CEPAL

ILPES INSTITUTO LATINOAMERICANO DE PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL

PROGRAMA DE CAPACITACION

Documento MYT-15

NOCIONES BASICAS DE ECONOMETRIA Y MODELOS LINEALES */

Graciela Moguillansky

*/ El presente documento se reproduce para uso exclusivo de los participantes de cursos de la Dirección de Programas de Capacitación.
88-8-1142

ESTIMACION DE MODELOS LINEALES

I. Introducción

Estas notas tienen como objetivo presentar las principales nociones de econometría básica y modelos lineales, con el fin de entregar los conocimientos necesarios para el desarrollo del curso taller de planificación global.

Como es sabido, este curso tiene el propósito de presentar un conjunto de técnicas y enfoques metodológicos aplicados a la preparación de programas macroeconómicos plurianuales para la planificación.

Las notas se dividirán en cinco capítulos que abordan los siguientes temas:

a) En el primero se entrega el concepto y principales usos de la econometría. Comienza con el modelo de regresión simple, supuestos y propiedades estadísticas de los estimadores, test de hipótesis e intervalos de confianza;

b) En el segundo, se introduce el modelo de regresión múltiple, sus propiedades, test F, R2 y R2 corregido, y se analizan los problemas de estimación usuales en estos modelos, la multicolinealidad, heterocedasticidad y autocorrelación;

c) En el tercer capítulo se abordan algunos aspectos avanzados en la estimación de modelos uniecuacionales, como los modelos con retardos distribuidos, variables ficticias, estimaciones no lineales y predicción en un modelo de una ecuación lineal;

d) En el cuarto capítulo se introducen nociones sobre modelos de ecuaciones simultáneas, tipos de sistemas y su estimación;

e) Finalmente, el último capítulo se dedica a los procesos de simulación, su evaluación (cálculo de los errores y simulación retrospectiva), cálculo de multiplicadores y análisis de los mecanismos de corto plazo y de la dinámica de mediano plazo.

Cabe señalar que estos apuntes, en ningún caso sustituyen a los numerosos textos de econometría existentes, ni a un curso regular sobre esta materia, sino que entregan una síntesis muy apretada de los principales métodos de estimación y problemas de los modelos econométricos.

Capítulo I

La econometría se preocupa de la medicón de las relaciones económicas, y para ello se basa en la economía, las matemáticas y las estadísticas.

1. De la terorìa económica, extrae las hipótesis de comportamiento de los agentes económicos:

- Familias
- Gobierno
- Empresas
- Sector Externo
- Sector Financiero

2. Las matemáticas permiten efectuar la formalización de dicha teoría, transformando en ecuaciones las hipótesis.

3. Finalmente, el instrumental estadístico entrega la forma de efectuar una medición empírica de las ecuaciones.

En síntesis, podemos decir que la econometría permite obtener estimaciones numéricas de los coeficientes de las relaciones económicas. Dado que una característica fundamental de las relaciones económicas es el poseer un elemento de "aleatoriedad", la econometría desarrolló métodos para tratar los elementos aleatorios de las relaciones económicas.

Ejemplo:

$Q = f(P, P_o, Y,)$ Teoría Económica

Q = cantidad demandada del bien

P = Precio del bien

P_o = Precio sustitutos

Y = Ingreso de las presonas

$Q = b_o + b_1 P + b_2 P_o + b_3 Y$
(Relación Exacta)
(Formalización Matemática)

Sabemos que existen además otros factores que no necesariamente son económicos, que pueden afectar la demanda del bien.

- una guerra
- cambio en la distribución del ingreso

- cambio en las leyes
- factores institucionales, etc.

Estos elementos se agrupan en el término aleatorio de la ecuación, "U".

$$Q = b_0 + b_1 P + b_2 P_0 + b_3 Y + b_4 g + u$$

variable aleatoria <---------- variable aleatoria

Podemos revisar lo visto hasta ahora, con el siguiente diagrama:

TEORIA ECONOMICA

MODELO

(FORMULACION MATEMATICA)

CONFRONTACION EMPIRICA

(TECNICAS ECONOMETRICAS)

ACEPTACION DE LA TEORIA	RECHAZO DE LA TEORIA	REVISION DE LA TEORIA
(USO DE METODOS ESTADISTICOS)		CONFRONTACION EMPIRICA

Como conclusión de esta presentación, podemos señalar que la econometría usa <u>métodos estadísticos</u> adaptados a los <u>problemas económicos</u> y además es una herramienta apropiada para la medición de las relaciones económicas que poseen un componente aleatorio.

La econometría tiene diversos usos en la práctica económica:

1. Testear la teoría económica

2. Tomar decisiones de política económica mediante la estimación de los parámetros en las relaciones de comportamiento

3. Efectuar proyecciones haciendo estimaciones numéricas de los coeficientes.

TIPOS DE MODELOS

Existen diversos modelos que permiten formalizar las relaciones económicas. Dependiendo del número de ecuaciones y de variables que los componen, podemos clasificarlos de la siguiente forma:

1. <u>Modelo uniecuacional</u>

    1.1 Modelo de regresión simple
    1.2 Modelo de regresión múltiple.

2. <u>Sistemas de ecuaciones</u>

    2.1 Sistemas de ecuaciones recursivas
    2.2 Sistemas de ecuaciones aparentemente no relacionadas
    2.3 Sistemas de ecuaciones simultáneas.

A cada uno de estos modelos, corresponden diferentes métodos de estimación. Para el propósito de nuestras notas, sólo se revisarán los siguientes:

- Mínimos cuadrados ordinarios
- Métodos de variables instrumentales
- Mínimos cuadrados en dos etapas
- Mínimos cuadrados indirectos

Estos métodos se caracterizan por ser uniecuacionales, es decir, aún en los modelos de sistemas de ecuaciones, la estimación se aplica a cada una de las ecuaciones por separado. Hemos escogido estos métodos, por ser de fácil aplicación sobre todo en modelos grandes (más de 50 ecuaciones).

1.1 Modelo de regresión simple

Comenzaremos con el modelo de regresión simple, caracterizado por tener una sola variable explicativa, por ser el más sencillo para explicar los conceptos econométricos y estadísticos básicos. La forma más simple de introducir el método de estimación es a partir de un ejemplo:

a) Hipótesis de la teoría económica:

- la demanda de importaciones (Y), depende del producto (X), suponiendo resto de factores constantes.

b) Formulación matemática:

$$\underbrace{Y}_{\text{VARIABLE DEPENDIENTE}} = \underbrace{f(X)}_{\text{VARIABLE EXPLICATIVA}}$$

VARIABLE DEPENDIENTE (demanda de importaciones)

VARIABLE EXPLICATIVA (producto)

c) Formulación econométrica:

Qué forma adopta la función de importaciones "Introducción de supuestos":

- Supongamos una forma lineal

$$Y_i = a_o + a_1 X_i \qquad (i=1.......n)$$

Esta formulación indica una "causalidad" en un sólo sentido: la demanda de importaciones depende del producto y no al revés.

a_o y a_1 - son parámetros y queremos obtener:

$\hat{a}_o$ y $\hat{a}_1$ - sus estimaciones

- Qué signo debieran tener las estimaciones de los parámetros?
  - lo indica la teoría económica.

En el caso de la demanda de importaciones:

$a_o > 0 ==> \hat{a}_o$ debiera tomar valores > 0

$a_1 > 0 ==> \hat{a}_1 > 0$

<u>Otro ejemplo</u>:

Queremos estimar la función consumo:

a) Hipótesis teoría económica:

Consumo depende del ingreso disponible, suponiendo:

- Distribución del ingreso constante
- No existen cambios institucionales
- No exiten guerras
- La inflación no afecta el consumo
- No existen schocks externos, etc.

b) Formulación matemática:

$C = f\ (Y_D)$

c) Fomrulación econométrica:

$C = c_o + c_1\ Y_D$

$c_o > 0\ ,\ 1 - c_1 > 0 ===> c_1 < 1$
(Condición de estabilidad del modelo macroeconómico)

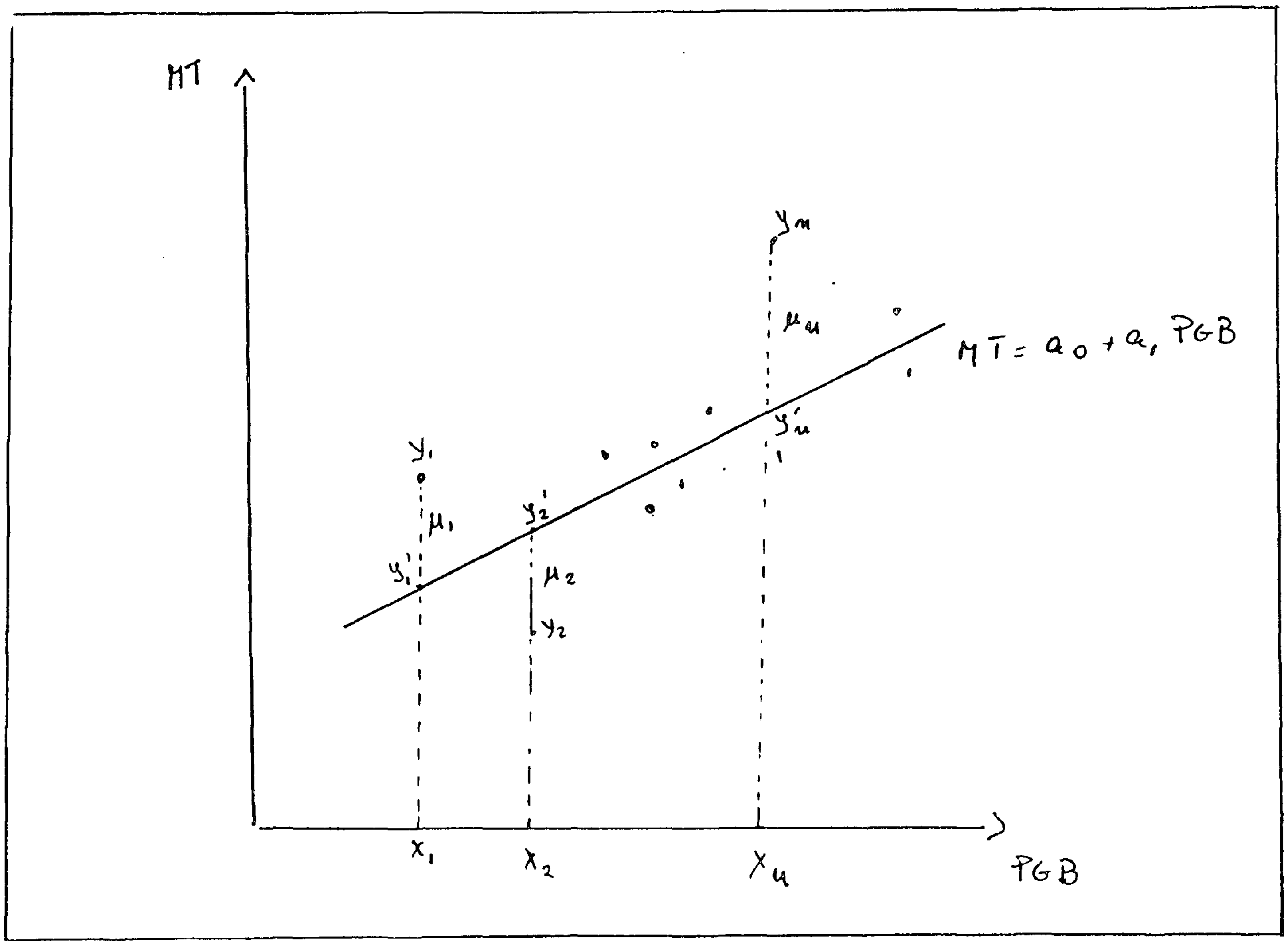
Si consideramos los supuestos que acompañan la función consumo, en realidad el modelo debiera escribirse:

$C = c_o + c_1\ Y_D + u$

VARIABLE ALEATORIA ←---------- VARIABLE ALEATORIA

Podemos clarificar los conceptos vertidos hasta ahora, mediante el siguiente gráfico, que muestra la dispersión de los valores observados de las importaciones en torno a la recta teórica, en función del PGB.

COMPONENTE ALEATORIO DE LA REGRESION



[VARIACION DE Y] = [VARIACION SISTEMATICA] + [VARIACION ALEATORIA]

[VARIACION DE Y] = [VARIACION EXPLICADA] + [VARIACION NO EXPLICADA]

<u>Causas de la Aleatoriedad de "Y"</u>

- Simplificación de la realidad
  (<u>ceteris paribus</u> de la teoría económica)
- Error de medición de las variables
- Omisión de variables:
  * No se pueden medir
  * Son combinaciones lineales de variables incorporadas en el modelo.

<u>Supuestos del modelo de regresión lineal</u>

$Y_i = a_o + a_1 X_i + U_i$

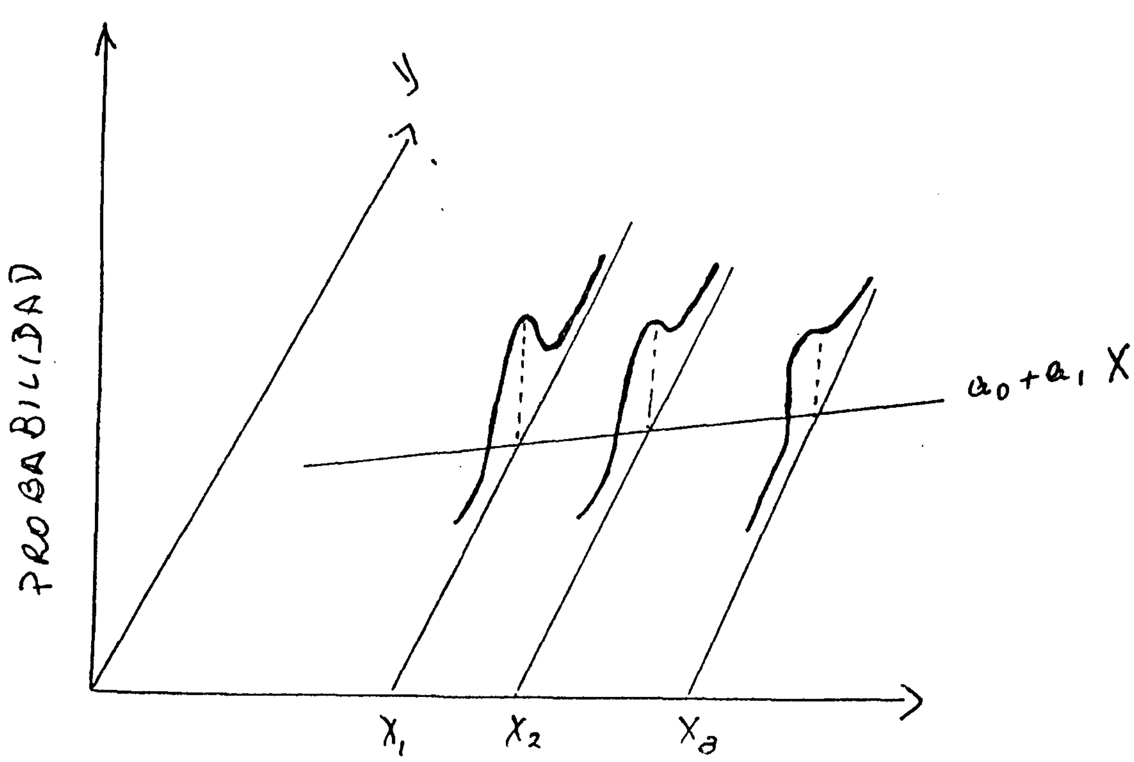
1. U_i es una variable aleatoria.

2. $E(U_i) = 0$ y su varianza es constante para todas las observaciones $E(U_i^2) = \sigma^2$.
(Homocedasticidad)

3. U_i no están correlacionados, es decir, la correlación de los errores correspondientes a observaciones distintas es igual a cero $E(U_i, U_J) = 0$ para $i =/= J$

4. La variable aleatoria U_i se distribuye normalmente.

RESUMEN DE LOS SUPUESTOS



Distribución de Y:

$Y \sim N\ (a_0 + a_1\ X,\ \sigma^2)$

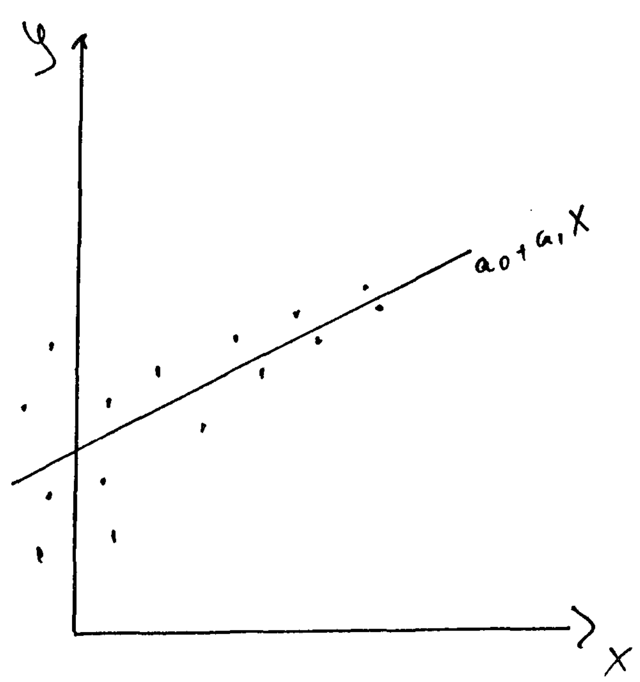
$E\ (Y) = a_0 + a_1\ X$

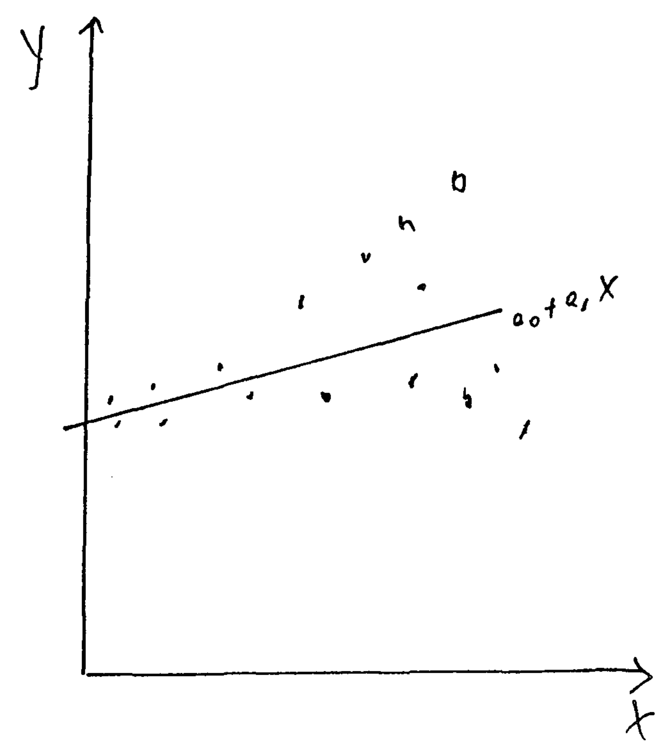
$VAR\ (Y) = E\ (Y_1 - E\ (Y_1))^2 = \sigma^2$

<u>Importancia de los supuestos</u>:

Sirven para efectuar los tests estaídsticos sobre la regresión.

HETEROCEDASTICIDAD: NO SE CUMPLE SUPUESTO DE $VAR\ (U) = \sigma^2$

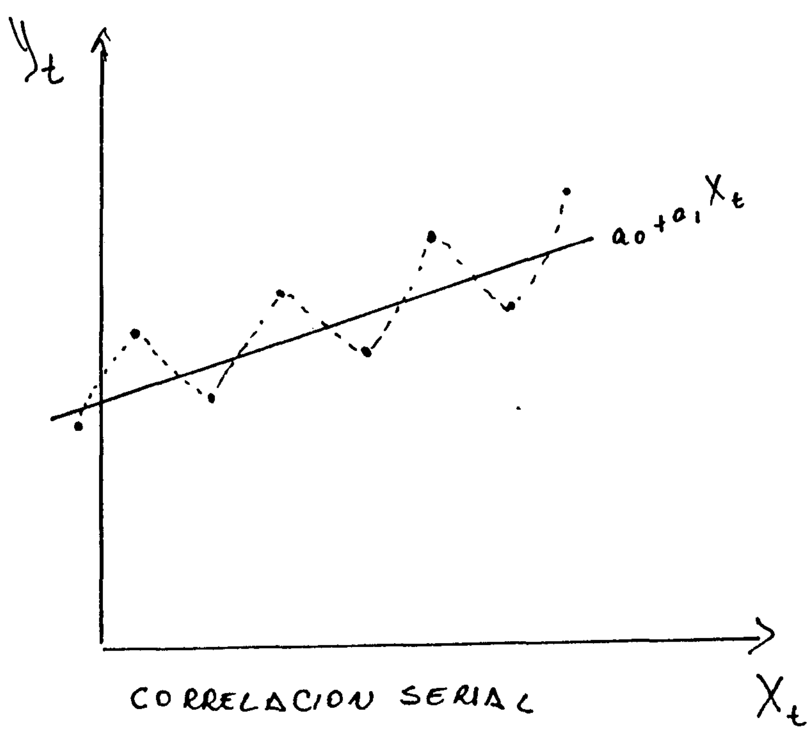




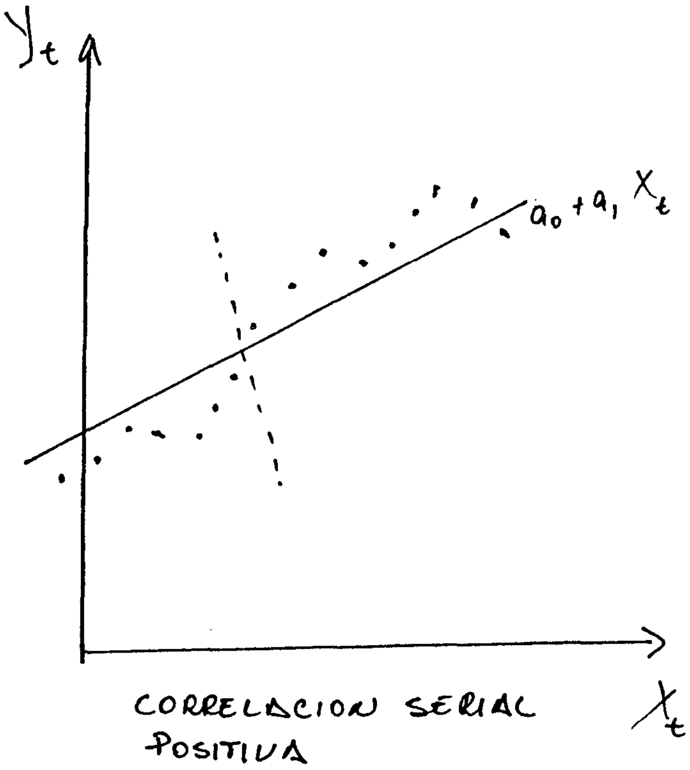
Ej: La productividad de empresas pequeñas tiene una mayor dispersión que la productividad de grandes empresas entre los =/=s ramas industriales.

Ej: en estratos de altos ingresos la dispersión del gasto en consumo es mayor que en estratos de bajos ingresos.

CORRELACION SERIAL (AUTOCORRELACION): NO SE CUMPLE SUPUESTO $E(u_i\ U_j) = 0$



CORRELACION SERIAL NEGATIVA

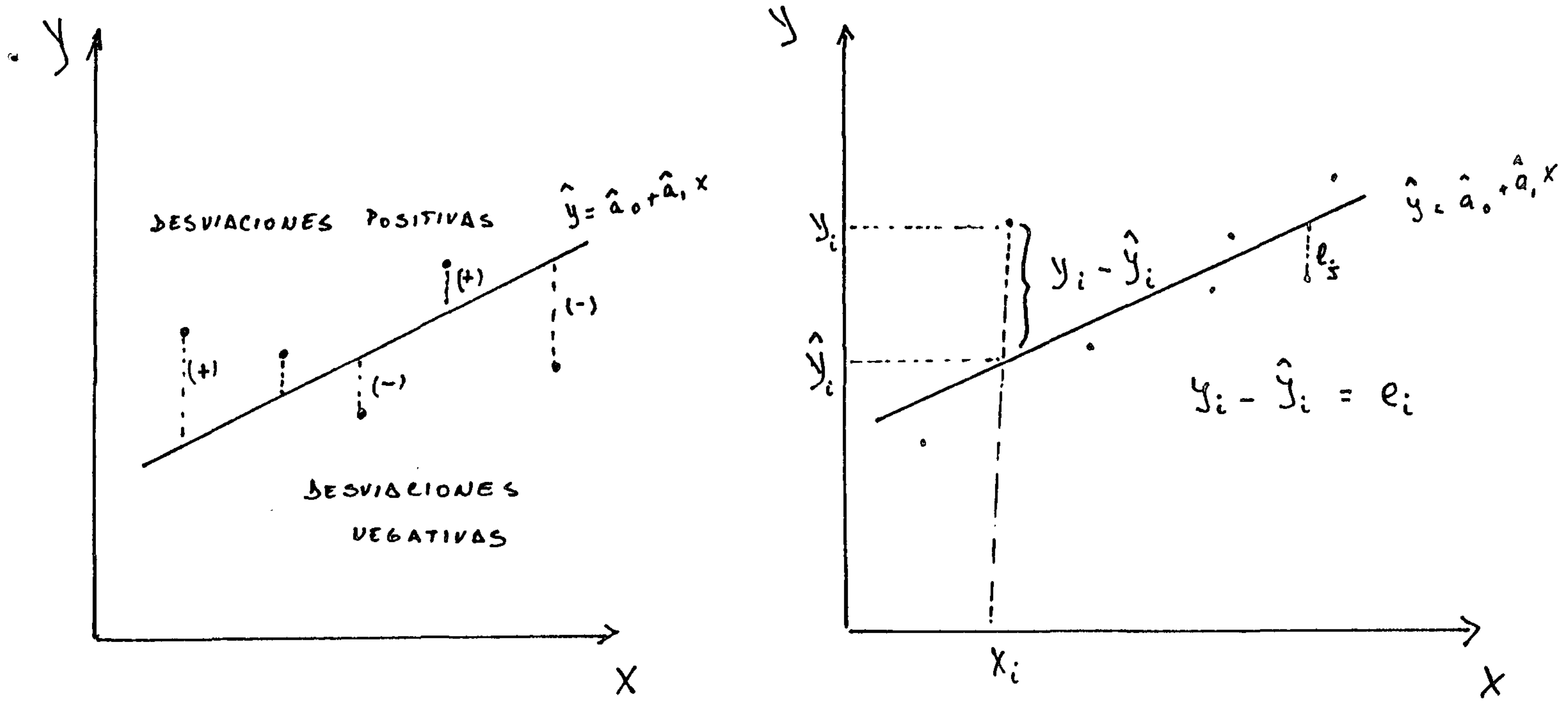


CORRELACION SERIAL POSITIVA

(Fluctuación regular en torno a la recta de regresión)
signo)

(A un error positivo le sigue otro del mismo

METODO DE MINIMOS CUADRADOS ORDINARIOS



Y, X   Observaciones muestrales

$\hat{Y}$ Estimación de Y

Se busca obtener valores de a_0 y a_1 que minimicen e_i error de regresión

$$\text{Minimizar} \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \text{Minimizar} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

e_i = error muestral.

Calcular las derivadas parciales con respecto de a_o y a_1, igualarlas a cero y resolver el sistema de ecuaciones resultante.

$$\frac{\partial}{\partial a_o} \sum (Y_i - a_o - a_1 X_i)^2 = -2 \sum (Y_i - a_o - a_1 X_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i - a_o - a_1 X_i)^2 = -2 \sum X_i (Y_i - a_o - a_1 X_i)$$

$$-2 \sum (Y_i - a_o - a_1 X_i) = 0$$

$$-2 \sum X_i (Y_i - a_o - a_1 X_i) = 0$$

Solución:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum X_i Y_i/N - \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2/N - \bar{X}^2}$$

$$\hat{a}_o = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X}$$

PROPIEDADES ESTADISTICAS DE LOS ESTIMADORES

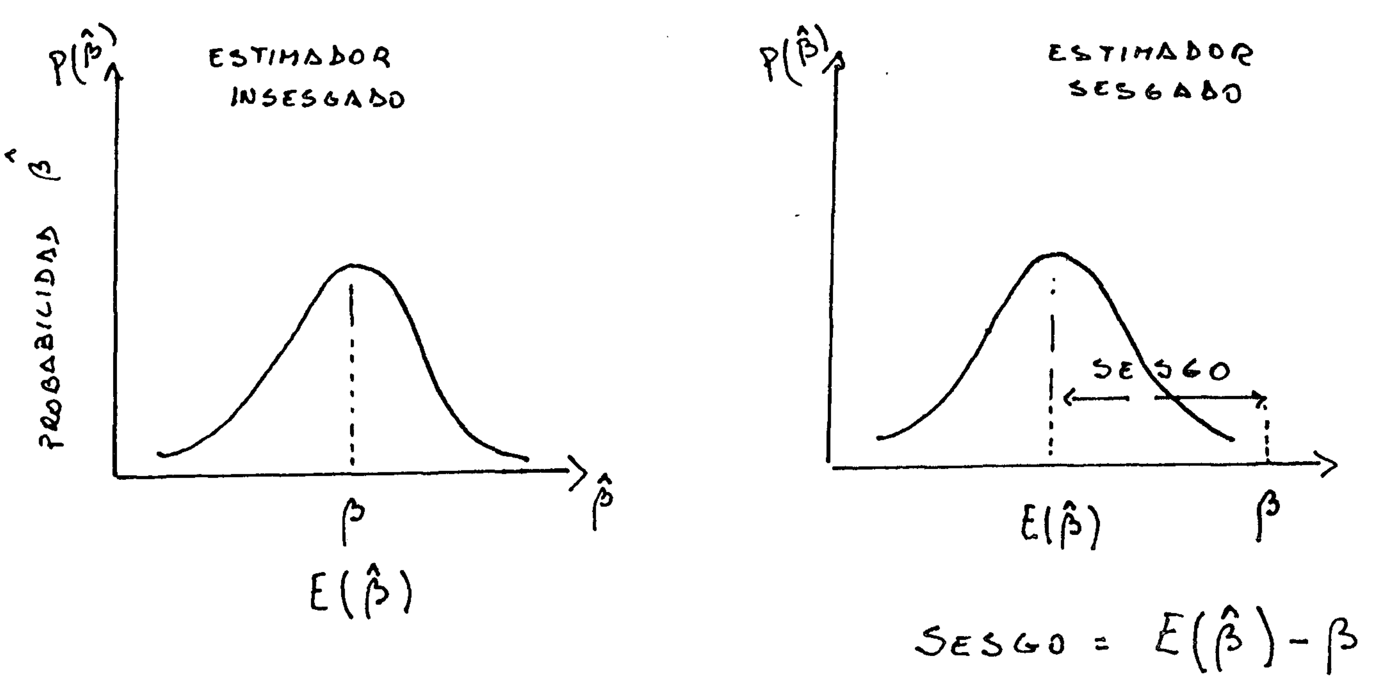
Queremos saber hasta qué punto la recta estimada difiere de la verdadera recta de regresión.

Criterios para juzgar la "bondad" de un estimador:

a) Criterios para muestras pequeñas.

- <u>Estimador insesgado</u>

La distribución del estimador debe tener una media igual al parámetro. Diremos que ^ es un estimador insesgado de si la media o valor esperado de ^ es igual al verdadero valor del parámetro, es decir, E(^)=

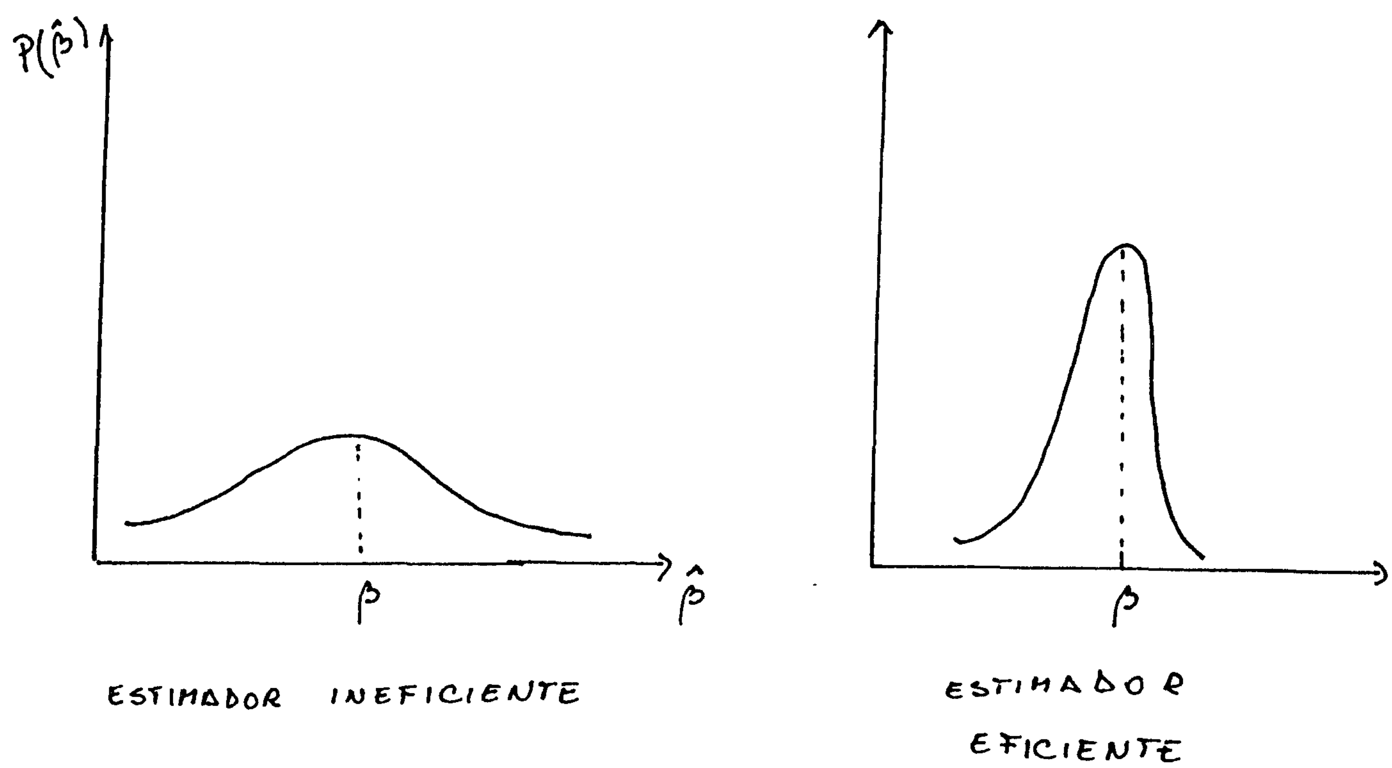


- <u>Estimador eficiente</u>

Un estimador es eficiente si su "variancia" es menor que la de cualquier otro estimador insesgado.

$$E\,[\,\hat{\beta} - E\,(\hat{\beta}\,)\,]^2 < E\,[\,\tilde{\beta} - E\,(\tilde{\beta}\,)\,]^2$$

$$V_{AR}\,(\hat{\beta}\,) < V_{AR}\,(\tilde{\beta}\,)$$

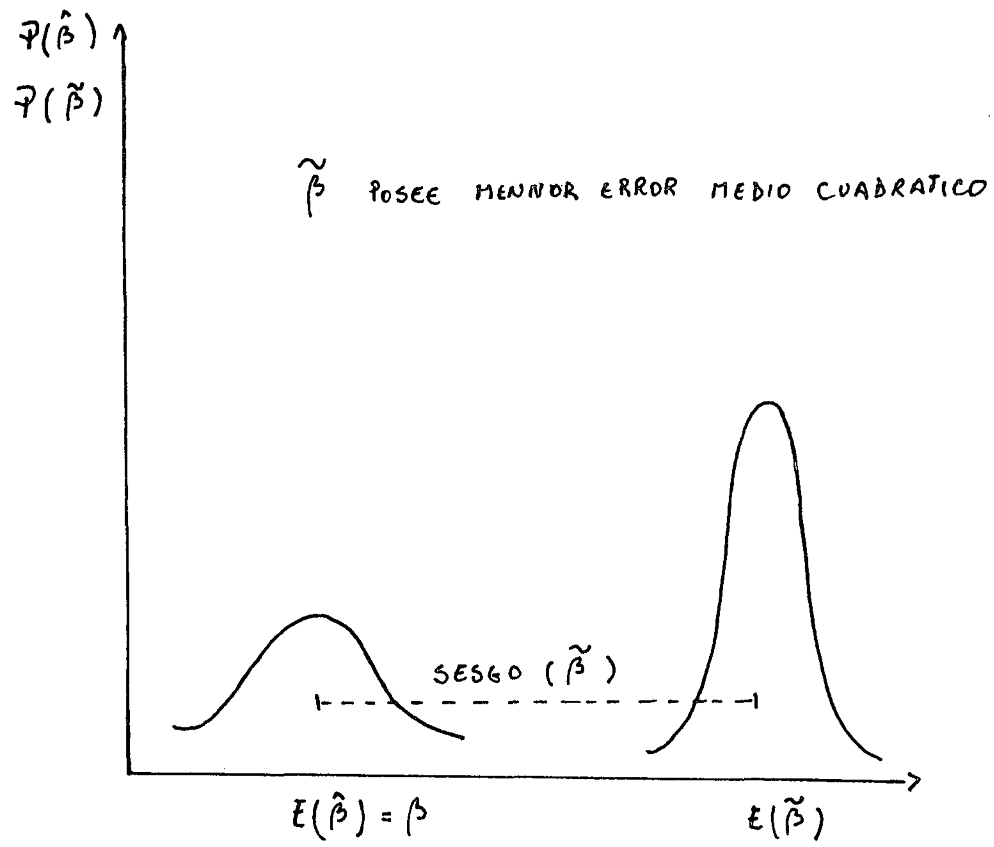


- <u>Mínimo error medio cuadrático</u>

$$EMC(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)^2$$

$$EMC(\hat{\beta}) = [Sesgo(\hat{\beta})]^2 + VAR(\hat{\beta})$$

Combina las propiedades de insesgamiento y de varianza mínima.



b) Propiedades de los estimadores de muestras grandes. (N ===> oo)

Se espera que $\hat{\beta}$ se aproxime lo más posible al verdadero valor de , a medida que aumenta el tamaño de la muestra:

$$\lim_{N \Longrightarrow \infty} (P \mid \beta - \hat{\beta} \mid < \varepsilon) = 1$$

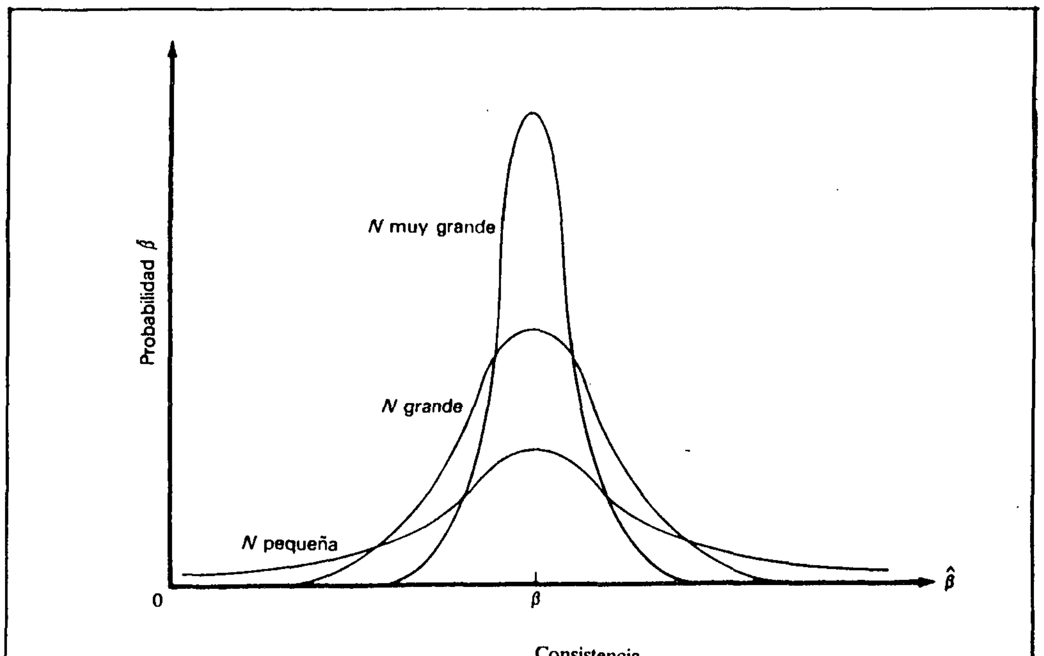
- <u>Estimador consistente</u>

Cuando limite de la probabilidad de $\hat{\beta}$ es :

$$\lim_{N \Longrightarrow \infty} E (\hat{\beta}_{(N)}) = \beta$$

$$\lim_{N \Longrightarrow \infty} [VAR (\hat{\beta})] = 0$$

Cuando las muestras son grandes, es más importante el criterio de consistencia que el de insesgamiento.



Consistencia.

- <u>Mejor estimador lineal insesgado</u> (BLUE)

Tienen varianza mínima con respecto al resto de estimadores lineales insesgados:

```
 _____________________________________________________
:                                                     :
:                                    UNIVERSO DE      :
:                                    ESTIMADORES      :
:______________________________                       :
:                              :                      :
: SUBCONJUNTO ESTIMADORES      :                      :
: INSESGADOS                   :                      :
:__________________________    :                      :
:                          :   :                      :
: ESTIMADORES              :   :                      :
: LINEALES INSESGADOS      :   :                      :
:      .                   :   :                      :
:__________________________:___:______________________:
       :
       V  MCO = Estimadores mínimo cuadráticos
                ordinarios
         (OLS)
```

Teorema clásico de Gauss-Markov

<u>Test de hipótesis e intérvalos de confianza</u>

Criterios estadísticos:

- Test basado en el ERROR STANDAR de los parámetros ESTIMADOS

  Determinan significación de $\hat{a}_0$ y $\hat{a}_1$

- Coeficiente de correlación

  Determina el grado de explicación de la regresión

<u>Distribución de los estimadores</u> ($\hat{a}_0$ y $\hat{a}_1$)

Basados en el supuesto N (0, ^{2}) se puede probar:

$$\hat{a}_0 \sim N\,(a_0,\ \sigma_{\hat{a}_0})$$

donde
$$\sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\sigma^2 \frac{\sum X_i}{N \sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{a}_1 \sim N\,(a_1,\ \sigma_{\hat{a}_1})$$

donde
$$\sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\sigma^2 \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

además:
$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \sum \frac{e_i^2}{N - K} = \sum \frac{(Y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 X_i)^2}{N - 2}$$

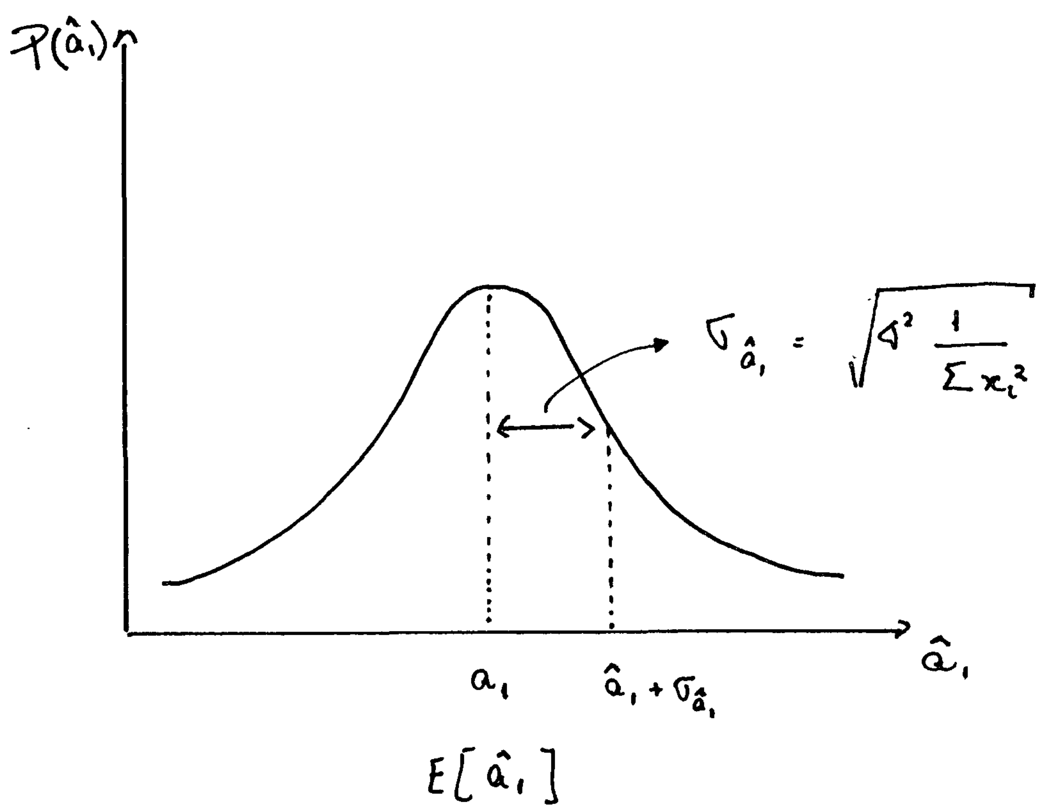
$$\text{Si } \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum x_i^2$$

entonces:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} = S_{\hat{a}_0} = S \cdot \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N \sum x_i^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{a_1} = S_{\hat{a}_1} = S \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum x_i^2}}$$

INTERPRETACION GRAFICA DE LA DISTRIBUCION DE $\hat{a}_1$



1. <u>Test basados en el ERROR STANDARD</u>

1.1 Test del ERROR STANDARD

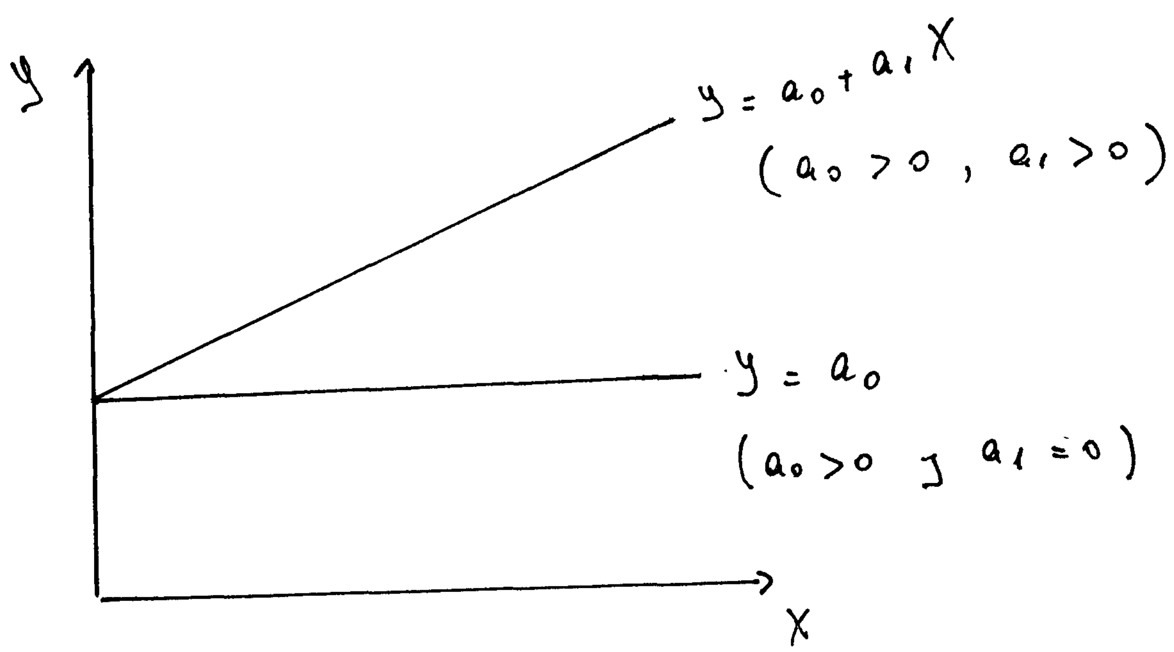
$H_o = a_1 = 0$

$H_1 = a_1 \neq 0$

se mide: $$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-2)\sum x_i^2}}$$

si $\hat{a}_1 > 2\, S_{\hat{a}_1}$

Se rechaza H_o y se concluye que $\hat{a}_1$ es estadísticamente significativo.



1.2 Test "t"

H_0: $a_1 = 0$

H_1: $a_1 \neq 0$

Se construye $Z = \dfrac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma(\hat{\beta})} \sim N(0, 1)$

$$\frac{\hat{a}_0 - a_0}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \dfrac{\sum X_i^2}{N \sum x_i^2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \sum x_i^2}} \sim N(0, 1)$$

Conociendo:

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{N - 2}$$

Se construye:

$$t = \frac{\hat{a}_0 - a_0}{S_{\hat{a}_0}} = \frac{\hat{a}_0 - a_0}{\sqrt{S^2 \dfrac{\sum X_i^2}{N \sum x_i^2}}} \sim t_{N-2}$$

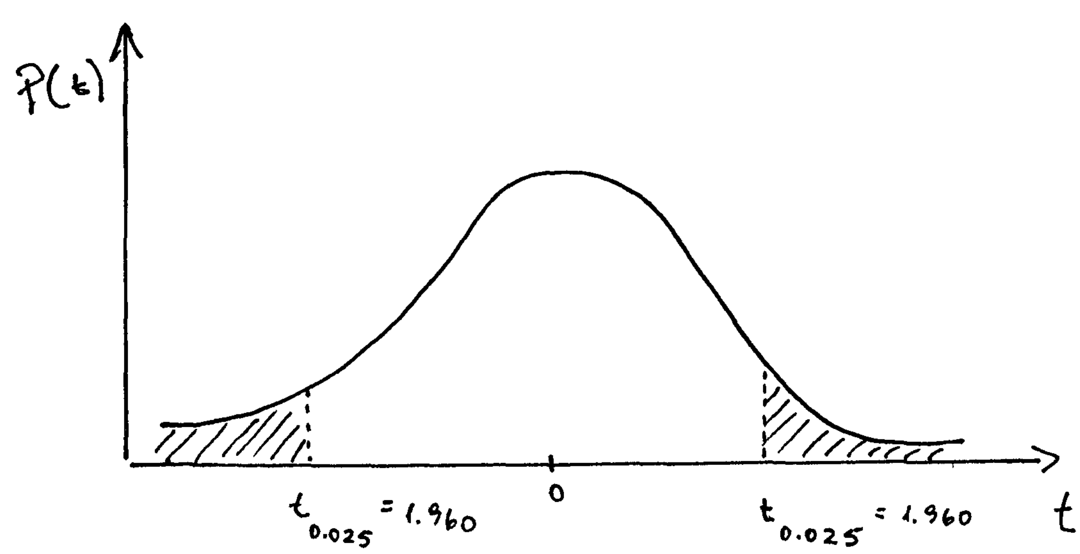
$$t = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{S_{\hat{a}_1}} = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sqrt{S^2 / \sum x_i^2}} \sim t_{N-2}$$

Se escoge "valor crítico" t_c para un nivel de significación determinada y se compara:

$$\left| \frac{\hat{a}_1}{S_{\hat{a}_1}} \right| > t_{c\,(N-K)}$$

Ejemplo:

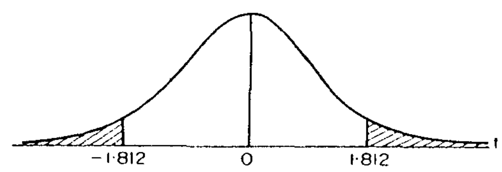
NIVEL SIGNIFICACION 95% Y N > 120



Cuadro 2

PERCENTAGE POINTS OF THE t DISTRIBUTION

Table 2. Percentage Points of the *t* Distribution



Example

For $\nu = 10$ degrees of freedom:

$P(t > 1{\cdot}812) = 0{\cdot}05$

$P(t < -1{\cdot}812) = 0{\cdot}05$

ν \ α	·25	·20	·15	·10	·05	·025	·01	·005	·0005
1	1·000	1·376	1·963	3·078	6·314	12·706	31·821	63·657	636·619
2	·816	1·061	1·386	1·886	2·920	4·303	6·965	9·925	31·598
3	·765	·978	1·250	1·638	2·353	3·182	4·541	5·841	12·941
4	·741	·941	1·190	1·533	2·132	2·776	3·747	4·604	8·610
5	·727	·920	1·156	1·476	2·015	2·571	3·365	4·032	6·859
6	·718	·906	1·134	1·440	1·943	2·447	3·143	3·707	5·959
7	·711	·896	1·119	1·415	1·895	2·365	2·998	3·499	5·405
8	·706	·889	1·108	1·397	1·860	2·306	2·896	3·355	5·041
9	·703	·883	1·100	1·383	1·833	2·262	2·821	3·250	4·781
10	·700	·879	1·093	1·372	1·812	2·228	2·764	3·169	4·587
11	·697	·876	1·088	1·363	1·796	2·201	2·718	3·106	4·437
12	·695	·873	1·083	1·356	1·782	2·179	2·681	3·055	4·318
13	·694	·870	1·079	1·350	1·771	2·160	2·650	3·012	4·221
14	·692	·868	1·076	1·345	1·761	2·145	2·624	2·977	4·140
15	·691	·866	1·074	1·341	1·753	2·131	2·602	2·947	4·073
16	·690	·865	1·071	1·337	1·746	2·120	2·583	2·921	4·015
17	·689	·863	1·069	1·333	1·740	2·110	2·567	2·898	3·965
18	·688	·862	1·067	1·330	1·734	2·101	2·552	2·878	3·922
19	·688	·861	1·066	1·328	1·729	2·093	2·539	2·861	3·883
20	·687	·860	1·064	1·325	1·725	2·086	2·528	2·845	3·850
21	·686	·859	1·063	1·323	1·721	2·080	2·518	2·831	3·819
22	·686	·858	1·061	1·321	1·717	2·074	2·508	2·819	3·792
23	·685	·858	1·060	1·319	1·714	2·069	2·500	2·807	3·767
24	·685	·857	1·059	1·318	1·711	2·064	2·492	2·397	3·745
25	·684	·856	1·058	1·316	1·708	2·060	2·485	2·787	3·725
26	·684	·856	1·058	1·315	1·706	2·056	2·479	2·779	3·707
27	·684	·855	1·057	1·314	1·703	2·052	2·473	2·771	3·690
28	·683	·855	1·056	1·313	1·701	2·048	2·467	2·763	3·674
29	·683	·854	1·055	1·311	1·699	2·045	2·462	2·756	3·659
30	·683	·854	1·055	1·310	1·697	2·042	2·457	2·750	3·646
40	·681	·851	1·050	1·303	1·684	2·021	2·423	2·704	3·551
60	·679	·848	1·046	1·296	1·671	2·000	2·390	2·660	3·460
120	·677	·845	1·041	1·289	1·658	1·980	2·358	2·617	3·373
∞	·674	·842	1·036	1·282	1·645	1·960	2·326	2·576	3·291

Source: This table is abridged from Table III of Fisher & Yates: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* published by Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, and by permission of the authors and publishers.

<u>Intérvalo de confianza</u>

Se escoge la probabilidad del intérvalo y con ello el valor crítico "t_c" con (N - K) G.L. (Grados de Libertad)

$$P\left\{ -t_c < \frac{\hat{a}_1 - a_1}{S_{\hat{a}_1}} < t_c \right\} = 0.95$$

Para N > 120 $t_c = 1.96$

$$P\left\{ -1.96 < \frac{a_1 - a_1}{S_{\hat{a}_1}} < 1.96 \right\} = 0.95$$

$$\hat{a}_1 - 1.96 \cdot S_{\hat{a}_1} < a_1 < 1.96 \cdot S_{\hat{a}_1} + \hat{a}_1$$

$$[a_1 = \hat{a}_1 \pm S_{\hat{a}_1} \cdot 1.96]$$

A continuación se presenta un ejemplo, con la estimación de la función de empleo, en que la variable explicativa es el producto.

En general esta función se estima de la forma:

log(ET) = c + a log(PGB)

siendo la relación lineal con respecto a los coeficientes.

La muestra tiene 25 observaciones y los resultados obtenidos con el programa MICRO-TSP, aplicando mínimos cuadrados ordinarios, entrega lo siguiente:

	COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T-STATISTIC
C	2.0408842	0.3306908	6.1715786
PGB	0.4673579	0.0263501	17.736448

R-squared	0.931868	Mean of dependent var	7.905562
Adjusted R-squared	0.928706	S.D. of dependent var	0.088853
S.E. of regression	0.023691	Sum of squared resid	0.012909
Durbin-Watson stat	1.342084	F-statistic	314.5816
Log likelihood	59.13512		

Debemos entonces comparar el valor de la estadística "t" de cada coeficiente,con el valor crítico "tc". En este caso,para un nivel de confianza de 95% y 23 grados de libertad (n - k = 25 - 2 = 23), tc = 2.069 (ver pag.23)

El computador nos entrega :

a) Para el caso del coeficiente de posición:
t = 2.04 / 0.33 = 6.17 > 2.069

b) Para el coeficiente "a" :
t = 0.46 / 0.026 = 17.73 > 2.069

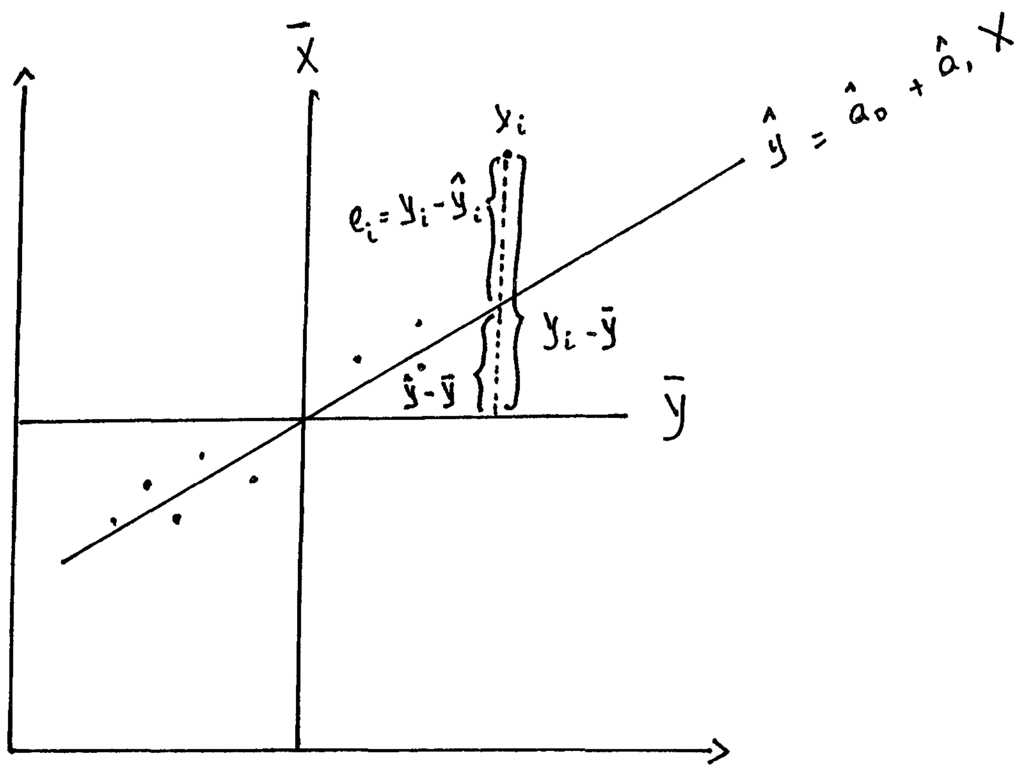
El intervalo de confianza de 95% para "a" es :

(0.46 - 2.069 * 0.026 < a < 0.46 + 2.069 * 0.026)

por lo tanto : (0.406 < a < 0.514)

2. Coeficiente de correlación

Mide el grado de ajuste de la regresión a las observaciones muestrales, es decir, la dispersión de las observaciones en torno a la linea de regresión.



$$[\text{Variación total de Y}] = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$[\text{Variación explicada de Y}] = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2$$

$$[\text{Variación no explicada de Y}] = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Se puede probar que:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

$$\begin{bmatrix} \text{VARIACION} \\ \text{TOTAL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{VARIACION} \\ \text{EXPLICADA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{VARIACION} \\ \text{RESIDUAL} \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \frac{\text{VARIACION EXPLICADA}}{\text{VARIACION TOTAL}} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = a_1^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

Limites de R^2:

$$1 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$0 < R^2 < 1$$

Capítulo II

1. Modelo de regresión múltiple

$$Y_i = b_o + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \dots b_K X_{Ki} + u_i$$

Y_i = Variable dependiente $i = 1 \dots\dots n$

X_i = Variables independientes y explicativas

u_i = Término de error

1.1 Supuestos:

a) $E(u_i) = 0$, $E(u_i)^2 = \quad {}^2$

b) $E(u_i, u_J) = 0$, $i \neq J$

c) $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

d) X_i son no estocásticas y no existe relación lineal entre dos o más variables independientes

e) El modelo esta bien especificado

1.2 Interpretación de los coeficientes de regresión

b_J Mide cambio en Y_i asociado a una variación de X_{Ji}

$J = 1 \dots K$

Equivale a una derivada parcial cuando el resto de las variables explicativas permanecen constantes

====> son coeficientes de regresión parciales

1.3 Estimación del modelo de regresión múltiple

- Método de mínimos cuadrados ordinarios

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{1i} + \hat{b}_2 X_{2i} + \ldots \hat{b}_K X_{Ki}$$

Se procede, al igual que con el modelo de regresión simple, minimizando:

$$\text{Minimizar SCE} = \sum e^2_i = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

y hallando sus derivadas parciales con respecto a los parámetros $b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots b_K$. Igualando dichas derivadas a cero, se obtiene el sistema de ecuaciones normales:

$$\sum Y_i = N\, b_0 + b_1 \sum X_{1i} + \ldots + b_K \sum X_{Ki}$$

$$\sum X_{1i} Y_i = b_0 \sum X_{1i} + b_2 \sum X_{1i}^2 + \ldots\ldots\ldots b_K \sum X_{Ki} X_{1i}$$

$$\vdots$$

$$\sum X_{Ki} Y_i = b_0 \sum X_{Ki} + b_1 \sum X_{1i} X_{Ki} + \ldots + b_K \sum X_{Ki}^2$$

Resolviendo este sistema, se obtienen los valores de lo estimadores.

1.4 El modelo en forma matricial

En términos matriciales, podemos escribir la ecuación de regresión como :

$$Y = X\beta + U$$

donde :

Y es un vector columna, de orden (n x 1) de las observaciones de la variable dependiente.

X es una matriz de orden $(n \times k)$ de las observaciones de las variables independientes.

β es un vector columna de orden $(k \times 1)$ de los parámetros desconocidos.

U es un vector columna de orden $(n \times 1)$ de los errores observados.

El objetivo es hallar el vector de parámetros $\hat{\beta}$ que haga mínima la suma de los cuadrados de los residuos:

$$SCE = \sum e^2_i = \hat{E}'\hat{E}$$

donde,

$$\hat{E} = (Y - \hat{Y})$$

$$\hat{Y} = X\,\hat{\beta}$$

$$\frac{\partial\, SCE}{\partial \beta} = -2\,X'\,Y + 2\,X'\,X\,\hat{\beta} = 0$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}\,X'\,Y$$

1.5 Propiedades

Al igual que en el modelo de regresión simple se cumple:

a) El estimador "MCO" es el mejor estimador lineal insesgado

b) Una estimación insesgada y consistente de ^{2} es:

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{N - K}$$

c) Si el error se distribuye normalmente pueden aplicarse pruebas "t"

$$\frac{\hat{b}_J - b_J}{S_{\hat{b}_J}} \sim t_{N-K} \qquad J = 1, 2 \ldots K$$

1.6 Pruebas F, R², R² corregido

$$Y_i = b_o + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \ldots b_K X_{Ki} + u_i$$

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_o + \hat{b}_1 X_{1i} + \hat{b}_2 X_{2i} + \ldots \hat{b}_K X_{Ki}$$

$$(Y_i - \bar{Y}) = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})$$

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

SUMA TOTAL DE CUADRADOS (STC)	SUMA DE CUADRADOS DE LOS ERRORES (SCE)	SUMA DE CUADRADOS DE LA REGRESION (SCR)

a) Coeficiente de correlación múltiple (R^2)

Mide la proporción de la variación de Y que queda "explicada" por la ecuación de regresión múltiple

$$R^2 = \frac{SCR}{STC} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

<u>Problemas</u>:

- No mide si el modelo esta bien especificado
- La inclusión de nuevas variables, eleva el R^2 aunque estas no sean significativas (no considera los grados de libertad del modelo)
- Si la regresión no tiene término constante (b_o), R^2 puede caer fuera del intervalo [0, 1]

b) Coeficiente de correlación corregido ($\bar{R}^2$)

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{VAR\ (e)}{VAR\ (Y)} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \cdot \frac{(N - 1)}{(N - K)}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\ \frac{(N - 1)}{(N - K)}$$

Permite eliminar la dependencia de la bondad del ajuste con respecto al número de variables independientes del modelo

Si $K = 1 \Longrightarrow R^2 = \bar{R}^2$

$K > 1 \Longrightarrow R^2 > \bar{R}^2$

$\bar{R}^2$ puede ser negativo

c) Estadístico "F"

Permite probar el grado de significación de R^2 y contrasta la hipótesis:

$H_o = b_1 = b_2 = \dots b_K = 0$

$$F_{K-1,\ N-K} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2/(K-1)}{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2/(N-K)} = \frac{R^2\ .\ (N-K)}{1 - R^2.(K-1)}$$

H_o se acepta cuando R^2 y F son próximos a "0"

d) Test de Chow

Es un caso particular del testo "F", que se utiliza para testear la estabilidad del comportamiento de los parámetros, en dos subperíodos:

H_o = el comportamiento es estable

H_1 = el comportamiento es inestable, y esto se puede analizar de dos formas:

a) Sobre la totalidad del período

$N = u_1 + u_2$

SCE_o = la suma de cuadrados de los errores para el total de la muestra posee

$GL_o = (n_1 + n_2 - K)$ grados de libertad

b) Sobre cada uno de los subperíodos

En este caso, la suma de cuadrados de los errores es:

$SCE_1 = SCE_{n1} + SCE_{n2}$

y el numero de grados de libertad es:

$(GL_1 = (n_1 - K) + (n_2 - K) = n_1 + n_2 - 2K$

SCE_{n1} y SCE_{n2} se obtienen regresionando por separado las dos submuestras.

Luego se calcula la estadística:

$$\frac{(SCE_o - SCE_1)/GL_o - GL_1}{SCE_1/GL_1} = \frac{(SCE_o - SCE_1)/_K}{SCE_1/n_1+n_2-2K} \sim F_{K,\ n_1+n_2-2K}$$

La hipótesis de inestabilidad de los parámetros será privilegiada solamente si la ganancia de precisión (SCE_1 es suficientemente pequeña) es superior a los grados de libertad perdidos.

Cuando el segundo subperíodo es demasiado pequeño para efectuar el test anterior, es posible proceder de la siguiente forma:

$SCE_{n2} = 0$

$SCE_1 = SCE_{n1}$

$GL_1 = (n_1 - K)$

$$\frac{(SCE^o - SCE^n{}_1)/GL_o - GL_1}{SCE_{n1}/GL_1} = \frac{(SCE_o - SCE_{n1})/n_2}{SCE_{n1}/n_1 - K} \sim F_{n2,\ n_1 - K}$$

DISTRIBUCION "F"

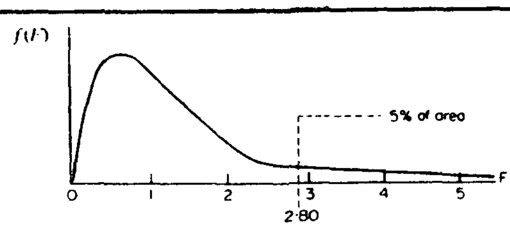


Table 4A. Values of $F_{0.05,\nu_1,\nu_2}$

ν_1 = degrees of freedom for numerator

ν_2 = degrees of freedom for denominator

Example
For $\nu_1 = 9$, $\nu_2 = 12$ degrees of freedom
$P(F > 2{\cdot}80) = 0{\cdot}05$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18·5	19·0	19·2	19·2	19·3	19·3	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·5	19·5	19·5	19·5	19·5	19·5
3	10·1	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·74	8·70	8·66	8·64	8·62	8·59	8·57	8·55	8·53
4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·91	5·86	5·80	5·77	5·75	5·72	5·69	5·66	5·63
5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·68	4·62	4·56	4·53	4·50	4·46	4·43	4·40	4·37
6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·00	3·94	3·87	3·84	3·81	3·77	3·74	3·70	3·67
7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·57	3·51	3·44	3·41	3·38	3·34	3·30	3·27	3·23
8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·28	3·22	3·15	3·12	3·08	3·04	3·01	2·97	2·93
9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·07	3·01	2·94	2·90	2·86	2·83	2·79	2·75	2·71
10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·91	2·85	2·77	2·74	2·70	2·66	2·62	2·58	2·54
11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·79	2·72	2·65	2·61	2·57	2·53	2·49	2·45	2·40
12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·69	2·62	2·54	2·51	2·47	2·43	2·38	2·34	2·30
13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·60	2·53	2·46	2·42	2·38	2·34	2·30	2·25	2·21
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·53	2·46	2·39	2·35	2·31	2·27	2·22	2·18	2·13
15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·48	2·40	2·33	2·29	2·25	2·20	2·16	2·11	2·07
16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·42	2·35	2·28	2·24	2·19	2·15	2·11	2·06	2·01
17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·38	2·31	2·23	2·19	2·15	2·10	2·06	2·01	1·96
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·34	2·27	2·19	2·15	2·11	2·06	2·02	1·97	1·92
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·31	2·23	2·16	2·11	2·07	2·03	1·98	1·93	1·88
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·28	2·20	2·12	2·08	2·04	1·99	1·95	1·90	1·84
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·25	2·18	2·10	2·05	2·01	1·96	1·92	1·87	1·81
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·23	2·15	2·07	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·78
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·20	2·13	2·05	2·01	1·96	1·91	1·86	1·81	1·76
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·18	2·11	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·79	1·73
25	4·24	3·39	2·99	2·76	2·60	2·49	2·40	2·34	2·28	2·24	2·16	2·09	2·01	1·96	1·92	1·87	1·82	1·77	1·71
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·33	2·27	2·21	2·16	2·09	2·01	1·93	1·89	1·84	1·79	1·74	1·68	1·62
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·25	2·18	2·12	2·08	2·00	1·92	1·84	1·79	1·74	1·69	1·64	1·58	1·51
60	4·00	3·15	2·76	2·53	2·37	2·25	2·17	2·10	2·04	1·99	1·92	1·84	1·75	1·70	1·65	1·59	1·53	1·47	1·39
120	3·92	3·07	2·68	2·45	2·29	2·18	2·09	2·02	1·96	1·91	1·83	1·75	1·66	1·61	1·55	1·50	1·43	1·35	1·25
∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·75	1·67	1·57	1·52	1·46	1·39	1·32	1·22	1·00

Abridged from M. Merrington and C. M. Thompson, 'Tables of percentage points of the inverted beta (F) distribution', *Biometrika*, vol. 33, 1943, p. 73. By permission of the *Biometrika* trustees.

2. Problemas econométricos

Test sobre los supuestos del modelo de regresión lineal

2.1 Multicolinealidad

Dos o más variables, o combinaciones de variables estan altamente correlacionadas entre sí, pero no son perfectamente colineales.

a) Causas de multicolinealidad

- Tendencia de las variables económicas a moverse en forma conjunta en el tiempo (factores de crecimiento y tendenciales en las series de tiempo)

- Uso de variables con rezagos

- También puede existir multicolinealidad en muestras de corte transversal, ejemplo: capital y fuerza de trabajo

b) Consecuencias de multicolinealidad

- Los coeficientes de regresión se tornan inestables a medida que se agregan en el modelo variables correlacionadas

- El error standard de los estimadores tiende a crecer

- Puede llegar a cambiar el signo de los parámetros

- Podemos equivocarnos en la especificación del modelo, debido al rechazo de variables importantes, como consecuencia de elevados errores standard

c) Soluciones

- Aceptar su presencia cuando el grado de multicolinealidad es bajo

- Eliminar variables cuando el grado de multicolinealidad es muy alto (peligro de cometer error de especificación)

- Aumenta tamaño de la muestra

- Transformar el modelo

- Sustituir variables rezagadas por otras variables explicativas

2.2 Correlación serial de los errores (Autocorrelación)

No se cumple el supuesto: $E(u_i, u_j) = 0 \quad i \neq J$

La autocorrelación se refiere a la relación que existe en los términos de error de la regresión a través del tiempo

La relación más simple que puede existir entre los errores es lineal:

$$u_t = \rho . u_{t-1} + v_t$$

(Relación autorregresiva de primer orden)

Métodos para detectar autocorrelación:

- Graficando los errores de la regresión en un diagrama de dos dimensiones (en un eje e_t, en el otro e_{t-1})
- Graficando los errores de la regresión en el tiempo

Otros modelos de autocorrelación

a) Modelo autorregresivo de segundo orden

$$u_t = a_1 \, u_{t-1} + a_2 \, u_{t-1} + v_t$$

b) Modelo autorregresivo de orden "K"

$$u_t = a_1 \, u_{t-1} + a_2 \, u_{t-2} + \dots \, a_K \, u_{t-K} + v_t$$

donde:

$$E\,(v_t) = 0 \quad E(v_t^2) = \sigma^2 , \quad E(v_t, v_{t-1}) = 0$$

<u>Estimación del coeficiente de autocorrelación de primer orden</u>

Suponiendo: $u_t = \rho . u_{t-1} + v_t$

$$\hat{\rho}_{u_{t1}, u_{t-1}} = r_{e_t, e_{t-1}} = \frac{\sum_{1}^{N} e_t \, e_{t-1}}{\sqrt{\sum_{1}^{N} e_t^2} \sqrt{\sum_{1}^{N} e^2_{t-1}}}$$

<u>Causas de autocorrelación</u>

- Omisión de variables explicativas
- Error en la especificación de la forma matemática del modelo

  Interpolación o "suavización" de observaciones estadísticas
- Autocorrelación verdadera de "u"
  (Efectos mantenidos en el tiempo de guerras, malas cosechas, sequías, terremotos, etc.)

<u>Consecuencias de autocorrelación</u>

- No provoca sesgo en las estimaciones "MCO"
- Las varianzas de los estimadores "MCO" tienden a ser mayores que las obtenidas con otros métodos de estimación
- La varianza del término de error σ^2_u queda subestimada
- Las proyecciones con "MCO" serán ineficientes por tener una mayor varianza en comparación con otro método de estimación
- Se puede aceptar como significativas, variables explicativas que no lo son, debido a la subestimación de la varianza de los estimadores

Test para detectar autocorrelación

a) Test de Durbin-Watson (DW)

Se aplica para muestras pequeñas (N < 100) y sólo para esquemas autorregresivos de primer orden

H_o: $\rho = 0$

H_1: $\rho = 1$

$$d = \frac{\sum_{t=2} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{N} e^2_t} \sim 2 (1 - \hat{\rho})$$

como $|\hat{\rho}| < 1$ $\quad 0 < d < 4$

i) Si $\hat{\rho} = 0 \Longrightarrow d = 2$

$d \longrightarrow 2 \Longrightarrow$ se acepta H_o

ii) Si $\hat{\rho} = +1 \Longrightarrow d = 0$

$0 < d < 2 \Longrightarrow$ autocorrelación positiva

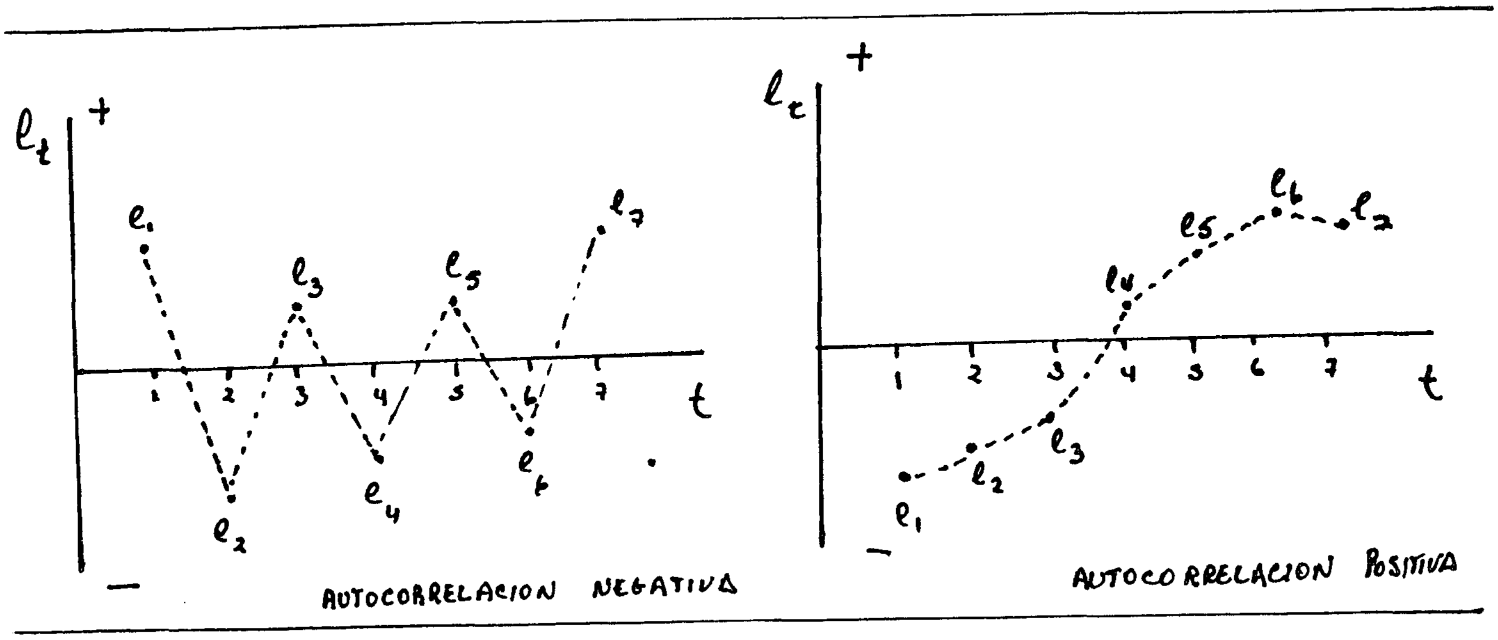
Si $d \longrightarrow 0 \Longrightarrow$ autocorrelación positiva crece

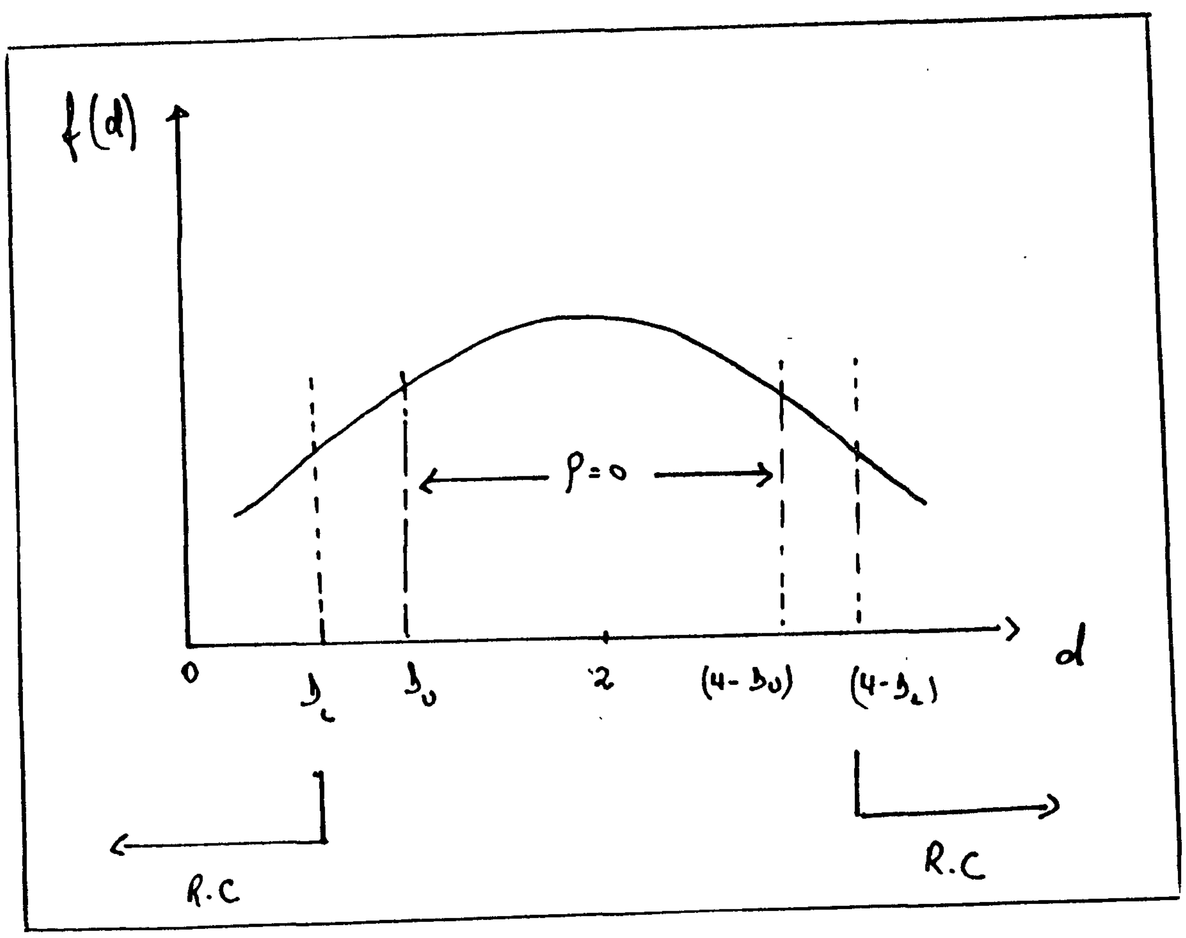
iii) Si $\hat{\rho} = -1 \Longrightarrow d = 4$

$2 < d < 4 \Longrightarrow$ autocorrelación negativa

Si $d \longrightarrow 4 \Longrightarrow$ autocorrelación negativa crece

Región crítica del test D-W





DISTRIBUCION "d" DE DURBIN-WATSON

Table 5A. Significance Points of d_L and d_U: 5%

n	k' = 1		k' = 2		k' = 3		k' = 4		k' = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1·08	1·36	0·95	1·54	0·82	1·75	0·69	1·97	0·56	2·21
16	1·10	1·37	0·98	1·54	0·86	1·73	0·74	1·93	0·62	2·15
17	1·13	1·38	1·02	1·54	0·90	1·71	0·78	1·90	0·67	2·10
18	1·16	1·39	1·05	1·53	0·93	1·69	0·82	1·87	0·71	2·06
19	1·18	1·40	1·08	1·53	0·97	1·68	0·86	1·85	0·75	2·02
20	1·20	1·41	1·10	1·54	1·00	1·68	0·90	1·83	0·79	1·99
21	1·22	1·42	1·13	1·54	1·03	1·67	0·93	1·81	0·83	1·96
22	1·24	1·43	1·15	1·54	1·05	1·66	0·96	1·80	0·86	1·94
23	1·26	1·44	1·17	1·54	1·08	1·66	0·99	1·79	0·90	1·92
24	1·27	1·45	1·19	1·55	1·10	1·66	1·01	1·78	0·93	1·90
25	1·29	1·45	1·21	1·55	1·12	1·66	1·04	1·77	0·95	1·89
26	1·30	1·46	1·22	1·55	1·14	1·65	1·06	1·76	0·98	1·88
27	1·32	1·47	1·24	1·56	1·16	1·65	1·08	1·76	1·01	1·86
28	1·33	1·48	1·26	1·56	1·18	1·65	1·10	1·75	1·03	1·85
29	1·34	1·48	1·27	1·56	1·20	1·65	1·12	1·74	1·05	1·84
30	1·35	1·49	1·28	1·57	1·21	1·65	1·14	1·74	1·07	1·83
31	1·36	1·50	1·30	1·57	1·23	1·65	1·16	1·74	1·09	1·83
32	1·37	1·50	1·31	1·57	1·24	1·65	1·18	1·73	1·11	1·82
33	1·38	1·51	1·32	1·58	1·26	1·65	1·19	1·73	1·13	1·81
34	1·39	1·51	1·33	1·58	1·27	1·65	1·21	1·73	1·15	1·81
35	1·40	1·52	1·34	1·58	1·28	1·65	1·22	1·73	1·16	1·80
36	1·41	1·52	1·35	1·59	1·29	1·65	1·24	1·73	1·18	1·80
37	1·42	1·53	1·36	1·59	1·31	1·66	1·25	1·72	1·19	1·80
38	1·43	1·54	1·37	1·59	1·32	1·66	1·26	1·72	1·21	1·79
39	1·43	1·54	1·38	1·60	1·33	1·66	1·27	1·72	1·22	1·79
40	1·44	1·54	1·39	1·60	1·34	1·66	1·29	1·72	1·23	1·79
45	1·48	1·57	1·43	1·62	1·38	1·67	1·34	1·72	1·29	1·78
50	1·50	1·59	1·46	1·63	1·42	1·67	1·38	1·72	1·34	1·77
55	1·53	1·60	1·49	1·64	1·45	1·68	1·41	1·72	1·38	1·77
60	1·55	1·62	1·51	1·65	1·48	1·69	1·44	1·73	1·41	1·77
65	1·57	1·63	1·54	1·66	1·50	1·70	1·47	1·73	1·44	1·77
70	1·58	1·64	1·55	1·67	1·52	1·70	1·49	1·74	1·46	1·77
75	1·60	1·65	1·57	1·68	1·54	1·71	1·51	1·74	1·49	1·77
80	1·61	1·66	1·59	1·69	1·56	1·72	1·53	1·74	1·51	1·77
85	1·62	1·67	1·60	1·70	1·57	1·72	1·55	1·75	1·52	1·77
90	1·63	1·68	1·61	1·70	1·59	1·73	1·57	1·75	1·54	1·78
95	1·64	1·69	1·62	1·71	1·60	1·73	1·58	1·75	1·56	1·78
100	1·65	1·69	1·63	1·72	1·61	1·74	1·59	1·76	1·57	1·78

Note: k' = number of explanatory variables excluding the constant term.
Source: J. Durbin and G. S. Watson, 'Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression', *Biometrika*, vol. 38, 1951, pp. 159–77. Reprinted with the permission of the authors and the *Biometrika* trustees.

b) Test alternativo

Puede usarse para detectar cualquier tipo de autocorrelación:

i) Se estima el modelo por "MCO" y se obtiene e_t

ii) Se estima

$$e_t = \rho\, e_{t-1} + v_t$$

$$e_t = \rho\, e^2_{t-1} + v_t$$

$$e_t = \rho_1\, e_{t-1} + \rho_2\, e_{t-2} + v_t$$

$$e_t = \rho \sqrt{e_{t-1}} + v_t$$

.
.
.
etc.

iii) Se aplica cualquier test para $\hat{\ }_{1}$
(Test t, F, etc.)

iv) Se acepta v rechaza H_o en función del test escogido

<u>Corrección de la autocorrelación</u>

Depende de su origen ==>

- Incluir variables importantes que faltan en el modelo
- Cambia la forma matemática de la función
- Mejorar calidad de los datos
- Si la autocorrelación se debe a una mala especificación del término de error, se debe estimar ρ y transformar la ecuación original

$$Y^* = Y_t - \hat{\rho}_1 Y_{t-1} - \hat{\rho}_2 Y_{t-2} \dots$$

$$X^*_1 = X_{1t} - \hat{\rho}_1 X_{1(t-1)} - \hat{\rho}_2 X_{1(t-2)} \dots$$

$$\vdots$$

$$X^*_K = X_{Kt} - \hat{\rho}_1 X_{K(t-1)} - \hat{\rho}_2 X_{K(t-2)} \dots$$

y aplicar MCO a:

$$Y^*_t = b_0 + b_1 X^*_1 + \dots b_K X^*_K + v_t$$

<u>Método de estimación de "   "</u>

a) Método iterativo de Cochrane-Orcutt

i) Se aplica MCO a la ecuación original

ii) En base a los residuos se estima

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t - e_{t-1}}{\sum e^2_{t-1}}$$

iii) Se usa $\hat{\rho}$ para transformar la ecuación

$$(Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) = b_0 (1 - \hat{\rho}) + b_1 (X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + v_t$$

iv) Se vuelve a estimar los coeficientes de la regresión transformada, con los que se obtienen nuevos residuos

v) En base a ellos se estima un nuevo   y así sucesivamente hasta que el valor de   converge

b) <u>Método de Hildreth - LV</u>

- Se especifica una malla de valores para
  Para correlación positiva, los valores serían 0,

0.1, 0.2, 0.3, 0.4, ..., 0.9, 1

- Para cada valor de se estima la ecuación transofrmada

$$Y^*_t = b_o\ (1 - \hat{\rho}\ ) + b_1\ X^*_{1v} + \ldots\ b_K\ X^*_{Kt} + v_t$$

- Se selecciona como mejor ecuación aquella a la que corresponde la menor suma de cuadrados de los residuos

c) <u>Método de Durbin</u>

- A partir de la ecuación

$$Y_t - \rho\ Y_{t-1} = b_o\ (1 - \rho\ ) + b_1\ (X_{1t} - \rho X_{1\ t-1}) + \ldots\ b_K\ (X_{Kt} - \\ - \rho X_{K\ (t-1)} + v_t$$

- Se obtiene

$$Y_t = b_o\ (1 - \rho\ ) + \rho\ Y_{t-1} + b_1\ (X_{1t} - \rho\ X_{1\ (t-1)}) + \ldots + v_t$$

- De la ecuación anterior se estima por MCO $\hat{\rho}$, coeficiente que acompaña a Y_{t-1}

- Se puede volver a estimar la ecuación transformada

  a partir del primer valor obtenido de $\hat{\rho}$, proporcionando una mejor estimación de los parámetros.

2.3 <u>Algunos ejemplos</u>

A continuación presentamos algunos ejemplos de autocorrelación serial y multicolinealidad, en la estimación de una ecuación de importaciones, en función del producto bruto, un Indice de capacidad y el tipo de cambio real.

La ecuación tiene la forma:

MTD $= c\ PGB^{a1} * ICAP^{a2} * TCR^{a3} * U$
(importaciones)

linealizando mediante logaritmos:

$$LMTD = c\ \hat{a}_1\ LPGB + \hat{a}_2\ LICAP + a_3\ LTCR$$

Estimando mediante mínimos cuadrados ordinarios, con el programa MICRO-TSP, se obtuvieron los resultados que se presentan a continuación:

a) Se observa que los signos de las variables son los adecuados;

b) R^2 es bastante alta;

c) El test D-W indica una autocorrelación positiva muy significativa.

Una forma de abordar este problema es incorporando variables explicativas. Se agregan entonces dos variables ficticas, que indican cambios profundos en el comportamiento de la variable, debido a situaciones específicas, en el período 73-74 y 85.

d) Puede observarse que estas variables resultan significativas;

e) El R^2 se eleva a 0.94;

f) Se mejora el test D-W.

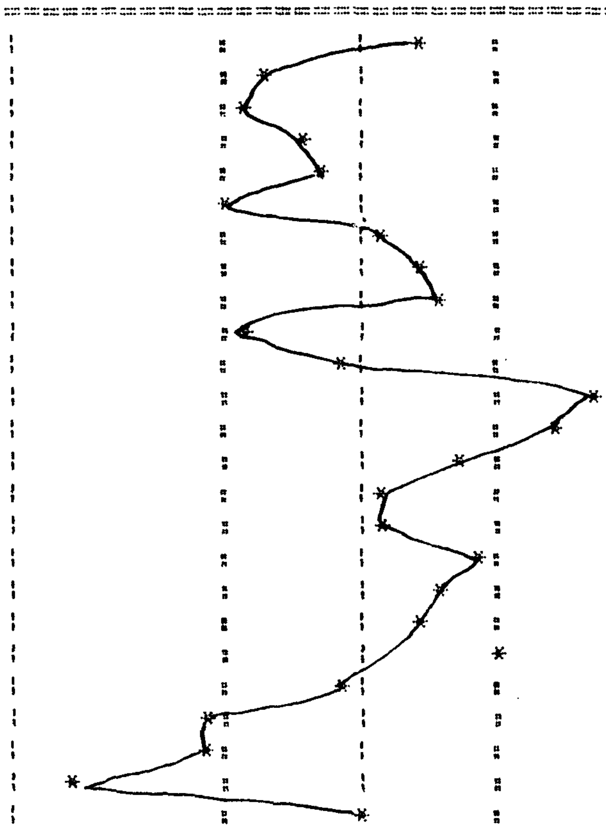
REGRESION 1

SMPL 1962 - 1986
25 Observations
OLSQ // Dependent Variable is LMTD

	COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T-STATISTIC
C	-4.0440060	3.1375900	-1.2888892
LPGB	0.6673035	0.3249417	2.0536098
LICAP	1.1243409	0.4615936	2.4357807
LTCR	-0.1688796	0.0744676	-2.2678272

R-squared	0.867944	Mean of dependent var	8.352638
Adjusted R-squared	0.849079	S.D. of dependent var	0.282754
S.E. of regression	0.109846	Sum of squared resid	0.253389
Durbin-Watson stat	0.988276	F-statistic	46.00769
Log likelihood	21.92286		

Residual Plot



obs	RESIDUAL	ACTUAL	FITTED
1962	0.05675	8.00115	7.94440
1963	-0.07586	7.90563	7.98148
1964	-0.09776	7.96039	8.05816
1965	-0.05025	7.96252	8.01277
1966	-0.03753	8.12705	8.16458
1967	-0.10706	8.07977	8.18683
1968	0.01824	8.22895	8.21071
1969	0.05595	8.31103	8.25508
1970	0.06276	8.32562	8.26286
1971	-0.10472	8.30501	8.40973
1972	-0.01109	8.35946	8.37055
1973	0.19065	8.44870	8.25805
1974	0.16898	8.50346	8.33448
1975	0.07843	8.14395	8.06552
1976	0.02217	8.17304	8.15087
1977	0.02248	8.36295	8.34047
1978	0.10252	8.57401	8.47149
1979	0.07322	8.71636	8.64314
1980	0.05010	8.85695	8.80684
1981	0.11779	9.00657	8.88878
1982	-0.02264	8.52216	8.54480
1983	-0.13449	8.37348	8.50798
1984	-0.13082	8.48090	8.61172
1985	-0.24688	8.37848	8.62536
1986	-0.00094	8.70836	8.70930

REGRESION 2

```
SMPL    1962  -  1986
25 Observations
OLSQ // Dependent Variable is LMTD
=========================================================================
                    COEFFICIENT    STANDARD ERROR    T-STATISTIC
=========================================================================
          C         -3.7766740       2.3788134       -1.5876293
        LPGB         0.6052537       0.2507283        2.4139824
       LICAP         1.2806697       0.3516983        3.6413876
        LTCR        -0.2014322       0.0561225       -3.5891541
       D7374         0.1944446       0.0617383        3.1494960
         D85        -0.2518337       0.0852999       -2.9523336
=========================================================================
R-squared                0.936790    Mean of dependent var    8.352638
Adjusted R-squared       0.920155    S.D. of dependent var    0.282754
S.E. of regression       0.079897    Sum of squared resid     0.121288
Durbin-Watson stat       1.316897    F-statistic              56.31677
Log likelihood           31.13237
=========================================================================
```

```
=========================================================================
           Residual Plot                obs  RESIDUAL   ACTUAL    FITTED
=========================================================================
|        :        |       *:       | 1962  0.07031   8.00115   7.93085
|        :  *     |        :       | 1963 -0.05557   7.90563   7.96120
|       *:        |        :       | 1964 -0.08844   7.96039   8.04883
|        :     *  |        :       | 1965 -0.03166   7.96252   7.99418
|        :      * |        :       | 1966 -0.02295   8.12705   8.15000
|       *:        |        :       | 1967 -0.09020   8.07977   8.16997
|        :        |   *    :       | 1968  0.03786   8.22895   8.19109
|        :        |       *:       | 1969  0.07452   8.31103   8.23651
|        :        |        *       | 1970  0.08322   8.32562   8.24241
|       *:        |        :       | 1971 -0.09290   8.30501   8.39792
|        :        *        :       | 1972  0.00363   8.35946   8.35583
|        :        | *      :       | 1973  0.01722   8.44870   8.43148
|        :      * |        :       | 1974 -0.01722   8.50346   8.52068
|        :        |        : *     | 1975  0.10278   8.14395   8.04118
|        :        |   *    :       | 1976  0.03834   8.17304   8.13470
|        :        |  *     :       | 1977  0.02571   8.36295   8.33724
|        :        |        : *     | 1978  0.10004   8.57401   8.47396
|        :        |     *  :       | 1979  0.05703   8.71636   8.65933
|        :        | *      :       | 1980  0.02013   8.85695   8.83681
|        :        |        *       | 1981  0.08397   9.00657   8.92260
|        :     *  |        :       | 1982 -0.03035   8.52216   8.55251
|  *     :        |        :       | 1983 -0.13762   8.37348   8.51111
|  *     :        |        :       | 1984 -0.13881   8.48090   8.61971
|        :        *        :       | 1985 -2.2D-16   8.37848   8.37848
|        :       *|        :       | 1986 -0.00903   8.70836   8.71739
=========================================================================
```

Con el fin de mejorar la regresión, se introducen dos nuevas variables explicativas: el tipo de cambio real rezagado en un período (LTCR (-1)) y el índice de precios en dólares de las importaciones (LDFM).

g) Se observa en las dos estimaciones siguientes que ninguna de estas variables resulta ser significativa, pero además ocurre que:

- el valor "t" de la variable LTCR disminuye, dejando de ser significativo, sobre todo al introducir la variable DFM ;
- El signo de la variable DFM no es el adecuado;
- El R^2 se mantiene igual a la ecuación original;
- El test D-W empeora cuando se incorpora DFM .

h) Puede concluirse que las variables introducidas provocan problemas de multicolinealidad con la variable TCR, y de hecho, es sabido que las variaciones del índice de precios de importaciones afectan el tipo de cambio real.

REGRESION 3

SMPL 1963 - 1986
24 Observations
OLSQ // Dependent Variable is LMTD

	COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T-STATISTIC
C	-5.4318078	2.8382205	-1.9138075
LPGB	0.7779218	0.2981125	2.6094906
LICAP	1.1229235	0.3887728	2.8883800
LTCR	-0.2188411	0.1125144	-1.9450046
LTCR(-1)	0.0486125	0.1127696	0.4310777
D7374	0.1792910	0.0689243	2.6012752
D85	-0.2539813	0.0894985	-2.8378283

R-squared	0.936957	Mean of dependent var	8.367284
Adjusted R-squared	0.914707	S.D. of dependent var	0.278981
S.E. of regression	0.081477	Sum of squared resid	0.112854
Durbin-Watson stat	1.404941	F-statistic	42.10953
Log likelihood	30.26209		

```
====================================================================
          Residual Plot                  obs RESIDUAL   ACTUAL   FITTED
====================================================================
|        :      * |        :       |  1963 -0.02067  7.90563  7.92630
|        :*       |        :       |  1964 -0.07827  7.96039  8.03866
|        :        *        :       |  1965 -0.00239  7.96252  7.96491
|        :       *|        :       |  1966 -0.00630  8.12705  8.13336
|        *        |        :       |  1967 -0.08100  8.07977  8.16078
|        :        |   *    :       |  1968  0.04166  8.22895  8.18729
|        :        |      * :       |  1969  0.06895  8.31103  8.24208
|        :        |       *:       |  1970  0.07538  8.32562  8.25024
|     *  :        |        :       |  1971 -0.10875  8.30501  8.41376
|        :       *|        :       |  1972 -0.00938  8.35946  8.36884
|        :        | *      :       |  1973  0.02005  8.44870  8.42865
|        :      * |        :       |  1974 -0.02005  8.50346  8.52351
|        :        |        : *     |  1975  0.10382  8.14395  8.04013
|        :        |   *    :       |  1976  0.03404  8.17304  8.13900
|        :        |  *     :       |  1977  0.02673  8.36295  8.33622
|        :        |        : *     |  1978  0.10578  8.57401  8.46823
|        :        |     *  :       |  1979  0.05434  8.71636  8.66202
|        :        | *      :       |  1980  0.02020  8.85695  8.83674
|        :        |        :*      |  1981  0.09166  9.00657  8.91491
|        :      * |        :       |  1982 -0.01817  8.52216  8.54033
|   *    :        |        :       |  1983 -0.13574  8.37348  8.50922
|  *     :        |        :       |  1984 -0.14152  8.48090  8.62242
|        :        *        :       |  1985  2.2D-16   8.37848  8.37848
|        :      * |        :       |  1986 -0.02037  8.70836  8.72873
====================================================================
```

REGRESION 4

SMPL 1963 - 1986
24 Observations
OLSQ // Dependent Variable is LMTD

	COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T-STATISTIC
C	-5.6047027	3.1407840	-1.7844916
LPGB	0.7584415	0.2938097	2.5814044
LICAP	1.1630464	0.3764122	3.0898209
LTCR	-0.1510959	0.1203440	-1.2555338
LDFM	0.0350108	0.1334956	0.2622617
D7374	0.1962967	0.0660399	2.9723966
D85	-0.2672673	0.0900842	-2.9668606

R-squared	0.936525	Mean of dependent var	8.367284
Adjusted R-squared	0.914122	S.D. of dependent var	0.278981
S.E. of regression	0.081756	Sum of squared resid	0.113627
Durbin-Watson stat	1.255013	F-statistic	41.80344
Log likelihood	30.18008		

```
            Residual Plot                    obs RESIDUAL  ACTUAL   FITTED
|          :    *   |       :         | 1963 -0.03656  7.90563  7.94218
|          :  *     |       :         | 1964 -0.05376  7.96039  8.01416
|          :       *|       :         | 1965 -0.01076  7.96252  7.97328
|          :       *|       :         | 1966 -0.01357  8.12705  8.14062
|         *:        |       :         | 1967 -0.08816  8.07977  8.16793
|          :        |  *    :         | 1968  0.03090  8.22895  8.19805
|          :        |      *:         | 1969  0.06437  8.31103  8.24666
|          :        |       :*        | 1970  0.08395  8.32562  8.24167
|         *:        |       :         | 1971 -0.09332  8.30501  8.39834
|          :        *       :         | 1972  0.00337  8.35946  8.35610
|          :        |*      :         | 1973  0.01310  8.44870  8.43560
|          :       *|       :         | 1974 -0.01310  8.50346  8.51656
|          :        |       : *       | 1975  0.10345  8.14395  8.04050
|          :        |    *  :         | 1976  0.04840  8.17304  8.12463
|          :        |  *    :         | 1977  0.03240  8.36295  8.33055
|          :        |       : *       | 1978  0.10109  8.57401  8.47291
|          :        |     * :         | 1979  0.05828  8.71636  8.65807
|          :        |  *    :         | 1980  0.02575  8.85695  8.83119
|          :        |       :*        | 1981  0.08858  9.00657  8.91799
|          :   *    |       :         | 1982 -0.03385  8.52216  8.55601
|  *       :        |       :         | 1983 -0.14309  8.37348  8.51657
|  *       :        |       :         | 1984 -0.14797  8.48090  8.62888
|          :        *       :         | 1985 -2.2D-16  8.37848  8.37848
|          :      * |       :         | 1986 -0.01951  8.70836  8.72786
```

Se procedió finalmente a estimar una nueva regresión, consiguiéndose superar el problema de autocorrelación, mediante el procedimiento de corrección de Cochrane-Orcuttt.

i) Las variables LICAP y LTCR, así como las variables ficticias resultaron ser significativas y con los signos adecuados;

j) El coeficiente de correlación es alto, 0.94;

k) El test D-W = 2.0, mostrando que se ha corregido la autocorrelación positiva.

CORC // Dependent Variable is LMID
Convergence achieved after 4 iterations

	COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T-STATISTIC
C	2.0218245	1.2520812	1.6147710
LICAP	1.7825578	0.2569128	6.9383781
LTCR	-0.2670759	0.0596991	-4.4736976
D7374	0.1613080	0.0632305	2.5511097
D85	-0.1844048	0.0703414	-2.6215696
AR(1)	0.4602675	0.2252369	2.0434821

R-squared	0.935742	Mean of dependent var	8.406763
Adjusted R-squared	0.915661	S.D. of dependent var	0.256081
S.E. of regression	0.074369	Sum of squared resid	0.088492
Durbin-Watson stat	2.055187	F-statistic	46.59917
Log likelihood	29.45815		

```
          Residual Plot                 obs  RESIDUAL   ACTUAL    FITTED
|        :   *     |        :       | 1965 -0.03777  7.96252  8.00029
|        :   *     |        :       | 1966 -0.04010  8.12705  8.16715
|    *   :         |        :       | 1967 -0.10528  8.07977  8.18506
|        :         |       *:       | 1968  0.06565  8.22895  8.16330
|        :         |     *  :       | 1969  0.04774  8.31103  8.26328
|        :         |     *  :       | 1970  0.04833  8.32562  8.27729
|  *     :         |        :       | 1971 -0.12524  8.30501  8.43025
|        :         |     *  :       | 1972  0.05331  8.35946  8.30616
|        :         |     *  :       | 1973  0.05134  8.44870  8.39736
|        :      *  |        :       | 1974 -0.02561  8.50346  8.52907
|        :         |        :*      | 1975  0.08207  8.14395  8.06189
|        :      *  |        :       | 1976 -0.02518  8.17304  8.19822
|        :        *|        :       | 1977 -0.00430  8.36295  8.36725
|        :         |        : *     | 1978  0.08769  8.57401  8.48632
|        :         *        :       | 1979  0.00225  8.71636  8.71411
|        :       * |        :       | 1980 -0.01631  8.85695  8.87326
|        :         |        *       | 1981  0.07859  9.00657  8.92798
|        : *       |        :       | 1982 -0.05654  8.52216  8.57870
|    *   :         |        :       | 1983 -0.10848  8.37348  8.48196
|        : *       |        :       | 1984 -0.05545  8.48090  8.53635
|        :         |  *     :       | 1985  0.02675  8.37848  8.35173
|        :         |      * :       | 1986  0.05788  8.70836  8.65048
```

Capítulo III

Aspectos avanzados en la estimación de modelos uniecuacionales

1. Estimación con retardos distribuidos

Se utiliza para captar el retraso en la respuesta de la variable dependiente frente a una variación de la variable independiente.

La especificación de la estructura de retardos de un modelo, depende de las unidades de tiempo para las que se obtienen los datos (anual, trimestral, etc.).

El hecho de que el impacto de una variable pueda repartirse a lo largo de cierto número de períodos, constituye la base del modelo de retardos distribuidos.

Forma general del modelo de retardos distribuidos:

$$Y_t = a + b_o X_t + b_1 X_{t-1} + \ldots + u_t = a_o + \sum_{s=0}^{\infty} b_s X_{t-s} + u_t$$

Estimación

Dificultades en la aplicación del MCO al modelo general.

- Si el número de retardos es grande y la muestra es pequeña, no se podrá estimar el modelo por falta de grados de libertad.
- Se enfrenta problemas de multicolinealidad.

2. Métodos alternativos

Se construyen nuevas variables dando pesos a los retardos y luego se estima el modelo en función de estas variables transformadas. A continuación se verán los modelos más conocidos.

2.1 Asignar valores arbitrarios a los pesos de las variables retardadas

$$Y_t = a_o + a_1 W_t + u_t$$

donde

$$W_t = w_1 X_{t-1} + w_2 X_{t-2} + \ldots w_k X_{t-k}$$

2.2 Esquema de retardos geométricos de Koyck. Supone que los pesos asignados a las variables retardadas son todos positivos y que disminuyen geométricamente en el tiempo

$$Y_t = a_o + b_o X_t + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \ldots + u_t$$

$$u \sim N(o, \sigma^2)$$

$$E(u_i, u_j) = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$E(u_j, X_j) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

El esquema de Koyck supone que los valores recientes de X ejercen una mayor influencia sobre Y, que los valores lejanos.

$$b_1 = \lambda b_o \qquad o < \lambda < 1$$

$$b_2 = \lambda^2 b_o$$

$$\vdots$$

$$b_k = \lambda^k b_o$$

Sustituyendo en el modelo original:

$$Y_t = a_o + b_o X_t + \lambda b_o X_{t-1} + \ldots + \lambda^k b_o X_{t-k} + u_t$$

$$Y_{t-1} = a_o + b_o X_{t-1} + \lambda b_o X_{t-2} + \ldots + \lambda^{k-1} b_o X_{t-k} u_{t-1}$$

Multiplicando por λ y restando, tenemos:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a_o(1-\lambda) + b_o X_t + (u_t - \lambda u_{t-1})$$

$$Y_t = a_o(1-\lambda) + \lambda Y_{t-1} + b_o X_t + v_t$$

donde

$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$$

Problemas en la estimación del esquema de Koyck.

i) No se cumple el supuesto

$$E(v_t, Y_{t-1}) = 0$$

ii) $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$ -----> v_t está autocorrelacionado

iii) -----> el estimador "MCO" es sesgado en muestras pequeñas y grandes y no puede aplicarse el test D-W

Alternativas

Si "λ" es conocido, se estima:

$$(Y_t - \lambda Y_{t-1}) = b_o + b_2 X_t + v_t$$

Si es desconocido, se puede aplicar Método de Zellner y Geisel (ver biliografía).

2.3 Modelos de "expectativas adaptables"

Los valores de Y dependen de los valores esperados de X

$$(1) \quad Y_t = b_o + b_1 X_t^* + u_t$$

El nivel esperado de X, a su vez, se define mediante una segunda relación en lo que se supone que las expectativas se alteran en cada período a modo de ajuste entre el valor observado de X y el valor esperado previo de X.

$$(2) \quad X_t^* - X_{t-1}^* = \delta (X_t - X_{t-1}^*) \quad \text{donde } 0 < \delta < 1$$

$$X_t^* = \delta X_t + (1 - \delta) X^t_{-1}{}^*$$

El nivel esperado de X es una media ponderada del nivel actual de X y del anterior nivel esperado de X. Los niveles esperados de X se ajustan período a período, teniendo en cuenta los valores reales de X. Despejando X_t^* de ecuación (1), sustituyendo su valor en (2) y reordenando términos, se llega a la ecuación:

$$Y_t = b_o + \gamma\, b_1 X_t + (1-\gamma)\, Y_{t-1} + [u_t - (1-\gamma)\, u_{t-1}]$$

obteniéndose un modelo similar al de retardos de Koyck.

3. <u>Test de Durbin-Watson aplicado a modelos autorregresivo</u>:

Los modelos autorregresivos, son del tipo:

$$Y_t = a\, Y_{t-1} + X\beta + U$$

Estos modelos no verifican uno de los supuestos centrales para la aplicación de los mínimos cuadrados ordinarios:

$$E\,(Y_{t-1},\, U_t) = 0$$

Como cada uno de los términos Y_{t-1} es función de U_{t-1}, entonces:

$$\sum_{t=1}^{t} Y_{t-1}\, U_t \neq 0$$

Como este término determina los (k + 1) coeficientes de regresión, éstos son sesgados.

Si las perturbaciones U_t, U_{t-1} no son independientes, el sesgo no tiende a cero cuando el mínimo de observaciones aumenta. En este caso, el test Durbin-Watson es sesgado hacia la aceptación de la hipótesis nula. Ello conduce a aceptar más fácilmente la hipótesis de no correlación de las perturbaciones.

Es por ello, que en estos casos, se aplica el test "H de Durbin":

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t . e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t-1}}$$

$$h = \hat{\rho}_1 * \sqrt{\frac{T}{1 - T\,\hat{V}(a)}} \sim \text{si} \quad T \Rightarrow \infty \quad N\,(0,1)$$

$\hat{V}(a)$ es la varianza estimada del coeficiente a de la variable endógena rezagada.

Esta propiedad de "convergencia en ley" permite testear la autocorrelación de los residuos. Este test es muy práctico porque:

$$\hat{\rho}_1 = 1 - DW/2$$

siendo DW la estadística Durbin-Watson que aparece en todos los programas econométricos.

4. Modelo de correción de errores

Estos modelos intentan formalizar la dinámica de una variable macroeconómica, que asegura la consistencia del comportamiento de corto plazo, con las restricciones de la convergencia al equilibrio.

Las características del modelo de corrección de errores, serán mostradas a través de un ejemplo, sin ahondar en su derivación teórica.

Partiendo de un modelo dinámico, donde $Y_{(t)}$ depende de su propio valor rezagado y de los valores presente y rezagado de $X_{(t)}$.

$$(1) \quad Y_t = a_1\, Y_{(t-1)} + b_0\, X_t + b_1\, X_{(t-1)} + v_t$$

Puede transformarse en diferencias de primer orden restando $(Y_{(t-1)} + X_{(t-1)})$ a los dos miembros de esta ecuación, así se obtiene:

$$(2) \quad \Delta Y_t = b_0\, \Delta X_t + (a_1 - 1)\, Y_{t-1} + (b_1 + b_0 + 1) X_{t-1} + v_t$$

lo que permite evitar problemas de "correlación espúrea" entre variables con fuerte tendencia. Las ecuaciones (1) y (2) tienen exactamente los mismos parámetros y muestran que un modelo en diferencias como (2), puede ser escrito en nivel (1), con las restricciones de parámetros adecuados, sin que la perturbación aleatoria sea afectada por esta reformulación.

Reescribiendo la ecuación (2) de la forma:

$$(3)\quad \Delta Y_t = b_o \Delta X_t + (a_1 - 1)\ (Y_{t-1} - X_{t-1}) + (b_o + a_1 + b_1)\ X_{t-1} + v_t$$

Se obtiene un modelo donde la variación de $Y_{(t)}$ depende de la variación de $X_{(t)}$ y del <u>desequilibrio</u> entre los niveles de Y_t y X_t en el período anterior, y del nivel de $X_{(t-1)}$, que mide el desplazamiento desde una elasticidad de largo plazo unitario, si las variables son logartimos. Esta transformación se conoce en la literatura, como el modelo de corrección de errores.

Una aplicación del método de corrección de errores al caso de la dinámica inflacionaria se encuentra en: Ricardo Martner y Daniel Titelman - "Empleo, inflación y nivel de actividad: una maqueta de simulación dinámica para Chile", Documento TP-85, ILPES.

5. <u>Variables ficticias o mudas</u> (Dummy)

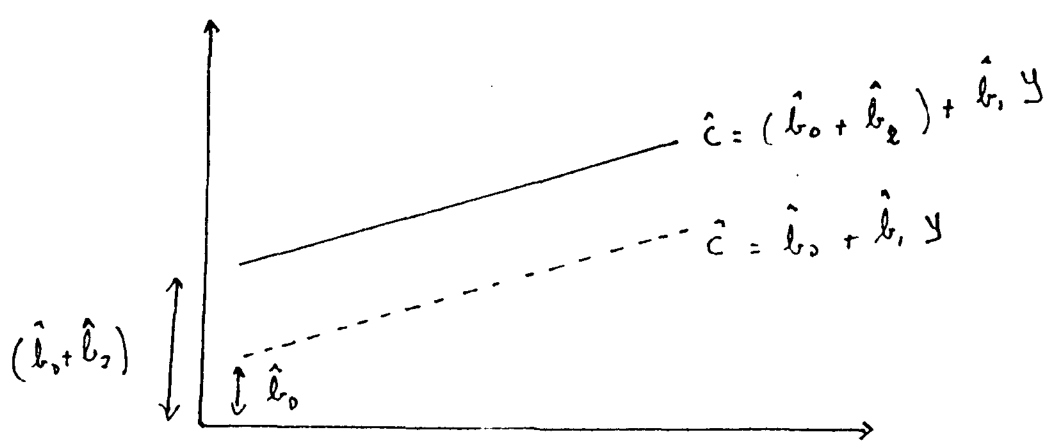
Se usan en econometría como "proxies" de otras variables que no pueden ser medidas: cambios de gobierno, terremotos, guerras, cambios en un paquete de políticas económicas.

a) Cambio en el coeficiente de posición:
Suelen usarse en macroeconomía para indicar un cambio de la función en el tiempo.

Ej.: medición de la función consumo, incluyendo el efecto de una guerra

$$C_t = b_o + b_1 Y + b_2 D + u$$

$$D = \begin{cases} 0 & \text{período de guerra} \\ 1 & \text{en todo otro período} \end{cases}$$



b) Cambio en los parámetros (la pendiente de la curva en el tiempo)

$$D_1 = Y \,.\, D \quad --- \quad D_1 = \begin{cases} 0 & \text{período de guerra} \\ Y & \text{período normal} \end{cases}$$

D_1 señala aumento en la propensión marginal a consumir.

$$C_t = b_0 + b_1\, Y + b_2\, D + b_3\, D_1 + u$$

$$\hat{C}_t = (\hat{b}_0 + \hat{b}_2) + (\hat{b}_1 + \hat{b}_3) Y \quad \text{período normal}$$

$$\hat{C}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \; Y \quad \text{período de guerra}$$

c) Uso como variable de ajuste estacional en el tiempo.

Tiene una aplicación común en series trimestrales para ajustar el comportamiento estacional.

$$Y_t = b_0 + b_1\, X_{1t} + \ldots b_k\, X_{kt} + a_1\, Q_{1t} + a_2\, Q_{2t} +$$

$$+ a_3\, Q_{3t} + u_t$$

En este caso no se incorpora la variable correspondiente al cuarto trimestre, para evitar la colinealidad perfecta de Q_{it}.

Para evaluar el grado de significación de las variables ficticias se aplican los mismos Tests que los estimados para el resto de los parámetros de la función.

6. <u>Estimación no lineal</u>

Podemos distinguir dos tipos de no linealidad:

- no linealidad con respecto a las variables independientes
- no linealidad con respecto a los parámetros

a) No linealidad con respecto a las variables independientes

Ejemplo:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_1^2 + a_2 \log X_2 + \ldots u_t$$

$$Y_t = a_0 + a_1 X_1 . X_2 + a_2 X_3^3 + \ldots u_t$$

En este tipo de especificación no existe ningún problema para estimar la ecuación mediante MCO, basta efectuar la transformación de las variables no lineales:

$$Z_1 = X_1^2 \qquad Z_2 = \log X_2$$

$$Y_t = a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots + u_t$$

b) No linealidad con respecto a los parámetros

Ejemplo:

$$Y_t = a X_1^b X_2^d u$$

Este caso se resuelve fácilmente, mediante la estimación de la ecuación linealizada.

Para poder aplicar MCO, supongamos

$$Y_t = a X_1^b X_2^d e_u$$

-----> Se cumplen los supuestos

$$E(u) = 0 \qquad E(u_i) = \sigma^2 \qquad E(u_i,u_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$E(uX) = 0$$

entonces:

$$Ln(Y) = Ln(a) + b\ Ln(X_1) + d\ Ln(X_2) + u$$

haciendo:

$$Y^* = Ln(Y) \quad , \quad X_1^* = Ln(X_1) \quad , \quad X_2^* = Ln(X_2)$$

Se aplica MCO a la transformación lineal

$$Y^* = a^* + b\ X_1^* + d\ X_2^* + u$$

los estimadores son insesgados y de varianza mínima.

- En el caso de los modelos que no pueden ser linealizados

Ejemplo:

$$Y = a_0 + a_1\ X_1^b + a_2\ X_2^d + u$$

$$Y = a_0 + e^b x + e^b z + u$$

no puede aplicarse MCO a la estimación de parámetros. Existen tres métodos que suelen utilizarse: búsqueda directa, optimización directa y un método iterativo de linealización que se encuentran expuestos en la bibliografía.

7. Aplicaciones de los métodos expuestos

A continuación se presentan dos ejemplos en que se aplica la estimación con retardos distribuídos, linealización de las ecuaciones, variables ficticias y el modelo de corrección de errores.

7.1 Ejemplo 1

En el primer ejemplo, se presenta la estimación del consumo privado, en función de los salarios disponibles (SD), utilidades disponibles (UDE), la variación porcentual del consumo privado (VDCP) y un promedio móvil de la variación del deflactor (VPMCP), que refleja el efecto sobre el consumo de anticipaciones inflacionarias. Finalmente, la función incluye un rezagp sobre la variable dependiente (CP1)

Con este ejercicio, podemos efectuar el siguiente análisis :

a) la ecuación de regresión tiene la forma

$$CP = c + a_0\ SD + a_1\ UDE + a_2\ VPMCP - a_3\ VDCP +$$

$$+ a_4\ D1 + a_5\ D2 + (1 - b)\ CP1$$

donde :

$a_0 = b * c_1$ propensión a consumir de corto plazo de asalariados

$a_1 = b * c_2$ propensión a consumir de corto plazo de no asalariados

$c_1 = a_0 / b$ propensión a consumir de largo plazo de los asalariados

$c_2 = a_1 / b$ propensión a consumir de largo plazo de los no asalariados

b) D1 y D2 son variables ficticias que muestran los efectos de un cambio de políticas en el período 1977-1979 y un shock externo en 1983.

c) La variable VPMCP es un promedio móvil de tres períodos construído con ponderaciones iguales :

$$VPMCP_t = 1/3 * VDCP_t + 1/3 * VDCPt\_1 + 1/3 * VDCP_{t-2}$$

d) Resultados :

Independent Variable	Estimated Coefficient	Standard Error	T-Statistic
C	4161.08	240.839	17.2774
SD	.356039	2.121833E-02	16.7798
UDE	.338673	4.038487E-02	8.38613
VPMCP	30956.9	4402.69	7.03136
VDCP	-10165.7	3734.43	-2.72216
D7779	1351.54	269.043	5.02350
D83	2572.58	672.093	3.82771
CP1	.541860	3.123921E-02	17.3455

R-Squared = .9998
Adjusted R-Squared = .9997
F-Statistic (7, 10) = 8355.78
Durbin-Watson Statistic (Adj. for 0 Gaps) = 2.4043
Number of Observations = 18
Sum of Squared Residuals = 1.605373E+06
Standard Error of the Regression = 400.671

e) Se observa que los signos de las variables son los adecuados. El signo de VDCP muestra que la aceleración inflacionaria provoca una disminución en el consumo privado, esto se debe a la necesidad de mantener los encajes reales. Las anticipaciones inflacionarias en cambio, expresadas por la variable VPMCP, provoca un aumento en el consumo, siendo este efecto más significativo que el anterior.

f) Todas las variables son significativas (estadística - t) al 95% de confianza y el R2 es alto, mientras el error standard de la regresión es muy bajo.

g) El test D-W entrega un valor de 2,40 . De acuerdo con la tabla de la distribución de D-W, para n = 18 y k > 5 : d_u = 2,10 y d_1 = 0,71 , luego

$$4 - du < d < 4 - d_1 \quad ---> \quad 1.94 < d < 3.29$$

Dado que D-W = 2,4 , el test indica la no existencia de autocorrelación.

f) Para verificar el resultado anterior, se calcula

$$h = (1-2.4/2) * \sqrt{18/(1-18*0.00098)} = -0.20 * 4.28 = -0.86$$

De la distribución normal tipificada, se tiene que:

$$P (h < - 1.96) = 0.025$$

Como $h = - 0.86 > - 1.96$ nos encontramos en la zona de aceptación de la hipótesis nula y de rechazo de autocorrelación.

7.2 Ejemplo 2

En el segundo ejemplo, se presenta una aplicación del modelo de corrección de errores, en la función de importaciones.

Las variables explicativas son un índice del producto bruto (IPGB), un índice de tipo de cambio real efectivo (CPI), índice del grado de uso de la capacidad (ICAP1) rezagado un período y tres variables ficticias.

a) El modelo tiene la forma siguiente :

$$IMB = IPGB^{a} * ICA1^{b} * CPI^{c}$$

linealizando la ecuación con logaritmos

$$\log(IMB) = a \log(IPGB) + b \log(ICA1) + c \log (CPI)$$

Calculando el modelo en diferencias, se estiman las variaciones porcentuales de los indices:

$$\log(IMB) - \log(IMB)_{-1} = a (\log IPGB - \log IPGB_{-1}) +$$

$$+ b (\log ICAI) + c (\log CPI - \log CPI_{-1})$$

A este modelo se agrega el coeficiente d que acompaña a la variables:

$$DMBPG = (\log IMB_{-1} - \log IPGB_{-1})$$

y las variables ficticias para los períodos 1971, 1973 y 1978.

La variable DMBPG, incorpora el efecto de la brecha entre producto e importaciones y contribuye a modificar la elasticidad de corto plazo. En el largo plazo, la brecha entre la variación de las importaciones y la promoción del producto se hace cero, y la elasticidad ingreso de las importaciones toma el valor de a. En el corto plazo la elasticidad es (a + d).

ESTIMACION DE LA FUNCION DE IMPORTACION

Independent Variable	Estimated Coefficient	Standard Error	T-Statistic
C	-6.64046	.837350	-7.93033
DIFGB	1.42527	.258285	5.51822
DMBPG	.748951	.112562	6.65369
DCPI	-.294591	.116774	-2.52273
LICA1	.390201	.191546	2.03712
D73	.348122	7.262982E-02	4.79310
D71	-.187058	6.982026E-02	-2.67914
D78	.168390	7.700438E-02	2.18675

R-Squared = .8457
Adjusted R-Squared = .7783
F-Statistic (7, 16) = 12.5317
Durbin-Watson Statistic (Adj. for 0 Gaps) = 2.1241
Number of Observations = 24
Sum of Squared Residuals = 7.545457E-02
Standard Error of the Regression = 6.867249E-02

Los resultados de la regresión señalan que:

a) Los signos de las variables son los correctos y todas las variables son significativas.

b) Se corrigió el problema de autocorrelación con el método de Cochrand-Orcutt.

c) La elasticidad ingreso de importaciones, de largo plazo es 1.43, mientras que lo determinado por el ciclo económico es (2.18 = 1.425 + 0.748). En este caso, el efecto de un aumento del producto sobre las importaciones depende de la brecha existente entre ambas variables en el período anterior. Esto nos entrega una elasticidad de corto plazo que cambia en función de la magnitud de la brecha.

8. Predicción en un modelo de una ecuación lineal

La predicción constituye uno de los propósitos principales de la modelización. Con ello, se estima en forma cuantitativa, hechos futuros, basados en información pasada y presente. En economía son de mucha utilidad, sirviendo como guía para la adopción de políticas, tanto por el sector público como por el sector privado.

La predicción sirve también para evaluar un modelo: si la estimación resulta estar muy desviada del verdadero valor, proporciona información para revisar el modelo.

Podemos distinguir dos tipos de predicción, ex-post y ex-ante. En el pronóstico ex-post, el período de predicción es tal, que se conocen con certidumbre las observaciones, tanto de las variables explicativas endógenas como de las exógenas. De esto se deduce que pueden contrastarse con los datos existentes y proporcionar un medio de evaluar el modelo de predicción.

En el pronóstico ex-ante, se proyectan valores de la variable dependiente más allá del período de estimación, utilizando variables explicativas que pueden o no ser conocidas con certidumbre, dependiendo de la naturaleza de los datos y la amplitud de los retardos asociados con las variables explicativas.

En base a este criterio, se puede distinguir entre predicción condicionada y no condicionada. La primera contiene variables explicativas no conocidas, mientras que en la segunda son todas conocidas. Las predicciones ex-post, son siempre incondicionadas, mientras que las ex-ante pueden ser condicionadas o incondicionadas.

```
                                        Presente
     T1               T2               T3
     |                |                |
     |                |                |
 ----|----------------|----------------|----------->     tiempo
     |                |                |
         período          período          período
         estimac.         predicc.         predicc.
                          ex-post          ex-ante
```

8.1 Predicción incondicionada

Las variables explicativas se conocen con certidumbre, lo que elimina una fuente importante del error de pronóstico.

a) $\hat{Y}_t = a_o + a_1 X_t + u$

$u \sim N(o, \sigma^2)$

a_o y a_1 son conocidos

Cuál es el mejor pronóstico que puede obtenerse de Y_{T+1} conocido X_{T+1}?

$$\hat{Y}_{T+1} = E(Y_{T+1}) = a_o + a_1 X_{T+1}$$

se define

$$e_{T+1} = (\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1})$$

y se cumple que

$$E(e_{T+1}) = 0 \quad y \quad E(e_{T+1})^2 = \sigma^2$$

pero ello no garantiza una predicción exacta de Y_{T+1} debido a la existencia de u. Esto nos lleva a estimar intervalos de confianza para Y_{T+1}, calculando el error normalizado:

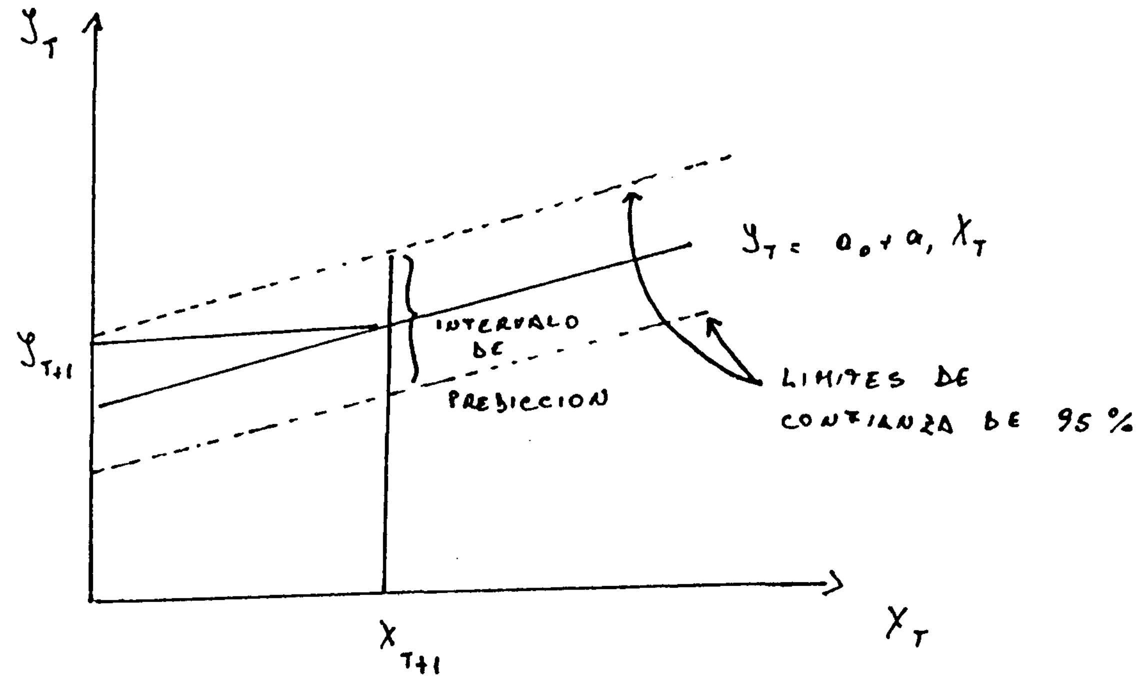
$$\lambda = \frac{\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

entonces:

$$P(-\lambda_{.0.05} < \frac{\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}}{\sigma} < \lambda_{.0.05}) = 0,95$$

y el intervalo de confianza para Y_{T+1} será:

$$(\hat{Y}_{T+1} - \lambda_{0.05} \cdot \sigma < Y_{T+1} < \hat{Y}_{T+1} + \lambda_{0.05} \cdot \sigma)$$



b) Predicción con parámetros desconocidos

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u$$

Normalmente los parámetros del modelo de regresión no son conocidos, sino que han sido estimados, igual que la varianza del error. La predicción de Y_{T+1}, por lo tanto, incorpora dos etapas:

i) estimación de la ecuación mediante MCO

ii) Se mide $\hat{Y}_{T+1} = a_0 + a_1 X_{T+1}$

$$\hat{e}_{T+1} = \hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1} = (\hat{a}_0 - a_0) + (\hat{a}_1 - a_1) +$$

$$+ X_{T+1} \qquad + u_{T+1}$$

En esta ecuación existen dos fuentes de error:

- el determinado por el término u_{T+1}
- el determinado por la naturaleza aleatoria de los parámetros

Para construir un intervalo de confianza de Y_{T+1}, debemos conocer la distribución $\hat{e}_{T+1}$.

(1) $E(\hat{e}_{T+1}) = E(\hat{a}_0 - a_0) + E(\hat{a}_1 - a_1) X_{T+1} + E(u_{T+1}) = 0$

(2) $\text{Var}(\hat{e}_{T+1}) = E(\hat{e}_{T+1})^2 = \text{Var}(a_0) + 2 X_{T+1} \text{Cov}(a_0, a_1)$

$$+ X_{T+1}^2 \text{Var}(a_1) + \sigma^2$$

$$\text{Var}(a_0) = \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

$$Var(a_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

$$Cov(a_0,a_1) = \frac{-\bar{X} * \sigma^2}{\sum (X_t - X)^2}$$

sustituyendo en (2) obtenemos:

$$(3) \quad Var(\hat{e}_{T+1}) = \sigma^2 [1 + 1/t + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_T - \bar{X})^2}$$

- SI X_{T+1} -----> $\bar{X}$ se minimiza la varianza del error de predicción
- el error de predicción disminuye al aumentar el tamaño de la muestra y la varianza de X
- los mejores pronósticos de Y serán en torno a los valores de X que contienen mayor información muestral

Sabiendo que:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{N-2}$$

$$S^2 \hat{Y}_{T+1} = S^2 \quad [1 + 1/T + \frac{(X_{T+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}]$$

con ello construimos el error tipo de predicción:

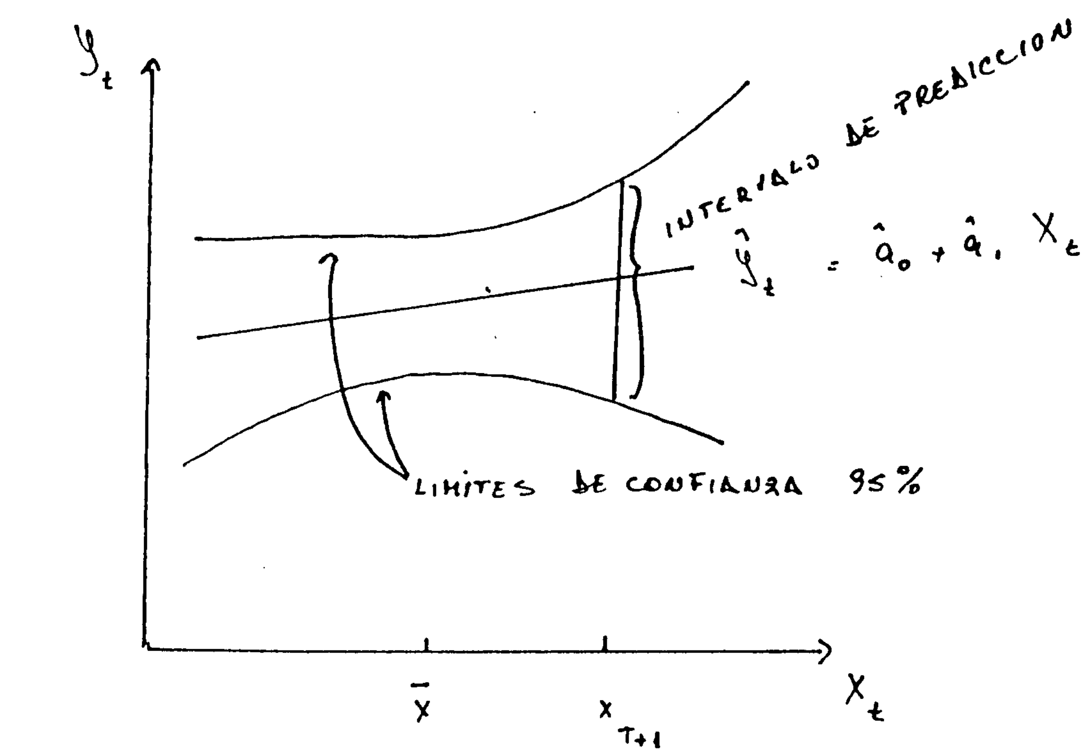
$$\frac{\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}}{S^{2}_{YT+1}} \sim t_{N-2}$$

y el intervalo de confianza de 95% será:

$$(\hat{Y}_{T+1} - t_{0.025} \cdot S_{YT+1} < Y_{T+1} < \hat{Y}_{T+1} + t_{0.025} \cdot S_{YT+1})$$

La magnitud del intervalo de confianza depende de S_{YT+1} y por lo tanto de:

- tamaño de la muestra
- varianza de X
- diferencia entre X_{T+1} y X



Para los modelos de regresión múltiples, la construcción del intervalo de confianza de la predicción es similar a la expuesta.

En términos matriciales:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$S_{\hat{Y}}^2 = S^2 \; (1 + X(X'X)_{-1} \; X')$$

(Ver bibliografía)

8.2 <u>Predicción con errores serialmente correlacionados</u>

$$Y_t = a_o + a_1 \; X_t + u_t$$

$$u_t = \rho \, u_{t-1} + v_t \quad , \quad v_t \sim N(o, \quad ^2)$$

$$|\rho| < 1$$

Esta información sobre el error de la variable Y_T debe ser incorporada en el pronóstico:

$$\text{(i)} \quad \hat{Y}_{T+1} = a_o + a_1 \; X_{T+1} + \hat{e}_{T+1}$$

$$\hat{e}_{T+1} = \rho \; e_T$$

$$\hat{e}_{T+2} = \rho \; \hat{e}_{T+1} = \rho^2 \; e_T$$

$$\hat{e}_{T+3} = \rho \; \hat{e}_{T+2} = \rho^3 \; e_T$$

:

:

:

$$\hat{e}_{T+s} = \rho \; \hat{e}_{T+s-1} = \rho^s \; e_T$$

que se aproxima a cero a medida que s -----> oo

Escribir la ecuación (i) es lo mismo que

$$(ii)\ \hat{Y}_{T+1} = a_0\ (1- \rho\ ) + a_1\ (X_{T+1} - \rho\ X_T) + \rho\ Y_T$$

Si a_0, a_1, ρ son desconocidos, se estima la regresión de Y_T mediante los métodos de corrección de errores descritos en la clase II y luego se efectúa la proyección.

8.3 <u>Predicción condicionada</u>

Se levanta el supuesto relativo a que todas las varialbes explicativas se conocen sin error. Esta es la situación cuando se proyecta el futuro y se desconoce el comportamiento de las variables explicativas o exógenas de un modelo (predicción <u>ex-ante</u>).

En este caso, los pronósticos de Y son menos fiables y los intervalos de confianza son más amplios, ya que es preciso pronosticar también los valores de X.

El error de predicción dependerá de la función de distribución de $\hat{X}_{T+1}$, por lo tanto, no puede especificarse un caso general.

Ejemplos particulares de predicción condicionada se encuentran en la bibliografía.

Capítulo IV

Modelos de ecuaciones simultáneas

En general, un modelo representa una simplificación de la realidad, especificado por un conjunto de ecuaciones o funciones entre las variables más importantes.

En el caso de modelos macroeconómicos, éstos incorporan un orden legal o institucional, una tecnología dada, un determinado comportamiento de los agentes económicos en un sistema.

Los modelos se constituyen con un objetivo determinado y para ello incorporan ciertas relaciones específicas. Esto es importante de tener en cuenta, ya que los resultados deben ser confrontados dentro de ese marco de análisis y no de cualquier otro.

Las ecuaciones con que se especifica un modelo se llaman estructurales o primarias. Una vez estimados los parámetros, se obtiene una estimación de la estructura que generan las informaciones muestrales. En el corto plazo, la estructura de un modelo macroeconómico suele ser estable, mientras que en el largo plazo tiende a variar lo que lleva a reestructurar los valores de los parámetros y verificar la existencia de cambios estructurales en la "realidad económica" que se quiere modelar. Estos cambios estructurales están ligados a cambios tecnológicos, demográficos, cambios en los gustos de los consumidores, cambios institucionales, etc.

A. ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DE LOS MODELOS

1. Tipos de ecuaciones de los modelos

Existen dos tipos de ecuaciones: de comportamiento y de definición o identidades.

a) Ecuaciones de comportamiento: señalan el modo de actuar de los agentes económicos: consumidores, empresarios, asalariados, importadores, exportadores, etc.

   En esta clasificación incluimos también ecuaciones de carácter institucional, como son los ingresos por tributación del gobierno y ecuaciones tecnológicas, que definen la función de producción agregada, sectorial o de una rama industrial.

Ejemplos de ecuaciones de comportamiento:

- De los agentes:

$$C_t = a_o + a_1 Y_D + a_2 t + u_t$$

$$o < a_1 < 1$$

$$I_t = b_o + b_1 (Y_1 - Y_{t-1}) - b_2 r_t + u_u$$

$$b_1, b_2 > 0$$

- Institucionales:

$$T_t = c_o + c_1 Y_T + u_t$$

$$o < c_1 < 1$$

$$PSS = d_o + d_1 W_t + u_t$$

$$o < d_1 < 1$$

- Tecnológica:

$$Q = A K^b L^d e^u$$

b) Ecuaciones de definición o identidades: se verifican siempre, ya sea por su construcción lógica o por la definición contable que ellas satisfacen.

$$Y = C + I + b + X - M$$

$$DEX = DEX_{-1} + SCC$$

$$BC = X - M$$

$$TCE = \frac{PI \,.\, TC}{IPM}$$

2. Tipos de variables

a) Variables endógenas: son aquellas cuyos valores estimados son determinados por la solución del sistema de ecuaciones.

b) Variables predeterminadas: no se obtienen de la solución del modelo, sino que se incorporan externamente. Se subdividen en:

- exógenas: no son parte del análisis del modelo

- endógenas retardadas: son variables endógenas determinadas en períodos anteriores, que actúan como variables explicativas. Su inclusión da el carácter dinámico al modelo.

c) Variables aleatorias: son las variables no observables que representan el término de error en las ecuaciones de los modelos y su introducción le da el carácter probabilístico a la ecuación.

Ejemplo:

$$C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} - a_3 r + u_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$I_t = K_t - K_{t-1}$$

$$K_t = \alpha Y_t + v_t$$

Variables endógenas: C_t, Y_t, I_t, K_t

Variables predetrminadas: Y_{t-1}, r, K_{t-1}

- variables exógenas: r

- variables endógenas retardasas: Y_{t-1}, K_{t-1}

Variables aleatorias: u_t, v_t

3. Interpretación de los parámetros

En los modelos macroeconómicos, los parámetros adquieren una significación especial.

a) En el caso de la función consumo:

$$C_t = a_o + a_1 Y_t + \lambda C_{t-1} + u_t$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial I_t} = a_1$$ propensión marginal a consumir en el corto plazo

$o < a_1 < 1$

Dado que la especificación anterior es equivalente a:

$$C_t = a_o + a_1 (Y_t + \lambda Y_{t-1} + \lambda^2 Y_{t-1} + \lambda^3 Y_{t-1} + \ldots) + u_t$$

$$C_t = a_o + a_1 \sum_{s=o}^{oo} \lambda^s Y_{t-s} + u_t$$

donde: $0 < \lambda < 1$

$$\frac{\partial C_t}{\partial Y} = \frac{a_1}{1-\lambda}$$ propensión marginal a consumir de largo plazo

Por otra parte:

a_o = consumo básico

b) Función de exportaciones e importaciones:
En general estas funciones se espefician en términos exponenciales.

$$XT = a\ DM^b \,.\, TCE^c \,.\, e^u$$

$$MT = c\ FGB^d \,.\, TCE^e \,.\, e^v$$

la estimación se hará en las ecuaciones linealizadas:

$$\ln(XT) = \ln a + b \ln(DM) + c \ln(TCE) + u$$

$$\ln(MT) = \ln c + d \ln(PGB) + s \ln(TCE) + v$$

$$\hat{b} = \frac{\partial \ln(XT)}{\partial \ln(DM)} =$$ elasticidad de las exportaciones con respecto a la demanda mundial

En efecto:

$$(1) \quad \eta_{XT,DM} = \frac{\partial XT}{\partial DM} \cdot \frac{DM}{XT}$$

$$\frac{\partial XT}{\partial DM} = b\,(a\,DM^{b-1} \cdot TCE^{c} \cdot e^{u})$$

$$\frac{\partial XT}{\partial DM} = b\,(a\,DM^{b} \cdot TCE^{c} \cdot e^{u})\,\frac{1}{DM} = b \cdot \frac{XT}{DM}$$

sustituyendo en (1)

$$\eta_{XT,DM} = b \cdot \frac{XT}{DM} \cdot \frac{DM}{XT} = b$$

por lo tanto, el resto de coeficientes de las ecuaciones XT y MT se interpetan como:

$\hat{c}$ = elasticidad precio de las exportaciones

$\hat{d}$ = elasticidad ingreso de las importaciones

$\hat{s}$ = elasticidad precio de las importaciones

c) En un modelo sencillo:

$$I = C + I$$

$$C = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 Y \qquad \text{ecuaciones estructurales}$$

$$I = I_0$$

$$Y(1-\hat{c}_1) = \hat{c}_0 + I_0$$

$$Y = \frac{\hat{c}_0 + I_0}{(1 - \hat{c}_1)}$$

ecuación reducida (expresada en función de las variables exógenas)

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - \hat{c}_1}$$

$$\frac{1}{1 - c_1}$$

multiplicador del gasto: señala el impacto total sobre el ingreso, de un aumento de una unidad en la inversión

$$\Delta I_0 \Longrightarrow \Delta Y = \Delta I_0 \Longrightarrow \Delta C = c_1 \cdot \Delta Y \Longrightarrow \Delta Y = \Delta C$$

$$\Longrightarrow \Delta C = c_1 \cdot \Delta Y \ldots\ldots.$$

siendo el impacto total sobre $Y = \dfrac{1}{1 - c_1}$

d) Forma reducida de un modelo:
Todas las ecuaciones se escriben en función de las variables exógenas.

En el modelo anterior:

$$\left.\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= c_0 + c_1\, Y \\ I &= I_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ecuaciones estructurales}$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{c_0}{1 - c_1} + \frac{1}{1 - c_1}\, I_0 \\ C &= \frac{c_0}{1 - c_1} + \frac{c_1}{1 - c_1}\, I_0 \\ I &= I_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Forma reducida}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - c_1}$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_0} = \frac{c_1}{1 - c_1}$$

Los parámetros que acompañan la forma reducida del modelo son <u>multiplicadores</u>: recogen el impacto de la variación de una variable exógena recogiendo la interdependencia de las variables endógenas de todo el sistema de ecuaciones.

En general, la forma reducida de un modelo se escribe usando la formulación matricial:

i) Dada la forma estructural:

$$Y = C + I + X - M$$

$$C_t = c_1\, Y_t + u_1$$

$$I_t = a_1 Y_{t-1} + u_2$$

$$X_t = b_1 D + b_2 P_x + u_3$$

$$M_t = d_1 Y_t + d_2 P_M + u_4$$

El sistema es completo: contiene igual número de variables endógenas que de ecuaciones (5).

Variables endógenas = Y, C, I, X, M

Variables predeterminadas = D, P_X, P_M, Y_{t-1}

- exógenas = D, P_X, P_M

- endógenas retardadas = Y_{t-1}

Total de variables = 9

ii) Reordenando las ecuaciones e igualando a cero:

$$I - C - I - X - M = 0$$

$$C - c_1 Y - u_1 = 0$$

$$I - a_1 Y_{-1} - u_2 = 0$$

$$X - b_1 D - b_2 P_X - u_3 = 0$$

$$M - d_1 Y - d_2 P_M - u_4 = 0$$

Podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -c_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -d_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ X \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ P_x \\ P_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

5x5 B   5x1 Y   5x3 C   3x1 X   5x1 D

$$\begin{bmatrix} Y_{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1x1 Y_{t-1} 5x5 U

$$BY + CX + D\ Y_{t-1} + U = 0$$

$$BY = -CX - D\ Y_{t-1} + U$$

haciendo:

$$A = -B^{-1} . C$$

$$B_1 = -B^{-1} . D$$

$$e = B^{-1} . U$$

resulta:

$$Y = A\ X + B_1\ Y_{t-1} + e \qquad \text{Forma reducida del modelo}$$

La forma reducida del modelo expresa las variables endógenas de cada ecuación en función de variables predeterminadas y del término de error.

Cabe señalar que mientras la forma estructural de un modelo entrega la información fundamental sobre las leyes del sistema, las ecuaciones reducidas permiten un mejor cálculo de los valores de las variables endógenas. Esto es así porque no contienen variables endógenas de otras ecuaciones como explicativas, evitando la correlación entre los términos de error de las distintas ecuaciones, situación que genera problemas en la estimación MCO.

B. TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Sistemas de ecuaciones simultáneas

Las ecuaciones son interdependientes y el valor de las variables endógenas sólo se resuelven en forma simultánea.

Ejemplo:

$$C_t = a_0 + a_1\ I_t + a_2\ Y_t + a_3\ C_{t-1} + a_4\ r_t + u_1{}^t$$

$$I_t = b_0 + b_1\ Y_t + b_2\ r_t + u_{2t}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

2. Sistema de ecuaciones recursivas

Un sistema de ecuaciones es recursivo, si cada una de las variables endógenas puede ser determinada secuencialmente.

<u>Ejemplo</u>:

$E = a_0 + a_1 Y + u_1$

$W = b_1 P_t + (1 - b_1) P_{t-1} + b_2 E + u_2$

$MS = W \cdot E$

$C_w = c_0 + c_1 MS + u_3$

Variables endógneas = E, W, MS, C_w

Variables exógenas = Y, P_t, P_{t-1}

Dado $Y = Y_0$ se obtiene el valor de E.

Dados P_t y P_{t-1} y con el valor de E se resuelve W, con ello obtenemos MS y luego el valor de C_w.

Si $C_{ov}(u_1, u_2) = C_{ov}(u_1, u_3) = C_{ov}(u_2, u_3) = 0$

Entonces puede aplicarse MCO en la estimación de los parámetros obteniendo estimaciones BLUE.

3. <u>Sistemas de ecuaciones de bloques recurrentes</u>

Consiste en un conjunto de ecuaciones que puede dividirse en grupos o bloques de tal forma que las ecuaciones dentro de cada bloque son simultáneas, pero los grupos de ecuaciones pertenecientes a bloques distintos son recurrentes, es decir, el conocimiento de las variables endógenas del primer bloque permite la determinación de las variables endógenas del segundo bloque, etc.

C. ESTIMACION DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTANTEAS

Uno de los supuestos básicos del modelo de regresión lineal es:

$$C_{ov}\ (X,u) = E\ [X_i - E\ (X_i)]\ [u_i - E\ (u_i)] = 0$$

Este supuesto siempre se cumple si X_i son fijos (no cambian cualquiera sea la muestra de Y_i).

Sin embargo, cuando X_i es una variable probabilística, este supuesto no siempre se cumple pudiendo ocurrir que $C_{ov}\ (X,u) == 0$.

Un caso especial en que no se cumple el supuesto de covarianza nula entre X y u es el de un sistema de ecuaciones simultáneas. Esto puede comprobarse mediante un ejemplo sencillo:

$$Y = b_o + b_1\ X + u$$

$$X = a_o + a_1\ Y + a_2\ Z + v$$

$$E\ (u) = 0 \qquad E\ (v) = 0 \qquad E\ (u,\ v) = 0$$

$$E\ (u^2) = \sigma^2_u \qquad E\ (v^2) = \sigma^2\ v$$

$$E\ (u_k,\ u_j) = 0 \qquad E\ (v_i,\ v_j) = 0$$

Al sustituir el valor de Y en X encontramos:

$$X = a_o + a_1\ (b_o + b_1\ X + u) + a_2\ Z + v$$

$$X = \frac{a_o + b_o\ a_1}{1 - b_o\ a_1} + \frac{a_2}{1 - b_1\ a_1}\ Z + \left(\frac{a_1\ u + v}{1 - b_1\ a_1}\right)$$

El valor de X y el término de error u están relacionados y X no es realmente una variable exógena en la primera ecuación:

$$C_{ov}\ (X,\ u) \neq 0$$

y puede probarse que como consecuencia, las estimaciones MCO son sesgadas e inconsistentes. Esto obliga a aplicar métodos alternativos de estimación.

1. Estimación de la forma reducida o mínimos cuadrados indirectos (MCI)

Se aplica a cada una de las ecuaciones del sistema. Se usa para estimar un sistema de ecuaciones simultáneas, cuando cada una de las ecuaciones está exactamente identificada.

Una ecuación está identificada si su forma estadística es única, es decir, no existe otra ecuación en el sistema, o que pueda formarse por una combinación matemática de otras ecuaciones del sistema, que contenga las mismas variables de la ecuación en cuestión.

Condiciones de identificación de una ecuación:

i) Condición de orden: el número de variables exluidas de la ecuación, pero incluidas en el resto del sistema, debe ser mayor o igual al número de ecuaciones del sistema, menos uno.

ii) Condición de rango: en un sistema de "G" ecuaciones, cualquiera ecuación puede estar identificada si es posible construir al menos un determinante de orden (G - 1) distinto de cero, de los coeficientes de las variables exluidas de la ecuación.

Una ecuación está exactamente identificada si se cumple la condición de rango y en la condición de orden, el número de variables excluidas de la ecuación es igual al número de ecuaciones del sistema, menos 1.

La evaluación de la identificación de las ecuaciones es fácil de determinar en modelos de sistemas de ecuaciones pequeñas, pero a medida que estos se agrandan, el proceso de torna engorroso.

Método MCI:

a) Se obtiene la forma reducida del modelo, a partir de la forma estructural. Esto es, las variables endógenas se escriben en función de las predeterminadas.

b) Se aplica MCO a cada una de las ecuaciones de la forma reducida.

c) Usando la estimación de los parámetros de la forma reducida, se resuelve el sistema de realciones de los parámetros, para encontrar los parámetros estructurales.

2. Método de variables instrumentales

Se aplica a la estimación de cada ecuación en particular. Resuelve el sesgo de la estimación de ecuaciones simultáneas y el problema de su sobreidentificación.

a) Se escogen variables instrumentales apropiadas para reemplazar las variables endógenas que aparecen como explicativas en la ecuación estructural.

   Variable instrumental: debe estar muy correlacionada con la variable endógena que se reemplaza pero poco correlacionada con el resto de las variables explicativas de la ecuación.

b) Se multiplica la ecuación estructural por cada una de las variables instrumentales y se suma para todos los valores muestrales. Este procedimiento provee de tantas ecuaciones lineales como parámetros a estimar. De la solución de estas ecuaciones se obtienen los parámetros estructurales.

3. Mínimos cuadrados bietápicos
(Two-Stage Least Squares 2SLS)

Se aplica a la estimación de cada ecuación en particular. Es la técnica más importante en la estimación de parámetros estructurales. Es una extensión de MCI y de variables instrumentales.

a) Se escribe el modelo en la forma reducida.

b) Se estima Y_1 en función de todas las variables predeterminadas del modelo y con ello se encuentra los valores estimados de las variables endógenas.

c) Se vuelve a estimar la ecuación estructural reemplazando las variables endógenas que aparecen como explicativas por su valor estimado en la primera etapa. Con la aplicación de MCO en esta segunda etapa se obtiene la estimación de los parámetros estructurales.

La estimación por 2SLS tiene las siguientes propiedades:

- Los estimadores son sesgados en muestras pequeñas.
- Son asintóticamente insesgados en muestras grandes, lo que implica que son consistentes.
- Este método es más general que el de las variables instrumentales por que toma en cuenta la influencia de todas las variables predeterminadas del modelo.
- La estimación mediante 2SLS requiere de un gran número de observaciones.

Capítulo V

La construcción de un modelo de simulación es más que la unión de una serie de ecuaciones estimadas individualmente. El que un conjunto de ecuaciones, ajuste históricamente bien, no significa que los resultados de una simulación con dicho modelo se acerquen a la realidad. Esto es así porque las ecuaciones estructurales del modelo, contienen variables endógenas estimadas y endógenas rezagadas, que le confieren una dinámica al sistema, difícil de comprender.

Para utilizar un modelo de simulación es preciso que podamos evalurlo y poder comparar resultados de modelos alternativos. La evaluación de un modelo de ecuaciones simultáneas se complica por el hecho que, aún cuando una ecuación en particular ajuste relativamente bien, el conjunto de ecuaciones puede reproducir en forma poco acertada la realidad. También puede darse la situación inversa: un modelo puede tener una ecuación que no ajuste estadísticamente bien pero el conjunto de ecuaciones puede reproducir con exactitud los datos históricos.

1. Proceso de simulación

Comenzaremos analizando el proceso de simulación en modelos lineales. Estos corresponden a aquellos en que las variables endógenas se relacionan en forma lineal a las exógenas, y se caracterizan por la aditividad y correspondencia entre las condiciones exógenas y la realización del fenómeno.

Estos modelos corresponden a una clase estrecha de especificaciones, especialmente en las aplicaciones macroeconómicas empíricas. Sin embargo, ellas constituyen una referencia fundamental por la simplicidad en su estructura y sus propiedades asociadas.

Simulación es la solución matemática de un sistema simultáneo de ecuaciones en diferencias.

Hemos visto que un modelo macroeconómico puede especificarse en forma lineal como:

(1) $BY + CX + DY_{t-1} + U = 0$ Forma estructural

o bien:

(2) $Y = A \cdot X + B_1 Y_{t-1} + e$ Forma reducida

donde:

$A = -B^{-1} . C$

$B_1 = -B^{-1} . D$

$e = B^{-1} . U$

El vector Y representa el conjunto de las variables endógenas relativas al período t, determinadas por el sistema (1) o (2). El vector X es el conjunto de variables exógenas, y las matrices B, C y D en (1) y A, B_1 en (2) caracterizan los parámetros del sistema. El error u es aleatorio, de esperanza nula y de varianza finita. Las variables endógenas rezagadas son relativas sólo al período anterior: se demuestra que todo modelo autorregresivo puede reescribirse de esta manera.

La estimación econométrica fija los parámetros del sistema , identificándose una estructura del modelo con las matrices A* y B_1*, que debe tener una solución única en Y para una estructura dada de las variables exógenas y predeterminadas:

(3) $Y = A^* X + B_1^* Y_{t-1} + e$

Ejemplo sencillo:

$C_t = a_1 + a_2 Y_{t-1}$

$I_t = b_1 + b_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2})$

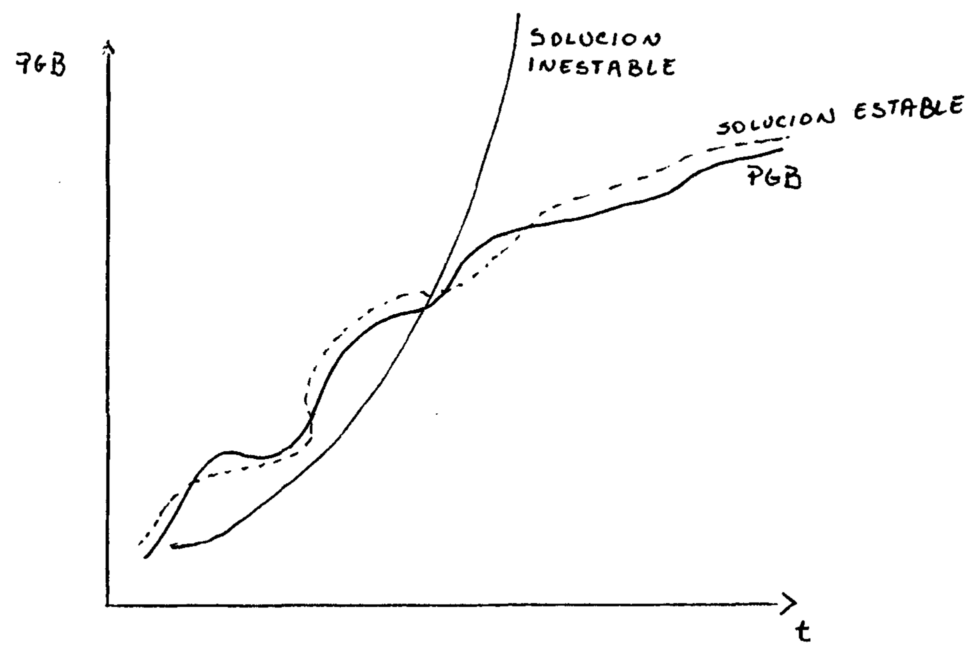
$Y_t = C_t + I_t + G_t$

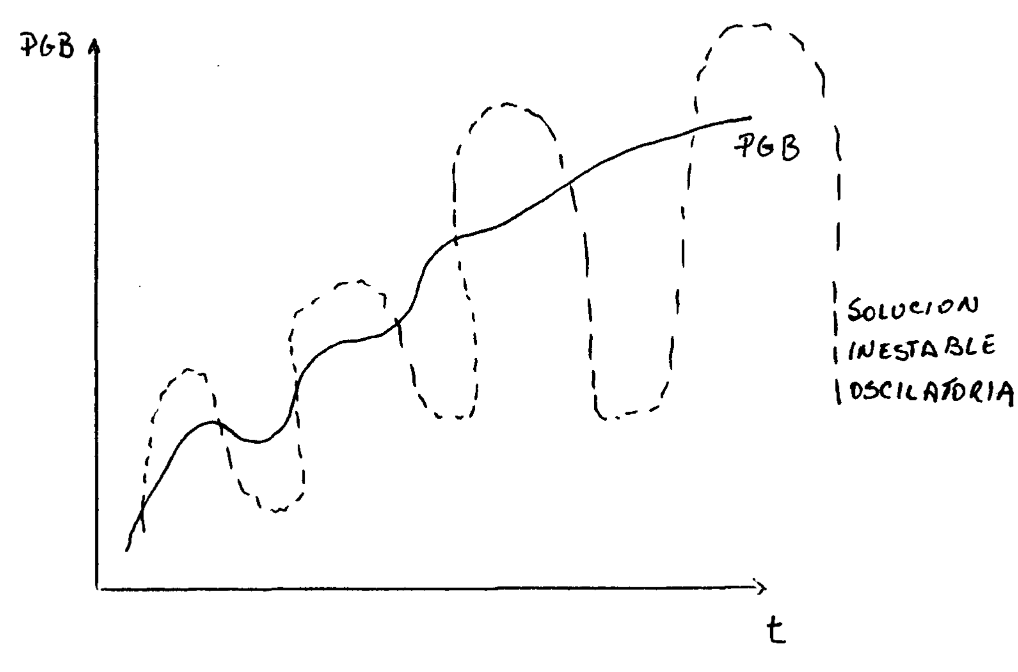
Este modelo se resuelve fácilmente sustituyendo las ecuaciones de comportamiento de C_t e I_t en Y_t.

$Y_t = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) Y_{t-1} - b_2 Y_{t-2} + G_t$

El resultado es una ecuación en diferencias de segundo orden, cuya solución dependerá de dos condiciones iniciales (Y_{t-1}, Y_{t-2}) y de los valores futuros de G_t.

TIPOS DE SOLUCIONES EN MODELOS DE SIMULACION





La solución puede no ser estable, es decir, puede ser creciente o puede oscilar. La estabilidad de la solución depende de determinadas condiciones que deben satisfacer los parámetros. Cuando el modelo no es lineal, las condiciones de estabilidad resultan difíciles de determinar.

2. Simulaciones deterministas

Las simulaciones deterministas son probablemente las técnicas más utilizadas para la evaluación y la caracterización de modelos empíricos. Contrariamente a los métodos estocásticos,[1] se habla de simulación determinista cuando se supone que la esperanza del error aleatorio es nula. Se distingue tradicionalmente entre simulaciones ex-post (serie efectiva de Y_t) y ex-ante (supuestos sobre los Y_t).

a) Simulaciones ex-post

El sistema (3) se resuelve con los valores observados de las variables exógenas. La simulación ex-post permite así evaluar la coherencia del modelo comparando los valores efectivos y estimados de las variables endógenas. Se trata sin duda del principal instrumento de validación de un modelo macroeconómico. Se pueden efectuar dos tipos de simulaciones ex-post:

- Simulación estática: las variables endógenas estimadas ($\hat{Y}_t$) se calculan a partir de sus valores rezagados observados (Y_{t-1}) y de las variables exógenas X_t:

$$(4) \quad \hat{Y}_t = A^* \, Y_{t-1} + B_1^* \, X_t$$

- Simulación dinámica: la serie de los $\hat{Y}_t$ se calcula en función de los valores estimados de las endógenas rezagadas y de las variables exógenas:

$$(5) \quad \hat{Y}_t = A^* \, \hat{Y}_{t-1} + B_1^* \, X_t$$

---

[1] Un análisis de técnicas estocásticas de simulación puede encontrarse en Adelman, Adelman (1959).

b) <u>Simulaciones ex-ante</u>

Las simulaciones ex-ante consisten en resolver el sistema (3) para valores proyectados de las variables exógenas:

$$(7) \quad Y^{p}_{t} = A^{*} \, Y^{p}_{t-1} + B_{1}^{*} \, X^{p}_{t}$$

Se trata aquí de la formalización matemática del uso en proyección de un modelo. Generalmente, se elaboran distintos escenarios que corresponden a diversas hipótesis sobre las variables exógenas: supuestos de política económica, de evolución de la economía mundial, etc. Dentro de estos escenarios, se escoge aquel que es evaluado como el "más probable", definiéndose de esta forma el <u>escenario de referencia</u>.

En resumen, podemos describir los horizontes temporales de la simulación, de la siguiente forma:

```
  HACIA     !  SIMULACION EX-POST  !  PREDICCION  !  PREDICCION
  ATRAS     !    O "HISTORICA"     !  EX-POST     !  EX-ANTE
<-----------!--------------------> !------------> !------------->
            !                      !              !
            !                      !              !
------------!----------------------!--------------!-------------
            !                      !              !
            !                      !              !
            !<--PERIODO ESTIMADO-->!              !
            !                      !              !

            T1                     T2             T3
```

3. <u>Evaluación de los modelos de simulación</u>

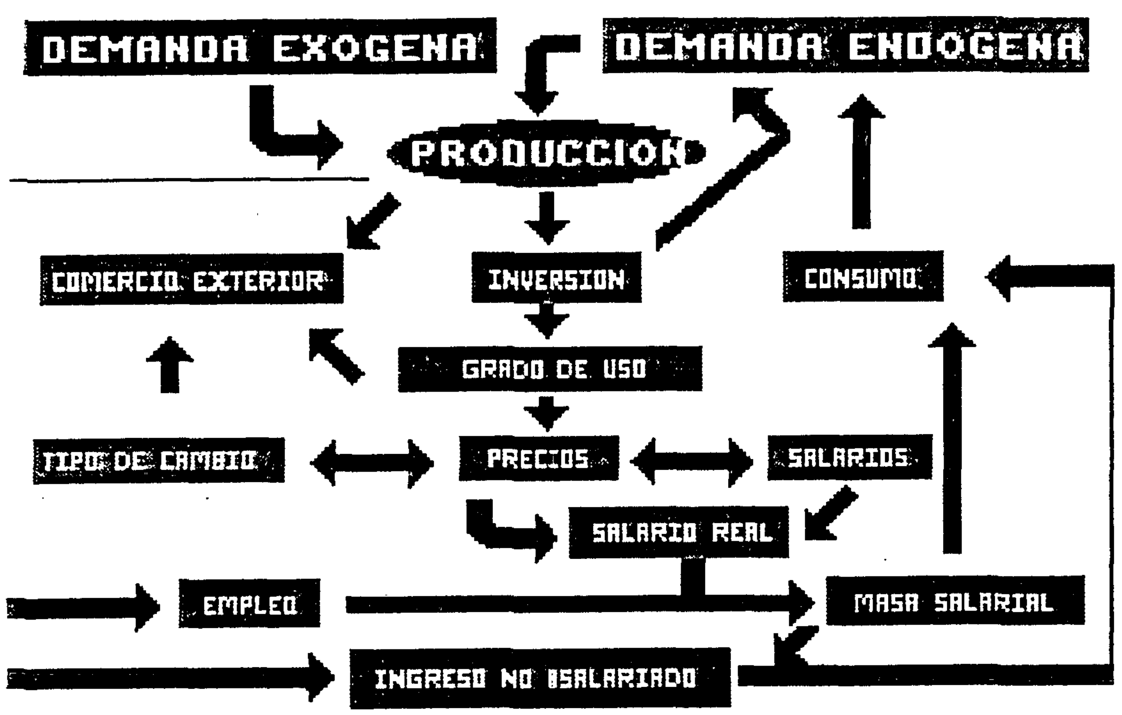
La evaluación de un modelo de simulación es más compleja que la de un modelo uniecuacional. El alto nivel de significación estadístico de algunas ecuaciones, debe compensar el bajo nivel de otros. Pero además el modelo en su conjunto tiene una estructura dinámica más compleja que cualquiera de las ecuaciones que lo componen. Los criterios de evaluación también dependen de la finalidad del modelo: si se construyen con fines de predicción o de propósitos descriptivos y contrastación de hipótesis.

Un primer criterio a considerar es el ajuste de cada ecuación en particular a los datos históricos. A veces ocurre que hay ecuaciones que por más que cambien de especificación no ajustan bien, pero que deben ser consideradas para completar la forma estructural del modelo. Otras veces se escogen ecuaciones que no son tan satisfactorias en términos estadísticos, pero que mejoran la capacidad de simulación del modelo.

Otro criterio que se utiliza es el ajuste de las variables individuales en un contexto de simulación. Es de esperar que los resultados de una simulación histórica se aproximen con bastante exactitud al comportamiento del mundo real.

A continuación se presentan un conjunto de gráficos que muestran los resultados de una simulación retrospectiva dinámica, efectuada en el Modelo Macroeconómico de Brasil.[2]

Antes de analizar los gráficos, se muestra el esquema de solución del modelo, en que puede apreciarse la interrelación existente entre el conjunto de variables endógenas y la determinación simultánea del bloque de precios y el bloque real.



---

[2] Un Modelo Macroeconómico para Brasil - MACROBRAS, ILPES/PNUD, Proyecto RLA/86/029 - L/IP/G.574.

En el gráfico 1 se observa la evolución histórica del consumo privado, para el período 78-84 en Brasil, junto con la simulación dinámica del mismo.

Se puede observar que el valor estimado recoge bien la evolución de la tendencia y de los puntos de inflexión, pero se presenta una fuerte subestimación de los años 1980 y 1983. Las causas de esta evolución deben buscarse analizando los gráficos de los determinantes del consumo privado. Esta ecuación recoge varios problemas:

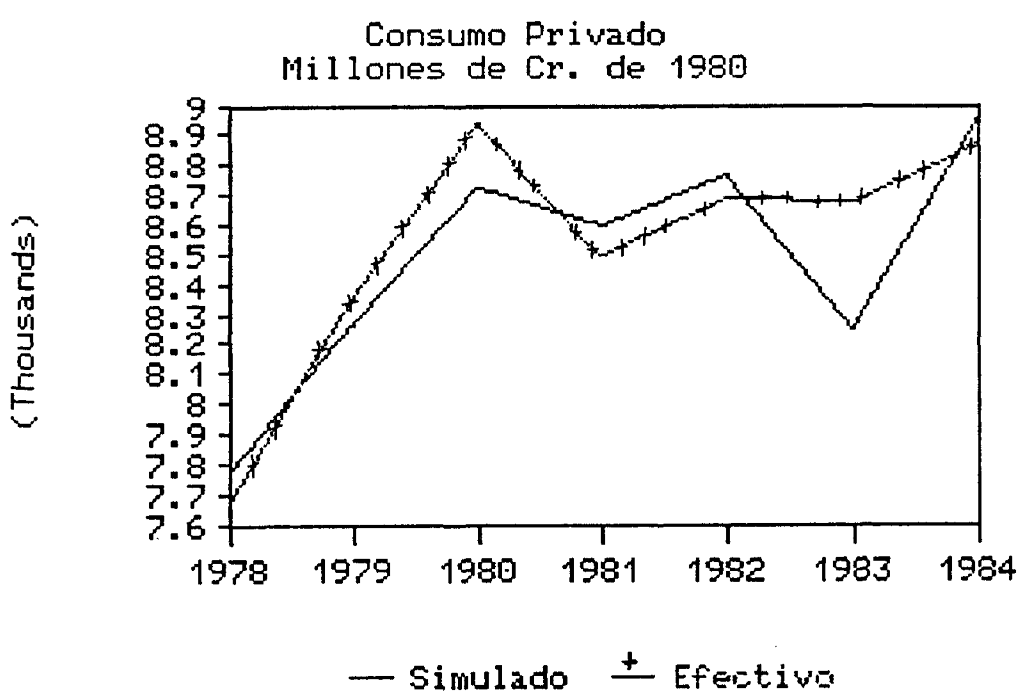
a) Problemas con las estadísticas de empleo, que determinan la masa salarial;

b) Determinación del ingreso no asalariado (variable explicativa del consumo privado) que se obtiene como residuo entre el producto geográfico bruto y el ingreso;

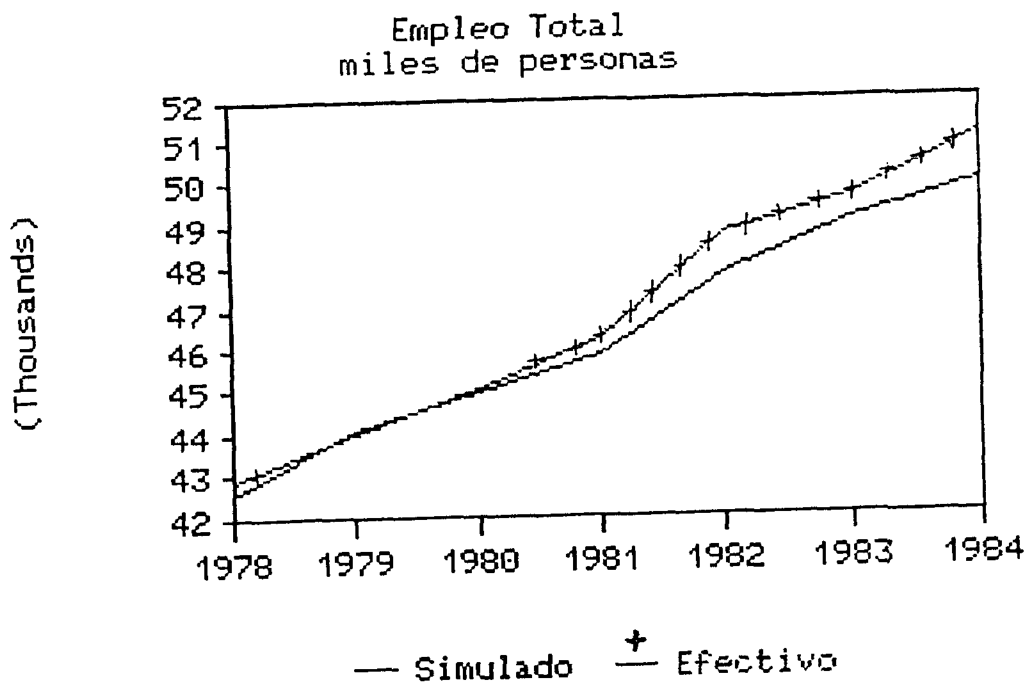
c) Los parámetros de la ecuación pueden ser inestables;

d) Ocurre una dinámica perversa, donde la subestimación del consumo privado, genera un menor valor en el producto, que se traslada al ingreso y con ello al ingreso no asalariado, revirtiendo en un menor valor del consumo privado.

Gráfico 1



En el gráfico 2 se muestra la simulación dinámica del empleo. Se puede observar que los valores estimados captan bien la tendencia pero existe una subestimación sistemLatica del valor efectivo, que se agranda con el tiempo. Esto lleva a analizar las estimaciones de empleo sectoriales, a partir de las cuales se generó la cifra de empleo total.



Este tipo de simulación retrospectiva, puede efectuarse con las principales variables del modelo, y así determinar cuáles son las estimaciones que requieren ser modificadas. Sin embargo, este procedimiento, no nos entrega la magnitud del error de simulación de cada variable.

Existen varias medidas cuantitativas, que generalmente se consideran para ello:

a) <u>Error absoluto medio porcentual</u>

Calcula la diferencia entre el valor estimado de la variable endógena y su valor efectivo, de la siguiente forma:

$$EAM\ (\%) = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (\ Y_t - Y^e_t\ )/Y_t$$

A continuación se reproducen los resultados de las simulaciones dinámicas de modelos norteamericanos (Wharton Mark III, MPS), canadiense (CANDIDE) y franceses (DMS, METRIC), junto a MACROBRAS. Como los períodos de estimación y de simulación son diferentes, los resultados no son directamente comparables. Este cuadro da un orden de magnitud de los errores cometidos por los modelos, en la estimación de la evolución de las principales variables macroeconómicas. Se puede apreciar que los errores más altos están asociados a la inversión y a las importaciones. La dinámica de la inflación es generalmente bien captada por los modelos macroeconométricos. En este caso el error de 5.1% en el deflactor de MACROBRAS hay que compararlo con una inflación de tres dígitos, lo que resulta siendo bastante bajo y comparable a los errores sobre la inflación de un dígito del resto de los modelos.

simulacion dinamica de modelos
error absoluto medio

MODELOS	MACROBRAS	WHARTON	MPS	CANDIDE	DMS	METRIC
SIMULACION	74/84	61/67	61/67	55/70	61/81	61/81
PROD.INT.BR.	1.4	1.9	1.3	0.8	0.9	1.3
CONSUMO	1.7	0.9	0.7	1.0	0.8	1.1
INVERSION	5.8	5.8	5.9	4.9	2.7	4.8
EXPORTACIONES	0.7	_	1.9	1.5	2.5	2.0
IMPORTACIONES	4.0	_	7.3	2.2	2.9	3.3
DEFLACTOR PIB	5.1	1.2	1.6	0.8	0.8	1.6
SALARIOS	_	_	0.8	_	1.1	1.2
EMPLEO	1.1	_	1.0	0.5	0.7	0.8
CESANTIA	_	24.3	12.0	6.7	21.1	9.2

<u>Fuente</u>: Artus, Deleau, Malgrange (1986)

b) <u>Raíz del error medio cuadrático de simulación</u>

$$REMC = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (Y^{s}_{t} - Y_{t})^{2}}$$

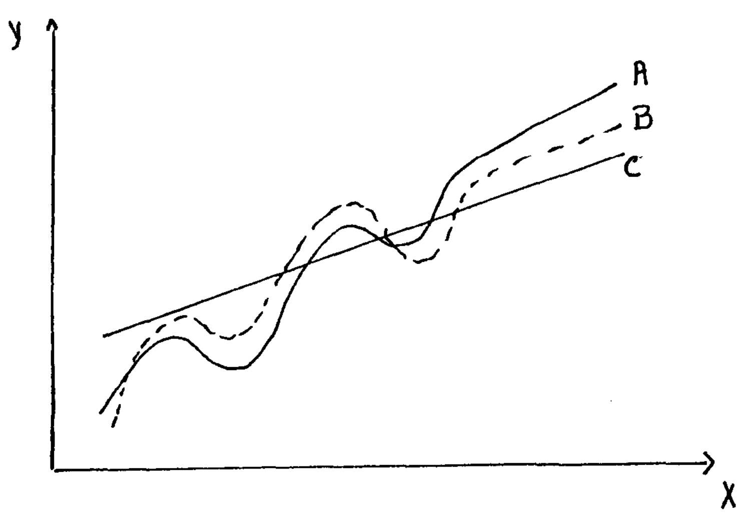
Constituye una medida de la desviación de la variable simulada con respecto a su trayectoria temporal real. La magnitud de este error se compara con el valor medio de la variable en cuestión.

c) <u>Raíz del error medio cuadrátido porcentual</u>

$$REMC\ (\%) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum \left(\frac{Y^{s}_{t} - Y_{t}}{Y_{t}}\right)^{2}}$$

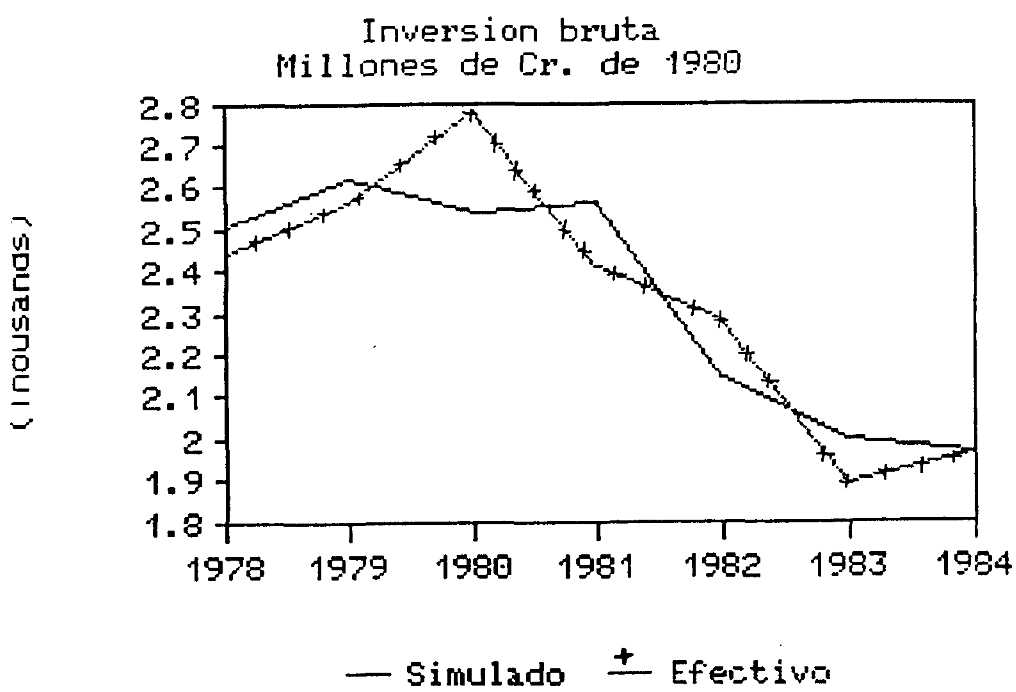
El hecho de que cualquiera de estas medidas del error sea pequeño es deseable, pero no es el único criterio para evaluar el ajuste de la simulación.

Otro criterio importante es que el modelo sea capaz de simular los "puntos de quiebre" que presentan los datos históricos. Para mostrarlo gráficamente:



A = Valores reales de Y
b = Ajuste que simula bien los puntos de quiebre
C = Ajuste que no respeta los puntos de quiebre

Un análisis empírico sobre la evolución de los puntos de inflexión, o quiebre puede hacerse con la función de inversión bruta de MACROBRAS.



Este gráfico nos muestra que si bien la simulación capta bien la tendencia y los valores convergen con los efectivos en el año final, los puntos de inflexión de los períodos 80, 81 y 82 son captados en sentido inverso, mostrando la función simulada un rezago sistemático en la captación del ciclo.

Si el modelo se construyó con fines predictivos, <u>el error absoluto medio o el error medio cuadrático de simulación de predicción ex-post</u> es otro criterio fundamental para juzgar el funcionamiento del modelo.

Un criterio adicional para evaluar el funcionamiento de un modelo es la "<u>sensibilidad</u>" general del mismo ante factores tales como: período inicial en el que se empieza la simulación, cambios menores experimentados en las estimaciones de los coeficientes y cambios pequeños en las trayectorias temporales de las variables exógenas.

4. Multiplicadores

Permiten llegar a conclusiones sobre la respuesta dinámica del modelo frente a cambios experimentados por determinadas variables.

a) Definición

Un multiplicador mide el efecto sobre una variable endógena de una variación unitaria de una variable exógena. Se puede distinguir tres tipos de multiplicadores:

- multiplicador instantáneo: efecto de $\Delta X(t) = 1$ sobre $Y(t)$
- multiplicador dinámico a T períodos: efecto de $\Delta X(t) = 1$ sobre $Y(t+T)$
- multiplicador total: efecto de $\Delta X(t) = \Delta X(t+1) = \ldots = \Delta X(t+T) = 1$ sobre $Y(t+T)$

Retomando la forma reducida (3) los multiplicadores se escriben:

$$Y(t) = A^{*}\, Y(t-1) + B_1^{*}\, X(t)$$

- B_1^{*} es el multiplicador instantáneo
- $A^{*T} B_1^{*}$ es el multiplicador dinámico
- $B_1^{*} + A^{*} B_1^{*} + \ldots + A^{*T} B_1^{*} = (I - A^{*})^{-1} B_1^{*}$ es el multiplicador total (I es la matriz identidad)

Este último existe sólo si el modelo es estable, es decir si los valores propios de A^{*} son de módulo inferior a uno (sobre este tema, ver Howrey, 1971).

b) El multiplicador de gasto público

Para una definición simple del multiplicador de gasto público, supongamos un modelo estático de tipo keynesiano "puro" donde precios, salarios, tipo de cambio y tasa de interés son exógenos. El funcionamiento de un modelo se resume entonces por la condición de equilibrio en el mercado de bienes:

$$(1) \quad Q = C(Q) + I(Q) + X + M(Q) + \bar{G}$$

Simplificando al extremo, el consumo privado (a través del ingreso disponible), la inversión (efecto de aceleración) y las importaciones dependen sólo del producto. Las exportaciones dependen de factores externos y el consumo de gobierno es exógeno. Se omite por simplificación la variación de existencias. Se trata aquí de un modelo simple de demanda: sólo las variaciones de alguno de los componentes del gasto afectan el nivel del producto.

Este ejemplo permite ilustrar con claridad el cálculo del multiplicador del gasto público. Tomando las derivadas totales de (1) con respecto al producto, se tiene:

$$(2) \quad \frac{dG}{dQ} = 1 - \frac{dC}{dQ} - \frac{dI}{dQ} + \frac{dM}{dQ}$$

La derivada del consumo privado con respecto al producto es la propensión marginal a consumir c; definimos de la misma forma las propensiones marginales a invertir (i) y a importar (m). Como el multiplicador de gasto público mide el efecto sobre el producto de una variación unitaria del consumo de gobierno, la relación (2) se invierte:

$$(3) \quad \frac{dQ}{dG} = \frac{1}{1 - c - i + m}$$

El multiplicador del gasto público depende positivamente de las propensiones a consumir y a invertir, y negativamente de la propensión a importar.

Como es obvio, los modelos macroeconométricos son dinámicos e integran efectos más complejos. Entre estos, cabe citar el impacto inflacionario de la medida (que retroalimenta el bloque real) y un mecanismo de tipo "crowding-out" en los modelos que determinan endógenamente la tasa de interés. Estas dinámicas tienden a disminuir el impacto sobre el producto de la medida.

Sin embargo, hay que subrayar que a corto e incluso a mediano plazo, el funcionamiento de los modelos empíricos es vecino al sistema (1). Las diversas propensiones descritas tienen una influencia determinante en la determinación del multiplicador del gasto público, destacándose la gran importancia de la relación entre importaciones y producto en la evaluación del impacto de esta medida.

c) Un ejempleo de análisis del multiplicador del gasto público

A continuación se presenta un ejemplo del cálculo y análisis del multiplicador del gasto público en un modelo macroeconómico construido para Chile. En este análisis es válido observar el esquema de solución presentado en el punto 3 de este capítulo.

Las simulaciones o variantes miden el impacto global de la variación de una variable exógena sobre una trayectoria de referencia. Una vez definido el escenario central, se efectúa la simulación y se calcula la diferencia (en niveles o tasas de crecimiento) entre los nuevos resultados y el escenario central. Es esta diferencia que aparece en los cuadros presentados.

La variante es puntual: luego del impacto inicial, la variable exógena vuelve a su valor del escenario de referencia en los períodos siguientes. La simulación se calcula sobre seis períodos, lapso en que empiezan a agotarse los efectos dinámicos asociados al modelo.

Se aumenta el consumo de gobierno en un millón de pesos de 1977 solamente en el período 1987, volviendo luego esta variable a su nivel de referencia. El resultado de esta simulación puede interpretarse como multiplicador de gasto público: se mide el impacto de una variación unitaria del consumo de gobierno sobre el producto. El multiplicador del PIB puede descomponerse en función del equilibrio en el mercado de bienes; éste se calcula como la suma de los multiplicadores de los componentes del gasto:

$$m_{PIB} = m_C + m_I + m_G + m_X - m_M$$

m_C : multiplicador del consumo privado

m_I : multiplicador de inversión

m_G : multiplicador de consumo de gobierno

m_M : multiplicador de importaciones

m_X : multiplicador de exportaciones

En esta simulación, el multiplicador de gasto público es unitario ($m_G = 1$) en el primer período de la simulación, y nulo después. Se pueden apreciar los resultados de la variante en el cuadro 5 y en los gráficos 1 y 2.

El análisis de este cuadro refleja la constante interacción del modelo entre sus distintos bloques, destacándose la retroacción simultánea que se produce entre el bloque de ingresos y los componentes del gasto. En una primera etapa del proceso de iteración del modelo, el producto se incrementa en igual suma que el consumo de gobierno. El aumento del producto genera mayor empleo productivo y por ende la masa salarial crece. Esto tiene un impacto positivo sobre el consumo privado, lo cual redunda en un efecto multiplicador sobre el producto y sobre la inversión. El ingreso nacional bruto aumenta en igual monto que el producto, pues el servicio financiero y los términos de intercambio no varían en el corto plazo. El ingreso no asalariado es calculado por diferencia entre el ingreso nacional bruto y los restantes componentes del bloque de ingresos; esta diferencia es positiva. Llegamos así a la última etapa del método de convergencia del modelo: este incremento del ingreso no asalariado incide en la evolución del consumo (y de la la inversión con un rezago de un año), lo cual amplifica el efecto multiplicador sobre el producto. El proceso de iteración termina cuando se obtiene la igualdad entre ahorro total e inversión bruta.

El impulso inicial tiene así un impacto sobre el consumo (vía las propensiones al consumo y el efecto precio), la inversión neta (efecto de aceleración) y las importaciones (elasticidad con respecto al producto y variación del grado de uso de la capacidad). Como las exportaciones no dependen de factores de ingreso internos y que se mantiene el supuesto de tipo de cambio real fijo en la simulación, el multiplicador de exportaciones es nulo. El saldo de la balanza comercial y de la balanza de pagos en dólares se deteriora por el aumento de las importaciones.

MULTIPLICADORES SIMULACION: AUMENTO DE UN MILLON DE $77 DEL CONSUMO DE GOBIERNO EN 1987

Variaciones absolutas con respecto a escenario central

PERIODO	1987	1988	1989	1990	1991	1992
MILLONES DE PESOS DE 1977						
PGB (diferencia de niveles)	1.31	0.35	0.26	0.22	0.19	0.17
Efecto acumulado	1.31	1.66	1.92	2.14	2.32	2.51
CONSUMO PRIVADO	0.47	0.30	0.18	0.12	0.08	0.06
Efecto acumulado	0.47	0.77	0.95	1.07	1.16	1.22
FORMACION BRUTA CAPITAL	0.56	0.21	0.18	0.15	0.13	0.11
Efecto acumulado	0.56	0.77	0.94	1.09	1.22	1.33
EXPORTACIONES	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Efecto acumulado	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
IMPORTACIONES	0.72	0.16	0.10	0.05	0.02	0.00
Efecto Acumulado	0.72	0.88	0.98	1.03	1.05	1.05
MILLONES DE DOLARES						
SALDO BALANZA COMERCIAL	-34.28	-7.23	-4.23	-2.12	-0.56	0.69
Efecto acumulado	-34.28	-41.50	-45.74	-47.85	-48.41	-47.72
SALDO EN CUENTA CORRIENTE	-37.84	-11.59	-9.43	-8.04	-7.14	-6.49
Efecto acumulado	-37.84	-49.43	-58.87	-66.91	-74.05	-80.54
MILLONES DE PESOS DE 1977						
INGRESO NACIONAL BRUTO	1.31	0.35	0.22	0.16	0.12	0.10
INGRESO NACIONAL DISPONIBLE	0.93	0.25	0.15	0.10	0.07	0.05
MASA SALARIAL	0.35	0.11	0.08	0.06	0.05	0.05
INGRESO NO ASALARIADO	0.58	0.14	0.07	0.04	0.02	0.00
EMPLEO (Miles de personas)	10.88	2.77	2.12	1.74	1.52	1.37
Efecto acumulado	10.88	13.66	15.78	17.52	19.03	20.40
Variacion en porcentajes.						
IPM	0.10	0.05	0.03	0.02	0.01	0.01
IPM MANUFACTURERO	0.17	0.08	0.04	0.02	0.02	0.01
SALARIO REAL	-0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00

Gráfico 1: Multiplicadores del PIB (Consumo de Gobierno)

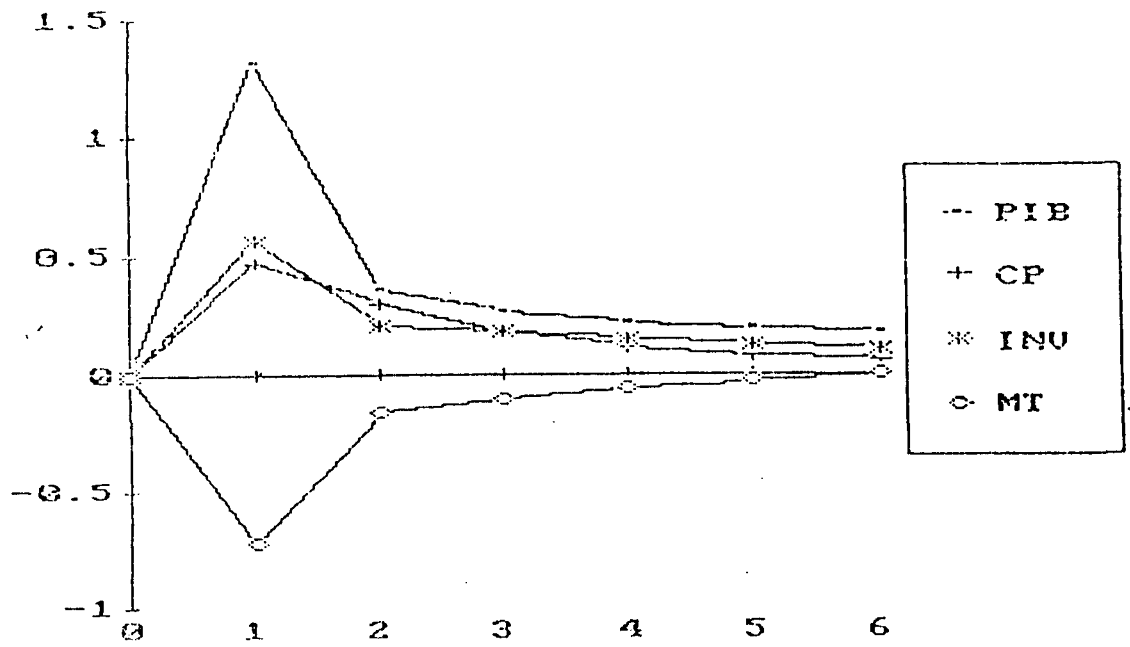
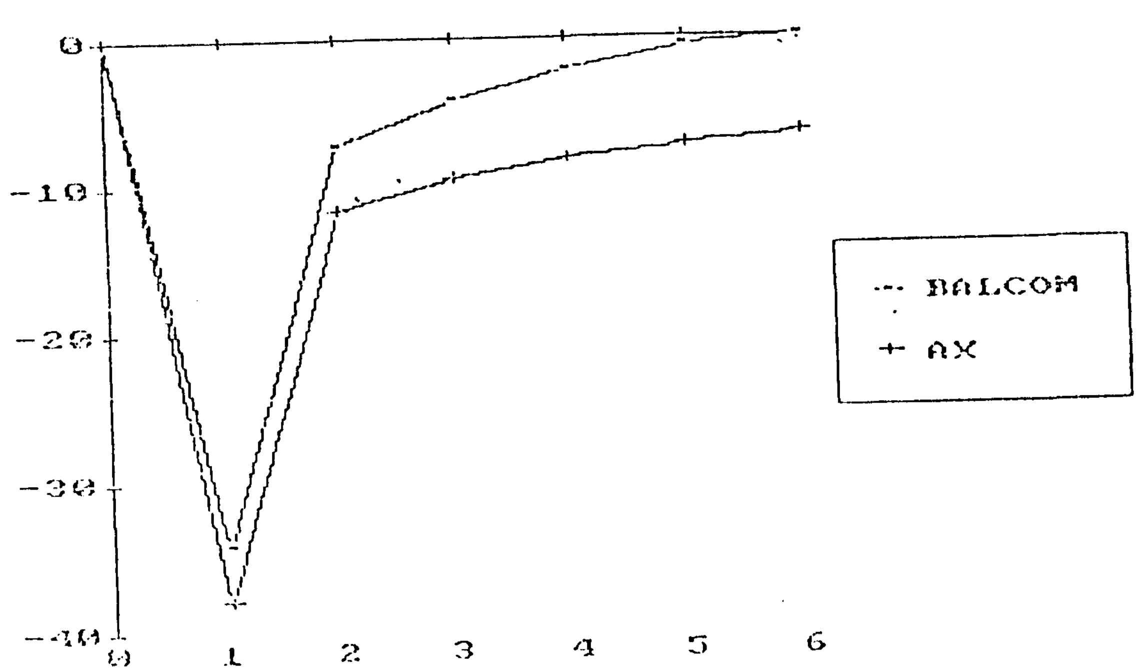


Gráfico 2: Saldos comercial y en cuenta corriente



El componente manufacturero del índice de precios mayoristas aumenta por la mayor demanda generada por la medida, lo que incide en el índice agregado. El impacto inflacionario del shock de demanda no es muy alto. Cabe recordar que los precios industriales están directamente ligados al producto industrial, capturándose de esta manera el "Trade-Off" entre inflación y nivel de actividad. Los salarios no están relacionados en forma explícita con el sector real del modelo. En cuanto a la productividad industrial que incide en el cálculo del costo salarial unitario, la función de empleo industrial tiene una particularidad: una reactivación produce una disminución de la productividad laboral, inclusive en el corto plazo (elasticidad empleo/producto superior a 1 a corto plazo). Por ende, un impulso de la demanda produce un alza del costo unitario que refuerza el impacto inflacionario de un shock reactivador. En una próxima versión del modelo, parece importante revisar la estimación de la función de empleo industrial para evitar este efecto "perverso". La ligera aceleración inflacionaria que se produce en el primer año deteriora levemente el salario real, debido a la indexación rezagada de los asalariados.

Con todo, el impulso inicial tiene un efecto multiplicador sobre el producto: el multiplicador instantáneo de gasto público es de 1.3 (como puede apreciarse, se trata de la suma de los multiplicadores de los componentes del gasto).

A partir del segundo año y en los siguientes, los efectos comienzan a diluirse, puesto que el impacto se limita al primer período. Las funciones de consumo privado e inversión siguen un proceso de ajuste parcial, lo que explica la permanencia de los efectos asociados a la medida. Esto deriva en un alza del producto con respecto a su nivel de referencia, y por ende del empleo. La masa salarial y el ingreso no asalariado siguen aumentando, lo que refuerza los efectos dinámicos del impacto inicial. En cuanto a la inversión, los efectos del alza de las utilidades que se registra con el impulso inicial intervienen al año siguiente, puesto que esta variable tiene un rezago en la función de inversión.

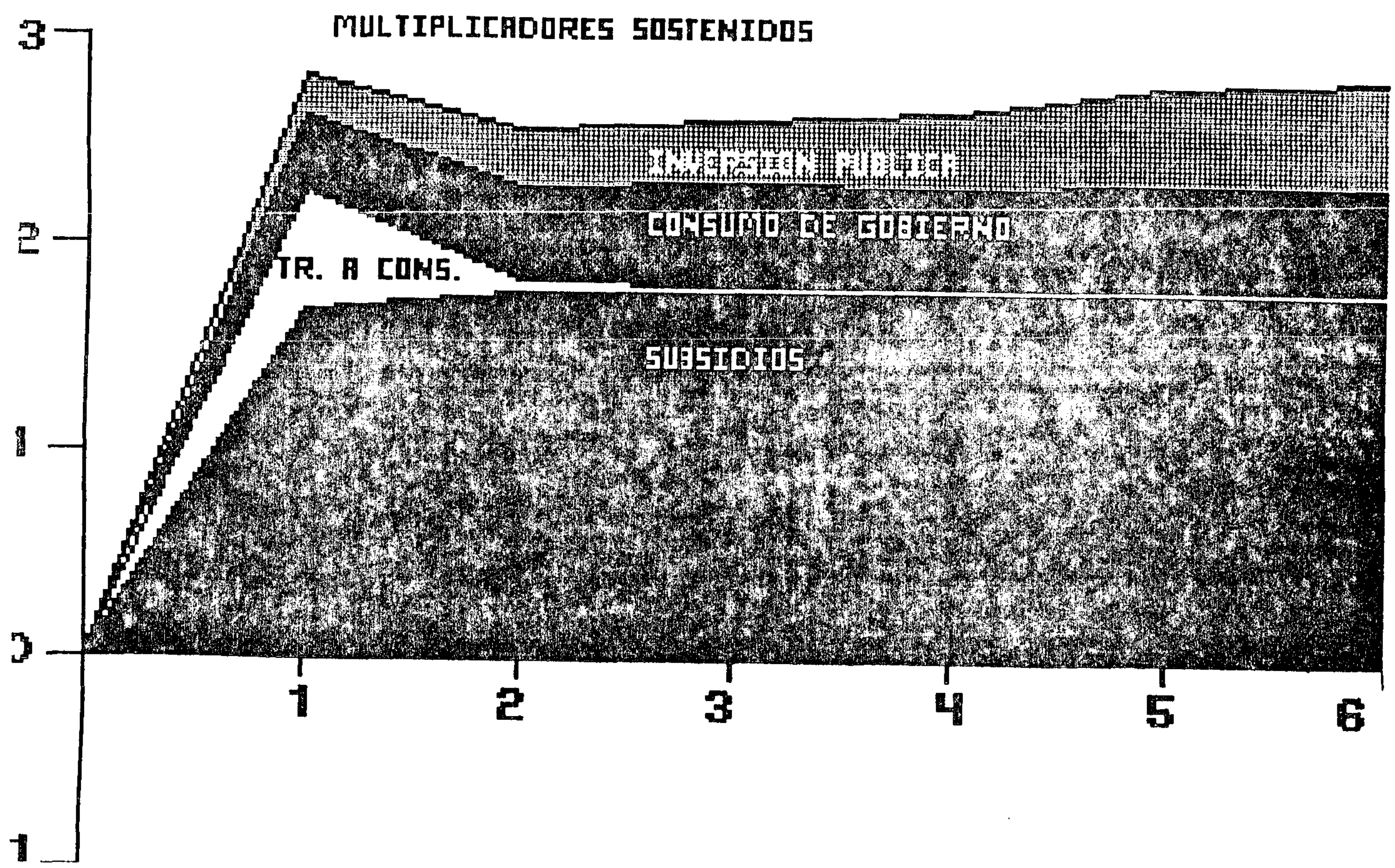
El saldo en cuenta corriente se deteriora más que el saldo comercial. La deuda externa varía según el saldo en cuenta corriente del año anterior. Por ello, el servicio financiero se incrementa en la medida en que aumenta la deuda externa. Esto también tiene un impacto en la evolución del ingreso nacional bruto real: éste aumenta en menor medida que el producto por el alza paulatina del servicio financiero.

La pérdida de salario real que se produce en el primer período de la simulación es recuperada en los dos años siguientes, con lo cual la medida es neutra con respecto a la evolución de largo plazo del salario real. Este resultado se obtiene por el supuesto de indexación unitaria de los salarios sobre la evolución de los precios. El impacto de una aceleración inflacionaria sobre el salario real es negativo sólo a corto plazo y nulo después. Sin embargo, la distribución del ingreso sí es afectada por el deterioro del salario real: el efecto acumulado es más fuerte sobre el ingreso no asalariado que sobre la masa salarial.

El efecto acumulado del aumento del consumo de gobierno es bastante elevado: el multiplicador dinámico sobre seis períodos es de 2.5. Sin embargo, la medida deteriora el saldo en balanza comercial y sobre todo el saldo en cuenta corriente, lo cual pone de relieve el peligro de medidas expansivas en el actual contexto de endeudamiento y de restricción de divisas que enfrenta el país. Un tema interesante para estudios futuros es prefijar el déficit máximo de balanza de pagos, y explorar el márgen de maniobra del cual dispone la autoridad para favorizar medidas multiplicadoras de este tipo.

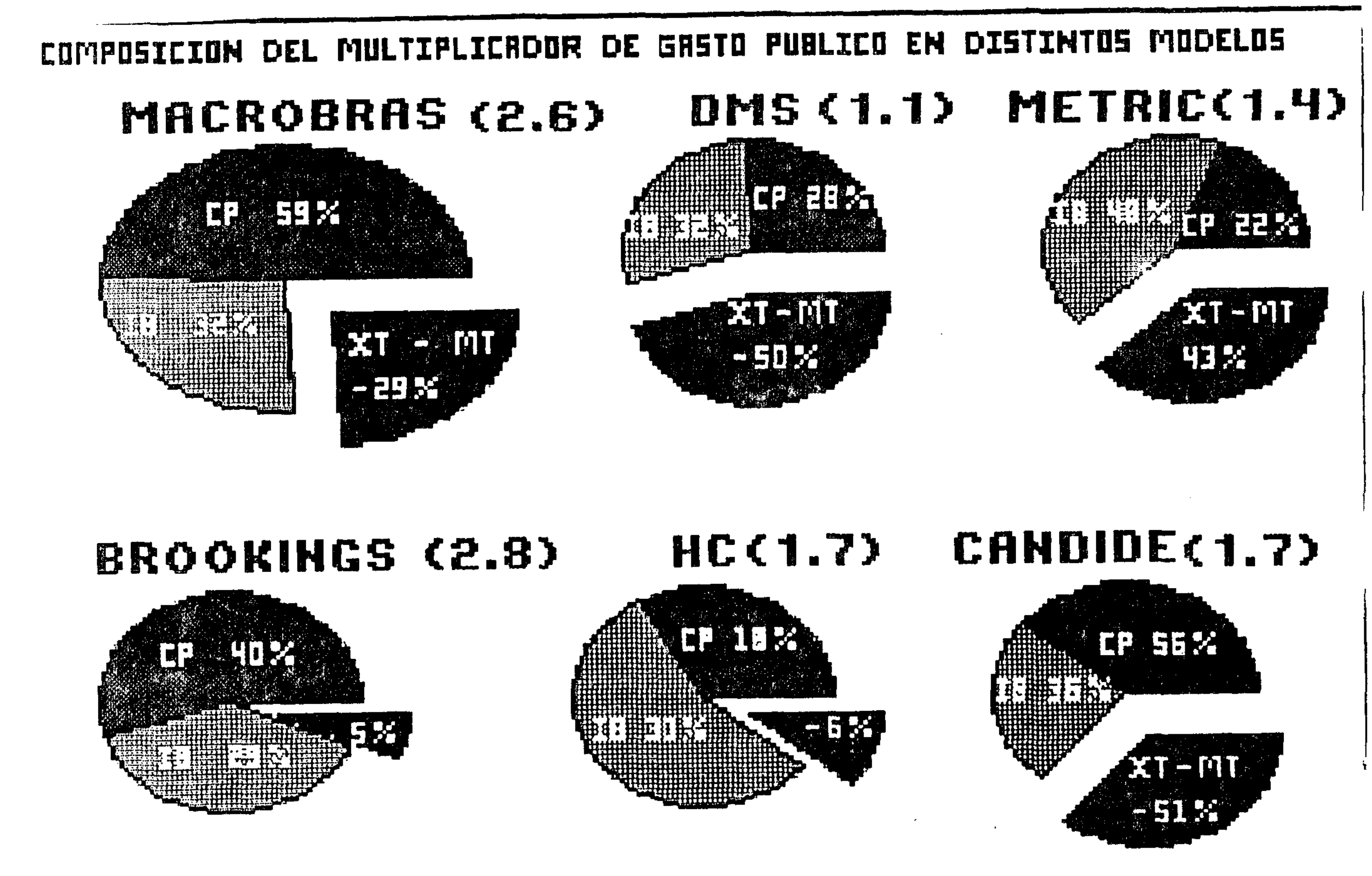
d) <u>Multiplicadores sostenidos de distintos componentes del gasto público en MACROBRAS</u>

A continuación se muestran los gráficos de los multiplicadores sostenidos de consumo de gobierno, inversión pública, transferencias a consumidores y subsidios, en el modelo MACROBRAS.



El análisis de estos multiplicadores permite apreciar los efectos de los diferentes instrumentos de políticas públicas. En el caso de Brasil, el efecto más fuerte es provocado por un aumento sostenido en la inversión pública. A este le sigue el consumo de gobierno luego, transferencias a consumidores y finalmente el efecto más bajo lo provocan un aumento del subsidio.

e) <u>Comparación de multiplicadores del gasto público en distintos modelos macroeconómicos</u>



Del cuadro anterior se desprende que el modelo MACROBRAS presenta uno de los multiplicadores más altos del gasto público siendo muy importante el efecto sobre el consumo privado y el saldo en la balanza comercial. Los modelos franceses presentan también un fuerte impacto sobre la balanza comercial a diferencia de los modelos americanos. Cabe señalar las diferencias significativas en los valores de los multiplicadores aún en modelos de un mismo país, como es el caso de los americanos, esto se debe a las características estructurales y económicas de los distintos modelos y a los diferentes períodos de estimación.

5. Comportamiento del modelo, estabiliad y oscilaciones

Hemos visto que aún cuando un conjunto de ecuaciones ajuste individualmente bien, el modelo puede entregar resultados insatisfactorios, sobre todo al proyectar un período largo de tiempo. La razón puede ser que el modelo posea una inestabilidad estructural, que lo hace alejarse de la trayectoria real.

Existen ciertas condiciones que deben cumplir los parámetros de un modelo para que éste sea estable, y éstas varían en el caso de los modelos lineales y no lineales.

a) Estabilidad en los modelos lineales

Se dice que un modelo es lineal si todas las ecuaciones en diferencias que lo componen son lineales. En estos modelos resulta relativamente sencillo encontrar las condiciones de estabilidad. Ellas se estudian a partir de la ecuación dinámica fundamental. De lo que se trata es de saber si una variación de la variable exógena en un momento del tiempo, provoca un nuevo equilibrio de la variable endógena en todo el tiempo futuro.

A partir de la ecuación dinámica fundamental, se construye la ecuación característica del modelo y las soluciones de la ecuación, llamadas raíces características, determinan las propiedades de solución de un modelo:

i) Si las raíces características son en módulo mayor que uno, la solución crecerá explosivamente.

ii) Si tienen una componente imaginaria, la solución oscilará.

iii) Si las raíces son en módulo menor que uno, el modelo será estable.

A medida que los modelos crecen se hace más difícil el análisis de su comportamiento dinámico. Aun cuando existen programas de computador que permiten resolver las ecuaciones características de orden elevado, encontrar la forma en que las raíces características se relacionan con cada uno de los parámetros del modelo puede ser difícil o imposible.

La forma en que puede afectar la estabilidad del modelo depende del período de predicción. En algunos casos la inestabilidad ocurre después de un período largo de tiempo y si la proyección es de corto plazo, este fenómeno no la efecta.

b) Modelos no lineales

En el caso de los modelos no lineales, no se dispone de la solución de una ecuación característica para averiguar si la respuesta de un modelo es estable o inestable. A lo que se recurre entonces es a realizar una serie de simulaciones para distintos períodos de tiempo y utilizando diferentes trayectorias temporales para las variables exógenas. También es conveniente efectuar simulaciones con diferentes valores de los parámetros estructurales.

BIBLIOGRAFIA

Esta bibliografía abarca temas y aplicaciones que superan la revisión efectuada en los capítulos anteriores pero sirven de antecedentes para los talleres de aplicación de modelos del Curso de Planificación Global.

Adelman y Adelman (1959) - "The Dinamic Properties of the Klein-Goldberger Model", Econometrics, October.

Artus, Deleau, Malgrange (1986) - "Modelisation Macroeconomique", Collection Economie et Statistiques avancée, ed. Económica.

Cohen, Shalli-Laskar (1980) - "Functions d'emploi a court terme et cycles de productivité: un essai de syntheses", Annuales de l'INSEE, 38-39.

Davison, R. y J.G. Mckinnon (1981) - "Several Tests for Model Specifications in the Presence of Alternative Hypotheses", Economérica, 49.

De Gregorio, J. (1984) - "Comportamiento de las exportaciones e importaciones en Chile: un estudio econométrico", Colección Estudios CIEPLAN, Nº 13.

Durbin, J. (1970) - "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression when Some of the Regressors are Lagged Dependent variables", Econométrica, 38.

Frenkel, R. (1984) - "Inflación, schocks y mark-up", Ensayos económicos, Nº 30.

Frenkel (1986) - "Salarios e inflacao na América Latina: resultados de pesquisas recentes na Argentina, Chile, Colombia e Costa Rica", Pesquisa e Planejamento Economico, 16.

Griliches, Z (1961) - "A Note on Serial Correlations Bias in Estimates of Distributed Lags", Econométrica, 29.

Griliches, Z. e Intriligator, M.D. (1984) - Handbook of Econometrics, Elsevier Science Publishers.

Howrey (1971) - "Stochastic Properties of the Klein-Goldberger Model", Econometrics, Vol. 39, Nº 1.

Jadresic, E. (1986) - "Elasticidades empleo-producto de la economía chilena", Notas técnicas Nº 85, CIEPLAN.

Jadresic, E. (1984) - "Una revisión de los modelos de formaciones de precios", Notas Técnicas, Serie Documentos de Trabajo CIEPLAN.

Juan Foxley y Joaquín Vial (1986) - "Modelos macroeconómicos aplicados en América Latina: revisión de experiencias y problemas" en Políticas Macroeconómicas, una perspectiva latinoamericana, René Cortázar, editor, CIEPLAN.

Lopes, F.L. (1982) - "Inflacao e nivel de atividade no Brasil: um estudo econométrico", Pesquisa e Planejamento Económico, 12.

M. de F.P. Dib (1981) - "Equacoes para a demanda de importacoes no Brasil: 1960-79", Revista Brasileira de Economía, 35.

Modiano, E.M. (1985) - "Salarios, precos e cambio: os multiplicadores dos choques numa economia indexada", Pesquisa e Planejamento Económico, 15.

Maddala, G.S. (1977) - Econometrics, McGraw-Hill.

Malinvaud - Statistical Methods of Econometrics, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1980.

Mario Marcel - Empleo agregado en Chile 1974-85. Una aproximación econométrica, Colección Estudios CIEPLAN Nº 21, junio 1987.

Martner y Titelman - Empleo, inflación y nivel de actividad: una maqueta de simulación dinámica para Chile, Documento TP-85.

Martner y García - Un Modelo Macroeconómico para Brasil-MACROBRAS, Documento ILPES/PNUD Proyecto RLA/86/029, LC/IP/G.574, 5 de mayo de 1988.

Mariano, R. (1982) - "Analytical Samll-sample Distribution Theory in Econometrics: the Simultaneous Equatioins Case", International Economic Review, Vol. 23, Nº 3, octubre.

Meller, P. (1987) - "Estimaciones econométricas de modelos uniecuacionales de determinación del nivel de empleo, Notas Técnicas Nº 95, CIEPLAN.

Mendez, D.F. y Wallis, K.F. (1984) - Econometrics and Quantitative Economies, Basil Blackwell.

Mendry, D., Mizon, F. (1978) - "Serial Correlations as a Convenient Simplification, not a Nuisance: a Comment on a Study of the Demand for Survey by the Bank of England", The Economic Journal, 88 septembre.

Metric - Une modélisation de l'economie francaise, INSEE, Institute National de la Statistique et des Etudes Economiques.

Modiano (1983) - "A dinamica de salarios e precos no economia brasileira: 1966/81", Pesquisa e Planejamento Economico, 15.

Moguillansky y Martner - Un modelo macroeconómico para Chile, Versión preliminar, Documento TP-78.

Muet, (1979) - "Modeles économétriques de l'investissment: une étude comparative sur données annuelles", Annuales de l'INSEE, 35.

Pesaran, M.H. (1974) - "On the General Problem of Model Selections, Review of Economic Studies, 41.

Roberto S. Pindyck y Daniel L. Rubinfeld - Modelos Econométricos, Labor Universitaria, Manuales, España 1980.

Vial, J. (1985) - "Introducción al uso de modelos macroeconométricos", Serie Docencia, Departamento de Economía, Universidad de Chile.