

Organizado por el Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social con la colaboración de la Comisión Económica para América Latina y el Consejo Federal de Inversiones de la República Argentina y el financiamiento del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo.

Buenos Aires, 16 de junio al 5 de diciembre, 1975

ELEMENTOS DE TEORIA DE "GRAPHS" Y DE TEORIA DE REDES*

José Luis Coraggio

* El presente texto, se reproduce para uso exclusivo de los participantes del Curso de Planificación Regional del Desarrollo.

1957

VI CURSO DE PLANNING REGIONAL DEL MERCOSUR

Organizado por el Instituto Interamericano de
Planificación Económica y Social con la colaboración
de la Comisión Económica para América Latina
y el Caribe (CEPAL) de las Naciones Unidas y el
Oficio de Asesoría y el Departamento del Programa
de las Naciones Unidas para el Desarrollo.

Buenos Aires, 10 de junio al 2 de diciembre, 1977

ELEMENTOS DE TEORIA DE MONOPOLIOS Y DE TEORIA DE EMPRESAS

José Luis Corvalán

El presente texto es resultado de una experiencia de los cursos
de Planificación Regional del MERCOSUR.

I. ELEMENTOS DE TEORIA DE "GRAPHS"

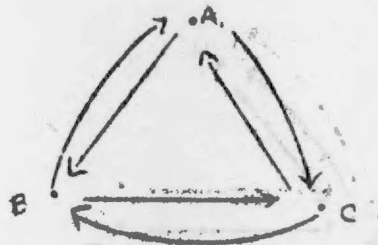
Antes de entrar a formas más realistas del problema del transporte de flujos entre modos de un espacio, haremos una revisión suscita de los principales conceptos de la denominada Teoría de "Graphs", que si bien implica un alto grado de abstracción, permite, por ello mismo, relacionar diversos problemas de estructura similar.

Partiremos para ello de un conjunto finito de elementos o nodos, que en problemas concretos podrán ser desde individuos u organizaciones hasta sectores o regiones económicas, pero que por ahora manejaremos en forma abstracta.

También trabajaremos con un conjunto finito de líneas o arcos que vinculan pares de elementos entre sí. Ejemplos concretos pueden variar desde relaciones de dominación entre individuos hasta rutas o canales de comunicación entre ciudades.

Las relaciones y por tanto los arcos que las representan tienen una dirección. En el caso especial en que la relación no sea necesariamente simétrica, hablaremos de "digraphs" (por directed graphs) en lugar de graphs.

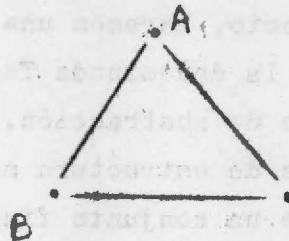
Por ejemplo, si entre un grupo de 3 elementos la relación se establece como sigue:



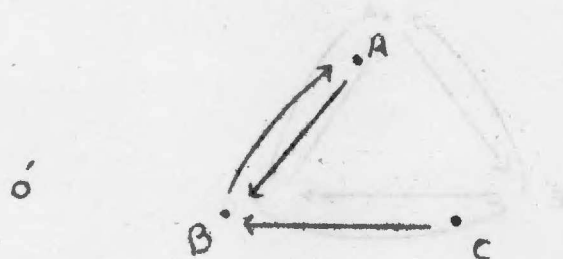
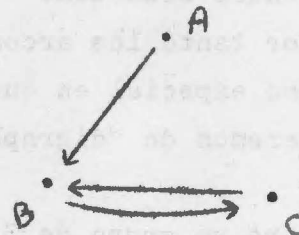
diremos que R es simétrica, es decir que siempre que $J R L$, también será $L R J$. Por ejemplo, se dara para $R =$ "es vecino de", pero no para $R' =$ "es padre de".

/Cuando la

Cuando la relación es simétrica, puede ser representada por líneas sin dirección.



Pero en el caso de relaciones no necesariamente simétricas, la dirección pasa a ser relevante para detectar la estructura de las relaciones entre los elementos. Por ejemplo, para $R = \text{"considera su mejor amigo a"}$ podría darse, entre otras alternativas:



que tendrían el mismo graph si no se explicitara la dirección de la relación.

/Representación matricial

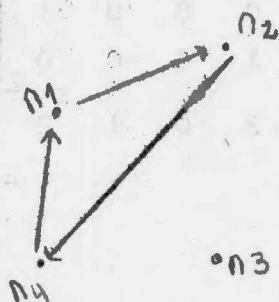
Representación matricial de un "digraph"

Si a cada nodo n_i del "digraph" le asignamos una fila y una columna de una matriz compuesta de elementos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe el arco } n_i n_j \\ 0 & \text{si no existe el arco } n_i n_j \end{cases}$$

obtenemos la llamada matriz de adyacencia (adjacency matrix), que representa la estructura de relaciones del "digraph".

Por ejemplo:



	n_1	n_2	n_3	n_4	Σ
n_1	0	1	0	1	2
n_2	0	0	0	1	1
n_3	0	0	0	0	0
n_4	0	0	0	0	0
Σ	0	1	0	2	3

Observamos que a los nodos aislados corresponde una fila y una columna nulas (n_3). Cuando un nodo es destino de arcos pero no origen, su fila será nula aunque no así su columna (n_4). Viceversa para nodos cuya única vinculación con el resto es en función de origen de arcos (n_1). Tales elementos son denominados respectivamente: aislados, receptores y transmisores.

Si sumamos la fila correspondiente a un elemento obtenemos el denominado "outgrado" que indica cuantos arcos se originan en dicho nodo: será de 2 para n_1 y 1 para n_2 , cero para los demás. Sumando columnas obtenemos el "ingrado", que señala el número de líneas que terminan en cada nodo. Un tipo especial de nodo son los llamados "carriers", cuyo ingrado y outgrado son unitarios.

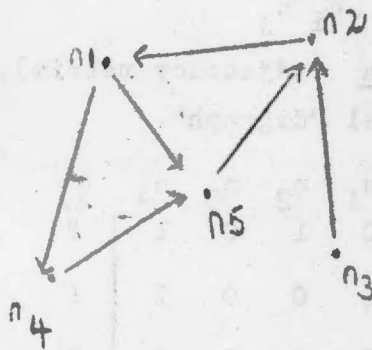
Sendero dirigido (directed path): se denomina sendero dirigido de n_i a n_j al conjunto ordenado de arcos:

$$n_i n_e, n_e n_k, \dots, n_r n_t, n_t n_j$$

/es decir,

es decir, tal que dados dos arcos consecutivos el punto final del primero es el punto inicial del segundo, y además, el punto inicial de la secuencia es n_i , y el punto final n_j . Además ningún arco o nodo deberá aparecer más de una vez en la secuencia.

Ejemplo:



	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	
n_1	0	0	0	1	1	2
n_2	1	0	0	0	0	1
n_3	0	1	0	0	0	1
n_4	0	0	0	0	1	1
n_5	0	1	0	0	0	1
	1	2	0	1	2	

para $n_1 n_2$: existen dos senderos dirigidos:

I $n_1 n_4, n_4 n_5, n_5 n_2$

II $n_1 n_5, n_5 n_2$

para $n_1 n_3$ = no existe ningún sendero dirigido

para $n_1 n_4$ = existe un sendero dirigido consistente en el arco simple $n_1 n_4$

para $n_1 n_5$ = $n_1 n_5$

para $n_2 n_1$ = $n_2 n_1$

para $n_2 n_3$ = no existe

para $n_2 n_4$ = $n_2 n_1, n_1 n_4$

para $n_2 n_5$ = $n_2 n_1, n_1 n_5$ y $n_2 n_1, n_2 n_4, n_4 n_5$

para $n_3 n_1$ = $n_3 n_2, n_2 n_1$

para $n_3 n_2$ = $n_3 n_2$

para $n_3 n_4$ = $n_3 n_2, n_2 n_1, n_1 n_4$

para $n_3 n_5$ = $n_3 n_2, n_2 n_1, n_1 n_5$ y $n_3 n_2, n_2 n_1, n_1 n_4, n_4 n_5$

para $n_4 n_1$ = $n_4 n_5, n_5 n_2, n_2 n_1$

para $n_4 n_2$ = $n_4 n_5, n_5 n_2$

para $n_4 n_3$ = no existe

/para n_4

para $n_4 n_5 = n_4 n_5$

para $n_5 n_1 = n_5 n_2, n_2 n_1$

para $n_5 n_2 = n_5 n_2$

para $n_5 n_3 = \text{no existe}$

para $n_5 n_4 = n_5 n_2, n_2 n_1, n_1 n_4$

Quando existe por lo menos un sendero dirigido desde n_i a n_j , diremos que n_j es accesible desde n_i .

Longitud de un sendero: está dada por el número de arcos que lo componen.

Geodésico (geodesic) de n_i a n_j : es un sendero de n_i a n_j de longitud mínima.

Por ejemplo: para $n_2 n_5$, el geodésico será $n_2 n_1, n_1 n_5$, de longitud 2.

Distancia de n_i a n_j : dada por la longitud de un geodésico entre $n_i n_j$. Obsérvese que la distancia entre n_i y n_j no necesariamente debe ser igual a la distancia entre n_j y n_i .

Ejemplo: $d(n_4 n_5) = 1$

$d(n_5 n_4) = 3$

Si no existen senderos entre n_i y n_j , convenimos en que

$d(n_i n_j) = \infty$

La distancia de un nodo a sí mismo es convenida en

$d(n_i n_i) = 0$

Secuencia: al definir un sendero dirigido, exigimos que ningún arco ni punto se repitiera. Si dejamos de lado tal restricción, llegamos al concepto más amplio de secuencia.

Por ejemplo:

$n_3 n_2, n_2 n_1, n_1 n_5, n_5 n_2, n_2 n_1, n_1 n_4$

es una secuencia de n_3 a n_4 , pero no un sendero, si bien toda secuencia encierra un sendero.

Una secuencia se denomina abierto si el punto inicial n_i y el punto final n_j son distintos. Será cerrado cuando $n_i = n_j$.

/Un ciclo:

Un ciclo: está dado por un sendero cuyos puntos inicial y final coinciden.

Matriz de accesibilidad: la matriz de adyacencia nos indicaba si un punto estaba o no unido a otro por un arco simple. Ahora construiremos una matriz tal que:

$$r_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{si } n_j \text{ es accesible desde } n_i \\ = 0 & \text{si } n_j \text{ no es accesible desde } n_i \end{cases}$$

Suponemos que todo punto es accesible desde sí mismo para el ejemplo anterior:

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
n_1	1	1	0	1	1
n_2	1	1	0	1	1
n_3	1	1	1	1	1
n_4	1	1	0	1	1
n_5	1	1	0	1	1

Cuando una fila es unitaria, indica que el nodo correspondiente tiene acceso al resto de los nodos.

Cuando una fila es nula salvo en el elemento r_{ii} indica que el elemento no tiene acceso a ningún otro nodo.

Cuando una columna es unitaria, el nodo correspondiente será accesible desde cualquier otro nodo. Cuando sea nula salvo el elemento r_{jj} , indicará que el nodo es inaccesible.

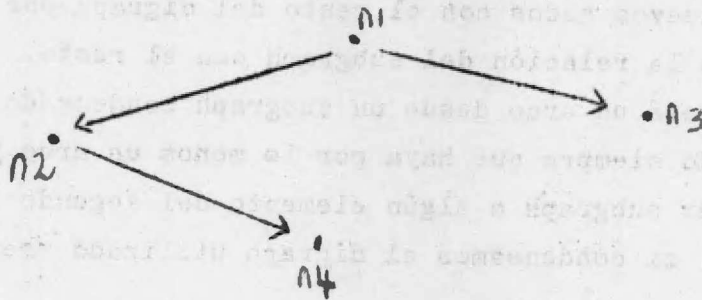
Obsérvese que la relación de accesibilidad es transitiva: si n_j es accesible desde n_k , y n_k es accesible desde n_i , entonces n_j es accesible desde n_i .

Diremos que un "digraph" está fuertemente conectado cuando dos nodos cualesquier del mismo son mutuamente accesibles. Esto implica que la correspondiente matriz de accesibilidad debería estar formada exclusivamente por elementos unitarios. Un "digraph" estará unilateralmente conectado cuando para dos nodos cualesquier por lo menos uno es accesible para el otro. Diremos que un "digraph" está débilmente conectado cuando dos puntos cualesquier están unidos, aún cuando pueden ser mutuamente inaccesibles.

(Decimos que

(Decimos que dos puntos están unidos cuando están involucrados en dos secuencias que tienen por lo menos un punto en común.

Ejemplo:



n_3 y n_4 están unidos, si bien no son accesibles uno al otro.)

Finalmente, resta la categoría de digraph desconectado que se da cuando éste no es ni aún débilmente conectado.

Los diversos grados de conectividad pueden servirnos como criterios para identificar "subgraphs" significativos de un "digraph".

Por ejemplo, si deseamos ubicar "subgraphs" de máxima conectividad, mediante reordenamiento de filas y columnas de la matriz de accesibilidad, buscaremos obtener submatrices diagonales sin elementos nulos.

Ejemplo: para el digraph de página 4 la matriz de accesibilidad puede reordenarse así:

	n_1	n_2	n_4	n_5	n_3
n_1	1	1	1	1	0
n_2	1	1	1	1	0
n_4	1	1	1	1	0
n_5	1	1	1	1	0
n_3	1	1	1	1	1

el subconjunto de nodos n_1, n_2, n_4, n_5 está fuertemente conectado.

CONDENSACION

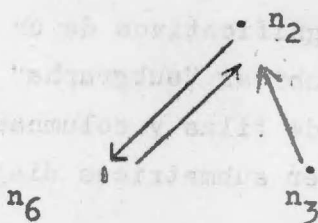
Este concepto, análogo al concepto de agregación, se aplica al procedimiento por el cual un "digraph" es reemplazado por otro en el cual se han reemplazado ciertos subgraphs del anterior por nodos, vinculando estos nuevos nodos con el resto del digraph por medio de arcos que reflejan la relación del subgraph con el resto. El criterio es que se establecerá un arco desde un subgraph condensado a otro subgraph condensado siempre que haya por lo menos un arco yendo de un elemento del primer subgraph a algún elemento del segundo subgraph.

Por ejemplo, si condensamos el digraph utilizado previamente como sigue:

$$n_6 = (n_1, n_5, n_4)$$

n_2, n_3 siguen como antes.

Obtenemos el nuevo digraph condensado:



Según los objetivos del proceso de condensación, pueden aplicarse distintos criterios en base al concepto de conectividad, etc.

LA MATRIZ DE DISTANCIAS

Una matriz de distancias está compuesta por elementos d_{ij} representando la distancia (en el sentido previamente definido) entre el nodo i y el nodo j , siendo:

$$d_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{para } i = j \\ = \infty & \text{si } r_{ij} = 0 \\ = & \text{la mínima potencia a la que hay que} \\ & \text{elevar la matriz de adyacencia } A \text{ para que} \\ & a_{ij}^{(n)} > 0 \text{ aplicando aritmética booleana,} \\ & \text{si } r_{ij} = 1. \end{cases}$$

/La aritmética

La aritmética booleana tiene las siguientes reglas de suma y producto: trabajando solamente con los números 0 y 1, está definida igual que la aritmética ordinaria, salvo que cualquier número entero positivo es reemplazado por 1.

Así: $(1 + 1) \# = 1$

$$3 \# = 1$$

etc.

Por ejemplo: para nuestro digraph de página 4

$$A^1 \# = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \# = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 \# = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

y podríamos elevar A al ∞ sin encontrar los d_{13} , pues el n_3 no es accesible desde el resto de los nodos.

Nos queda la siguiente matriz de distancias:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \infty & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Que también podemos obtener por inspección directa del "digraph" correspondiente.

La explicación de este método es la siguiente:

Al multiplicar la fila a_i por la columna a_j de la matriz adyacente pueden ocurrir 3 cosas:

1º) que ningún par de elementos $a_{ik} a_{kj}$ dé un producto booleano 1. Es decir, que o a_{ik} o a_{kj} sean cero en la matriz inicial.

Si por ejemplo, $a_{ik} = 1$, $a_{kj} = 0$, implica que n_k es accesible desde n_i , pero n_j no lo es desde n_k . Por lo tanto, no existe un sendero $(n_i n_k) (n_k n_j)$.

Si esto mismo ocurre para todos los posibles senderos de longitud 2 ($k= 1, \dots, m$), concluiremos que no hay ningún sendero de dos arcos que vincule n_i a n_j .

2º) que exactamente un par de elementos $a_{ik} a_{kj}$ dé un producto booleano 1. Para ello, deberá ser

$$a_{ik} = a_{kj} = 1 \quad \text{para } k = t$$

Esto implica que hay un único sendero que vincula en dos arcos a n_i con n_j , y dicho sendero pasa por n_k .

3º) que más de un par de elementos $a_{ik} a_{kj}$ dé un producto booleano 1. Por ejemplo:

$$a_{ik} a_{kj} = 1 \quad \text{para } k=t \quad \text{y} \quad \text{para } k=s$$

Es decir que hay dos senderos posibles en dos arcos:

(1) $(n_i n_t), (n_t n_j)$

(2) $(n_i n_s), (n_s n_j)$

/en este

en este caso, como sólo nos interesa saber si existe la posibilidad de acceder a n_j desde n_i en dos arcos, el elemento correspondiente de $A^{2\#}$ será $a_{ij}^{(2)\#} = 1$.

Si hubiera senderos con más de dos arcos que vinculan n_i con n_j , no tienen interés aquí, pues buscamos la distancia d_{ij} , que está dada por la longitud del geodésico entre n_i y n_j , es decir el sendero de menor longitud.

Etc. Etc.

Existe otro método más general para determinar la matriz de distancias:

Para obtener la matriz de distancias de un digraph se eleva la matriz de distancias por adyacentes a la potencia modificada n , siendo n , un número entero positivo tal que:

$$A^{(n)} = A^{(n+1)}$$

En ese caso, $a_{ij}^{(n)}$ es la distancia entre n_i y n_j y $A^{(n)}$ la matriz de distancias buscada.

La operación "potencia modificada" se realiza a partir de las operaciones simples:

(1) el "producto modificado" de los números a_1 y a_2 está dado por

$$a_1 \times a_2 = a_1 + a_2$$

(2) la "suma modificada" de dos números a_1 y a_2 está dada por

$$a_1 + a_2 = \min(a_1, a_2)$$

ejemplos:

$$3 \times 9 = 12$$

$$3 + 9 = 3$$

En nuestro ejemplo anterior, la matriz de distancias por adyacentes es:

$$A^{[1]} =$$

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

que se construye a partir de la matriz de adyacencia, asignando una distancia infinita de celdas ij cuando no existe un arco $n_i n_j$.

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

por ejemplo, el elemento $a_{31}^{(2)}$ es obtenido así

$$\begin{aligned} a_{31}^{(2)} &= (\infty \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times \infty) + (\infty \times \infty) + (\infty \times \infty) \\ &= \infty + 2 + \infty + \infty + \infty \\ &= 2 \end{aligned}$$

La siguiente potencia modificada es:

$$A^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \infty & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

y se puede verificar que la cuarta potencia modificada

$$A^{[4]} = A^{[3]}$$

Como vemos, hemos llegado a la misma matriz de distancias que obtuvimos con el método anterior.

II. ELEMENTOS DE TEORIA DE REDES

En la definición de un "digraph" excluimos la posibilidad de que existieran arcos $n_i n_i$. Por otro lado la existencia o no existencia de un arco $n_i n_j$ estaba señalada por la asignación de los números 1 o 0 respectivamente.

Si dejamos de lado la primera restricción, y además asignamos valores numéricos cualesquier a cada arco estaremos ampliando el campo de nuestro análisis a los sistemas abstractos denominados redes (networks), de los cuales los "digraphs" son casos especiales.

Los conceptos definidos previamente para la teoría de digraphs son directamente asimilables a este caso más general.

Matriz de costos

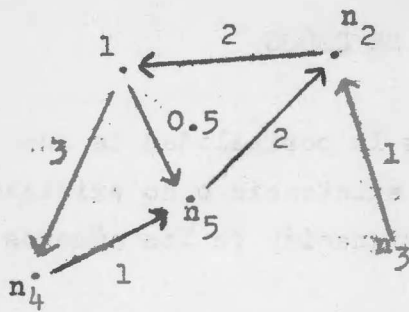
Si en lugar de asignar un número 1 a aquellos arcos $n_i n_j$, que existen y 0 a los no existentes, consignáramos el costo (finito en el primer caso o infinito en el segundo) de acceder directamente del nodo n_i al nodo n_j , tendríamos una matriz de costos:

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{ij} \begin{cases} = 0, & \text{para } i = j \\ = \infty, & \text{para } n_i n_j \text{ no existente} \\ = \text{número finito} & \text{para } n_i n_j \text{ existente} \end{cases}$$

Volviendo al digraph de nuestro ejemplo, consignemos los siguientes costos de acceso directo entre pares de nodos:



$$c = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & 3 & 0.5 \\ 2 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pero si dejamos sin efecto la restricción de que sólo se consideren senderos simples (un solo arco), y en cambio analizamos todos los posibles senderos entre pares de nodos, nuestro problema será hallar aquel sendero, entre cada par de nodos, que implique el menor costo total. Tal sendero será llamado geodésico-costo. Al costo mínimo de acceso entre n_i y n_j lo denominaremos la distancia-costo entre n_i y n_j . La matriz conteniendo las distancias-costo entre todos los posibles pares de nodos será denominada la matriz de distancia-costo, de la cual la matriz de distancia vista anteriormente es un caso especial.

El método para hallarla es similar al segundo método expuesto anteriormente:

Dada la matriz de costos directos de una red, y siendo n un número positivo entero tal que las potencias modificadas

$$c^{[n]} = c^{[n+1]}$$

entonces $c^{[n]}$ será la matriz de distancia-costo de la red.

/En nuestro

En nuestro ejemplo será:

$$c^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 & \infty & 3 & 0.5 \\ 2 & 0 & \infty & 5 & 2.5 \\ 3 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 1 \\ 4 & 2 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 & \infty & 3 & 0.5 \\ 2 & 0 & \infty & 5 & 2.5 \\ 3 & 1 & 0 & 6 & 3.5 \\ 5 & 3 & \infty & 0 & 1 \\ 4 & 2 & \infty & 7 & 0 \end{bmatrix} = c^{[4]}$$

Nótese que este método no identifica el sendero de mínima distancia costo entre n_i y n_j ; pero existen métodos numéricos para identificarlo sin dificultad.

A partir de nuestro sistema de nodos y arcos caracterizado por la matriz de distancias costo; podemos pasar a analizar una concre-
tización particular de esta teoría, denominada el problema de transporte.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Este es un ejemplo de una matriz simétrica de orden 5. La diagonal principal está formada por ceros, lo que indica que se trata de una matriz de valores propios. El número de valores propios positivos es 4, el número de valores propios negativos es 0, y el número de valores propios nulos es 1. Esto se puede verificar calculando el determinante de la matriz y sus factores primos.

