_x^a) \approx \sum_{x=5}^{\omega} {}_5N_x ({}_5m_x) = D_{5+}$$

Es conveniente controlar además, que el cociente entre las tasas de mortalidad de las edades sucesivas m_{x+5}^a / m_x^a varíen con cierta regularidad.

La etapa fundamental en la elaboración de la tabla de mortalidad es la conversión de las tasas centrales de mortalidad en probabilidades de muerte. Tan es así, que podría decirse que un método clásico de construcción de tablas abreviadas difiere de otro, según el supuesto que relaciona estas dos funciones.

La relación empleada por Reed y Merrell ^{29/}, es la siguiente:

$$(96) \quad {}_5q_x = 1 - e^{-5 m_x} - 0.008 (5)^3 m_x^2$$

Para llegar a la misma, dichos autores calcularon primero la relación entre ${}_n m_x$ y ${}_n q_x$ bajo el supuesto de que l_x varía en el intervalo $x, x+n$ en forma lineal y exponencial, llegando a las relaciones ya vistas en la sección 2.3 :

$$(62) \quad {}_n q_x = \frac{2 \cdot {}_n m_x}{2+n \cdot {}_n m_x} ; \quad (l_x \text{ varía en forma lineal entre } x, x+n)$$

$$(69) \quad {}_n q_x = 1 - e^{-n \cdot {}_n m_x} ; \quad (l_x \text{ varía en forma exponencial entre } x, x+n)$$

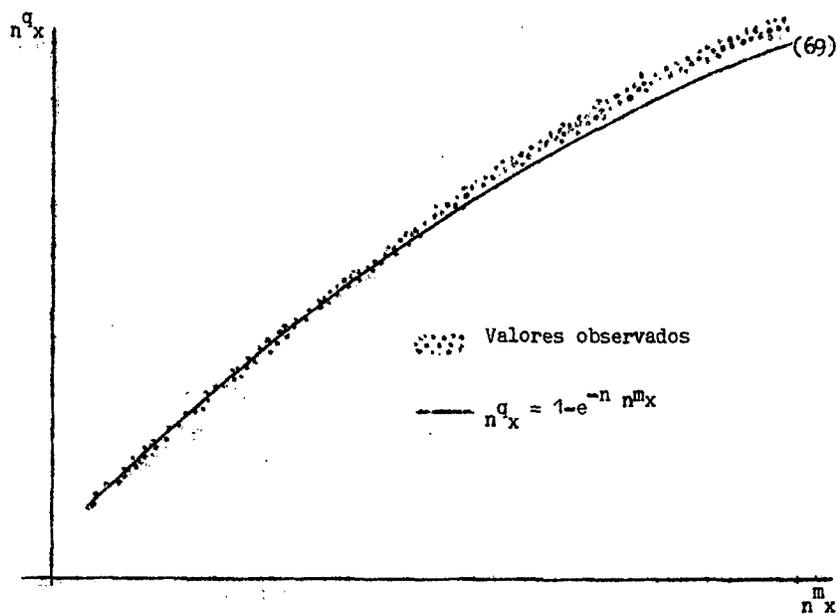
Luego se representaron en un gráfico los valores de ${}_n m_x$ contra los de ${}_n q_x$, correspondientes a 33 tablas de vida de 1910 construidas por Glover para los Estados Unidos, por sexo, color, área geográfica y varias combinaciones de estos atributos. Los puntos de este diagrama tienden a una curva suave, lo cual muestra que existe un grado bastante elevado de asociación entre la tasa de mortalidad de un intervalo de edades y la probabilidad de muerte del mismo intervalo, cualquiera sea la edad, el sexo, el color, u otros factores involucrados.

^{29/} Reed, L.J. y Merrel. E., "Un método...", op.cit.

En el mismo gráfico se representaron las relaciones (62) y (69), encontrándose una cierta concordancia con los puntos observados, aunque con algunas diferencias: la ecuación (69) empieza a caer por debajo de los puntos para los valores de $\frac{m}{n}x$ más elevados (en el caso de tasas quinquenales la caída se produce cuando $\frac{m}{n}x$ es mayor de 20 por mil). Por su parte la relación (62) varía en forma menos consistente y no tiene la curvatura adecuada. En el gráfico siguiente se ilustra el comportamiento a la relación exponencial (69), con respecto a los valores observados.

Gráfico 33

RELACION ENTRE LOS VALORES $\frac{m}{n}x$ Y $\frac{q}{n}x$ OBSERVADOS Y LOS DERIVADOS MEDIANTE LA RELACION EXPONENCIAL (69)



En base a las observaciones se agregó en el exponente de la relación (69) un término correctivo de la forma: $-a n^3 \frac{m^2}{n^2 x}$, el cual levanta la última parte de la curva. El mejor ajuste se logra con $a = 0.008$. De este modo se llegó a la relación general

$$(97) \quad {}_nq_x = 1 - e^{-n} n^m x - 0.008 n^3 n^m x^2$$

la cual, para un intervalo de edades $n = 5$, da la relación (96) ya indicada.

Para facilitar su aplicación Reed y Merrel calcularon tablas con los valores de ${}_5m_x$ (de milésimo en milésimo), los valores de ${}_5q_x$ correspondientes y el incremento de ${}_5q_x$, los cuales se reproducen en el cuadro 2. Sin embargo, si se dispone de una calculadora que incluya la función e^x , los cálculos pueden efectuarse fácilmente sin recurrir al procedimiento más lento de la interpolación.

4.2.3 Cálculo de las restantes funciones de la tabla abreviada. Una vez obtenidos los valores de ${}_nq_x$, las restantes funciones de la tabla se calculan fijando como raíz de la tabla $l_0 = 100\ 000$ (u otro valor apropiado) y utilizando las relaciones siguientes ya vistas:

a) Número de muertes entre $x, x+n$:

$$(8) \quad {}_n d_x = l_x \cdot {}_n q_x$$

b) Número de sobrevivientes de edad $x+n$:

$$(9) \quad l_{x+n} = l_x - {}_n d_x$$

c) Tiempo vivido por la generación entre las edades $x, x+n$:

i. Para $x = 0, 1, 2, 3, 4$

$$(20) \quad L_x = q_x l_x + (1 - q_x) l_{x+1}; \quad q_x = \text{factor de separación de las muertes}$$

ii. Para $x \geq 5$

$$(18) \quad {}_5L_x = \frac{{}_5d_x}{{}_5m_x}$$

iii. Para el grupo abierto final

$$(29) \quad {}_{\omega}L_x = \frac{l_x}{m_x}$$

d) Relación de supervivencia de las personas con x a $x+4$ años cumplidos, al cabo de 5 años:

i. Para las edades centrales:

$$(72) \quad {}_5P_{x, x+4} = \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x}$$

ii. Para el grupo inicial:

$$(74) \quad {}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{5 \cdot l_0}$$

iii. Para el grupo abierto final:

$$(76) \quad {}_5P_{x, \omega} = \frac{{}_{\omega}L_{x+5}}{{}_{\omega}L_x}$$

Cuadro 2

VALORES DE ${}_5q_x$ ASOCIADOS A ${}_5m_x$ POR LA ECUACION:

$${}_5q_x = 1 - e^{-5m_x} \cdot 0.008(5)^3 {}_5m_x^2$$

(Continúa)

${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ	${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ	${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ
		.00			.00			.00
.000	.000 000	4 989	.050	.223 144	3 952	.100	.399 504	3 116
.001	.004 989	4 965	.051	.227 096	3 935	.101	.402 620	3 100
.002	.009 954	4 943	.052	.231 031	3 915	.102	.405 720	3 085
.003	.014 897	4 920	.053	.234 946	3 897	.103	.408 805	3 070
.004	.019 817	4 897	.054	.238 843	3 879	.104	.411 875	3 056
.005	.024 714	4 876	.055	.242 722	3 861	.105	.414 931	3 041
.006	.029 590	4 852	.056	.246 583	3 842	.106	.417 972	3 026
.007	.034 442	4 830	.057	.250 425	3 824	.107	.420 998	3 011
.008	.039 272	4 808	.058	.254 249	3 807	.108	.424 009	2 998
.009	.044 080	4 786	.059	.258 056	3 788	.109	.427 007	2 982
.010	.048 866	4 763	.060	.261 844	3 770	.110	.429 989	2 969
.011	.053 629	4 742	.061	.265 614	3 753	.111	.432 958	2 963
.012	.058 371	4 720	.062	.269 367	3 735	.112	.435 911	2 940
.013	.063 091	4 698	.063	.273 102	3 717	.113	.438 851	2 926
.014	.067 789	4 676	.064	.276 819	3 700	.114	.441 777	2 911
.015	.072 465	4 655	.065	.280 519	3 682	.115	.444 688	2 897
.016	.077 120	4 633	.066	.284 201	3 665	.116	.447 585	2 883
.017	.081 753	4 612	.067	.287 866	3 647	.117	.450 468	2 870
.018	.086 365	4 590	.068	.291 513	3 630	.118	.453 338	2 855
.019	.090 955	4 570	.069	.295 143	3 613	.119	.456 193	2 842
.020	.095 525	4 547	.070	.298 756	3 596	.120	.459 035	2 827
.021	.100 072	4 527	.071	.302 352	3 579	.121	.461 862	2 815
.022	.104 599	4 506	.072	.305 931	3 562	.122	.464 677	2 800
.023	.109 105	4 485	.073	.309 493	3 545	.123	.467 477	2 787
.024	.113 590	4 464	.074	.313 038	3 528	.124	.470 264	2 773
.025	.118 054	4 444	.075	.316 566	3 511	.125	.473 037	2 760
.026	.122 498	4 423	.076	.320 077	3 495	.126	.475 797	2 746
.027	.126 921	4 402	.077	.323 572	3 478	.127	.478 543	2 733
.028	.131 323	4 382	.078	.327 050	3 461	.128	.481 276	2 720
.029	.135 705	4 361	.079	.330 511	3 445	.129	.483 996	2 707
.030	.140 068	4 341	.080	.333 956	3 429	.130	.486 703	2 693
.031	.144 407	4 321	.081	.337 385	3 412	.131	.489 396	2 680
.032	.148 728	4 301	.082	.340 797	3 396	.132	.492 076	2 667
.033	.153 029	4 281	.083	.344 193	3 380	.133	.494 743	2 655
.034	.157 310	4 261	.084	.347 573	3 364	.134	.497 398	2 641
.035	.161 571	4 241	.085	.350 937	3 347	.135	.500 039	2 628
.036	.165 812	4 221	.086	.354 284	3 332	.136	.502 667	2 616
.037	.170 033	4 201	.087	.357 616	3 316	.137	.505 283	2 603
.038	.174 234	4 182	.088	.360 932	3 300	.138	.507 886	2 590
.039	.178 416	4 162	.089	.364 232	3 284	.139	.510 476	2 577
.040	.182 578	4 143	.090	.367 516	3 268	.140	.513 053	2 565
.041	.186 721	4 123	.091	.370 784	3 253	.141	.515 618	2 552
.042	.190 844	4 104	.092	.374 037	3 237	.142	.518 170	2 540
.043	.194 948	4 085	.093	.377 274	3 222	.143	.520 710	2 527
.044	.199 033	4 066	.094	.380 496	3 206	.144	.523 237	2 515
.045	.203 099	4 047	.095	.383 702	3 191	.145	.525 752	2 503
.046	.207 146	4 028	.096	.386 893	3 176	.146	.528 255	2 490
.047	.211 174	4 008	.097	.390 069	3 160	.147	.530 745	2 478
.048	.215 182	3 990	.098	.393 229	3 145	.148	.533 223	2 466
.049	.219 172	3 972	.099	.396 374	3 130	.149	.535 689	2 454
.050	.223 144	3 952	.100	.399 504	3 116	.150	.538 143	2 442

Cuadro 2

VALORES DE ${}_5q_x$ ASOCIADOS A ${}_5m_x$ POR LA ECUACION:

$${}_5q_x = 1 - e^{-.008(5)^3 {}_5m_x^2}$$

${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ	${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ	${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ
		.00			.00			.00
.150	.538 143	2 442	.200	.646 545	1 904	.250	.730 854	1 476
.151	.540 585	2 430	.201	.648 449	1 894	.251	.732 330	1 469
.152	.543 015	2 418	.202	.650 343	1 885	.252	.733 799	1 462
.153	.545 433	2 406	.203	.652 228	1 876	.253	.735 261	1 453
.154	.547 839	2 394	.204	.654 104	1 866	.254	.736 714	1 447
.155	.550 233	2 382	.205	.655 970	1 856	.255	.738 161	1 439
.156	.552 616	2 371	.206	.657 826	1 847	.256	.739 600	1 432
.157	.554 986	2 359	.207	.659 673	1 838	.257	.741 032	1 424
.158	.557 345	2 347	.208	.661 511	1 829	.258	.742 456	1 417
.159	.559 692	2 336	.209	.663 340	1 819	.259	.743 873	1 409
.160	.562 028	2 324	.210	.665 159	1 810	.260	.745 282	1 403
.161	.564 352	2 313	.211	.666 969	1 802	.261	.746 685	1 395
.162	.566 665	2 301	.212	.668 771	1 792	.262	.748 080	1 388
.163	.568 966	2 290	.213	.670 563	1 783	.263	.749 468	1 381
.164	.571 256	2 279	.214	.672 346	1 774	.264	.750 849	1 374
.165	.573 535	2 267	.215	.674 120	1 765	.265	.752 223	1 366
.166	.575 802	2 257	.216	.675 885	1 756	.266	.753 589	1 360
.167	.578 059	2 245	.217	.677 641	1 747	.267	.754 949	1 353
.168	.580 304	2 234	.218	.679 388	1 739	.268	.756 302	1 345
.169	.582 538	2 223	.219	.681 127	1 729	.269	.757 647	1 339
.170	.584 761	2 211	.220	.682 856	1 721	.270	.758 986	1 332
.171	.586 972	2 201	.221	.684 577	1 712	.271	.760 318	1 325
.172	.589 173	2 190	.222	.686 289	1 704	.272	.761 643	1 318
.173	.591 363	2 180	.223	.687 993	1 695	.273	.762 961	1 311
.174	.593 543	2 168	.224	.689 688	1 686	.274	.764 272	1 304
.175	.595 711	2 157	.225	.691 374	1 678	.275	.765 576	1 298
.176	.597 868	2 147	.226	.693 052	1 669	.276	.766 874	1 291
.177	.600 015	2 137	.227	.694 721	1 661	.277	.768 165	1 284
.178	.602 152	2 125	.228	.696 382	1 652	.278	.769 449	1 278
.179	.604 277	2 115	.229	.698 034	1 644	.279	.770 727	1 271
.180	.606 392	2 105	.230	.699 678	1 636	.280	.771 998	1 264
.181	.608 497	2 094	.231	.701 314	1 627	.281	.773 262	1 258
.182	.610 591	2 083	.232	.702 941	1 619	.282	.774 520	1 251
.183	.612 674	2 073	.233	.704 560	1 611	.283	.775 771	1 245
.184	.614 747	2 063	.234	.706 171	1 602	.284	.777 016	1 239
.185	.616 810	2 053	.235	.707 773	1 595	.285	.778 255	1 231
.186	.618 863	2 042	.236	.709 368	1 586	.286	.779 486	1 226
.187	.620 905	2 032	.237	.710 954	1 578	.287	.780 712	1 219
.188	.622 937	2 022	.238	.712 532	1 570	.288	.781 931	1 213
.189	.624 959	2 012	.239	.714 102	1 562	.289	.783 144	1 206
.190	.626 971	2 002	.240	.715 664	1 555	.290	.784 350	1 201
.191	.628 973	1 992	.241	.717 219	1 546	.291	.785 551	1 193
.192	.630 965	1 982	.242	.718 765	1 538	.292	.786 744	1 188
.193	.632 947	1 972	.243	.720 303	1 531	.293	.787 932	1 182
.194	.634 919	1 962	.244	.721 834	1 522	.294	.789 114	1 175
.195	.636 881	1 952	.245	.723 356	1 515	.295	.790 289	1 169
.196	.638 833	1 943	.246	.724 871	1 507	.296	.791 458	1 163
.197	.640 776	1 933	.247	.726 378	1 500	.297	.792 621	1 157
.198	.642 709	1 923	.248	.727 878	1 492	.298	.793 778	1 151
.199	.644 632	1 913	.249	.729 370	1 484	.299	.794 929	1 145
.200	.646 545	1 904	.250	.730 854	1 476	.300	.796 074	1 139

Fuente: Reed, Lowell J. y Merrell, Margaret, Un método para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D. No. 49, San José, Costa Rica, 1972.

e) Tiempo vivido por la generación entre las edades x, ω :

$$(40) \quad T_x = \sum_x^{\omega} nL_x$$

f) Esperanza de vida a la edad x :

$$(41) \quad e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

4.3 Construcción de tablas utilizando relaciones de supervivencia intercensales

En varios países en desarrollo las estadísticas de muertes contienen todavía *omisiones de importancia* que impiden derivar tablas de mortalidad por los denominados métodos clásicos. Para suplir en parte estas deficiencias, se han desarrollado algunos métodos alternativos para hacer estimaciones y elaborar tablas de mortalidad a partir de otras fuentes. En esta sección se expondrá brevemente el método de las relaciones de supervivencia intercensales, mientras que en la siguiente se hará una ligera referencia a algunos otros procedimientos.

El método de las relaciones de supervivencia intercensales fue utilizado por primera vez en los países de América Latina por Giorgio Mortara, para hacer estimaciones de la mortalidad del Brasil, a partir de los censos de 1940 ^{30/}. En los últimos años William Brass ha propuesto una variante del mismo, ajustando la información mediante el sistema logito, con ayuda de una tabla de referencia ^{31/}.

^{30/} Mortara, G., La mortalidad de la población nativa del Brasil, CELADE, Serie D, No. 32, Santiago, Chile.

^{31/} Brass, W., "Seminario sobre métodos...", op.cit.

La idea del método es muy simple. Se basa en el supuesto de que si se tiene dos censos de población separados por n años, bajo ciertas condiciones las personas que en el segundo censo tienen $x+n$ años son los sobrevivientes de aquéllas que en el primero tenían x años.

4.3.1 Supóngase en primer lugar que se cuenta con dos censos de población levantados en los años z y $z+5$, es decir, *separados por 5 años*.

Grupos de edades	$N_{x, x+4}^z$	$N_{x, x+4}^{z+5}$
0 - 4	N_{0-4}^z	N_{0-4}^{z+5}
5 - 9	N_{5-9}^z	N_{5-9}^{z+5}
10 - 14	N_{10-14}^z	N_{10-14}^{z+5}
...

Si se considera que las personas de 5 a 9 años de edad del segundo censo son los sobrevivientes de las personas de 0 a 4 años del primero, entonces puede establecerse relaciones de supervivencia de la forma:

$$(98) \quad {}_5P_{0-4}^{z, z+5} = \frac{N_{5-9}^{z+5}}{N_{0-4}^z}$$

o, en general, para un grupo de edades cualquiera,

$$(99) \quad {}_5P_{x, x+4}^{z, z+5} = \frac{N_{x+5, x+9}^{z+5}}{N_{x, x+4}^z}$$

Para que sea aplicable, este método requiere de algunos *supuestos*, los más importantes de los cuales son los siguientes:

- 1) Que la población sea cerrada, o sea que no haya movimientos migratorios, o bien, que éstos sean de poca importancia.
- 2) Que no haya mala declaración de la edad.
- 3) Que no haya omisión, o bien que la omisión sea proporcionalmente igual en los dos censos.

En el primer caso, si ocurre una inmigración de personas, el problema del cálculo de las relaciones de supervivencia puede solucionarse considerando la población nativa. Por su parte la mala declaración de la edad produce relaciones de supervivencia irregulares, que en algunos casos llegan a ser superiores a la unidad. El supuesto más importante es el tercero, ya que si la omisión de los censos es muy diferente, entonces el método no puede aplicarse.

Una limitación importante del método así planteado, es que no proporciona información para el cálculo de la relación de supervivencia al nacimiento ${}_5P_b$.

Una estimación de la *mortalidad al comienzo de la vida* ${}_5P_b$ puede derivarse a partir de las relaciones de supervivencia ${}_5P_{0-4}$ y siguientes, con ayuda de tablas modelo. Para cada una de las 5 o 7 primeras relaciones de supervivencia intercensales se puede estimar el nivel correspondiente en una tabla modelo y luego la mediana de dichos niveles, con la cual se selecciona el nivel de ${}_5P_b$ correspondiente. Por ejemplo si las relaciones de

supervivencia (masculinas) de los primeros siete grupos de edades son las indicadas a continuación, los niveles correspondientes en las tablas de Coale-Demeny (familia Oeste) son los siguientes:

Grupos de edades	${}^5P_{x, x+4}$	Nivel en Coale-Demeny	Número de orden del nivel
0 - 4	0.9774	18.0	3
5 - 9	0.9905	17.5	4
10 - 14	0.9887	17.0	6
15 - 19	0.9878	19.0	2
20 - 24	0.9866	19.5	1
25 - 29	0.9744	16.0	7
30 - 34	0.9733	17.1	5

De aquí resulta un nivel mediano igual a 17.5, al cual le corresponde en las tablas de Coale-Demeny una relación de supervivencia al nacimiento igual a 0.9092. Puede obtenerse así una estimación de 5P_0 en función de los niveles de mortalidad intercensales de la población juvenil y adulta.

Una mejor estimación de la mortalidad al comienzo de la vida se puede calcular, si en el segundo censo se han incluido las preguntas sobre el número total de hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes, que se formulan a las mujeres de 15 años y más. A partir de esta información puede obtenerse las probabilidades de muerte desde el nacimiento hasta los 2, 3 y 5 años ^{32/}, las cuales están estrechamente relacionadas con la relación de supervivencia al nacimiento, que puede derivarse con ayuda de una tabla modelo. Por ejemplo, a partir de las probabilidades de muerte masculinas

^{32/} Brass, W., Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados, CELADE, Serie E. No. 14, Santiago, Chile, 1974.

dadas en el siguiente cuadro, se han obtenido primero los valores de l_x , luego el nivel de cada uno de estos valores en las tablas de Coale-Demeny, familia Oeste, y su promedio, con el cual se obtiene la relación de supervivencia al nacimiento correspondiente, que resulta igual a 0.9218.

Edad x	xq_0 masculinas	l_x	Nivel en Coale-Demeny
2	0.07204	92 796	19.0
3	0.09264	90 736	18.0
5	0.09650	90 350	18.2
Nivel medio.....			18.4
${}_5P_b$ estimada = 0.9218			

De esta manera puede completarse una estimación de las relaciones de supervivencia para todas las edades.

En general, estos valores de ${}_5P_x$ contienen irregularidades que es necesario *ajustar*. Para ello pueden representarse en un gráfico las relaciones de supervivencia observadas y junto a ellas pueden incluirse las relaciones de una tabla modelo, correspondientes a dos niveles que comprendan aproximadamente el nivel general de mortalidad que se trata de estimar. Puede ser conveniente también incluir en el gráfico las relaciones de supervivencia de una tabla de mortalidad de la región, con una mortalidad similar. Con toda esta información se hace un ajuste gráfico a mano alzada y se leen las relaciones de supervivencia ajustadas. El juego de valores de ${}_5P_x$ así obtenido representa una estimación del nivel de la mortalidad, que puede utilizarse para fines de proyecciones de población y para el cálculo de la esperanza de vida al nacer, mediante la fórmula 80 de la página 60.

Una vez obtenidas las relaciones de supervivencia ajustadas, se calculan las *restantes funciones* de la tabla.

Siguiendo el orden lógico, se calcula primero el tiempo vivido (o la población estacionaria) ${}_5L_x$. Partiendo de la definición de las relaciones de supervivencia, se tiene:

$$(100) \quad {}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{5l_0} \quad ; \text{ de donde } {}_5L_0 = 5l_0 {}_5P_b$$

$${}_5P_{0-4} = \frac{{}_5L_5}{{}_5L_0} \quad ; \text{ de donde } {}_5L_5 = {}_5L_0 {}_5P_{0-4}$$

y así sucesivamente.

Luego se obtiene la función l_x . El paso de ${}_5L_x$ a l_x es la etapa más dificultosa de la construcción de la tabla, por falta de una relación general que resulte válida para todos los niveles de mortalidad. La fórmula siguiente, derivada por Bocaz ^{33/}, se ha utilizado en varias oportunidades con resultados bastante satisfactorios:

$$(101) \quad 30l_x = 2{}_5L_{x-5} + 5{}_5L_x - 5L_{x+5}$$

Otro procedimiento para calcular l_x podría obtenerse desagregando los valores de ${}_5L_x$ por edades simples, mediante alguna fórmula corriente (por ejemplo usando los multiplicadores de Beers), y luego haciendo un promedio simple de los dos valores vecinos de ${}_1L_x$.

$$(102) \quad l_x = \frac{L_{x-1} + L_x}{2} \quad ; \text{ para } x = 5, 10, 15, \dots$$

^{33/} Bocaz, A., Cálculo de los valores de l_x , conocidos los ${}_nL_x$, CELADE, inédito.

Teniendo los valores de l_x , las restantes funciones pueden calcularse sin dificultad, mediante las siguientes relaciones conocidas:

$$(4) \quad {}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

$$(7) \quad {}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x}$$

$$(40) \quad T_x = \sum {}_n L_x$$

$$(41) \quad e_x^o = \frac{T_x}{l_x}$$

4.3.2 Caso en que $n = 10$. Si el período intercensal es de 10 años, entonces las relaciones de supervivencia intercensales tienen la siguiente forma:

$$(103) \quad {}_{10}P_{x,x+4} = \frac{{}_N^{z+10}_{x+10, x+14}}{{}_N^z_{x, x+4}}$$

En este caso se hace necesario derivar relaciones de supervivencia por un período de 5 años (${}_5P_{x,x+4}$), lo cual puede efectuarse de la manera siguiente:

Dado que

$$(104) \quad {}_{10}P_{x,x+4} = ({}_5P_{x,x+4}) ({}_5P_{x+5,x+9})$$

$$(105) \quad {}_{10}P_{x-5,x-1} = ({}_5P_{x-5,x-1}) ({}_5P_{x,x+4})$$

entonces el producto de dos relaciones de supervivencia por grupos quinquenales de edades y 10 años de tiempo, puede verse como el producto de cuatro relaciones quinquenales, es decir,

$$(106) \quad ({}_{10}P_{x-5, x-1})({}_{10}P_{x, x+4}) = ({}_5P_{x-5, x-1})({}_5P_{x, x+4})({}_5P_{x, x+4})({}_5P_{x+5, x+9})$$

Este producto es aproximadamente igual a $({}_5P_{x, x+4})^4$ y por lo tanto su raíz cuarta daría:

$$(107) \quad {}_5P_{x, x+4} = \sqrt[4]{({}_{10}P_{x-5, x-1})({}_{10}P_{x, x+4})}$$

que es la llamada *fórmula de la raíz cuarta*. Permite calcular las relaciones de supervivencia por 5 años a partir de las relaciones intercensales correspondiente a un período de 10 años. Dicha fórmula tiene la ventaja adicional de que permite efectuar un primer suavizamiento de la información.

Una vez obtenidos los valores de ${}_5P_{x, x+4}$, éstos se ajustan y se calculan las restantes funciones de la tabla en la forma ya mencionada.

4.3.3 Caso en que $n \neq 10$. Si se supone por último que el intervalo intercensal es un valor n cualquiera, como 8, 11 o 12 años, entonces se puede aplicar el siguiente procedimiento que ha sido propuesto por Brass ^{34/}

Supóngase para simplificar que $n = 8$. En este caso se obtendrán relaciones de supervivencia intercensales de la siguiente forma:

$$8^P_{0-4} ; \quad 8^P_{5-9} ; \quad 8^P_{10-14} ; \quad \dots$$

^{34/} Brass, W., "Seminario sobre métodos...", op.cit.

Como en los casos anteriores se requiere una estimación complementaria de la mortalidad al comienzo de la vida, la cual se obtiene con la información de hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes; o bien, si estas preguntas no se investigaron en el segundo censo, mediante la mediana de las relaciones de supervivencia intercensales. Una vez determinado el nivel medio de una tabla modelo, se estiman los valores de ${}_5L_0$ y ${}_5L_5$.

Con esta información y las relaciones de supervivencia intercensales, se puede calcular los valores de ${}_5L_{10}$, ${}_5L_{15}$, ${}_5L_{20}$, ... mediante las siguientes relaciones en cadena :

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\
 {}_5L_0 \qquad\qquad\qquad {}_5L_0
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 {}_5L_5 \quad (0.6) = {}_3L_5 \\
 \qquad\quad (0.4) = {}_2L_8 \\
 \left. \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \qquad \qquad \qquad \end{array} \right\} {}_5L_5
 \end{array} \\
 \\
 (108) \quad {}_5L_0 ({}_8P_{0-4}) = {}_5L_0 \frac{{}_5L_8}{{}_5L_0} = {}_5L_8 \begin{array}{c} \qquad\quad (0.4) = {}_2L_8 \\ \qquad\quad (0.6) = {}_3L_{10} \\ \left. \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \qquad \qquad \qquad \end{array} \right\} {}_5L_{10} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 {}_5L_5 ({}_8P_{5-9}) = {}_5L_5 \frac{{}_5L_{13}}{{}_5L_5} = {}_5L_{13} \begin{array}{c} \qquad\quad (0.4) = {}_2L_{13} \\ \qquad\quad (0.6) = {}_3L_{15} \\ \left. \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \qquad \qquad \qquad \end{array} \right\} {}_5L_{15}
 \end{array} \\
 \\
 {}_5L_{10} ({}_8P_{10-14}) = {}_5L_{10} \frac{{}_5L_{18}}{{}_5L_{10}} = {}_5L_{18} \begin{array}{c} \qquad\quad (0.4) = {}_2L_{18} \\ \qquad\quad (0.6) = {}_3L_{20} \\ \left. \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \qquad \qquad \qquad \end{array} \right\} \\
 \dots \qquad\qquad\qquad \dots \qquad\qquad\qquad \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

Es decir, ${}_5L_0$ corresponde directamente al valor estimado de la tabla modelo. Multiplicando el valor estimado de ${}_5L_5$ por (0.6) se obtiene una estimación aproximada de ${}_3L_5$. Luego el producto de ${}_5L_0$ por ${}_8P_{0-4}$ da una estimación de ${}_5L_8$ la cual se descompone en dos partes, ${}_2L_8$ y ${}_3L_{10}$, con los factores 0.4 y 0.6. Sumando ${}_3L_5$ con ${}_2L_8$ se estima ${}_5L_5$, y así sucesivamente.

Una vez obtenidos los valores de ${}_5L_x$, para $x = 0, 5, 10, \dots$, pueden seguirse dos caminos. El primero es calcular las relaciones de supervivencia ${}_5P_{x, x+4}$ las cuales se ajustan en forma similar a los casos anteriores, calculándose luego las restantes funciones de la tabla. El segundo, consiste en ajustar directamente los valores de ${}_5L_x$ con ayuda de una tabla estándar de referencia, utilizando el sistema logito. Este procedimiento puede verse en el documento DS 9 referido al seminario sobre métodos para medir variables demográficas, de W. Brass ^{35/}.

4.4. Elaboración de tablas a partir de preguntas especiales

Este procedimiento, como el anterior, se utiliza cuando las estadísticas vitales contienen deficiencias de importancia. Ante la necesidad de obtener estimaciones de la mortalidad (y la fecundidad) en los países de América Latina, se han desarrollado en los últimos años varios métodos para hacer estimaciones a través de preguntas demográficas especiales incluidas en censos o encuestas. En relación con la mortalidad las preguntas más empleadas son las de hijos nacidos vivos, hijos sobrevivientes y orfandad

^{35/} Brass, W., "Seminario sobre métodos...", op.cit., págs. 105 a 117.

de madre. Las dos primeras, como ya se ha indicado, permiten estimar la mortalidad al comienzo de la vida, mientras que la última está asociada con la mortalidad femenina adulta. Combinando esta información se puede derivar una tabla de mortalidad femenina para todas las edades 36,37/.

Con carácter más experimental se han incluido en censos de prueba y en diversas encuestas demográficas otras preguntas, como las de orfandad de padre, viudez del primer cónyuge, orfandad del hijo mayor y sobrevivencia de hermanos, con las cuales se pueden elaborar tablas para la población masculina y femenina.

Para una explicación detallada de estos métodos puede consultarse las referencias (10), (24) y (26), citadas en la bibliografía al final.

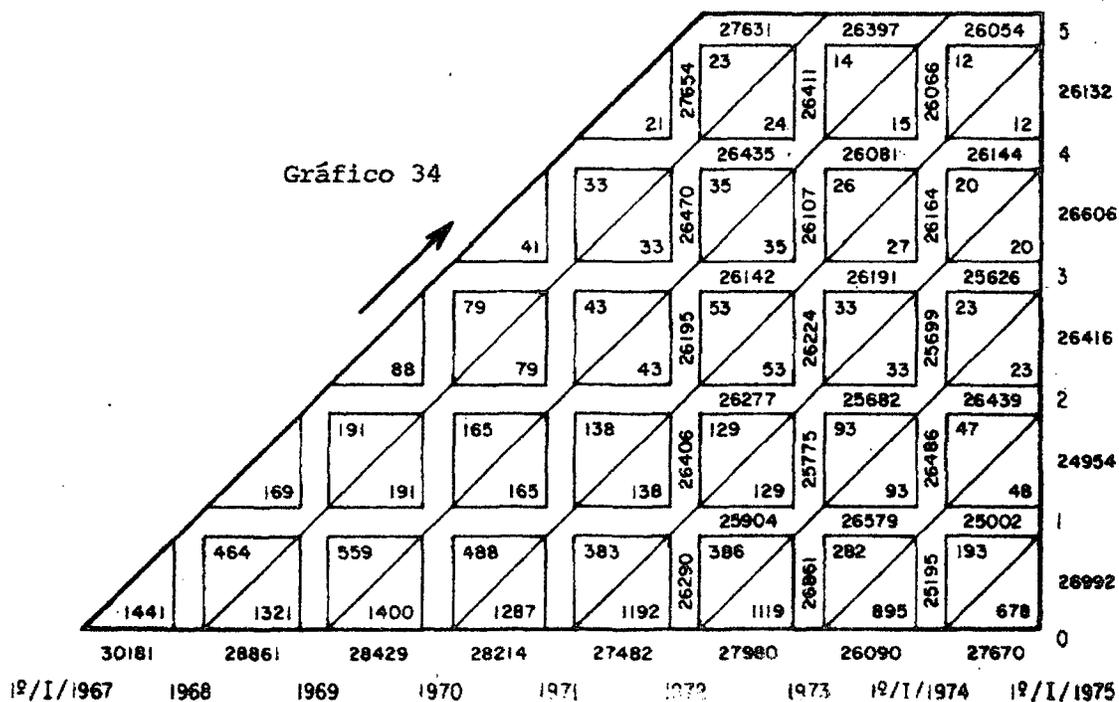
36/ Brass, W., "Seminario sobre métodos...", op.cit.

37/ Chackiel, J. y Ortega, A., Tablas de mortalidad femenina de Guatemala, Honduras y Nicaragua, CELADE, Serie A. No. 1033, San José, Costa Rica.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.

(Ver respuestas en pág. 116)

1. A partir de la información sobre nacimientos, defunciones y población por edades corregida, correspondiente a la población femenina de Costa Rica, presentada en el Diagrama de Lexis siguiente, calcular las probabilidades de muerte q_x , para $x = 0, 1, 2, 3$ y 4 , del período 1972-1974, por el método de Greville.



2. En base a las probabilidades de muerte $q_0 = 0.04356$, $q_1 = 0.00689$ y $q_2 = 0.00278$ obtenidas en el ejercicio anterior, calcular la probabilidad de muerte conjunta para los primeros años de vida (${}_3q_0$).

3. Calcular las probabilidades de muerte ${}_5q_x$, mediante la fórmula propuesta por Reed y Merrell,

$$(96) \quad {}_5q_x = 1 - e^{-5 m_x - 0.008(5)^3 m_x^2}$$

correspondientes a las tasas centrales de mortalidad dadas a continuación:

Grupos de edades	${}_5^m x$
5-9	0.000715
10-14	0.000440
15-19	0.000736
20-24	0.000960

4. A partir de las probabilidades de muerte de 0 a 25 años obtenidas en los ejercicios 1 y 3, calcular los valores de l_x , $n^d x$, ${}_n L_x$ y el tiempo vivido total ${}_{25}L_0$. Para el cálculo del tiempo vivido se empleará el factor de separación (${}_0^s = 0.2390$) en el primer año de vida, trapecios entre 1 y 5 años y la fórmula derivada de la tasa central de mortalidad en los grupos quinquenales restantes.
5. Se define la esperanza de vida temporaria entre las edades $x, x+n$ por la expresión:

$$(109) \quad {}_n e_x^o = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x}$$

la cual representa el número de años que en promedio vive la generación de l_0 personas en el tramo de edades considerado. Utilizando la tabla de mortalidad masculina de Guatemala de 1950 se pide calcular:

a) ${}_5 e_0^o$; b) ${}_{50} e_{15}^o$

6. Dadas las tasas centrales de mortalidad ${}_5m_{20} = 0.0081$ y ${}_5m_{80} = 0.1620$, calcular las probabilidades de muerte correspondientes mediante las fórmulas :

$$(69) \quad {}_5q_x = 1 - e^{-5 \cdot {}_5m_x} \quad (l_x \text{ varía en forma exponencial})$$

$$(96) \quad {}_5q_x = 1 - e^{-5 \cdot {}_5m_x - 5m_x^2} \quad (\text{Fórmula de Reed y Merrell})$$

y comparar los resultados.

7. Un hombre de 20 años se casa con una mujer de 15. Utilizando la información siguiente, calcular la probabilidad de que la pareja sobreviva los próximos 35 años:

a) En el caso de que la mortalidad corresponda a las tablas de vida de Costa Rica de 1950.

b) Con mortalidad correspondiente a las tablas de Costa Rica de 1973.

Edad	Valores de l_x^H		Edad	Valores de l_x^M	
	1950	1973		1950	1973
20	81451	91935	15	84004	93861
55	64372	80041	50	70994	87859

8. Dada la información presentada en el cuadro 3, correspondiente a la población nativa de El Salvador, masculina, por grupos de edades, según los censos de 1961 y 1971, se pide:

a) Calcular las relaciones de supervivencia intercensales ${}_{10}P_{x,x+4}$

b) Estimar relaciones de supervivencia referidas a períodos de 5 años, mediante la relación aproximada:

$$(107) \quad {}_5P_{x,x+4} \approx \sqrt[4]{({}_{10}P_{x-5,x-1}) ({}_{10}P_{x,x+4})}$$

c) Obtener una estimación de ${}_5P_b$ y ${}_5P_{0-4}$. Para ello:

- i) Se utilizarán los valores de $l_2 = 0.8531$, $l_3 = 0.8481$ y $l_5 = 0.8224$ estimados a partir de la información censal sobre hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes.
- ii) Entrando con estos valores en las tablas modelo de Coale - Demeny, familia Oeste, se determinará un nivel promedio de mortalidad que correspondería al nivel de las dos relaciones de supervivencia bus-cadas.
- d) Utilizando la relación (80) obtener una estimación de la esperanza de vida al nacer.

Cuadro 3

EL SALVADOR: POBLACION NATIVA MASCULINA, SEGUN LOS CENSOS DE 1961 Y 1971. CALCULO DE RELACIONES DE SUPERVIVENCIA INTERCENSALES

Grupos de edades	Población nativa		Relaciones de supervivencia	
	1961	1971	$10^P_{x, x+4}$	$5^P_{x, x+4}$
5^P_b			
0-4	241 398	-		
5-9	193 586	-		
10-14	159 828	238 492		
15-19	117 358	174 058		
20-24	101 369	142 697		
25-29	80 798	108 893		
30-34	72 849	98 303		
35-39	65 931	90 014		
40-44	54 748	73 923		
45-49	43 556	58 549		
50-54	37 066	47 341		
55-59	24 577	33 594		
60-64	28 620	33 473		
65-69	14 078	20 791		
70-74	10 181	18 044		
75-79	12 840 ^{a/}	8 847		
80-84		5 182		
85 y +		4 095		

^{a/} Población de 75 años y más.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.

R.1 Para el cálculo de estas probabilidades se obtienen primero los valores de :

$$E_x = E_x^{72} + E_x^{73} + E_x^{74}$$

$$N'_x = N_x^{73} + N_x^{74} + N_x^{75}$$

$$N''_x = N_x^{72} + N_x^{73} + N_x^{74}$$

Luego los valores de ${}_x p_x$ y ${}_x \delta p_x$, cuyo producto da la probabilidad de supervivencia por un año completo (${}_1 p_x$), y finalmente por complemento el valor de q_x :

Edad x	E_x	N'_x	N''_x	${}_x p_x = \frac{E'_x}{E_x}$	${}_x \delta p_x = \frac{E_{x+1}}{N''_x}$	$q_x = 1 - {}_x p_x \delta p_x$
0	81 740	79 048	78 346	0.967066	0.989010	0.043561
1	77 485	77 215	78 667	0.996515	0.996580	0.006892
2	78 398	78 289	78 068	0.998610	0.998604	0.002785
3	77 959	77 877	78 741	0.998948	0.998971	0.002079
4	78 660	78 609	80 131	0.999352	0.999388	0.001260
5	80 082					

$$\begin{aligned}
 \text{R.2 } {}_3 q_0 &= 1 - {}_3 p_0 \\
 &= 1 - p_0 p_1 p_2 \\
 &= 1 - (1 - q_0) (1 - q_1) (1 - q_2) \\
 &= 1 - (0.95644) (0.99311) (0.99722) \\
 &= 1 - 0.94721 = \underline{0.05279}
 \end{aligned}$$

R.3

Grupos de edades	$5q_x$
5-9	0.003569
10-14	0.002198
15-19	0.003674
20-24	0.004789

R.4

Grupos de edades	$5m_x$	nq_x	l_x	nd_x	nL_x
0	-	0.043561	100 000	4 356	96 685
1	-	0.006892	95 644	659	95 315
2	-	0.002785	94 985	265	94 853
3	-	0.002079	94 720	197	94 622
4	-	0.001260	94 523	119	94 464
5-9	0.000715	0.003569	94 404	337	471 329
10-14	0.000440	0.002198	94 067	207	470 455
15-19	0.000736	0.003674	93 860	345	468 750
20-24	0.000960	0.004789	93 515	448	466 667
					$25L_0 = 2 353 140$

$$R.5 \text{ a) } {}_5e_0^o = \frac{T_0 - T_5}{l_0} = \frac{3958\ 833 - 3567\ 298}{100\ 000} = \underline{3.92 \text{ años}}$$

Si la mortalidad fuera nula el resultado sería 5. Debido a las condiciones de mortalidad cada persona vive en promedio sólo 3.92 años.

$$R.5 \text{ b) } {}_{50}e_{15}^o = \frac{T_{15} - T_{65}}{l_{15}} = \frac{2878\ 099 - 323\ 207}{71\ 931} = \underline{35.52 \text{ años}}$$

En este caso el máximo posible es de 50 años, perdiendo cada persona un promedio de casi 15 años por mortalidad.

R.6 - Para ${}_5m_{20} = 0.0081$:

$$\left. \begin{aligned} {}_5q_{20} &= 1 - e^{-0.0405} &&= 0.03969 \\ {}_5q_{20} &= 1 - e^{-0.0405-0.0001} &&= 0.03975 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Diferencia relativa} \\ \text{igual a 0.15\%} \end{array}$$

- Para ${}_5m_{80} = 0.1620$:

$$\left. \begin{aligned} {}_5q_{80} &= 1 - e^{-0.8100} &&= 0.55514 \\ {}_5q_{80} &= 1 - e^{-0.8100-0.0262} &&= 0.56666 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Diferencia relativa} \\ \text{igual a 2.03\%} \end{array}$$

Vale decir que en el grupo 20-24 donde la tasa central de mortalidad es relativamente pequeña, el término de segundo grado en el exponente es muy cercano a cero y la corrección que introduce la fórmula de Reed y Merrell es muy pequeña. En cambio en el grupo 80-84, donde la tasa central de mortalidad es elevada, el término correctivo eleva la probabilidad de muerte aproximadamente un 2 por ciento. En resumen, tal como se vio en la parte teórica, la fórmula de Reed y Merrell introduce una corrección mayor a medida que la tasa central de mortalidad aumenta.

R.7 a) Con las tablas de 1950, las probabilidades de sobrevivencia del hombre, la mujer y la pareja, resultan:

$${}_{35}p_{20}^H = \frac{l_{55}}{l_{20}} = \frac{64\,372}{81\,451} = 0.79032$$

$${}_{35}p_{15}^M = \frac{l_{50}}{l_{15}} = \frac{70\,994}{84\,004} = 0.84513$$

$$({}_{35}p_{20}^H)({}_{35}p_{15}^M) = (0.79032)(0.84513) = \underline{0.66792}$$

b) Por su parte con la tabla de 1973 las mismas probabilidades valen

$${}_{35}P_{20}^H = \frac{80\ 041}{91\ 935} = 0.87063$$

$${}_{35}P_{15}^M = \frac{87\ 859}{93\ 861} = 0.93605$$

$$({}_{35}P_{20}^H) ({}_{35}P_{15}^M) = (0.87063)(0.93605) = \underline{0.81495}$$

Comparando los resultados de a) y b) se observa que mientras las probabilidades de supervivencia masculina y femenina aumentan entre 1950 y 1973 un 10 por ciento, la probabilidad conjunta se eleva más del 22 por ciento. Esto pone de manifiesto que el descenso de la mortalidad tiene una incidencia más que proporcional en la supervivencia de la pareja, lo cual ocasiona -a igualdad de otras condiciones- un aumento en las tasas de natalidad.

R.8 a) Cálculo de las relaciones de supervivencia intercensales

En base a la información básica dada, se ha calculado en la columna (3) del cuadro 4, las relaciones de supervivencia intercensales de los diferentes grupos quinquenales de edades, ${}_{10}P_{x,x+4}$. Para el grupo 0-4 resulta:

$${}_{10}P_{0-4} = \frac{238\ 492}{241\ 398} = 0.98796$$

y así sucesivamente. En algunos casos se obtienen relaciones de supervivencia superiores a la unidad, debido a la mala declaración de la edad y otros errores de la información básica.

b) Cálculo de relaciones de supervivencia quinquenales

Aplicando la fórmula de la raíz cuarta se obtuvieron las relaciones de supervivencia referidas a un período de 5 años, las cuales se presentan en la columna (4) del cuadro 4. Por ejemplo, para el grupo 5-9 que es el primero que puede calcularse con esta fórmula:

$${}_5P_{5-9} \approx \sqrt[4]{({}_{10}P_{0-4})({}_{10}P_{5-9})} = \sqrt[4]{(0.98796)(0.89912)} = \underline{0.97082}$$

El último grupo ${}_5P_{75+}$, se calculó mediante la fórmula aproximada:

$${}_5P_{75+} \approx \sqrt[4]{({}_{10}P_{70+})({}_{10}P_{75+})} = \sqrt[4]{(0.40298)(0.31893)} = \underline{0.59875}$$

Puede verse que con esta fórmula de la raíz cuarta se produce un primer suavizamiento de las relaciones de supervivencia intercensales.

c) Cálculo de ${}_5P_6$

x	l_x	Nivel en Coale - Demeny Familia Oeste
2	0.8531	13.75
3	0.8481	14.14
5	0.8224	13.59
Nivel promedio		13.83

A partir de los valores de l_2 , l_3 y l_5 dados se calculó en cada caso el nivel correspondiente en las tablas Modelo de Coale y Demeny, familia Oeste. El promedio simple de estos tres valores da un nivel medio de 13.83, que corresponde a una esperanza de vida al nacer masculina de 49.14 años. Para ese nivel medio el valor de ${}_5P_6$ resulta:

Nivel	${}_5P_6$
13	0.83749
14	0.85583
13.83	0.85271

Para completar el cálculo de las relaciones de supervivencia para todas las edades hace falta una estimación de ${}_5P_{0-4}$ que puede obtenerse también de las Tablas de Coale y Demeny para el nivel 13.83, resultando

$${}_5P_{0-4} = 0.95146$$

Esta última relación de supervivencia también podría calcularse apartir de los datos básicos mediante la siguiente fórmula:

$${}_5P_{0-4} = \frac{{}_{10}P_{0-4}}{{}_5P_{5-9}} = \frac{0.98796}{0.97082} = 1.01766$$

pero debido a los errores de la información básica, los resultados en este caso no resultan satisfactorios.

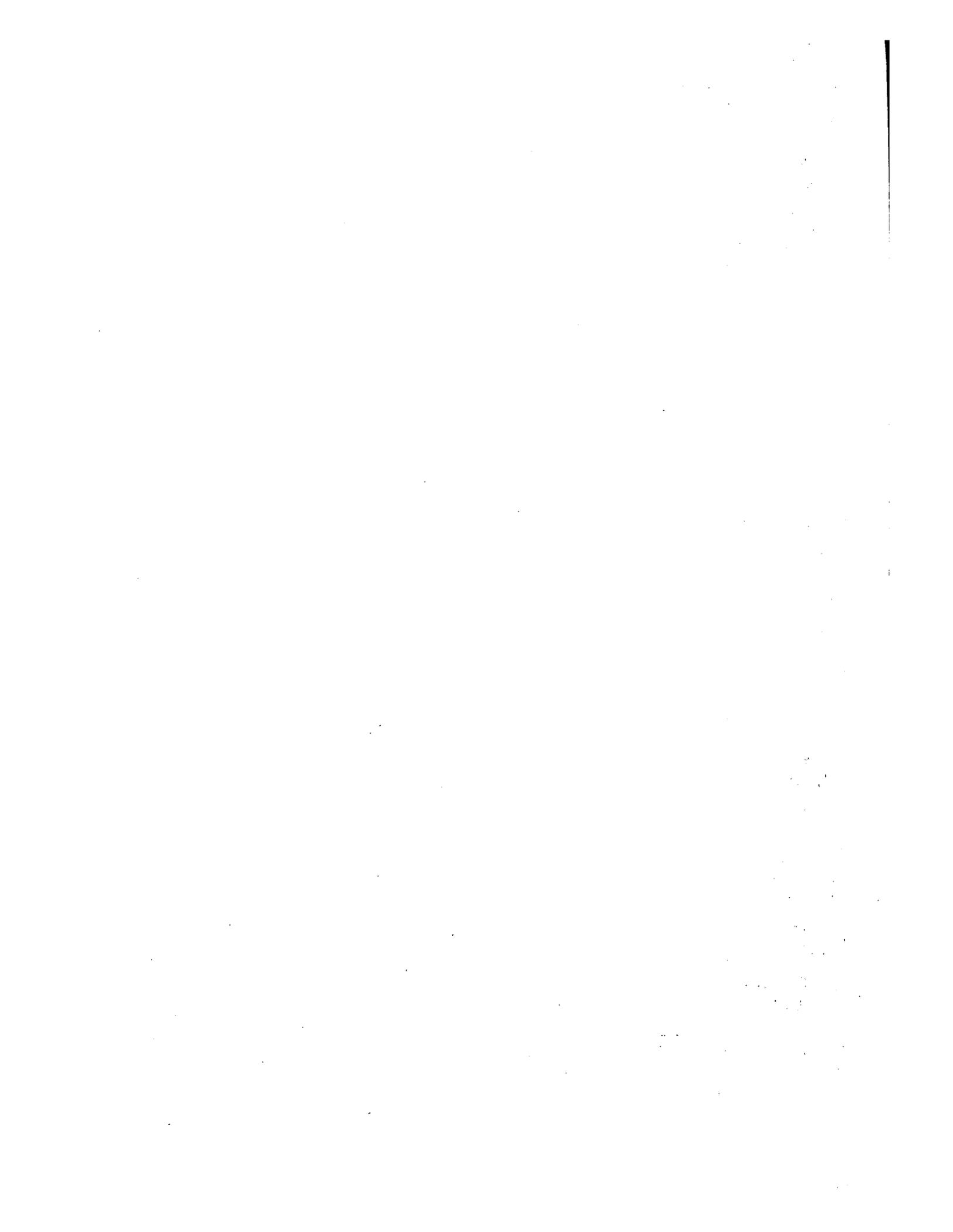
d) $e^o_o = \underline{52.54 \text{ años}}$

Cuadro 4

EL SALVADOR: POBLACION NATIVA MASCULINA, SEGUN LOS CENSOS DE 1961 Y 1971. CALCULO DE RELACIONES DE SUPERVIVENCIA INTERCENSALES

Grupos de edades	Población nativa		Relaciones de supervivencia	
	1961	1971	${}_{10}P_{x,x+4}$	${}_5P_{x,x+4}$
	(1)	(2)	(3)	(4)
${}_5P_b$	0.85271
0-4	241 398	-	0.98796	0.95146
5-9	193 586	-	0.89912	0.97082
10-14	159 828	238 492	0.89282	0.94655
15-19	117 358	174 058	0.92787	0.95403
20-24	101 369	142 697	0.96975	0.97395
25-29	80 798	108 893	1.11406	1.01951
30-34	72 849	98 303	1.01474	1.03114
35-39	65 931	90 014	0.88803	0.97431
40-44	54 748	73 923	0.86471	0.93610
45-49	43 556	58 549	0.77128	0.90369
50-54	37 066	47 341	0.90306	0.91355
55-59	24 577	33 594	0.84595	0.93490
60-64	28 620	33 473	0.63047	0.85458
65-69	14 078	20 791	0.62843	0.79338
70-74	10 181	18 044	0.50899	0.75204
75-79	12 840 ^{a/}	8 847	0.31893 ^{b/}	0.59875 ^{d/}
80-84		5 182	0.40298 ^{c/}	
85 y +		4 095		

^{a/} N_{75y+}^{1961} ; ^{b/} ${}_{10}P_{75y+}$; ^{c/} ${}_{10}P_{70y+}$; ^{d/} ${}_5P_{75y+}$



Capítulo 5.

TABLAS COMPLETAS DE MORTALIDAD

5.1 Introducción

Aunque las tablas abreviadas de mortalidad proporcionan información suficiente para la mayoría de los propósitos demográficos, hay diversos problemas que requieren el auxilio de tablas completas. Tal es el caso por ejemplo, de la elaboración de proyecciones de población por edades simples, o la estimación del número de personas en edad escolar, para cuyo cálculo se necesitan relaciones de supervivencia de la forma $P_x = L_{x+1} / L_x$. Otro tanto se presenta cuando se trata de hacer estimaciones de la fecundidad por el denominado método de los hijos propios ^{38/}, donde debe proyectarse retrospectivamente tanto la población de 0 a 14 años, para obtener los nacimientos de cada uno de los años anteriores a la fecha del censo, como la

^{38/} CELADE, Estudio de la fecundidad mediante el método de los hijos propios en países de América Latina: Diferencias socioeconómicas en el descenso de la fecundidad en Costa Rica, 1960-1970, Serie A., No.1040, San José, Costa Rica, Anexo 1, 1980.

población femenina de 15 a 50 años, que constituye el denominador de las tasas. Asimismo, para hacer estimaciones y otros análisis, suelen utilizarse relaciones de supervivencia de la forma ${}_n P_{x, x+4}$, cuyo cálculo requiere el uso de tablas completas cuando n no es múltiplo de 5. Y así podrían darse otros ejemplos.

Entre los diversos métodos disponibles para elaborar tablas completas, cabe destacar los elaborados por Greville para la preparación de las tablas nacionales y regionales de los Estados Unidos de 1940, 1960 y 1970 39, 40, 41/. Los respectivos informes, citados al pie de página, contienen una detallada exposición del método aplicado, la información básica necesaria y los resultados alcanzados. En especial el primero de estos documentos, publicado en 1946, constituye un verdadero modelo de informe sobre esta materia.

En este capítulo se explicarán las diversas fases que comprende la construcción de una tabla completa, siguiendo la metodología utilizada por Greville en la construcción de las tablas de los Estados Unidos de 1970. Dicha metodología comprende cuatro partes principales: el ajuste preliminar de los datos, las fórmulas necesarias para el cálculo de las probabilidades de muerte, el suavizamiento de dichas tasas, y la derivación de las restantes funciones de la tabla.

39/ Greville, T.N.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1946.

40/ U.S. Department of Health, Education and Welfare, Methodology of the National, Regional and State Life Tables for the United States: 1959-1961, Volumen I, No. 4, Washington, D.C. 1967.

41/ National Center for Health Statistics, Methodology of the National and States Life Tables for the United States: 1969-1971, Maryland, 1975.

5.2 Ajuste preliminar de los datos

Esta primera etapa está destinada a corregir los errores y problemas de diverso tipo que afecta a la información demográfica, especialmente aquellos que se refieren a la omisión de personas tanto en el censo como en las estadísticas vitales, el ajuste de la población desde la fecha del censo hasta mediados del período al cual se refiere la tabla, la distribución del número de personas y de las defunciones de edad desconocida, etc. Sobre estos puntos ya se hizo mención en el capítulo 4 referido a la construcción de tablas abreviadas, siendo objeto de estudio dentro del curso más adelante, en la materia Evaluación y Ajuste de Datos.

Para la construcción de la tabla de mortalidad de los Estados Unidos de 1969-1971 se tomó directamente la población censada en 1970, con un pequeño ajuste efectuado por la Oficina de Censos ^{42/}, principalmente en lo referido al número de personas de edad avanzada, mientras que en las defunciones sólo se hizo una distribución de las muertes de edad desconocida en forma proporcional al número de muertes de cada grupo.

Los datos básicos utilizados en dicha tabla fueron: las defunciones ocurridas de los años 1969 a 1971, la población corregida del censo efectuado el 1° de abril de 1970 y los nacimientos registrados de 1967 a 1971. La población y las defunciones estaban disponibles por edades simples de 1 a 5 años y por grupos quinquenales en las edades siguientes. Se contaba también con las defunciones para cuatro subdivisiones del primer año: menores de un día, 1 a 6 días, 7 a 27 días y 28 a 364 días.

^{42/} Greville, T.N.E., "United States Life Tables and...", op.cit.

El cálculo de las tasas se hizo directamente con la población al 1° de abril de 1970, teniendo en cuenta que la corrección que resultaba al desplazarla a mediados de año era muy pequeña (del orden del 0.3 por ciento) y las posibilidades de error subyacente en los datos básicos.

5.3 Cálculo de las probabilidades de muerte

Se considera por separado el cálculo de las probabilidades de muerte de los menores de 2 años, de 2 a 4 años y desde los 5 años en adelante, en cuyos tramos se utilizaron procedimientos distintos.

5.3.1 Probabilidades de muerte para menores de dos años. En estas edades los cálculos se apoyan en las estadísticas de nacimientos y defunciones, dejando de lado los datos del censo, que generalmente está subestimado en estas primeras edades. Además, la metodología basada en los datos de nacimientos tiene la ventaja de obtener un denominador más confiable, referido a todo el período de 3 años, que el provisto por la población enumerada, que se refiere al momento del censo.

En primer lugar se calcularon los valores de ${}_t d_x$, el número de muertes ocurridas entre las edades exactas x y $x+t$ en la tabla de vida, mediante la fórmula :

$$(110) \quad {}_t d_x = l_0 \frac{{}_t D_x}{{}_t E_x}$$

donde l_0 es la raíz de la tabla, ${}_t D_x$ simboliza el número de muertes ocurridas en la población real en los años 1969 a 1971 entre las edades exactas $x, x+t$, y ${}_t E_x$ simboliza un denominador apropiado que, para los intervalos de edades considerados, toma la forma indicada en el cuadro 5. Estos

valores de ${}_tE_x$ están basados en el supuesto de distribución uniforme de los nacimientos dentro de cada uno de los años. Los intervalos están dados en edades exactas.

Cuadro 5

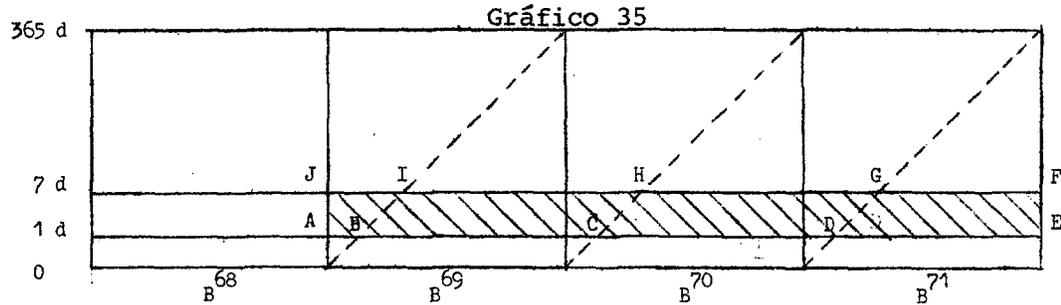
DENOMINADORES ${}_tE_x$ USADOS PARA EL CALCULO DE LAS DEFUNCIONES DE MENORES DE DOS AÑOS

Intervalo de edades x a $x+t$	Denominadores (${}_tE_x$)
0-1 día.....	$\frac{1}{730} (B_{1968} + 730B_{1969} + 730B_{1970} + 729B_{1971})$
1-7 días...	$\frac{1}{730} (8B_{1968} + 730B_{1969} + 730B_{1970} + 722B_{1971})$
7-28 días..	$\frac{1}{730} (35B_{1968} + 730B_{1969} + 730B_{1970} + 695B_{1971})$
28-365 días	$\frac{1}{730} (393B_{1968} + 730B_{1969} + 730B_{1970} + 337B_{1971})$
1-2 años...	$\frac{1}{2} (B_{1967} + 2B_{1968} + 2B_{1969} + B_{1970})$

Si el cálculo de ${}_1d_0$ se hace sin considerar subdivisiones dentro del primer año de vida, entonces el denominador ${}_tE_x$ toma una forma similar al calculado en el cuadro 5 para el intervalo de 1 a 2 años, pero con los nacimientos desplazados un año, vale decir;

$$(111) \quad {}_1E_0 = \frac{1}{2} (B_{68} + 2B_{69} + 2B_{70} + B_{71})$$

El valor numérico de los coeficientes de los denominadores t^E_x puede obtenerse fácilmente con ayuda de un diagrama de Lexis. Por ejemplo, para el intervalo de 1 a 7 días, las defunciones de 1969-1971 corresponden en el diagrama siguiente al área sombreada AEFJ. De ese total



se tiene que:

- a) Las defunciones ocurridas en la superficie ABIJ corresponden a nacimientos de 1968. Dicha superficie representa

$$\frac{1}{365} + \frac{1}{2} \frac{6}{365} = \frac{8}{730}$$

de la superficie (del grupo de 1 a 7 días) correspondiente a un año completo.

- b) Las defunciones ocurridas en BCHI corresponden a nacimientos de 1969. Dicha superficie corresponde a un año completo.
- c) Las defunciones ocurridas en CDGH corresponden a nacimientos de 1970. Tal superficie comprende también un año completo.
- d) Por último las defunciones ocurridas en el área DEFG corresponde a nacimientos de 1971. Esta superficie representa

$$\frac{358}{365} + \frac{1}{2} \frac{6}{365} = \frac{722}{730}$$

de la superficie de un año completo.

De este modo el denominador de 1 a 7 días resulta

$$t^E_x = \frac{8}{730} B_{68} + B_{69} + B_{70} + \frac{722}{730} B_{71}$$

Una vez obtenidos los valores de t^d_x , se calculan luego las funciones l_x y t^q_x hasta la edad 2 mediante las fórmulas usuales:

$$(112) \quad l_{x+t} = l_x - t^d_x$$

$$(113) \quad t^q_x = t^d_x / l_x = 1 - l_{x+t} / l_x$$

5.3.2 Probabilidades de muerte de 2 a 4 años. Desde los 2 años de edad, el cálculo de las probabilidades de muerte se realiza a partir de las tasas centrales de mortalidad (m_x), vale decir, mediante las estadísticas de población y muertes.

Bajo el supuesto de que las defunciones se distribuyen uniformemente dentro de cada año de edad, la relación que vincula la tasa central de mortalidad (m_x) con la probabilidad de muerte (q_x) viene dada, según se ha visto en el capítulo 2, por la siguiente relación, que es suficientemente aproximada cuando el intervalo de edades es de un año:

$$(114) \quad q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x}$$

Si se simboliza con D_x el número de defunciones de edad cumplida x , ocurridas en 1969-1971 y N_x representa la población de edad x a mitad de dicho período, se tiene entonces, aproximadamente:

$$(115) \quad m_x = \frac{D_x}{3N_x}$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que las defunciones de edad x , ocurridas durante 1969-1971, provienen básicamente de tres cohortes consecutivas de población, Greville considera que la exactitud del cálculo de las

tasas m_x podría mejorarse reemplazando $3N_x$ en el denominador de (115) por la suma de las poblaciones de edad cumplida $x-1$, x y $x+1$ a mitad del período considerado. Se tiene entonces:

$$(116) \quad m_x = \frac{D_x}{N_{x-1} + N_x + N_{x+1}}$$

Combinando las fórmulas (114) y (116) se llega a la relación única:

$$(117) \quad q_x = \frac{D_x}{N_{x-1} + N_x + N_{x+1} + 1/2 D_x}$$

la cual se utiliza para las edades 2, 3 y 4.

5.3.3 Cálculo de las probabilidades de muerte desde los 5 años de edad en adelante. El cálculo de estas probabilidades se obtiene, como las de 2 a 4 años, a partir de la información sobre defunciones y población. Combinando la fórmula (114) que vincula la probabilidad de muerte con la tasa central de mortalidad, con la (115), que expresa esta última tasa en función de los datos básicos, se llega a la siguiente relación directa utilizada por Greville:

$$(118) \quad q_x = \frac{D_x}{3N_x + 1/2 D_x}$$

La información básica sobre población y defunciones por edades simples necesaria para aplicar esta fórmula, suele presentar diversas irregularidades producidas fundamentalmente por la mala declaración de la edad. Por ello, es preferible obtener dichos valores por interpolación de los

grupos quinquenales correspondientes, utilizando fórmulas de interpolación osculatriz, que aseguran una variación suave en los puntos de unión de los diversos tramos interpolados.

En la construcción de las tablas de los Estados Unidos de 1940 ^{43/} Greville calculó primero tasas de mortalidad pivotaes por edades simples para el valor central de cada grupo de edades y luego se efectuó la interpolación osculatriz directamente a dichas tasas, obteniendo así los valores intermedios. En cambio en la construcción de las tablas de vida de 1969-1971 se interpoló la población y las defunciones separadamente. Este último procedimiento, aunque implica interpolar una función que tiene un comportamiento bastante irregular, como es el caso de las D_x , tiene la ventaja operacional que los valores suavizados reproducen exactamente las defunciones observadas (o corregidas) con lo cual no se altera el nivel de la mortalidad. Además, cuando se elaboran tablas por Estados, Provincias u otras subdivisiones, las muertes y la población de cada edad resulta exactamente igual a la suma de todas las subdivisiones consideradas.

La interpolación de las defunciones y de la población fue efectuada en la tabla de 1969-1971 por medio de los multiplicadores de Beers^{44/} presentados en el cuadro 6. Entrando en dicho cuadro con la población o las defunciones por grupos quinquenales, desde 0-4 años en adelante, se obtienen las cifras correspondientes, por edades simples, desde los 5 años de edad.

^{43/} Greville, T.N.E., "United States Life Tables..." op.cit., Parte V.

^{44/} Beers, Henry S., "Six Terms Formulas for Routine Actuarial Interpolation", en The Record of the American Institute of Actuaries, 34: 52-61, 1945.

Cuadro 6

MULTIPLICADORES DE BEERS PARA SUBDIVIDIR VALORES QUINQUENALES POR AÑOS
SIMPLES DE EDAD. FORMULA DE LA QUINTA DIFERENCIA MINIMIZADA

Edad en años para los cuales se cal- culan los valores interpolados	Multiplicadores para los valores quinquenales que comienzan con la edad				
	0	5	10	15	20

(a) Multiplicadores para las edades 5-9

5	0.0404	0.2000	-0.0344	-0.0128	0.0068
6	0.0093	0.2268	-0.0402	0.0028	0.0013
7	-0.0108	0.2272	-0.0248	0.0112	-0.0028
8	-0.0198	0.1992	0.0172	0.0072	-0.0038
9	-0.0191	0.1468	0.0822	-0.0084	-0.0015
	$5m - 10$	$5m - 5$	$5m$	$5m + 5$	$5m + 10$

(b) Multiplicadores para las edades 10 en adelante

$5m$	-0.0177	0.0804	0.1570	-0.0284	0.0027
$5m + 1$	-0.0020	0.0160	0.2200	-0.0400	0.0060
$5m + 2$	0.0050	-0.0280	0.2460	-0.0280	0.0050
$5m + 3$	0.0060	-0.0400	0.2200	0.0160	-0.0020
$5m + 4$	0.0027	-0.0284	0.1570	0.0804	-0.0117

Fuente: Beers, Henry S., "Six Terms Formulas for Routine Actuarial Interpolation", en The Record of The American Institute of Actuaries, 34: 52-61, 1945.

Para la interpolación de las edades 5 a 14, Greville no utiliza la población y las defunciones reales de 0 a 4 años, sino un valor ficticio estimado de la manera que se indica en los párrafos siguientes. Dicho procedimiento permite obtener valores interpolados que empalman más suavemente con las cifras correspondientes a las edades 2 a 4 años y eliminan el efecto de la alta mortalidad de la infancia, que distorsionan los valores interpolados en estas edades.

Dicho valor ficticio para el grupo de edad 0-4 fue determinado de modo que la suma de los valores interpolados para las edades 2-4 debería ser igual al número real de personas o defunciones (según el caso) de estos tres años de edad. La extensión a las edades 2-4 de los multiplicadores de Beers del cuadro 6 se presentan en el cuadro 7.

Cuadro 7

EXTENSION DEL CUADRO 2 A LAS EDADES 2 - 4

Edad en años para los cuales se calculan los valores interpolados	Multiplicadores para los valores quinquenales que comienzan con la edad				
	0	5	10	15	20
2	0.1924	0.0064	0.0184	-0.0256	0.0084
3	0.1329	0.0844	0.0054	-0.0356	0.0129
4	0.0819	0.1508	-0.0158	-0.0284	0.0115

Fuente: Beers, Henry S., "Six Terms Formulas for Routine Actuarial interpolation", en The Record of the American Institute of Actuaries, 34: 52-61, 1945

Si W_x simboliza la suma quinquenal que comienza con la edad x , y V representa la suma de valores interpolados para las edades 2-4 (los cuales se supone que son iguales al número real), los multiplicadores del cuadro 7 darían:

$$(119) \quad V = 0.4072 W_0 + 0.2416 W_5 + 0.0080 W_{10} \\ - 0.0896 W_{15} + 0.0328 W_{20}$$

Dando a V el valor correspondiente real de 2 a 4 años, y despejando W_0 , se tiene

$$(120) \quad W_0 = 2.45580 V - 0.59332 W_5 - 0.01965 W_{10} \\ + 0.22004 W_{15} - 0.08055 W_{20}$$

que es la fórmula que permite calcular los valores ficticios del grupo 0-4.

La población y las muertes interpoladas por edades simples N_x y D_x , fueron utilizadas en la relación (118) para calcular las probabilidades de muerte q_x desde los 5 años de edad en adelante.

Respecto a las últimas edades, en la tabla de mortalidad de los Estados Unidos se calcularon los valores de q_x hasta la edad 110, a la cual el número de sobrevivientes es muy cercano a cero. Sin embargo, para la gran mayoría de los propósitos demográficos es suficiente el cálculo de estas probabilidades hasta los 85 o 90 años, terminado luego con un grupo abierto final.

5.4 Suavizamiento de las probabilidades de muerte

Las probabilidades de muerte obtenidas en la forma indicada, contienen generalmente fluctuaciones y algunas irregularidades después de los 30 o 40 años, las cuales no corresponden a características reales de la población, sino más bien al procedimiento de interpolación y a errores de diverso tipo que presenta la información básica.

En varias tablas completas construidas para diversos países se han mantenido esas pequeñas irregularidades, para evitar el uso de fórmulas que suelen ser muy rígidas, alterando en ciertas edades la concordancia con los valores observados.

Sin embargo el procedimiento utilizado por Greville para suavizar los valores de q_x , posee dos grandes ventajas, ya que no sigue una curva analítica predeterminada y permite al usuario regular la graduación dentro de un margen muy amplio que va, desde la reproducción exacta de cada uno de los valores de q_x observados, en un caso extremo, hasta valores ajustados que siguen el comportamiento de una línea recta, en el otro. De esta manera el procedimiento permite suavizar la información y mantener la concordancia con los valores observados originales en la medida deseada.

Para suavizar los valores de q_x , Greville utilizó la fórmula de Whittaker-Henderson, Tipo B ^{45,46/}. Tal fórmula implica minimizar la cantidad

$$(421) \quad \sum w_x (q_x'' - q_x)^2 + k \sum (\Delta^2 q_x)^2$$

^{45/} Miller, M.D., Elements of Graduation, Chicago, Society of Actuaries, 1946, capítulo 5.

^{46/} Greville, T.N.E., Graduation, Educations and Examination Committee of the Society of Actuaries, 1974.

donde W_x es un coeficiente de ponderación, q_x'' son los valores que se desean suavizar, q_x los valores suavizados y Δ^z representa la diferencia finita de orden z , siendo z generalmente igual a 2 o 3. El primer término mide la proximidad entre las tasas suavizadas y observadas, mientras que el segundo mide la suavidad o regularidad con que cambian las tasas en las sucesivas edades. La constante k regula la importancia que el usuario asigna a la suavidad contra la proximidad o concordancia a los datos observados.

Minimizando la expresión (121) precedente, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son las tasas de mortalidad suavizadas q_x .

En las secciones siguientes se presentan dos procedimientos para suavizar los valores de q_x , mediante la fórmula de Whittaker-Henderson. Primero, en la sección 5.4.1, se incluye un procedimiento simplificado, suponiendo que $W_x = 1$, en cuyo caso se obtiene la fórmula llamada "Tipo A". Este procedimiento es apropiado para resolver con una máquina de calcular corriente. Luego, en la sección 5.4.2, se presenta el caso general utilizado por Greville, que corresponde a la fórmula "Tipo B", la cual puede utilizarse cuando se cuenta con la ayuda de un computador.

5.4.1 Suavizamiento mediante la fórmula de Whittaker-Henderson, Tipo A.

La resolución de la ecuación (121) utilizada por Greville, implica la solución de n ecuaciones con n incógnitas, siendo n el número de valores de q_x que se desea suavizar, lo cual constituye un procedimiento largo y dificultoso para resolver en forma manual. Sin embargo, si se supone que el coeficiente de ponderación $W_x = 1$, entonces la solución numérica puede obtenerse fácilmente utilizando el método de las ecuaciones en diferencia desarrollados por Whittaker y Henderson.

Con esta simplificación y tomando $z = 2$, que es el valor utilizado por Greville, la relación (121) toma la forma siguiente :

$$(122) \quad \sum (q_x'' - q_x)^2 + k \sum (\Delta^z q_x)^2$$

Respecto a k , mientras más pequeño sea su valor, las tasas suavizadas serán más cercanas a las q_x'' previamente calculadas. En un caso extremo, si $k = 0$, el mínimo se verifica cuando los valores de q_x coinciden con los de q_x'' , mientras que en el otro extremo, si $k = \infty$ entonces los valores suavizados seguirán el comportamiento de una línea recta. En el campo demográfico, donde es conveniente respetar en la mayor medida posible los valores observados, deberá ser k relativamente pequeño (más adelante en la aplicación del método, se indicarán algunos valores posibles de k).

La derivación teórica del procedimiento que permite llegar a las condiciones que minimizan la expresión (122) pueden verse en el libro de Miller ya citado ^{47/}, presentándose aquí sólo las dos ecuaciones en diferencia finales resultantes, que permiten obtener los valores suavizados de q_x . Dichas ecuaciones son las siguientes:

$$(123) \quad q_x' = \frac{2a}{a+1} q_{x-1}' - \frac{a}{a+2} q_{x-2}' + \frac{2}{(a+1)(a+2)} q_x''$$

$$(124) \quad q_x = \frac{2a}{a+1} q_{x+1} - \frac{a}{a+2} q_{x+2} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} q_x'$$

donde a está vinculado con k mediante la siguiente relación

$$(125) \quad k = \frac{1}{4} a(a+1)^2 (a+2)$$

^{47/} Miller, M.D., "Elements of Graduation..." op.cit. Capítulo 5.

q''_x son los valores calculados a partir de N_x y D_x , q_x las tasas suavizadas y q'_x valores auxiliares.

Si el suavizamiento se efectúa en el tramo $u-v$, conociendo dos valores iniciales q'_{u-1} y q'_{u-2} se pueden calcular los q'_x desde una edad u cualquiera en adelante hasta otra v , por medio de la relación (123). A su vez, si se conocen los dos valores finales de q_{v-1} y q_v , el resto de los valores suavizados q_x pueden ser derivados por medio de la relación (124). Los dos valores iniciales pueden ser calculados mediante las fórmulas

$$(126) \quad \begin{aligned} q'_{u-2} &= q''_u - (a+2) \Delta q''_u \\ q'_{u-1} &= q''_{u+1} - (a+2) \Delta q''_u \end{aligned}$$

mientras que los dos valores finales se calculan mediante las relaciones

$$(127) \quad \begin{aligned} q_{v-1} &= q'_{v-1} + a \Delta q'_{v-1} \\ q_v &= q'_v + a \Delta q'_{v-1} \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los valores de q_x suavizados, si se desea puede efectuarse un segundo proceso iterativo, con el fin de asegurar un empalme más suave entre las probabilidades de muerte observados de las edades $0-u$, con las suavizadas del tramo $u-v$.

para ello se calculan primero valores corregidos de q''_u y q''_{u+1} mediante las fórmulas

$$(128) \quad \begin{aligned} q''_u(\text{corregido}) &= q''_u + 2 (q''_u - q_u) \\ q''_{u+1}(\text{corregido}) &= q''_{u+1} + 2 (q''_u - q_u) \end{aligned}$$

Con estos nuevos valores de q''_u y q''_{u+1} corregidos se pueden obtener entonces valores revisados de q'_{u-2} y q'_{u-1} por medio de la relación (126) y recalcular con ellos una nueva serie suavizada corregida. Dichos valores dan generalmente muy próximos a los obtenidos en la primera iteración.

Ejemplo numérico

A partir de las probabilidades de muerte observadas (q''_x) presentadas en la primera columna del cuadro 8 (pág. 143), calcular los valores suavizados de q_x de 28 a 84 años, es decir para $u = 28$ y $v = 84$, suponiendo que $a = 3$.

1. Cálculo de los coeficientes de las ecuaciones en diferencias

Haciendo $a = 3$ en las ecuaciones (123) y (124), se llega a las ecuaciones en diferencia siguientes

$$(129) \quad q'_x = 1.5 q'_{x-1} - 0.6 q'_{x-2} + 0.1 q''_x$$

$$(130) \quad q_x = 1.5 q_{x+1} - 0.6 q_{x+2} + 0.1 q'_x$$

2. Cálculo de los valores iniciales q'_{26} y q'_{27} mediante (126)

Para el cálculo de estos valores, se requieren los valores observados para las edades 28 y 29:

$$q''_{28} = 1\ 581$$

$$q''_{29} = 1\ 620$$

todos los valores de q_x se han amplificado por 1 000 000, a fin de simplificar la notación y las operaciones numéricas). Reemplazando estos valores en (126), se tiene:

$$q'_{26} = 1\ 581 - 5(1\ 620 - 1\ 581) = \underline{1\ 386}$$

$$q'_{27} = 1\ 620 - 5(1\ 620 - 1\ 581) = \underline{1\ 425}$$

3. Cálculo de los valores de q'_x mediante (123)

La relación (123) toma, para $a = 3$, la forma (129). Sustituyendo en esta última al valor observado $q''_{28} = 1581$ y los estimados $q'_{26} = 1386$ y $q'_{27} = 1425$, se tiene

$$q'_{28} = 1.5 (1425) - 0.6 (1386) + 0.1 (1581) = \underline{1464}$$

En forma análoga para las edades siguientes, resulta:

$$q'_{29} = 1.5 (1464) - 0.6 (1425) + 0.1 (1620) = \underline{1503}$$

$$q'_{30} = 1.5 (1503) - 0.6 (1464) + 0.1 (1666) = \underline{1543}$$

y así sucesivamente. Los valores de q'_x así obtenidos se presentan en la columna (2) del cuadro 8

4. Cálculo de q_{83} y q_{84} por medio de (127)

$$q_{83} = 84503 + 3 (98056 - 84503) = \underline{125162}$$

$$q_{84} = 98056 + 3 (98056 - 84503) = \underline{138715}$$

5. Cálculo de los valores suavizados q_x , mediante (124)

Reemplazando los valores de q_{83} , q_{84} y q'_x obtenidos anteriormente, en la fórmula (124), cuyos coeficientes están expresados en forma numérica en (130), se obtienen los valores suavizados de q_x . Dichos valores se obtienen desde el final hacia las primeras edades en la siguiente forma:

$$q_{82} = 1.5 (125162) - 0.6 (138715) + 0.1 (72796) = \underline{111794}$$

$$q_{81} = 1.5 (111794) - 0.6 (125162) + 0.1 (63847) = \underline{98978}$$

etcétera. Los valores suavizados se presentan en la columna (3) del cuadro 8.

Puede observarse que los valores iniciales suavizados $q_{28} = 1\ 566$ y $q_{29} = 1\ 606$ tienen una buena aproximación a los valores observados $q''_{28} = 1\ 581$ y $q''_{29} = 1\ 620$, asegurando un empalme suave con las probabilidades de muerte de las edades anteriores. Si se desea obtener valores más cercanos, se calcula entonces una segunda iteración en la siguiente forma.

6. Corrección opcional de los valores suavizados

A partir de la relación (128) se obtienen primero valores corregidos de q''_{28} y q''_{29}

$$q''_{28}(\text{corregido}) = 1\ 581 + 2 (1\ 581 - 1\ 566) = 1\ 611$$

$$q''_{29}(\text{corregido}) = 1\ 620 + 2 (1\ 581 - 1\ 566) = 1\ 650$$

Luego mediante (126) se obtienen nuevos valores de partida

$$q'_{26} = 1\ 611 - 5 (1\ 650 - 1\ 611) = 1\ 416$$

$$q'_{27} = 1\ 650 - 5 (1\ 650 - 1\ 611) = 1\ 455$$

y se repite el procedimiento en la forma ya indicada en los puntos 3 4 y 5 anteriores, estimándose así una nueva serie suavizada corregida. Se obtienen de esta manera los siguientes valores, que se comparan con los observados y los suavizados en la primera iteración.

Edad	q''_{x}	q_x primera iteración	q_x segunda iteración
28	1 581	1 566	1 580
29	1 620	1 606	1 617
30	1 666	1 650	1 658
31	1 713	1 698	1 704
32	1 767	1 752	1 756
33	1 827	1 814	1 816
34	1 893	1 885	1 887
35	1 968	1 968	1 969
36	2 054	2 065	2 066
37	2 154	2 178	2 179
38	2 276	2 311	2 311

después de los 38 años los nuevos valores suavizados coinciden con los de la primera iteración.

En el gráfico 36 se presentan los valores observados q_x'' de 24 a 84 años y los q_x suavizados en la primera iteración, pudiendo verse el acuerdo satisfactorio entre ambas series.

Respecto a los valores del parámetro a , para el suavizamiento de probabilidades de muerte puede tomar valores comprendidos entre 2 y 5 aproximadamente. Si $a = 1$, entonces las series suavizadas y no suavizadas prácticamente coinciden, mientras que si $a > 5$, los valores suavizados pueden alejarse demasiado de los originales, particularmente en las primeras y en las últimas edades consideradas.

5.4.2 Suavizamiento mediante la fórmula de Whittaker-Henderon, Tipo B. Se

considera ahora el procedimiento utilizado por Greville en la elaboración de tablas de mortalidad de los Estados Unidos de 1969-1971. Como ya se ha visto, la fórmula de Whittaker-Henderson, tipo B, se obtiene minimizando la expresión

$$(121) \quad \sum W_x (q_x'' - q_x)^2 + k \sum (\Delta^z q_x)^2$$

siendo W_x un coeficiente de ponderación apropiado y z generalmente igual a 2 o 3. Greville tomó $z = 2$ y $W_x = E_x / q_x'' (1 - q_x'')$, donde E_x representa la población expuesta al riesgo N_x . De todas maneras, el procedimiento de resolución es el mismo cualesquiera sean los valores de z y W_x .

Aunque desde hace tiempo se reconoce que esta fórmula produce excelentes resultados, en el pasado ha sido muy poco utilizada, porque implicaba un proceso de trabajo bastante complicado, que requería un considerable esfuerzo. Sin embargo, el desarrollo de las computadoras y del álgebra de matrices ha facilitado enormemente su empleo, que se reduce a una expresión final muy fácil de programar y resolver.

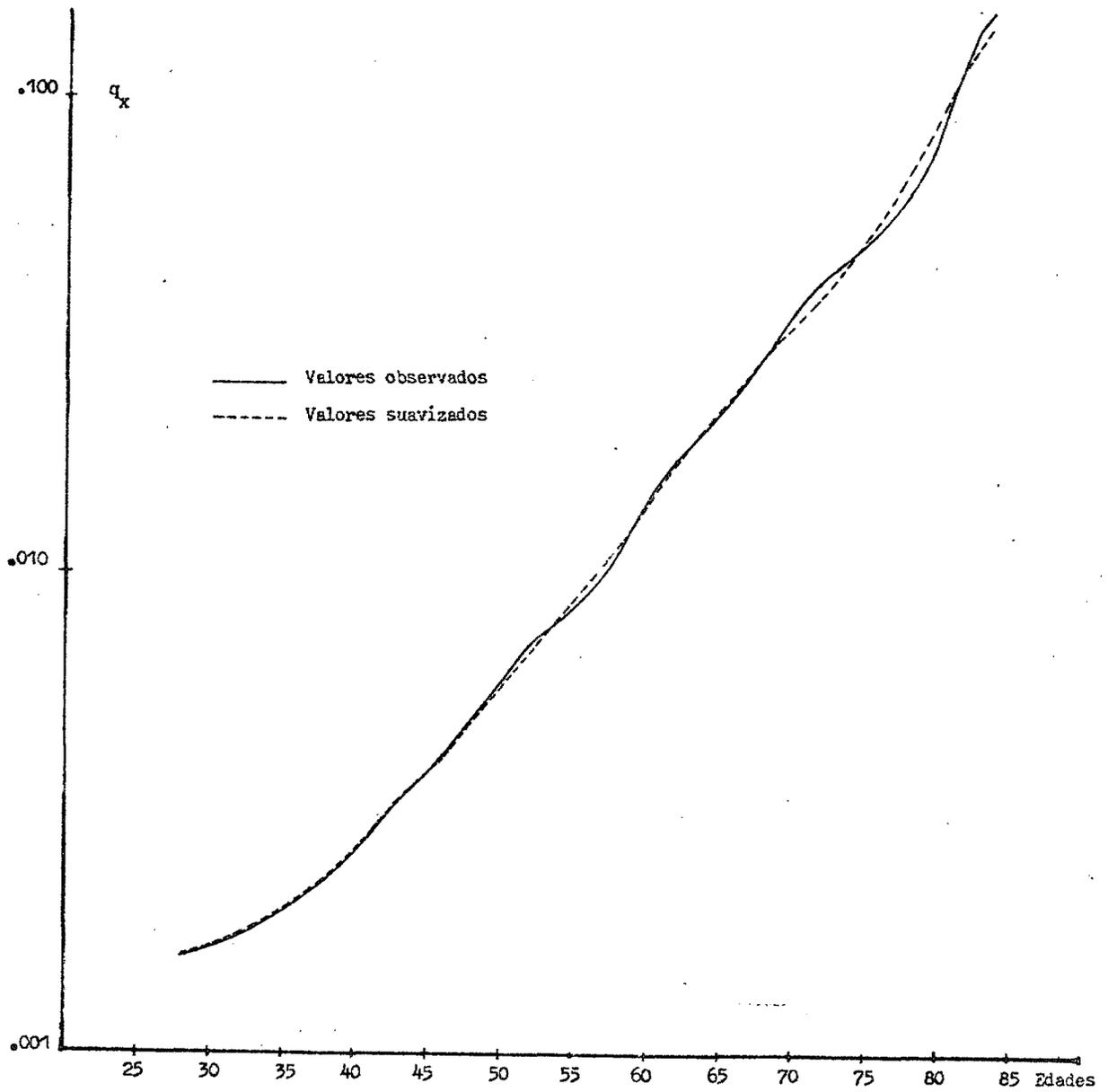
Cuadro 8

SUAVIZAMIENTO DE PROBABILIDADES DE MUERTE MEDIANTE LA FORMULA DE WHITTAKER-HENDERSON TIPO A (Valores amplificados por 1000 000)

x	q''_x	q'_x	q_x	x	q''_x	q'_x	q_x
	(1)	(2)	(3)		(1)	(2)	(3)
26		1 386					
27		1 425		56	9 087	7 451	9 457
28	1 581	1 464	1 566	57	9 864	8 007	10 373
29	1 620	1 503	1 606	58	10 934	8 633	11 412
30	1 666	1 543	1 650	59	12 280	9 374	12 578
31	1 713	1 584	1 698	60	13 821	10 263	13 864
32	1 767	1 626	1 752	61	15 447	11 315	15 258
33	1 827	1 672	1 814	62	17 114	12 526	16 750
34	1 893	1 721	1 885	63	18 725	13 872	18 329
35	1 968	1 775	1 968	64	20 295	15 322	19 995
36	2 054	1 836	2 065	65	21 810	16 841	21 751
37	2 154	1 904	2 178	66	23 460	18 415	23 605
38	2 276	1 982	2 311	67	25 477	20 065	25 568
39	2 429	2 074	2 463	68	28 016	21 851	27 648
40	2 615	2 183	2 638	69	30 968	23 834	29 850
41	2 836	2 314	2 835	70	34 181	26 058	32 186
42	3 083	2 469	3 054	71	37 357	28 523	34 687
43	3 339	2 649	3 296	72	40 341	31 183	37 417
44	3 596	2 851	3 562	73	43 024	33 963	40 485
45	3 860	3 074	3 854	74	45 561	36 791	44 049
46	4 153	3 315	4 172	75	48 289	39 638	48 307
47	4 487	3 577	4 519	76	51 472	42 530	53 485
48	4 885	3 865	4 898	77	55 299	45 542	59 808
49	5 353	4 186	5 309	78	60 318	48 827	67 465
50	5 899	4 550	5 754	79	67 223	52 637	76 574
51	6 484	4 962	6 234	80	77 504	57 410	87 131
52	7 054	5 418	6 754	81	93 148	63 847	98 978
53	7 562	5 906	7 321	82	114 717	72 796	111 794
54	8 040	6 413	7 948	83	136 167	84 503	(125 162)
55	8 514	6 927	8 654	84	149 795	98 056	(138 715)

Gráfico 36

SUAVIZAMIENTO DE PROBABILIDADES DE MUERTE MEDIANTE LA FORMULA DE WHITTAKER-HENDERSON, TIPO A



La exposición detallada de este procedimiento empleando notación matricial, puede verse en el documento "Graduation", Part 5 Study Notes ^{48/}, preparado por Greville para la Sociedad de Actuarios, presentándose aquí solamente la fórmula final que permite obtener los valores suavizados de q_x . Dicha fórmula es la siguiente:

$$(131) \quad (W + k K^T K) q = W q''$$

donde W es una matriz diagonal $n \times n$, cuyos elementos son las ponderaciones W_1, W_2, \dots, W_n ; K es una matriz $(n-z) \times n$ que contiene los coeficientes de las $(n-z)$ diferencias de orden z de q_x ; K^T es la matriz traspuesta, q'' es el vector de las probabilidades de muerte no suavizadas y q es el vector de los valores suavizados, que es el único desconocido.

Por ejemplo, para el caso de $n = 5$ y $z = 2$, se tiene que:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_5 \end{bmatrix} ; \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} ; \quad q'' = \begin{bmatrix} q''_1 \\ q''_2 \\ q''_3 \\ q''_4 \\ q''_5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

^{48/} Greville, T.H.E., "Graduation", Part 5 Study Notes, Education and Examination Committee of the Society of Actuaries, 1974.

$$K^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad K^T K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación matricial (131) representa un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, que son los n elementos de q .

Denominando $W + k K^T K = A$ se tiene

$$(132) \quad A q = W q''$$

ecuación que permite obtener el vector desconocido q de los valores suavizados q_x , calculando la inversa A^{-1} .

Una desventaja de la matriz A es que es "casi singular", o sea que su determinante es muy cercano a cero, por lo cual algunos métodos usuales de resolución no dan resultados satisfactorios. En opinión de Greville, un método recomendable para resolver el sistema de ecuaciones de Whittaker-Henderson es el de la raíz cuadrada o método de Choleski, que consiste en expresar la matriz A como producto de una matriz triangular inferior por una triangular superior que es su traspuesta.

$$(133) \quad A q = L L^T q = W q''$$

Este procedimiento puede resolverse en dos etapas. Haciendo $q' = L^T q$ se resuelve primero el sistema

$$(134) \quad L q' = W q''$$

lo cual permite obtener el vector q' . Con estos valores se resuelve luego el sistema

$$(135) \quad L^T q = q'$$

que da el vector deseado q .

Los elementos l_{ij} de la matriz triangular L se calculan mediante las siguientes fórmulas, donde a_{ij} son los elementos de la matriz A :

$$(136) \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$(137) \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} (a_{ij} - \sum_{h=1}^{j-1} l_{ih} l_{jh}); \quad \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, i-1 \end{array}$$

$$(138) \quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{h=1}^{i-1} l_{ih}^2} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Al final de este capítulo, en el ejercicio 6, se presenta un ejemplo que ilustra el proceso completo de suavizamiento mediante esta fórmula. En dicho ejercicio se han considerado sólo cinco valores, con el fin de facilitar el ejemplo y la notación matricial.

Respecto al valor del parámetro k , éste depende de las ponderaciones W_x . Para evitar la variabilidad de este parámetro en diferentes aplicaciones, es conveniente trabajar con cifras relativas $W_x / \sum W_x$. A fin de elegir el mejor suavizamiento puede darse a k varios valores haciendo luego una representación gráfica y seleccionado el suavizamiento que se considere más apropiado.

5,5 Cálculo de las restantes funciones de la tabla completa

Una vez obtenidas las probabilidades de muerte para todas las edades, las restantes funciones de la tabla se calculan fijando como raíz de la tabla $l_0 = 100\ 000$ y utilizando las relaciones siguientes:

a) Número de sobrevivientes de edad $x+1$:

$$(139) \quad l_{x+1} = l_x - l_x q_x$$

Es conveniente hacer el cálculo de todos los valores de l_x sin redondear los decimales y escribirlos redondeados al entero más próximo

b) Números de muertes entre $x, x+1$:

$$(3) \quad d_x = l_x - l_{x+1}$$

Las defunciones se obtienen por diferencia de los valores redondeados de l_x .

c) Tiempo vivido por la generación entre las edades $x, x+1$:

i) Para $x = 0$

$$(140) \quad L_0 = f_0 l_0 + (1-f_0) l_1 ; \quad f_0 = \text{factor de separación.}$$

Si se consideran subdivisiones dentro del primer año de vida puede utilizarse directamente la fórmula de los trapecios. Para las subdivisiones consideradas (menores de un día, 1-7, 7-28 y 28-365 días) se tiene:

$$(141) \quad {}_tL_x = \frac{t}{2} (l_x + l_{x+t})$$

Edad	t
0	1/365
1	6/365
7	21/365
28	337/365

ii) Para $x = 1, 2, \dots, 84$

$$(16) \quad L_x = \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})$$

iii) Para el grupo abierto final

$$(31) \quad L_{85+} = 3.584 l_{85} + 0.0000688 l_{85}^2$$

d) Tiempo vivido por la generación entre las edades x , w :

$$(40) \quad T_x = \sum_x^w L_x$$

e) Esperanza de vida a la edad x :

$$(41) \quad e_x^o = \frac{T_x}{l_x}$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

(Ver respuestas en pág. 153)

1. A partir de los nacimientos y las defunciones de la población masculina de Costa Rica, dados a continuación, calcular para los grupos de edades exactas 0-1 día, 1-7 días, 7-28 días, 28-365 días y 1-2 años, las siguientes funciones, referidas al período 1972-1974:

- a) Los denominadores t^E_x
 b) Las defunciones $t^d_x = l_0 t^D_x / t^E_x$
 c) Los sobrevivientes l_x y las probabilidades de muerte t^q_x .

Años	Nacimientos	Grupos de edades	Defunciones 1972-1974
1970	29 543	0-1 día	760
1971	28 856	1-7 días	777
1972	29 458	7-28 días	649
1973	27 365	28-365 días	2 546
1974	29 099	1-2 años	539

2. Indicar cuál es la forma de los denominadores t^E_x , necesarios para el cálculo de las defunciones t^d_x , correspondientes a las siguientes subdivisiones del primer año de vida: 0-1 mes, 1-3 meses, 3-6 meses y 6-12 meses.
3. En base a los datos del ejercicio 1, calcular las defunciones

$$(142) \quad {}_1d_0 = l_0 {}_1D_0 / {}_1E_0$$

y la probabilidad de muerte

$$q_0 = {}_1d_0 / l_0$$

considerando que no se dispone de información de muertes por subdivisiones dentro del primer año de vida. Comparar los resultados con los obtenidos en el ejercicio 1 que toma en cuenta las defunciones en forma más detallada.

4. Calcular las probabilidades de muerte para las edades 2, 3 y 4, empleando la relación (117) de Greville, a partir de la siguiente información sobre población y defunciones, correspondiente a la población masculina de Costa Rica de 1972-1974.

Edad	Población a mediados de 1973	Defunciones de 1972 - 1974
1	27 130	
2	26 866	251
3	26 925	141
4	27 076	103
5	28 532	

5. Dada la información sobre población y defunciones presentada en el cuadro siguiente, calcular:
- El "valor ficticio" de la población y defunciones del grupo 0-4, el cual es utilizado por Greville para interpolar las edades 5-14. Comparar en cada caso el valor obtenido con el correspondiente a la población real.
 - Obtener por interpolación, mediante los multiplicadores de Beers presentados en la pág.132 la población y las defunciones por edades simples de 5 a 19 años.
 - Calcular las probabilidades de muerte de 5 a 19 años, empleando la relación

$$(118) \quad q_x = \frac{D_x}{3 N_x + 1/2 D_x}$$

Grupos de edades	Población a mediados de 1973	Defunciones de 1972-1974
0 - 1	54 239	5 271
2 - 4	80 868	495
5 - 9	144 840	360
10 - 14	135 747	288
15 - 19	111 958	438
20 - 24	86 243	513
25 - 29	64 369	393

6. Suavizar los siguientes valores de u''_x , mediante la fórmula de Whittaker-Henderson, Tipo B, utilizando $h = 300$ y las ponderaciones W_x indicadas a continuación:

x	u''_x	W_x	$W_x \cdot u''_x$
1	40	4	160
2	43	7	301
3	45	10	450
4	56	15	840
5	59	20	1 180

Nota: Aunque no tiene sentido práctico suavizar solamente cinco valores, el ejercicio se incluye para facilitar la representación matricial e ilustrar el procedimiento de resolución.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

R.1 a) Cálculo de los denominadores ${}_tE_x$

Reemplazando el valor de los nacimientos en las relaciones dadas en el cuadro 5 (pág.127), teniendo en cuenta que se refieren ahora al período 1972-1974 (es decir que hay un desplazamiento de 3 años), se tiene para el grupo de 0-1 día:

$$\begin{aligned} {}_1d_0^E &= \frac{1}{730} (B_{71} + 730 B_{72} + 730 B_{73} + 729 B_{74}) \\ &= \frac{1}{730} \left[28856 + 730 (29\ 458) + 730 (27\ 365) + 729 (29\ 099) \right] \\ &= \underline{85\ 922} \end{aligned}$$

Los restantes valores de ${}_tE_x$ se presentan directamente en el cuadro 9.

b) Cálculo de las defunciones ${}_td_x$

Aplicando la fórmula:

$$(110) \quad {}_td_x = l_0 \frac{{}_tD_x}{{}_tE_x}$$

se tiene:

$${}_1d_0^d = 100\ 000 (760) / 85\ 922 = 884.52$$

Los restantes valores se presentan en la columna (3) del cuadro 9.

c) Cálculo de los valores de l_{x+t} y ${}_tq_x$

Para dicho cálculo se emplean las relaciones

$$(112) \quad l_{x+t} = l_x - {}_td_x$$

$$(113) \quad {}_tq_x = {}_td_x / l_x$$

Los resultados se incluyen en las columnas (4) y (5) del cuadro 9.

Cuadro 9

CALCULO DE LAS DEFUNCIONES (t^d_x), LOS SOBREVIVIENTES (l_x) Y LAS
 PROBABILIDADES DE MUERTE (t^q_x) DE MENORES DE DOS AÑOS.
 POBLACION MASCULINA. COSTA RICA, 1972-1974

Grupos de edades	t^E_x	t^D_x	t^d_x	l_x	t^q_x
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0-1 día...	85 922	760	884.52	100 000	0.008845
1-7 días..	85 919	777	904.34	99 115	0.009124
7-28 días.	85 910	649	755.44	98 211	0.007692
28-365 días	85 791	2 546	2 967.68	97 456	0.030451
1-2 años..	86 768	539	621.20	94 488	0.006574

R.2

Grupos de edades	Denominadores t^E_x
0 - 1 mes	$\frac{1}{24} (B_{71} + 24 B_{72} + 24 B_{73} + 23 B_{74})$
1 - 3 meses	$\frac{1}{24} (4 B_{71} + 24 B_{72} + 24 B_{73} + 20 B_{74})$
3 - 6 meses	$\frac{1}{24} (9 B_{71} + 24 B_{72} + 24 B_{73} + 15 B_{74})$
6 - 12 meses	$\frac{1}{24} (18 B_{71} + 24 B_{72} + 24 B_{73} + 6 B_{74})$

R.3 De acuerdo con los datos básicos,

$${}_1D_0 = 4\,732$$

$$\begin{aligned} {}_1E_0 &= \frac{1}{2} (B_{71} + 2 B_{72} + 2 B_{73} + B_{74}) \\ &= \frac{1}{2} \left[28\,856 + 2 (29\,458) + 2 (27\,365) + 29\,099 \right] = 85\,800 \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores de ${}_1D_0$ y ${}_1E_0$ en (142) (pág.150), se tiene:

$${}_1d_0 = 100\,000 (4\,732) / 85\,800 = \underline{5\,515}$$

A su vez, la tasa de mortalidad infantil resulta:

$$q_0 = \frac{{}_1d_0}{\ell_0} = 0.05515$$

A continuación se comparan los valores de ${}_1d_0$ y ${}_1q_0$ con los obtenidos en el ejercicio 1:

	${}_1d_0$	${}_1q_0$
Sin considerar subdivisiones dentro del año (Ej. 3)	5 555	0.05515
Considerando subdivisiones (Ej. 1)	5 512	0.05512

Vale decir que, entre uno y otro procedimiento, se obtiene una diferencia muy pequeña, del orden del 1/2 por mil.

R.4 Empleando la relación de Greville,

$$q_x = \frac{D_x}{N_{x-1} + N_x + N_{x+1} + \frac{1}{2} D_x}$$

Se obtiene:

$$q_2 = 251/81\,046.5 = 0.003097$$

$$q_3 = 141/80\,937.5 = 0.001742$$

$$q_4 = 103/82\,584.5 = 0.001247$$

R.5 a) Utilizando la fórmula (120):

$$(120) \quad W_0 = 2.45580 V - 0.59332 W_5 - 0.01965 W_{10} + \\ + 0.22004 W_{15} - 0.08055 W_{20}$$

y reemplazando los valores numéricos de V y W_x se obtiene, para la población:

$$W_0 = N_{0-4}^F = 127\ 680$$

y para las defunciones:

$$W_0 = D_{0-4}^F = 1\ 051$$

Los valores reales de la población y las defunciones del grupo 0-4 son:

$$N_{0-4}^R = 135\ 107; \quad D_{0-4}^R = 5\ 766$$

lo cual pone de manifiesto que el valor ficticio es sustancialmente diferente al real, especialmente en el caso de las defunciones.

b) Utilizando los multiplicadores de Beers presentados en el cuadro 6, y los valores pivotaes quinquenales de 0-29 años se obtuvo la población y las defunciones de 5 a 19 años, por edades simples, indicadas a continuación. A su vez, mediante la relación:

$$(118) \quad q_x = \frac{D_x}{3 N_x + \frac{1}{2} D_x}$$

se calcularon las probabilidades de muerte presentadas en la última columna.

Edades	N_x	D_x	q_x
5	28 610	102	0.001188
6	29 006	82	0.000942
7	29 175	67	0.000765
8	29 137	57	0.000652
9	28 912	52	0.000599
10	28 517	51	0.000596
11	27 965	53	0.000632
12	27 273	56	0.000684
13	26 456	61	0.000768
14	25 536	67	0.000874
15	24 521	74	0.001005
16	23 450	82	0.001165
17	22 372	89	0.001325
18	21 321	95	0.001484
19	20 294	98	0.001608

R.6 La relación básica para encontrar los valores suavizados u_x mediante la fórmula de Whittaker-Henderson, Tipo B, es la siguiente:

$$(131) \quad (W + kK^T K) u = Wu''$$

o bien:

$$(132) \quad Au = Wu''$$

Con los valores numéricos considerados, las matrices y vectores W , K , $K^T K$, Wu'' y A toman la siguiente forma (siendo $n = 5$, $z = 2$; $k = 300$):

$$W = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^T K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad Wu'' = \begin{bmatrix} 160 \\ 301 \\ 450 \\ 840 \\ 1180 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 304 & -600 & 300 & 0 & 0 \\ -600 & 1507 & -1200 & 300 & 0 \\ 300 & -1200 & 1810 & -1200 & 300 \\ 0 & 300 & -1200 & 1515 & -600 \\ 0 & 0 & 300 & -600 & 320 \end{bmatrix}$$

A su vez, se tiene que:

$$(133) \quad Au = L L^T u = Wu''$$

Los elementos l_{ij} de la matriz L se calculan mediante las siguientes relaciones, que corresponden al método de Choleski:

$$(136) \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$(137) \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} a_{ij} - \sum_{h=1}^{j-1} l_{ih} l_{jh} \quad \begin{array}{l} (i = 2, 3, \dots, n) \\ (j = 1, 2, \dots, i-1) \end{array}$$

$$(138) \quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{h=1}^{i-1} l_{ih}^2} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Luego:

$$l_{11} = \sqrt{304} = 17.435596$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-600}{17.435596} = -34.412360$$

y así sucesivamente. La matriz L resulta:

$$L = \begin{bmatrix} 17.435596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -34.412360 & 17.966343 & 0 & 0 & 0 \\ 17.206180 & -33.835196 & 19.212675 & 0 & 0 \\ 0 & 16.697889 & -33.052329 & 11.988497 & 0 \\ 0 & 0 & 15.614692 & -6.998214 & 5.215975 \end{bmatrix}$$

(Si se multiplica la matriz L por su traspuesta L^T se verifica que $L \cdot L^T = A$)

Por otra parte, ya se ha visto que:

$$(133) \quad L L^T u = W u''$$

$$(134) \quad L u' = W u''$$

$$(135) \quad L^T u = u'$$

De este modo, la ecuación (134) permite obtener los valores u' . Reemplazando los valores numéricos se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} 17.435596 u_1' &= 160 \\ -34.412360 u_1' + 17.966343 u_2' &= 301 \\ 17.206180 u_1' + 33.835196 u_2' + 19.212675 u_3' &= 450 \\ 16.697889 u_2' + 33.052329 u_3' + 11.988497 u_4' &= 840 \\ 15.614692 u_3' + 6.998214 u_4' + 5.215975 u_5' &= 1180 \end{aligned}$$

despejando de arriba hacia abajo, se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} u_1' &= 9.176629 & ; & & u_4' &= 230.852536 \\ u_2' &= 34.330274 & ; & & u_5' &= 309.455205 \\ u_3' &= 75.662385 \end{aligned}$$

Una vez calculados los valores de u'_x , se reemplazan en la relación (135):

$$\begin{aligned} 17.435596 u_1 - 34.412360 u_2 + 17.206180 u_3 &= 9.176629 \\ 17.966343 u_2 - 33.835196 u_3 + 16.697889 u_4 &= 34.330274 \\ 19.212675 u_2 - 33.052329 u_4 + 15.614692 u_5 &= 75.662385 \\ 11.988487 u_4 - 6.998214 u_5 &= 230.852536 \\ 5.215975 u_5 &= 309.455205 \end{aligned}$$

Despejando por último, los valores de u_x , esta vez de abajo hacia arriba, se llega a los siguientes valores suavizados u_x :

$$\begin{aligned} u_5 &= 59.33 \\ u_4 &= 53.89 \\ u_3 &= 48.43 \\ u_2 &= 43.03 \\ u_1 &= 37.66 \end{aligned}$$

Capítulo 6.

APLICACIONES DE LA TABLA DE MORTALIDAD EN ESTUDIOS DE POBLACION

Dado que la medición de la mortalidad está involucrada en la mayoría de los estudios demográficos, la tabla de vida puede ser utilizada en una gran variedad de problemas, entre los cuales pueden mencionarse: la estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad; los análisis sobre mortalidad por causas de muerte; los estudios de fecundidad, reproductividad, estructura y crecimiento de la población; las estimaciones y proyecciones demográficas, y el análisis de diversas características sociales y económicas.

En los puntos siguientes se presentan algunas aplicaciones de la tabla de vida a los temas indicados, mientras que al final del capítulo se incluyen varios ejercicios de repaso general de la materia, con las respuestas correspondientes.

6.1 Estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad

La aplicación más frecuente de la tabla de vida, consiste en medir el nivel y la tendencia de la mortalidad de un país a través del tiempo, o estableciendo comparaciones entre los niveles de diferentes países o regiones. Para este propósito suele utilizarse tanto la esperanza de vida, como la proporción de sobrevivientes y las tasas de mortalidad a sucesivas edades.

La *esperanza de vida al nacer* (e_0) es el mejor indicador del nivel general de la mortalidad, ya que es una medida única y no está afectada por la composición por edades de la población, lo cual permite hacer comparaciones directas entre diferentes países, o para un mismo país a través del tiempo. Algunas veces las estimaciones de mortalidad suelen resumirse también en términos de la esperanza de vida a la edad 1 o 5, para aislar el fuerte peso que tiene la mortalidad infantil y los errores de diverso tipo que suele afectar a la información básica en las primeras edades. También se utiliza la esperanza de vida a los 15 años, que corresponde aproximadamente al comienzo de la vida activa y reproductiva, y la esperanza de vida a los 65 años, que mide la mortalidad en el período de retiro, en el cual se concentran la mayoría de las muertes en los países de mortalidad moderada y baja.

Otras medidas resúmenes de interés, asociadas con la tabla de vida, son: la *probabilidad de sobrevivencia desde el nacimiento a la edad 65* (${}_{65}p_0$) y la *edad mediana de las defunciones*, que es la edad a la cual la generación inicial l_0 se reduce al 50 por ciento. Para medir la mortalidad en tramos de vida específicos, se utilizan la *esperanza de vida temporaria* (${}_n e_x$) ^{49/} y las *probabilidades de muerte* (${}_n q_x$).

^{49/} Ver definición en página 113.

En el cuadro 10 se utilizan algunos de estos indicadores, para evaluar la tendencia de la mortalidad de Costa Rica entre 1950 y 1978. En términos de esperanza de vida al nacer se observa en este período una notable ganancia de 16.45 años, lo cual representa un aumento medio anual de 0.59 por año. Esta mejora en el nivel de la mortalidad del país se manifiesta a través de todos los indicadores considerados en el cuadro.

Cuadro 10

EVOLUCION DE LA MORTALIDAD DE COSTA RICA ENTRE 1950 Y 1978, SEGUN VARIOS INDICADORES DE LA TABLA DE VIDA

Indicador	Tablas de vida de los años				Ganancia entre 1950-1978
	1950	1963	1973	1978	
Esperanza de vida al nacer.....	55.72	63.34	68.32	72.17	16.45
Esperanza de vida a la edad 1...	60.66	67.84	70.86	73.17	12.51
Esperanza de vida a la edad 15..	51.64	56.72	58.20	59.86	8.22
Esperanza de vida a la edad 65..	12.33	13.48	14.69	15.54	3.21
Probabilidad de supervivencia - desde el nacimiento a la edad 65.	0.515	0.649	0.718	0.773	0.258
Edad mediana de las defunciones de la cohorte.....	65.84	72.15	74.75	77.97	12.13

Fuentes: Dirección General de Estadística y Censos, Tablas de vida de Costa Rica, 1949-1951, Ministerio de Economía y Hacienda, Costa Rica, 1957.
 Romero, M., Gómez, M., Alfaro, J., y Ruíz, J., Tablas de vida de Costa Rica, 1962-1964, Instituto Centroamericano de Estadística, San José, Costa Rica.
 Dirección General de Estadística y Censos y Centro Latinoamericano de Demografía, Tablas de vida de Costa Rica, 1972-1974. Costa Rica, 1976.
 Rodríguez, V., Ortega, A., y Fernández, R., Costa Rica: La mortalidad y la fecundidad en el período 1950-1979, no publicado.

6.2 Análisis de la mortalidad por causas de muerte

Otra aplicación usual de la tabla es el estudio de la mortalidad por causas de muerte. Mediante la técnica de la tabla de vida se puede determinar cuántos años de vida pierde una población debido al efecto de una o varias causas de muerte, o recíprocamente, cuántos años se ganarían en la esperanza de vida si algunas de estas causas, o varias causas combinadas, fueran eliminadas o disminuidas. Por medio de tales tablas se pueden calcular también otras medidas, como la probabilidad eventual de morir por una causa de muerte determinada. Los primeros análisis sobre este tema fueron efectuados por Dublin, Lotka y Spiegelman ^{50/}, con datos de mortalidad por causas correspondientes a la población de Estados Unidos de 1939-1941.

Siguiendo este enfoque, se han efectuado varias aplicaciones con datos de mortalidad por causas de los países de América Latina. Cerisola ^{51/}, en un trabajo publicado en 1968, utilizando datos de mortalidad por causas de la población masculina de Argentina de 1960, calculó la esperanza de vida que resultaría eliminando diversas causas de muerte. En este trabajo puede verse también una explicación detallada de esta metodología. Algunos resultados se presentan en el cuadro 11.

De las cuatro causas de muerte consideradas (enfermedades infecciosas, cáncer, cardiovasculares y accidentes), la erradicación de muertes por enfermedades cardiovasculares es la que produciría un impacto mayor sobre la esperanza de vida al nacer, que pasaría de 63.2 a 66.4 años, con una ganancia de 3.2 años. El efecto que tiene la eliminación de una determinada causa de muerte sobre la esperanza de vida a distintas edades,

^{50/} Dublin, L., Lotka, A., y Spiegelman, H., Length of Life. A Study of the Life Table, New York, The Ronald Press Company, 1949.

^{51/} Cerisola, M.J.E., República Argentina: Análisis de la mortalidad por causas, 1960. CELADE, Serie C. No. 109, Santiago, Chile, 1968.

depende de la distribución por edades de las muertes; por ejemplo, la eliminación de la mortalidad por causas infecciosas, ocasiona una ganancia de 1.9 años en la esperanza de vida al nacer, pero tiene un impacto mucho menor sobre la esperanza de vida a los 15 y 65 años, por tratarse de enfermedades propias de las primeras edades.

Cuadro 11

EFECTO SOBRE LA ESPERANZA DE VIDA POR LA ELIMINACION DE DETERMINADAS CAUSAS DE MUERTE. POBLACION MASCULINA DE ARGENTINA, 1960

Causa de muerte	e_0^o	e_{15}^o	e_{65}^o	Ganancia a la edad x		
				0	15	65
Total del país.....	<u>63.2</u>	<u>53.8</u>	<u>12.7</u>			
Eliminando infecciosas.....	65.1	54.6	13.0	1.9	0.8	0.3
Eliminando cáncer.....	66.2	57.0	14.6	3.0	3.2	1.9
Eliminando cardiovasculares.	66.4	57.1	14.7	3.2	3.3	2.0
Eliminando accidentes.....	65.2	55.6	12.9	2.0	1.8	0.2

Fuente: Cerisola, E., República Argentina: Análisis de la mortalidad por causas, 1960. CELADE, Serie C. No. 109, Santiago, Chile, 1968

Recientemente, Preston, Keyfits y Schoen ^{52/}, han calculado tablas de mortalidad por causas de muerte, para unos 50 países del mundo por sexo y diferentes fechas. En cada caso se han calculado cuatro tablas: una con

^{52/} Preston, S., Keyfitz, N., y Schoen, R., Causes of Death. Life Tables for National Populations, Seminar Press, New York, 1972.

las tasas de mortalidad por edad de las 12 causas principales de muerte , otra con la tabla de vida para todas las causas combinadas, una tercera con las probabilidades de morir según cada una de esas 12 causas, y una cuarta con los valores de la función l_x que resultaría al eliminar cada causa particular de muerte y el número de años que agregaría a la esperanza de vida. Dichas tablas proporcionan información valiosa para hacer análisis más documentados sobre este tema.

6.3 Estudios de fecundidad, reproductividad y crecimiento de la población

Las diversas funciones de la tabla de vida, así como su técnica de análisis, son de frecuente aplicación en estudios de fecundidad, reproductividad y crecimiento de la población.

6.3.1 Como ejemplo de utilización de la tabla en *estudios de fecundidad*, puede mencionarse el procedimiento de análisis del intervalo intergenésico, que permite estudiar el proceso de construcción de la familia, mediante una serie de etapas, donde la mujer pasa sucesivamente del matrimonio al primer hijo, del primero al segundo, y así sucesivamente, hasta que alcanza el tamaño de familia completa. Mediante la técnica de la tabla de vida se puede determinar la probabilidad que tienen las mujeres de cada paridad, de tener un hijo adicional, así como el tiempo o intervalo medio entre uno y otro nacimiento. Generando tablas separadas para varios subgrupos de una población, definidas en término de la edad, cohorte, período de tiempo, lugar de residencia, educación, estatus ocupacional y otras variables, se pueden hacer diversos estudios diferenciales de fecundidad. Rodríguez y Hobcraft ^{53/}, han realizado un valioso estudio piloto

^{53/} Rodríguez, G., y Hobcraft, J., Illustrative Analysis: Life Table Analysis of Birth Intervals in Colombia, WFS, Scientific Reports, International Statistical Institute, London, 1980.

en este campo, en el marco de la Encuesta Mundial de Fecundidad, para el análisis del intervalo intergenésico mediante la tabla de vida. El estudio se refiere a Colombia, y sus resultados han mostrado que este tipo de análisis es más sensible que los métodos convencionales para identificar el comienzo de la declinación de la fecundidad en los diversos sectores de la población.

6.3.2 Por otra parte, combinando la tabla de vida con las tasas de fecundidad por edad, se obtienen diversos indicadores fundamentales para medir *la reproductividad y el crecimiento* de una población. Entre estos indicadores cabe destacar la tasa neta de reproducción, que representa la relación entre los nacimientos totales de dos generaciones sucesivas y la tasa intrínseca de crecimiento, la cual mide la capacidad de crecimiento de una población sin estar afectada por la distribución por edad arbitraria.

En el cuadro 12 se presenta el cálculo de *la tasa neta de reproducción* (TNR), con los datos de la población de Honduras del período 1975 - 1980.

Se obtiene en este caso una $TNR = 2.838$, lo cual significa que, de acuerdo con los niveles de fecundidad de Honduras de 1975-1980, cada 1000 mujeres son reemplazadas por 2 838 en la generación siguiente. Una $TNR = 1$, significa que la población tiene un nivel combinado de mortalidad y fecundidad tal, que le permite mantener un número constante de personas, mientras que los valores mayores y menores que uno corresponden, respectivamente, a poblaciones crecientes y decrecientes.

Cuadro 12

TASA NETA DE REPRODUCCION CALCULADA A PARTIR DE LA POBLACION ESTACIONARIA FEMENINA Y LAS TASAS DE FECUNDIDAD FEMENINAS DE LA POBLACION DE HONDURAS DEL PERIODO 1975-1980

Grupos de edades exactas $x, x+5$	Población estacionaria femenina $\frac{a}{5}L_x$	Tasas de fecundidad femeninas $\frac{a}{F(x, 5)}$	Producto $(\frac{L_x}{5}) (F(x, 5))$
15-20	4.23886	0.0729	0.3090
20-25	4.18816	0.1525	0.6387
25-30	4.12056	0.1596	0.6576
30-35	4.03626	0.1415	0.5711
35-40	3.93922	0.1045	0.4116
40-45	3.82916	0.0561	0.2148
45-50	3.69771	0.0095	0.0351
Tasa neta de reproducción	$\sum \frac{L_x}{5} \cdot F(x, 5)$	2.838

a/ Secretaría Técnica del Consejo Superior de Planificación Económica y Centro Latinoamericano de Demografía, Honduras: Proyecciones de población, Volumen I, San José, Costa Rica, abril de 1981.

6.4 Fijación de metas y evaluación de programas de salud

Entre los diferentes tipos de análisis que pueden hacerse con la tabla de vida, cabe mencionar la elaboración de metas y la evaluación de programas de salud.

6.4.1 En el "Plan Decenal de Salud para las Américas", elaborado por la OPS en 1973 ^{54/}, se establecieron diversas *metas* para ser cumplidas en los diez años subsiguientes, por cada uno de los países de la región. Entre estas metas se citaba:

- a) Reducir la mortalidad de menores de un año en un 40 por ciento, con rango de 30 a 50 por ciento.
- b) Reducir la mortalidad de los niños de 1 a 4 años en un 60 por ciento, con rango de 50 a 70 por ciento.
- c) Reducir la mortalidad por sarampión, tos ferina y tétanos a 1.0, 1.0 y 0.5 por cien mil habitantes, respectivamente.
- d) Reducir la mortalidad materna en un 40 por ciento, con rango de 30 a 50 por ciento.

Sobre esta base, y a fin de fijar las metas del Plan Decenal de Salud de Costa Rica, se hizo un análisis ^{55/}, por medio de las tablas de vida y las tablas modelo, que permitió determinar las posibilidades de alcanzar estas metas, el impacto que tendría cada una de ellas sobre el nivel general de la mortalidad, y la fijación de una meta única, en términos de un indicador global, que es la esperanza de vida al nacer.

Combinando los diferentes porcentajes de reducción, fijados en el plan decenal, dentro de los rangos establecidos, se obtuvo diversas tablas de vida, con ayuda de un computador. Cada una de estas tablas constituía una meta posible, al cabo del decenio, entre las cuales se eligió posteriormente el plan considerado más plausible o apropiado.

^{54/} Organización Panamericana de Salud, Plan Decenal de Salud para las Américas. Oficina Sanitaria Panamericana, Documento Oficial No. 118, Washington, enero de 1973.

^{55/} Ortega, A. y Rincón, M., Algunas estimaciones demográficas sobre la mortalidad para la formulación de la metas del plan de salud de Costa Rica, CELADE, San José, Costa Rica, 1974.

6.4.2 Otra aplicación de la tabla de vida, estrechamente vinculada con la anterior, es la *evaluación* de un programa de salud. A título de ejemplo se comenta aquí la evaluación del programa de salud rural efectuado en Costa Rica en la década de 1970. Para este propósito se clasificaron los 80 cantones del país, según el porcentaje de cobertura y según el número de años de servicio de dicho programa. Para cada grupo de municipios así determinados se calcularon las tasas de mortalidad por edad y la tabla de vida correspondiente, para el período inicial 1970-1972, cuando se puso en funcionamiento el programa, y para el período 1974-1976, que eran los últimos años para los cuales se disponía de información cuando se hizo su evaluación. Los resultados en términos de esperanza de vida al nacer se presenta en el cuadro 13.

En la parte (a) de dicho cuadro puede observarse una clara asociación entre el porcentaje de cobertura y la ganancia de vida alcanzada, siendo por supuesto mayor la ganancia a medida que la proporción de personas incluidas dentro del programa en cada cantón es mayor.

A su vez, en la parte (b), donde se han agrupado los cantones según los años de servicio del programa, se encuentran también una relación positiva entre años de servicio y ganancia en la esperanza de vida, con excepción del grupo correspondiente a dos años de servicio, donde se alcanza una reducción menor que lo esperado, debido principalmente a que este grupo está integrado por cantones que tienen en promedio un porcentaje de cobertura más bajo que los restantes ^{56/}.

^{56/} El porcentaje de cobertura de los grupos es el siguiente: Menos de un año de servicio 66 por ciento, un año de servicio 59 por ciento, dos años de servicio 49 por ciento y tres años de servicio 83 por ciento.

Cuadro 13

COSTA RICA: EVALUACION DEL PROGRAMA DE SALUD RURAL. GANANCIA EN LA ESPERANZA DE VIDA AL NACER EN LOS DIFERENTES CANTONES DEL PAIS, ENTRE 1970-1972 Y 1974-1976, SEGUN GRADO DE COBERTURA DE LOS PROGRAMAS DE SALUD Y TIEMPO DE SERVICIO DEL PROGRAMA

Cantones según grado de cobertura y tiempo de servicio	Esperanza de vida al nacer		Ganancia (en años)
	1970-1972	1974-1976	

(a) Según grado de cobertura del programa

Sin cobertura.....	68.76	71.16	2.40
Menos de 25% de cobertura.....	68.73	71.13	2.40
25 a 50% de cobertura.....	63.94	67.44	3.50
50 a 75% de cobertura.....	67.26	71.30	4.04
Más de 75% de cobertura.....	67.89	72.96	5.07

(b) Según el tiempo de servicio del programa

Sin cobertura.....	68.76	71.16	2.40
Menos de 1 año de servicio....	64.36	68.57	4.21
Con 1 año de servicio.....	68.47	72.95	4.48
Con 2 años de servicio.....	66.67	70.08	3.41
Con 3 años de servicio.....	67.92	72.98	5.06

Fuente: Ortega, A., Evaluación del programa de salud rural de Costa Rica entre 1971 y 1975. No publicado.

En resumen los resultados del cuadro 13 ponen de manifiesto que las ganancias en la esperanza de vida están asociadas tanto al grado de cobertura de los cantones como a los años de servicio de funcionamiento del programa. En especial cuando el grado de cobertura de los cantones resulta superior al 50 por ciento, o bien cuando el programa tiene más de tres años de servicio, se encontraron los aumentos más sustanciales en la esperanza de vida al nacer.

6.5 Estudios sobre estructura por edad de la población

La tabla de vida, interpretada como una población estacionaria, permite realizar diversos análisis y estimaciones, entre los cuales pueden mencionarse las estimaciones y proyecciones de población (futura y retrospectiva) y los estudios sobre la estructura por edades de la población. La primera de estas aplicaciones es muy frecuente en demografía, de modo que se hará referencia más bien aquí al análisis de la distribución por edades.

Una población estacionaria se obtiene manteniendo un número anual constante de nacimientos, bajo el régimen fijo de la tabla de mortalidad por edades. En tal modelo, la estructura por edades es proporcional a la función ${}_nL_x$, la tasa de crecimiento es igual a cero, mientras que las tasas de natalidad y mortalidad son iguales a la recíproca de la esperanza de vida al nacer.

En los países desarrollados la tasa de crecimiento de la población es muy cercana a cero, por lo cual las características reales de la población, son muy similares a las del modelo de población estacionaria correspondiente a la tabla de mortalidad de cada país. Así por ejemplo, la tasa bruta de mortalidad resulta aproximadamente,

$$(56) \quad d = \frac{1}{e_o} = \frac{1}{75} = 0.013 \text{ (0 13 por mil)}$$

Esta característica de las poblaciones reales de acercarse al modelo de población estacionaria, deberá verificarse también, en el futuro, en los actuales países en desarrollo, ya que no puede mantenerse en forma permanente una tasa de crecimiento positiva, con la cuál la población crecería indefinidamente.

En el cuadro 14 y gráfico 37 se presenta la estructura por grandes grupos de edades de la población de Costa Rica, según el censo de 1973 y la población estacionaria correspondiente a la tabla de vida de 1972-1974. Debido a que el país tiene una tasa de crecimiento positiva (del orden del 2 al 2.5 por ciento), su distribución es más joven que la correspondiente a la población estacionaria. De acuerdo con estos valores, a medida que la tasa de crecimiento de la población de Costa Rica se aproxime hacia cero, la proporción de personas de 0 a 14 años bajará en forma notoria, a menos de la mitad del valor actual, aumentará ligeramente la proporción de personas de 15 a 49 años (especialmente por el aumento del grupo 35 a 49), se duplicará la proporción de 50 a 64 (constituida por personas próximas al retiro), y aumentará más de cuatro veces la proporción de población pasiva de 65 años y más).

Si la comparación anterior se realiza con un país cuya tasa de crecimiento se haya mantenido por un cierto tiempo cercana a cero, como es el caso de los países industrializados, entonces la distribución por edades de la población real sería muy cercana a la distribución de la población estacionaria. Tal comportamiento puede verse en el gráfico 38, que corresponde a la población de Inglaterra y Gales.

Cuadro 14
DISTRIBUCION POR EDADES DE LA POBLACION DE COSTA RICA,
SEGUN EL CENSO DE 1973 Y LA POBLACION ESTACIONARIA
DE 1972-1974

Grupos de edades	Distribución por edades (por cien)		Diferencia real menos estacionaria
	Censo de 1973	Población estacionaria 1972-1974	
0-14	44.05	20.61	23.44
15-49	45.32	46.33	- 1.01
50-64	7.10	17.57	-10.47
65 y más	3.53	15.49	-11.96
TOTAL	100.00	100.00	100.00

Por otra parte, la estructura por edades de una población estacionaria se puede combinar con distintas tasas de crecimiento, a fin de analizar en forma teórica el comportamiento de la distribución por edades de una población en diferentes situaciones demográficas ^{57,58/}.

^{57/} Dublin, L., Lotka, A., y Spiegelman, H., Length of Life, op. cit., capítulo 12.

^{58/} Naciones Unidas, The Aging of Populations and its Economic and Social Implications, ST/SDA/Serie A/26.

Gráfico 37

DISTRIBUCION POR EDAD DE LA POBLACION DE COSTA RICA, SEGUN
EL CENSO DE 1973 Y LA POBLACION ESTACIONARIA DE 1972-1974

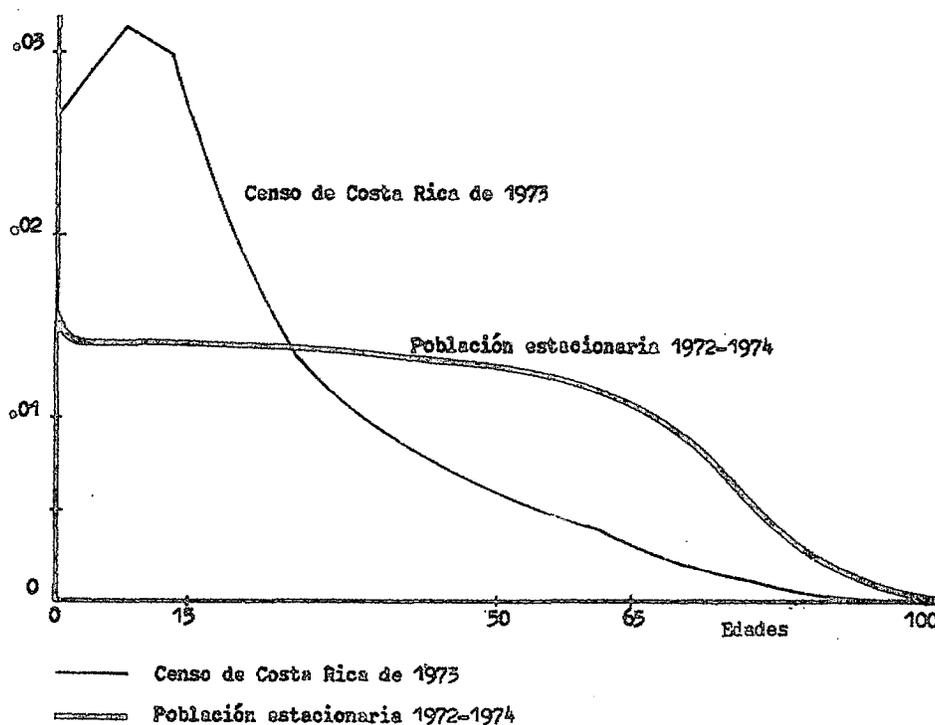
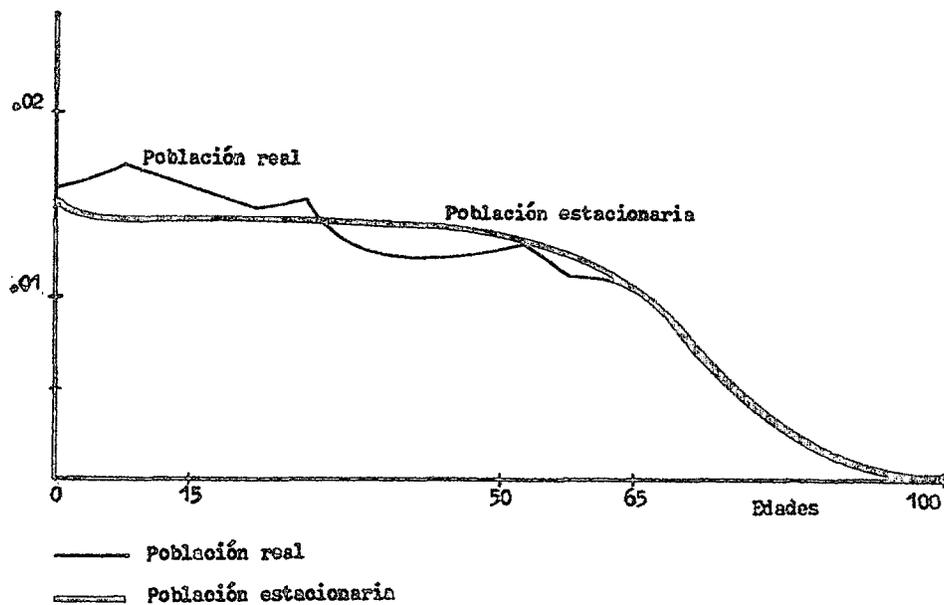


Gráfico 38

DISTRIBUCION POR EDAD DE LA POBLACION DE INGLATERRA Y GALES DE 1971
Y LA POBLACION ESTACIONARIA DE 1970-1972



6.6 Análisis mediante tablas de decremento múltiple

Las tablas de decremento múltiple son aquéllas que tienen dos o más causas de salida. Utilizan la misma técnica de la tabla de vida, empleándose frecuentemente para analizar diversas características socioeconómicas de la población.

Entre las principales tablas de decremento múltiple utilizadas en demografía pueden mencionarse las *tablas de vida activa*, las cuales se obtienen combinando la tabla de mortalidad con las tasas de participación en la actividad económica. Tales tablas permiten calcular el número medio de años de vida activa que tiene una persona de edad x cualquiera, los años de vida inactivos, los ingresos y los retiros de la actividad económica y otros indicadores útiles para estudiar la fuerza de trabajo y para establecer las implicaciones económicas de los cambios en las tasas de actividad y en la estructura por edad de la población 59,60/.

Otras tablas de decremento múltiple son las *tablas de vida escolar*, que se obtienen combinando las tablas de mortalidad corrientes con las tasas de asistencia escolar. Este modelo sirve para describir numéricamente, a través de las sucesivas edades, el proceso de entrada y salida que experimenta la población potencialmente apta para asistir a establecimientos educacionales. Asimismo, permite analizar el patrón de escolaridad en la fecha de estudio y establecer hipótesis acerca de su evolución futura 61,62/. Se han elaborado también tablas de nupcialidad, de morbilidad, de eficacia y uso de anticonceptivos, etc.

Para un análisis más detallado de algunas aplicaciones de la tabla de mortalidad en estudios de población pueden consultarse las referencias (45) a (58) indicadas en la Bibliografía al final.

59/ Naciones Unidas, Método de análisis de los datos censales relativos a las actividades económicas de la población, ST/SOA/Serie A/43, 1969, Capítulo I.

60/ Rincón, M., Tablas de vida activa, CELADE, Serie B. No. 1008, San José, Costa Rica, 1977.

61/ Shryock, H., y Siegel, J., "The Methods...", op.cit., Capítulo 15.

62/ Gómez, Lilian, Paraguay: Tablas de vida escolar, 1950 y 1962. Proyección de la asistencia escolar 1965-1980. Trabajo final de investigación, CELADE, distribución interna, Santiago, Chile, 1974.

EJERCICIOS DE REPASO GENERAL DE LA MATERIA

(Ver respuestas en pág. 180)

1. Si un hombre de 25 años exactos se casa con una mujer de 20, calcular -utilizando las tablas de mortalidad por sexo de México de 1970- la probabilidad de que, después de 50 años:
 - a) Los dos estén con vida
 - b) Sólo el hombre se encuentra con vida
 - c) Sólo la mujer sobreviva
 - d) Los dos hayan fallecido
 - e) Verificar que la suma de estas cuatro probabilidades sea igual a uno

2. Indicar el significado que tienen en la población estacionaria, los siguientes segmentos, relaciones y áreas del Diagrama de Lexis.

- a) \overline{AF}
- b) \overline{HR}
- c) \overline{MN}
- d) $\overline{NS/HM}$
- e) $\overline{IS/CM}$
- f) $\overline{OT/NO}$
- g) Sup. HISR
- h) Sup. LNSQ

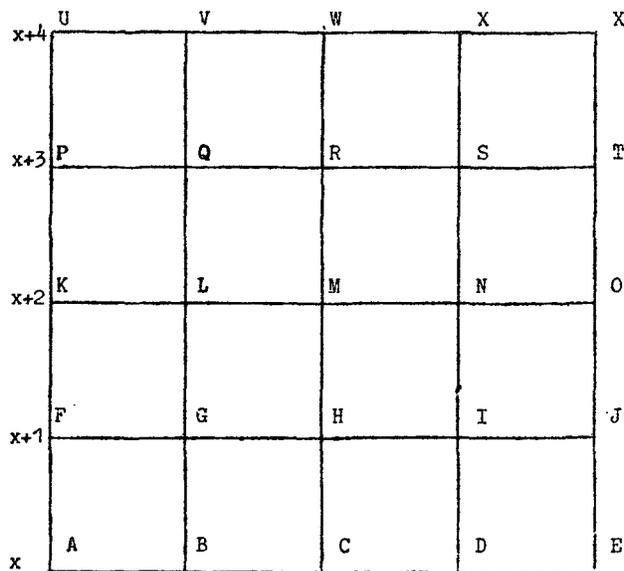


Gráfico 39

3. A partir de la tabla de vida abreviada femenina de Guatemala de 1950, calcular el valor de las siguientes relaciones de supervivencia:

a) 5^P_{40-44}

c) 5^P_{75+}

b) 5^P_b

d) 5^P_{65-74}

4. Definir el significado de la función ${}_nL_x$

a) En la tabla de vida

b) En la población estacionaria

5. Indicar si las siguientes relaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

a) $\sum_{x=0}^{x-1} d_x = l_x$ ()

b) $p_0 \cdot p_1 = 2^p_0$ ()

c) $q_0 \cdot q_1 = 2^q_0$ ()

d) $l_{x+n} \cdot {}_n d_x = l_x$ ()

e) $T_{40} > T_{60}$ ()

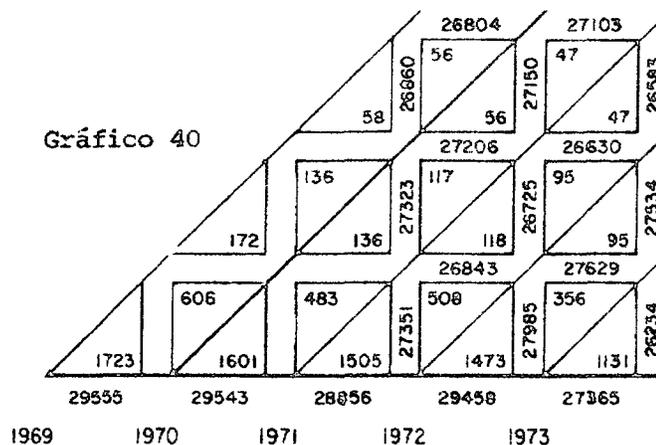
f) $\text{logito}(1-l_x) = \frac{1}{2} \ln(1-l_x)$ ()

6. Cuál es la principal crítica que hacen Gabriel y Ronen a la técnica usada para la construcción de las Tablas Modelo de Naciones Unidas ?

7. Respecto a las tablas modelo de Coale y Demeny, indicar cuáles son las principales características del patrón de mortalidad por edad del modelo "Este", con respecto a la mortalidad promedio.

8. A partir de la información sobre nacimientos, defunciones y población por edades, presentada en el diagrama de Lexis siguiente, calcular

las probabilidades de muerte q_0 , q_1 y q_2 , para el período 1972-1973, por el método de Greville.



9. En relación con los métodos clásicos de construcción de tablas de mortalidad indicar :
 - a) Cuál es la información básica que utilizan
 - b) Señalar por qué motivo no pueden elaborarse tablas por este procedimiento en algunos países de América Latina.

10. Calcular la esperanza de vida temporaria entre los 15 y los 65 años de edad, ${}_{50}e_{15}^o$, con datos de la tabla femenina de México de 1970 presentada en el anexo.

RESPUESTAS DEL REPASO GENERAL DE LA MATERIA

R.1 Se calculan en primer lugar las probabilidades básicas necesarias que son las siguientes:

$${}_{50}p_{25}^H = \frac{l_{75}}{l_{25}} = \frac{35\ 740}{86\ 050} = 0.41534$$

$${}_{50}p_{20}^M = \frac{l_{70}}{l_{20}} = \frac{54\ 318}{88\ 775} = 0.61186$$

$${}_{50}q_{25}^H = 1 - {}_{50}p_{25}^H = 0.58466$$

$${}_{50}q_{20}^M = 1 - {}_{50}p_{20}^M = 0.38814$$

Combinando estas probabilidades se obtiene:

a) Probabilidad de que las dos personas estén con vida:

$$({}_{50}p_{25}^H) ({}_{50}p_{20}^M) = (0.41534)(0.61186) = \underline{0.25413}$$

b) Probabilidad de que sólo el hombre sobreviva:

$$({}_{50}p_{25}^H) ({}_{50}q_{20}^M) = (0.41534)(0.38814) = \underline{0.16121}$$

c) Probabilidad de que sólo la mujer sobreviva:

$$({}_{50}q_{25}^H) ({}_{50}p_{20}^M) = (0.58466)(0.61186) = \underline{0.35773}$$

d) Probabilidad de que los dos hayan fallecido

$$({}_{50}q_{25}^H) ({}_{50}q_{20}^M) = (0.58466) (0.38814) = \underline{0.22693}$$

e) Dado que las cuatro probabilidades anteriores comprenden todos los casos posibles, la suma resulta igual a la unidad.

$$0.25413 + 0.16121 + 0.35773 + 0.22693 = 1$$

R.2	a)	$\overline{AF} = L_x$	f)	$\frac{\overline{OT}}{\overline{NO}} = \frac{L_{x+2}}{l_{x+2}} = a^p_{x+2}$
	b)	$\overline{HR} = 2^{L_{x+1}}$		
	c)	$\overline{MN} = l_{x+2}$	g)	Sup HISR = $2^{d_{x+1}}$
	d)	$\frac{\overline{NS}}{\overline{HM}} = \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} = P_{x+1}$	h)	Sup LNSQ = $2(d_{x+2})$
	e)	$\frac{\overline{IS}}{\overline{CM}} = \frac{2^{L_{x+1}}}{2^{L_x}} = 2^P_x$		

R.3 a) ${}_5P_{40-44} = \frac{{}_5L_{45}}{{}_5L_{40}} = \frac{239\ 662}{256\ 846} = \underline{0.93310}$

b) ${}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{5l_0} = \frac{399\ 003}{500\ 000} = \underline{0.79801}$

c) ${}_5P_{75+} = \frac{T_{80}}{T_{75}} = \frac{61\ 285}{134\ 966} = \underline{0.45408}$

d) ${}_5P_{65-74} = \frac{{}_{10}L_{70}}{{}_{10}L_{65}} = \frac{182\ 540}{251\ 415} = \underline{0.72605}$

- R.4 a) En la tabla de vida, ${}_nL_x$ representa el número de años-persona vividos por la generación l_0 entre las edades x y $x+n$.
- b) En la población estacionaria, ${}_nL_x$ representa el número de personas que en cualquier momento tienen edades comprendidas entre x y $x+n$.
- R.5 a) F ; d) V
 b) V ; e) V
 c) F ; f) F
- R.6 La principal crítica formulada por Gabriel y Ronen, es que las ecuaciones de recurrencia sucesivas introducen un sesgo acumulado. Dicho sesgo hace que se subestime la esperanza de vida al nacer, especialmente para valores de q_0 comprendidos entre 40 y 200 por mil.
- R.7 Con respecto a la mortalidad promedio, las tablas del modelo "Este" muestran una alta mortalidad en la infancia y después de los 50 años.
- R.8 Cálculo de las probabilidades de muerte q_x , para $x = 0, 1$ y 2 :

x	E_x	N'_x	N''_x	$\alpha p_x = \frac{N'_x}{E_x}$	$\delta p_x = \frac{E_{x+1}}{N''_x}$	$q_x = 1 - \alpha p_x \delta p_x$
0	56 823	54 219	55 336	0.95417	0.98439	0.06072
1	54 472	54 259	54 048	0.99609	0.99608	0.00781
2	53 836	53 733	54 010	0.99809	0.99809	0.00382
3	53 907					

- R.9 a) La información básica que requieren los métodos clásicos, son las defunciones y la población por sexo y grupos de edades.
- b) En algunos países en desarrollo no pueden elaborarse tablas por este procedimiento, debido a que las estadísticas de defunciones contienen omisiones y errores de importancia.

$$R.10 \quad {}_{50}e_{15}^o = \frac{T_{15} - T_{65}}{l_{15}} = \frac{5\,031\,472 - 967\,288}{89\,426} = \underline{45.45 \text{ años}}$$

Si la mortalidad fuera nula el resultado sería 50. Debido a las condiciones de mortalidad de la población femenina de México prevaleciente en 1970, se pierde un promedio de vida de 4.55 años.

*
* *

A N E X O

**TABLAS DE MORTALIDAD DE ALGUNOS
PAISES SELECCIONADOS**

Cuadro 1A

GUATEMALA: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD MASCULINA, 1950

Edad $x, x+n-1$	n^m_x	n^q_x	l_x	n^d_x	n^L_x	T_x	e^o_x
0	0.19579	0.171696	100 000	17 170	87 694	3 958 833	39.59
1	0.05817	0.056530	82 830	4 682	80 489	3 871 139	46.74
2	0.03987	0.039094	78 148	3 055	76 621	3 790 650	48.51
3	0.02527	0.024961	75 093	1 874	74 156	3 714 029	49.46
4	0.01775	0.017594	73 219	1 288	72 575	3 639 873	49.71
5-9	0.01003	0.049009	71 931	3 525	351 446	3 567 298	49.59
10-14	0.00543	0.026811	68 406	1 834	337 753	3 215 852	47.01
15-19	0.00684	0.033666	66 572	2 241	327 632	2 878 099	43.23
20-24	0.00810	0.039753	64 331	2 557	315 679	2 550 467	39.65
25-29	0.00905	0.044319	61 774	2 738	302 541	2 234 788	36.18
30-34	0.01060	0.051724	59 036	3 054	288 113	1 932 247	32.73
35-39	0.01160	0.056474	55 982	3 162	272 586	1 644 134	29.37
40-44	0.01510	0.072931	52 820	3 852	255 099	1 371 548	25.97
45-49	0.01800	0.086365	48 968	4 229	234 944	1 116 449	22.80
50-54	0.02250	0.106852	44 739	4 780	212 444	881 505	19.70
55-59	0.02800	0.131323	39 959	5 248	187 429	669 061	16.74
60-64	0.04000	0.182578	34 711	6 337	158 425	481 632	13.88
65-69	0.05400	0.238843	28 374	6 777	125 500	323 207	11.39
70-74	0.07200	0.305931	21 597	6 607	91 764	197 707	9.15
75-79	0.10100	0.402620	14 990	6 035	59 752	105 943	7.07
80-84	0.16200	0.566665	8 955	5 074	31 321	46 191	5.16
85 y más	0.26100	1.000000	3 881	3 881	14 780	14 780	3.83

Fuente: Camisa, Zulma, Las estadísticas demográficas y la mortalidad en Guatemala hacia 1950 y 1964. CELADE, Serie AS, No. 2, San José, Costa Rica, 1969.

Cuadro 2A

GUATEMALA: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD FEMENINA, 1950

Edad $x, x+n-1$	m_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^o
0	0.17251	0.153989	100 000	15 399	89 262	4 088 951	40.89
1	0.05789	0.056264	84 601	4 760	82 221	3 999 689	47.28
2	0.04124	0.040411	79 841	3 226	78 228	3 917 468	49.07
3	0.02849	0.028090	76 615	2 152	75 539	3 839 240	50.11
4	0.01927	0.019079	74 463	1 421	73 753	3 763 701	50.54
5-9	0.01026	0.050104	73 042	3 660	356 725	3 689 948	50.52
10-14	0.00600	0.029590	69 382	2 053	342 167	3 333 223	48.04
15-19	0.00743	0.036519	67 329	2 459	330 956	2 991 056	44.42
20-24	0.00840	0.041195	64 870	2 672	318 095	2 660 100	41.01
25-29	0.00980	0.047909	62 198	2 980	304 082	2 342 005	37.65
30-34	0.01080	0.052676	59 218	3 119	288 796	2 037 923	34.41
35-39	0.01160	0.056474	56 099	3 168	273 103	1 749 127	31.18
40-44	0.01300	0.063091	52 931	3 339	256 846	1 476 024	27.89
45-49	0.01480	0.071530	49 592	3 547	239 662	1 219 178	24.58
50-54	0.01780	0.085443	46 045	3 934	221 011	979 516	21.27
55-59	0.02420	0.114483	42 111	4 821	199 215	758 505	18.01
60-64	0.03300	0.153029	37 290	5 706	172 909	559 290	15.00
65-69	0.04500	0.203099	31 584	6 415	142 556	386 381	12.23
70-74	0.06400	0.276819	25 169	6 967	108 859	243 825	9.69
75-79	0.09400	0.380496	18 202	6 926	73 681	134 966	7.41
80-84	0.15000	0.538143	11 276	6 068	40 453	61 285	5.43
85 y más	0.25000	1.000000	5 208	5 208	20 832	20 832	4.00

Fuente: Camisa, Zulma, "Las estadísticas...", op.cit.

Cuadro 3A

MEXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD MASCULINA 1969-1971

Edad $x, x+n-1$	m_x n_x	q_x n_x	l_x	d_x n_x	L_x n_x	T_x	e_x^o
0		0.072214	100 000	7 221	94 758	6 004 831	60.05
1		0.016379	92 779	1 520	91 882	5 910 073	63.70
2		0.008669	91 259	791	90 840	5 818 191	63.75
3		0.005345	90 468	484	90 216	5 727 351	63.31
4		0.003431	89 984	309	89 826	5 637 135	62.65
5-9	0.001973	0.009820	89 675	881	446 528	5 547 309	61.86
10-14	0.001238	0.006171	88 794	548	442 649	5 100 781	57.45
15-19	0.002032	0.010112	88 246	892	438 976	4 658 132	52.79
20-24	0.003006	0.014927	87 354	1 304	433 799	4 219 156	48.30
25-29	0.003971	0.019673	86 050	1 693	426 341	3 785 357	43.99
30-34	0.004878	0.024116	84 357	2 034	416 974	3 359 016	39.82
35-39	0.005996	0.029572	82 323	2 434	405 937	2 942 042	35.74
40-44	0.007621	0.037442	79 889	2 991	392 468	2 536 105	31.75
45-49	0.010092	0.049304	76 898	3 791	375 644	2 143 637	27.88
50-54	0.013455	0.065228	73 107	4 769	354 441	1 767 993	24.18
55-59	0.018226	0.087403	68 338	5 973	327 719	1 413 552	20.68
60-64	0.024794	0.117133	62 365	7 305	294 628	1 085 833	17.41
65-69	0.035060	0.161824	55 060	8 910	254 136	791 205	14.37
70-74	0.050614	0.225572	46 150	10 410	205 674	537 069	11.64
75-79	0.070431	0.300305	35 740	10 733	152 390	331 395	9.27
80-84	0.100848	0.402146	25 007	10 056	99 714	179 005	7.16
85-89	0.150493	0.539347	14 951	8 064	53 584	79 291	5.30
90-94	0.232328	0.703472	6 887	4 845	20 854	25 707	3.73
95-99	0.408176	0.890023	2 042	1 817	4 452	4 853	2.38
100 y más	0.560474	1.000000	225	225	401	401	1.78

Fuente: Cabrera, A., Gustavo, Ordorica, Manuel, García, Luis, Tabla abreviada de mortalidad de México, 1969-1971; El Colegio de México, C.E.E.D., 1973, trabajo inédito.

Cuadro 4A

MEXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD FEMENINA 1969-1971

Edad $x, x+n-1$	n^m_x	n^q_x	l_x	n^d_x	n^L_x	T_x	e^o_x
0		0.060625	100 000	6 063	95 732	6 394 880	63.95
1		0.016621	93 937	1 561	93 016	6 299 148	67.06
2		0.009081	92 376	839	91 931	6 206 132	67.18
3		0.005622	91 537	515	91 269	6 114 201	66.79
4		0.003576	91 022	325	90 856	6 022 932	66.17
5-9	0.001831	0.009115	90 697	827	451 666	5 932 076	65.41
10-14	0.000989	0.004935	89 870	444	448 938	5 480 410	60.98
15-19	0.001461	0.007278	89 426	651	445 585	5 031 472	56.26
20-24	0.002134	0.010615	88 775	942	441 425	4 585 887	51.66
25-29	0.002813	0.013973	87 833	1 227	436 189	4 144 462	47.19
30-34	0.003479	0.017253	86 606	1 494	429 434	3 708 273	42.82
35-39	0.004379	0.021673	85 112	1 845	421 329	3 278 839	38.52
40-44	0.005385	0.026592	83 267	2 214	411 142	2 857 510	34.32
45-49	0.006850	0.033715	81 053	2 733	398 978	2 446 368	30.18
50-54	0.009324	0.045646	78 320	3 575	383 296	2 097 390	26.14
55-59	0.013201	0.064034	74 745	4 786	362 548	1 664 094	22.26
60-64	0.019820	0.094702	69 959	6 625	334 258	1 301 546	18.60
65-69	0.030527	0.142354	63 334	9 016	295 345	967 288	15.27
70-74	0.044317	0.200321	54 318	10 881	245 527	671 943	12.31
75-79	0.064094	0.277168	43 437	12 039	187 833	426 416	9.82
80-84	0.093329	0.378333	31 398	11 879	127 281	238 583	7.60
85-89	0.135124	0.500356	19 519	9 767	72 282	111 302	5.70
90-94	0.216343	0.676488	9 752	6 597	30 493	39 020	4.00
95-99	0.355134	0.850699	3 155	2 684	7 558	8 527	2.70
100 y más	0.486257	1.000000	471	471	969	969	2.06

Fuente: Cabrera A., Gustavo, Ordorica, Manuel, García, Luis, "Tabla...", *op.cit.*

Cuadro 5A
COSTA RICA: TABLA COMPLETA DE MORTALIDAD, 1972 - 1974
a) Masculina

(Continúa)

Intervalo de edades x, x+1	De 100000 Nacidos Vivos			Población Estacionaria			Esperanza de vida a la edad x e_x^o
	Probabilidad de muerte entre x, x+1 q_x	Sobrevivientes a la edad x l_x	Defunciones entre x, x+1 d_x	Tiempo vivido entre x, x+1 L_x	Relación de supervivencia P_x	Tiempo vivido entre x, w T_x	
($P_b = 95799$)							
0- 1	0.05520	100 000	5 520	95 799	0.98295	6 626 234	66.26
1- 2	0.00664	94 480	628	94 166	0.99512	6 530 435	69.12
2- 3	0.00310	93 852	291	93 706	0.99752	6 436 269	68.58
3- 4	0.00187	93 561	175	93 474	0.99849	6 342 563	67.79
4- 5	0.00113	93 386	106	93 333	0.99895	6 249 089	66.92
5- 6	0.00102	93 280	95	93 235	0.99902	6 155 756	65.99
6- 7	0.00094	93 185	88	93 144	0.99911	6 062 521	65.06
7- 8	0.00086	93 097	80	93 061	0.99918	5 969 377	64.12
8- 9	0.00080	93 017	74	92 985	0.99924	5 876 316	63.17
9-10	0.00073	92 943	68	92 914	0.99930	5 783 331	62.22
10-11	0.00067	92 875	62	92 849	0.99935	5 690 417	61.27
11-12	0.00063	92 813	58	92 789	0.99934	5 597 568	60.31
12-13	0.00068	92 755	63	92 728	0.99926	5 504 779	59.35
13-14	0.00078	92 692	72	92 659	0.99915	5 412 051	58.39
14-15	0.00090	92 620	83	92 580	0.99903	5 319 392	57.43
15-16	0.00103	92 537	95	92 490	0.99889	5 226 812	56.48
16-17	0.00116	92 442	107	92 387	0.99877	5 134 322	55.54
17-18	0.00131	92 335	121	92 273	0.99862	5 041 935	54.60
18-19	0.00144	92 214	133	92 146	0.99849	4 949 662	53.68
19-20	0.00159	92 081	146	92 007	0.99836	4 857 516	52.75
20-21	0.00176	91 935	162	91 856	0.99819	4 765 509	51.84
21-22	0.00187	91 773	172	91 690	0.99811	4 673 653	50.93
22-23	0.00193	91 601	177	91 517	0.99806	4 581 963	50.02
23-24	0.00196	91 424	179	91 339	0.99804	4 490 446	49.12
24-25	0.00197	91 245	180	91 160	0.99803	4 399 107	48.21
25-26	0.00199	91 065	181	90 980	0.99801	4 307 947	47.31
26-27	0.00200	90 884	182	90 799	0.99800	4 216 967	46.40
27-28	0.00202	90 702	183	90 617	0.99796	4 126 168	45.49
28-29	0.00208	90 519	188	90 432	0.99790	4 035 551	44.58
29-30	0.00216	90 331	195	90 242	0.99780	3 945 119	43.67
30-31	0.00227	90 136	205	90 043	0.99769	3 854 877	42.77
31-32	0.00237	89 931	213	89 835	0.99758	3 764 834	41.86
32-33	0.00247	89 718	222	89 618	0.99749	3 674 999	40.96
33-34	0.00258	89 496	231	89 393	0.99737	3 585 381	40.06
34-35	0.00269	89 265	240	89 158	0.99729	3 495 988	39.16
35-36	0.00281	89 025	250	88 916	0.99718	3 406 830	38.27
36-37	0.00293	88 775	260	88 665	0.99703	3 317 914	37.37
37-38	0.00308	88 515	273	88 402	0.99687	3 229 249	36.48
38-39	0.00324	88 242	286	88 125	0.99671	3 140 847	35.59
39-40	0.00342	87 956	301	87 835	0.99649	3 052 722	34.71
40-41	0.00362	87 655	317	87 527	0.99625	2 964 887	33.83
41-42	0.00382	87 338	334	87 199	0.99604	2 877 360	32.95
42-43	0.00407	87 004	354	86 854	0.99578	2 790 161	32.07
43-44	0.00433	86 650	375	86 487	0.99551	2 703 307	31.20
44-45	0.00464	86 275	400	86 099	0.99523	2 616 820	30.33

Cuadro 5A
COSTA RICA: TABLA COMPLETA DE MORTALIDAD. 1972 - 1974
a) Masculina

Intervalo de edades x, x+1	Probabilidad de muerte entre x, x+1 q_x	De 100000 Nacidos Vivos		Población Estacionaria			Esperanza de vida a la edad x e_x
		Sobrevivientes a la edad x l_x	Defunciones entre x, x+1 d_x	Tiempo vivido entre x, x+1 L_x	Relación de supervivencia P_x	Tiempo vivido entre x, w T_x	
45-46	0.00496	85 875	426	85 688	0.99487	2 530 721	29.47
46-47	0.00534	85 449	456	85 248	0.99450	2 445 033	28.61
47-48	0.00572	84 993	486	84 779	0.99411	2 359 785	27.76
48-49	0.00612	84 507	517	84 280	0.99366	2 275 006	26.92
49-50	0.00657	83 990	552	83 740	0.99318	2 190 726	26.08
50-51	0.00704	83 438	587	83 175	0.99267	2 106 980	25.25
51-52	0.00758	82 851	628	82 565	0.99210	2 023 805	24.43
52-53	0.00819	82 223	673	81 913	0.99143	1 941 240	23.61
53-54	0.00890	81 550	726	81 211	0.99069	1 859 327	22.80
54-55	0.00969	80 824	783	80 455	0.98983	1 778 116	22.00
55-56	0.01057	80 041	846	79 637	0.98894	1 697 661	21.21
56-57	0.01152	79 195	912	78 756	0.98791	1 618 024	20.43
57-58	0.01262	78 283	988	77 804	0.98676	1 539 268	19.66
58-59	0.01383	77 295	1 069	76 774	0.98544	1 461 464	18.91
59-60	0.01521	76 226	1 159	75 656	0.98401	1 384 690	18.17
60-61	0.01665	75 067	1 250	74 446	0.98251	1 309 034	17.44
61-62	0.01823	73 817	1 346	73 144	0.98082	1 234 588	16.72
62-63	0.02006	72 471	1 454	71 741	0.97883	1 161 444	16.03
63-64	0.02223	71 017	1 579	70 222	0.97652	1 089 703	15.34
64-65	0.02467	69 438	1 713	68 573	0.97419	1 019 481	14.68
65-66	0.02732	67 725	1 850	66 803	0.97151	950 908	14.04
66-67	0.03010	65 875	1 983	64 900	0.96863	884 105	13.42
67-68	0.03302	63 892	2 110	62 864	0.96566	819 205	12.82
68-69	0.03608	61 782	2 229	60 705	0.96256	756 341	12.24
69-70	0.03924	59 553	2 337	58 432	0.95934	695 636	11.68
70-71	0.04263	57 216	2 439	56 056	0.95583	637 204	11.14
71-72	0.04624	54 777	2 533	53 580	0.95200	581 148	10.61
72-73	0.05013	52 244	2 619	51 013	0.94809	527 568	10.10
73-74	0.05427	49 625	2 693	48 365	0.94360	476 555	9.60
74-75	0.05870	46 932	2 755	45 647	0.93897	428 190	9.12
75-76	0.06381	44 177	2 819	42 861	0.93414	382 543	8.66
76-77	0.06833	41 358	2 826	40 038	0.92899	339 682	8.21
77-78	0.07425	38 532	2 861	37 195	0.92324	299 644	7.78
78-79	0.07976	35 671	2 845	34 340	0.91721	262 449	7.36
79-80	0.08640	32 826	2 836	31 497	0.91025	228 109	6.95
80-81	0.09273	29 990	2 781	28 670	0.90366	196 612	6.56
81-82	0.09989	27 209	2 718	25 908	0.89594	167 942	6.17
82-83	0.10812	24 491	2 648	23 212	0.88743	142 034	5.80
83-84	0.11706	21 843	2 557	20 599	0.87786	118 822	5.44
84-85	0.12740	19 286	2 457	18 633	--	98 223	5.09
85 y más	1.00000	16 829	16 829	80 140		80 140	4.76

Fuente: Tablas de Vida de Costa Rica, 1972-1974, Dirección General de Estadística y Censos y CELADE, San José, Costa Rica, octubre 1976.

BIBLIOGRAFIA

A. Teoría y construcción de tablas

1. Beers, Henry S., "Six Terms Formulas for Routine Actuarial Interpolation", en The Record of the American Institute of Actuaries, 34:
2. Benítez, Raúl y Cabrera, Gustavo, Tablas abreviadas de mortalidad de la población de México 1930, 1940, 1950, 1960, El Colegio de México, 1967.
3. Bocaz, A., Cálculo de los valores de l_x , conocidos los ${}_nL_x$, CELADE, inédito.
4. Brass, W., Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados, CELADE, Serie E. No. 14, 1974.
5. Brass, W., "Uses of Census and Surveys Data for the Estimation of Vital Rates", en African Seminar on Vital Statistics, Naciones Unidas, Comisión Económica para Africa, Addis Abbeba, 1964.
6. Brass, W., Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (fecundidad y mortalidad). San José, Costa Rica, 16-24 de setiembre de 1971, Serie DS. No. 9
7. Camisa, Z., Las estadísticas demográficas y la mortalidad en Guatemala hacia 1950 y 1964. CELADE, Serie AS. No.2, 1969
8. CELADE, Seminario sobre métodos para medir variables demográficas. (fecundidad y mortalidad), dirigido por el profesor William Brass. San José, Costa Rica, 16-24 de setiembre de 1971
9. Coale, A., y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966.
10. Committee on Population and Demography, Manual on Indirect Estimation Techniques, American National Academy of Sciences
11. Chackiel, J., "El modelo de mortalidad de Brass", Notas de Población No. 25, CELADE, abril de 1981.
12. Chackiel, J., y Macció, G., Evaluación y corrección de datos demográficos, CELADE, Serie B. No. 39, Santiago, Chile.
13. Chackiel, J., y Ortega, A., Tablas de mortalidad femenina de Guatemala, Honduras y Nicaragua, CELADE, Serie A, No.1033, 1977.

14. Dirección General de Estadística y Censos y CELADE, Tablas de vida de Costa Rica, 1972-1974, San José, Costa Rica, octubre de 1976.
15. Dublin, L. y Spiegelman, M., Tablas de mortalidad de contemporáneos versus tablas de mortalidad por generaciones, CELADE, Serie DS., No. 1
16. Gabriel, K.R., y Ronen, I., Estimación de la mortalidad a partir de tasas de mortalidad infantil, CELADE, Serie DS.No. 22. Traducción del artículo "Estimates of Mortality from Infant Mortality Rates" publicado por Populations Studies, Vol. XI, No. 2, 1958.
17. Greville, T.N.E., Métodos rápidos para la construcción de tablas abreviadas de mortalidad, CELADE, Serie D. No. 1.
18. Greville, T.N.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1946.
19. Greville, T.N.E., Methodology of the National, Regional and State Life Tables for the United States: 1959-1961, National Center for Health Statistics, Washington, 1967.
20. Greville, T.N.E., Graduation, Education and Examination Committee of the Society of Actuaries, 1974.
21. Heligman, L., Construction of New United Nations Model Life Table System, Seminar on Methodology and Data Collection in Mortality Studies UIECP, Dakar, Senegal, 7-10 de julio de 1981.
22. Hernández, R., Metodología simplificada para la construcción de una tabla abreviada de mortalidad. Síntesis del trabajo de Doering y Forbers. (Doering, Carl R. and Forbers, Alice N., "Skeleton Life Tabla" Harvard's Public Health. Vital Statistics Department, Harvard University, United States, 1969).
23. Hill, K., Encuesta Demográfica Nacional de Honduras; análisis de preguntas retrospectivas, Dirección General de Estadística y Censos de Honduras y CELADE, 1976.
24. Hill, K., "Métodos indirectos para estimar la mortalidad", Notas de Población, No. 9, diciembre de 1975.
25. Hill, K., "El uso de información sobre orfandad para estimar la supervivencia en edades adultas", Notas de Población, No.15, diciembre de 1977.
26. Hill, K., y Trussell, J., Nuevos adelantos en la estimación de la mortalidad, CELADE, Serie D. No. 89, Santiago, Chile, 1977.
27. Keyfitz, N., Introducción a las matemáticas de población, CELADE, Serie E. No. 18, Santiago, Chile, 1979.

28. King, G., "On a Short Method of Constructing an Abridged Mortality Table", Journal of the Institute of Actuaries, 48:294, (julio 1914)
29. Lederman, S., Nouvelles Tables Types de Mortalité, Cahier No. 53, INED, Presses Universitaires de France, 1969.
30. Lederman, S. y Breas, ., "Les dimensions de la mortalité", Population, 14° année, No.4, octubre-diciembre, 1959.
31. Lexis, W., Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik. Strasbourg: Trubner, 1875.
32. Lotka, A.J., Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E. No. 5, Santiago, Chile, 1969.
33. Miller, M.D., Elements of Graduation, Chicago, Society of Actuaries, 1946, ch.5.
34. Mortara, G., La mortalidad de la población del Brasil, CELADE, Serie D. No. 32., Santiago, Chile.
35. Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad (Tablas modelo de mortalidad para países insuficientemente desarrollados), ST/SOA/Serie A/22.
36. Naciones Unidas, Manual III, Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, ST/SOA/Serie A/25.
37. Naciones Unidas, "Análisis factorial de las tasas de mortalidad por edad y por sexo", Boletín de Población No. 6. Serie No.6, 1962.
38. National Center for Health Statistics, Methodology of the National and State Life Tables for the United States: 1969-71 Maryland, 1975
39. Pressat, R., El análisis demográfico, capítulo 2, parte 1; capítulo 3 parte 2. Fondo de Cultura Económicas, 1967.
40. Reed, Lowell J., y Merrell, M., Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D. No. 49.
41. Sirken, M.G., Comparison of Two Methods of Constructing Abridged Life Tables by Reference to a Standard Table, National Center for Health Statistics, Serie 2, num. 4, febrero de 1964.
42. Somoza, J.L., Tablas de mortalidad, CELADE, Serie B. No. 14, Santiago, Chile.
43. Somoza, J.L., "Encuesta demográfica nacional de Bolivia", Notas de Población, No. 11, agosto de 1976.
44. Spiegelman, M., Introducción a la Demografía, Fondo de Cultura Económica, México, 1972.

B. Aplicaciones de la Tabla en Estudios de Población

45. Caraballo, A.L., Tablas de mortalidad y de nupcialidad de Puerto Rico 1950 y 1960, CELADE, Serie C. No. 7, 1964.
46. Cerisola, M.J.E., República Argentina: Análisis de la mortalidad por causas, 1960, CELADE, Serie C. No. 9, 1968.
47. Dublin, L., y Lotka, A., y Spiegelman, M., Length of Life. A study of the Life Table, New York, The Ronald Press Company, 1949.
48. Gómez, Lilian, Paraguay: Tablas de vida escolar 1950 y 1962. Proyección de la asistencia escolar 1965-1980. Trabajo final de investigación, CELADE, distribución interna, 1974.
49. Holder, Carmen, Brasil: Patrón de escolaridad por sexo, según tablas de vida escolar para 1960 y 1970. Trabajo final de investigación, CELADE, distribución interna, 1973.
50. Keyfitz, N., Applied Mathematical Demography, John Wiley, 1977, cap. 2.
51. Naciones Unidas, Método de análisis de los datos censales relativos a las actividades económicas de la población, ST/SOA/Serie A/43, 1969, capítulo I.
52. Naciones Unidas, The Aging of Populations and its Economic and Social Implications, ST/SOA/Serie A/26.
53. Ortega, A. y Rincón, M., Algunas estimaciones demográficas sobre la mortalidad para la formulación de las metas del plan de salud de Costa Rica, CELADE, San José, Costa Rica, 1974.
54. Potter, R.G., "Application of Life Table Technique to Measurement of Contraception Effectiveness", Demography III, 2, 1966
55. Preston, S.H., Keyfitz, N. y Schoen, R., Causes of Death. Life Tables for National Populations, Seminar Press, New York, 1972.
56. Rincón, M., Tablas de vida activa, CELADE, Serie B.No. 1008, San José, Costa Rica, 1977.
57. Rodríguez, G., y Hobcraft, J., Illustrative Analysis: Life Table Analysis of Birth Intervals in Colombia, WFS, Scientific Reports, International Statistical Institute, London, 1980.
58. Shryock, H.S., and Siegel, J.S., The Methods and Materials of Demography, U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, 1971. Capítulo 15.

* *

*

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

CELADE

Edificio Naciones Unidas
Avenida Dag. Hammarskjöld
Casilla 91, Santiago, CHILE

Apartado Postal 5249
San José, COSTA RICA