

34

PRELIMINAR
INSTITUTO LATINOAMERICANO DE
PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL
Santiago, marzo de 1966

EJERCICIOS DE MATEMATICAS
1^a PARTE: ALGEBRA

Curso auxiliar de matemática básica. Ejercicio preparado por José Serra.



SEMINARIOS DE MATEMÁTICAS

I PARTE

ALGEBRA

1. Realizar las operaciones indicadas, simplificando los resultados.

1.1 $(8,3x + 2,5y) - (x - 0,7y)$

1.2 $3x^2 + (x^2 + 7x - 4y) - (3x^2 + 5x - 3y) - (x - y)$

1.3 $(-5x + 2xy - 4y) - [(-3x + 4y) - (5xy + 2x)]$

1.4 $(5x - 3y - 7z) - [(8x - 9y - 3z) - \{(9y - 3x - 7z) - (8y - 7x - 2z)\}]$

2. Calcular el valor de las siguientes expresiones, para los valores indicados de las variables.

2.1 $A = \frac{7x + 5}{x - 4} - \frac{6x - 1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{7x}{x + 3} \quad x = 2$

2.2 $A = \frac{9ax}{8bx} : \frac{18x}{12a} \quad x = -3$

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

3.1.1 $x + 3,4 = 9,8$

3.1.2 $x - 3,7 = 18,7$

3.2 $-7x + 38 = -11$

3.3 $36 - x = -8x + 9$

3.4 $19 - (30 - 28x) - (21 + 17x) = 56$

3.5 $2a - (x - b) = x - (b - 2a)$

verificar el valor encontrado substituyendo en la ecuación.

4. Realizar las operaciones indicadas, simplificando los resultados:

4.1 $(a + 4)(b - c) + (2a + 3b + 4c)(a - b)$

4.2 $26xy - (9x - 8y)(5x + 2y) - 4(y - 3x)(15x + 4y)$

5. Resolver las siguientes ecuaciones: (verificando los resultados)

5.1 $2x(5x - 3) = 10x^2 - 48$

5.2 $7(3x + 2) - 6(2x + 8) = 11$

5.3 $-2(3x + 5)(x - 3) = -3(x - 1)(2x - 1)$

6. Resolver los siguientes problemas

6.1 ¿Qué número sumado con 723 es igual a 1.300?

6.2 ¿Qué número da $\frac{3}{4}$ si se le suma $\frac{1}{12}$?

6.3 ¿Qué número hay que restar a $xy - 1$ para obtener 2?

6.4 En el 2º año de un liceo, hay el doble número de alumnos del que hay en el 3º año, y en el 1º, el doble del número de alumnos del 2º año. En los tres cursos hay 154 alumnos.

¿Cuántos alumnos hay en cada curso?

- 6.5 Una persona tiene \$ 180 en billetes de 5 y de 2. Cuántos billetes hay de cada clase, si el número de billetes de 5 es dos veces el de 2?
- 6.6 El producto de números que se diferencian en 4, tiene 32 unidades más que el cuadrado del menor. ¿Cuáles son los números?
- 6.7 ¿Cuántos litros a \$ 0,60 el litro, habrá que mezclar con 180 litros a \$ 0,75 cada uno, para que el litro de la mezcla valga 0,70?
- 6.8 Repartir 1020 entre A, B y C de modo que B reciba $\frac{3}{4}$ de la parte, de C más 180 y A, $\frac{5}{8}$ de la parte de B más 120. ¿Cuánto reciben, A, B y C?
- 6.9 Una persona coloca \$ 2.000 al 4 % y recibe como intereses anuales 10 % menos de los que le produce otro capital de \$ 1.500. ¿A qué tanto por ciento está colocado el segundo capital?
- 6.10 Un capitalista presta \$ 6.440 al 4 % y 1,5 años más tarde, presta \$ 8.320 al 3,5 %. Después de cuántos años, el segundo capital habrá ganado el mismo interés que el primero?
- 6.11 Una persona coloca cierta suma al 5% durante tres años y 2 meses. Después de ese tiempo reúne el capital con sus intereses y coloca la tercera parte al 6 % y el resto al 3 %. Si los intereses anuales de las dos partes son \$ 458,70 ¿cuál es el capital primitivo?
- 6.12 Cuántos kgs de sal a \$ 3,30 el kg se mezclan con 300 kgs de sal a \$ 2,75 el kg para que resulte una mezcla de \$ 2,97 el kg sin ganancia, ni pérdida?

7. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

7.1
$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

7.2
$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

7.3
$$\begin{cases} 6y - x = 10 \\ x = 3y + 2 \end{cases}$$

7.4
$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ y = 2x - 15 \end{cases}$$

7.5
$$\begin{cases} 3x + 3y = 30 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 7.6 \quad \left\{ \begin{array}{l} -3x - 5y = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \\ 7.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 3a + 7b \\ 3x - 2y = 3a + 3b \end{array} \right. \\ 7.8 \quad \left\{ \begin{array}{l} 7y - (9x - 8) = 38 \\ 7x - (y - 5x + 61) = 1 \end{array} \right. \\ 7.9 \quad \left\{ \begin{array}{l} 7(3x - 2y) - 8(2x - 3y) = 35 \\ 8(3x - 2y) - 7(2x - 3y) = 40 \end{array} \right. \\ 7.10 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - 6)(y - 3) = (x - 4)(y - 4) \\ (x - 10)(y - 1) = (x - 9)(y - 3) \end{array} \right. \end{array}$$

verificar los resultados por medio de la sustitución.

8. Realizar las operaciones indicadas, simplificando los resultados:

$$\begin{array}{l} 8.1 \quad \frac{-95a^2b^2c^2}{-19abc} \\ 8.2 \quad \left(\frac{9}{8}x + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}x^2y\right) 24xy \\ 8.3 \quad \frac{ax}{by} : \frac{3ab}{xy} \\ 8.4 \quad \frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2} : \frac{a + b}{x + y} \\ 8.5 \quad \frac{a + 5b}{a^2 + 6ab} : \frac{ab + 5b^2}{a^3 + 6a^2b} \\ 8.6 \quad \frac{x + 1}{2x + 1} : \frac{4x^2 + 4x + 1}{x - 1} \end{array}$$

9. Resolver las siguientes ecuaciones. Verificando los resultados.

$$\begin{array}{l} 9.1 \quad 7\left(\frac{x}{a} - 1\right) = x\left(1 - \frac{a}{x}\right) \\ 9.2 \quad \frac{5x}{7m} - \frac{3x}{5m} = 4 \\ 9.3 \quad \frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31 - 7x}{6x} \\ 9.4 \quad \frac{8x + 1}{x - 1} + \frac{4 - 7x}{x + 1} - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 0 \\ 9.5 \quad \frac{ax}{b} - \frac{b}{a}(x - b) = a \end{array}$$

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

/10.1

$$10.1 \begin{cases} 2x + 3y = xy \\ 10x - 9y = xy \end{cases}$$

$$10.2 \begin{cases} 10x - 3y = 2xy \\ 7y - 6x = 4xy \end{cases}$$

$$10.3 \begin{cases} \frac{3}{x-y} + \frac{4}{y-1} = 3 \\ \frac{9}{x-4} - \frac{2}{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$10.4 \begin{cases} \frac{3}{2x-3y} + \frac{5}{y-2} = 8 \\ \frac{7}{2x-3y} + \frac{3}{y-2} = 10 \end{cases}$$

11. Resolver los siguientes problemas:

11.1 Hallar dos números cuya suma es 100 y cuya diferencia es 22.

11.2 La diferencia entre dos números es 3. Si se multiplica el 1º por 3 y el 2º por 5, la diferencia es 1. Hallar los números.

11.3 Un cierto bien tiene la siguiente función de demanda:

$$Q_d = 10 - 3p \text{ y la siguiente función de oferta}$$

$$Q_o = 2p - 1. \text{ Encontrar el precio "p" de equilibrio y la cantidad vendida en el mercado}$$

11.4 Idem para $Q_d = 25 - 2p$

$$Q_o = p - 2$$

11.5 Para el período 1915/29 la función de demanda del trigo en los Estados Unidos. Fué representada por la fórmula

$$100 Q_d = 234 - 2p. \text{ Suponiendo que la oferta sea:}$$

$$Q_o = 0,7p + 0,4, \text{ determinar el precio de equilibrio y la cantidad vendida.}$$

11.6 Para el período 1890/1915, las funciones de oferta y demanda del azúcar en los Estados Unidos, fueron representadas por las fórmulas:

$$Q_d = 1,6 - 0,5p \quad \text{y} \quad Q_o = 0,7p + 0,4$$

Determinar los precios de equilibrio y la cantidad vendida.

11.7 Para el período 1920/43, las funciones de oferta y demanda de los productos agrícolas en los Estados Unidos fueron representados por las fórmulas:

$$Q_d = 224,125 - 0,097 p$$

$$Q_o = -49,375 + 1,721p$$

Determinar los precios de equilibrio y la cantidad vendida.

$$11.8 \quad \begin{cases} \text{Bien A} & \begin{cases} Q_d^A = 5 - P_A - P_B \\ Q_o^A = -5 + P_A + 5P_B \end{cases} \\ \text{Bien B} & \begin{cases} Q_d^B = 7 - P_A - P_B \\ Q_o^B = -1 + 3P_A + P_B \end{cases} \end{cases}$$

Encontrar el precio de equilibrio del Bien A, del Bien B, y la cantidad vendida en el mercado.

Idem para

$$\begin{cases} \text{A} & \begin{cases} Q_D^A = 10 - P_A - 2P_B \\ Q_o^A = -3 + P_A + P_B \end{cases} \\ \text{B} & \begin{cases} Q_D^B = 6 - P_A - P_B \\ Q_o^B = -2 + P_B \end{cases} \end{cases}$$

12. Resolver las siguientes ecuaciones, (verificando los resultados)

$$12.1 \quad \begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$12.2 \quad \begin{cases} 2x + 3y + 5z = -9 \\ x + 10y + 6z = -13 \\ -5x + y + 10z = 14 \end{cases}$$

$$12.3 \quad \begin{cases} 5x + 4y + 3z = 7 \\ x + y + 2z = 4 \\ 3x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$12.4 \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

13. Resolver los siguientes problemas:

13.1 Las funciones de oferta y demanda en Estados Unidos, 1922/33, del buey (A), cerdo (B), cordero (C), fueron respectivamente:

$$\text{A} \quad \begin{cases} Q_d^A = 63,3 - 1,9 P_A + 6,2 P_B + 0,5 P_C \\ Q_o^A = 60 \end{cases}$$

B $Q_d^B = 71 + 0,4 P_A - 1,2 P_B - 0,1 P_C$

$Q_o^B = 70$

C $Q_d^C = 10,3 + 0,1 P_A + 0,1 P_B - 0,3 P_C$

$Q_o^C = 7$

determinar los precios de equilibrio y las cantidades vendidas en el mercado.

13.2 Supongamos que una unidad del bien A sea producida por la combinación de 5 unidades de tierra y de 6 unidades de trabajo y que una unidad del bien B sea producida por la combinación de 10 unidades de tierra y de una unidad de trabajo. Tenemos

$P_A = 23$ y $P_B = 13$

¿Cuál es el salario S y el ingreso I?

13.3 3 unidades de tierra, 2 de trabajo 10 de capital, son combinadas para producir una unidad del bien A., 1 unidad de tierra, 3 de trabajo, 5 de capital, p/ el bien B, 3 de capital, 2 de tierra, 2 de trabajo para el bien C.

Los precios son $P_A = 62$

$P_B = 36$

$P_C = 25$

determinar el ingreso I, el salario S y el interés i.

13.4 5 unidades de capital, 2 hectáreas de tierra 2 semanas de trabajo, son combinados para producir el bien A
1 hectárea de tierra, 1 semana de trabajo, 1 unidad de capital para el bien B.

2 hectáreas de tierra, 5 semanas de trabajo, 10 unidades de capital para el bien C.

$P_A = 78$ $P_B = 23$ $P_C = 135$

determinar: I, S, i.

14. Realizar las operaciones indicadas, simplificando los resultados:

14.1.1 $x^{n+1} \cdot x^2$

14.1.2 $x^7 \cdot y^4 \cdot z^n \cdot x^5 \cdot y^3 \cdot z^3$

14.2.1 $(x^{n+1})^2 + x^2 [x^n - (x^2)^n]$

/14.2.2

14.2.2 $(3)^4 + (-4)^3 + (-5)^2 + 2^3$

14.3.1 $(xy)^2$

14.3.2 $\sqrt{(6mnp)^2}^5$

14.4.1 $\left(\frac{x}{y}\right)^3$

14.4.2 $\left(\frac{3ab^3}{bcd}\right)^3$

14.5 $x^4 + 10x^2 + 35x + 24$ para $x = -1, x = -2, x = -3, x = -4$

14.6.1 $(x + y)^2$

14.6.2 $(7a + \frac{2}{3}b)^2$

14.6.3 $(x - y)^2$

14.6.4 $(-a + b)^2$

14.6.5 $(-m - n)^2$

14.6.6 $(2x - \frac{19}{3}y)^2$

14.6.7 $(x + y + z)^2$

14.6.8 $(2x + 2y + 8)^2$

14.6.9 $(a + b)^3$

14.6.10 $(a - b)^3$

14.6.11 $(a + 1)^6$

15. Calcular el valor de x en las siguientes expresiones:

15.1.1 $x^2 = 81$

15.1.2 $x^n = c$ (para n: impar, par y nulo)

15.2.1 $\sqrt{x} = 7$

15.2.2 $x^{\frac{1}{2}} = 11$

15.2.3 $x^{\frac{1}{3}} = 5$

16. Realizar las operaciones indicadas, simplificando los resultados:

16.1 $\sqrt{4a}$

16.2 $\sqrt{9a^2b^8}$

16.3 $(36x^2y^4)^{\frac{1}{2}}$

16.4 $\sqrt[3]{-27a^9x^3y^9}$

16.5 $\sqrt{\frac{16b^4c^8x^2}{32b^8c}}$

16.6.1 $\sqrt{x^2 + x + 0,25}$

/16.6.2

- 16.6.2 $\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$
- 16.7.1 $\sqrt{12}, \sqrt{18}, \sqrt{27}, \sqrt{20}, \sqrt{75}, \sqrt{32}, \sqrt{50}, \sqrt{72}$
- 16.7.2 $\sqrt{x} \sqrt{y}$
- 16.8.1 $\sqrt{3a} \sqrt{12a}$
- 16.8.2 $\sqrt[3]{12x} \sqrt[3]{18x^2}$
- 16.9.1 $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \sqrt{5-2\sqrt{6}}$
- 16.9.2 $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2} \sqrt[3]{\sqrt{12}+2}$
- 16.10.1 $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2$
- 16.10.2 $(\sqrt{6} + \sqrt{12})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
- 16.11 $\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$
- 16.12.1 $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$
- 16.12.2 $(64\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$
- 16.12.3 $\sqrt{\frac{a}{4\sqrt{\frac{1}{a^7}}}}$

17. Resolver las siguientes ecuaciones:

- 17.1 $\sqrt{x-5} = 2$
- 17.2 $\sqrt{2x+11} = 9$
- 17.3 $3\sqrt{15-x+15} = 17$
- 17.4 $\sqrt{(x-5)(4x+4)} + 6 = 2x$

18. Resolver las siguientes ecuaciones:

- 18.1 $ax^2 + bx + c = 0$
- 18.2 $4x^2 + 5x - 6 = 0$
- 18.3 $x^2 + 2x + 1 = 0$
- 18.4 $x^2 + 2x - 5 = 0$
- 18.5 $\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{1}{2} = 0$
- 18.6 $4ax^2 - a^2b^3 = 2ab^2x - 2a^2bx$
- 18.7 $a(x+a)^2 = b(x+b)^2$
- 18.8 $(5x-2)(5x+2) - (3x+4)^2 = (6x-1)^2 - 53$

$$18.9 \quad \frac{x+2}{x-2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{40}{21}$$

$$18.10 \quad 4 + 3\sqrt{5x^2 - 7x + 12} = 7x$$

$$18.11 \quad \sqrt{4x-3} - \sqrt{x-6} = 4$$

$$18.12 \quad \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-4} = \sqrt{2x-7}$$

$$18.13 \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

19. Resolver los siguientes problemas:

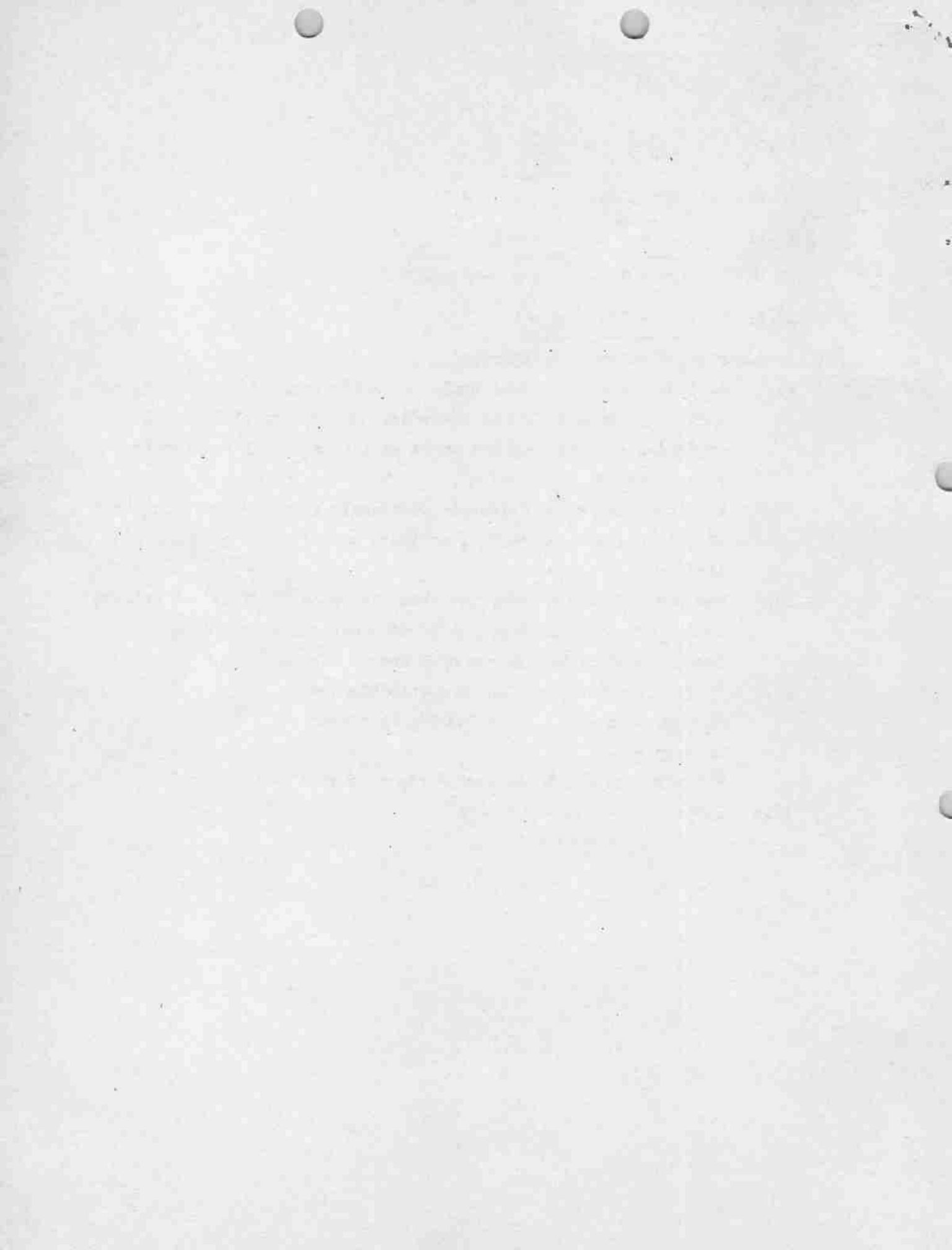
1. El lado mayor de un rectángulo es 7m más largo y el menor 7m más corto que los lados de un cuadrado. Encontrar el lado del cuadrado, sabiendo que las sumas de las áreas del rectángulo y del cuadrado es, 4.951 m^2 .

19.2 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1.250m. Encontrar la longitud de los catetos, sabiendo que el mayor es 382 m más largo que el menor.

19.3 Dos obreros pueden hacer una obra juntos en 18 días; el primero trabajando solo, lo haría en 27 días más que el segundo. Encontrar el tiempo en que cada obrero hace la obra.

19.4 La función de demanda de un cierto bien es $Q_d = 20 - 3p - p^2$ y la función de oferta $Q_o = 5p - 1$.
Encontrar el precio de equilibrio y la cantidad vendida.

19.5 Idem: $Q_d = 250 - 10p - 2p^2$
 $Q_o = 5p + 6p^2$



INSTITUTO LATINOAMERICANO DE
PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL
Santiago, 1 Marzo 1966

PARTE II
GEOMETRIA ANALITICA *

* Programa de Capacitación. Solicitado para el curso auxiliar de Matemáticas.
Profesores: Arturo Núñez del Prado y José Serra. Ayudantes:
Jorge Carvajal, Sergio Chaigneau y Max Vildósola.



PARTE II

GEOMETRIA ANALITICA

1. Funciones

1.1 Siendo $f(x) = 3 - 2x + x^2$ encontrar

$f(0)$, $f(-2)$, $f(5)$, $f(-1)$, $f(x+1)$, $f(2a)$

1.2 Siendo $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ encontrar

$f(0)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{3}{5}\right)$, $f(a-1)$

1.3 Siendo $f(x) = a + bx$ a, b constantes arbitrarias, encontrar

$f(0)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{a}{b}\right)$, $f\left(-\frac{a}{b}\right)$

1.4 Siendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c constantes arbitrarias
encontrar $f(0)$, $f(-1)$, $f(a-b)$, $f(b-a)$

1.5 Siendo $f(x) = 5x$ encontrar $f(a)$, $f(b)$, $f(a-b)$, $f(a+b)$

y demostrar que $f(a+b) = f(a) + f(b)$

$f(a-b) = f(a) - f(b)$

1.6 Siendo $f(x) = 2^x$, encontrar $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$

y demostrar que $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2}f(x)$

2. Ejes de coordenadas; representación de puntos; distancias entre puntos

2.1 Representar los diferentes puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.

$P_1 \equiv (1, 6)$; $P_2 \equiv (-1, 6)$; $P_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, 2\right)$; $P_4 \equiv (0, -2)$

2.2 Encontrar la distancia entre dos puntos

$P_1 \equiv (x_1, y_1)$; $P_2 \equiv (x_2, y_2)$

2.3 Medir la distancia entre los puntos:

a) $P_1 \equiv (0, 2)$ $P_2 \equiv (4, -1)$

b) $P_1 \equiv (1, 1)$ $P_2 \equiv (5, 5)$

c) $P_1 \equiv (-7, -5)$ $P_2 \equiv (2, -3)$

2.4 Mostrar que los puntos

a) $P_1 \equiv (1, 1)$ $P_2 \equiv (-3, -1)$ $P_3 \equiv (-4, 1)$

formar un triángulo rectángulo

b) $P_1 \equiv (2, -1)$ $P_2 \equiv (1, 2)$ $P_3 \equiv (-1, 0)$

formar un triángulo isósceles

c) $P_1 \equiv (\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ $P_2 \equiv (1, 2)$ $P_3 \equiv (-1, 0)$

formar un triángulo equilátero

3. Representación gráfica de una función lineal

3.1 Cuáles son las formas posibles para representar una recta?

3.2 El coeficiente angular de una recta depende de las posiciones de dos puntos P_1 y P_2 escogidos para expresar la recta? Por qué?

3.3 Escribir las ecuaciones de las rectas representadas por los puntos:

a) $P_1 \equiv (-1, 4)$; $P_2 \equiv (1, 0)$

b) $P_1 \equiv (-1, -2)$; $P_2 \equiv (-5, -2)$

c) $P_1 \equiv (1, 4)$; $P_2 \equiv (2, 3)$

3.4 Dada una recta, a través de su coeficiente angular $n = \frac{2}{3}$

y de un punto $P = (a, b)$. Expresarla como función explícita y como función implícita. Representarla gráficamente para

$a = \frac{1}{2}$ $b = -7$

/3.5 Encontrar

- 3.5 Encontrar el coeficiente angular de la recta $Y = 5x - 10$ y representarla gráficamente.
- 3.6 Encontrar el coeficiente angular de la recta $5x - 3y * 2 = 0$ y representarla gráficamente.
- 3.7 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P \equiv (x_p, y_p)$ y es perpendicular a la recta $Y = A_x + B$
- 3.8 Encontrar la ecuación y representar la recta que pasa por $(1,1)$ y es perpendicular a $Y = x + 2$
- 3.9 Encontrar la ecuación de la recta que por $P = (2,3)$ y es paralela a la recta $Y = x + 2$

3.10 Transformaciones:

3.10.1 Dada la ecuación de la recta: $Y = ax + b$ donde $X = \text{años}$ $Y = \text{producción anual}$. Transfórmela en una ecuación en que se relacionen meses con producción mensual.

3.10.2 Dada la recta $Y = ax + b$, donde X representa años e Y producción promedio mensual de acero. Transfórmela de manera que se relacionen meses con producción mensual de acero.

4. Resolución gráfica de sistemas de 1^{er} grado

4.1. Resolver gráficamente

$$4.1.1. \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

$$4.1.2. \begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ 10x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$4.1.3. \begin{cases} -3x - 5y = 6 \\ x + 10y = 18 \end{cases}$$

/4.2. Resolver

4.2 Resolver gráficamente:

4.2.1. Función de demanda de un bien A

$$Q_D^A = 20 - 2p$$

Función de oferta

$$Q_O^A = -4 + 3p$$

Encontrar el precio de equilibrio y la cantidad vendida.

4.2.2. Función de demanda de un bien A

$$Q_D^A = 1 - p$$

Función de oferta

$$Q_O^A = p$$

Encontrar el precio de equilibrio y la cantidad vendida.

5. Representación gráfica de la función "trinomio de segundo grado"

5.1. Representar gráficamente la función

$$Y = 2x^2 + x - 1$$

5.2. Representar gráficamente la función:

$$Y^2 = 2X^2 - X$$

5.3. Representar gráficamente:

5.3.1. $y = x^2$

5.3.2. $y = 2x - 1$

Qué representan los puntos de intersección de la recta con la curva?

5.4. $Q_D^A = 2 - p^2$

$$Q_O^A = p$$

Resolver gráficamente, encontrando el precio de equilibrio y la cantidad vendida.

/Función hipérbolica.

6. Función hiperbólica

Representar gráficamente la función

5.1.1. $xy = 10$

5.1.2. $x = \frac{1}{4y}$

5.1.3 $y = \frac{4}{x-y}$

7. Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} \right)^2}$$

$e = 2,718$

$\pi = 3,1416$

$\bar{x} = 5$

$\sigma = 2$



PRELIMINAR
INSTITUTO LATINOAMERICANO DE
PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL
Santiago, marzo de 1966

PARTE III

LOGARITMOS *

* Programa de Capacitación. Profesores: Arturo Núñez del Prado y José Serra. Ayudantes: Jorge Carvajal, Sergio Chaigneau y Max Vildósola.

PARTE III

LOGARITMOS

1. Definición, propiedades generales

1.1. Cuál es el valor de x si:

$$a^x = b$$

$$a > 1$$

$$b \neq 0$$

1.2. Cuál es el valor de x, si:

1.2.1. $2^x = 8$

1.2.2. $3^x = 243$

1.2.3. $5^x = 0,04$

1.3. Probar que:

1.3.1. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

1.3.2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

1.3.3. $\log_a b^n = n \log_a b$

1.3.4. $\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}$

1.4. Desarrollar:

1.4.1. $\log (abc)$

1.4.2. $\log \frac{ab}{c}$

1.4.3. $\log \frac{a^3}{\sqrt{c}}$

1.4.4. $\log \frac{2ab^5}{3c \sqrt{d^3}}$

1.4.5. $\log \frac{7a \sqrt{b}}{3c^2 y^3}$

1.4.6. $\log \sqrt{\frac{5a^2 c}{a^2 - b^2}}$

- 1.5. Conocidos $\log 2 \doteq 0,3010$
 $\log 3 \doteq 0,4770$

calcular x en:

1.5.1. $\log_2 x = 3$

1.5.2. $x = \log 6$

1.5.3. $x = \log 9 + \log 3$

1.5.4. $x = \frac{\sqrt[4]{5} \cdot 2^{1/10}}{18^{1/3} \cdot \sqrt{2}}$

1.5.5. $x = \sqrt[4]{729 \sqrt[3]{9^{-1} \cdot 27^{-4/3}}}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones, teniéndose exclusivamente
 $\log 2 = 0,3010$ $\log 3 = 0,4770$ $\log 7 = 0,8450$

2.1. $3^{x-2} = 5$

2.2. $21^x = 2^{2x+1} \cdot 5x$

2.3. $2^x + 4 = 6^y$
 $3^x = 3 \cdot 2^{y+1}$ }

3. Gráficos

3.1. Representar gráficamente:

3.1.1. $y = \sqrt{x}$

3.1.2. $y = \sqrt{21 - 4x - x^2}$

3.1.3. $y = 2^x$

3.1.4. $y = \log x$

3.2. Representar gráficamente las funciones

3.1.1. 3.1.2. 3.1.3. en escala logarítmica.

/4. Resolver

4. Resolver los siguientes problemas con la ayuda de una tabla de logs o de una regla de cálculo.

4.1. Sea N = número de individuos de una cierta población que Tienen un ingreso $\geq x$
A y α constantes y

$$N = \frac{A}{x^\alpha} \quad (\text{fórmula de Pareto}).$$

4.1.1. Para una comunidad en que

$$A = 2 \cdot 10^9 \\ = 1,5$$

- a) cuántas personas tienen un ingreso de 10^5 NF o más?
- b) Cuál es el más bajo ingreso entre las 100 personas más ricas de la comunidad?

4.1.2. para $A = 1,236 \cdot 10^9$

$$x = 1,1$$

- a) encontrar el número de individuos que tienen un ingreso ≥ 125200 NF
- b) encontrar el más bajo ingreso entre las 124 personas más ricas.
- c) hacer un gráfico para $\log N \times \log x$

4.2. Para un bien M, con elasticidad de demanda constante, la demanda es dada por la fórmula:

$$Q_D = \frac{A}{p^B} \quad A, B \text{ constantes} *$$

$$\text{para } A = 25 \\ B = 3$$

- a) Cuál es Q_D si $p = 0,5$
- b) Cuál es Q si $Q_D = 65$

* Nota: cuando $B = 1$ $p Q_D = A$; curva hiperbólica equilátera.

4.3. Función de demanda del maíz en los EUA 1915/29

$$Q_D = \frac{172,8}{p^{0,49}}$$

Obtener Q_D para $p=30$, $p=42$, $p=75$, $p=81$

Obtener p para $Q_D=20$, $Q_D=35$, $Q_D=41$, $Q_D=50$

4.4. Dadas las siguientes funciones:

$$Q_D = 75,6 p^{-1,02}$$

$$Q_D = 6,43 p^{0,74}$$

- a) Calcular el precio de equilibrio y la cantidad vendida.
- b) Resolver gráficamente con el gráfico log x log y

PRELIMINAR
INSTITUTO LATINOAMERICANO DE
PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL
Santiago, marzo de 1966

PARTE IV

SUMATORIAS, SERIES, PROGRESIONES *

* Programa de Capacitación. Profesores: Arturo Núñez del Prado y José Serra. Ayudantes: Jorge Carvajal, Sergio Chaigneau y Max Vildósola.

REPORT
ON THE PROGRESS OF THE
WORK DURING THE YEAR 1900

BY
THE SECRETARY OF THE
SOCIETY OF AMERICAN ARCHITECTS

PARTE IV

SUMATORIAS, SERIES, PROGRESIONES

1. Expresar simbólicamente la suma:

1.1 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p$

1.2 $x_1^0 + x_2^1 + x_3^2 + \dots + x_n^{n-1}$

1.3 $a_1 + b_0 + a_2 + b_1 + a_3 + b_2 + a_4 + b_3$

2. Desarrollar y reducir a la forma más simplificada.

2.1
$$\sum_{i=1}^m a_i \frac{x_i}{x_i}$$

2.2
$$\sum_{i=4}^4 (2 + 3i)$$

2.3
$$\sum_{i=6}^6 \left(\frac{x_i - 1}{i + 2} \right)$$

2.4
$$x_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} Y_j$$

3.	Dados	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
	x_i	0	2	4	-3	1
	y_i	-2	0	6	10	2

Obtener:

3.1 $\sum x_i$

3.2 $\sum y_i$

$$3.3 \sum x_i y_i$$

$$3.4 \sum x_i^2$$

$$3.5 \sum y_i^2$$

$$3.6 \sum \left(x_i - \frac{\sum x_i}{5} \right)^2$$

$$3.7 \sum (x_i + y_i)^2$$

$$3.8 \sum (x_i + y_i) (x_i - y_i)$$

4. Desarrollar y reducir a la forma más simplificada

$$4.1. \sum_{i=1}^3 \sqrt{i^2 - 4i + 4}$$

$$4.2. \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 ij$$

$$4.3. \sum_{j=1}^5 \sum_{i=0}^3 (i + 4) (5 - j)$$

$$4.4. \sum_{i=1}^n [a + (i - 1) r]$$

$$4.5. \sum_{i=1}^n [a r^{i-1}]$$

$$4.6. \sum_{j=1}^n j$$

$$4.7. \sum_{j=1}^{2n+1} j$$

5. Desarrollar los términos de la expresión:

$$5.1 \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n y_i}$$

y señalar a qué estadígrafo de tendencia central corresponde.

5.2 Resumir los siguientes términos en productoria:

$$5.2.1. \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \frac{x_4}{x_5} \cdot \frac{x_5}{x_6}$$

$$5.2.2. \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{x_4}{x_3} \cdot \frac{x_5}{x_4}$$

$$5.2.3. (2) (1 + e) (1 + e^2) (1 + e^3) (1 + e^4)$$

6. Resolver los siguientes problemas

6.1. La población de un país en el año 1 es P_1 . Al final del año n es P_n . A qué tasa crece esa población anualmente?

6.2. Si el ingreso de un país es 1000 el 1° de enero de 1951, calcular la tasa de crecimiento anual para que el 31 de diciembre de 1960 sea de 2000.

6.3. Una máquina evaluada en E° 1875 se desvaloriza anualmente 10%. Determinar en cuantos años su valor se habrá reducido a la 3^a parte.

6.4. El consumo de un país el año 1954 es E° 3000 y en el año 1964 E° 5500. A qué tasa creció entre ambos períodos?

6.5. Dos capitales de los cuales el primero es E° 500 mayor que el segundo, se colocan al 3,5 y al 5 % respectivamente. Indicar el monto de cada uno de ellos sabiendo que al cabo de 20 años dan origen al mismo capital final.

6.6. El ingreso per cápita de un país es equivalente a U\$ 500. Si en 1920 este era solo de U\$ 115 y la población creció con una tasa de 2,5 % encontrar la tasa de crecimiento del ingreso.

/6.7.

- 6.7. Un país A parte de un ingreso per cápita de U\$ 1000 que crece al 2 % acumulativo anual. Otro país B, parte de un ingreso per cápita de U\$ 350. A qué tasa debe crecer el ingreso por persona de B para que en 10 años tengan ambos países el mismo ingreso per cápita?
- 6.8. A 10 años plazo, cuánto crece el ingreso total si la población crece al 2 % y el ingreso per cápita al 1 %? Cuánto crece el ingreso total en las mismas condiciones en 20 años?
- 6.9. En cuántos años duplicará la población de América Latina? En cuántos años cuadruplicará?
(tasa de crecimiento anual media: 2,6 %).

PRELIMINAR
INSTITUTO LATINOAMERICANO DE
PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL
Santiago, abril de 1966

PARTE V

CALCULO INFINITESIMAL.

DERIVADAS *

- * Programa de Capacitación. Solicitado para el curso auxiliar de Matemáticas. Profesores: Arturo Núñez del Prado y José Serra. Ayudantes: Jorge Carvajal, Sergio Chaigneau y Max Vildósola.



PARTE V

CALCULO INFINITESIMAL DERIVADAS

1. Derivar de acuerdo con la definición:

1.1 $y = x^2$

1.2 $y = \frac{1}{x-2}$

2. Derivar:

2.1 $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

2.2 $y = x^3 - 2x + 7$

2.3 $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

2.4 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

2.5 $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$

2.6 $y = x \sqrt{x^2 + 1}$

2.7 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. Si $xy = a$, mostrar que $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$

4. Calcular la derivada segunda de:

4.1 $\frac{1}{\sqrt{x}}$

4.2 $\sqrt{1 - x^2}$

5. Derivar:

5.1 $y = x^n$

5.2 $y = x^{1/n}$

5.3 $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

$$5.4 \quad \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$$

$$5.5 \quad x = y \sqrt{1-y^2}$$

6. Encontrar y' en :

$$6.1 \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$6.2 \quad x^2y - xy^2 + y^2 = 0$$

$$6.3 \quad x^2 - xy + y^2 = 3$$

7. 7.1 Encontrar la ecuación de la tangente a la curva
 $x^2 + xy + 2y^2 = 28$ en el punto $P \equiv (2, 3)$

7.2 Encontrar los puntos de contacto de la tangente horizontal y de la tangente vertical a la curva
 $x^2 - xy + y^2 = 27$

7.3 Encontrar las ecuaciones de la tangente a la curva

$$y = x^3 - 2x^2 + 4 \text{ en el punto } P \equiv (2, 4)$$

8.

8.1 Supongamos que la función de costo total de un bien $C = f(Q)$ (Q cantidad producida) sea

$$C = 10 + 2Q + Q^2 + 4Q^3$$

Obtener la función del costo marginal, sabiendo que está dado por $C \text{ marg.} = \frac{dc}{dQ}$

8.2 Iden para $c = mQ + nQ^2$

9.

9.1 El ingreso total proveniente de la venta de un determinado bien es $I = pQ$ siendo p el precio de equilibrio en el mercado y Q la cantidad vendida. El ingreso marginal es la relación

/entre el

entre el aumento del ingreso total y el aumento del número de bienes vendidos, o sea, en el límite:

$$I \text{ marg} = \frac{dI}{dq}$$

Para la función de demanda

$$p = 10 - 3Q$$

- a) Determinar la función del ingreso marginal.
- b) Hacer los gráficos de la curva de demanda, de la función del ingreso total y de la función del ingreso marginal.

9.2 Iden para $p = 16 - \frac{Q^2}{2}$

9.3 Iden para $p = \frac{10}{Q}$

10. Examinar

10.1 $y = 3x^4 - 2x^2$

10.2 $y = 5 - 2x - x^2$

en relación a los máximos y mínimos.

11.

11.1 Dividir el número 120 en dos partes tales que el producto P de una, por el cuadrado de la otra, sea máximo.

11.2 Una hoja de papel para un cartel tiene $2m^2$ de área. Los márgenes en el tope y en la base son de 25cm y en los lados 15 cm. Cuáles son las dimensiones de la hoja, si se sabe que el área impresa es máxima?

12. $I = pQ$ es el ingreso proveniente de la venta, y $C = MQ$ el costo total de producción de un determinado bien.

/p es el precio

p es el precio de equilibrio en el mercado, Q la cantidad producida y vendida, M el costo medio por unidad del producto.

La utilidad es: $\Pi = I - C$

12.1 Para la función de demanda

$$p = 10 - 3Q$$

y la función del costo medio

$$M = Q$$

obtener:

- a) la función costo marginal
- b) la función ingreso marginal
- c) a , p y M para que el lucro sea máximo

12.2 Iden para $p = 10 - 5Q$

$$M = 3$$

13. Encontrar las ecuaciones normales por el método de las derivadas parciales, para las siguientes funciones:

13.1 $Y = aX + b$

13.2 $Y = a \log X + b$

13.3 $\log Y = a \log X + \log b$

13.4 $\log Y = X \log a + \log b$