PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificacion Económica y Social
Santiago, septiembre de 1967

ECUACIONES EN

DIFERENCIAS FINITAS *

* Tomado de Apuntes preparados en 1966 por el señor Mario La Fuente. Programa de Capacitación. Especialidad de Programación General. Profesor: señor Pedro Sáinz.

Ecuaciones en diferencias finitas

El análisis económico en uno de sus aspectos exige la manipulación de cantidades que reflejan el comportamiento de las variables consideradas en conexión con un problema determinado. Estas cantidades (generalmente referidas a ingresos, ahorros, consumo, etc.) están disponibles usualmente, por razones prácticas, para períodos específicos de tiempo que en la mayoría de los casos están espaciados en forma uniforme (datos mensuales, trimestrales, anuales). Por tal razón, es más realista considerar las variables económicas como discretas (esto no implica desconocer la importancia de los métodos en que se asume la continuidad de las variables). De hecho, es corriente y ventajoso analizar la evolución de las variables visualizando los cambios económicos a través del tiempo. Este análisis puede efectuarse estudiando la relación existente entre varias variables (regresión y correlación), haciendo explícita la variable tiempo (tendencia) o bien tratando de explicar los sucesos de un período - haciendo abstracción de factores exógenos - a partir de los acaecidos durante los períodos anteriores (análisis por períodos).[1/] La mayoría de los modelos de diagnóstico y programación se basan en este último tipo de razonamiento. De ahí su importancia. Ahora bien, un ingrediente importante del análisis por períodos son las ecuaciones en diferencias. Antes de estudiar las ecuaciones en diferencia y sus soluciones, es necesario introducir los elementos básicos del cálculo de diferencias finitas y explorar algunas propiedades de los operadores correspondientes.

Funciones

Conviene recordar que una función es una relación entre dos variables tal que - para un conjunto dado de valores (dominio de la función) de una de las variables (x) - permite asociar un valor de la otra variable (la función y) con cada número del dominio de la función. El valor de una función para el número x es el número "y" que la relación asocia a x. Si se designa la función con y, el valor de y en (o para) x se distingue con y_x o $y(x)$. Ejemplos de funciones se tienen en:

1/ Aunque se mencionan separadamente, los métodos enumerados no son excluyentes.

1) $y = 3x + 2$

2) $y = 6x^2 + 5x + 1$

3) $y = \text{sen } x$

o aún en la tabla:

4)

x	0	3	5	10	15
y	5	10	22	200	300

Utilizando la notación anteriormente indicada, se tiene que:

en 1) $y_o = 2$

$y(3) = 11$

en 2) $y(1) = 12$

$y(2) = 35$

en 4) $y(10) = 200$

$y(15) = 300$

<u>El operador Δ</u>

Si se está interesado en estudiar los cambios en el valor de una función (y) al cambiar de un número (x) a otro (x+h) en el dominio, es posible definir una nueva función (Δ y) cuyo valor en x (Δy_x) esté dado por:

$$\Delta y (x) = y (x+h) - y (x)$$

El símbolo Δ llamado operador de diferencia indica la operación que debe efectuarse con la función y. El número h se denomina intervalo de la diferencia.

Si, por ejemplo, "y" designa la función ingreso, siendo y(x) el ingreso en el año x, el cambio en el ingreso en un quinquenio estará dado por: $\Delta y(x) = y (x+5) - y(x)$ en que el intervalo de la diferencia es 5.

/En la

En la función: $y = 3x + 2$, si se toma un intervalo de diferencia de 1,5, $\Delta y(1) = y(1+1,5) - y(1)$ $\Delta y(1) = 9,5 - 5 = 4,5$

$\Delta y(2,7) = y(2,7 + 1,5) - y(2,7) = 11,6 - 10,1 = 4,5$

De la definición y los ejemplos se puede deducir que es posible calcular diferencias finitas a una función para cualquier valor de la variable y utilizando distintos intervalos. Sin embargo, desde el punto de vista de la aplicación de este concepto en economía, se hará una simplificación que - salvo mención expresa - será válida en todo el desarrollo de este trabajo.

En efecto, si se tiene en cuenta que el análisis por períodos está referido a lapsos de tiempo específicos que en general se designan por los números naturales una vez elegidos un origen y una unidad, los valores de las variables para los que se requiere conocer el valor de una función o su diferencia son números enteros y el intervalo de diferencia a utilizar es 1(que puede implicar distintos períodos de tiempo de acuerdo a la unidad previamente elegida). Por tal razón, generalmente se utilizarán los símbolos n (por tratarse de números enteros) o t (al referirse a tiempo) para indicar las variables (o los números) con los cuales se asocia la función en estudio y la diferencia se calculará considerando un intervalo igual a la unidad.

Así, por ejemplo: si se denomina C al consumo de un bien,

C_t será el consumo en el año t

C_{t+1} será el consumo en el año t + 1

C_{t+5} será el consumo en el año t + 5

si la unidad elegida es un año; pero puede referirse a meses, trienios o quinquenios si la unidad es otra. $\Delta C_t = C_{t+1} - C_t$ da el aumento (o disminución de acuerdo al signo) registrado en el consumo del bien del período t al período (t+1).

Si p(n) designa la probabilidad de ocurrencia de cierto suceso en n intentos, $\Delta p(n) = p(n + 1) - p(n)$ dará el cambio en la probabilidad al realizar el intento (n + 1).

La diferencia cuantifica los cambios absolutos registrados en la función al variar en una unidad la variable; por cambio relativo se entiende el

/cambio absoluto

cambio absoluto dividido por el valor inicial de la función, esto es:

$$\frac{\Delta p(n)}{p(n)} ; \quad \frac{\Delta Ct}{Ct}$$

haciendo referencia a los ejemplos anteriores. Cuando se trata de cambios en el tiempo es habitual denominar este cambio relativo <u>tasa de cambio</u> en el período t.

<u>Propiedades del operador Δ</u>

Ya se indicó que siendo "y" una función definida para números enteros que toma los valores: y(1); y(2); y(3); ....; y(n-1); y(n), la diferencia de y(n) queda definida por:

$$\Delta y(n) = y\ (n+1) - y(n).$$

Se puede, si se desea, aplicar el operador Δ a la función Δy, de manera que:

$$\Delta [\Delta y\ (n)] = \Delta y(n+1) - \Delta y(n)$$

A esta diferencia se la denomina segunda diferencia (o diferencia de segundo orden), mientras se deja el nombre de primera diferencia (o diferencia de primer orden) a la definida para la función original.

Del mismo modo, la diferencia de tercer orden queda definida por:

$$\Delta [\Delta^2\ y(n)] = \Delta^2 y(n + 1) - \Delta^2 y(n).$$

Nótese que se emplea el símbolo Δ^2 para designar la segunda diferencia; igualmente Δ^3 se utiliza para referirse a la diferencia de tercer orden; Δ^4 a la diferencia de cuarto orden y así sucesivamente. En general Δ^r sirve para indicar la diferencia de orden r de una función. La diferencia de orden r no es más que la diferencia de las diferencias de orden (r - 1).

$$\Delta^r y(n) = \Delta [\Delta^{r-1} y(n)]$$

/El siguiente

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de diferencias de distintos órdenes:

n	y(n)	$\Delta y(n)$	$\Delta^2 y(n)$	$\Delta^3 y(n)$	$\Delta^4 y(n)$	$\Delta^5 y(n)$
0	0	1	30	150	240	120
1	1	31	180	390	360	120
2	32	211	570	750	480	
3	243	781	1 320	1 230		
4	1 024	2 101	2 550			
5	3 125	4 651				
6	7 776					

Este cuadro se conoce con el nombre de tabla de diferencias. Cada uno de los valores de las distintas columnas se obtuvo por diferencia de los dos valores consecutivos correspondientes de la columna inmediata anterior.

Regla de los exponentes:

De la definición de diferencias de distintos órdenes y la notación empleada para designarlas se desprende que el operador Δ sigue la regla de los exponentes:

$$\Delta[\Delta y(n)] = \Delta^2 y(m)$$

$$\Delta\Delta\Delta y(n) = \Delta^3 y(n)$$

y en general:

$$\text{i)} \quad \underline{\Delta^r \Delta^s y(n) = \Delta^{r+s} y(n)}$$

No obstante, debe recordarse que el papel que juegan estos "exponentes" del operador es el de indicar el orden de la diferencia correspondiente.

Ley conmutativa: la diferencia del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la diferencia de la función.

$$\text{ii)} \quad \underline{\Delta c\, y_t = c\, \Delta y_t}$$

/Ley distributiva:

Ley distributiva: la diferencia de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las diferencias de cada función.

$$\text{iii)}\ \underline{\Delta [y_t + x_t - w_t] = \Delta y_t + \Delta x_t - \Delta w_t}$$

Relación entre la diferencia de orden r y los valores originales de la función: es evidente, como se desprende de la definición de diferencias de orden superior al primero, que se puede expresar una diferencia cualquiera en términos de los valores de la función. Así:

$$\Delta^2 y_n = \Delta [\Delta y_n] = \Delta [y_{n+1} - y_n] = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$\Delta^2 y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

y del mismo modo:

$$\Delta^r y_n = \binom{r}{0} y_{n+r} - \binom{r}{1} y_{n+r-1} + \dots + (-1)^r y_n$$

en que $\binom{r}{0}$, $\binom{r}{1}$, etc. son los coeficientes del desarrollo del binomio $(a + b)^r$. En resumen:

$$\text{iv)}\ \underline{\Delta^r y_n = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i y_{n+r-i}}$$

Análogamente es posible encontrar un valor de la función a partir de un valor anterior y diferencias de distinto orden:

$$\text{v)}\ \underline{y_{n+r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \Delta^i y_n}$$

Si, a manera de ilustración, se aplican estas expresiones a los datos de la tabla de diferencias ya calculada:

$$\Delta^4 y(2) = \binom{4}{0} y(2+4) + \binom{4}{1} (-1) y(2+3) + \binom{4}{2} y(2+2) + \binom{4}{3}(-1) y(2+1) + \binom{4}{4} y(2)$$

$$\Delta^4 y(2) = 7776 - 4 \cdot 3125 + 6 \cdot 1024 - 4 \cdot 243 + 32 = \underline{\underline{480}}$$

/y(3)=

$$y(3) = \binom{3}{0} y(0) + \binom{3}{1} \Delta y(0) + \binom{3}{2} \Delta^2 y(0) + \binom{3}{3} \Delta^3 y(0)$$

$$y(3) = 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 30 + 150 = \underline{\underline{243}}$$

Diferencia de un producto: si u y v son dos funciones de n, entonces la diferencia del producto de ambas viene dada por:

$$\text{vi)} \quad \underline{\Delta [u_n \cdot v_n] = v_{n+1} \Delta u_n + u_n \Delta v_n}$$

Diferencia de un cociente: dadas las funciones de n, u y w, la diferencia del cociente entre ellas se obtiene por:

$$\text{vii)} \quad \underline{\Delta \frac{u_n}{w_n} = \frac{w_n \Delta u_n - u_n \Delta w_n}{w_n \cdot w_{n+1}}}$$

Diferencia de una función potencial: siendo y un polinomio de grado r:

$$y_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_r n^r$$

con a_0, a_1, ... a_r constantes arbitrarias, la diferencia de orden r de y es una constante y todas las diferencias de orden superior son nulas.

$$\text{viii)} \quad \underline{\Delta^r y(n) = r! \cdot a_r} \text{ (constante)}$$

$$\underline{\Delta^p y(n) = 0} \quad \text{si } p > r$$

Además: $$\underline{\Delta y(n)} = \sum_{k=0}^{r} \Delta a_k n^k = \underline{\sum_{k=0}^{r} a_k [(n+1)^k - n^k]}$$

es decir, es un polinomio de grado (r - 1).

Diferencia de una función factorial: se debe recordar previamente que la función factorial de orden r (r = 1,2, 3, ...) es aquella función cuyo valor en n está dado por: $n^{(r)} = n(n-1)(n-2) \dots [n - (r-1)]$

/ix)

ix) $\Delta n^{(r)} = r\, n^{(r-1)}$

es decir, la diferencia de la función factorial de orden r es r veces la función factorial de orden (r - 1).

Además:

$$\Delta^r n^{(r)} = r!$$

esto es, la diferencia de orden r de una función factorial del mismo orden es r !. Diferencia de una función exponencial: si Z es una función exponencial cuyo valor para n está dado por : $Z_n = a^n$; la diferencia de orden r de z es:

x) $\Delta^r a^n = (a-1)^r \cdot a^n$

Operaciones con Δ: si se tiene una función del operador Δ aplicada sobre y_n es posible realizar operaciones algebraicas en ella sin que se altere el resultado a obtener.

Así, por ejemplo:

1) $\Delta^2 y_n + 3\Delta y_n - 18 y_n = (\Delta^2 + 3\Delta - 18) y_n = (\Delta + 6)(\Delta - 3) y_n$

2) $(\Delta^2 + 3\Delta + 2) z_t = (\Delta + 2)(\Delta + 1) z_t = \Delta^2 z_t + 3\Delta z_t + 2 z_t$

3) $\Delta y_n + \Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n = (\Delta + \Delta^2 + \Delta^3) y_n = (1 + \Delta^2 + \Delta^3)\Delta y_n$

No obstante, es importante destacar que Δ, como todo operador, sólo tiene sentido al ser aplicado sobre alguna función específica. Las operaciones con el operador a que se hace referencia en este párrafo tienen por objeto facilitar la obtención de los resultados.

/El operador E

El operador E

El operador E sirve para indicar el cambio del valor de una función en un número determinado (y_x) al valor que toma para el número más el intervalo de diferencia (y_{x+h}).[1] Es decir:

$$Ey_x = y_{x+h}$$

Como ya se indicó anteriormente, interesa en especial el caso en que el intervalo de diferencia es la unidad; en consecuencia, el operador E queda definido por: i) $Ey_x = y_{x+1}$

Desde luego, puede repetirse la aplicación del operador: EEy_x

$$EEy_x = Ey_{x+1} = y_{x+2} = E^2y_x$$

La aplicación sucesiva r veces del operador lleva a definir: ii) $E^ry_x = y_{x+r}$

Obsérvese que en esta definición r puede ser negativo, indicando en ese caso un cambio en el valor de la función en sentido contrario. Por ejemplo:

$$E^{-3}\, y_x = y_{x-3}$$

Regla de los exponentes: definido de esta manera el operador E, es fácil deducir que los "exponentes" funcionan como es tradicional en el álgebra ordinaria: iii) $E^p \cdot E^q\, y_t = E^{p+q}y_t$

Esto es similar a lo que ocurría con el operador Δ. Análogamente, E tiene estas otras propiedades:

Ley conmutativa: iv) $E^p\, cy_x = cE^p\, y_x$ (c = constante)

Ley distributiva: v) $E^q(y_x + z_x) = E^q\, y_x + E^q z_x$

1/ Obviamente es necesario que (x + h) pertenezca al dominio de la función.

/Operaciones con

<u>Operaciones con E</u>: si se tiene una función de E aplicada sobre z_t, son factibles las operaciones algebraicas en ella; los resultados no se alteran.

<u>Ejemplos</u>: 1) $(E^2 - 5E + 6)y_x = (E - 3)(E - 2)y_x$

2) $(E^2 + 2E)(E + 1)z_t = (E^3 + 3E^2 + 2E)z_t$

<u>Relación entre Δ y E</u>

Como ya se vió: $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

que se puede escribir $\Delta y_n = Ey_n - y_n$

$$\Delta y_n = (E - 1)y_n$$

Este resultado significa que la operación que define el operador Δ es idéntica a la definida por el operador (E-1). Trabajando simbólicamente con los operadores podemos escribir la proposición anterior:

i) $\underline{\Delta \equiv (E - 1)}$

De esta identidad fundamental se pueden deducir las siguientes:

ii) $(\Delta + 1) \equiv E$

iii) $(E - \Delta) \equiv 1$

que son fácilmente verificables. En efecto:

i) $(\Delta + 1)y_n = \Delta y_n + y_n = y_n + 1 - y_n + y_n = E\, y_n$

ii) $(E - \Delta)y_n = Ey_n - \Delta y_n = y_n + 1 - y_n + 1 + y_n = y_n$

La equivalencia anterior es importante porque implica que todos los teoremas del álgebra se pueden aplicar a estos dos operadores. Así, por ejemplo:

$$E^k\, y_x = (\Delta + 1)^k\, y_x = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i}\, y_x$$

$$\Delta^k y_x = (E - 1)^k\, y_x = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E^{k-i} (-1)^i\, y_x$$

$$f(E)y_x = f\,(1 + \Delta)\,y_x$$

$$= f\,(1)\,y_x + f'(1)\,\Delta\,y_x + \frac{f''(1)}{2!}\,\Delta^2 y_x + \ldots + \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,\Delta^k y_x + \ldots$$

$$f\,(\Delta)\,y_x = f\,(-1+E)\,y_x = f\,(-1)\,y_x + f'\,(-1)Ey_x + \frac{f''(-1)}{2!}\,E^2 y_x + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}\,E^k\,y_x + \ldots$$

Estas relaciones y otras similares permiten muchas veces la obtención de resultados que no se pueden lograr directamente. La siguiente ilustración así lo demuestra:

$$\frac{1}{E^2-4}\,(x^2-1) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{E-2} - \frac{1}{E+2}\right](x^2-1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\Delta-1} - \frac{1}{\Delta+3}\right](x^2-1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\Delta} - \frac{1}{3(1+\frac{\Delta}{3})}\right](x^2-1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-(1-\Delta)^{-1} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{\Delta}{3}\right)^{-1}\right](x^2-1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-(1+\Delta+\Delta^2+\ldots) - \frac{1}{3}\left(1-\frac{\Delta}{3}+\frac{\Delta^2}{9}-\ldots\right)\right](x^2-1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3} - \frac{8}{9}\,\Delta - \frac{28}{27}\,\Delta^2 - \ldots\right](x^2-1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3}\,(x^2-1) - \frac{8}{9}\,\Delta(x^2-1) - \frac{28}{27}\,\Delta^2\,(x^2-1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}\,(x^2-1) - \frac{8}{9}\,(2x+1) - \frac{28}{27}\cdot 2\right]$$

$$\frac{1}{E^2-4}\,(x^2-1) = -\frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}\,x - \frac{11}{27}$$

Ecuaciones en diferencias finitas

Se entiende por ecuación en diferencias (o de diferencias) finitas a una relación entre valores de una función y de una o más de sus diferencias para cada valor de un conjunto de números (que constituyen el dominio de la función).

En general, se trabajará con ecuaciones en diferencias definidas para el conjunto de números naturales. No obstanto, es evidente que cualquier conjunto de números puede ser el dominio de la función.

Así, por ejemplo, las siguientes relaciones son ecuaciones en diferencias finitas (no se hará mención del dominio de la función en el entendido de que está constituido por los números naturales):

1) $\Delta y_n + 3y_n = 0$

2) $\Delta^2 y_t + 3 \Delta y_t + y_t = 0$

3) $(\Delta y_n)^2 + (y_n)^2 = 10$

4) $y_{t+2} + y_{t+1} - 3y_t = t^2 - 7$

Si en la ecuación 1) se reemplaza Δy_n por $y_{n+1} - y_n$, la ecuación queda: $y_{n+1} + 2 y_n = 0$.

Análogamente, la ecuación 2) puede escribirse como:

$$y_{t+2} + y_{t+1} - y_t = 0$$

La ecuación 3, a diferencia de las restantes, presenta los valores de y_n y Δy_n elevados al cuadrado. Se puede, entonces, hablar de ecuaciones de diferencias de segundo, tercer etc., grado. Se analizarán solamente ecuaciones de primer grado.

Una ecuación lineal (de primer grado) en diferencias, en términos generales puede expresarse:

$$f_0 (n) y_{n+r} + f_1 (n) y_{n+r-1} + \dots + f_r (n) y_n = g (n)$$

Nótese que esta última ecuación incluye implícitamente una diferencia de orden r (que al desarrollarse en función de los valores de y_n incluye hasta y_{n+r}) por lo que se dice que la ecuación es de orden r. Es decir,

/el orden

el orden de una ecuación en diferencias es igual al más alto de las diferencias incluidas. Como regla práctica, el orden de una ecuación puede obtenerse restando al mayor valor de la variable (n+r), el menor (n) que aparecen definiendo un valor de la función. Por ejemplo, la ecuación 1) es de primer orden, la 2) y 4) son de segundo orden (todas de primer grado) y la 3) es de segundo orden y de segundo grado.

En la ecuación f_0, f_1, f_2 .... f_r y g son funciones de n (pero no de y_n) definidas para el mismo dominio de y_n. No obstante, interesa en especial el caso en que:

$$f_0(n) = a_0$$
$$f_1(n) = a_1$$
$$f_2(h) = a_2$$
$$\vdots$$
$$f_r(n) = a_r$$

siendo a_0, a_1, a_2 ..... a_r constantes; esto es ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes, cuya expresión general puede escribirse:

$$\underline{a_0\, y_{n+r} + a_1\, y_{n+r-1} + \dots + a_r\, y_n = g(n)}$$

Cuando g(n) = 0, la ecuación en diferencias se denomina ecuación homogénea.

El problema que debe encararse es el de la solución de una ecuación en diferencias. ¿Qué se entiende por solución de una ecuación en diferencias? Recuérdese que en algebra solucionar la ecuación x + 3 = 0 equivale a encontrar un valor de x (en este caso -3) que satisface la ecuación. Ahora bien, una ecuación en diferencias incluye valores de una función (y_{n+r}, y_{n+r-1}, y_{n+r-2}, etc.), pero cuál es la función cuyos valores satisfacen la ecuación? Justamente, <u>la solución de una ecuación en diferencias</u> es la función que satisface la ecuación, es decir, la convierte en una identidad. Así por ejemplo:

1) $y_t = A \cdot 2^t$ es la solución de $y_{t+1} - 2y_t = 0$

2) $y_n = A_n + B$ es la solución de $y_n{+}2 - 2y_{n+1} + y_n = 0$

/En estos

En estos ejemplos, la función que es solución de la ecuación es una expresión que define infinitos conjuntos de valores que dependen de las constantes (A en el primer caso y A y B en el segundo) que en ella aparecen. Por tal razón, este tipo de solución se denomina <u>solución general</u> de la ecuación en diferencias.

Si se asigna determinado valor a las constantes de la solución se obtiene una <u>solución particular</u> de la ecuación en diferencias. Utilizando los ejemplos anteriores, suponga que se desea encontrar una solución para la que $y_o = 5$ en la ecuación 1) y en la ecuación 2) $y_o = 10$ e $y_1 = 16$:

1) $y_{t+1} - 2\,y_t = 0$ solución general: $y_t = A \cdot 2^t$ que debe cumplirse para todo valor de t, por lo tanto: $5 = A \cdot 2^o \longrightarrow A = 5$

Es decir, $y_t = 5 \cdot 2^t$ define una solución particular de la ecuación.

2) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$ solución general: $y_n = A_n + B$
al reemplazar t por 0 y 1 respectivamente e igualar la expresión resultante a los valores dados se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 10 = A \cdot 0 + B \\ 16 = A \cdot 1 + B \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} B = 10 \\ A = 6 \end{array}$$

de donde se consigue la solución particular $y_n = 6\,n + 10$.

Debe destacarse que las soluciones particulares encontradas en los casos anteriores se obtuvieron a partir de un valor en 1) y de dos valores en 2) -valores que se designan con el nombre de condiciones iniciales- que corresponden al orden de la ecuación en cuanto a número de ellos se refiere.

En efecto, esto es consecuencia del teorema que enunciamos, sin demostración, a continuación:

I. Una solución particular de una ecuación en diferencias de orden r se obtiene a partir de r condiciones iniciales.

En los ejemplos, las condiciones iniciales sirvieron para determinar el valor de las constantes que aparecían en la solución general, que en número deben coincidir con el de condiciones iniciales. Esto es, en resumen:

La solución general de una ecuación en diferencias de orden r debe tener r constantes arbitrarias.

/Como se

Como se ha visto, una ecuación en diferencias puede tener muchas soluciones. Resolver una ecuación de esta clase implica encontrar todas las soluciones. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones prácticas se requiere encontrar la solución (o las soluciones) sujeta a determinadas condiciones. En los modelos de programación, por citar un caso concreto, estas condiciones generalmente están definidas por los r valores históricos de la variable (o las variables) en estudio. El procedimiento habitual en estas situaciones consiste en resolver primero la ecuación en diferencias (esto es, encontrar todas las soluciones) y después seleccionar la solución particular que cumple con las condiciones estipuladas. Se encara, entonces, el problema de encontrar la solución general de una ecuación en diferencias.

<u>Solución de las ecuaciones del tipo</u> $(E - \lambda)^r y_n = 0$

Además de constituir el tipo más sencillo de ecuaciones en diferencias, la ecuación $\Delta^r y_n = 0$ permite obtener la solución de ecuaciones más complejas, razón por la que es necesario conocer su solución.

El caso más simple lo constituye la ecuación:

1) $(E - \lambda) y_n = 0$ que puede escribirse $y_{n+1} = \lambda y_n$

Como esta relación debe cumplirse para cualquier valor de n, se da:

$$y_n = y_{n-1} = {}^2y_{n-2} = {}^3y_{n-3} = \ldots\ldots = \lambda^n y_o$$

es decir, $y_n = y_o \cdot \lambda^n$ es la solución general de la ecuación 1).

Si se tiene la ecuación: $(E - \lambda)^r y_t = 0$ 2)

haciendo $y_t = \lambda^t \cdot z_t$ se tiene:

$$(E - \lambda)^r \lambda^t z_t = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\lambda^t (E\lambda - \lambda)^r z_t = 0$$

$$\lambda^t \cdot \lambda^r (E - 1)^r z_t = 0$$

λ^t y λ^r son constantes y además $E - 1 \equiv \Delta$, por lo que la relación se reduce a: $\Delta^r z_t = 0$ 2')

/Al estudiar

Al estudiar las propiedades de algunas funciones en conexión con el operador , se constató que un polinomio de grado k tenía nulas las diferencias de orden (k+1) o mayor. En consecuencia, la expresión:

$$A_o + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_{r-1} \cdot t^{r-1}$$

tiene diferencias de orden r nulas. Vale decir, esta expresión es solución de la ecuación 2'). Como se busca la solución general de la ecuación 2) se debe multiplicar este polinomio por λ^t, obteniéndose:

$$\underline{Y_t = \lambda^t \left[A_c + A_1 t + \dots + A_{r-1} \cdot t^{r-1} \right]}$$

o en forma más resumida: $\underline{y_t = \lambda^t \sum_{i=0}^{r-1} A_i \, t^i}$

la solución general de la ecuación $(E - \lambda)^r y_t = 0$. Las A_i son las constantes arbitrarias que debe contener la solución.

Para dar un ejemplo de un modelo económico, a partir de las relaciones:

$$\begin{cases} P_t = \alpha k_t \\ \Delta k_t = \beta P_t \end{cases}$$

que definen el modelo utilizado por la CEPAL en varios países, y en que:

p_t = producto en el año t

k_t = capital fijo en el año t

α = relación producto-capital

β = coeficiente de inversión

(α y β se consideran constantes) se puede llegar a la ecuación

$P_{t+1} - (1 + \alpha\beta) P_t = 0$ que escrita de otra manera:

$\left[E - (1 + \alpha\beta) \right] P_t = 0$ es del tipo de ecuaciones cuya solución se acaba de encontrar. Luego:

$$P_t = A \cdot (1 + \alpha\beta)^t$$

/Para encontrar

Para encontrar A, llamando 0 al año base

$$P_o = A \cdot (1 + \alpha\beta)^o \Longrightarrow A = p_o$$

o sea:

$$p_t = p_o \ (1 + \alpha\beta)^t$$

Se llega así a la conclusión de los modelos de Harrod y Domar de que la tasa de crecimiento del producto es igual al coeficiente de inversión por la relación producto-capital.

Solución de las ecuaciones en diferencias en general

La expresión general de una ecuación en diferencias

$$a'_o \ y_{n+r} + a'_1 \ y_{n+r-1} + \dots a'_r \ y_n = g'(n)$$

puede transformarse ligeramente dividiendo toda la expresión por a'_o (que es una constante distinta de 0) para tener:

$$y_{n+r} + a_1 \ y_{n+r-1} + \dots + a_r \ y_n = g \ (n)$$

La ecuación que se obtiene igualando el primer miembro de una ecuación en diferencias a cero, es decir: $y_{n+r} + a_1 \ y_{n+r-1} + \dots + a_r \ y_n = 0$ se denomina ecuación homogénea (o reducida) correspondiente a la ecuación no homogénea (o completa) original.

Para encarar la solución de una ecuación en diferencias es necesario enunciar los siguientes teoremas:

/II. Si

II. Si $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ son dos soluciones independientes de una ecuación homogénea en diferencia, también es una solución $y^{(1)} + y^{(2)}$

III. Si $\overline{Y}(n)$ es una solución particular de una ecuación completa en diferencias e y_H es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, $y_H + \overline{Y}(n)$ es la solución general de la ecuación completa.

De acuerdo al último teorema, se requiere resolver la ecuación homogénea correspondiente antes de poder llegar a la solución de una ecuación completa en diferencias; posteriormente se trata de conseguir una solución particular de la ecuación completa.

<u>Solución de una ecuación homogénea en diferencias</u>

La ecuación homogénea:

$$y_{n+r} + a_1 y_{n+r-1} + \dots + a_r y_n = 0$$

puede escribirse:

$$(E^r + a_1 E^{r-1} + \dots + a_r)\, y_n = 0$$

La función del operador E (que actúa sobre y_n) sirve para definir la ecuación auxiliar (o ecuación característica):

$$x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r = 0$$

Sean las raíces de esta ecuación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_r$

Con ellas pueden plantearse dos situaciones

a) que todas sean distintas ($\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo i, j):

la ecuación puede presentarse entonces:

$$(E - \lambda_1)(E - \lambda_2)(E - \lambda_3) \dots (E - \lambda_r)\, y_n = 0$$

No existe dificultad alguna en admitir que cuando $(E - \lambda_1)\, y_n = 0$ necesariamente la expresión anterior será 0. Por lo tanto, si se repite el razonamiento para los r factores en que aparece E, se pueden plantear r ecuaciones del tipo $(E - \quad) y_n = 0$ cuya solución ya se conoce.

Ahora bien, haciendo:

$$\begin{array}{lll} (E - \lambda_1)\, y_n = 0 & \text{solución } y_n^{(1)} = B_1 \lambda_1^n \\ (E - \lambda_2)\, y_n = 0 & \text{solución } y_n^{(2)} = B_2 \ {}^n_2 \\ \vdots & \vdots \\ (E - \lambda_r)\, y_n = 0 & \text{solución } y_n^{(r)} = B_r \lambda_r^n \end{array}$$

/se obtienen

se obtienen r soluciones independientes de la ecuación. Según uno de los teoremas enunciados, la solución general de la ecuación homogénea será:

$$y_H(n) = y_n^{(1)} + y_n^{(2)} + \dots + y_n^{(r)}$$

$$y_H(n) = B_1 \lambda_1^n + B_2 \lambda_2^n + \dots + B_r \lambda_r^n \quad \text{1/}$$

o resumiendo:

$$y_H(n) = \sum_{i=1}^{r} B_i \lambda_i^n$$

en que B_1, B_2, B_3, ..., B_r son las r constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución.

b) que algunas de las raíces de la ecuación auxiliar sean iguales ($\lambda_i = \lambda_j$ para algún i, j)

la ecuación se reduciría en este caso a:

$$(E - \lambda_1)\,(E - \lambda_2)^p \dots (E - \lambda_k)^q\, y_n = 0$$

p y q indican el número de raíces iguales a λ_2 y λ_k respectivamente.

Razonando de manera similar a la empleada en el caso anterior, se tendrían las siguientes ecuaciones:

$$(E - \lambda_1) y_n = 0 \qquad \text{solución: } y_n^{(1)} = C_1 \cdot \lambda_1^n$$

$$(E - \lambda_2)^p y_n = 0 \qquad y_n^{(2)} = \lambda_2^n \sum_{i=0}^{p-1} D_i \cdot n^i$$

$$\vdots$$

$$(E - \lambda_k)^q y_n = 0 \qquad y_{(n)}^{(3)} = \lambda_k^n \sum_{i=0}^{q-1} L_i n^i$$

de donde, la solución general de la ecuación homogénea sería:

$$y_H(n) = C_1 \cdot \lambda_1^n + \lambda_2^n \sum D_i n^i + \dots + \lambda_k^n \sum L_i n^i \quad \text{1/}$$

en que C_1, D_i y L_i son las constantes arbitrarias de la solución (deben tenerse r constantes por ser r el orden de la ecuación).

1/ Se puede demostrar fácilmente que esta es la solución general buscada. El número de constantes arbitrarias (que debe ser igual al orden de la ecuación) puede ser un indicador de ello.

/Los siguientes

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento descrito:

1) $y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$

$(E^2 - 5E + 6)\, y_x = 0$

Resolviendo la ecuación auxiliar $z^2 - 5z + 6 = 0$ que tiene las raíces $z' = 3$ y $z'' = 2$ se tiene:

$(E - 3)\,(E - 2)\, y_x = 0$

que conduce a $(E - 3)\, y_x = 0$ de solución $y_x^{(1)} = A \cdot 3^x$

y $(E - 2)\, y_x = 0$ cuya solución es $y_x^{(2)} = B \cdot 2^x$

En consecuencia, la solución general de la ecuación 1) es :

$$y_H(x) = A \cdot 3^x + B \cdot 2^x$$

2) $y_{t+3} - 8y_{t+2} + 21y_{t+1} - 18y_t = 0$

$(E^3 - 8E^2 + 21\,E - 18)\, y_t = 0$

la ecuación auxiliar $x^3 - 8x^2 + 21x + 18 = 0$ tiene las raíces

$x' = 3$, $x'' = 3$, $x''' = 2$

por lo tanto:

$$(E - 3)^2\,(E - 2)y_t = 0$$

por lo que:

$(E - 3)^2 y_t = 0$ cuya solución $y_t^{(1)} 3^t\,(At + B)$

$(E - 2)y_t = 0$ de solución $y_t^{(2)} = C \cdot 2^t$

La solución general buscada:

$$y_H(t) = 3^t(At + B) + C \cdot 2^t$$

<u>Obtención de la solución particular</u>

El procedimiento para obtener una solución particular de la ecuación $y_{n+r} + a_1 y_{n+r-1} + \dots + a_r y_n = g(n)$

depende básicamente de la forma que adopta $g(n)$. Se contemplan los siguientes casos:

/a) $\underline{g(n) = k \text{ (constante)}}$

$(\bar{Y} = \text{constante})$

a) $\underline{g(n) = k \text{ (constante)}}$: Probando como solución $y_n = \bar{Y}$ se llega a:
($\bar{Y}$ = constante)

$$\bar{Y}_{(n)} = \frac{k}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_r}$$

Si $1 + a_1 + a_2 + \dots + a_r = 0$, se introduce $y_n = \bar{Y}\, n$
encontrándose:

$$\bar{Y}\,(n) = \frac{-k}{a_1 - 2a_2 - \dots - ra_r} \cdot n$$

Si se presenta el caso excepcional de que todavía
$a_1 + 2a_2 + \dots + ra_r = 0$, se define $y_n = \frac{\bar{Y}}{k} \cdot n^2$ que conduce a

$$\bar{Y}(n) = \frac{}{a_1 - 2^2a_2 - 3^2a_3 - \dots - r2a_r} \cdot n^2$$

Aunque es difícil que ocurra en la práctica, si se da
$a_1 + 2^2a_2 + 3^2a_3 + \dots + r^2a_r = 0$ se prueba $y_n = \bar{Y} \cdot n^3$ y sucesivamente
$\bar{Y} \cdot n^4$, $\bar{Y} \cdot n^5$, etc si fuera necesario.

<u>Ejemplos</u>:

1) La solución de $y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 8$ es

$$y_x = A \cdot 3^x + B \cdot 2^x + 4$$

que se obtiene sumando a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente la solución particular encontrada por:

$$\bar{Y}(x) = \frac{8}{1 - 5 - 6} = 4$$

2) La solución de $y_{t+3} - 8y_{t+2} + 21\, y_{t+1} - 18y_t = 25$
se encuentra sumando a la solución general de la ecuación reducida correspondiente (ya encontrada anteriormente), el valor de

/ $\bar{Y}$ (t) =

$$\bar{Y}(t) = \frac{25}{1 - 8 + 21 - 18} = \frac{25}{-4}$$

$$y_t = 3^t(At + B) + C \cdot 2^t - \frac{25}{4}$$

b) $g(n) = n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k$ (polinomio de grado k)

La ecuación completa de diferencias se puede escribir

$$f(E)y_n = g(n)$$

Una solución particular puede lograrse haciendo:

$$\bar{Y}(n) = \left[f\ (E)\right]^{-1} g(n)$$

$$\bar{Y}(n) = \left[f(1 + \Delta)\right]^{-1} g(n)$$

que se puede desarrollar en potencias ascendentes de Δ, llegando hasta Δ^k (ya que se sabe que las diferencias de orden superior al grado de un polinomio son nulas) y evaluando las diferencias correspondientes.

Ejemplo:

$$y_{x+2} - 4y_x = x^2 - 1$$

que tiene una ecuación homogénea cuya solución se puede obtener por el método enunciado. Escribiendo: $(E^2 - 4)y_x = 0$

$$(E - 2)\ (E + 2)\ y_x = 0$$

se llega a: $y_H(x) = A \cdot 2^x + B(-2)^x$

Para la solución particular:

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{E^2 - 4}\ (x^2 - 1) = \frac{1}{4}\ \left[\frac{1}{E-2} - \frac{1}{E+2}\right]\ (x^2 - 1)$$

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\Delta-1} - \frac{1}{\Delta+3}\right](x^2-1) = \frac{1}{4}\left[-(1+\Delta)^{-1} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{\Delta}{3}\right)^{-1}\right](x^2-1)$$

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{4}\left[-1-\Delta-\Delta^2-\ldots-\frac{1}{3}+\frac{\Delta}{9}-\frac{\Delta^2}{27}+\ldots\right](x^2-1)$$

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3}-\frac{8}{9}\Delta-\frac{28}{27}\Delta^2+\ldots\right](x^2-1)$$

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3}(x^2-1)-\frac{8}{9}(2x+1)-\frac{28}{27}\cdot 2\right]$$

$$\bar{Y}(x) = \frac{-x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{11}{27}$$

La solución general buscada:

$$y_x = y_n(x) + \bar{Y}(x)$$

$$y_x = A \cdot 2^x + B(-2)^x - \frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{11}{27}$$

c) <u>$g(n) = a^n$ (función exponencial)</u>

De la ecuación $f(E)\,y_n = g(n)$ se deduce:

$$\bar{Y}(n) = \frac{1}{f(E)}\,g(n)$$

en este caso: $\bar{Y}(n) = \frac{1}{f(E)}\,a^n = \frac{a^n}{f(a)}$

Ejemplo:

$$Y_{t+3} - 8\,y_{t+2} + 21\,y_{t+1} - 18\,y_t = 5^t$$

la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$Y_H(t) = 3^t(A_t + B) + C \cdot 2^t$$

la solución particular:

$/(E^3 - 8E^2 +$

$$(E^3 - 8E^2 + 21E - 18)\ y_t = 5^t$$

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{E^3 - 8E^2 + 21E - 18}\ 5^t = \frac{1}{5^3 - 8 \cdot 5^2 + 21 \cdot 5 - 18}$$

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{12}$$

es decir, la solución general de la ecuación es:

$$Y(t) = 3^t (At + b) + C \cdot 2^t + \frac{1}{12}$$

d) <u>$g(n) = a^n F(n)$ [$F(n)$: polinomio de grado finito]</u>

En la ecuación $f(E)\, y_n = a^n F(n)$ hacer $y_n = a^n u_n$ con lo que se logra:

$$f(E)\, y_n = f(E)\, a^n u_n = a^n f(aE)\, u_n$$

y la ecuación queda: $a^n f(aE) u_n = a^n F(n)$

$$f(aE) u_n = F(n)$$

con lo que,,siendo $F(n)$ un polinomio de grado finito se cae en el caso b).

Esta situación se puede extender fácilmente al caso en que $F(n)$ = constante que se reduce a una situación conocida.

<u>Solución de ecuaciones en diferencias de otro tipo</u>

Existen algunas ecuaciones que pueden llevarse con relativa facilidad a una ecuación lineal con coeficientes constantes. Antes de dar ejemplos, se enuncian otros dos teoremas:

IV. Si la solución de:

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots y_{n+r}) = 0$$

es conocida, también se conoce la solución de:

$$F(n, Z_{n+s}, Z_{n+s+1}, \dots Z_{n+r+s}) = 0$$

/V. Si se

V. Si se conoce la solución de:

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots y_{n+r}) = 0$$

también se conoce la solución de:

$$F[n, f(Z_n), f(Z_{n+1}) \dots f(Z_{n+r})] = 0$$

Ejemplos: 1) $(n+1) Z_{n+s} - nZ_{n+4} = 0$

$$Z_{n+4} = y_n$$

$$(n+1) y_{n+1} - ny_n = 0$$

$$\Delta y_n = 0$$

cuando se tiene una diferencia nula, esta debe provenir de una constante

$$ny_n = A$$

$$y_n = \frac{A}{n}$$

$$Z_n = \frac{A}{n-4}$$

2) $Z^2_{n+1} - Z^2_n = 1$

$$Z^2_n = y_n$$

$$y_{n+1} - y_n = 1$$

$$\Delta y_n = 1$$

$$y_n = n + A$$

$$Z^2_n = n + A$$

$$Z_n = \sqrt{n + A}$$

/Sistemas de

Sistemas de ecuaciones en diferencias

Hasta ahora, se han considerado solamente ecuaciones en diferencias referidas a una sola función; sin embargo, dada la interdependencia de los fenómenos económicos, hay problemas para cuyo estudio es más adecuado emplear un sistema de ecuaciones simultáneas de diferencias que presenten de modo explícito las relaciones existentes entre las variables que condicionan los factores a analizar.

Se tratará ahora de plantear la solución de un sistema de ecuaciones en diferencias. Por razones similares a las indicadas en el caso de ecuaciones de una sola función, se limitará la exposición a los sistemas lineales con coeficientes constantes.

Básicamente, el procedimiento de solución de un sistema consiste en eliminar una (o varias) de las funciones de manera de obtener una ecuación referida a una sola función (de solución conocida) que permita, por sustitución, encontrar las expresiones correspondientes a las otras funciones. Debe destacarse de esta descripción que solucionar el sistema implica, entonces, determinar las funciones que satisfacen simultáneamente las ecuaciones que componen el sistema.

Los siguientes ejemplos, demuestran el procedimiento descrito:

1) $y_{t+1} - 6\,y_t + 8\,x_t = -9$

$y_t - x_{t+1} = 0$

la segunda ecuación puede escribirse: $y_{t-1} - x_t = 0$
de donde puede obtenerse:

$$8\,y_{t-1} - 8\,x_t = 0$$

sumando $\quad y_{t+1} - 6\,y_t + 8\,x_t = -9$

$$y_{t+1} - 6\,y_t + 8\,y_{t-1} = -9$$

ecuación en que sólo aparece la función y. Resolviendo esta ecuación:

$$(E^2 - 6E + 8)\,y_{t-1} = 0$$

$$(E - 4)(E-2)\,y_{t-1} = 0$$

$$y_h(t) = 4^t \,.\, A + 2^t \,.\, B$$

y en consecuencia $\underline{y\,(t) = 4^t \,.\, A + 2^t \,.\, B - 3}$

/Como $x_{t+1} =$

Como $x_{t+1} = y_t$: $\underline{x(t) = 4^{t-1} \cdot A + 2^{t-1} \cdot B - 3}$

2) $y_{t+1} - 8\, z_t = -11$

$y_t - 2z_{t+1} = 1$

de la segunda ecuación se concluye que: $y_{t+1} - 2x_{t+2} = 1$

Restada esta ecuación de la primera: $y_{t+1} - 8\, z_t = -11$

se obtiene la expresión: $2z_{t+2} - 8z_t = -12$

en que sólo aparece la función z. Para resolver esta ecuación, se escribe:

$z_{t+2} - 4\, z_t = -6$

$(E^2 - 4)\, z_t = -6$

$(E - 2)(E+2)\, z_t = -6$

y la solución será: $\underline{z_t = (-2)^t \cdot A + 2^t \cdot B + 2}$

se sabe que: $y_t = 2\, z_{t+1} + 1$ por lo tanto

$$\underline{y_t = 2 \cdot (-2)^{t+1} \cdot A + 2 \cdot 2^{t+1} \cdot B + 5}$$

Nótese que las ecuaciones de ambos sistemas incluyen valores de las funciones en un intervalo de un período, por esta razón se dice que son de primer orden respecto a cada una de las funciones. Puede ser un sistema de orden r respecto a una función, de orden p respecto a otra, de orden q respecto a una tercera y así sucesivamente. Si se recuerda la relación entre el orden de una ecuación y el número de constantes arbitrarias de la solución general, se puede concluir que el número de constantes en la solución de un sistema debe coincidir con la suma de los órdenes respecto a las distintas funciones. Esto es importante al solucionar el sistema, porque encontrada una de las funciones (con sus respectivas constantes)

/las restantes

las restantes se obtienen con las constantes que aparecen en esta primera expresión (generalmente incluye todas las constantes requeridas). Lo mismo ocurre con las condiciones iniciales: para encontrar una solución particular son necesarias tantas condiciones iniciales referidas a cada función como lo indique el orden correspondiente en el sistema.

Es obvio que la función eliminada al solucionar un sistema puede ser cualquiera de las incluidas. Dependiendo del orden en que se obtengan las funciones se llegará a expresiones ligeramente distintas; no obstante, la relación entre las distintas funciones no se altera. Así, por ejemplo, en el ejercicio 1) si se hubiera eliminado "y" se habría encontrado $x_t = 4^t \cdot A + 2^t \cdot B - 3$ que conduce a la expresión $y_t = 4^{t+1} \cdot A + 2^{t+1} \cdot B - 3$. Estas soluciones aunque difieren de las anteriores, guardan entre sí la misma relación que las otras. Del mismo modo, en el ejemplo 2) resolviendo primero la ecuación en y, se obtiene:

$$y_t = (-2)^t \cdot A + 2^t \cdot B + 5$$

de donde se tiene que:

$$z_t = (-2)^t \cdot A \cdot \frac{1}{2} + 2^{t-1} \cdot B \cdot \frac{1}{2} + 2$$

<u>Otro procedimiento de solución</u>

Si bien el método anteriormente indicado es de aplicación general, el uso del operador E proporciona una alternativa más simple para encontrar la ecuación a resolver en primer término. Se describe esta alternativa utilizando los ejemplos anteriores:

1. $y_{t+1} - 6y_t + 8x_t = -9$

$y_t - x_{t+1} = 0$

El sistema puede presentarse:

$$(E - 6)y_t + 8x_t = -9$$

$$y_t - Ex_t = 0$$

Aplicando a los operadores la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} E-6 & 8 \\ 1 & -E \end{vmatrix} y_t = \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 0 & -E \end{vmatrix}$$

/se llega a:

se llega a: $\left[(E-6)\ (-E) - 8\right] y_t = -E\ (-9) - 08$

$$(-E^2 + 6E-8)y_t = 9$$

que es la misma ecuación a la que se llegó anteriormente. Dos cosas importantes deben destacarse: i) encontrada la función y, la obtención de x debe hacerse por sustitución (no es posible repetir la aplicación de la regla de Cramer porque llevaría a un resultado incompatible con el conseguido para y); ii) el grado de E en el determinante que define la función de E que actúa sobre y_t indica el número de constantes que contendrá la solución (no debe perderse de vista que de ese determinante se obtiene la ecuación característica del sistema),

2. $y_{t+1} - 8z_t = -11$

$y_t - 2x_{t+1} = 1$

puede escribirse:

$Ey_t - 8z_t = -11$

$y_t - 2Ez_t = 1$

aplicando la regla de Cramer a los operadores:

$$\begin{vmatrix} E & -8 \\ 1 & -2E \end{vmatrix} z_t = \begin{vmatrix} E & -11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

se llega a la ecuación: $(-2E^2 + 8)z_t = E \cdot 1 + 11$

o lo que es lo mismo: $(E^2 - 4)z_t = -6$

ya resuelta al tratar el método anterior.

<u>Solución de un sistema de ecuaciones en diferencias utilizando matrices</u>

En primer lugar, se analizará la solución de un sistema de ecuaciones en diferencia de primer orden para las distintas funciones.

Un sistema homogéneo (o reducido) de primer orden puede presentarse:

$/y_{1t}+1 =$

$$
\begin{aligned}
y_{1t+1} &= a_1\, y_{1t} + a_2\, y_{2t} + \dots + a_r\, y_{rt} \\
y_{2t+1} &= b_1\, y_{1t} + b_2\, y_{2t} + \dots + a_r\, y_{rt} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
y_{rt+1} &= \lambda_1\, y_{1t} + \lambda_2\, y_{2t} + \dots + \lambda_r\, y_{rt}
\end{aligned}
$$

en que y_1, y_2, y_3, ... y_r, representan r funciones distintas de t que deben encontrarse al ser resuelto el sistema.

Llamando:

$$
V_{t+1} = \begin{bmatrix} y_{1t+1} \\ y_{2t+1} \\ \vdots \\ y_{rt+1} \end{bmatrix} \qquad V_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{rt} \end{bmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & & \lambda_r \end{bmatrix}
$$

el sistema se escribe: $V_{t+1} = A \cdot V_t$

Dado que esta relación debe cumplirse para distintos valores de t, se obtiene como solución general del sistema: $\underline{V_t = A^t \cdot V_o}$

V_o define el vector de constantes arbitrarias.

Conociendo la solución de un sistema homogéneo de este tipo es relativamente sencillo solucionar el sistema:

$$V_{t+1} = A \cdot V_t + k$$

en que $k = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{Bmatrix}$ son constantes.

En efecto, la solución general de este sistema se encuentra sumando a la solución del sistema homogéneo correspondiente, una solución particular del sistema completo.

/En el

En el caso enunciado basta hacer $V_t = \bar{V}$ que es un vector de constantes.

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_r \end{bmatrix}$$

para encontrar la solución particular buscada.

Una ilustración del método es la siguiente:

$$\begin{aligned} y_{t+1} - 6y_t + 8x_t &= -9 \\ y_t - x_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= 6y_t - 8x_t - 9 \\ x_{t+1} &= y_t \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para solucionar este sistema, se resuelve primero el sistema reducido

$$\begin{bmatrix} y_{t+1} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}$$

que tiene por solución:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} y_o \\ x_o \end{bmatrix}$$

La solución particular requerida se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale a: $\begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

En consecuencia, la solución general del sistema completo es:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} y_o \\ x_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

/Método de

Método de traslación: conversión de una ecuación en diferencias en un sistema de primer orden

La solución del sistema de primer orden en base a matrices descrita en el subtítulo anterior, tiene aplicación en la resolución de ecuaciones en diferencias de cualquier orden. En efecto, es posible construir sistemas de ecuaciones de primer orden equivalentes a cualquier ecuación en diferencias por el artificio de definir nuevas funciones que impliquen un desplazamiento de la función, que aparece en la ecuación que se desea resolver, con respecto a los valores de la variable. Debe destacarse que hacer esto no significa reducir el grado de la ecuación característica (nótese lo que ocurre al aplicar el operador E a la solución de un sistema de primer orden: si hay r ecuaciones la ecuación característica es de grado r). La ventaja radica en que, en cierto sentido, los sistemas de primer orden son más sencillos de analizar que los de orden superior.

El desplazamiento de la función a que se hace referencia en el párrafo anterior (al procedimiento se lo denomina método de traslación) se expone a través de los ejemplos siguientes:

1. $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0$

Se introduce: $y_t^* = y_{t+1}$

$y_{t+1}^* = 4y_t^* - 3y_t$

Este sistema es equivalente a la ecuación original de segundo orden. y^* es una función distinta de y definida de tal manera que, sus valores se presentan "destasados" con respecto a los de y. La solución del sistema es obvia:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} y_o \\ y_o^* \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del sistema: $\begin{bmatrix} -x & 1 \\ +3 & x-4 \end{bmatrix} = 0$

es la misma que se obtiene para la ecuación original.

/2. El sistema:

2. El sistema:
$$\left.\begin{aligned} y_{t+3} - 2y_{t+2} + 3y_{t+1} + y_t - 3x_t &= 5 \\ y_{t+2} - 4y_{t+1} + 7y_t + x_{t+1} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

puede convertirse en un sistema de primer orden equivalente haciendo:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{2t} &= y_{1t+1} \\ y_{1t} &= y_{t+1} \\ y_{2t+1} &= 2y_{2t} - 3y_{1t} - y_t + 3x_t + 5 \\ x_{t+1} &= -y_{2t} + 4y_{1t} - 7y_t \qquad + 1 \end{aligned}}$$

y_1, e y_2 son dos nuevas funciones que implican una traslación de y. El sistema puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} y_{1t+1} \\ y_{t+1} \\ y_{2t+1} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_t \\ y_{2t} \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de solución conocida.

<u>Solución de sistemas de ecuaciones en diferencias con ecuación característica con raíces distintas</u> (sin raíces múltiples)

Un sistema de ecuaciones en diferencias con m ecuaciones puede presentarse:

$$\left.\begin{aligned} P_{11}(E)y_{1t} + P_{12}(E)y_{2t} + \dots + P_{1m}(E)y_{mt} + k_1 &= 0 \\ P_{21}(E)y_{1t} + P_{22}(E)y_{2t} + \dots + P_{2m}(E)y_{mt} + k_2 &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_{m1}(E)y_{1t} + P_{m2}(E)y_{2t} + \dots + P_{mm}(E)y_{mt} + k_m &= 0 \end{aligned}\right\}$$

P_{11}, P_{21}, P_{m2}, etc. son las funciones del operador E que actúan sobre cada función (y_1, y_2, y_3, ... y_m) en cada una de las ecuaciones del sistema.

/En términos

En términos de matrices:

$$\begin{bmatrix} P_{11}(E) & P_{12}(E) & \dots & P_{1m}(E) \\ P_{21}(E) & P_{22}(E) & \dots & P_{2m}(E) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{m1}(E) & P_{m2}(E) & \dots & P_{mm}(E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{mt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir: $P(E)y_t + k = 0$

Para tener la solución de este sistema se requiere conocer la solución del sistema homogéneo (o reducido) correspondiente: $P(E)y_t = 0$

Si en esta expresión se sustituye: $y_t = x^t P^*(x)$ 1/

x^t es un escalar y $P^*(x)$ es la matriz adjunta de $P(E)$ en que se ha reemplazado E por x. Entonces:

$$P(E)y_t = P(E)x^t P^*(x) = x^t P(x) P^*(x)$$

por propiedad del operador E $\left[(f\ (E)\alpha^n = \alpha^n\ f\ (\alpha)\right]$

Recordando que el producto de una matriz por su matriz adjunta es igual a la matriz unidad por el determinante de la matriz, se tiene:

$$x^t P(x)\ P^*(x) = I\ |P(x)|$$

$|P(x)|$ es el determinante de la matriz $P(x)$. En resumen:

$$P(E)x^t P^*(x) = x^t\ I\ |P(x)|$$

El segundo miembro será nulo (es decir, una matriz nula) si el determinante $|P(x)|$ es nulo (para ello x debe ser una raíz de la ecuación definida por $|P(x)| = 0$ y que se puede denominar ecuación característica.

Como el segundo miembro es una matriz nula (todos sus elementos son 0) de orden mxm, si se toma una columna $\left[P_i^*\ (x)\right]$ cualquiera de $P^*(x)$ se tiene:

$$P(E)x^t P_i^*\ (x) = 0$$

/El segundo

1/ El método que se describe a continuación aparece en "Economic Dynamics" de W.J. Baumol, de Mac Millan Company, Nueva York, 1959.

El segundo miembro es un vector columna nulo de orden m (todos sus elementos son ceros), mientras el primero es una expresión equivalente a $P(E)\ y_t$ cuanto y_t toma el valor $x^t \cdot P^*_i(x)$. Nótese que por la igualdad anterior se puede deducir que $y_t = x_y^{\ t}\ P^*_i(x_j)$ es una solución del sistema homogéneo de ecuaciones en diferencias $P(E)\ y_t = 0$ (x_y sirve para designar a una raíz de la ecuación característica).

Es fácil observar, por ser homogéneo el sistema, que si se multiplica el vector columna que represeta la solución recién indicada por una constante, el producto es también una solución. Además, recordando que la ecuación característica tiene varias raíces[2/] y que la suma de varias soluciones independientes es también solución del sistema, la solución general del sistema homogéneo será:

$$y_t = \sum_{j=1}^{w} V_j\ x_j^{\ t}\ P^*_i(x_j)$$

w: es el número de raíces (todas distintas) de la ecuación $P(x) = 0$

V_j: son constantes arbitrarias

$P^*_i(x_j)$: es una columna cualquiera de la matriz adjunta $P^*(x_j)$

Para llegar a la solución del sistema no homogéneo originalmente planteado, es necesario encontrar una solución particular para sumarla a la solución general del sistema homogéneo correspondiente.

Dado que el vector está formado por constantes, la solución particular puede obtenerse haciendo $y_t = \bar{Y}$ (vector de funciones y sustituirlo por un vector de constantes).

Entonces: $P(E)\ \bar{Y} + k = 0$

permite encontrar los valores de $\bar{Y}$.

2/ Para la aplicación del método es necesario que todas las raíces sean distintas. El caso de raíces múltiples exige un procedimiento modificado.

/En consecuencia

En consecuencia, la solución general del sistema homogéneo planteado viene dado por:

$$y_t = \sum_{j=1}^{w} V_j \, x_j^{\,t} \, P^*_i \, (x_j) + \bar{Y}$$

A manera de ejemplo, se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y_{1t+2} - 2\,y_{1t+1} + y_{1t} + y_{2t+1} + 5\,y_{2t} + 5 = 0 \\ y_{1t+1} - 2y_{1t} \qquad\qquad + 2y_{2t} + 7 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} E^2 y_{1t} - 2\,E\,y_{1t} + y_{1t} + E\,y_{2t} + 5\,y_{2t} + 5 = 0 \\ E\,y_{1t} - 2y_{1t} \qquad\qquad + 2y_{2t} + 7 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} (E^2 - 2\,E + 1)\,y_{1t} + (E + 5)\,y_{2t} + 5 = 0 \\ (E - 2)\,y_{1t} + 2 \quad y_{2t} + 7 = 0 \end{array}\right\}$$

En este caso:

$$P\,(E) = \begin{bmatrix} E^2 - 2\,E + 1 & E + 5 \\ E - 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P\,(x) = \begin{bmatrix} x^2 - 2\,x + 1 & x + 5 \\ x - 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^*(x) = \begin{bmatrix} 2 & -5 - x \\ 2 - x & x^2 - 2x + 1 \end{bmatrix}$$

$$\left| P(x) \right| = \begin{bmatrix} x^2 - 2x + 1 & x + 5 \\ x - 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 - x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x' = 4$$

$$x'' = 3$$

$$P^*(4) = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \qquad P^*(3) = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

/La solución

La solución de la ecuación homogénea (reducida) correspondiente:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = 4^t \cdot A \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 3^t \cdot B \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para encontrar la solución parcialar:

$$\begin{bmatrix} E^2 - 2E + 1 & E + 5 \\ E - 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $\bar{y}_1 = \frac{32}{6}$

$$\bar{y}_2 = \frac{5}{6}$$

De donde la solución general del sistema es:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = 4^t \cdot A \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 3^t \cdot B \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{32}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$