CURSO DE PLANIFICACION REGIONAL DEL DESARROLLO   Documento C/39

Organizado por el Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social, con la colaboración de la Comisión Económica para América Latina y el financiamiento del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo

RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO SUGERIDO POR P. SAMUELSON PARA DETERMINAR LA FUNCION DE PRODUCCION SUBSTITUTA*

(notas de clase)

Carlos Legna

* El presente documento, que se reproduce para uso exclusivo de los participantes del Curso de Planificación Regional del Desarrollo, ha sido especialmente preparado por el autor, para la asignatura Teorías del desarrollo regional

76-7-1462

I. LA FUNCION DE PRODUCCION SUBSTITUTA[1]

a) **Modelo de capitales heterogéneos del tipo de la programación lineal**

Hipótesis

Samuelson comienza analizando el caso de un modelo en el cual las hipôtesis son las siguientes:

a) Existe una amplia gama de bienes de capital;

b) cada bien de capital se complementa con un equipo fijo de trabajadores, es decir las isocuantas son del tipo de Leontief;

c) se produce una sola clase de producto final homogéneo;

d) existen rendimientos constantes a escala;

e) los bienes de capital se han depreciado sólo gradualmente con el tiempo y la sociedad no puede convertir un bien en otro sino solo por el procedimiento de negarse a reponer un tipo particular de bien, mientras se produce otro;

f) para conservar el bien de capital homogéneo independientemente de su edad, supone una mortalidad del mismo proporcional al stock (K_{α}). Es decir, igual a:

$$\delta_{\alpha} K_{\alpha}$$

g) existe un solo factor de producción "primario" (o no producible) que será el trabajo o una combinación de trabajo y tierra;

h) existe una situación de competencia perfecta y por tanto, no hay dominación monopólica o monopsónica. Se puede pensar esta economía como un estado completamente planificado que se organiza para alcanzar el óptimo paretiano y utiliza precios

---

1/ Samuelson, Paul: "Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function". Review of Economic Studies, Vol.XXIX

/de Lerner-Lange,

de Lerner-Lange, equivalentes a los precios sombra de las variables duales en un problema de programación lineal

i) si se produce con el capital α este no necesita de β ni de ninguno de los otros. Cada tipo de capital se combina solo con el trabajo o el "factor primario".

No se puede hablar de una función de producción sino de numerosas, de acuerdo al tipo de bien de capital utilizado.

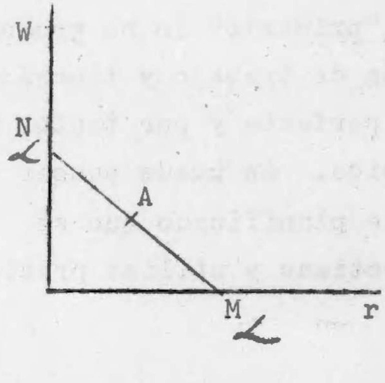
Samuelson precisa que cada bien de capital alfa luce enteramente diferente de otro bieh de capital beta. Así sea uno de ellos un arado; otro, una máquina herramienta o un telar, o un arado mucho más mecanizado. "No hay alquimista capaz de convertir uno de estos bienes de capital en otro".

Por otra parte insiste en que "así como alfa más trabajo pueden producir el producto final se supone que también pueden producir un flujo de nuevas máquinas alfa". A su vez, supone que se necesita la misma proporción de insumos sea que la industria produzca el bien alfa o el bien de consumo. Lo mismo para beta, gamma, etc.

b) <u>La frontera de precios de los factores</u>

En primer lugar, se pregunta cuál sería la frontera de precios de los factores si no hubiera más que un capital físico K_α. En ese caso es una recta como la figura 1.

Figura 1

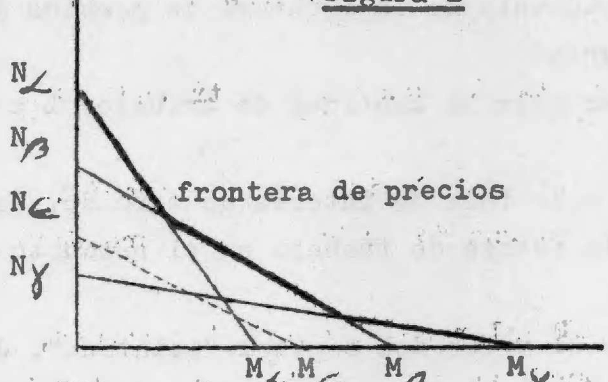


/donde N_α indica

donde N_α indica el máximo salario posible (con r = 0) y M_α la máxima tasa de interés (con w = 0)

Dado que para cada capital K_β, K_γ, etc., se puede determinar la frontera de precios (una recta con pendiente particular) se construye luego la "frontera óptima" del sistema (ver figura 2), la que da el máximo nivel de w y r, la técnica que lo hace posible en cada caso y el "tipo de capital" a utilizar y producir (Obviamente, habrá técnicas como la ϵ que no se utilizarán nunca, pues siempre habrá alguna superior)

Figura 2



Una vez determinada la frontera Samuelson infiere las participaciones relativas del trabajo y el capital en un punto como A de la figura 1, cuando sólo se conocen W y r en dicho punto. Si A está en un punto de la curva en el cual la misma es continua y carente de ángulos se soluciona el problema utilizando la elasticidad de Marchall(E) en el punto. Si el punto A está en un ángulo de la curva habrá una gama limitada de participaciones posibles, acotada por las elasticidades extremas que se dan en dicho ángulo.

c) <u>La función substituta de producción</u>

Lo que busca Samuelson es construir una "seudo-función" global, cuyos "factores" de producción son un bien de capital homogéneo físicamente (una "gelatina de capital homogéneo") y el trabajo, que se comporte

/"como si"

"como si" fuera el modelo de capitales heterogéneos y que permita predecir el funcionamiento del sistema.

Esta seudo función o función substituta produce un solo bien final, que sirve como bien de consumo y de capital. Dicho bien final es además, en cada destino infinitamente substituible en una proporción de uno a uno. La seudo-función es homogénea de primer grado, continua y tiene derivadas parciales que se "comportan bien".

El problema consiste en cómo determinar el stock de capital "substituto" en cada situación de equilibrio, que se comporte como el stock de capital heterogéneo y real. Samuelson propone:

a) calcular la pendiente ~~de~~ la frontera de precios de los factores en cada punto;

b) multiplicar por ella la cantidad de trabajo, L o alternativamente:

i) en base a la tasa de interés de mercado, la participación observada de la fuerza de trabajo en el producto y el valor del producto

ii) ~~calcular el valor~~ del capital "gelatina", J, el que tiene que ser igual al valor de balance de los bienes heterogéneos de capital, evaluado cada uno de ellos a su precio de equilibrio del mercado. Sea J la parte del producto observada, que corresponda a la participación de los factores distintos del trabajo capitalizado a la tasa de interés o ganancia del mercado. Luego

$K = J \equiv P_{\alpha} K_{\alpha} + P_{\beta} K_{\beta} + \ldots$

donde los precios de mercado de equilibrio de los diversos capitales cambian al cambiar w y r a lo largo de la frontera.

/II. ANALISIS

II. ANALISIS CRITICO

a) La frontera de precios de los factores de Samuelson

A continuación se hace un breve análisis crítico basándose en Harcourt[1/]

Este autor parte de una demostración más general de la frontera de precios en un modelo como el de Samuelson.

Sean dos actividades 1 y 2 que producen X_1 y X_2 y cada una de las cuales utiliza como insumo a la otra y trabajo directo. Suponiendo que la mercancía 1 es el numerario se puede escribir:

1. $(1 + r)(x_{11}X_1 + P_2x_{21}X_1) + wl_{01}X_1 = X_1$

2. $(1 + r)(x_{12}X_2 + P_2x_{22}X_2) + wl_{02}X_2 = P_2X_2$

donde x_{ij} = insumo de la mercancía i por unidad de producto j

De 1 y 2 se puede escribir

3. $$w = \frac{(x_{11}X_1x_{22}X_2 - x_{21}X_1x_{12}X_2)(1+r)^2 - (X_2x_{11}X_1 + X_1x_{22}X_2)(1+r) + X_1X_2}{(l_{02}X_2x_{21}X_1 - l_{01}X_1x_{22}X_2)(1+r) + l_{01}X_1X_2}$$

3 muestra que mientras mayor sea 2 menor será r, pero la función puede ser lineal, concava o convexa. Cabe señalar que:

a) Si existen limitaciones para la elección del lapso de gestación de un proceso no está asegurada la monotonía de la relación entre w y r (1);

1/ G.C. Harcourt - "Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital", Journal of Economic Literature, junio de 1969

/b) Aun no

b) Aun cuando no existiendo la limitación anterior la función puede ser cóncava o convexa;[2]

c) En el caso de Samuelson los dos bienes pueden ser tratados, para cada técnica, como un sólo bien, hipótesis que hace lineal a la función. Una vez establecidas las funciones lineales, se puede construir la frontera de precios de los factores de Samuelson, como ya se ha visto.

b) La aproximación de la "frontera" mediante la función subrogada

Como se ha visto, el procedimiento posterior de Samuelson consiste en demostrar que la frontera "real" puede aproximarse por medio de la seudo-función en la cual el capital y el producto están formados por "jalea". Esta función recúerdese, es homogénea de primer grado y los factores reciben como pago (por obra de la competencia) su productividad marginal.

2/ Ver Joan Robinson y Naqvi, K.A.: "The Badly Behaved Production Function", Quart J. Econ. Vol LXXXI, Nº 4, 1967 pp. 579-591
- Brown Murray "Substitution Composition Effects, Capital Intensity Uniqueness and Growth - Ed. Journal
- "Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution" - Rev. Economic Studies
- Hicks, J: "Capital and Growth" - Oxford, Clarendon Press, 1965
- Spaventa, L: "Realism without parables in Capital Theory" - Recherches récentes sur la fonction de Production - centre d'Etudes et de Recherches Universitaires de Namur, 1968

/Teniendo en cuenta

Teniendo en cuenta las características de la función puede establecerse la relación entre J/L (donde J es el capital y producto "Jalea") y los valores de w y r como lo muestran las siguientes figuras:

Figura 3

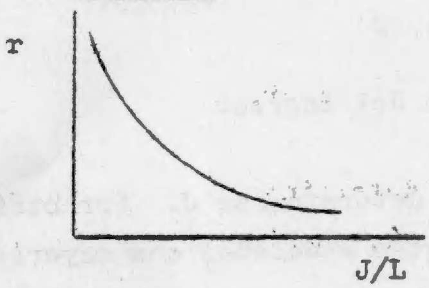
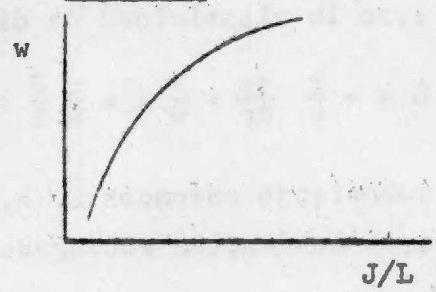
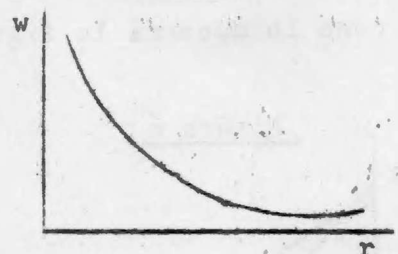


Figura 4



Estos valores corresponden a puntos de la frontera de precios de la forma indicada en la figura 5

Figura 5



A su vez, la elasticidad marshalliana en cada punto de la frontera es igual a la distribución del ingreso. En efecto, se tiene:

4. $y = rk + w$ (donde el precio de la "jalea" es igual a 1)
5. $dy = rdk + kdr + dw$

Teniendo en cuenta que dados los supuestos $r = \frac{dy}{dk}$, dividiendo (5) por dy se obtiene:

6. $1 = 1 + \dfrac{kdr + dw}{dy}$ lo que implica que

7. $k = \dfrac{dw}{dr}$, es decir que k es igual a la pendiente de la frontera de precios de los factores (para una técnica específica)

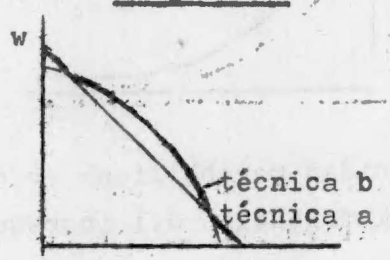
Pero la elasticidad de dicha curva, E, es:

8. $E = -\dfrac{r}{w}\dfrac{dw}{dr} = \dfrac{r}{w}k = \dfrac{r}{w}\dfrac{J}{L}$ = distribución del ingreso

Conociendo entonces E, a, w, L, puede determinarse J. Por otra parte, en la función subrogada menores r están asociados con mayores $\frac{J}{L}$ e $\frac{Y}{L}$

Pero, como ha sido señalado por varios autores, si se deja de lado el supuesto de Samuelson de que la relación entre r y w es una línea recta para cada técnica, puede darse la reversión de técnicas, es decir que un método sea más rentable con dos o más niveles distintos de r (por ejemplo r_1 y r_2) mientras que para valores intermedios entre r_1 y r_2 lo sea otra técnica, como lo muestra la figura siguiente:

Figura 6



(el trazo grueso indica la frontera para las dos técnicas)

Además, como lo señala Harcourt, las elasticidades E sobre la frontera ya no proporcionan la distribución del ingreso. En efecto, se tiene:

/9. y = rk

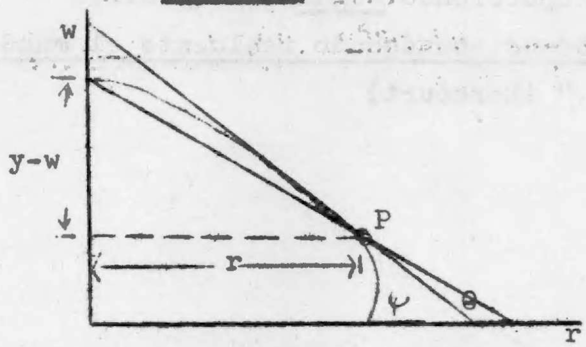
9. $y = rk + w$ y luego

10. $k = \frac{y - w}{r}$

A su vez, se vió que $k = -\frac{dw}{dr}$ pero k no puede ser igual simultáneamente a $-\frac{dw}{dr}$ y a $\frac{y-w}{r}$, salvo que la frontera para cada método sea una recta.

La demostración de esta imposibilidad es la siguiente (ver Harcourt)

Figura 7



Sea el punto P de la figura 7, donde la frontera para una técnica es cóncava respecto al origen. La tangente trigonométrica de θ mide $\frac{(y-w)}{r}$ y la tangente trigonométrica de ψ mide $-\frac{dw}{dr}$ y resulta evidente que ambas serán iguales sólo cuando la frontera es una recta.

Como $k = \frac{y - w}{r}$ es, por definición, siempre verdadera, <u>será entonces</u> $k \neq -\frac{dw}{dr}$ y $r \neq \frac{dy}{dk}$. Entonces <u>el valor de E en P no da la distribución del ingreso</u>.

Como señala Harcourt, cuando $k = -\frac{dw}{dr}$ de manera que cada relación entre w y r (es decir para cada técnica) es una recta, se tiene una medida del capital dentro de cada técnica que es independiente de la distribución del ingreso y de los precios.

/En efecto, dado

En efecto, dado que $dy = rdk + kdr + dw$

Haciendo $k = -\frac{dw}{dr}$

$dy = rdk - dw + dw$ luego

$r = \frac{dy}{dk}$

pero si $k \neq -\frac{dw}{dr}$

será $r \neq \frac{dy}{dk}$

($k = -\frac{dw}{dr}$ = constante o bien J = constante x L). "Pero cada técnica produce la misma mercancía universal, y utiliza esta y trabajo, aunque en diferentes proporciones según las técnicas - si bien no dentro de ellas -, nunca hemos abandonado realmente el mundo del capital maleable y de la jalea..." (Harcourt)