

PRELIMINAR  
Instituto Latinoamericano de  
Planificación Económica y Social  
Santiago, agosto 1966

ALGEBRA LINEAL\*

Seminario N° 1

\* Programa de Capacitación. Material preparado para la cátedra de Programación General. Profesores Sres. Eduardo Naón y Juan De Ba



ALGEBRA LINEAL

Seminario N° 1

1. Calcule, cuando la operación sea posible:

- i)  $A + B$
- ii)  $A - B$
- iii)  $A \cdot B$
- iv)  $B \cdot A$

Si:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Efectúe las siguientes operaciones:

- i)  $h I - A$
- ii)  $A^2$  y  $B^2$
- iii)  $(A + B)^2$ ,  $(A - B)^2$  y  $(B - A)^2$
- iv)  $(A + B)(A - B)$  y  $(A - B)(A + B)$

/Si:

Si 
$$I = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. a) Escriba una matriz escalar de 3 x 3.  
b) Escriba una matriz diagonal de 3 x 3.  
c) Escriba una matriz simétrica de 3 x 3.  
d) Escriba una matriz antisimétrica de 3 x 3.

4. Efectúe los productos  $AA^t$  y  $A^tA$  si:

a)  $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$

b)  $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_3 \end{bmatrix}$

c)  $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

ALGEBRA LINEAL

Seminario N° 1 - Solución

1a. 1)  $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ii)  $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

iii)  $AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -3 \\ -6 & 5 & 8 & 7 \\ 13 & 2 & 10 & 25 \\ 7 & 9 & 13 & 29 \end{bmatrix}$

iv)  $BA = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -11 & -12 \\ 20 & 19 & 38 & 77 \\ 3 & -7 & 2 & -2 \\ 17 & 17 & 29 & 63 \end{bmatrix}$

1b.

1)  $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 + \alpha_2 & c_1 + \alpha_3 \\ a_2 + \beta_1 & b_2 + \beta_2 & c_2 + \beta_3 \end{bmatrix}$

ii)  $A - B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \alpha_1 & b_1 - \alpha_2 & c_1 - \alpha_3 \\ a_2 - \beta_1 & b_2 - \beta_2 & c_2 - \beta_3 \end{bmatrix}$

iii) La operación AB no es posible en este caso, por no tener A un número de columnas igual al número de filas de B.

iv) Por la misma razón, la operación BA tampoco es posible.

1c.

i) y ii) Las operaciones  $A + B$  y  $A - B$  no son posibles por no ser las matrices del mismo orden.

$$\text{iii)} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv)} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 5 & 21 \\ -4 & -7 & -4 & -15 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que siendo A y B matrices rectangulares y coexistiendo los productos AB y BA, éstos son necesaria y forzosamente diferentes, ya que será diferente su orden:  $AB \neq BA$

1d.

i) y ii) Las operaciones no son posibles.

$$\text{iii)} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \\ 0 & a+b+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv)} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b+c & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c & a+b+c \end{bmatrix}$$

2.

$$\text{i)} \quad hI - A = h \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & . & . \\ . & h & . \\ . & . & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{hI - A =}$$

$$hI - A = \begin{bmatrix} h-3 & 1 & -2 \\ -2 & h & -1 \\ 1 & -3 & h+2 \end{bmatrix}$$

$$ii) \quad A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$iii) \quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ \hline 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ -3 & 3 & 1 & | & 1 \\ \hline -2 & 2 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ -1 & 3 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ -4 & 4 & -4 & | & -4 \\ -5 & 3 & -4 & | & -6 \\ \hline -7 & 7 & -7 & | & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ -5 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Verificación:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ -5 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 6 \\ 15 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$(A-B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 15 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(B-A)^2 = B^2 - BA - AB + A^2 = (A-B)^2 \quad \underline{1/}$$

1/ La suma algebraica de matrices goza de la propiedad conmutativa.

/de donde:

de donde:

$$(B - A)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 6 \\ 15 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$(B-A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \quad 1/$$

$$(B-A)^2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 6 \\ 15 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

iv)

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \quad 2/$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ -5 & 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

1/ Obviamente  $A - B = -(B - A)$ .

2/ Observar que, en general, el desarrollo de  $(A+B)(A-B)$  y de  $(A-B)(A+B)$ , constan de cuatro términos y son diferentes entre sí, salvo casos especiales.

$$/(A-B)(A+B)$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 \quad \underline{1/}$$

$$(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ -5 & 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

3.

a)

$$a I = \hat{a} = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & a \end{bmatrix}$$

b)

$$D = [a_1 \ b_2 \ c_3] = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_3 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{bmatrix}$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & h & f \\ -h & \cdot & g \\ -f & -g & \cdot \end{bmatrix}$$

1/ Observar que, en general, el desarrollo de  $(A+B)(A-B)$  y de  $(A-B)(A+B)$ , constan de cuatro términos y son diferentes entre sí, salvo casos especiales.

$$4. \quad a) \quad AA^t = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

(1x3)                      (3x1)                      (1x1)

$$A^t A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

(3x1)                      (1x3)                      (3x3)

b) Siendo  $A = A^t$  es  $AA^t = A^t A = A^2$

$$AA^t = A^t A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_3^2 \end{bmatrix}$$

c)

$$AA^t = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$AA^t = \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{bmatrix}$$

(2 x 2)

$$A^t A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 & a_1 c_1 + a_2 c_2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 & b_1^2 + b_2^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 & c_1^2 + c_2^2 \end{bmatrix}$$

(3x2)                      (2x3)                      (3x3)



PRELIMINAR  
Instituto Latinoamericano de  
Planificación Económica y Social  
Santiago, agosto de 1966

ALGEBRA LINEAL\*

Seminario N° 2

\* Programa de Capacitación. Material preparado para la especialidad de Programación General. Profesores señores Eduardo Naón y Juan De Barbieri.



ALGEBRA LINEAL

Seminario N° 2

1. Verifique la validez de la siguiente igualdad:  $(ABC)^t = C^t B^t A^t$

para:

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. Dados los siguientes productos de matrices:

$$a) \quad A_{(10.5)} \quad B_{(5.4)} = C_{(10.4)}$$

$$b) \quad X_{(6.8)} \quad Y_{(8.5)} = Z_{(6.5)}$$

en donde A, B, X e Y están particionadas de la siguiente manera:

$$A_{(10.5)} = \begin{bmatrix} \hline A_{2.2} & | & A_{2.3} \\ \hline A_{5.2} & | & A_{5.3} \\ \hline A_{3.2} & | & A_{3.3} \\ \hline \end{bmatrix}; \quad B_{(5.4)} = \begin{bmatrix} \hline B_{5.1} & | & B_{5.3} \\ \hline \end{bmatrix}$$

$$X_{(6.8)} = \begin{bmatrix} \hline X_{1.8} \\ \hline X_{3.8} \\ \hline X_{2.8} \\ \hline \end{bmatrix}; \quad Y_{(8.5)} = \begin{bmatrix} \hline Y_{5.2} & | & Y_{5.3} \\ \hline Y_{3.2} & | & Y_{3.3} \\ \hline \end{bmatrix}$$

Efectúe las particiones conformes que sean necesarias, e indique y exprese el producto en forma particionada.

/3. Efectúe

3. Efectúe, mediante productos matriciales, las siguientes transformaciones elementales sobre la matriz A:

- a) Intercambie la primera fila con la segunda
- b) Intercambie la segunda columna con la cuarta
- c) Intercambie la segunda fila con la tercera y la segunda columna con la tercera
- d) Multiplique la tercera fila por k
- e) Multiplique la quinta columna por k
- j) Multiplique la segunda fila por k, la cuarta fila por m, y la tercera columna por n
- g) Multiplique la primera fila por 2 e intercámbiela con la tercera multiplicada por -1
- h) Cambie de signo los elementos de las columnas de orden impar, multiplique por 3 las de orden par, e invierta el orden de las columnas

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Exprese en notación matricial las siguientes combinaciones lineales entre las filas o columnas de la matriz A.

- a) Sumar a la primera, la tercera columna multiplicada por 2.
- b) Restar de la tercera fila la suma de la primera y la cuarta.
- c) Sumar a la cuarta fila multiplicada por 2, el duplo de la primera y la mitad de la segunda.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

/5. Transforme

5. Transforme mediante operaciones matriciales, la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- a) en una matriz de  $3 \times 3$ , agregando las columnas uno y tres;
- b) en una matriz de  $2 \times 2$ , agregando las dos primeras líneas y columnas y la tercera y cuarta columna;
- c) en un vector columna cuyos elementos sean la suma de los elementos de cada línea;
- d) en un escalar que sea igual a la suma de los elementos de la matriz.

6. Si

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{bmatrix}$$

es una matriz de transacciones intersectoriales en términos físicos, en donde existen cinco clases de bienes y un solo factor productivo. Sabiendo que los precios de los distintos bienes son:  $p_1, p_2, \dots, p_5$  y que el precio del factor productivo es  $p_v$ , exprese mediante operaciones matriciales, la matriz de transacciones en términos monetarios, de manera que incluya en una fila los valores brutos de las producciones sectoriales.

/7. Dada

7. Dada la siguiente matriz de contabilidad económica,

	1	2	G	F	Ib	Total
1 Sector 1	49	20	10	30	36	130
2 Sector 2	30	10	20	60	10	130
3 Gobierno	25	30	—	10	—	65
4 Familias	30	60	20	—	—	110
5 Ahorro	5	10	15	10	—	40
6 Totales	130	130	65	110	40	

- a) Mediante operaciones matriciales, transfórmela en la matriz de insumo-producto.
- b) Por un procedimiento similar, encuentre la matriz de cuentas nacionales.

ALGEBRA LINEAL

Seminario Nº 2 - Soluciones

1.

$$a) \quad (ABC)' = \{(AB)C\}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}'$$

$$(ABC)' = \left\{ \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & 15 \\ 9 & 16 \\ 7 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}' = \begin{pmatrix} 21 & 15 & 29 \\ 24 & 15 & 31 \\ 27 & 16 & 34 \\ 21 & 16 & 30 \end{pmatrix}'$$

$$(ABC)' = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 27 & 21 \\ 15 & 15 & 16 & 16 \\ 29 & 31 & 34 & 30 \end{pmatrix}$$

$$C' B' A' = C'(B'A') = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}'$$

$$C' B' A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 7 \\ 15 & 15 & 16 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 27 & 21 \\ 15 & 15 & 16 & 16 \\ 29 & 31 & 34 & 30 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad (ABC)' = \{A(BC)\}' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}'$$

$$(ABC)' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}' = \begin{pmatrix} 161 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 161 \end{pmatrix} \quad /C'B'C'$$

$$C^T B^T C^T = (C^T B^T) A^T = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & \sqrt{9} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T B^T C^T = \begin{bmatrix} \sqrt{19} & 12 & 22 & \sqrt{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161 \end{bmatrix}$$

2.

a)

$$\begin{bmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{5,2} & A_{5,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{2,1} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C_{2,1} = A_{2,2} B_{2,1} + A_{2,3} B_{3,1} & C_{2,3} = A_{2,2} B_{2,3} + A_{2,3} B_{3,3} \\ C_{5,1} = A_{5,2} B_{2,1} + A_{5,3} B_{3,1} & C_{5,3} = A_{5,2} B_{2,3} + A_{5,3} B_{3,3} \\ C_{3,1} = A_{3,2} B_{2,1} + A_{3,3} B_{3,1} & C_{3,3} = A_{3,2} B_{2,3} + A_{3,3} B_{3,3} \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} X_{1,5} & X_{1,3} \\ X_{3,5} & X_{3,3} \\ X_{2,5} & X_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{5,2} & Y_{5,3} \\ Y_{3,2} & Y_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1,2} = X_{1,5} Y_{5,2} + X_{1,3} Y_{3,2} & Z_{1,3} = X_{1,5} Y_{5,3} + X_{1,3} Y_{3,3} \\ Z_{3,2} = X_{3,5} Y_{5,2} + X_{3,3} Y_{3,2} & Z_{3,3} = X_{3,5} Y_{5,3} + X_{3,3} Y_{3,3} \\ Z_{2,2} = X_{2,5} Y_{5,2} + X_{2,3} Y_{3,2} & Z_{2,3} = X_{2,5} Y_{5,3} + X_{2,3} Y_{3,3} \end{bmatrix}$$

3.

a)

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

/b)

$$b) \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2k & 3k & 4k & 6k & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & k \\ 1 & 0 & -1 & 0 & k \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & n & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2n & 0 & 1 \\ k & 0 & -kn & 0 & k \\ -2 & 3 & 4n & 6 & 0 \\ 2m & -5m & 3mn & 0 & -m \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{g)} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{h)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 9 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 18 & -4 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -15 & -2 \end{bmatrix}$$

4.

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

/b)

$$b) \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & 0.5 & \cdot & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$5. a) \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 16 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 16 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} P_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & P_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & P_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11}P_1 & x_{12}P_1 & x_{13}P_1 & x_{14}P_1 & x_{15}P_1 \\ x_{21}P_2 & x_{22}P_2 & x_{23}P_2 & x_{24}P_2 & x_{25}P_2 \\ x_{31}P_3 & x_{32}P_3 & x_{33}P_3 & x_{34}P_3 & x_{35}P_3 \\ x_{41}P_4 & x_{42}P_4 & x_{43}P_4 & x_{44}P_4 & x_{45}P_4 \\ x_{51}P_5 & x_{52}P_5 & x_{53}P_5 & x_{54}P_5 & x_{55}P_5 \\ X_1 P_1 & X_2 P_2 & X_3 P_3 & X_4 P_4 & X_5 P_5 \end{bmatrix} \underline{1/}$$

7.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & 20 & 10 & 30 & 30 \\ 30 & 10 & 20 & 60 & 10 \\ 25 & 30 & \cdot & 10 & \cdot \\ 30 & 60 & 20 & \cdot & \cdot \\ 5 & 10 & 15 & 10 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} & 1 & 2 & DF \\ 1 & 40 & 20 & 70 \\ 2 & 30 & 10 & 90 \\ VA & 60 & 100 & 55 \end{matrix}$$

1/ En donde  $X_i$  es la producción física de bienes  $i$ .

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & 20 & 10 & 30 & 30 \\ 30 & 10 & 20 & 60 & 10 \\ 25 & 30 & \cdot & 10 & \cdot \\ 30 & 60 & 20 & \cdot & \cdot \\ 5 & 10 & 15 & 10 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} P \\ Y_g \\ Y_f \\ A \end{matrix} \begin{bmatrix} P & C_g & C_p & I_b \\ 100 & 30 & 90 & 40 \\ \hline 55 & \cdot & 10 & \cdot \\ 90 & 20 & \cdot & \cdot \\ 15 & 15 & 10 & \cdot \end{bmatrix}$$

1. 1. 1.

2. 2. 2.

3. 3. 3.

4. 4. 4.

5. 5. 5.

6. 6. 6.

7. 7. 7.

8. 8. 8.

9. 9. 9.

10. 10. 10.

11. 11. 11.

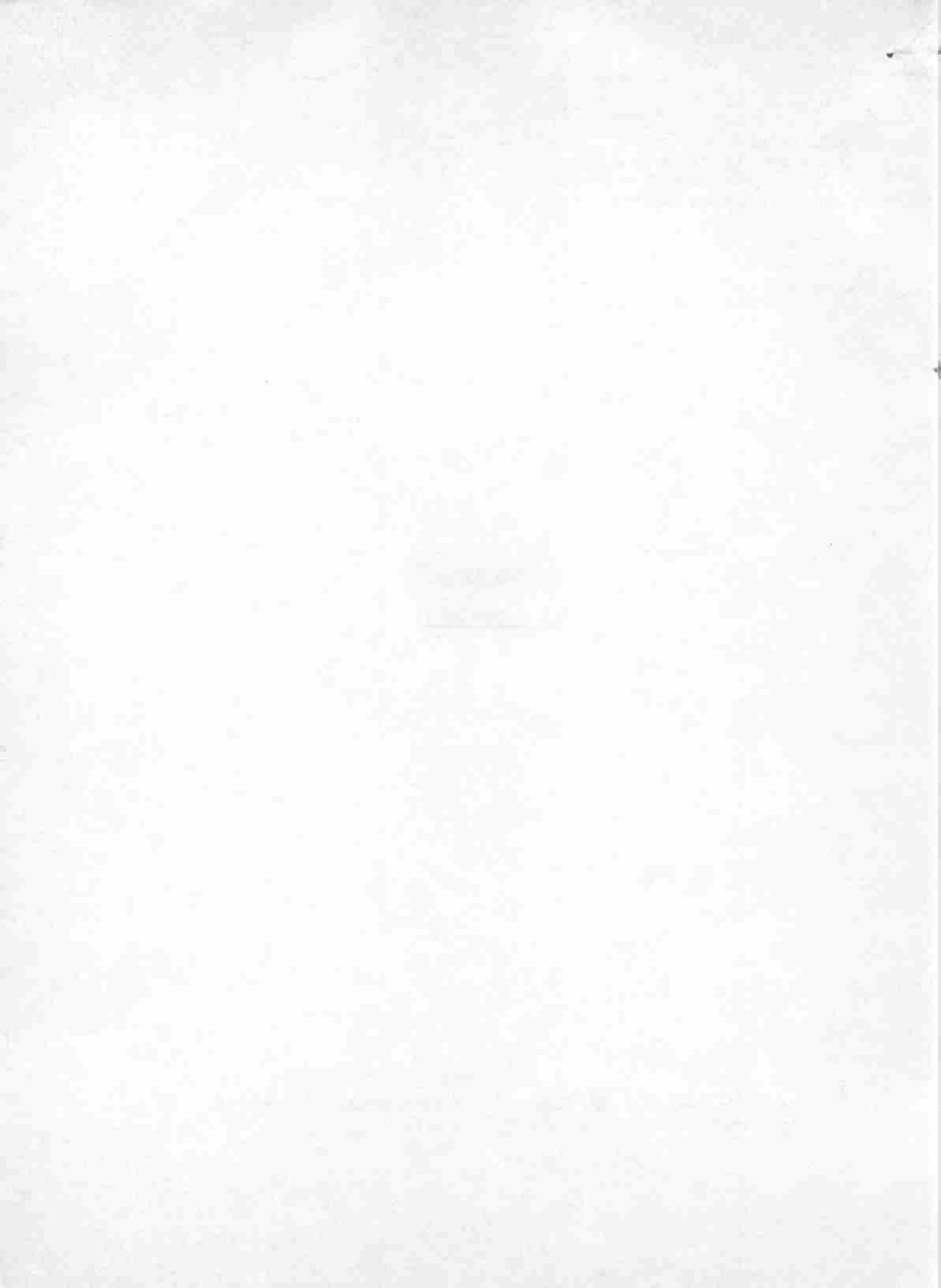
12. 12. 12.

PRELIMINAR  
Instituto Latinoamericano de  
Planificación Económica y Social  
Santiago, agosto de 1966

ALGEBRA LINEAL\*

Seminario N° 3

\* Programa de Capacitación. Especialidad de Programación General.  
Profesores Eduardo Naón y Juan De Barbieri.



ALGEBRA LINEAL

Seminario N° 3

1. Indique el valor de los siguientes determinantes, aplicando la definición de los mismos.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} ; & \text{b)} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} ; & \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{vmatrix} \\
 \text{d)} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{vmatrix} ; & \text{e)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

2. Verifique la validez de las siguientes igualdades y generalizando el resultado enuncie la propiedad correspondiente.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} \\
 \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix} \\
 \text{d)} \begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2^2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

/e)

$$e) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$h) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

3. a) Resuelva el  $|A|$  por cofactores, desarrollando por los elementos de la primer fila.

Si: i)  $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

ii)  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

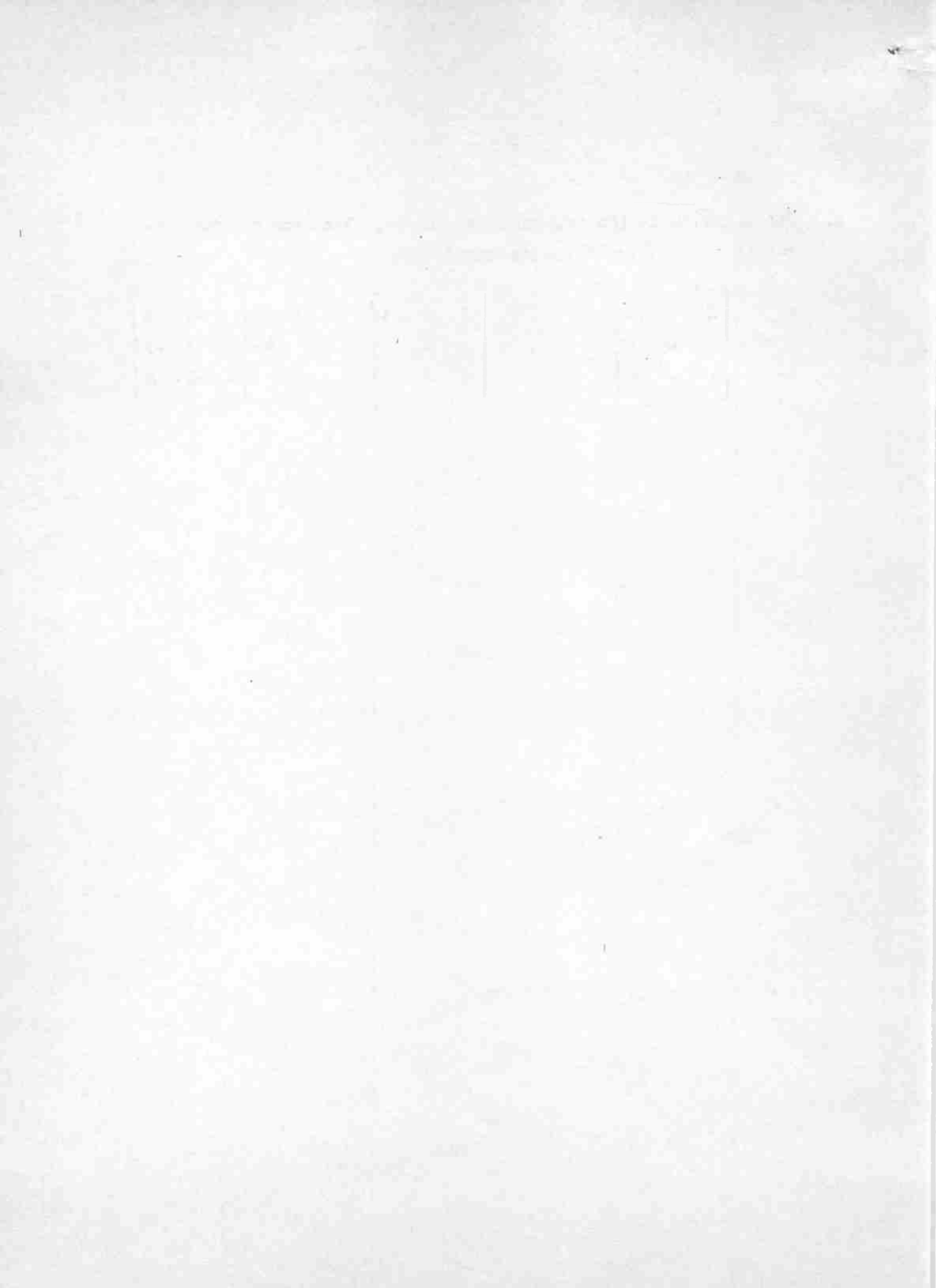
b) Verifique en 3.a.ii) que el desarrollo por cofactores ajenos es nulo, realizando la siguiente operación:

$$3 |A_{11}| \neq 2 |A_{12}| \neq 3 |A_{13}| \neq 2 |A_{14}| = 0$$

/4. Por el

4. Por el método de los determinantes encuentre las matrices recíprocas de  $A$  y verifique los resultados.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6 \end{bmatrix} ; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \cdot & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ -3 & 6 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$



ALGEBRA LINEAL

Seminario N° 3 Solución

1. a)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1$

b)  $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 1 - 5 \times 2 = -13$

c)  $\begin{vmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{vmatrix} = 2^3 = 8$

d)  $\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{vmatrix} = 1$

e)  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 0 \times 1 - 3 \times 3 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 - 4 \times 3 \times 2 - 3 \times 2 \times 1 - 1 \times 0 \times 1 = -17$

f)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{1/}{=} 2 \times 4 \times 3 - 3 \times 2 \times 1 + 5 \times 1 \times (-1) - 2 \times 2 \times (-1) - 3 \times 1 \times 3 - 5 \times 4 \times 1 = 0$

2. a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$

1/ Observar que la primera fila es igual a la suma de la segunda y la tercera.

/El valor

El valor de un determinante no se altera al trasponerlo.

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 24 \quad y \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -24$$

Si se permutan 2 líneas (filas o columnas) entre sí, el valor absoluto del determinante no varía aunque sí su signo.

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix} = 0$$

Si un determinante tiene 2 líneas (f.o.c.) idénticamente iguales su valor es nulo.

$$d) \begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -68 \quad y \quad 2^2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2^2 \times (-17) = -68$$

Si se multiplican los elementos de una línea por una constante el determinante queda multiplicado por dicha constante.

$$e) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Si los elementos de una línea (f.o.c.) son proporcionales a los de otra paralela a ella, el determinante es nulo.

$$f) \begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -68; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24 \quad y \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -44$$

$-68 = -24 - 44$

/Si los

Si los elementos de una línea (f.o.c.) son polinomios de n términos, el determinante se puede descomponer en suma de n determinantes que tienen las mismas restantes líneas, y en lugar de aquella, la formada por los primeros sumandos, por los segundos ... por los n-ésimos respectivamente.

$$g) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24$$

Observar que la primera fila del segundo determinante es igual a la suma de la primera más el triple de la tercera del primer determinante.

Si a los elementos de una línea (f.o.c.) se les suma los correspondientes a una paralela a ella multiplicados por un factor cualquiera el determinante no varía.

$$h) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Observar que en el primer determinante la segunda fila es igual a la primera más la tercera multiplicada por tres, y en el segundo la tercera columna es igual a la primera multiplicada por dos más la segunda multiplicada por tres.

Si una línea (f.o.c.) de un determinante es suma algebraica de varias paralelas a ella multiplicadas por un coeficiente cualquiera, el determinante es nulo. En este caso se dice que dicha línea es "Combinación lineal" de las otras.

3a.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-2) - 1(-19) + 0 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \times 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &\neq 2 \times 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 7 + 2 \times 4(-7) + 7 - 2 \times 7 = -7 \end{aligned}$$

3b.

$$\begin{aligned} 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 3 \times 0 - 2(-7) + 3 \times 0 - 2 \times 7 = 0 \end{aligned}$$

4a.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6 \end{vmatrix} = 48$$

$$\text{Adj. } A = \begin{bmatrix} 24 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 8 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj. } A = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 24 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{4} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{4} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$4b. \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \cdot & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 ; \quad \text{adj. } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

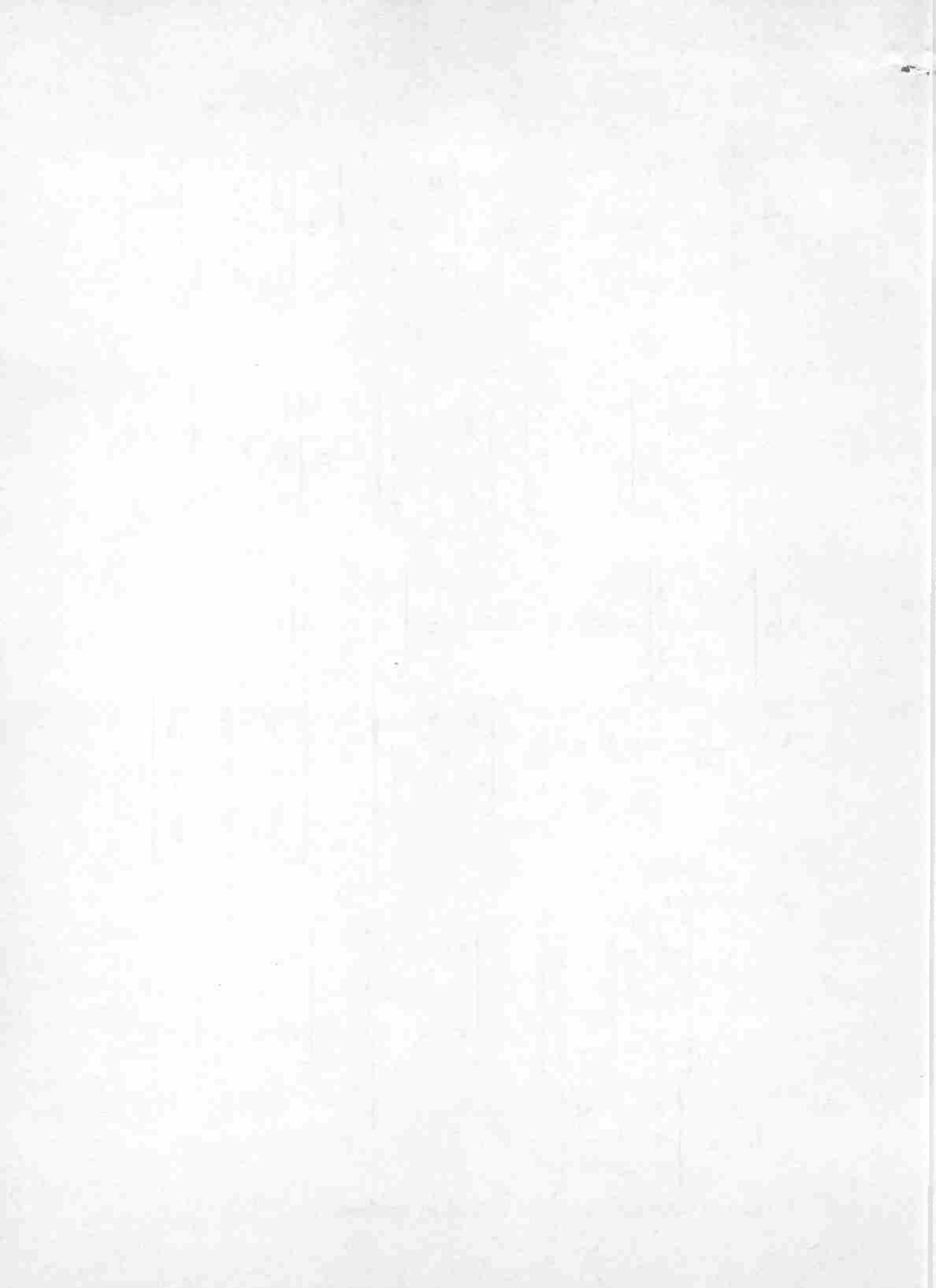
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj. } A = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \cdot & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$4c. \quad |A| = \begin{vmatrix} 9 & -6 & -2 \\ -3 & 6 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Siendo la matriz singular no existe su recíproca.



CONTROL DE ALGEBRA LINEAL

1. Dado el producto matricial  $B_{nk} A_{km} = C_{nm}$ , consigne las submatrices o menores de B y A que determinan la submatriz

$$C = \begin{bmatrix} C_{43} & C_{44} & C_{4(m-1)} \\ C_{n3} & C_{n4} & C_{n(m-1)} \end{bmatrix}$$

- Se recomienda efectuar el producto para verificar el resultado.

2. Calcule la inversa de la matriz A por el método de Jordan y verifique el resultado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

en donde  $|A| = -1$

3. Dé ejemplos numéricos de los siguientes tipos de sistemas de ecuaciones, consignando explícitamente las condiciones que hacen válido el ejemplo. <sup>1/</sup>
- a) sistema no homogéneo compatible determinado en el caso que  $m > n$ .
  - b) sistema no homogéneo compatible indeterminado en el caso que  $m = n$ .
  - c) sistema homogéneo incompatible.
  - d) sistema homogéneo compatible indeterminado.

---

<sup>1/</sup>  $m$  = número de ecuaciones.  
 $n$  = número de incógnitas.

