PRELIMINAR

Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y
Social
Santiago, mayo de 1969

EL METODO DE LA RUTA CRITICA*

---

* Programa de Capacitación, Curso Básico de Planificación, Especialidad de Programación Presupuestaria. Apuntes de clase preparados por el profesor Edmundo Meneses.

EL METODO DE LA RUTA CRITICA

La ejecución de proyectos complejos, sean del tipo de construcción de un puente, la instalación de una planta siderúrgica o un proyecto de investigación, requieren de la coordinación y control de una gran cantidad de actividades componentes para lograr los objetivos del mismo en un cierto plazo y a un nivel razonable de costo. Esta labor de coordinación y control se complica sobremanera por el hecho de que las actividades que componen el proyecto deben realizarse de acuerdo a una tecnología determinada la cual impone a las mismas ciertas restricciones: algunas de ellas pueden realizarse simultáneamente, otras están ligadas por relaciones de precedencia por ser unas continuación de las primeras y, aún, otras que siendo independientes requieren, por circunstancias especiales, mantener relaciones de precedencia.

Con vistas a la obtención de instrumentos adecuados para suplir estas necesidades de planeación, coordinación y control, se han desarrollado una serie de técnicas relacionadas con el análisis de trayectorias en redes de actividades entre las cuales las más comunes son CPM (Critical Path Method) y PERT (Proyect Evaluation and Review Technique). Estas técnicas son similares en muchos respectos, ya que el elemento fundamental de ambas es la representación del proyecto en un diagrama de arcos y nudos y además ambos análisis se centran en la duración de las actividades. Sin embargo, PERT estima la duración de cada tarea o actividad sobre la base de que ésta es una magnitud aleatoria cuyo comportamiento se describe mediante una determinada distribución de probabilidad y de allí estima la duración del proyecto en su conjunto; en cambio, CPM establece una relación funcional duración-costo en forma determinística de la cual deriva una diversidad de duraciones para cada operación y la elección de una duración adecuada se hace de modo que el costo total del proyecto sea mínimo.

La aplicación de estas técnicas requiere, en primer lugar, que exista una definición clara de todas las actividades que deben ejecutarse para completar el proyecto; en segundo lugar, que sea posible estimar el tiempo y costo con que pueden realizarse cada una de las actividades; en tercer lugar, que sea posible adaptar la realización de las tareas a situaciones cambiantes; y, por último, una adecuada representación de las relaciones existentes entre todas las actividades del proyecto.

Muchas son las ventajas que pueden derivarse de la correcta aplicación de las técnicas PERT y CPM:

a) Al permitir un conocimiento adecuado respecto a la factibilidad de los proyectos y una comparación de planes y programas alternativos para un mismo proceso o parte de él, estas técnicas ayudan a encontrar y definir objetivos que mejor se adapten a las condiciones existentes y evaluar probabilidades de terminación de proyectos con las limitaciones de presupuesto, tiempo y facilidades de ejecución disponibles. Este mismo hecho permite planear y programar el proyecto con costo mínimo dentro de una duración dada.

b) Porque presentan un panorama general de los factores que intervienen en el proyecto, son un auxiliar poderoso en la planeación. La revisión del anteproyecto en la forma de una red de actividades permite detectar omisiones y errores en la secuencia de actividades, lo cual permite hacer correcciones en la ocasión más adecuada. Similarmente, pueden detectar a tiempo eventuales "cuellos de botella" y corregir esta situación antes de que los mismos se materialicen.

c) Hacen posible la simulación del impacto que tendría una determinada decisión sobre la totalidad de las actividades y, por tanto se puede evaluar la corrección de dicha decisión. Es posible, además, conocer aquellas actividades en cuya duración existe un elemento de incertidumbre por falta de experiencias previas y poder sustituir la evaluación del tiempo correspondiente por una predicción razonable.

d) Permiten definir la ruta crítica del proyecto, o sea, la secuencia de actividades que fijan la duración del proyecto en su conjunto, y determinar las holguras de tiempo de las otras actividades, es decir, los márgenes de tiempo de que éstas disponen para prolongarse o aplazar su inicio sin atrasar la terminación del proyecto. Esto es muy importante en el control de la ejecución, ya que mediante análisis periódicos del progreso del trabajo quedan de manifiesto aquellas actividades que se encuentran en peligro de no completarse a tiempo e individualizan los puntos que hay que reforzar para contrarestar posibles demoras y el costo que ello produce. Por otra parte, el análisis de las holguras de las actividades no críticas proporcionan una información muy útil para la reasignación de recursos, lo cual puede conducir a una reducción del costo y a un aumento de la eficiencia del trabajo.

e) Las características de construcción de una red permiten elaborar redes particulares para cada nivel jerárquico de dirección de un proyecto desde la dirección general hasta el nivel de supervisión directa de trabajadores. Las interrelaciones entre las redes correspondientes a los distintos niveles señalan automáticamente las áreas de responsabilidades y las necesidades de comunicación. En este sentido, estas técnicas facilitan la organización.

f) Al determinar la secuencia total de los trabajos a realizar, aquéllos que deben realizarse primero, la cantidad de los mismos que deberán realizarse en cada momento durante le ejecución del proyecto, es posible programar en forma adecuada los acopios de materiales para los mismos, de tal manera que se garantice que en cada momento se dispondrá de estos materiales y así eliminar posibilidades de demoras por un inadecuado suministro de material.

Pese a todo lo expresado en líneas anteriores, hay que decir que estas técnicas constituyen un auxiliar en la dirección de un proyecto y de ninguna manera pueden sustituir al director. Las técnicas aclaran situaciones, señalan actividades críticas, evalúan holguras, marcan posibles cuellos de botella, permiten establecer áreas de responsabilidades, pero en definitiva es el director quien debe tomar decisiones en cada caso.

Los orígenes históricos de estas técnicas se remontan al año 1958 cuando la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina de los Estados Unidos conjuntamente con la firma de consultores Booz, Allen y Hamilton, desarrollaron el sistema PERT con el objeto de controlar y cuantificar el progreso del programa del proyectil dirigido Polaris.

Las primeras publicaciones aparecidas respecto a la materia fueron hechas por W. Fazar a principios de 1959. En 1959, Raoul J. Freeman había publicado un artículo exponiendo un punto de vista muy próximo al sistema PERT. La versión original de PERT fue publicada en septiembre de 1959 y en ella se describe con cierto detalle la aplicación a componentes específicos del cohete Polaris, los diagramas de bloques para la programación de PERT en la computadora NORC que la Marina tiene instalada en Virginia, y se da el procedimiento para la estimación de probabilidades de completar a tiempo las diversas etapas del proyecto.

CPM es el resultado de los esfuerzos que la compañía Dupont de Nemours inició en 1957 para mejorar los métodos existentes de planeación y de asignación de trabajo en un proyecto determinado. El trabajo fue desarrollado fundamentalmente por J.E. Kelley y M.R. Walker de la firma Mauchly Associated, Inc. de Pennsylvania, quienes publicaron una introducción en 1959. Kelley publicó en 1961 la base matemática de CPM.

Antes de que se lograsen estos avances en materia de análisis de actividades en proyectos complejos, los aspectos cronológicos y de recursos que las mismas planteaban se analizaban con la ayuda de diagramas de barras de Gantt. La planeación y programación de tareas complejas en base a los diagramas citados adolecían de las desventajas siguientes:

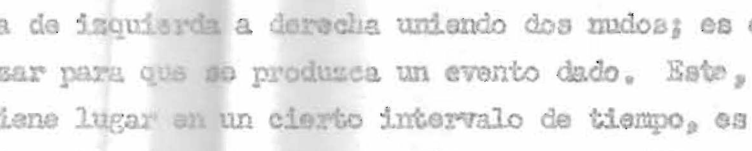
1. Cada una de las actividades del proyecto se presenta mediante barras horizontales que se extienden a lo largo de un eje de tiempo, las cuales muestran su situación y extensión dentro de determinados lapsos. Sin embargo, allí no se reconocen las dependencias y relaciones entre los diferentes procesos de trabajo en circunstancias que en la ejecución de un proyecto tienen lugar, paralela y sucesivamente, diversas tareas que deben ser coordinadas correctamente para lograr un uso óptimo del tiempo y los recursos disponibles.
2. La forma de representación con ayuda de los diagramas de Gantt resultan muy poco flexibles si se toma en cuenta las posibles modificaciones que emergen durante la planificación y el control del proyecto.

3. Los efectos de las modificaciones sólo son difíciles de registrar en su dimensión en el resultado total del trabajo,puesto que no es evidente la dependencia recíproca de los distintos procesos de trabajo. Estos errores dificultan tanto la planificación como el control de la ejecución de un proyecto.

La red de eventos y actividades

La base de los métodos PERT y CPM es la red de eventos y actividades, la cual constituye una representación gráfica de las relaciones existentes entre los hechos y tareas que son necesarios para la ejecución de un proyecto determinado.

En su forma gráfica, la red está compuesta por dos tipos de elementos esenciales: el nudo, simbolizando un determinado evento, y el arco, simbolizando una cierta actividad. El primero, representado generalmente por una pequeña circunferencia, es un instante en el tiempo y puede señalar el inicio o terminación de una tarea a realizar. El segundo, representado por una flecha de izquierda a derecha uniendo dos nudos; es el trabajo que hay que realizar para que se produzca un evento dado. Este, al contrario del evento, tiene lugar en un cierto intervalo de tiempo, es decir, tiene una duración determinada. A este respecto, es necesario señalar que dicha representación de la actividad no tiene un sentido vectorial, es decir, su longitud o forma no está relacionada con la cantidad de tiempo que la realización de la misma consume.



La construcción de una red, en sus aspectos geométricos, debe obedecer ciertas reglas:

1. A un nudo pueden llegar varios arcos y pueden salir del mismo otros tantos arcos.

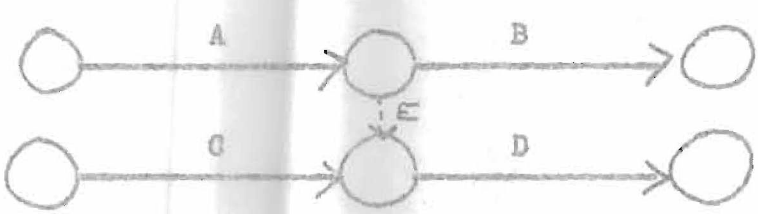
2. Cada actividad debe tener un evento inicial y un evento final, sin excepción de ninguna clase.

3. Cada evento debe tener una actividad precedente y una actividad sucesora, con la excepción del primer evento de la red (origen), el cual no tiene actividades precedentes, y el evento final de la red, el que no tiene actividades sucesoras.

4. Los eventos deben ser enumerados para que sirvan para identificar las diferentes actividades.

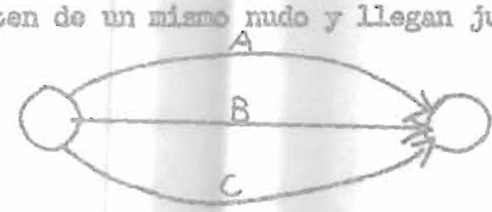
De esta manera, a la actividad cuyo evento inicial tiene el número i y cuyo evento final tiene el número J le llamaremos la actividad (i,j). Generalmente los números de los nudos siguen la sucesión de los números naturales y son de tal naturaleza que se cumple siempre la desigualdad $i<j$.

5. Se pueden introducir actividades artificiales cuando sea necesario para mantener la corrección lógica de la red. Pondremos el caso en que la actividad B debe comenzar cuando se haya terminado la actividad A, mientras que el inicio de la actividad D depende tanto de la terminación de la actividad A como de la actividad C. Tal relación se representará de la siguiente manera:

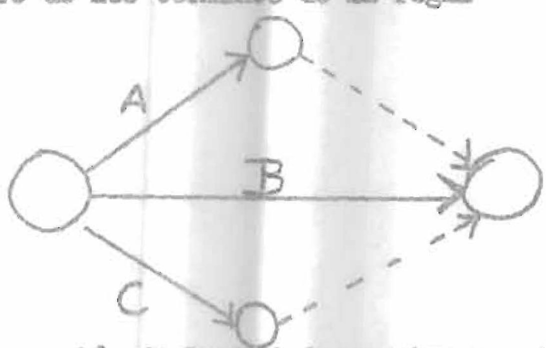


El trabajo E se llama "ficticio", de liga, o de enlace; no tiene duración ni costo y, en realidad, dicha actividad no existe sino que su único papel consiste en mantener la corrección de la lógica de la red. Estas actividades ficticias se dibujan con línea discontinua.

6. También pueden introducirse actividades ficticias cuando dos o más actividades parten de un mismo nudo y llegan juntas a otro nudo.



La representación de la figura contraviene una regla que establece que entre dos eventos sucesivos sólo puede existir una actividad; por lo tanto, mediante la introducción de las actividades de liga, podemos encuadrarnos dentro de los términos de la regla



La preparación de la red de eventos y actividades es la tarea principal de los métodos PERT y CPM. Se ha estimado que alrededor de 90 por ciento del esfuerzo dedicado a poner en práctica tales técnicas son consumidos en la construcción de la red. Antes de comenzar el trazado de la red, hay que definir claramente los objetivos que se persiguen con la ejecución del proyecto, y de allí se procede a hacer una lista con las actividades que será necesario realizar para conseguir el objetivo planteado. Una vez definida la meta y las actividades para llegar a ella se hace la ordenación de las mismas respecto al lugar que ocupa dentro del proyecto y sus relaciones con las demás actividades. Para ello, se puede proceder de dos maneras:

<u>Trazado hacia atrás</u>. Con este método se trabaja de derecha a izquierda, comenzando por el evento final y haciendo ante cada evento, la siguiente pregunta: ¿Qué debemos hacer inmediatamente antes de llegar a este evento? La razón para trabajar hacia atrás es que parece más fácil imaginar los

trabajos que preceden a una actividad que los trabajos que siguen. Es también normal seguir un solo camino de actividades desde el final hasta el principio, con preferencia a seguir varios caminos, añadiendo unas pocas actividades a cada uno. Este método parece ser el más rápido y reduce al mínimo los errores. La experiencia ha demostrado que el mejor camino inicial para trazar hacia atrás es aquél que corresponde a actividades físicas (edificios, equipos, etc.) y no el que corresponde a actividades más abstractas (diseño, entrenamiento, etc.). Parece que la visualización facilita el trazado de la red.

Trazado hacia adelante. Con este método se inicia el trazado de la red con el evento inicial y se procede hacia la derecha, haciendo ante cada evento la pregunta: ¿Qué se puede hacer inmediatamente después de que ocurra este evento? Al trabajar de esta manera, la red resultante señala claramente los eventos que es deseable constituyan los puntos de control del trabajo y además, se omiten menos detalles que con el método anterior.

Entre estos dos métodos, no puede afirmarse incuestionablemente que uno sea mejor que el otro, ya que esto depende de las preferencias personales, pero sería talvez más conveniente trabajar con un método y revisar con el otro.

Existen otras posibilidades. El método de la lista de actividades consiste en listar en una hoja todos los eventos conocidos antes de trazar la red y se manipulan según se considere su orden lógico en el desarrollo del trabajo; de allí se comienza a numerar los eventos y la red empieza a tomar forma.

Evaluación de la duración y costo

El paso siguiente, luego que se ha completado la red de actividades, consiste en incluir el tiempo en la misma, o sea, estimar la duración de cada actividad. Esta es una parte importante de la programación, ya que generalmente las duraciones de las operaciones del proyecto son inciertas o no se conocen bien. Esto es particularmente cierto cuando el proyecto en cuestión consiste en una tarea de investigación y desarrollo.

El tratamiento que se le da a la duración de las actividades es el punto que separa el método PERT y el método CPM. Para el primero, la duración de las actividades son magnitudes aleatorias susceptibles sólo de ser descritas mediante una distribución de probabilidades cuyos parámetros son estimados ya sea en forma estadística o bien a través de supuestos simplificadores basados en un relativo conocimiento de las actividades en cuestión.

En cuanto al método CPM, éste considera la duración de cada actividad como una magnitud que varía en forma funcional con los recursos empleados en la misma. Se considera una gran variedad de duraciones, pero éstas están perfectamente determinadas por la cantidad de recursos empleados.

Trataremos, en primer lugar, las estimaciones de tiempo desde el punto de vista de PERT. Este emplea tres evaluaciones del tiempo. Se supone que la duración de la actividad efectivamente oscila dentro de ciertos límites. Con la ayuda del cálculo de probabilidades, se cuantifica el factor de inseguridad y se halla una expresión de la probabilidad de cumplir el plazo de terminación previsto en el cálculo. La base de la estimación del tiempo de duración de cada actividad son las siguientes evaluaciones del mismo:

la duración optimista	$\underline{a}$
la duración pesimista	$\underline{b}$
la duración más probable	$\underline{m}$

La duración optimista ofrece **el más corto** margen de tiempo, posible solamente bajo las condiciones más favorables, para terminar la actividad. En este sentido, $\underline{a}$ es el tiempo teóricamente mínimo cuando se eliminan todos los factores desfavorables y todo sale inesperadamente bien. La probabilidad de realizar la actividad en ese lapso es pequeñísima; se dice que en la práctica sólo hay una probabilidad igual a 0.01 de realizar la actividad en un tiempo menor que a.

La duración pesimista, da el margen de tiempo más largo, posible sólo en las condiciones más desfavorables que impliquen la ocurrencia frecuente de factores perturbadores, para terminar la actividad. Obviamente, entre esos factores perturbadores no se pueden incluir catástrofes del tipo incendios, terremotos, huelgas, etc., contingencias que es imposible prever, sino solamente aquéllas sobre las cuales se tiene algún conocimiento pero que, por estar fuera del control del responsable, o por errores del mismo, pueden producir dilaciones o interrupciones del trabajo. Tales contingencias pueden ser del tipo lluvia, que impida una labor en la interperie, la posible falla de algún equipo, ocurrencia anormalmente frecuente de accidentes de trabajo, etc.

La duración más probable corresponde al curso habitual de la actividad. Esta estimación tiene debida cuenta de las circunstancias que se estiman normales considerando, ya sea, algunos atrasos imprevistos como aceleraciones no esperadas.

Con estas tres estimaciones se calcula un tiempo medio o "esperado" para completar la actividad, así como una medida de la variabilidad de la estimación. Para ello se utiliza la distribución Beta, la cual proporciona las siguientes fórmulas aproximativas de la duración media y la varianza de la duración:

Duración media:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Varianza de la duración:

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

Desviación típica de la duración:

$$\sigma_t = \frac{b - a}{6}$$

Para poner un ejemplo, supóngase que para una actividad determinada, las tres estimaciones del tiempo de duración son:

a = 4 semanas
b = 20 semanas
m = 6 semanas

Estas cifras dan una duración media de 8 semanas con una desviación típica de 2.7 semanas.

Si una segunda actividad tiene las estimaciones siguientes:

a = 4 semanas
b = 12 semanas
m = 8 semanas

entonces la duración de esta segunda actividad será 8 semanas como en la actividad anterior, pero la desviación típica esta vez será de 1.3 semanas. De la diferencia existente entre las desviaciones típicas se saca la conclusión de que, siendo las dos duraciones medias iguales a 8 semanas, la incertidumbre acerca de esta estimación es mayor en el primer caso.

El paso siguiente a la evaluación de la duración de las actividades individuales consiste en la estimación de la probabilidad de completar el proyecto en su conjunto en un tiempo determinado; sin embargo, esto se resolverá más adelante cuando se introduzca el concepto de ruta crítica.

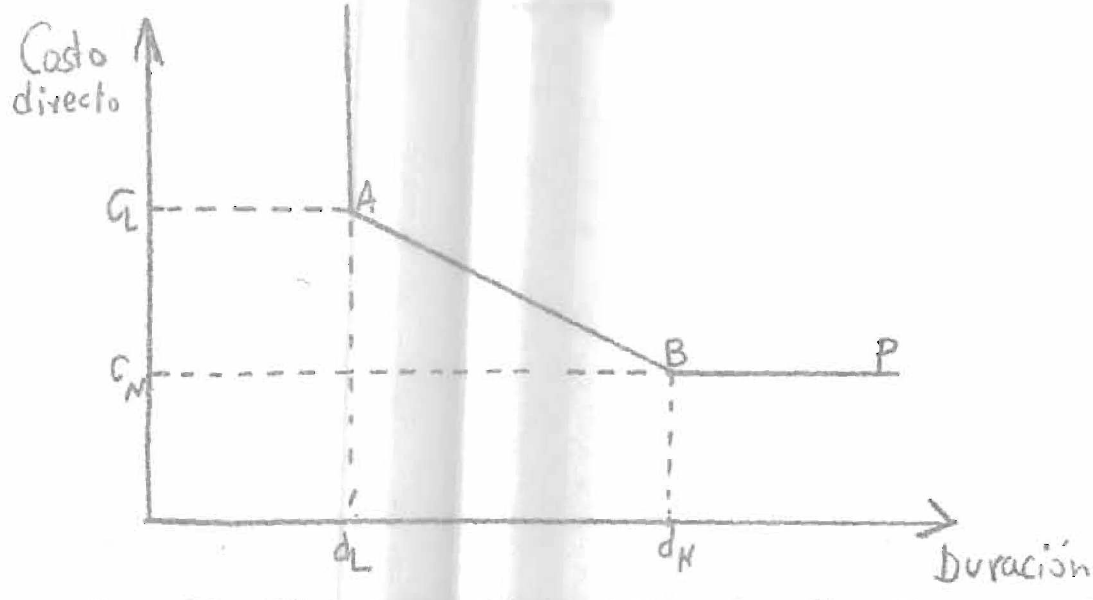
La evaluación del tiempo, desde el punto de vista de CPM, como ya se ha dicho antes, hace depender la duración de la actividad de la cantidad de recursos que se usen en su ejecución. Para establecer la relación funcional existente entre la duración y el costo, parte estableciendo la existencia de dos duraciones típicas: una duración normal d_N, que es el tiempo que demora en finalizar una determinada actividad cuando se dedica a ella una cierta cantidad de recursos mínima. Se supone que una cantidad inferior de recursos haría imposible la realización de esa actividad. La otra duración típica recibe el nombre de duración límite d_L, que es el tiempo mínimo que puede demorar la actividad, lo cual ocurre cuando ésta se satura en sus requerimientos de recursos. Se supone que más allá de este límite es imposible acortar más la duración de la actividad.

Por otra parte, en la derivación de la relación funcional mencionada, se supone que existen dos tipos de costos asociados con la duración de la actividad: un costo que varía inversamente en relación con la duración, el cual recibe el nombre de costo directo. Ejemplos de este tipo de costo son: el gasto en fuerza de trabajo directo, el gasto en equipo específico para esa tarea, gasto en materiales de uso directo en la ejecución de la actividad, etc. El otro tipo de costo que se considera es el costo indirecto, el cual varía paralelamente con la duración de la actividad. Este costo indirecto está constituido por desembolsos tales como: gastos generales fijos, pérdidas de producción y penalidades impuestas por demoras en la terminación del proyecto, etc.

Es evidente que el costo total de una actividad será igual a las sumas de los costos directos e indirectos.

Lo más importante a analizar con relación al asunto que nos preocupa es el costo directo de la actividad y su relación con la duración de la misma. El costo directo asociado con la duración máxima de la actividad recibe el nombre costo normal y se simboliza con C_N. El costo directo asociado con la duración mínima de la actividad recibe el nombre de costo límite y se simboliza con C_L.

Sea C_N el costo normal de una actividad y d_N la duración normal asociada con dicho costo, C_L es el costo límite correspondiente con la duración d_L. Supondremos que la duración concreta de la actividad puede tomar cualquier valor comprendido en el intervalo (d_L, d_N), siendo el costo concreto correspondiente a una función lineal de la duración definida en dicho intervalo. Bajo estos supuestos, la relación entre duración y costo de la actividad puede representarse por la poligonal P de la figura:



La inclinación negativa del tramo AB de la poligonal traduce el hecho de que una disminución de la duración de la actividad sólo es posible incurriendo en un costo directo mayor y viceversa, para ejecutar la actividad a un costo menor, es necesario prolongar su duración. El tramo paralelo al eje Duración indica el hecho de que por mucho que se prolongue la duración de la actividad, el costo de la misma no puede disminuir más allá de C_N; el tramo paralelo al eje Costo Directo indica que aunque el costo de la actividad aumente más allá de todo límite, la duración de la actividad no podrá nunca ser menor que d_L.

Si se selecciona una duración d para cierta actividad, C_d será el costo directo correspondiente de la misma. A partir de las relaciones geométricas que se generan en el gráfico puede demostrarse que la función de costo de la actividad tiene la forma siguiente:

$$C_d = C_N + \frac{C_L - C_N}{d_N - d_L} (d_N - d)$$

o bien

$$C_d = C_L - \frac{C_L - C_N}{d_N - d_L} (d - d_L)$$

La expresión $(C_L - C_N)/(d_N - d_L)$, que es el coeficiente angular del tramo AB de la poligonal P, representa el gasto directo adicional en que es necesario incurrir por cada día (o unidad de tiempo que corresponda) que se acorte la duración de la actividad. Por esta razón denominaremos a esta expresión "gasto unitario de la actividad".

Usando la notación

$$Q = \frac{C_L - C_N}{d_N - d_L}$$

podemos escribir las expresiones anteriores de la siguiente manera:

$$C_d = (C_N + Q\cdot d_N) - Q\cdot d$$

$$C_d = (C_L + Q\cdot d_L) - Q\cdot d$$

En estas expresiones

$$C_N + Q\cdot d_N = C_L + Q\cdot d_L$$

representa el coeficiente de posición del tramo AB de la poligonal P, o sea, es el punto en que la prolongación de la recta AB corta al eje <u>costo directo</u>. En términos concretos, este coeficiente indica el costo de la actividad <u>si fuese posible</u> reducir la duración de la actividad a cero bajo los supuestos simplificadores establecidos.

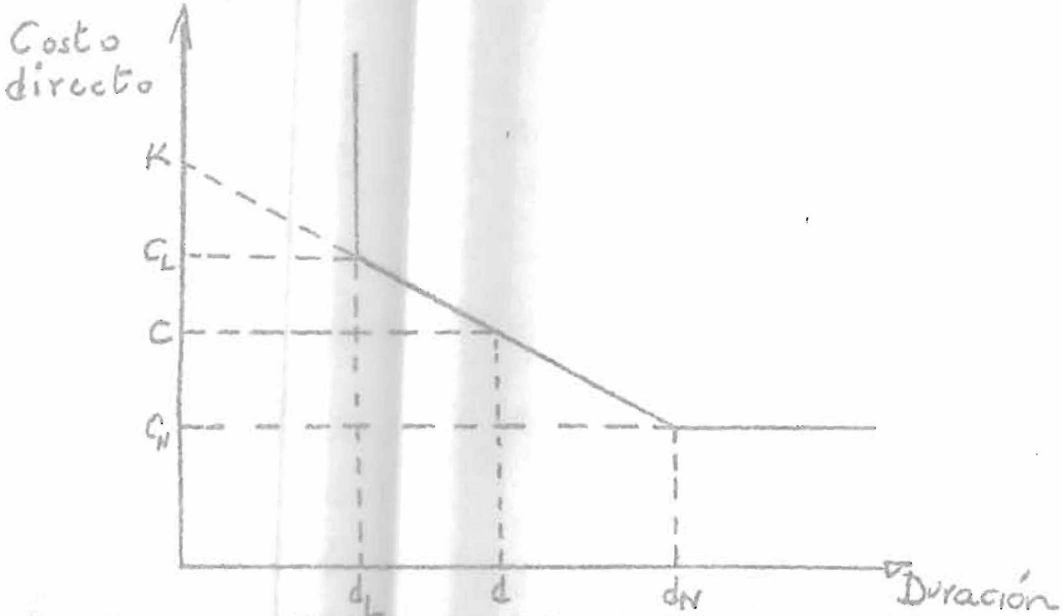
Usando la notación

$$K = C_N + Q\cdot d_N = C_L + Q\cdot d_L$$

podemos escribir la función de costo directo de la actividad de la manera siguiente:

$$C_d = K - Q\cdot d$$

Gráficamente, la situación es la siguiente:



Las relaciones anteriores han sido establecidas para una actividad (i,j) determinada. Como quiera que el proyecto está compuesto por un gran número de ellas, para identificar los parámetros de las distintas actividades agregaremos a los símbolos usados los indicadores de la actividad. Así

$$C_d(i,j) = K(i,j) - Q(i,j) \cdot d(i,j)$$

donde

$$Q(i,j) = \frac{C_L(i,j) - C_N(i,j)}{d_N(i,j) - d_L(i,j)}$$

y, además

$$K(i,j) = C_N(i,j) + Q(i,j) \cdot d_N(i,j)$$

El costo total del proyecto será igual a la suma de los costos de todas las actividades del mismo. Representaremos el costo directo total del proyecto por C_d; de esta manera

$$C_d = \sum_{(i,j)\in R} \left\{ K(i,j) - Q(i,j) \cdot d(i,j) \right\}$$

$$C_d = \sum_{(i,j)\in R} K(i,j) - \sum_{(i,j)\in R} Q(i,j) \cdot d(i,j)$$

Para obtener el costo total del proyecto tendríamos que agregar el costo indirecto a la expresión de más arriba. Podemos dar dos tratamientos a este tipo de costo, o bien, lo cargamos a cada actividad según la duración de la misma; o bien, se lo cargamos al costo de todo el proyecto en función de la duración total. En el primer caso, se tendría que estimar, para cada actividad del proyecto una función de costo indirecto del tipo

$$C_i(i,j) = k(i,j) + q(i,j) \cdot d(i,j)$$

donde $k(i,j)$ representaría un gasto fijo inicial para realizar la actividad (i,j) y $q(i,j)$ el gasto a realizar por cada semana que se prolongue la duración de la actividad. Obviamente, $q(i,j)$ debe ser positivo, atendiendo al tipo de gasto que se incluyen bajo la denominación de costo indirecto. La función $C_i(i,j)$ sería pues lineal y creciente respecto a la duración seleccionada de la actividad. Se deduce, entonces, que el costo total de la actividad estaría dado por

$$C_t(i,j) = C_d(i,j) + C_i(i,j)$$

y reemplazando

$$\begin{aligned} C_t(i,j) &= \left\{K(i,j) + Q(i,j) \cdot d(i,j)\right\} + \left\{k(i,j) - q(i,j) \cdot d(i,j)\right\} \\ &= \left\{K(i,j) + k(i,j)\right\} - \left\{Q(i,j) - q(i,j)\right\} d(i,j) \end{aligned}$$

y el costo total de todo el proyecto sería:

$$C_t = \sum_{(i,j)\in R} \left\{K(i,j) + k(i,j)\right\} - \sum_{(i,j)\in R} \left\{Q(i,j) - q(i,j)\right\} d(i,j)$$

En el segundo caso, habría que estimar para el proyecto en su totalidad una función de costo indirecto del tipo

$$C_i = k + q \cdot d$$

donde k es un gasto fijo independiente de la duración del proyecto y q es el gasto a realizar por cada semana que se prolongue la duración $\underline{d}$

del proyecto. La función de costo total será entonces

$$C_t = \sum_{(i,j)\in R} K(i,j) - k - \sum_{(i,j)\in R} Q(i,j)\cdot d(i,j) - q\cdot d$$

El caso más usual es el segundo de los indicados, en que el costo indirecto se agrega al costo directo total del proyecto y además se supone que el término k de la función de costo indirecto es cero.

NUMERACION DE LOS NUDOS DE UNA RED

Uno de los primeros problemas que hay que resolver una vez que se tienen las actividades del proyecto representados en una red es el de la numeración de los nudos. Esta debe atender a las siguientes reglas: en primer lugar, debe existir una correspondencia bi-unívoca entre nudos y números, es decir, a cada nudo debe corresponderle un número y viceversa; y en segundo lugar, para cualquiera actividad (i,j) se debe verificar que $i < j$, es decir, al nudo inicial de una actividad debe corresponderle un número menor al número del nudo final de la misma actividad.

El cumplimiento de estas reglas tiene algunas ventajas importantes:

a) Reduce significativamente el trabajo implícito en la búsqueda lógica en un problema de ruta crítica;

b) Es imprescindible para poder usar una calculadora electrónica en el cálculo de los parámetros de redes de gran magnitud;

c) Mediante la aplicación de estas reglas se pueden detectar inconsistencias lógicas en la confección de la red respecto a los encadenamientos entre las actividades, ya que el ordenamiento requerido es imposible de realizar cuando en la red existen ciclos o trayectorias cerradas.

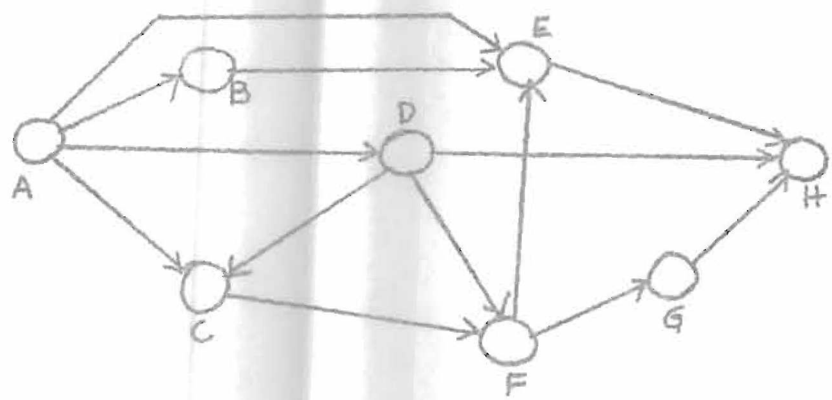
En esta parte, expondremos un algoritmo para realizar la numeración de los nudos en la forma exigida. Supóngase que queremos ordenar los nudos de una red de tal manera que para cada actividad (i,j) que pertenece a la red se cumpla

$$i < j$$

En el caso de una red sencilla, puede ser posible realizar esta numeración en forma visual sin cometer errores, pero en los casos de la práctica donde es común encontrar redes de varias decenas, y aún cientos, de actividades, esto puede no ser posible por el grave problema de permutaciones que se genera.

El principio en que está basado el algoritmo es que a un nudo de un "nivel" determinado le corresponde un número menor que a un nudo de un "nivel" superior. Se entenderá por "nivel" de un nudo el número de actividades que tenga su máxima trayectoria desde el origen de la red. El algoritmo consistirá en determinar el nivel de cada nudo y de allí asignar los números atendiendo al principio enunciado.

En primer lugar, resolveremos el problema mediante un procedimiento gráfico que esperamos aclarará el algoritmo que daremos más adelante. Considérese una red sencilla en la figura



Los pasos a realizar son los siguientes:

a) Se numeran los nudos (o se les asignan letras o cualquiera otra denominación) en una forma totalmente arbitraria. En el ejemplo se han usado letras.

b) Se examina la red para identificar los nudos que sólo tienen arcos salientes (no tienen arcos entrantes). Es obvio que en esta primera etapa sólo existe un nudo con esas características: el origen o nudo inicial. Su nivel es cero y le corresponde el primer número de la sucesión. Podemos asignarle el 0.

c) Se eliminan todos los arcos salientes de este nudo ya numerado.

d) Se analiza nuevamente la red para identificar los nudos que después de la eliminación anterior quedaron sin arcos entrantes. En este caso puede haber uno o más nudos con estas características; el nivel de estos nudos será 1 y les corresponde los números siguientes en la sucesión sin importar el orden dentro de los mismos. Por ejemplo, si en esta etapa quedaron tres nudos sin arcos entrantes, les corresponderán los números 1, 2 y 3 en forma arbitraria.

e) Se eliminan ahora los arcos salientes de todos los nudos numerados en la etapa anterior.

f) Se analiza nuevamente la red para identificar los nudos que después de eliminación anterior, quedaron sin nudos entrantes. Estos nudos tienen un nivel 2 y corresponde numerarlos a partir del último número de la sucesión usada. En igual forma, los números correspondientes se asignan dentro del conjunto de los nudos de nivel 2 en un orden arbitrario.

g) Se prosigue la operación descrita hasta llegar al nudo final (terminación del proyecto).

Al terminar el procedimiento, han quedado todos los nudos numerados de acuerdo a las dos reglas establecidas.

Para ilustrar la aplicación del método descrito, lo usaremos para numerar los nudos de la red propuesta:

Del examen de la red para localizar nudos sin arcos entrantes, se desprende que el único nudo que no tiene arcos entrantes es el nudo A. Le corresponde el número 0. Se eliminan en seguida los arcos salientes AB, AC, AD y AE. En esta etapa, los nudos que quedaron sin arcos entrantes son B y D solamente, ya que los nudos E y C (a los cuales llegan también arcos eliminados) tienen aún arcos entrantes. Los nudos B y D son de nivel 1; o sea, la trayectoria máxima de estos nudos hasta el origen consta de un arco. Se les asignará los números 1 y 2.

A los nudos B y D, ya numerados, se les elimina los arcos salientes: al nudo B se le elimina el arco BE y al nudo D se le eliminan los arcos DC, DF y DH. Ahora los nudos que han quedado sin arcos entrantes son: C solamente. El nudo C tiene un nivel 2, o sea, la trayectoria máxima de este nudo hasta el origen consta de dos arcos. Se le asigna el número 3.

Al nudo C, ya numerado, se le elimina el arco CF que es el único saliente de este nudo. Luego de esta eliminación, el nudo que no tiene arcos entrantes es F. Este nudo es de nivel 3; su trayectoria máxima hasta el origen consta de tres arcos; se le asigna el número 4.

Al nudo F, ya numerado, se le eliminan los arcos FE y FG. Quedan sin arcos entrantes los nudos E y G. Estos nudos son de nivel 4; la trayectoria máxima de cada uno de estos nudos hasta el origen consta de 4 arcos. Se les asigna los números 5 y 6.

De los nudos E y G, ya numerados, se eliminan los arcos salientes EH y GH después de lo cual queda sin arcos entrantes el nudo H. El nivel del nudo H es 5; o sea, la trayectoria máxima de este nudo al origen consta de 5 arcos. Se le asigna el número 7. Y puesto que este nudo H tampoco tiene arcos salientes, este nudo constituye el evento final o terminación del trabajo.

En el esquema que se acompaña se muestra gráficamente todos los pasos realizados.

Este procedimiento, que es sumamente sencillo de operar y bastante eficiente, tiene el inconveniente de depender en alto grado de la vista y análisis cuidadoso del operador. La probabilidad de equivocarse es pequeña cuando se aplica a redes sencillas como la del ejemplo que sólo consta de 8 nudos y 13 arcos. Esta probabilidad aumenta cuando se considera redes más complicadas como las que se presentan en las aplicaciones prácticas del método. Aquí las confusiones y equivocaciones están a la orden del día. Se hace necesario, pues un procedimiento más sencillo y en alto grado independiente de una gran concentración mental y visual del operador.

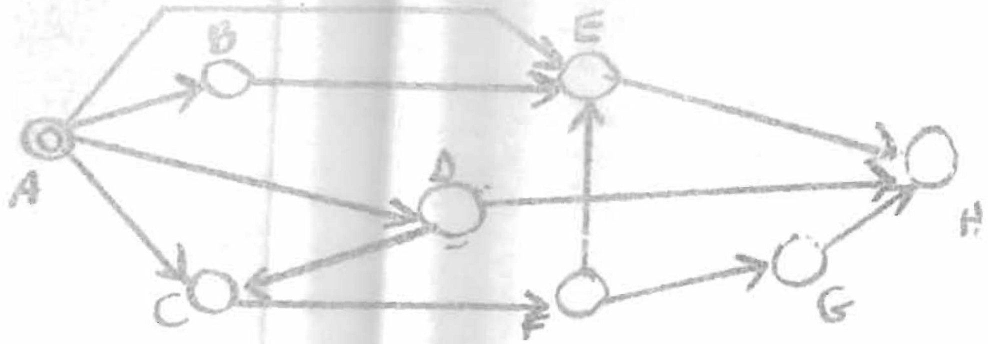
En lo que sigue, presentamos un procedimiento iterativo que permite en cada etapa ir hallando trayectorias crecientes hacia atrás para cada nudo hasta llegar a un máximo (nivel del nudo).

El procedimiento opera como sigue:

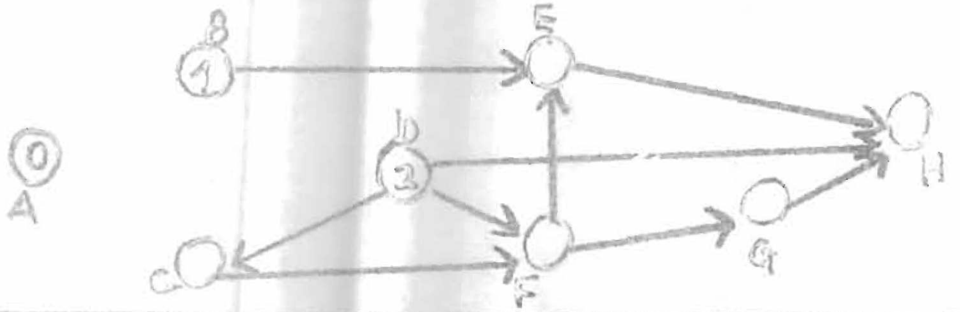
Representamos la red en la forma de una matriz en la cual las filas corresponden a los nudos que son inicios de actividades y las columnas corresponden a los nudos que son términos de actividades. Los elementos de la matriz serán designados por d_{ij} donde

$$d_{ij} = 1$$

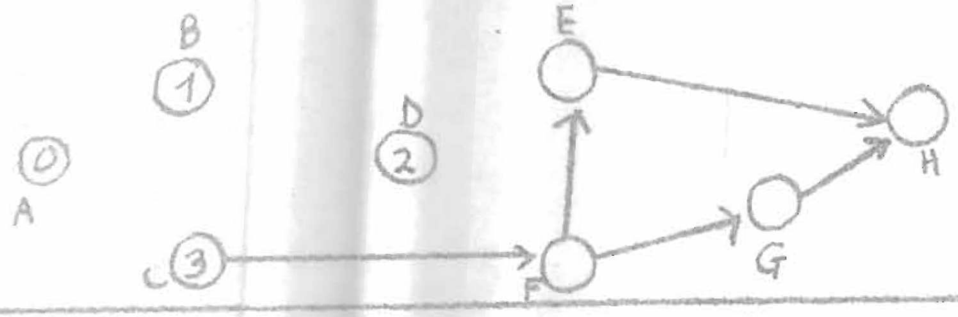
1)


A
B
C
D
E
F
G
H
0

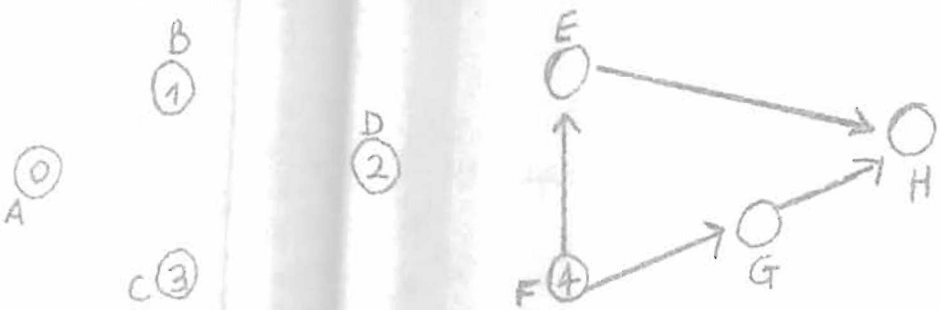
2)


A
B
C
D
E
F
G
H
0
1
2

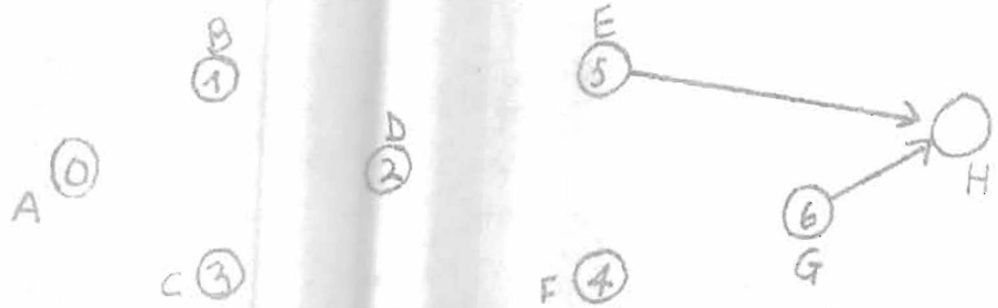
3)


A
B
C
D
E
F
G
H
0
1
2
3

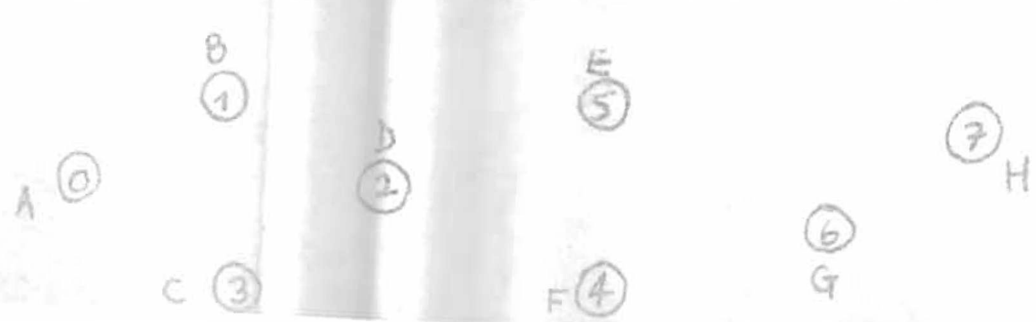
4)


A
B
C
D
E
F
G
H
0
1
2
3
4

5)


A
B
C
D
E
F
G
H
0
1
2
3
4
5
6

6)


A
B
C
D
E
F
G
H
0
1
2
3
4
5
6
7

si es que existe una actividad (i,j). Si la actividad (i,j) *no* existe se deja el espacio en blanco y éste no opera en los cálculos a realizar.

En el caso del ejemplo de red propuesta, la matriz representativa de la red será de la forma siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	λ_j'	λ_j''	λ_j'''	λ_j''''
A		1	1	1	1							
B					1							
C						1						
D			1			1		1				
E								1				
F					1		1					
G								1				
H												

Al lado derecho de la matriz se dedican unas columnas de cálculo adicionales encabezadas por el símbolo $\lambda_j^{(n)}$. En ellas escribiremos, fila por fila, los resultados del siguiente cálculo:

$$\lambda_j^{(n)} = \max_k \left\{ d_{kj} + \lambda_k^{(n)} \; ; \; d_{kj} + \lambda_k^{(n-1)} \right\}$$

(Recuérdese que los cuadros en blanco no operan en estos cálculos; o sea, cuando d_{ij} no exista no se calcula nada).

Llenaremos la primera columna encabezada por λ_j' de acuerdo con la fórmula propuesta:

$\lambda_A' = 0$: en la columna A no hay ningún 1; el nudo A no tiene actividades previas.

$\lambda_B' = 1$: en la columna B hay un solo 1, el cual sumado a su respectivo λ_A' da $d_{AB} + \lambda_A' = 1+0=1$

$\lambda_C' = 1$: en la columna C hay dos 1: $d_{AC}=1$ y $d_{DC}=1$, representativos de las dos actividades que terminan en C, pero solamente uno de ellos, d_{AC}, puede sumarse a un λ correspondiente; es decir,

$$d_{AC} + \lambda_A' = 1 + 0 = 1$$

$\lambda'_D = 1$: en la columna D hay un solo 1; $d_{AD}=1$ y $\lambda'_A = 0$. Por lo tanto se tiene $d_{AD} + \lambda'_A = 1+0=1$

$\lambda'_E = 2$: en la columna E hay tres 1: $d_{AE} = 1$, $d_{BE} = 1$ y $d_{FE} = 1$, pero sólo se pueden formar dos sumas: $d_{AE}+\lambda'_A = 1+0=1$ y $d_{BE}+\lambda'_B=1+1=2$. Se elige, de acuerdo a la fórmula, el máximo de estos dos resultados y se tendrá $\lambda'_E = 2$

$\lambda'_F = 2$: en la columna F hay dos 1: $d_{CF}=1$ y $d_{DF}=1$ y se pueden formar las sumas $d_{CF}+\lambda'_C = 1+1=2$ y $d_{DF}+\lambda'_D = 1+1=2$. Se tendrá, entonces, $\lambda'_F = 2$.

$\lambda'_G = 3$: en la columna G hay un 1: $d_{FG}=1$ y la suma $d_{FG}+\lambda'_F = 1+2=3$. Por tanto: $\lambda'_G = 3$

$\lambda'_H = 4$: en la columna H tenemos $d_{DH}=1$; $d_{EH}=1$ y $d_{GH}=1$. Las sumas son: $d_{DH}+\lambda'_D = 1+1=2$; $d_{EH}+\lambda'_E = 1+2=3$; y $d_{GH}+\lambda'_G = 1+3=4$ y la máxima entre las tres es 4. Por lo tanto $\lambda'_H = 4$

Después de esta primera etapa de cálculos, la matriz ha quedado de la siguiente forma:

	A	B	C	D	E	F	G	H	λ'_i	λ''_i	λ'''_i	λ^{iv}_i
A		1	1	1	1				0			
B					1				1			
C						1			1			
D			1			1		1	1			
E								1	2			
F					1		1		2			
G								1	3			
H									4			

Calcularemos ahora la columna λ''_j comenzando por la primera fila:

$\lambda''_A = 0$: ya que no hay ningún 1 en la columna A

$\lambda''_B = 1$: en la columna B hay un 1: $d_{AB}=1$. Se puede formar la suma
$d_{AB} + \lambda''_A = 1+0 = 1$

$\lambda''_C = 2$: hay dos 1 en la columna C: $d_{AC}=1$ y $d_{DC}=1$. Las sumas que se pueden formar ahora son: $d_{AC} + \lambda''_A = 1+0 = 1$ y $d_{DC} + \lambda''_D = 1+1=2$. En este caso, pudo formarse la segunda suma indicada porque en la previa ya se había calculado λ''_D; la aplicación de la fórmula nos da entonces:

$\lambda''_C = 2$

$\lambda''_D = 1$: en la columna D hay un solo 1: $d_{AD}=1$ y la suma $d_{AD} + \lambda''_A = 1+0=1$.

$\lambda''_E = 2$: en la columna E hay tres 1: $d_{AE}=1$, $d_{BE}=1$ y $d_{FE}=1$. Se forman las sumas: $d_{AE} + \lambda''_A = 1+0 = 1$, $d_{BE} + \lambda''_B = 1+1 = 2$ y $d_{FE} + \lambda''_F = 1+2=3$. Se elige la mayor: $\lambda''_E = 3$.

$\lambda''_F = 3$: en la columna F hay dos 1: $d_{CF}=1$ y $d_{DF}=1$. Se forman dos sumas: $d_{CF} + \lambda''_C = 1+2=3$ y $d_{DF} + \lambda''_D = 1+1=2$. Se tiene entonces, $\lambda''_F = 3$

$\lambda''_G = 4$: en la columna G hay un solo 1: $d_{FG}=1$ y la suma $d_{FG} + \lambda''_F = 1+3=4$

$\lambda''_H = 5$: en la columna F hay tres 1; $d_{DH}=1$, $d_{EH}=1$ y $d_{GH}=1$ y las sumas son: $d_{DH} + \lambda''_D = 1+1 = 2$; $d_{EH} + \lambda''_E = 1+2 = 3$ y $d_{GH} + \lambda''_G = 1+4=5$. La máxima es 5.

Después de esta segunda iteración, la matriz ha quedado de la siguiente forma:

	A	B	C	D	E	F	G	H	λ_j'	λ_j''	λ_j'''	λ_j^{iv}
A		1	1	1	1				0	0		
B					1				1	1		
C						1			1	2		
D			1			1		1	1	1		
E								1	2	3		
F					1		1		2	3		
G								1	3	4		
H									4	5		

En lo sucesivo se sigue operando en la misma forma, llenando tantas columnas como sea necesario, hasta terminar y los resultados están expuestos en la matriz de la figura siguiente. El proceso termina cuando todas las cifras de una columna λ sean exactamente iguales a las respectivas cifras de la columna anterior, o sea:

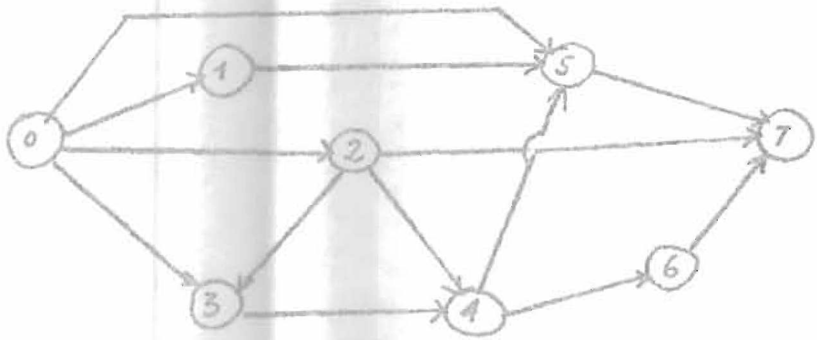
$$\lambda_j^{(n)} = \lambda_j^{(n-1)} \quad \text{para todo } j.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	λ_j'	λ_j''	λ_j'''	λ_j^{iv}
A		1	1	1	1				0	0	0	0
B					1				1	1	1	1
C						1			1	2	2	2
D			1			1		1	1	1	1	1
E								1	2	3	4	4
F					1		1		2	3	3	3
G								1	3	4	4	4
H									4	5	5	5

Esta igualdad expresa el hecho de que en esta etapa ya se han hallado las trayectorias máximas de cada uno de los nudos hasta el evento inicial, o sea, sus niveles. Los números de la columna final calculada representan los niveles de los nudos de la red en el sentido que se definió antes.

Así, el nudo A es de nivel 0 y corresponde al evento inicial; los nudos B y D son de nivel 1, o sea, la máxima trayectoria desde el origen al mismo consta de un solo arco o actividad; el nudo B es de nivel 2, su trayectoria máxima desde el origen al mismo consta de 2 arcos o actividades; el nudo F es de nivel 3; los nudos E y G son de nivel 4; y, finalmente, el nudo H es de nivel 5.

Se numerarán los nudos de acuerdo a sus respectivos niveles con lo cual la red quedará numerada como en la figura siguiente:



Es de hacer notar que en los proyectos complejos, en vez de usar la sucesión de números naturales, se acostumbra numerar los nudos mediante las decenas: 10, 20, 30,... para permitir, cuando sea necesario, la intercalación de nuevos nudos sin alterar la numeración de los nudos restantes.

Se puede apreciar, entonces, que para todas las actividades (i,j) de la red siempre se cumple la condición

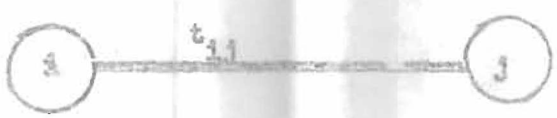
$$i > j$$

Si se representa ahora la red de nuestro ejemplo mediante una matriz, como se hizo previamente, pero usando la nueva numeración, se notará que todos los 1, representativos de conexiones entre los nudos de la red, han quedado sobre la diagonal principal de dicha matriz, lo cual facilitará sobremanera los cálculos a realizar en la determinación de los parámetros de la red.

Parámetros de una red de actividades

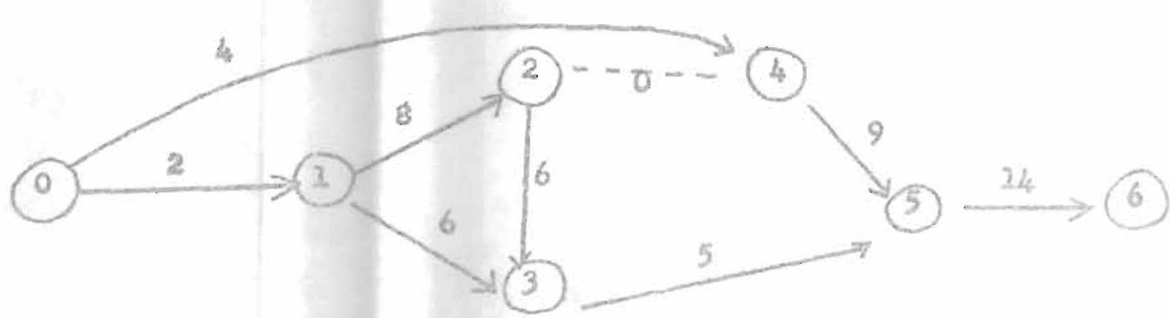
En esta etapa, con la red de actividades trazadas y realizadas las estimaciones de duración y costo de las actividades individuales, se supone que termina la fase de la planeación del proyecto y se entra en la etapa de la programación del mismo, es decir, establecer las fechas de inicio y término del conjunto de las actividades del proyecto y de allí la duración del proyecto en su totalidad. Esta última recibe el nombre de duración crítica del proyecto.

Para hacer lo anterior es necesario emplear dos conceptos adicionales en el método de cálculo: la fecha más temprana de ocurrencia de un evento, y la fecha más tardia de ocurrencia del mismo. Para el cálculo de estos parámetros, es necesario que los nudos estén numerados y queden así definidas las actividades en su inicio y término. Al nudo inicial de la actividad se le asignará el número i y al evento final de la misma el número j. Se debe cumplir que $i < j$. A la duración de la actividad la simbolizaremos por t_{ij}.



Fecha más temprana de un evento i - es el tiempo necesario para alcanzar el nudo i, si no ocurren atrasos imprevistos en las actividades que le anteceden. Usaremos el símbolo t_i para individualizarlo.

Para aclarar respecto a su método de cálculo emplearemos un ejemplo. Sea la red siguiente:



En la red del ejemplo se han numerado los nudos y se ha colocado sobre cada arco una cifra que indica la duración de la actividad representada por esa flecha.

En primer lugar, supondremos que el proyecto se inicia en una fecha 0, y esta será la fecha más temprana de ocurrencia del evento inicial, o sea, el nudo 0. Consideremos ahora el nudo 1; si el proyecto se inició en la fecha 0 y la actividad (0.1) demora 2 semanas entonces la fecha más temprana de ocurrencia del evento 1 será 2. Al nudo 2 sólo llega una flecha, la actividad (1.2) por lo tanto este evento ocurrirá 8 semanas después del evento 1; esta última cifra corresponde a la duración de la actividad (1.2). La fecha más temprana de ocurrencia del evento 2 será, en consecuencia, igual a 10. Al nudo 3 llegan dos arcos: (1.3) y (2.3); la actividad (1.3) puede terminar 6 semanas después de que ocurra el evento 1 y esto le da una fecha de término igual a 8; la actividad (2.3) puede finalizar en la fecha 16. Pero la ocurrencia del evento 3 implica que deben haberse realizado las dos actividades mencionadas, por lo tanto, la fecha más temprana en que el evento puede ocurrir es a las 16 semanas de iniciado el proyecto. Haciendo este mismo tipo de consideraciones se observa que el nudo 4, aun cuando la actividad (2.4) tenga una duración nula, tenemos la misma condición, por lo tanto, su fecha más temprana será 10. El tiempo más largo para llegar al nudo 5 es a través de la actividad (3.5) que es de 21 semanas, por la actividad (4.5) sólo se llega en un tiempo de 19 semanas; así que el nudo 5 tendrá una fecha más temprana de 21. Por esta razón la actividad (5.6) sólo podrá iniciarse a las 21 semanas de comenzado el proyecto y, como tiene una duración de 14 semanas, se desprende que la fecha más temprana del evento 6 es 35. Esta es, al mismo tiempo, la fecha más temprana para terminar el proyecto. De aquí que el tiempo crítico de este proyecto es 35 lo cual significa que lo menos que puede demorar la ejecución del proyecto es 35 semanas.

Del procedimiento expuesto sobresale una regla a seguir para el cálculo de este parámetro: para obtener la fecha más temprana de un evento se calculará el mayor tiempo que sea necesario para alcanzar ese nudo por las distintas trayectorias que llegan a él.

La fórmula para el cálculo de la fecha más temprana de un evento es la siguiente:

$$t_j = \max_i (t_{ij} + t_i)$$

Fecha más tardía de un evento. Suponiendo que la duración mínima del proyecto sea 35 semanas, calcularemos ahora las fechas más tardías de los eventos. Se define ésta como la fecha límite de realización después de la cual el tiempo total de ejecución del proyecto se altera.

Para los cálculos seguiremos la misma secuela empleada en el procedimiento anterior, sólo que empezaremos a partir del evento final que tien una fecha más tardía de 35.

Para que el proceso termine en la fecha 35 la actividad (5,6) deberá comenzar cuando más tarde 14 semanas antes, o sea, en la fecha 21; esta cifra será pues la fecha más tardía del evento 5. Es obvio que si el evento 5 demora un día más en cumplirse demorará en la misma medida el término del proyecto. La fecha más tardía para que ocurra el evento 4 será 21 menos 9, o sea, 12. Esta es la fecha más tardía en que deberán terminar todas las actividades que inciden en este nudo 4 para no atrasar la terminación del proyecto. La fecha más tardía del evento 3 será 16 puesto que la actividad (3,5) tiene 5 unidades de duración. Al analizar el nudo 2 vemos que hay dos actividades que salen de él: las actividades (2,3) y (2,4), la fecha más tardía del nudo 2 debe ser 10. No obstante que por el camino (2,4) se indica que la fecha más tardía de iniciación de la actividad de liga (con duración cero) es 12 el evento 2 no podrá realizarse después de la fecha 10 pues retrasaría a la actividad (2,3) y por consiguiente todo el proceso. En el nudo 1 se presenta la misma situación debido a que de él salen las actividades (1,2) y (1,3). La fecha más tardía del evento 1 está determinada por la actividad (1,2) que tiene duración 8; por lo tanto, esta fecha es 2.

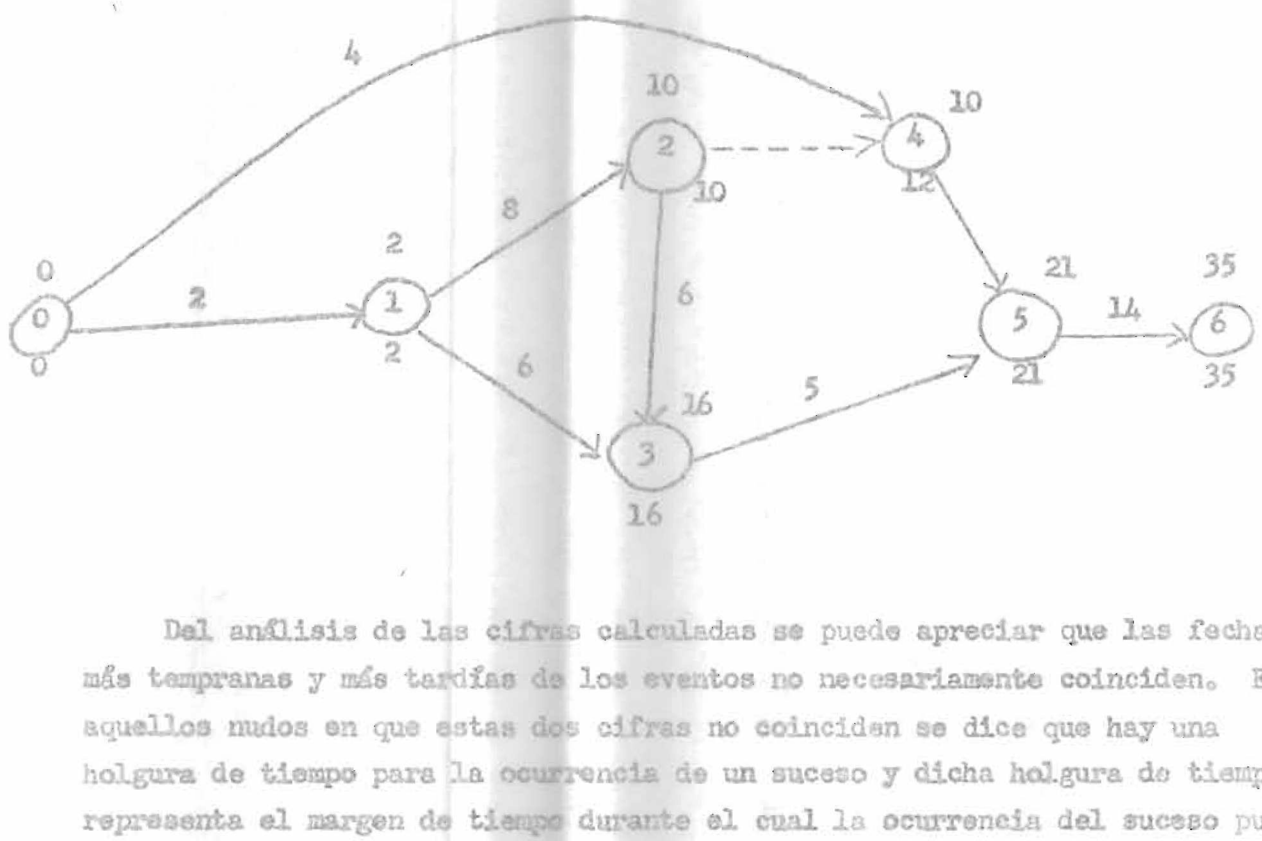
Finalmente, la fecha más tardía del evento cero será cero lo cual debe coincidir con su fecha más temprana.

Como regla general: para calcular la fecha más tardía se tomará la duración menor que llegue a él por los distintos caminos que salen del nudo comenzando por el nudo final.

La fórmula para su cálculo sería la siguiente:

$$t_i' = \min_j \left(t_j' - t_{ij}\right)$$

Los resultados de nuestros cálculos se muestran en la figura siguiente, donde las fechas más tempranas se han colocado sobre los respectivos nudos, y las fechas más tardías debajo de los mismos.



Del análisis de las cifras calculadas se puede apreciar que las fechas más tempranas y más tardías de los eventos no necesariamente coinciden. En aquellos nudos en que estas dos cifras no coinciden se dice que hay una holgura de tiempo para la ocurrencia de un suceso y dicha holgura de tiempo representa el margen de tiempo durante el cual la ocurrencia del suceso puede variar sin afectar la fecha de terminación del proyecto. Se define la holgura de un suceso mediante la fórmula de cálculo.

$$H_k = t_k' - t_k$$

En el ejemplo propuesto hay un sólo evento que tiene holgura: el evento 4, el cual tiene una holgura de 2 semanas, vale decir, su ocurrencia real puede acontecer entre las 10 y las 12 semanas después de iniciado el proyecto y la terminación de éste permanecerá invariable en las 35 semanas.

Por otra parte, en otros eventos las dos fechas mencionadas coinciden en una misma cifra. Estos eventos tienen una holgura nula; esto quiere decir que el evento debe ocurrir impostergablemente en la fecha señalada ya que toda demora se reflejará en un atraso de la misma magnitud de la terminación del proyecto. Estos eventos reciben el nombre de <u>eventos críticos</u> y la trayectoria que pasa por estos nudos recibe el nombre de RUTA CRITICA del proyecto. La duración de la ruta crítica es el tiempo mínimo que puede demorar en ejecutarse un determinado proyecto. En el ejemplo propuesto la ruta crítica de la red pasa por los nudos 0, 1, 2, 3, 5 y 6 y la duración crítica es la suma de las duraciones de las actividades críticas, 35 semanas.

Las actividades (0.4), (1.3) y (4.5) son actividades no críticas, y pueden retrasarse dentro de ciertos límites sin afectar la duración total del proyecto. También estas actividades no necesitan comenzar en la fecha mas temprana según indica en nudo inicial de las mismas; pueden iniciarse en una fecha posterior con la única condición de que no retrasen la iniciación de las que le siguen inmediatamente. Es decir, tienen un cierto margen de holgura de tiempo que llamaremos reserva de tiempo de la actividad.

En la figura de nuestro ejemplo, si la actividad (1.3) empieza en la fecha 2 que marca el nudo 1 terminará en la fecha 8, puesto que su duración es 6 semanas y al mismo tiempo se aprecia que puede terminar cuando más tarde en la fecha 16 que marca el nudo 3; por lo tanto, se puede retrasar hasta 8 días sin modificar la iniciación de la actividad (3.5) que es la que le sigue inmediatamente. Tiene una reserva de tiempo de 8 días.

En las actividades no críticas podemos diferenciar tres grupos de reservas de tiempo: a) reserva total. Es la cantidad de tiempo que se puede retrasar una actividad sin afectar la terminación del proyecto. Se define mediante la fórmula

$$R_{ij}^{(t)} = t_j' - t_i - t_{ij}$$

donde t_j' es la fecha más tardía para terminar la actividad (i.j) t_i es la fecha más temprana para el inicio de la actividad y t_{ij} es la duración de la misma. b) reserva libre. Es la cantidad de tiempo que se puede retrasar una actividad sin afectar la fecha más temprana de inicio de las actividades que le siguen.

Se define mediante la fórmula

$$R_{ij}^{(l)} = t_j - t_i - t_{ij}$$

donde t_j es la fecha más temprana para terminar la actividad (i.j), t_i es la fecha más temprana de inicio de la misma actividad y t_{ij} es la duración de la actividad. c) reserva independiente. Es la cantidad de tiempo que puede retrasarse una actividad sin afectar la fecha más tardía de inicio de las actividades que le siguen.

Se calcula mediante la fórmula

$$R_{ij}^{(i)} = t_j - t_i' - t_{ij}$$

donde t_j es la fecha más temprana para terminar la actividad (i.j) t_i' es la fecha más tardía de inicio de la misma y t_{ij} es la duración de la actividad.

En general, la reserva total debe ser mayor que las otras dos y, en muchos casos la reserva independiente puede ser negativa. Esto último nos indica que para conservar la fecha más temprana de inicio de las actividades que le siguen, si la actividad en cuestión se inicia en su fecha más tardía tendremos que acortar la duración una cantidad igual a la que nos marca la reserva independiente, cosa que en muchas ocasiones es impracticable económicamente, pero no por eso deja de ser útil el conocimiento de este tipo de reserva.

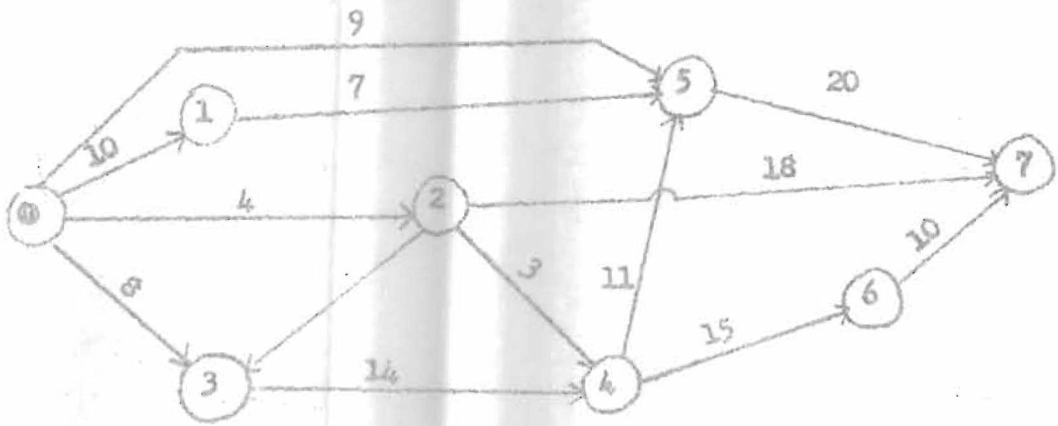
De acuerdo con las fórmulas que definen los tres tipos de holguras se puede elaborar la siguiente tabla en la que están concentrados los datos del programa obtenido por medio del diagrama y los tiempos de duración de las actividades.

Actividad	Duración	Fecha más temprana		Fecha más tardía		Reservas			Grado de importancia
		Inicio	Término	Inicio	Término	T	L	I	
(0.1)	2	0	2	0	2	0	0	0	Crítica
(1.2)	8	2	10	2	10	0	0	0	Crítica
(2.3)	6	10	16	10	16	0	0	0	Crítica
(1.3)	6	2	8	10	16	8	8	8	No crítica
(3.5)	5	16	21	16	21	0	0	0	Crítica
(0.4)	4	0	4	8	12	8	6	6	No crítica
(2.4)	0	10	10	12	12	2	0	0	No crítica
(4.5)	9	10	19	12	21	2	2	0	No crítica
(5.6)	14	21	35	21	35	0	0	0	Crítica

CALCULO DE LOS PARAMETROS DE UNA RED

Fechas más temprana de los eventos

Aprovecharemos la red usada antes al tratar la numeración de los nudos, para calcular las fechas más tempranas de ocurrencia de los eventos de una red de actividades. En dicha red, se anotará sobre cada arco la duración de la actividad con lo cual ésta quedará como sigue:



Así, por ejemplo, t_{27}, el tiempo que necesita la actividad (2,7) para ser completado es 18 semanas. En seguida, representaremos esta red en la forma de una matriz con las mismas características de la matriz que se usó en la numeración de los nudos. Las únicas diferencias que existen con la anterior son: en primer lugar, los números asignados a los nudos son los calculados antes mediante el algoritmo mostrado y para los cuales se cumple $i < j$, y, en segundo lugar, los elementos de la matriz son las duraciones de las actividades: t_{ij}

	0	1	2	3	4	5	6	7	t_j
0		10	4	8		9			
1						7			
2				11	3			18	
3					14				
4						7	15		
5								20	
6								10	
7									

Nótese que todas las cifras escritas en la matriz han quedado sobre la diagonal principal de la misma.

A la derecha de la matriz se ha dejado una columna de cálculo encabezada por el símbolo t_j; en esta columna se escribirán las fechas más tempranas de los eventos correspondientes de acuerdo con la fórmula:

$$t_j = \max_i(t_{ij} + t_i)$$

La rutina del cálculo de las fechas más tempranas es el siguiente: a partir del primer evento, donde escribimos 0, que es la fecha inicial de todo el proyecto, se examina la columna correspondiente al evento siguiente y las cifras que aparezcan en ella se suman a las correspondientes cifras anotadas en la columna t_i. La mayor de estas sumas es la fecha más temprana de ocurrencia del evento en cuestión. Se procede de la misma forma para los eventos siguientes y se van anotando en la columna t_j los resultados obtenidos. Se entiende que al calcular la fecha más temprana de un evento cualquiera, ya se habrán calculado antes las fechas más tempranas de los eventos anteriores.

A manera de ejemplo, calcularemos estos parámetros para la red propuesta:

$t_0 = 0$: ya que esta es la fecha más temprana para iniciar el proyecto. Este evento inicial no tiene actividades previas.

$t_1 = 10$: que es igual a la duración de la actividad (0.1) más la fecha más temprana de ocurrencia del evento inicial de la actividad, o sea, $t_{01} + t_0 = 10 + 0 = 10$. Sólo existe una suma posible ya que hay una sola actividad que termine en el nudo 1.

$t_2 = 4$: que es igual a $t_{02} + t_0 = 4 + 0 = 4$. También en este caso hay una sola actividad que termina en el evento 2.

$t_3 = 15$: en este caso hay dos actividades que tienen su terminación en el evento 3, como se puede apreciar en la columna 3 de la matriz: (0.3) y (2.3). Es entonces posible calcular dos sumas: $t_{03} + t_0 = 8 + 0 = 8$ y $t_{23} + t_2 = 11 + 4 = 15$, entre las cuales la mayor es 15. Esta cifra corresponderá a la fecha más temprana de ocurrencia del evento 3.

$t_4 = 29$: hay dos actividades que terminan en el evento 4: (2.4) y (3.4). Se forman las sumas $t_{24} + t_2 = 3 + 4 = 7$ y $t_{34} + t_3 = 14 + 15 = 29$. La máxima entre estas dos sumas es 29.

$t_5 = 36$: Existen tres actividades que terminan en el evento 5: (0.5), (1.5) y (4.5), como puede apreciarse en la columna 5. Se forman las sumas $t_{05} + t_0 = 9 + 0 = 9$; $t_{15} + t_1 = 7 + 10 = 17$ y $t_{45} + t_4 = 7 + 29 = 36$. Se elije la máxima entre ellas: 36.

$t_6 = 44$: Existe una sola actividad que termina en el evento 6: (4.6). Se suma entonces $t_{46} + t_4 = 15 + 29 = 44$.

$t_7 = 56$: Hay tres actividades que terminan en el nudo 7: (2.7), (5.7) y (6.7). Se forman las sumas $t_{27} + t_2 = 18 + 4 = 22$; $t_{57} + t_5 = 20 + 36 = 56$ y $t_{67} + t_6 = 10 + 44 = 54$. Se elije la mayor, 56, la cual, por ser el evento 7 la terminación del proyecto, es la fecha más temprana del evento 7 y a la vez el tiempo crítico del proyecto.

Luego de haber realizado todos estos cálculos en la matriz, ésta ha quedado de la siguiente manera:

	0	1	2	3	4	5	6	7	t_j
0		10	4	8		9			0
1						7			10
2				11	3			18	4
3					14				15
4						7	15		29
5								20	36
6								10	44
7									56

Fechas más tardías de los eventos

El cálculo de las fechas más tardías de ocurrencia de los eventos de la red es igualmente sencillo y similar en muchos respectos al anterior.

En primer lugar, es necesario agregar una fila de cálculos al final de la matriz de duraciones en forma similar a como se hizo antes; esta fila estará encabezada por el símbolo t'_j. De esta manera, la matriz presentará el siguiente aspecto:

	0	1	2	3	4	5	6	7	t_j
0		10	4	8		9			0
1						7			10
2				11	3			18	4
3					14				15
4						7	15		29
5								20	36
6								10	44
7									56
t'_i									

Se comienza el cálculo a partir del último lugar de la fila t'_i, correspondiente al evento final o terminación del proyecto, donde se escribe 56, que es la fecha más temprana de término del proyecto y al mismo tiempo la fecha más tardía. Para los eventos siguientes, en orden inverso, se escribe el resultado de la operación siguiente:

$$t'_i = \min_j(t'_j - t_{ij})$$

O sea, para cada evento, se examina la fila correspondiente al mismo y las cifras que aparezcan en la misma se resten de las correspondientes cifras de la fila t_i''. Se selecciona la menor de ellas; esta es la fecha más tardía de ocurrencia del suceso en cuestión.

Aplicaremos la rutina de cálculo enunciada a la red anterior:

$t_7'' = 56$: por ser éste el evento que marca el final del proyecto.

$t_6'' = 46$: al examinar la fila 6 se ve que hay una sola actividad que se inicie en el evento 6, la actividad (6.7) con una duración 10. Se calcula entonces $t_7'' - t_{67} = 56-10 = 46$. Es la fecha más tardía de ocurrencia del evento 6.

$t_5'' = 36$: hay una sola actividad que se inicia en el evento 5, como puede apreciarse del análisis de la fila 5, la actividad (5.7) con una duración 20. Se calcula entonces $t_7'' - t_{57} = 56-20 = 36$. Es la fecha más tardía del evento 5.

$t_4'' = 29$: existen dos actividades que se inician en el evento 4 según está indicado en la fila 4: las actividades (4.5) y (4.6) con duraciones 7 y 15 respectivamente. Se calcula $t_5''-t_{45} = 36-7 = 29$ y $t_6''-t_{46} = 46-15 = 31$. Se selecciona la menor de estas dos cantidades, 29, y esta es la fecha más tardía del evento 4.

$t_3'' = 15$: existe una sola actividad que tiene su inicio en el nudo 3: la actividad (3.4) con una duración 14. Se calcula $t_4''-t_{34} = 29-14 = 15$.

$t_2'' = 4$: hay tres actividades que se inician en el nudo 2: (2.3), (2.4) y (2.7) con duraciones 11, 3 y 18 respectivamente. Se calcula $t_3''-t_{23} = 15-11 = 4$ $t_4''-t_{24} = 29-3 = 26$ y $t_7''-t_{27} = 56-18 = 38$. El menor de estos resultados es 4; esta es la fecha más tardía de ocurrencia del evento 2.

$t_1'' = 29$: existe sólo una actividad que se inicia en el nudo 1: (1.5) con una duración 7. Se calcula $t_5''-t_{15} = 36-7 = 29$.

$t_0'' = 0$: existen cuatro actividades que se inician en el nudo 0, como se aprecia en la fila 0: (0.1), (0.2), (0.3) y (0.5) con duraciones 10, 4, 8, y 9 respectivamente. Se calcula $t_1''-t_{01} = 29-10 = 19$; $t_2''-t_{02} = 4-4 = 0$; $t_3''-t_{03} = 15-8 = 7$ y $t_5''-t_{05} = 36-9 = 27$. El menor de estos resultados es 0. Esta es la fecha más tardía del evento 0 la cual, por ser éste el evento inicial del proyecto, debe coincidir con la fecha más temprana del mismo.

La matriz ha quedado de la siguiente manera, luego de realizado los cálculos:

	0	1	2	3	4	5	6	7	t_j
0		10	4	8		9			0
1						7			10
2				11	3			18	4
3					14				15
4						7	15		29
5								20	36
6								10	44
7									56
t_i^0	0	29	4	15	29	36	46	56	

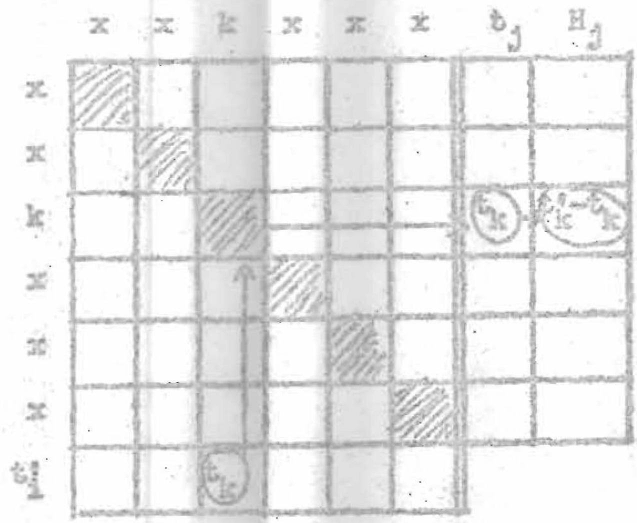
Holgura de los sucesos

Ya se había definido antes la holgura de un suceso k como la diferencia entre sus fechas más tardías y más temprana de ocurrencia o sea

$$H_k = t_k^0 - t_k$$

En la matriz que estamos usando, podemos hacer ese cálculo agregando una columna a la matriz, a la derecha de la columna t_j de fechas más tempranas, encabezándola con H_j. Para calcular la holgura de un evento k, se toma la cifra t_k^0, se asciende por la columna correspondiente hasta encontrar la diagonal principal de la matriz, se dobla a la derecha y se continúa hasta encontrar la cifra t_k en la columna encabezada por t_j. Se resta esta última de la primera y se escribe el resultado en el lugar correspondiente en la columna H_j.

Esquemáticamente, podemos representar la operación de la siguiente manera:



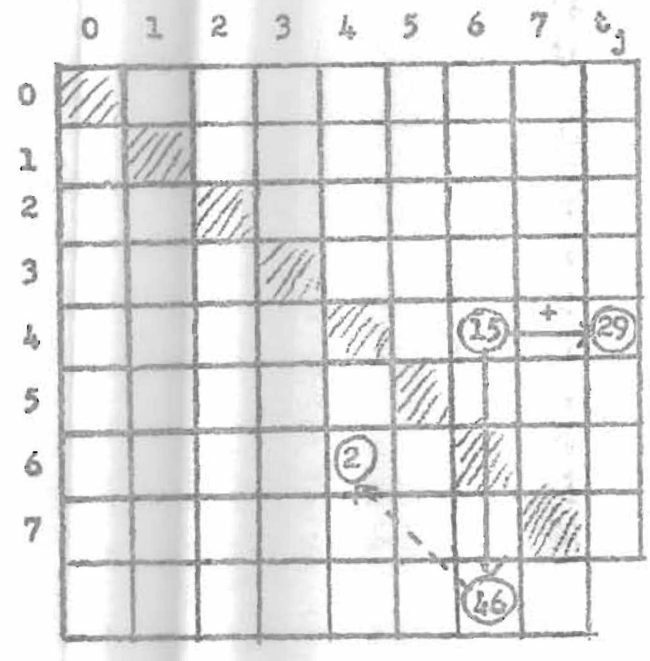
Al aplicar este procedimiento al cálculo de las holguras de los sucesos de la red propuesta, la matriz representativa de la misma presenta el siguiente aspecto:

	0	1	2	3	4	5	6	7	t_j	H_j
0		10	4	8		9			0	0
1						7			10	19
2				11	3			18	4	0
3					14				15	0
4						7	15		29	0
5								20	36	0
6								10	44	2
7									56	0
t'_i	0	29	4	15	29	36	46	56		

Esta modificación introducida, nos permitirá utilizar la parte inferior de la matriz que hasta ahora estaba en blanco gracias al hecho de haber enumerado los eventos de la red siguiendo las reglas establecidas.

La rutina de cálculo de la reserva total de las actividades es como sigue: supóngase que empezamos calculando la reserva total de la actividad (4.6), o sea, $R_{46}^{(t)}$. En la matriz, nos situamos en el cuadro (4.6) donde hemos anotado $t_{46}=15$, avanzamos por la fila 4 hasta encontrar $t_4=29$ en la columna t_j; sumamos estas dos cantidades: $t_{46} + t_4 = 29+15 = 44$; retrocedamos hasta el cuadro original y, en seguida, bajamos por la columna 6 hasta encontrar $t_6' = 49$ en la fila t_j'; restamos de esta cifra la suma anterior $46-44 = 2$; el resultado de la operación será la reserva total de la actividad (4.6); o sea, $R_{46}^{(t)} = 2$. Este resultado, como se dijo antes, se ingresa en el cuadro (6.4).

Esquemáticamente, la operación se realiza con los siguientes movimientos:



Realizando estos cálculos para todas las actividades de la red, obtenemos los resultados anotados en la matriz:

	0	1	2	3	4	5	6	7	t_j	H_j
0		10	4	8		9			0	0
1	19					7			10	19
2	0			11	3			18	4	0
3	7		0		14				15	0
4			22	0		7	15		29	0
5	27	19			0			20	36	0
6					2			10	44	2
7			34			0	2		56	0
t'_i	0	29	4	15	29	36	46	56		

En los cálculos realizados, se puede apreciar que hay algunas actividades que tienen una reserva total igual a cero; estas actividades son: (0.2), (2.3), (3.4), (4.5) y (5.7). Estas son las actividades críticas, cuyo inicio y terminación no pueden atrasarse para no atrasar la terminación del proyecto. Constituyen la ruta crítica del proyecto.

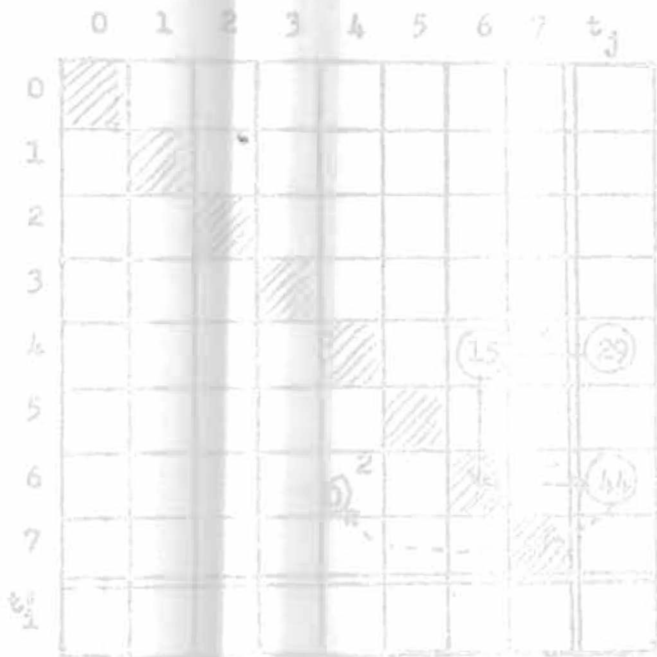
b) Reserva libre. La hemos definido mediante la fórmula:

$$R_{ij}^{(1)} = t_j - t_i - t_{ij}$$

donde t_j es la fecha más temprana del evento final, t_i la fecha más temprana del evento inicial, y t_{ij} la duración de la actividad.

Usando la misma convención establecida para el cálculo de la reserva total, procederíamos de la siguiente manera: supóngase que vamos a calcular la reserva libre de la actividad (4.6). Nos situamos en el cuadro $t_4 = 29$ de la columna t_j, correspondiente a la fecha más temprana de inicio de la actividad en referencia, nos movemos por la misma fila hacia la izquierda hasta encontrar el cuadro $t_{46} = 15$ correspondiente a la duración de la actividad (4,6), sumamos ambas dos cantidades: $t_4 + t_{46} = 29+15 = 44$. Nos movemos hacia abajo por la fila correspondiente hasta encontrar la diagonal de la matriz; de allí doblamos hacia la derecha por la misma fila hasta encontrar $t_6 = 44$ en la columna t_j correspondiente a la fecha más temprana de terminación de la actividad; restamos de esta cifra la anterior: $44-44 = 0$ y este resultado será la reserva libre de la actividad (4,6) o sea $R^{(1)}_{46} = 0$. Ingresamos esta cifra en el cuadro (6,4); como este cuadro ya está ocupado con la cifra correspondiente a la reserva total de la actividad, escribimos la reserva libre en el extremo inferior izquierdo del mismo cuadro.

Podemos representar gráficamente los movimientos de esta operación la siguiente manera:



Y realizando estos cálculos para todas las actividades de la red, obtenemos los resultados siguientes:

	0	1	2	3	4	5	6	7	t_j	H_j
0		10	4	8		9			0	0
1	0^{19}					7			10	19
2	0^{0}			11	3			18	4	0
3	7^{7}		0^{0}		14				15	0
4			22^{22}	^{0}		7	15		29	0
5	27^{27}	19^{19}			0^{0}			20	36	0
6					0^{2}			10	44	2
7			34^{34}			0^{0}	2^{2}		56	0
$t_i^!$	0	29	4	15	29	36	46	56		

c) Reserva independiente. Se ha definido mediante la expresión:

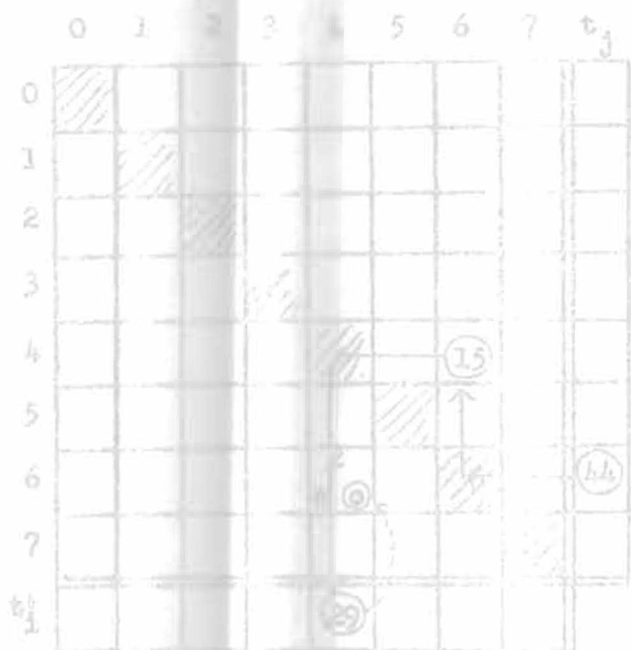
$$R_{ij}^{(1)} = t_j - t_i^! - t_{ij}$$

donde t_j es la fecha más temprana para terminar la actividad, $t_i^!$ es la fecha más tardía de inicio de ella, y t_{ij} es la duración de esa actividad.

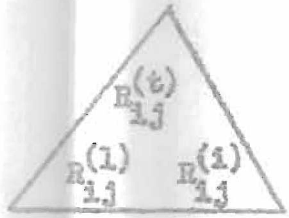
Se procede de la siguiente manera, suponiendo que estamos, otra vez, calculando la reserva libre de la actividad (4.6): nos situamos en el cuadro $t_6=44$ en la fila t_j correspondiente a la fecha más temprana de terminación de la actividad, nos movemos por la fila hacia la izquierda hasta alcanzar la diagonal de la matriz, doblamos hacia arriba por la columna hasta alcanzar el cuadro $t_{46} = 15$ correspondiente a la duración de la actividad, restamos esta cifra de la primera: $44-15 = 29$; en seguida doblamos hacia la izquierda y avanzamos por la fila hasta encontrar la diagonal, doblamos hacia abajo y avanzamos por la columna hasta encontrar $t_4^! = 29$ en la fila $t_i^!$ correspondiente a la fecha más tardía de inicio de la actividad; restamos esta cifra del resultado de la operación anterior: $29-29 = 0$ y este último resultado es la reserva independiente de la actividad (4.6).

es decir, $R_{46}^{(i)} = 0$. Se ingresa este resultado en el cuadro (6.4), con se han escrito las dos reservas anteriormente calculadas, en el extre inferior derecho.

En forma esquemática, las operaciones realizadas se podrían repr en el gráfico siguiente:



el vértice inferior derecho escribimos la reserva independiente, de la siguiente manera:



Actividad		Duración	Fecha más temprana	
Descripción	(i,j)	t_{ij}	Inicio	Término
A	(0.1)	10	0	10
B	(0.2)	4	0	4
C	(0.3)	8	0	15
D	(0.5)	9	0	36
E	(1.5)	7	10	36
F	(2.3)	11	4	15
G	(2.4)	3	4	29
H	(2.7)	18	4	56
I	(3.4)	14	15	29
J	(4.5)	7	29	36
K	(4.6)	15	29	44
L	(5.7)	20	36	56
M	(6.7)	10	44	56

Fecha más tardía		Reservas			Características
Inicio	Término	Total	Libre	Indep.	
0	29	19	0	0	No crítica
0	4	0	0	0	Crítica
0	15	7	0	0	No crítica
0	36	27	27	27	No crítica
29	36	19	19	0	No crítica
4	15	0	0	0	Crítica
4	29	22	22	22	No crítica
4	56	34	34	34	No crítica
15	29	0	0	0	No crítica
29	36	0	0	0	Crítica
29	44	2	0	0	No crítica
36	56	0	0	0	Crítica
46	56	2	2	0	No crítica

REPRESENTACION DEL PROGRAMA EN UN DIAGRAMA DE BARRAS

Podemos utilizar el conocido diagrama de Gantt para representar el programa elaborado, así como las reservas totales de tiempo de las actividades del proyecto. Esta representación nos permitirá, en primer lugar, tener una visión clara de las fechas programadas ya que el esquema de flechas, al no tener un sentido vectorial como se dijo antes, dificulta algo un control rápido de las mismas; y en segundo lugar, el tener representadas en el gráfico las reservas totales de las actividades no críticas, permite apreciar las posibilidades de elaborar programas alternativos para enfrentar circunstancias especiales mediante el adecuado manejo de dichas reservas.

En los gráficos que siguen, se presentan dos programas límites del mismo proyecto que ya conocemos. La figura 1 es la representación gráfica de un programa del proyecto en el cual las actividades se realizan en las fechas más tempranas; la figura 2 es otro programa en que las mismas se deben realizar en las fechas más tardías. En ambos gráficos, las actividades críticas se presentan con una barra doble y las actividades no críticas con una linea sencilla; las reservas totales de las actividades no críticas se presentan mediante una línea discontínua a continuación de la actividad. Tal representación traduce el hecho de que las actividades no críticas, en un programa consistente, pueden situarse en cualquier lugar dentro del trazo marcado por la línea contínua y la línea discontínua correspondiente con la única condición de respetar las relaciones de precedencia existentes entre ellas.

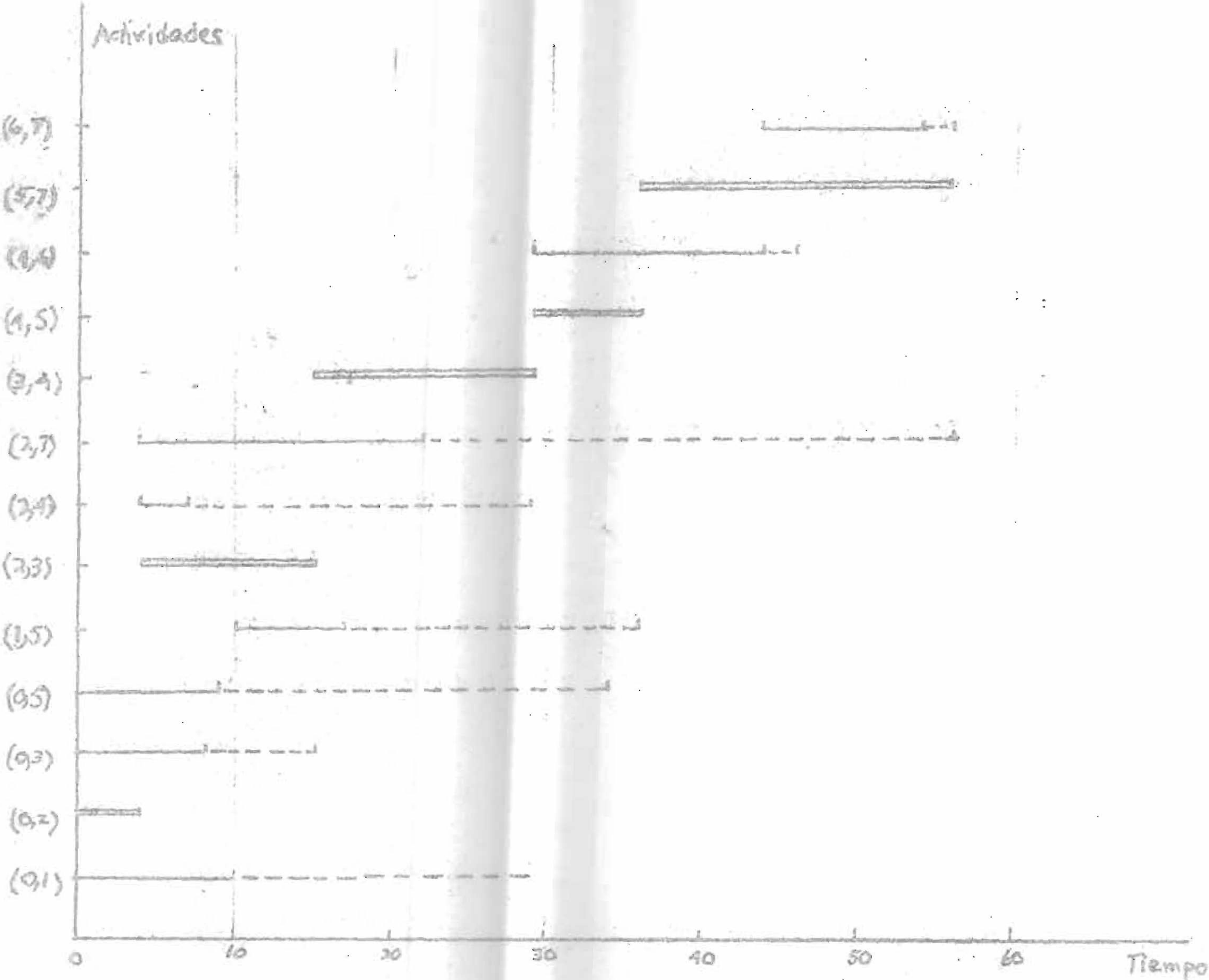


Figura 1.- Programación del proyecto cuando todas las actividades comienzan en la fecha más temprana.

══════ Actividades críticas

– – – – – Reserva total de la actividad

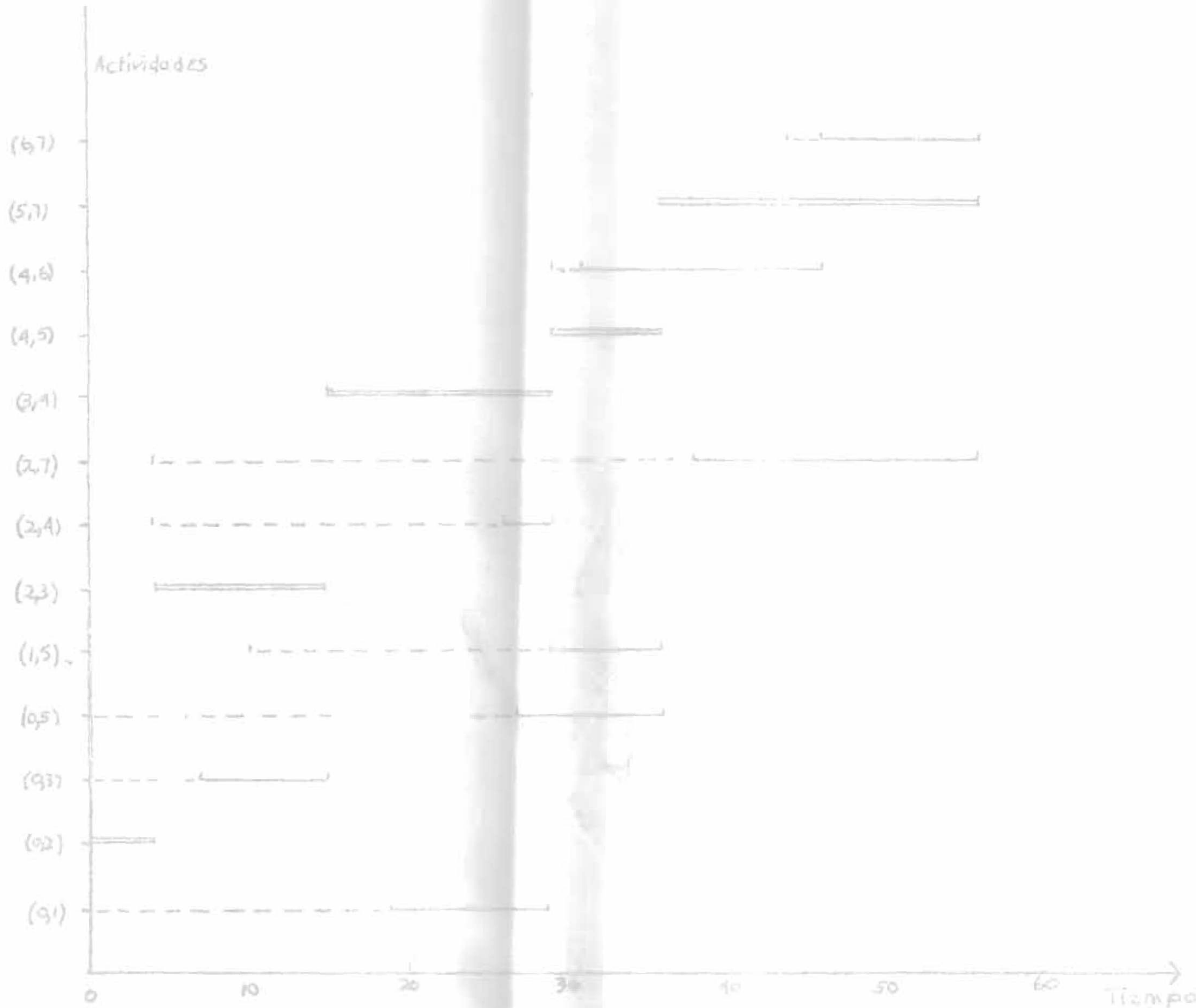


Figura 2.- Programación del proyecto cuando todas las actividades comienzan en su fecha más tardía.

═══════ Actividades críticas

- - - - - Reserva total de la actividad

DISTRIBUCION DE LOS RECURSOS DURANTE LA EJECUCION DEL PROYECTO

Los gráficos que anteceden permiten apreciar las posibilidades de desplazar las actividades del proyecto sin que ello signifique una prolongación de la duración del proyecto en su conjunto. Esta flexibilidad de la programación tiene una gran importancia cuando se trata de lograr una distribución conveniente de los recursos requeridos en el desarrollo del proyecto.

La distribución de las necesidades de recursos a través del tiempo depende, en primer lugar, de la cuantificación de cada actividad del proyecto, es decir, de la combinación de duración y recursos seleccionada para la misma, y en segundo lugar, del programa elaborado para la realización de las diferentes actividades.

En esta parte se supondrá que para cada actividad se ha seleccionado ya una determinada combinación de duración y recursos: la duración de la actividad se supondrá dada y ello determinará un monto de recursos a utilizar en su realización. La distribución de la cantidad total de recursos a emplear en cada instante dependerá entonces solamente del programa que se elabore para realizar el proyecto.

El problema consiste, en consecuencia, en adoptar un programa, entre la gran variedad existente, con el cual se logre una distribución satisfactoria del uso de los recursos.

Dispondremos de una tabla que indica la cantidad de recursos requeridos para realizar cada actividad así como la duración de la misma.

TABLA

Actividad	Duración	Recurso A	Recurso B	Recurso C	......
0-1	10	6	x	x	......
0-2	4	10	x	x	......
0-3	8	4	x	x	......
0-5	9	6	x	x	......
1-5	7	7	x	x	......
2-3	11	5	x	x	......
2-4	3	8	x	x	......
2-7	18	3	x	x	......
3-4	14	12	x	x	......
4-5	7	12	x	x	......
4-6	15	4	x	x	......
5-7	20	8	x	x	......
6-7	10	2	x	x	......

No todos los recursos que se deben utilizar en la ejecución de un proyecto tienen la misma importancia; necesariamente deberá haber algunos que tienen una mayor incidencia en dicha ejecución ya sea porque se emplean en cantidades mayores, o porque son costosos y no es conveniente subutilizarlos, o porque su disponibilidad sea limitada. A este recurso más importante, en el caso que usaremos de ejemplo, le llamaremos Recurso A el cual puede ser mano de obra, tractores, capital, etc., y elaboraremos un programa conveniente del proyecto que contemple su posición relevante en el conjunto de los recursos.

En primer lugar, consideraremos el programa de la figura 1, en que las actividades están señaladas para sus fechas más tempranas, es decir, sin hacer uso de las reservas de tiempo de las mismas. Agregaremos esta vez, sobre cada una de las barras indicativas de las actividades, una cantidad encerrada en paréntesis la cual indica el número de unidades del Recurso A que se requieren para realizar la actividad. Anexaremos a este gráfico otro que señale la cantidad total del recurso que se requiere en cada instante. Al gráfico resultante (figura 3) le llamaremos "Intensidad de uso del Recurso A" y su significado concreto es que cada punto del eje de abscisas corresponde a un instante en el tiempo, y la ordenada del punto de la poligonal correspondiente a ese instante representa la suma de las cantidades de Recurso A empleadas en las actividades que se ejecutan en dicho momento. Por ejemplo, durante las primeras cuatro semanas de trabajo se están empleando 26 unidades del Recurso A de las cuales 6 corresponden a la actividad (0,1), 10 a la actividad (0,2), 4 a la actividad (0,3) y 6 a la actividad (0,5). Todas estas actividades se están ejecutando simultáneamente. En las tres semanas siguientes, el total de Recurso A empleado se eleva a 32 unidades que es la suma de los requerimientos del recurso de las actividades (0,1), (0,3), (0,5), (2,3), (2,4) y (2,7).

Este gráfico nos da una importante información anticipada respecto a la cantidad de recursos que será necesario movilizar en cada momento durante la ejecución del proyecto. Esta información permitirá en primer lugar programar en forma eficiente la adquisición de los mismos; en segundo lugar permitirá comparar los requerimientos de recursos con las disponibilidades de los mismos con el fin de prever el monto y el instante en que podrían ocurrir eventuales déficits de recursos que causarán una paralización de los trabajos. Por otra parte, el gráfico puede indicar una distribución inadecuada de la intensidad de uso del recurso por presentar ésta grandes fluctuaciones: necesidades grandes en ciertos momentos y subutilización en otros.

Como el gráfico de la figura 3 corresponde a la intensidad de uso del recurso con un programa de fechas más tempranas, las mayores necesidades del recurso se concentran en las primeras semanas donde se hace necesario una utilización máxima de 32 unidades de recurso, cantidad que decae en las semanas finales hasta un mínimo de 9 unidades con fluctuaciones apreciables en los momentos centrales.

La figura 4 permite apreciar cómo una programación diferente de las actividades del proyecto hace variar radicalmente la intensidad de uso durante el tiempo de ejecución. Esta figura presenta la intensidad de uso del recurso en un programa de fechas más tardías, o sea, en el programa se ha hecho un uso total de las reservas de las actividades no críticas. Ahora las mayores necesidades de recurso se presentan en las semanas centrales donde la intensidad de uso llega a un máximo de 32 unidades, la intensidad mínima ocurre en las primeras semanas y alcanza un nivel de 5 unidades.

Las dos figuras presentadas representan dos programas límites y las respectivas distribuciones de la intensidad de uso del recurso A a que ellos dan lugar. Cabe aquí señalar que no es una práctica conveniente formular programas en que se haga uso de todas las reservas de tiempo ya que un atraso no esperado en la ejecución de cualquiera de las actividades del proyecto causaría un retraso de la misma magnitud en la terminación del proyecto; en este sentido, un programa así convierte en críticas todas las actividades del proyecto.

En la figura 5 presentamos un programa intermedio en que se ha hecho un uso parcial de las reservas de tiempo, teniendo como objetivo suavizar las fluctuaciones de los requerimientos de recursos que están presentes en los dos programas anteriores. En el diagrama de barras se han dejado

Figura 3.- Intensidad de uso de un recurso con un programa en que las actividades se realizan en sus fechas más tempranas.

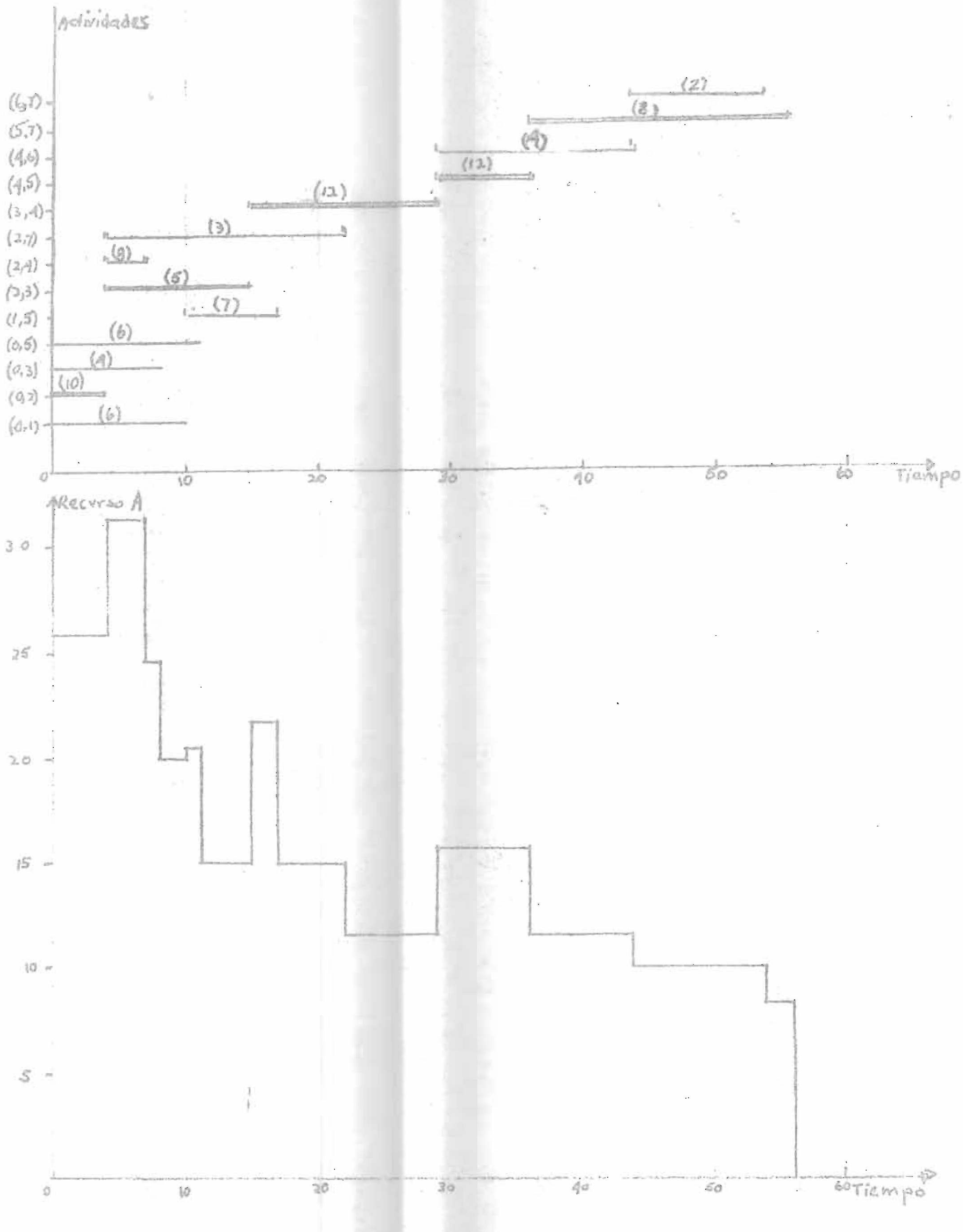
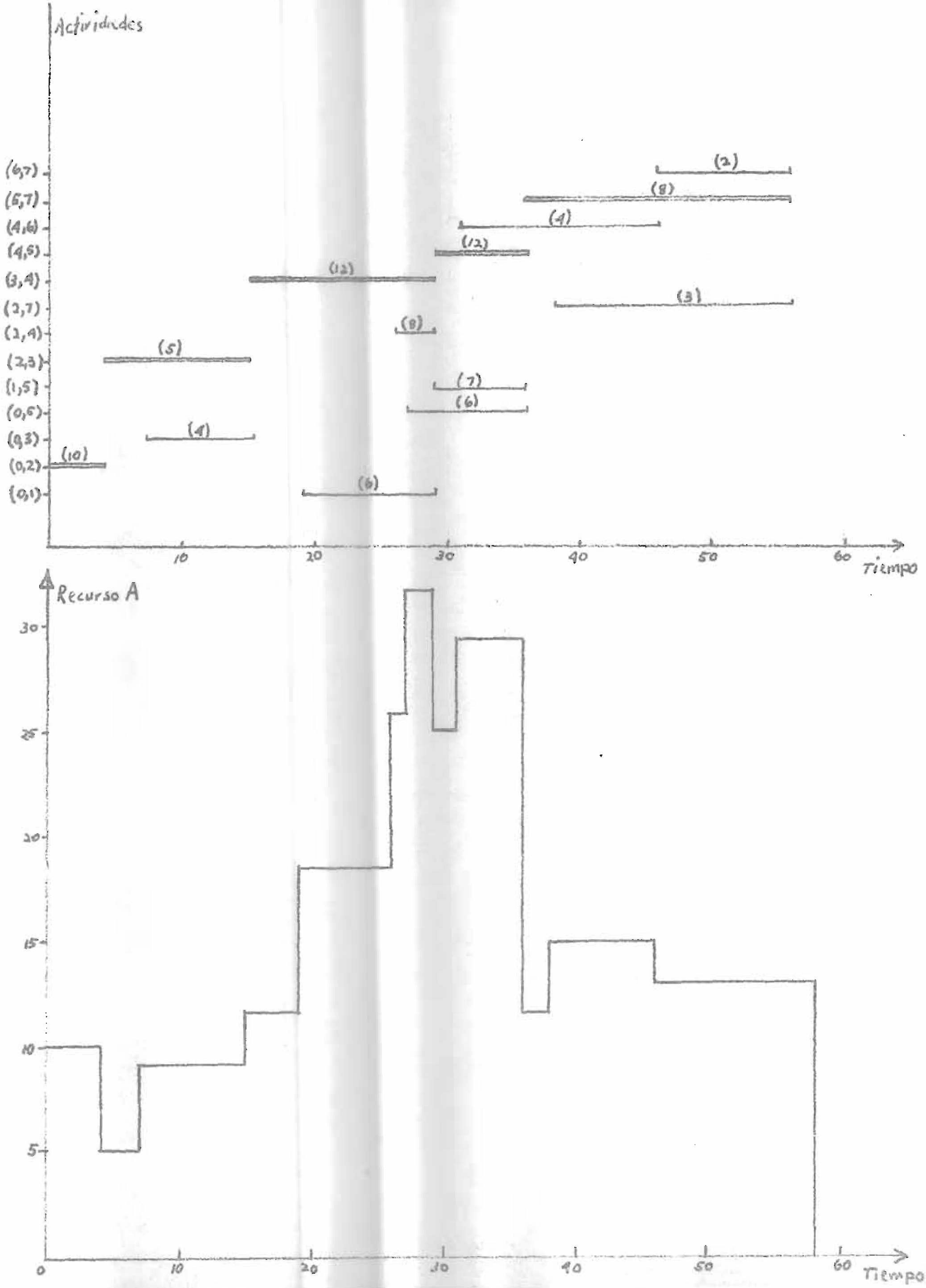


Figura 4.- Intensidad de uso de un recurso con un programa en que las actividades se realizan en sus fechas más tardías.



indicadas las reservas totales para que quede claro la forma en que se han usado. Se puede apreciar en la figura que con ello se ha logrado una significativa reducción de las fluctuaciones de la intensidad de uso; la intensidad máxima es ahora 19 unidades y la mínima es 13 unidades.

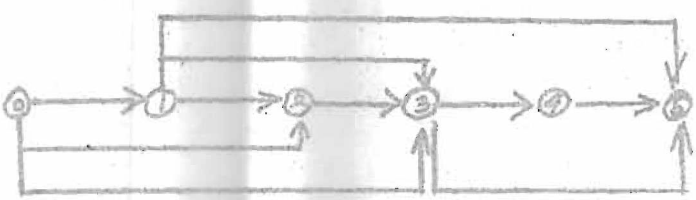
Esta manipulación de la reserva de las actividades es extremadamente útil cuando existen problemas de limitaciones rígidas en las disponibilidades del recurso; supóngase que el recurso A a que nos hemos referido esté constituido por un cierto tipo de tractores; si el parque disponible de los mismos está compuesto por 20 tractores, el proyecto no se podría programar en fechas más tempranas ni en fechas más tardías las cuales impliquen un uso máximo de 32 tractores durante ciertos períodos. Si de todas maneras se desea terminar el proyecto en las 56 semanas previstas sin tener que recargar los costos, la manipulación de las reservas para formular programas alternativos es de una ineludible necesidad.

El programa presentado en la figura 5 se formuló teniendo como objetivo la eliminación de las grandes fluctuaciones de la intensidad de uso del recurso A. Bien podría tenerse un objetivo diferente, como ser el logro de una distribución de la intensidad de uso siempre creciente a través de la duración del proyecto; una situación de ese tipo es perfectamente imaginable cuando el recurso en referencia es un equipo de un gran volumen que deba ser desmontado cuando no está en uso y cuyos gastos de montaje y desmontaje sean apreciables; o en el caso de la mano de obra en que no siempre es posible ni conveniente mantener una política de empleo fluctuante con contrataciones y despidos alternativos. Evidentemente, cualquiera que sea el objetivo, el logro del mismo necesariamente dará lugar a programas diferentes. Con el fin de formular programas realmente eficientes se hace necesario analizar de antemano los objetivos que se perseguirán respecto a la intensidad de uso del recurso más importante.

Por otra parte, la consideración de la situación de otro recurso cualquiera en la elaboración del programa podría introducir una solución que estuviese en contradicción con la solución anterior. O sea, el programa que implica una distribución conveniente del recurso A no necesariamente coincide con el programa que implica una distribución conveniente del recurso B. En esta situación se hace necesario una definición clara de la importancia relativa de todos los recursos para la ejecución del proyecto y en el caso de existir varios recursos igualmente importantes correspondera adoptar un programa de compromiso que se acerque lo más posible a situaciones convenientes en la distribución de dichos recursos.

Casi es innecesario apuntar que la solución expuesta en la figura 5 ha sido hallada mediante "tanteos" y por tanto es imposible verificar si es o no una solución óptima. La solución óptima de la cuestión planteada es un problema matemático bastante complejo cuya solución aún no ha sido hallada. La afirmación anterior vale para la solución general al problema de elaborar un programa que de lugar a una distribución óptima de la intensidad de uso del recurso durante la ejecución de un proyecto.

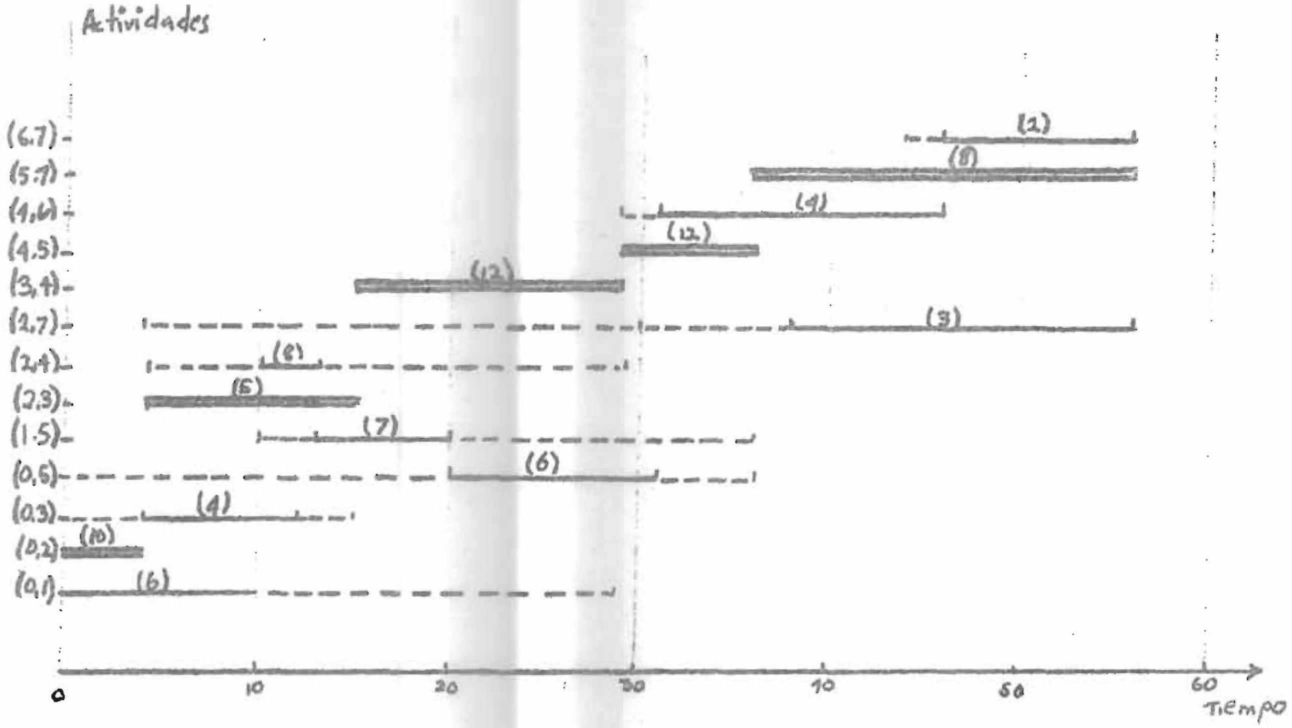
Se ha logrado formular matemáticamente el problema y solucionarlo en un caso particular de redes de actividades. La particularidad del caso reside en las características de la red en cuestión; se trata de redes en las cuales exista una trayectoria que pase por todos los nudos de la misma, es decir, el tipo de redes que pueden dibujarse como en la figura:

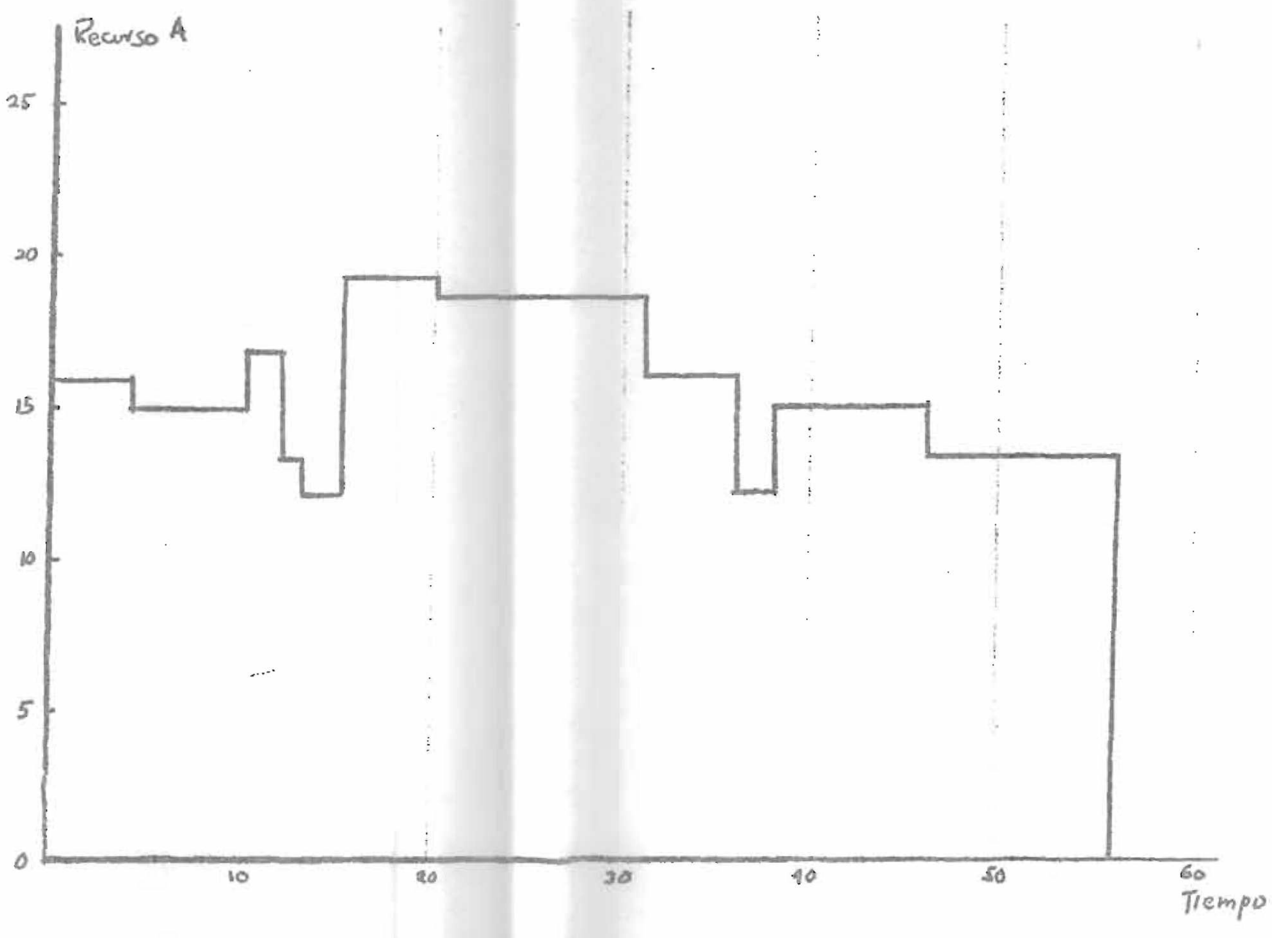


Además, se supone que las actividades que componen el proyecto son de tal naturaleza que pueden ser interrumpidas en cualquier etapa de su ejecución para ser continuadas posteriormente.

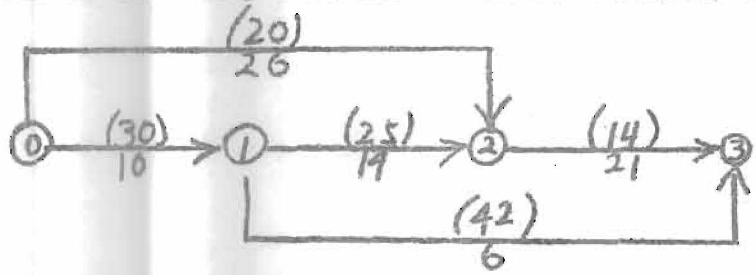
Todo lo anterior es con el objeto de dividir la duración del proyecto en períodos de longitud variable durante las cuales se ejecutan simultáneamente una o varias actividades, siendo el criterio de optimización la obtención de un programa de duración mínima sujeto a las restricciones que imponen la disponibilidad de los recursos y las duraciones de las actividades.

Figura 5.- Intensidad de uso de un recurso con un programa en que las actividades se realizan en fechas "convenientes"





Para ejemplificar la cuestión, considérese una red sencilla del tipo enunciado:



Se observará que en esta red existe una trayectoria que recorre todos los nudos.

En cada arco se han escrito dos cifras: una de ellas corresponde a la duración de la actividad, y la otra, encerrada en paréntisis, representa la cantidad de recursos necesaria para la ejecución de dicha actividad.

Supondremos que cada actividad puede interrumpirse en cualquier momento para continuarse posteriormente; la única condición que se exige es que la duración de la misma, en cualquier forma que se realice, permanezca invariable y, como consecuencia de ello, que en cualquier momento que ella se ejecute comprometa la misma cantidad del recurso en cuestión.

Ahora, estableceremos todas las combinaciones de actividades que pueden realizarse simultáneamente:

Combinaciones de 1 actividad		Combinaciones de 2 actividad		Combinaciones de 3 actividad
1.-	(0,1)	6.-	(0,1) (0,2)	11.- (0,2) (1,2) (1,3)
2.-	(0,2)	7.-	(0,2) (1,2)	
3.-	(1,2)	8.-	(0,2) (1,3)	
4.-	(1,3)	9.-	(1,2) (1,3)	
5.-	(2,3)	10.-	(1,3) (2,3)	

Estas combinaciones representan la siguiente situación. Por ejemplo: la actividad (0,2) puede realizarse sola sin otras actividades simultáneas, o bien puede ejecutarse simultáneamente con la actividad (0,1), con la actividad (1,2) o con la actividad (1,3), o por último, puede realizarse al mismo tiempo con las actividades (1,2) y (1,3).

Lo anterior no quiere decir que todas estas posibilidades sean excluyentes; por el contrario, la actividad (0,2) puede ejecutarse sola durante un cierto tiempo y simultáneamente con otras actividades el resto del tiempo de su duración. Lo mismo vale para todas las actividades.

Introduciremos ahora las variables d_i que representa el tiempo durante el cual se realiza una cierta combinación i de actividades simultáneamente.

d_1 = tiempo durante el cual se ejecuta la actividad (0,1) sola
d_2 = " " " " " " " " (0,2) sola
d_3 = " " " " " " " " (1,2) sola
d_4 = " " " " " " " " (1,3) sola
d_5 = " " " " " " " " (2,3) sola
d_6 = tiempo durante el cual se ejecuta la combinación de actividades (0,1) (0,2)
d_7 = " " " " " " " " (0,2) (1,2)
d_8 = " " " " " " " " (0,2) (1,3)
d_9 = " " " " " " " " (1,2) (1,3)
d_{10} = " " " " " " " " (1,3) (2,3)
d_{11} = " " " " " " " " (0,2) (1,2) (1,3)

De lo expuesto, resulta obvio que la duración de cada actividad deberá ser igual a la suma de las duraciones de las combinaciones de actividades de las cuales dicha actividad forma parte. Por ejemplo: t_{02} = Duración de la actividad (0,2) = $d_2 + d_6 + d_7 + d_8 + d_{11}$ = 26 semanas.

O sea, la duración de la actividad (0,2) será igual al tiempo en que se realiza sola, más el tiempo en que se realiza acompañada de la actividad (0,1), más el tiempo en que se realiza simultáneamente con la actividad (1,2), más el tiempo en que se realiza simultáneamente con la actividad (1,3), más el tiempo en que ella se ejecuta simultáneamente con las actividades (1,2) y (1,3).

Lo mismo es válido para todas las actividades y de allí sale el siguiente grupo de restricciones:

$t_{01} = 10$ semanas : $d_1 + d_6 = 10$

$t_{02} = 26$ semanas : $d_2 + d_6 + d_7 + d_8 + d_{11} = 26$

$t_{12} = 14$ semanas : $d_3 + d_7 + d_9 + d_{11} = 14$

$t_{13} = 6$ semanas : $d_4 + d_8 + d_9 + d_{10} + d_{11} = 6$

$t_{23} = 21$ semanas : $d_5 + d_{10} = 21$

La siguiente cuestión a considerar es la intensidad de uso del recurso a que da lugar cada combinación de actividades simultáneas, es decir, la cantidad de recursos que requiere la ejecución simultánea de cada combinación. Por ejemplo, la combinación (0,2) (1,2) (1,3) requiere el uso de 85 unidades del recurso, que es la suma de los requerimientos de cada una de las tres actividades de la combinación.

Usaremos el símbolo I_i para la intensidad de uso del recurso en la combinación i.

Tendremos:

$I_1 = 30$	$I_6 = 50$	$I_{11} = 87$
$I_2 = 20$	$I_7 = 45$	
$I_3 = 25$	$I_8 = 62$	
$I_4 = 42$	$I_9 = 67$	
$I_5 = 14$	$I_{10} = 56$	

Supóngase ahora que la disponibilidad del recurso está limitada, digamos, a 50 unidades. Esto impone al problema una restricción respecto a las combinaciones que pueden ser factibles. En el problema planteado, esta limitación significaría que las combinaciones (0,2) (1,3), (1,2) (1,3), (1,3) (2,3) y (0,2) (1,2) (1,3) no pueden realizarse por requerir una cantidad de recursos superior a la disponibilidad.

Como se trata de ejecutar el proyecto en un tiempo mínimo dadas las limitaciones de recursos disponibles podría plantearse el siguiente programa lineal:

Minimizar $D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7$

Sujeto a las restricciones

$$d_1 + d_6 = 10$$
$$d_2 + d_6 + d_7 = 26$$
$$d_3 + d_7 = 14$$
$$d_4 = 6$$
$$d_5 = 21$$
$$d_i \geqslant 0$$

Como puede apreciarse, las restricciones impuestas al problema por las limitaciones en la disponibilidad del recurso han sido introducidas en el modelo en forma implícita, eliminando de las posibilidades de ejecución las combinaciones que impliquen un uso del recurso mayor de 50 unidades. En este caso, de partida se han anulado las variables d_8, d_9, d_{10} y d_{11} y el problema ha quedado planteado en la forma expuesta.

La solución, obtenida mediante el cálculo numérico siguiendo el método de la programación lineal es la siguiente:

$d_6 = 10$ semanas

$d_2 = 2$ semanas

$d_7 = 14$ semanas

$d_4 = 6$ semanas

$d_5 = 21$ semanas

Duración del proyecto: 53 semanas

El significado de la solución es el siguiente:

$d_6 = 10$ quiere decir que la combinación de actividades (0,1) (0,2) se ejecuta durante 10 semanas

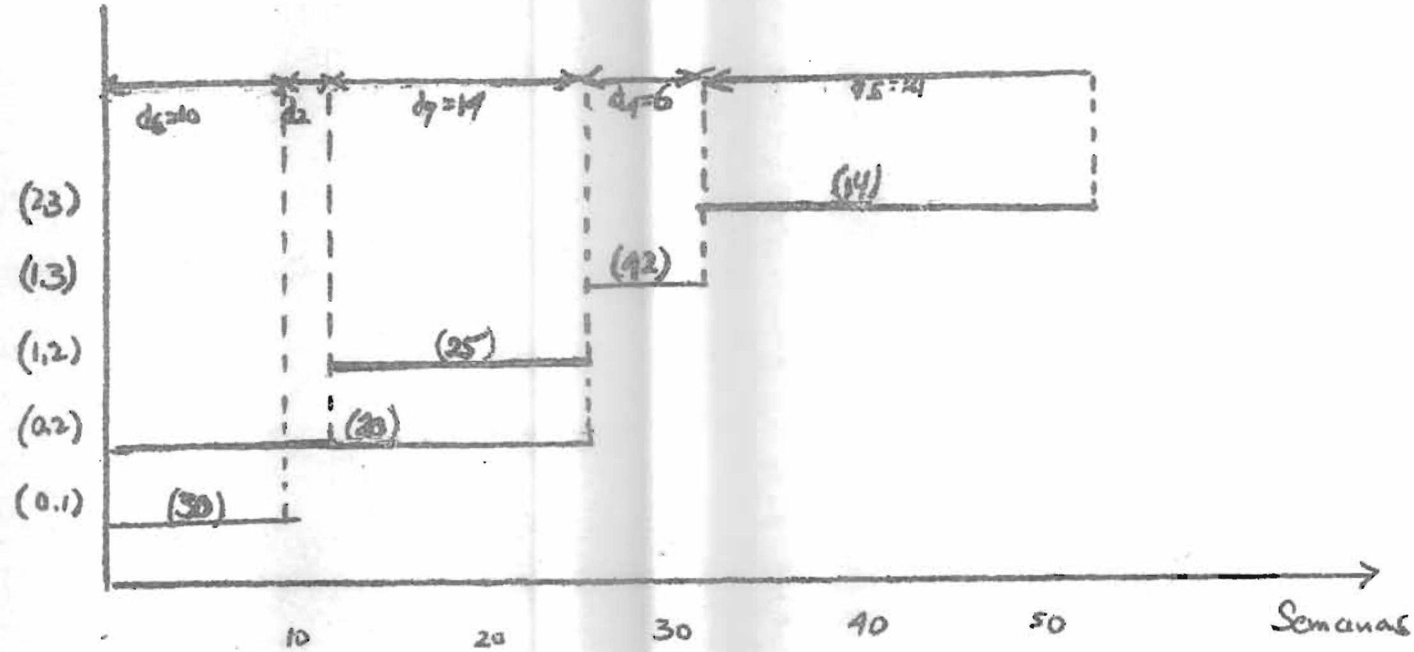
$d_2 = 2$ quiere decir que la actividad (0,2) se ejecuta sola durante 2 semanas

$d_7 = 14$ quiere decir que la combinación de actividades (0,2) (1,2) se ejecuta durante 14 semanas

$d_4 = 6$ quiere decir que la actividad (1,3) se ejecuta sola durante 6 semanas

$d_5 = 21$ quiere decir que la actividad (2,3) se ejecuta sola durante 21 semanas.

Representando este programa en un diagrama de Gantt:



Se observa que en ningún instante se está usando mayor cantidad del recurso que la disponibilidad del mismo; sin embargo, esta limitación del recurso ha obligado al proyecto a extenderse en su duración más allá que la duración crítica de 47 semanas. La duración del proyecto resultó igual a 53 semanas.

Surge entonces el problema de cual sería la dotación mínima del recurso que haría que el proyecto pudiese realizarse en su tiempo crítico de 47 semanas. Para averiguar esto, trataremos el problema al estilo de la programación paramétrica. Se vió en el caso anterior que las combinaciones que quedaron dentro del modelo fueron aquellas que requerían una cantidad de recurso no superior a 50; esto significó que las combinaciones (0,2) (1,3), (1,2) (1,3), (1,3) (2,3) y (0,2) (1,2) (1,3) quedasen eliminadas por requerir respectivamente 62, 67, 56 y 87 unidades.

Si comenzamos a aumentar la disponibilidad del recurso de forma que cada vez podamos introducir una combinación de los que quedaron fuera llegará un momento en que el proyecto podrá realizarse en el tiempo crítico sin que necesariamente haya que disponer de la cantidad de recurso necesario para ejecutar la actividad más costosa.

De acuerdo con esto, entonces resolveremos el problema si disponemos ahora de 56 unidades de recurso. Con esta disponibilidad podemos introducir en el modelo la combinación (1,3) (2,3), o sea la variable d_{10} y el problema será el siguiente:

Minimizar $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8 + d_{10}$

$$d_1 + d_6 = 10$$

$$d_2 + d_6 + d_7 = 26$$

$$d_3 + d_7 = 14$$

$$d_4 + d_{10} = 6$$

$$d_5 + d_{10} = 21$$

$$d_i \geqslant 0$$

Al resolver el problema, la solución que se obtiene es la siguiente:

d_6 = 10 semanas

d_{10} = 6 semanas

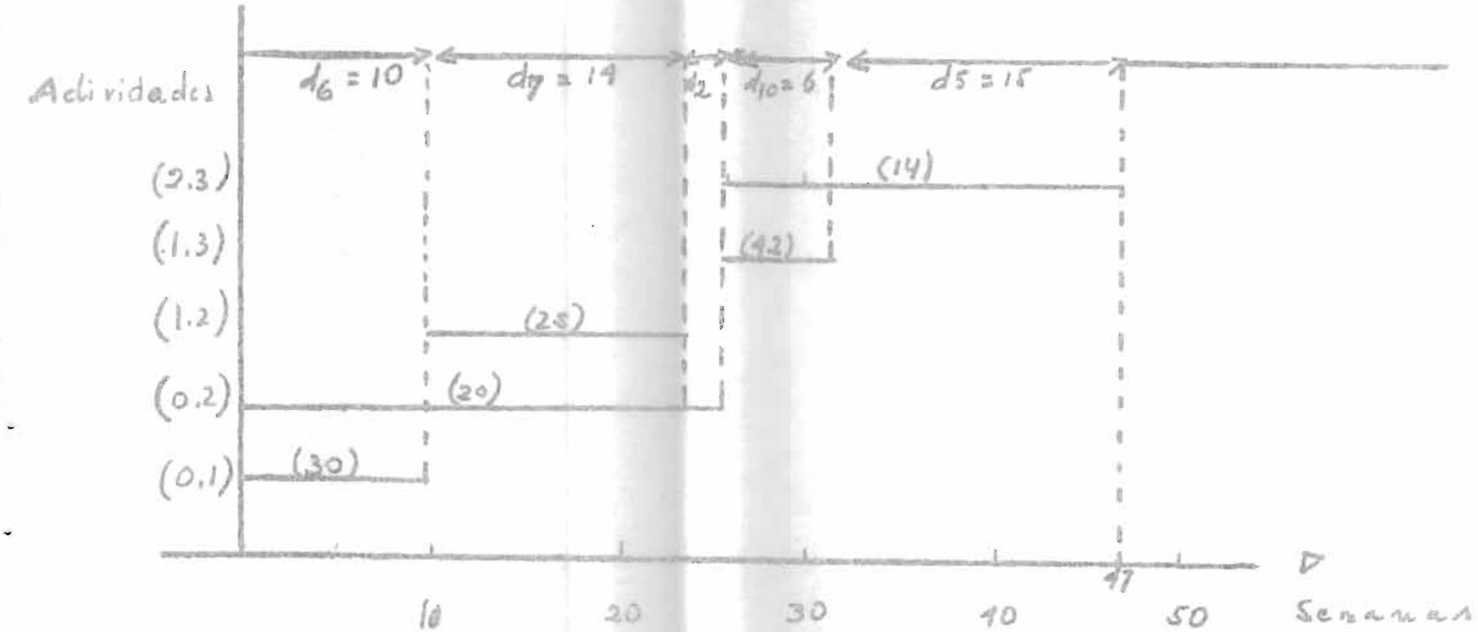
d_7 = 14 semanas

d_2 = 2 semanas

d_5 = 15 semanas

Duración del proyecto: 47 semanas.

Estos resultados pueden interpretarse en la forma anterior y representarse en un diagrama de Gantt.

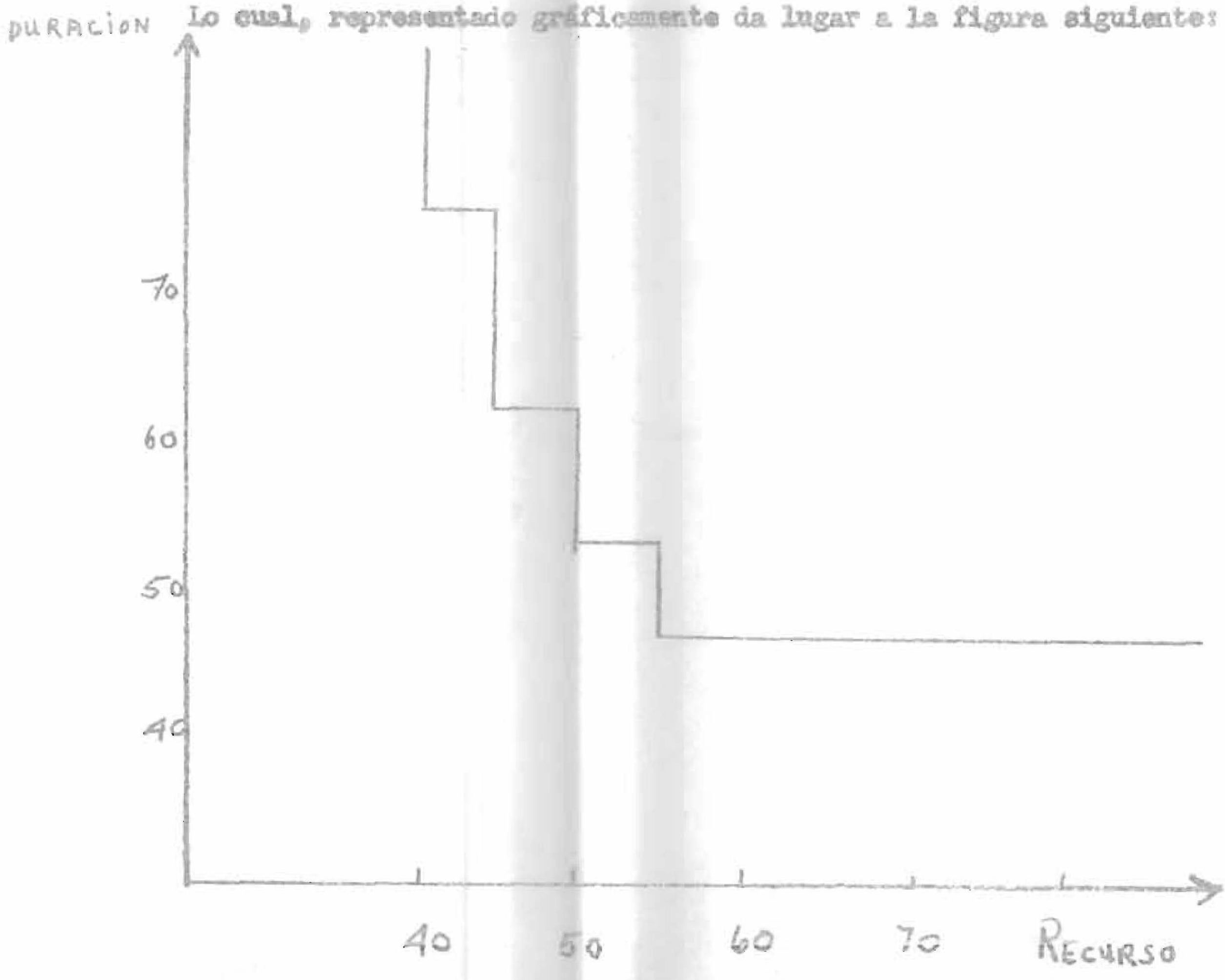


Se ha obtenido en esta etapa la duración mínima del proyecto, la duración crítica, más allá de la cual no puede acortarse aunque se disponga de más recurso. La conclusión es que la cantidad mínima necesaria del recurso para terminar el proyecto en su fecha crítica es de 62 unidades. Menor disponibilidad del mismo significará que la terminación del proyecto deberá sufrir un retraso.

Se ha calculado la duración del proyecto para otras disponibilidades del recurso a partir de 42 unidades, que es la cantidad mínima para ejecutar las actividades del proyecto. Con una disponibilidad menor no sería posible ejecutar el proyecto ya que eso significaría que la actividad (1,3) no podría realizarse. Con una disponibilidad de 42 unidades se podrían realizar todas las actividades pero no habría posibilidad de una ejecución simultánea de más de una actividad; esto traería como consecuencia que la duración del proyecto sería la máxima y ella sería igual a la suma de las duraciones de todas las actividades; en este caso 77 semanas. De los cálculos hechos resulta la siguiente tabla:

Disponibilidad del recurso	Duración del proyecto
42	77
45	63
50	53
56	47

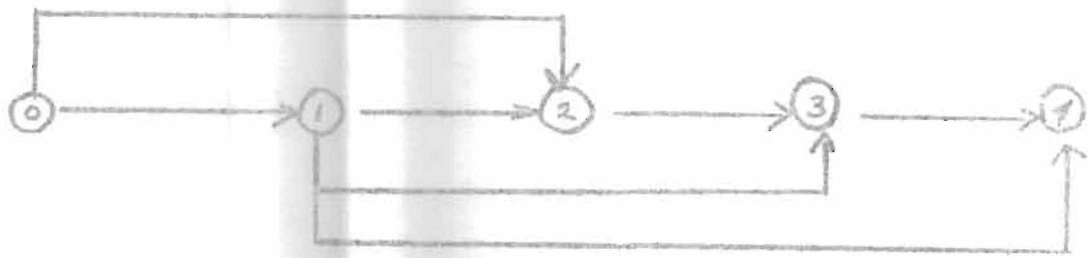
Lo cual, representado gráficamente da lugar a la figura siguiente:



Es fácil ampliar un poco más el alcance del método para introducir explícitamente la consideración de otros recursos que podrían ser limitantes.

Para explicar la forma de hacerlo, haremos uso de un ejemplo.

Sea la red siguiente:



La información sobre duraciones de las actividades y uso de recursos para la ejecución de las mismas aparece en la Tabla siguiente:

Actividad (i,j)	Duración (semanas)	Recursos requeridos A	B	C	D
0 - 1	10	42	12	143	6
0 - 2	18	50	18	154	-
1 - 2	20	35	8	105	14
1 - 3	32	46	10	88	2
1 - 4	16	20	10	112	4
2 - 3	21	22	15	88	2
3 - 4	8	20	20	100	14
Disponibilidades		85	60	370	14

Podemos formar las combinaciones de actividades factible de ser realizadas simultáneamente:

1 Actividad	2 Actividades	3 Actividades	4 Actividades
1. (0,1)	8. (0,1) (0,2)	18. (0,2) (1,2) (1,3)	23. (0,2) (1,2) (1,3) (1,4)
2. (0,2)	9. (0,2) (1,2)	19. (0,2) (1,2) (1,4)	
3. (1,2)	10. (0,2) (1,3)	20. (0,2) (1,3) (1,4)	
4. (1,3)	11. (0,2) (1,4)	21. (1,2) (1,3) (1,4)	
5. (1,4)	12. (1,2) (1,3)	22. (1,3) (1,4) (2,3)	
6. (2,3)	13. (1,2) (1,4)		
7. (3,4)	14. (1,3) (1,4)		
	15. (1,3) (2,3)		
	16. (1,4) (2,3)		
	17. (1,4) (3,4)		

De aquí podemos formar el sistema de restricciones que deben cumplir nuestras variables d_i, las cuales se interpretan en igual forma que en el caso anterior:

$$t_{01} : d_1 + d_8 = 10$$

$$t_{02} : d_2 + d_8 + d_9 + d_{10} + d_{11} + d_{18} + d_{19} + d_{20} + d_{23} = 18$$

$$t_{12} : d_3 + d_9 + d_{12} + d_{13} + d_{18} + d_{19} + d_{21} + d_{23} = 20$$

$$t_{13} : d_4 + d_{10} + d_{12} + d_{14} + d_{15} + d_{18} + d_{20} + d_{21} + d_{22} + d_{23} = 32$$

$$t_{14} : d_5 + d_{11} + d_{13} + d_{14} + d_{16} + d_{17} + d_{19} + d_{20} + d_{21} + d_{22} + d_{23} = 16$$

$$t_{23} : d_6 + d_{15} + d_{16} + d_{22} = 21$$

$$t_{34} : d_7 + d_{17} = 8$$

En seguida, calculamos las intensidades de uso de los recursos a que dan lugar las combinaciones de actividades que se pueden ejecutar simultáneamente:

COMBINACION	INTENSIDAD DE USO DEL RECURSO			
	A	B	C	D
1.-	42	12	143	6
2.-	50	18	154	-
3.-	35	8	105	14
4.-	46	10	88	2
5.-	20	10	112	4
6.-	22	15	88	2
7.-	20	20	100	14
8.-	92*	30	297	6
9.-	85	26	259	14
10.-	96*	28	242	2
11.-	70	28	266	4
12.-	81	18	193	16*
13.-	55	18	217	18*
14.-	66	20	200	6
15.-	68	25	176	4
16.-	42	25	200	6
17.-	40	30	212	18*
18.-	131*	36	347	16*
19.-	105*	36	371*	18*
20.-	116*	38	354	6
21.-	101	28	305	20*
22.-	86*	35	288	8
23.-	151	46	456*	20*
DISPONIBILIDAD	85	60	370	14

En el cuadro anterior se han marcado con el signo (*) las combinaciones que no son factibles por requerir una cantidad de alguno de los recursos mayor que la disponibilidad del mismo. Es evidente que una combinación cuya ejecución no sea factible por razón de un recurso determinado será imposible absolutamente de ejecutar aunque sea factible respecto a los otros recursos.

De las combinaciones anotadas al comienzo se han eliminado las que se anotan a continuación por efecto del recurso señalado a su lado:

8.-	(0,1)(0,2)	: Recurso A
10.-	(0,2)(0,3)	: "
12.-	(1,2)(1,3)	: Recurso D
13.-	(1,2)(1,4)	: "
17.-	(1,4)(3,4)	: "
18.-	(0,2)(1,2)(1,3)	: Recursos A y D
19.-	(0,2)(1,2)(1,3)	: Recursos A, C y D
20.-	(0,2)(1,3)(1,4)	: Recurso A
21.-	(1,2)(1,3)(1,4)	: Recurso D
22.-	(1,3)(1,4)(2,3)	: Recurso A
23.-	(0,2)(1,2)(1,3)(1,4)	: Recursos A, C y D

Esto quiere decir que, en el problema a resolver, de partida podemos anotar las variables: d_8, d_{10}, d_{12}, d_{13}, d_{17}, d_{18}, d_{19}, d_{20}, d_{21}, d_{22}, d_{23}.

El planteamiento del programa lineal para resolver la cuestión sería entonces:

$$\text{Min } D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_9 + d_{11} + d_{14} + d_{15} + d_{16}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
d_1 &= 10 \\
d_2 + d_9 + d_{11} &= 18 \\
d_3 + d_9 &= 20 \\
d_4 + d_{14} + d_{15} &= 32 \\
d_5 + d_{11} + d_{14} + d_{16} &= 16 \\
d_6 + d_{15} + d_{16} &= 21 \\
d_7 &= 8
\end{aligned}$$

d_1 ≥ 10

La solución calculada da los siguientes resultados:

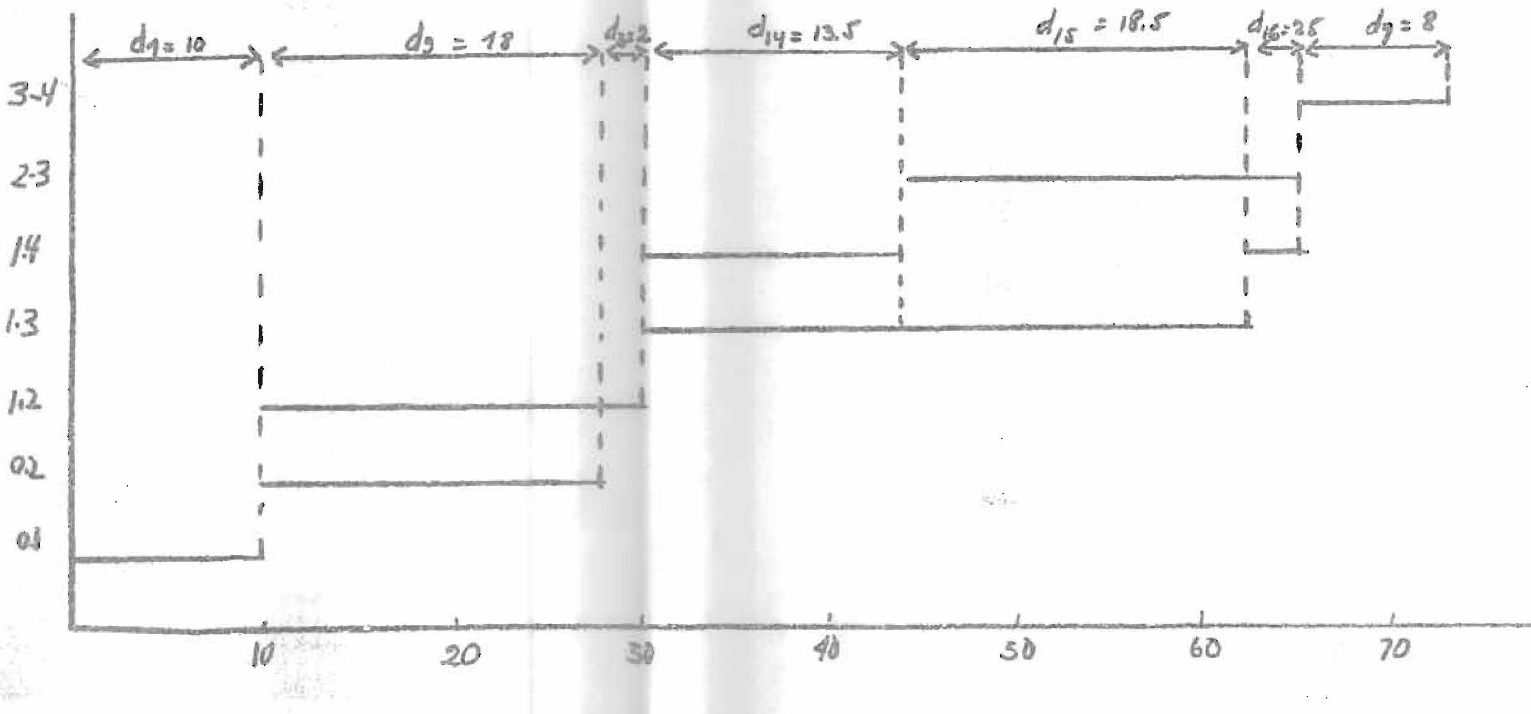
$d_1 = 10$ semanas
$d_3 = 2$ "
$d_7 = 8$ "
$d_9 = 18$ "
$d_{14} = 13.5$ "
$d_{15} = 18.5$ "
$d_{16} = 2.5$ "

$D = 72.5$ semanas

Esto quiere decir que:

La actividad (0,1) se ejecutará sola durante 10 semanas
La actividad (1,2) se ejecutará dola durante 2 semanas
La actividad (3,4) se ejecutará sola durante 8 semanas
La combinacion (0,2)(1,2) se ejecutará durante 18 semanas
La combinación (1,3)(1,4) se ejecutará durante 13.5 semanas
La combinación (1,3)(2,3) se ejecutará durante 18.5 semanas
La combinación (1,4)(2,3) se ejecutará durante 2.5 semanas

La duración mínima del proyecto con las restricciones dadas de recursos será de 72.5 semanas. La duración crítica cuando no existen restricciones de recursos es de 59 semanas; las limitaciones de recursos causan un atraso de 13.5 semanas.



Nótese que la actividad (1,4) se ejecuta en dos etapas, la primera comienza a las 30 semanas y se prolonga por 13.5 semanas, la segunda se inicia a las 62 semanas y dura 2.5 semanas.

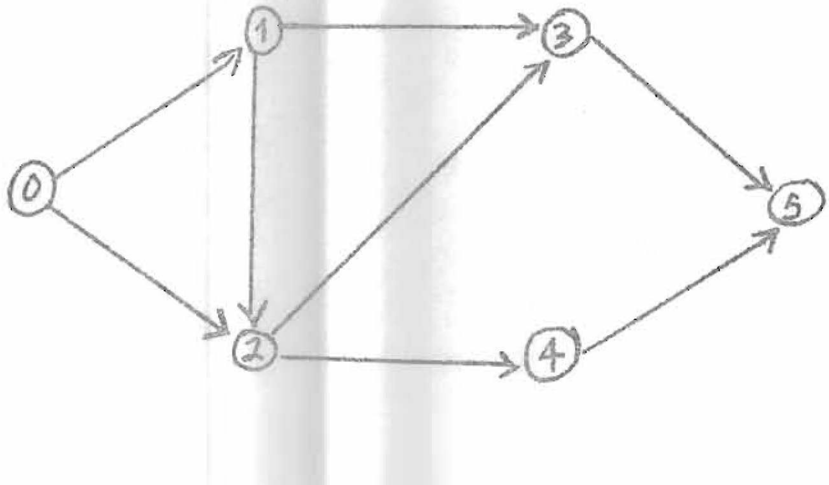
Como ha podido apreciarse, este método puede contribuir a la solución de problemas de distribución óptima de recursos en el curso de la ejecución de un proyecto, siempre que éste sea de característica como las descritas en el ejemplo anterior; es decir, que exista una trayectoria que pase por todos los eventos de la red.

Sin embargo, existe una limitación adicional que tiene que ser con las posibilidades prácticas de usar el método para resolver un problema real aún en el caso que estén presente las características exigidas. La red de nuestro ejemplo, con su sencillez extrema, dió lugar a 11 variables como contrapartida de las diferentes combinaciones de actividades que podían ejecutarse simultáneamente. Es de esperar que una red de actividades con las complicaciones que presenta la realidad dé lugar a un problema combinatorio de tal magnitud que es imposible manejarlo incluso en los computadores de mayor capacidad que se conozcan.

ELECCION DE UNA PROGRAMACION OPTIMA

Al analizar los detalles de un programa determinado, es posible que nos encontremos con una, o una combinación, de las siguientes situaciones: el tiempo de duración va más allá de un plazo predeterminado para su ejecución, o bien, el costo total del mismo no encuadra dentro de las disponibilidades. Cuando es ésta la situación, se hace necesario modificar el plan de trabajo operando sobre las actividades individuales en su relación duración-costo. Esta modificación no deberá efectuarse forzosamente en todas las actividades; en muchas ocasiones bastará que se haga solamente en aquellas actividades que están dentro de la ruta crítica. La magnitud de estas variaciones, en todo caso, dependerá del criterio que se establezca para operar la modificación del programa de trabajo: podría ser que nos interesase ejecutar el proyecto en un plazo determinado incurriendo para ello en un costo total mínimo; o bien, ejecutar el proyecto en un plazo mínimo dentro de una disponibilidad dada de recursos; o bien, ejecutar el proyecto con un costo total mínimo independientemente del costo total resultante.

Analizaremos el caso en un ejemplo concreto. Supóngase que tenemos la siguiente red con la información sobre duración y costo:



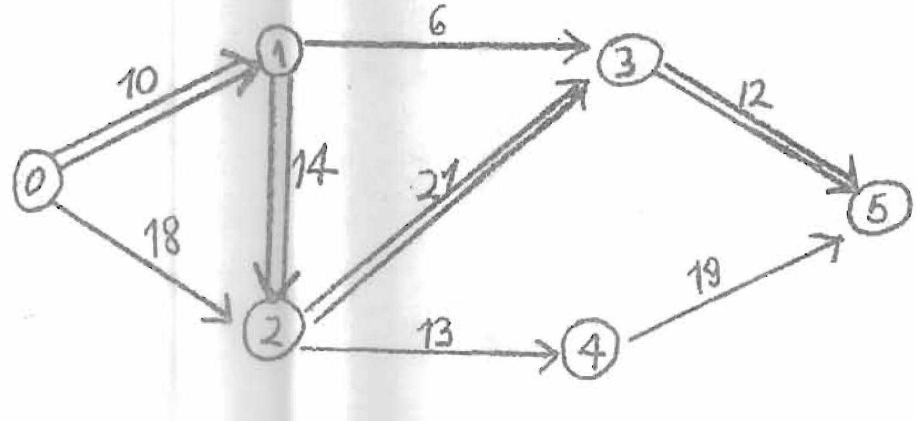
Actividad	Duración		Costo directo		Gasto
	normal	límite	Normal	límite	unitario
(i,j)	d_N	d_L	C_N	C_L	Q
(0,1)	10	6	15 000	20 200	1 300
(0,2)	18	16	16 000	18 000	1 000
(1,2)	14	10	25 000	31 000	1 500
(1,3)	6	4	14 000	18 000	2 000
(2,3)	21	15	35 000	65 000	5 000
(2,4)	13	10	10 000	11 500	500
(3,5)	12	8	21 000	27 000	1 700
(4,5)	19	15	30 000	34 000	1 000
			166 000	225 000	

Costo indirecto: supondremos que el costo indirecto se carga a todo el proyecto atendiendo a su duración de acuerdo con la fórmula

$$C_i = 5\ 000 + 2\ 500\ d$$

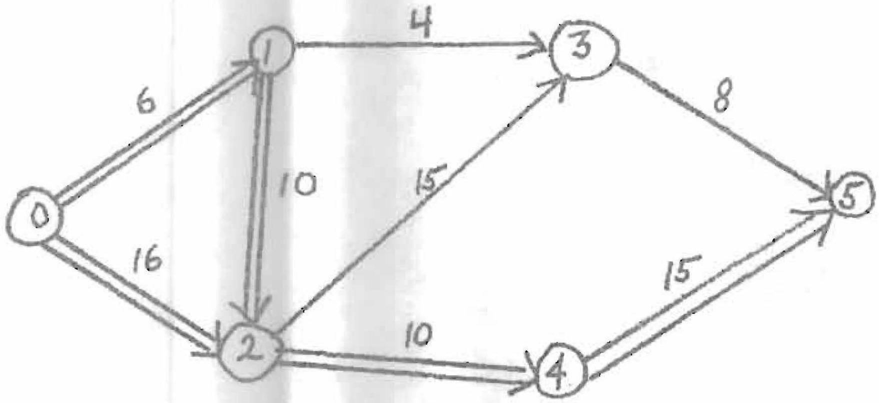
donde d es la duración del proyecto en su conjunto. Esto quiere decir que existe un cargo fijo de 5 000 que es independiente de la duración del proyecto y una cantidad 2 500 que corresponde al recargo de costo indirecto por cada semana que se prolongue la duración del mismo.

Consideraremos, en primer lugar, todas las actividades con sus duraciones normales:



En estas circunstancias la duración del proyecto es la máxima posible: 57 semanas y el costo directo total, E° 166 000 que corresponde al costo directo mínimo del proyecto. Si agregamos el costo indirecto de E° 147 500 resulta un costo total del proyecto de E° 313 500.

En segundo lugar, se han considerado todas las actividades con su duración límite con lo cual resulta la duración mínima del proyecto: 41 semanas.

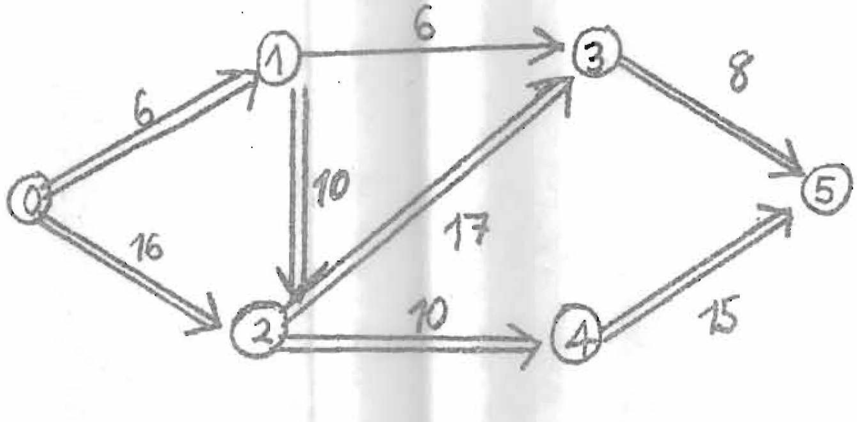


El costo directo total del proyecto será el máximo ya que todas las actividades tienen costo directo máximo: E° 225 000. El costo indirecto disminuye hasta E° 107 500 con lo cual el costo total del proyecto resulta igual a E° 333 000.

Se aprecia de los dos casos estudiados que la duración del proyecto puede variar entre dos límites: 41 semanas y 57 semanas y el costo directo total varía entre E° 225 500 y E° 166 000 correspondientes a esas duraciones.

La reducción en la duración del proyecto obtenida en este caso se ha logrado a base de acelerar <u>todas</u> las actividades hasta un máximo y ello ha causado una elevación del costo directo de E° 59 500. Resulta **casi obvio que la misma reducción en el tiempo habría sido igualmente posible con un costo** directo adicional algo menor si se hubiese tenido en cuenta el importante hecho de que solamente las actividades críticas afectan la duración del proyecto y por tanto sólo ellas deberían ser aceleradas para disminuir la duración del proyecto. La aceleración de actividades no críticas eleva el costo directo sin afectar en nada la duración del proyecto.

Por ejemplo, en el caso ilustrativo, donde todas las actividades han sido aceleradas hasta su límite, se puede apreciar que la actividad (1,3), resulta con una duración de 4 semanas y un costo directo de E° 18 000. Sin embargo, esta actividad, en el programa citado tiene una reserva libre de 21 semanas; es decir, que su terminación podría atrasarse hasta 21 semanas sin poner el proyecto en el peligro de atrasar su terminación. Por esta razón, bien podría programarse esta actividad con una duración normal de 6 semanas con lo cual su costo directo sería E° 14 000; habría pues un ahorro de E° 4 000 sin tener que aumentar la duración del proyecto. El mismo tipo de análisis cabe hacer para todas las otras actividades no críticas del proyecto y podría llegarse a establecer el costo directo mínimo asociado con cada duración. Para el caso que nos preocupa dicho costo directo mínimo para las 41 semanas de duración sería igual a E° 211 500, lo cual significaría una reducción del costo directo de E° 14 000 respecto al programa con todas las actividades en sus duraciones límites. Gráficamente, la situación sería la que sigue:



En este programa, de duración mínima y costo directo mínimo todas las actividades tienen duración límite excepto la actividad (1,3) que tiene duración normal y la actividad (2,3) que tiene una duración comprendida entre la duración normal y la duración límite.

Se aprecia, por otra parte, que ya no cabe acelerar más el proyecto ya que existen dos rutas críticas con todas sus actividades en el límite.

De todo lo expuesto se pueden extraer las siguientes conclusiones: La duración mínima de un proyecto resulta cuando todas las actividades en una ruta crítica están en su duración límite. La duración de una actividad cualquiera debe encontrarse comprendida entre la duración normal y la duración límite. El costo máximo de ejecución de un proyecto resulta cuando todas las actividades están en su duración límite.

Existe una infinidad de combinaciones de las duraciones de las actividades de un proyecto para las cuales la duración de éste es la mínima; la elección de una de ellas dependerá de algún criterio adicional que se establezca, por ejemplo, minimización del costo directo o total.

En lo que resta de este capítulo expondremos algunas rutinas de cálculo para la determinación de un programa óptimo. La primera, es con una ligera variante, una rutina expuesta por Antonio Baltar; la segunda consiste en la aplicación de la programación lineal a la solución del problema y la tercera es el conocido algoritmo de Fulkerson basado en la teoría de los flujos en redes de conductos.

a) <u>Explicación de la rutina</u>

El cuadro está dividido en cuatro partes.

En el cuadrante A se escriben todas las actividades (i,j) del proyecto, sus duraciones límites d_1 (i,j) y el gasto unitario para acelerar cada actividad Q (i,j).

A C

ACT.	d_i	Q	57 (1)	53 (1)	51 (1)	51 (4)	50 (1)	50 (4)	50 (2)	50 (5)	47 (1)	47 (4)	47 (2)	47 (5)	45 (1)	45 (4)	45 (2)	45 (5)	41 (1)	41 (4)	41 (2)	41 (5)
(01)	6	1300	10	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$		$\boxed{6}$		$\boxed{6}$		$\boxed{6}$		$\boxed{6}$		$\boxed{6}$		$\boxed{6}$		$\boxed{6}$		$\boxed{6}$	
(02)	16	1000	18			18		18		18		18		18		$\boxed{16}$		$\boxed{16}$		$\boxed{16}$		$\boxed{16}$
(12)	10	1500	14	14	12		12		12		12		12		$\boxed{10}$		$\boxed{10}$		$\boxed{10}$		$\boxed{10}$	
(13)	4	2000	6																			
(23)	15	5000	21	21	21	21	21	21			21	21			21	21			17	17		
(24)	10	500	13						13	13			$\boxed{10}$	$\boxed{10}$			$\boxed{10}$	$\boxed{10}$			$\boxed{10}$	$\boxed{10}$
(35)	8	1700	12	12	12	12	11	11			$\boxed{8}$	$\boxed{8}$			$\boxed{8}$	$\boxed{8}$			$\boxed{8}$	$\boxed{8}$		
(45)	15	1000	19						19	19			19	19			19	19			$\boxed{15}$	$\boxed{15}$
COSTO DE LA ACELERACION ⟶				5200	3000		1700				6600				5000				24000			

	TRAYECTORIAS	DURACION DE LAS TRAYECTORIAS						
		57	53	51	50	47	45	41
(1)	0 → 1 → 2 → 3 → 5	57	53	51	50	47	45	41
(2)	0 → 1 → 2 → 4 → 5	56	52	50	50	47	45	41
(3)	0 → 1 → 3 → 5	28	24	24	23	20	20	20
(4)	0 → 2 → 3 → 5	51	51	51	50	47	45	41
(5)	0 → 2 → 4 → 5	50	50	50	50	47	45	41

B D

En el cuadrante B se describen todas las trayectorias de la red.

Los cuadrantes C y D sirven para hacer funcionar la rutina según se explica a continuación:

En la primera columna del cuadrante C se escriben las duraciones normales correspondientes a cada actividad y se marcan con círculo dos duraciones de las actividades críticas del proyecto. Esta columna está encabezada por la duración crítica del proyecto.

En la primera columna del cuadrante D se anotan las duraciones de las trayectorias escritas en el cuadrante B y se marcan las duraciones críticas que existen, en este caso 57 correspondientes a la trayectoria (1).

En esta etapa se comienza a acelerar la duración del proyecto. Se selecciona la primera actividad a acelerar de acuerdo con el criterio de que ésta sea la actividad crítica que tiene un menor gasto unitario. En este caso le corresponde a la actividad (0,1) con un gasto unitario de 1 300. La aceleración de la actividad (0,1) va a afectar la duración de todas las trayectorias de las cuales esta actividad forma parte. En este caso, se afectarán las trayectorias (1), (2) y (3) las cuales se acortarán en la misma cantidad en que se acelera la actividad (0,1).

El monto de dicha aceleración se determina por el siguiente criterio: la actividad (0,1) se acelera hasta llegar a la duración límite siempre que la duración de la trayectoria crítica no se haga menor que la duración de las trayectorias no afectadas por la aceleración o sea, esta trayectoria no puede perder su carácter de crítica. De lo contrario ésta se acelera hasta un monto en que la duración de esta trayectoria se haga igual a la duración de alguna trayectoria no afectada, o sea, hasta que aparezca otra trayectoria crítica adicional.

En el ejemplo, podemos acelerar la actividad (0,1) hasta el límite, o sea, 4 semanas. Se marca en la segunda columna la nueva duración de la actividad (0,1) o sea 6 y como no puede acelerarse más se marca esta duración con un cuadrado; $\boxed{6}$

En la segunda columna del cuadrante C se anotan las nuevas duraciones de las trayectorias después de la aceleración para identificar las rutas críticas que resulten. En el ejemplo, la trayectoria (1) sigue siendo la única crítica.

Los otros lugares de la segunda columna del cuadrante C se llenan con las duraciones de las actividades críticas que no se aceleraron.

La nueva duración del proyecto será ahora 53 semanas. El costo directo del mismo ha aumentado en 5 200 producto del gasto unitario de la actividad (0,1) por el monto de la aceleración: 1 300 x 4 = 5 200. Se anota este aumento del costo directo debajo de la columna 2 del cuadrante C. Cabe llamar la atención aquí que el aumento del costo directo es lineal respecto a la aceleración, es decir cada semana que se acorte la duración del proyecto causa una elevación del costo directo de E° 1 300; por lo tanto el costo directo del proyecto para cualquier duración comprendida entre 57 y 53 puede calcularse por interpolación lineal.

Para realizar una segunda aceleración, analizamos las duraciones marcadas en la columna 2 del cuadrante C que aún no están en el límite y escogemos nuevamente aquélla de gasto unitario mínimo. Ahora corresponde acelerar la actividad (1,2) con un gasto unitario de E° 1 500. La aceleración de esta actividad afectará a las trayectorias (1) y (2) las cuales disminuirán su duración. Para llevar la actividad (1,2) a su duración límite habría que acelerarla 4 semanas, lo cual no puede hacerse ya que ello reduciría la duración de las trayectorias (1) y (2) a 49 semanas en circunstancias que la trayectoria 4 tiene una duración de 51 semanas; ello haría que las trayectorias (1) y (2) perdiesen su carácter de críticas. Por esta razón la aceleración máxima que se puede realizar en la actividad (1,2) es de 2 semanas.

Anotamos en la Columna 3 del cuadrado C la nueva duración de la actividad (1,2) que es 12 y la marcamos con círculo 12 ya que aún no ha alcanzado el límite. En seguida en la tercera columna del cuadrante D anotamos las nuevas duraciones de las trayectorias resultante de esa aceleración. Se aprecia que se ha originado una nueva ruta crítica: la (4) con una duración de 51 semanas; se marca entonces en la columna 4 del cuadrante C las duraciones de las actividades pertenecientes a la nueva trayectoria crítica. En esta etapa tenemos dos rutas críticas, por tanto, la aceleración debe efectuarse en ambas; esto puede hacerse acelerando una actividad que sea común a ambas trayectorias críticas o bien, acelerando en la misma cantidad actividades pertenecientes una a cada trayectoria. La forma en que se realice será la que determine un menor costo directo adicional; considerando, como es lógico, que el costo al acelerar dos actividades al mismo tiempo es la suma de los gastos unitarios, correspondientes a ambos.

Aceleramos entonces la actividad (3,5) con un gasto unitario de 1 700; se acelera hasta 11 ya que con ello la duración del proyecto se hace igual a 50 que es la duración de otras dos trayectorias: (2) y (5). En esta situación estas dos últimas trayectorias son también críticas y se agregan a las dos anteriores resultando en esta etapa cuatro trayectorias críticas a acelerar.

En las cuatro columnas que siguen en el cuadrante C se anotan las duraciones de las actividades de estas cuatro trayectorias críticas y se buscan entonces las nuevas actividades a acelerar de acuerdo con los mismos criterios anteriores. El gasto unitario de la aceleración debe ser el mínimo; y el monto de la aceleración será hasta el límite o hasta donde aparezcan nuevas trayectorias críticas.

En el ejemplo, les corresponde ahora a las actividades (2,4) y (3,5) con un gasto unitario total de 2200 que es la suma de los gastos unitarios de ambas actividades; estas actividades se aceleran hasta el límite ya que no hay riesgo de que aparezcan nuevas trayectorias críticas.

La rutina continúa en la misma forma hasta que al   de las rutas críticas aparezcan con todas las actividades en sus duraciones límites. En el ejemplo la rutina ha terminado con dos trayectorias críticas en sus duraciones límites: (2) y (5); las otras dos aún tienen una actividad con una duración mayor que el límite.

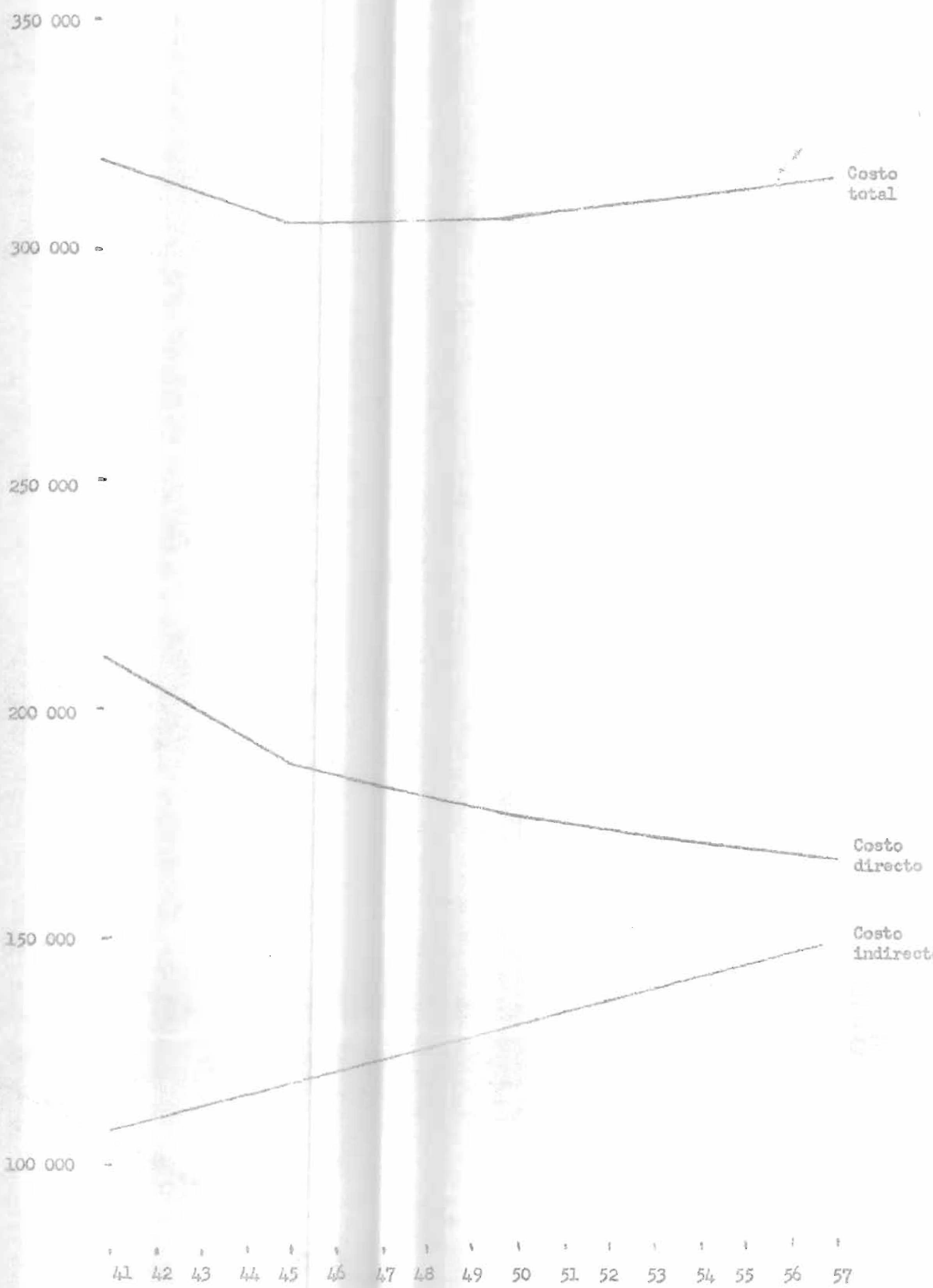
Se ha logrado la duración mínima del proyecto que es 41 semanas. Se puede calcular los costos directos totales para cada duración como se indicó previamente con el siguiente resultado.

Duración	Costo directo	Duración	Costo directo	Duración	Costo directo
41	211500	47	182500	53	171200
42	205500	48	180300	54	169000
43	199500	49	178100	55	168600
44	193500	50	175900	56	167300
45	187500	51	174200	57	166000
46	185000	52	172700		

Ahora, podemos obtener los costos totales correspondientes a cada duración. Hay que sumar el costo indirecto respectivo calculado según se estableció antes de acuerdo a la fórmula

$$C_L = 5000 - 2500\ d$$

y los resultados obtenidos aparecen en el gráfico y la tabla:


350 000
300 000
250 000
200 000
150 000
100 000
Costo total
Costo directo
Costo indirect
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57

Tabla

Duración	Costo Directo	Costo Indirecto	Costo Total
41	211 500	107 500	319 000
42	205 500	110 000	315 500
43	199 500	112 500	312 000
44	193 500	115 000	308 500
45	187 500	117 500	305 000
46	185 000	120 000	305 000
47	182 500	122 500	305 000
48	180 300	125 000	305 300
49	178 100	127 500	305 600
50	175 900	130 000	305 900
51	174 200	132 500	306 700
52	172 700	135 000	307 700
53	171 200	137 500	308 700
54	169 900	140 000	309 900
55	168 600	142 500	311 100
56	167 300	145 000	312 300
57	166 000	147 500	313 500

Se puede, de allí, concluir que el costo total mínimo corresponde a la duración 45 semanas con un costo total de 305 000. Este mismo costo total mínimo corresponde a las duraciones 46 y 47 semanas. Es obvio que la situación óptima será aquélla que corresponda a la duración mínima de 45 semanas.

El programa óptimo, desde el punto de vista del costo total sería pues el siguiente:

$d(0,1) = 6$ semanas
$d(0,2) = 16$ semanas
$d(1,2) = 10$ semanas
$d(1,3) = 6$ semanas
$d(2,3) = 21$ semanas
$d(2,4) = 10$ semanas
$d(3,5) = 8$ semanas
$d(4,5) = 19$ semanas
Duración total: 45 semanas
Costo total: E° 305 000

b) Solución del problema mediante la P.L.

Una formulación alternativa y más sistemática del problema planteado consistiría en darle a éste la forma de un programa lineal.

Se trata de establecer un programa de actividades tal que el costo total sea el mínimo.

La función de costo total a minimizar sería:

$$C_t = \left\{ \sum_{(i,j)\ ER} K(i,j) + k \right\} - \left\{ \sum_{(i,j)\ ER} Q(i,j)\ d(i,j) - qd \right\}$$

Donde las variables decisorias son las $d(i,j)$, duraciones de las actividades y $\underline{d}$ que es la duración del proyecto en su totalidad.

Puesto que:

$$\sum_{(i,j)\ ER} K(i,j) + k$$

es un término constante en la función, entonces este problema es equivalente con la maximización de la función:

$$\sum_{(i,j)\ ER} Q(i,j)\ d(i,j) - qd$$

La búsqueda de este máximo está condicionada por las siguientes restricciones:

$$d_L\ (i,j) \leq d\ (i,j) \leq d_n\ (i,j)$$

O sea, la duración de cada actividad debe estar comprendida entre la duración normal y su duración mínima.

Además $\sum d\ (i,j) \leq d$

para todas las trayectorias posibles en la red.

Usando la información del ejemplo, el problema toma la forma siguiente:

Minimizar

$$1\ 300\ d(0,1) + 1\ 000\ d(0,2) + 2\ 000\ d(1,3) + 5\ 000\ d(2,3) + 500\ d(2,4) + 1\ 700\ d(3,5) + 1\ 000\ d(4,5) - 2\ 500\ d$$

sujeto a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{r} 6 \leq d(0,1) \leq 10 \\ 16 \leq d(0,2) \leq 18 \\ 10 \leq d(1,2) \leq 14 \\ 4 \leq d(1,3) \leq 6 \\ 15 \leq d(2,3) \leq 21 \\ 10 \leq d(2,4) \leq 13 \\ 8 \leq d(3,5) \leq 12 \\ 15 \leq d(4,5) \leq 19 \end{array}\right\} \text{Duración de las actividades}$$

$$+ (0,1) + (1,3) + (3,5) \leq d$$
$$+ (0,1) + (1,2) + (2,3) + (3,5) \leq d$$
$$+ (0,1) + (1,2) + (2,4) + (4,5) \leq d \quad \text{Duración de las trayectorias}$$
$$+ (0,2) + (2,3) + (3,5) \leq d$$
$$+ (0,2) + (2,4) + (4,5) \leq d$$

Para aplicar el algoritmo de resolución del problema, en este caso el método Simplex Simétrico, el problema se presenta de la manera siguiente:

Maximizar

$$1\,300\ d(0,1) + 1\,000\ d(0,2) + 1\,500\ d(1,2) + 2\,000\ d(1,3) + 5\,000\ d(2,3) +$$
$$500\ d(2,4) + 1\,700\ d(3,5) + 1\,000\ d(4,5) - 2\,500\ d$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{array}{lr}
d(0,1) \leq & 10 \\
-d(0,1) \leq & -6 \\
d(0,2) \leq & 18 \\
-d(0,2) \leq & -16 \\
d(1,2) \leq & 14 \\
-d(1,2) \leq & -10 \\
d(1,3) \leq & 6 \\
-d(1,3) \leq & -4 \\
d(2,3) \leq & 21 \\
-d(2,3) \leq & -15 \\
d(2,4) \leq & 13 \\
-d(2,4) \leq & -10 \\
d(3,5) \leq & 12 \\
-d(3,5) \leq & -8 \\
d(4,5) \leq & 19 \\
-d(4,5) \leq & -15 \\
d(0,1) + d(1,3) + d(3,5) - d \leq & 0 \\
d(0,1) + d(1,2) + d(2,3) + d(3,5) - d \leq & 0 \\
d(0,1) + d(1,2) + d(2,4) + d(4,5) - d \leq & 0 \\
d(0,2) + d(2,3) + d(3,5) - d \leq & 0 \\
d(0,2) + d(2,4) + d(4,5) - d \leq & 0
\end{array}$$

Solución óptima:

$d(0,1) = 6$

$d(0,2) = 16$

$d(1,2) = 10$

$d(1,3) = 6$

$d(2,3) = 21$ $\qquad d = 45$

$d(2,4) = 10$ $\qquad z = 80\,900$

$d(3,5) = 8$ $\qquad$ Costo total = 385 900-80 900= E° 305 000

$d(4,5) = 19$

Lo cual coincide con la solución hallada antes.

c) Existe un tercer procedimiento para disminuir la duración total de un proyecto con el mínimo incremento en el costo, el cual está basado en la teoría de los flujos en una red de conductos de D. R. Fulkerson. De este procedimiento expondremos la rutina de cálculos para una operación manual.

Como se recordará, cuando se trata de acortar la duración total de un proyecto, se deberán reducir solamente las duraciones de las actividades críticas del mismo ya que son éstas las que determinan la duración del proyecto en su conjunto y, entre éstas, primero aquellas que tengan un gasto unitario menor pues, de esta manera, se logra acortar la duración total con un incremento de costo lo más bajo posible.

En cada actividad del proyecto, representada por una flecha, se inscriben la duración normal, la duración límite y el gasto unitario de dicha actividad de la siguiente manera:

$$i \xrightarrow[(\infty,\ d_L)]{(Q,\ d_N)} j$$

con el significado que sigue: la inscripción en la parte superior de la flecha indica que a partir de la duración normal d_N se inicia la gráfica de costo directo con una determinada pendiente Q, y la inscripción de la parte superior de la flecha indica que a partir de la duración límite d_L dicha pendiente es infinita.

Así, por ejemplo, si para una cierta actividad (i,j) se tiene:

duración normal	5 semanas
duración límite	2 semanas
costo normal	E° 1 500
costo límite	E° 2 000

el gasto unitario de la actividad será:

$$Q = \frac{2\,000-1\,500}{5-2} = 167$$

Y estos datos quedarán inscritos en la flecha representativa de la actividad correspondiente de la siguiente manera:

$$i \xrightarrow[(\infty,\ 2)]{(167,\ 5)} j$$

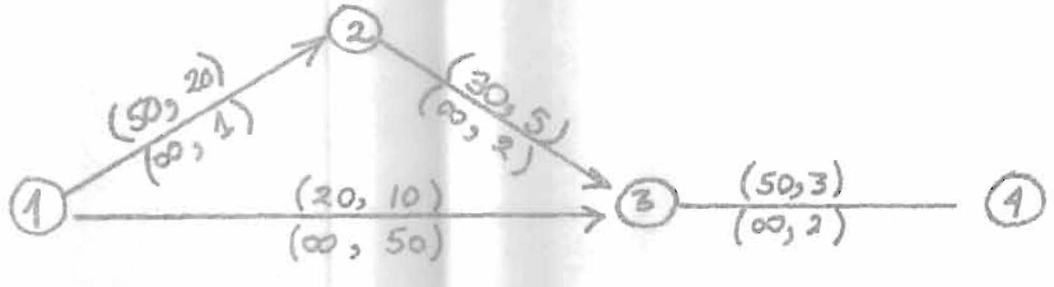
Se interpreta esta doble inscripción en el sentido que cada actividad es un conducto, a través del cual debe pasar un flujo, formado por dos ramas: la rama superior, con una capacidad igual al gasto unitario de la actividad; y la rama inferior, con una capacidad infinita. El flujo deberá pasar primero por la rama superior hasta saturar su capacidad y luego a través de la rama inferior. En el primer caso, el tiempo empleado será el correspondiente a la duración normal de la actividad y, en el segundo caso, éste estará comprendido entre la duración normal y la duración límite.

El problema consiste en hallar la forma de enviar la cantidad máxima de flujo desde el suceso origen (considerado como la fuente del flujo) hasta el suceso final (considerado como el sumidero del flujo) de acuerdo con las capacidades limitadas de los conductos que forman la red.

Para explicar el algoritmo, usaremos un ejemplo dado por el ingeniero mexicano, Carlos T. Bonifaz.

Actividad (i,j)	Descripción	C_N	C_L	d_N	d_L	Q
(1,2)	Excavar zanja	200	250	2	1	50
(2,3)	Preparar el fondo	500	590	5	2	30
(1,3)	Fabricar y transportar el tubo	1 000	1 100	10	5	20
(3,4)	Colocar el tubo	300	350	3	2	50

En el diagrama siguiente quedan representadas sobre cada flecha las inscripciones indicadas antes:

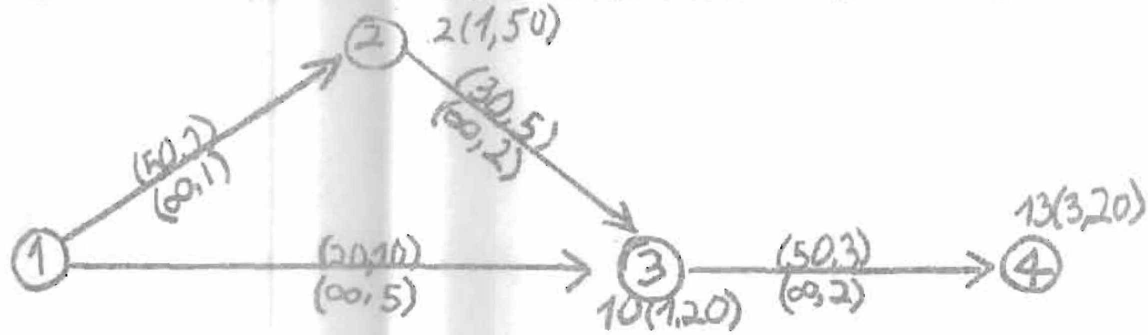


Y se procede de la siguiente manera: sobre cada nudo se coloca una marca t (i,Q); siendo t la fecha más temprana del suceso que corresponde al nudo, i es el número del nudo desde donde viene el flujo, Q es la pendiente o flujo que llega al nudo, todo lo cual servirá para referencias futuras.

El nudo 1 es el origen del flujo y no lleva marca alguna. Se pasa al nudo 2; como primero debe usarse el tiempo mayor de la actividad (1,2) la marca quedará: 2(1,50) con la interpretación siguiente: durante 2 unidades de tiempo estará llegando al nudo 2, proveniente del nudo 1, un flujo de 50 correspondiente a la capacidad de la rama superior del ducto (1,2). Para llegar al nudo 3 hay dos caminos: desde el nudo 1 y desde el nudo 2; sin embargo, el tiempo más largo corresponde al que viene desde el nudo 1 que son 10 unidades de tiempo. En consecuencia, la marca será 10(1,20), siendo 20 la capacidad de la rama superior del ducto (1,3).

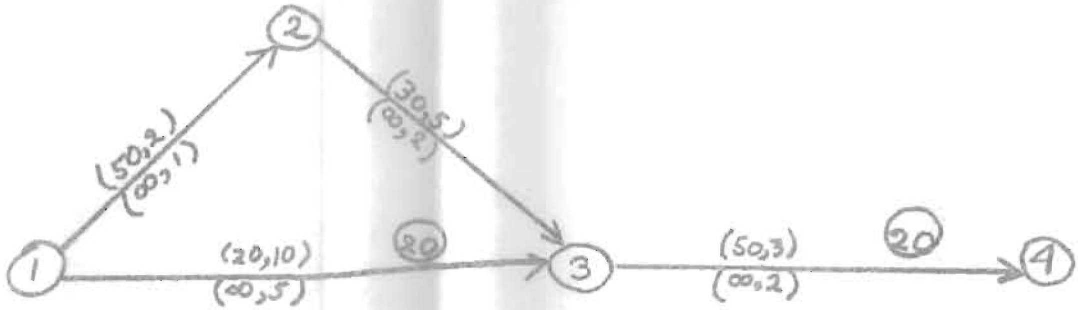
Finalmente, la marca del nudo 4 será 13(3,20) ya que aún cuando la capacidad de la actividad (3,4) es de 50, sólo pueden pasar 20, que es la que sale del nudo 3.

Después de este primer marcaje, la red presenta el siguiente aspecto:



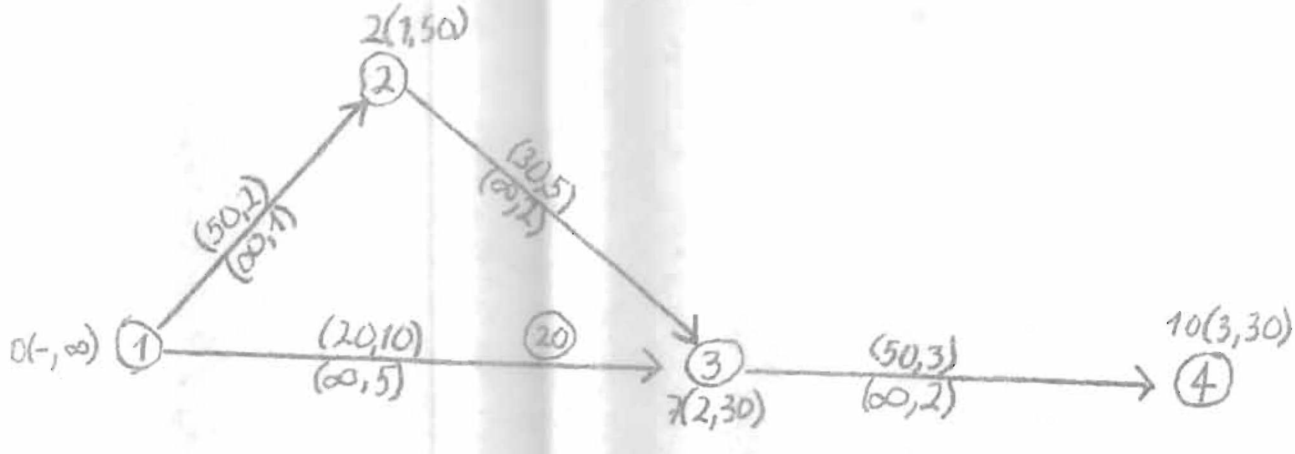
Las marcas en los nudos nos indican el nudo desde donde viene el flujo y el tiempo máximo de duración del proceso, es decir, nos indica cual es la ruta crítica; en este caso esta será 1-3-4.

Las duraciones de las actividades que hacen que el proyecto tenga una duración total de 13 días, se colocan como se indica en la tabla que aparece al final del ejemplo. El flujo total que pasa a través de la red, en este caso 20, se coloca sobre las actividades que marcan la duración total. La marca del nudo 4 indica que el flujo de 20 viene del nudo 3; se coloca 20 encerrado en un círculo, en la rama superior junto a la inscripción de la actividad (3,4) para indicar que todavía no se satura su capacidad. La marca del nudo 3 indica que el flujo de 20 viene del nudo 1; se coloca 20 encerrado en círculo junto a la inscripción de la actividad (1,3). Se borran las marcas de los nudos quedando el diagrama como se ve en la figura siguiente:

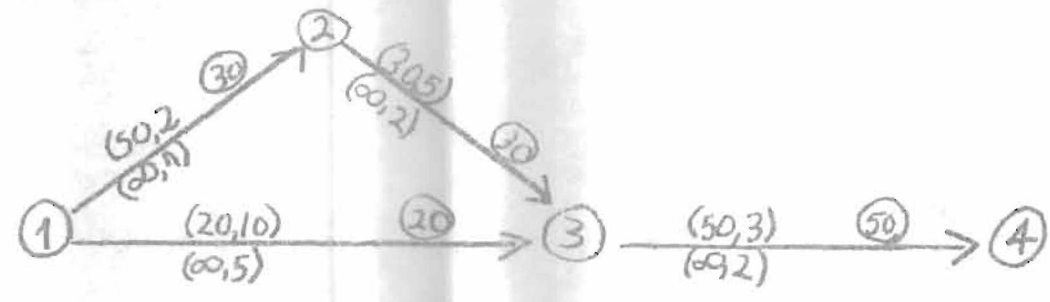


Las diferentes capacidades de la red son ahora las siguientes: la actividad (1,3) puede dejar pasar un flujo infinito en un tiempo de 5 unidades pues ya se saturó su capacidad normal; la actividad (3,4) tendrá una capacidad de 50 menos 20, o sea 30 unidades de flujo en un tiempo de 3, más un flujo infinito en un tiempo 2.

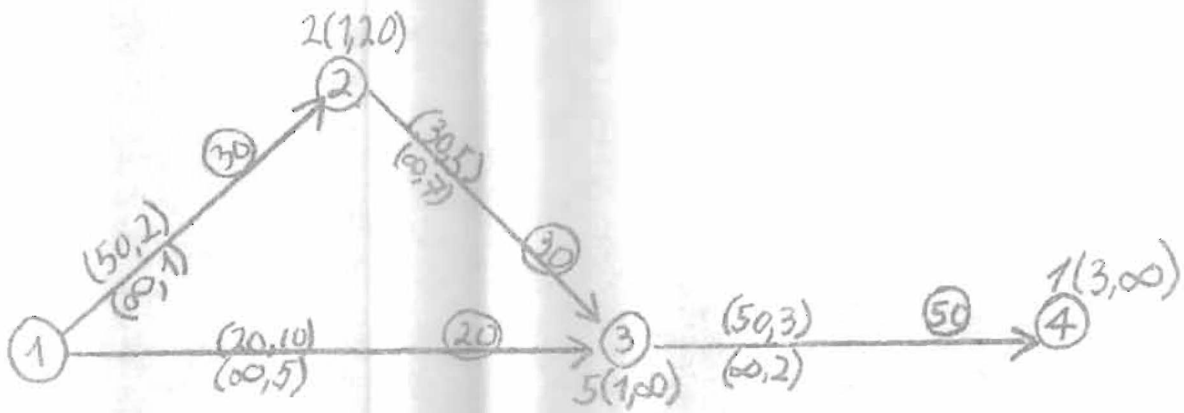
De acuerdo con estas nuevas capacidades, se vuelven a marcar los nudos como en el caso anterior. El nudo 2 queda marcado así 2(1,50) como antes. El nudo 3 queda marcado 7(2,30), ya que la duración de la actividad es ahora de 5 unidades de tiempo por haberse saturado su capacidad normal. El nudo 4, por lo tanto, queda marcado 10(3,30). Las nuevas marcas se muestran en la figura siguiente:



La figura indica que la nueva duración total es de 10 días y esto se logra haciendo que la actividad (1,3) tenga una duración de 7 días, quedando las demás con el mismo tiempo de duración normal, como aparece en la tabla. El flujo total que pasa por la red será de 50 ya que en el paso anterior era de 20 y en este paso de 30. Las marcas de los nudos indican los nudos desde donde viene el flujo, que se coloca en la rama correspondiente sumándole el flujo anterior en el caso que exista. El diagrama queda como se muestra en la figura siguiente, en la cual se han borrado las marcas de los nudos.



Marcando nuevamente los nudos, de acuerdo con las capacidades de la figura anterior, el resultado se muestra en la figura que va a continuación



De esta última figura se concluye que la duración total es ahora de 7 días, lo cual se logrará de la manera más económica haciendo la actividad (1,2) en 2 días, la actividad (1,3) en 5 días, la actividad (2,3) en 3 días y la actividad (3,4) en 2 días. Los resultados se muestran en la tabla. El proceso se termina cuando pasa un flujo infinito por toda la red.

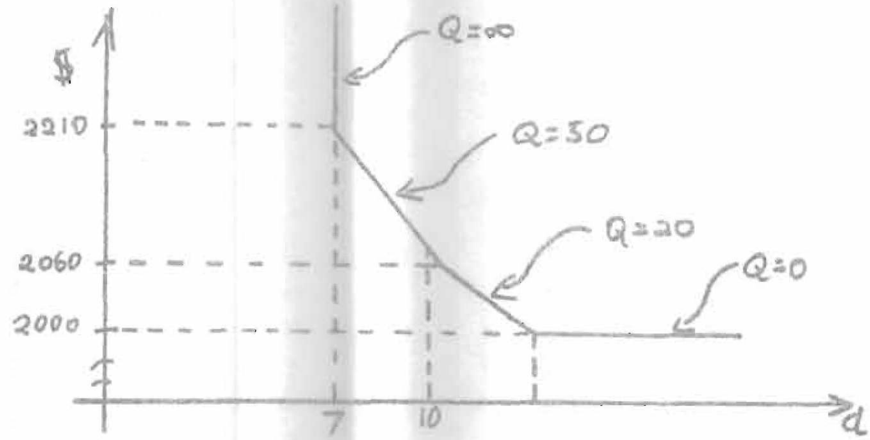
El costo total para 13 días será la suma de los costos normales de todas las actividades lo cual hace $2 000. El costo por día de acortamiento entre los 13 y los 10 días es igual al flujo total, para la duración 13, o sea, $20. El coste total aumentará entonces a $2 060. De 10 a 7 días se tiene un flujo de 50, luego el costo total para 7 días de duración será de $2 210. Esto se puede comprobar sumándole al costo total para una duración normal, el costo adicional de las actividades acortadas. Así, para 10 días de duración la actividad (1,3) se acortó de 10 a 7 días, o sea, sufrió un acortamiento de 3 días. El gasto unitario de esa actividad es de $20 por día; o sea, habrá un incremento del costo directo de $60. Para 7 días de duración total, la actividad (2,3) se acortó en 2 días, la actividad (1,3) en 5 días y la actividad (3,4) en 1 día todo lo cual multiplicado por sus respectivos gastos unitarios nos dará el incremento total de $210.

La tabla presenta un resumen de las diferentes etapas en el proceso de acortamiento de la duración del proyecto.

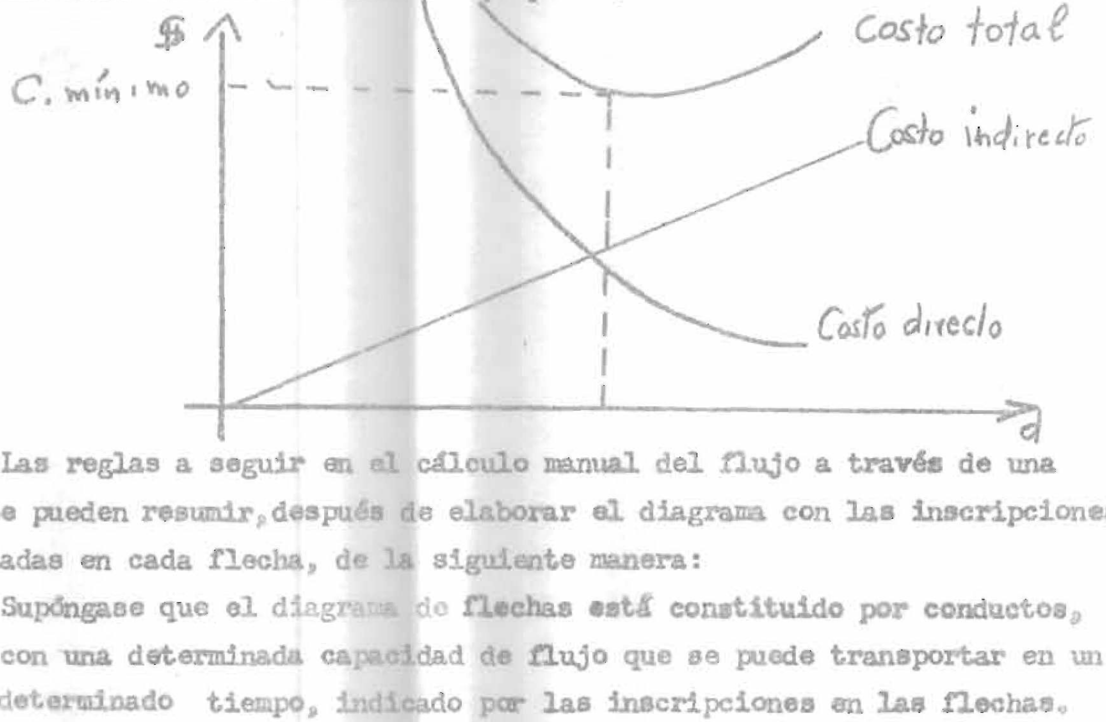
Tabla

Actividades	Duraciones		
(1,2)	2	2	2
(2,3)	5	5	3
(1,3)	10	7	5
(3,4)	3	3	2
Proyecto	13	10	7
Flujo Total	20	50	∞

La curva de costo directo queda representada de la manera siguiente



Si a esta curva de costo directo se le suma la de costo indirecto se obtendrá la curva de costo total, que indica la forma en que varían los costos totales para las diferentes duraciones del proyecto.



Las reglas a seguir en el cálculo manual del flujo a través de una red se pueden resumir, después de elaborar el diagrama con las inscripciones señaladas en cada flecha, de la siguiente manera:

1) Supóngase que el diagrama de flechas está constituido por conductos, con una determinada capacidad de flujo que se puede transportar en un determinado tiempo, indicado por las inscripciones en las flechas. Así, (a,b) significa que por el conducto puede pasar un flujo a durante un tiempo b.

2) Determínese en cada nudo el tiempo más largo para llegar a él y hágase llegar al mismo el flujo que corresponda al conducto por el cual se llega al nudo. Muéstrese esta información en el diagrama marcado el nudo correspondiente, de la forma siguiente: t(i,Q), en donde t es el tiempo empleado para llegar al nudo desde el orígen del flujo, i es el número del nudo desde donde proviene el flujo, y Q es la capacidad del ducto por donde llega el flujo al nudo. Al marcar el último nudo queda manifiesto el flujo que circuló a través de la red y el tiempo que el mismo estuvo circulando.

3) Colóquense en una tabla los tiempos de duración de cada actividad para que el proyecto tenga la duración total indicada en el último nudo.

4) Calcúlense el incremento de costo directo correspondiente al tiempo de duración al proyecto de las dos maneras siguientes:

   a) El incremento del costo directo en cada etapa será igual al flujo total correspondiente a la duración original multiplicado por la diferencia de tiempo entre la duración original y la nueva duración disminuida.

   b) Como comprobación del punto anterior, el incremento de costo correspondiente a la duración analizada será igual a la suma de los incrementos de costo directo de cada actividad lo cual se obtiene multiplicando la diferencia de duraciones entre la normal y la actual por el gasto unitario de esa actividad.

Si los pasos a) y b) no concuerdan, es señal de que se ha cometido un error al marcar los nudos o al obtener la duración de cada actividad por lo que se debe revisar el proceso.

5) Redúzcase la capacidad de la red en la misma cantidad que llega al nudo final. Este nudo tiene indicación del flujo total acarreado y cada uno de los demás nudos indica el nudo desde donde proviene el flujo.

6) Bórrense las marcas de los nudos.

7) Repítase el proceso hasta que llegue al nudo final una capacidad infinita, con lo cual el proceso termina.

Se pueden presentar tres situaciones a realizar el proceso:

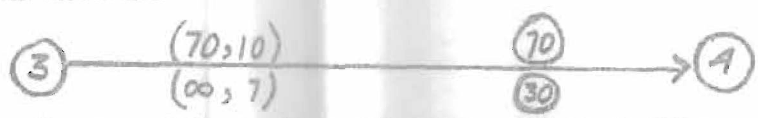
a) al pasar un flujo determinado, la capacidad del ducto no se agota.
Por ejemplo

Todavía resta una capacidad normal de 20 durante un tiempo 10.

b) al pasar el flujo la capacidad del ducto se satura. Por ejemplo

El tiempo de duración puede estar comprendido entre 10 y 7.

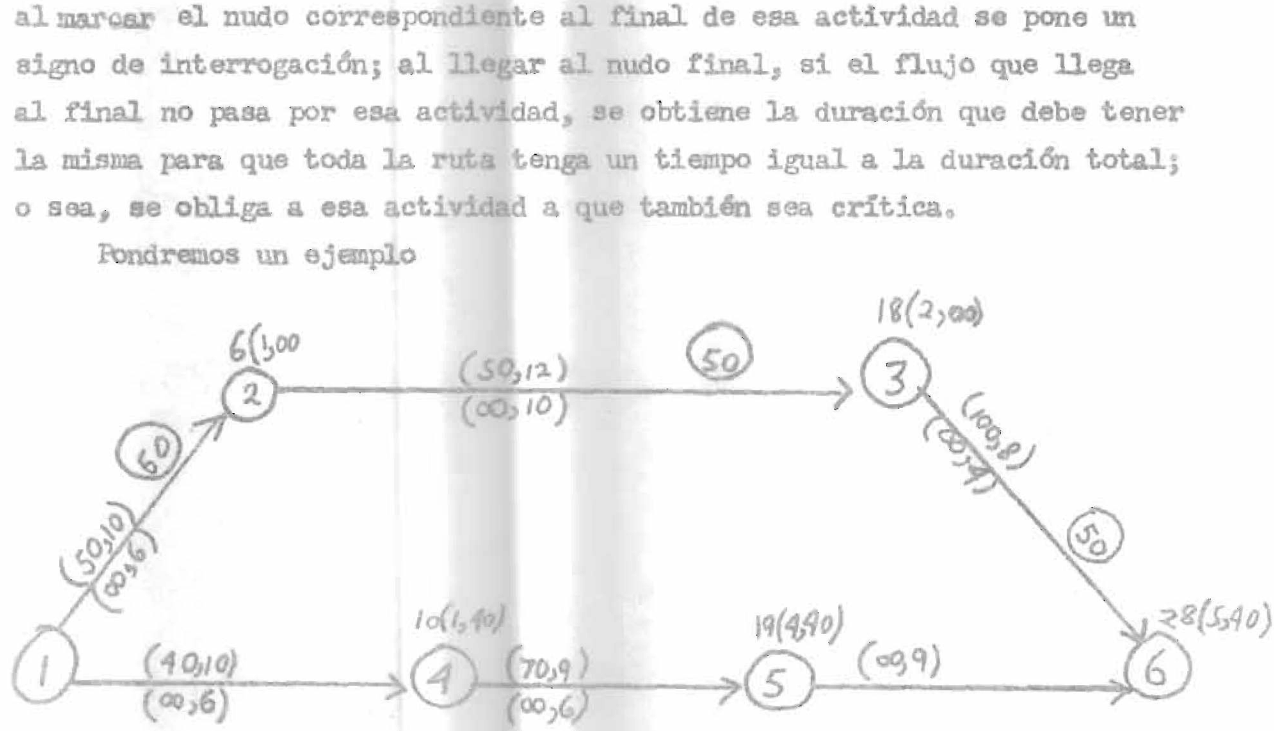
c) al pasar el flujo la capacidad normal se satura y el flujo pasa por la rama inferior



En este caso la duración de la actividad será de 7 días.

Cuando se presenta una situación similar al caso b) se puede hacer uso de un flujo invertido. La forma práctica de hacerlo consiste en que al marcar el nudo correspondiente al final de esa actividad se pone un signo de interrogación; al llegar al nudo final, si el flujo que llega al final no pasa por esa actividad, se obtiene la duración que debe tener la misma para que toda la ruta tenga un tiempo igual a la duración total; o sea, se obliga a esa actividad a que también sea crítica.

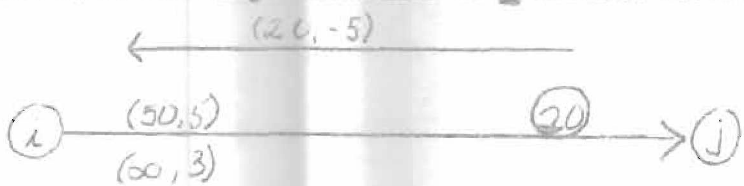
Pondremos un ejemplo



La única actividad del tipo b) es la (1,2). La marca del nudo 2 se pone con un signo de interrogación, así como la del nudo 3 puesto que si el flujo pasa por el nudo 2 debe pasar también por el nudo 3.

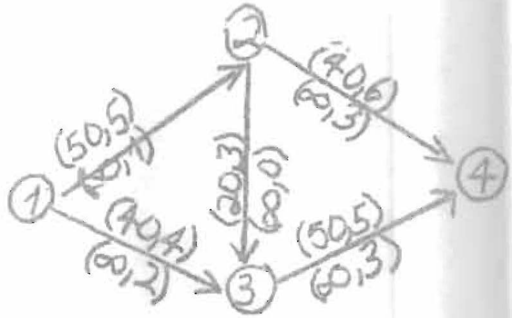
Comprobando el flujo contrario vemos que el nudo 3 debe marcarse 20 (8.50) y que el nudo 2 queda 8 (3,50). Si se sigue este procedimiento es muy fácil encontrar el resultado cuando ocurra un flujo contrario. Así vemos que la actividad (1,2) se puede realizar en 8 días habiéndose logrado un acortamiento de sólo 2 días y no de 4, si la duración fuera de 6 como originalmente se había marcado.

Para poder ejecutar el flujo contrario hay que tener en cuenta que si una actividad ha tenido un flujo previo de a durante un tiempo b entonces podrá tener un flujo contrario de a durante un tiempo b .

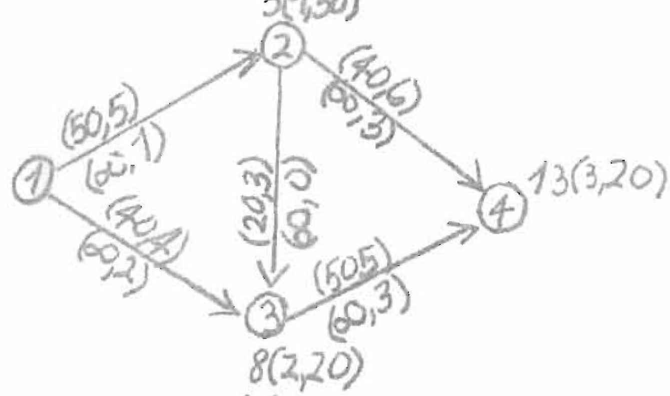


Con este procedimiento se puede presentar el flujo en ambos sentidos con objeto de poder determinar el tiempo más largo que llega al nudo independientemente del sentido de las flechas del diagrama.

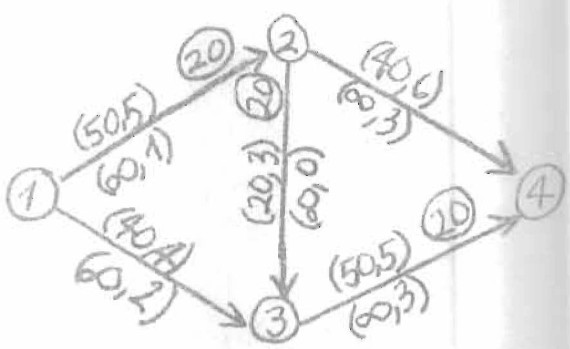
Para dejar en claro este concepto analizamos el siguiente ejemplo.


(50,5)
(∞,1)
(40,4)
(∞,2)
(20,3)
(∞,0)
(40,6)
(∞,3)
(50,5)
(∞,3)

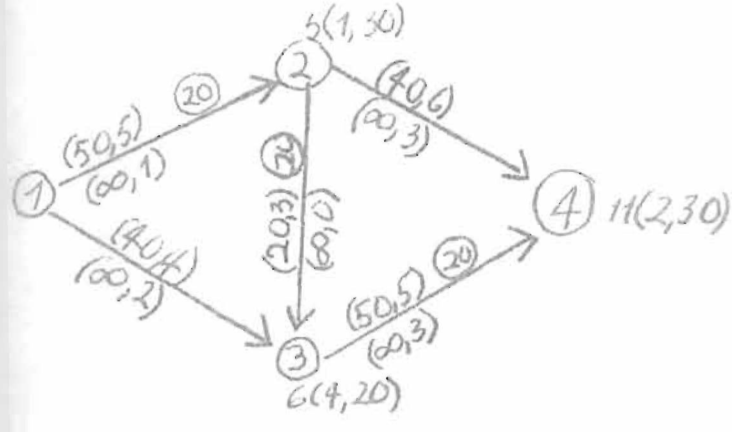
(a)


5(1,50)
(50,5)
(∞,1)
(40,4)
(∞,2)
(20,3)
(∞,0)
(40,6)
(∞,3)
(50,5)
(∞,3)
13(3,20)
8(2,20)

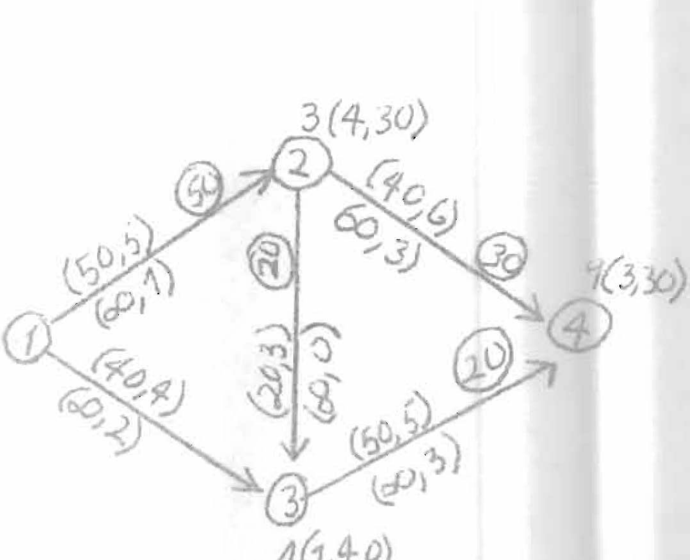
(b)


20
(50,5)
(∞,1)
(40,4)
(∞,2)
20
(20,3)
(∞,0)
(40,6)
(∞,3)
20
(50,5)
(∞,3)

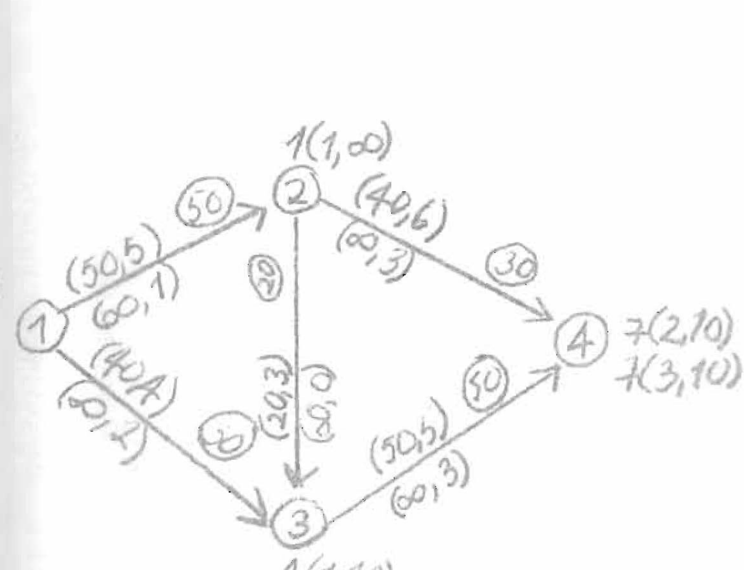
(c)


5(1,30)
20
(50,5)
(∞,1)
(40,4)
(∞,2)
20
(20,3)
(∞,0)
(40,6)
(∞,3)
11(2,30)
20
(50,5)
(∞,3)
6(4,20)

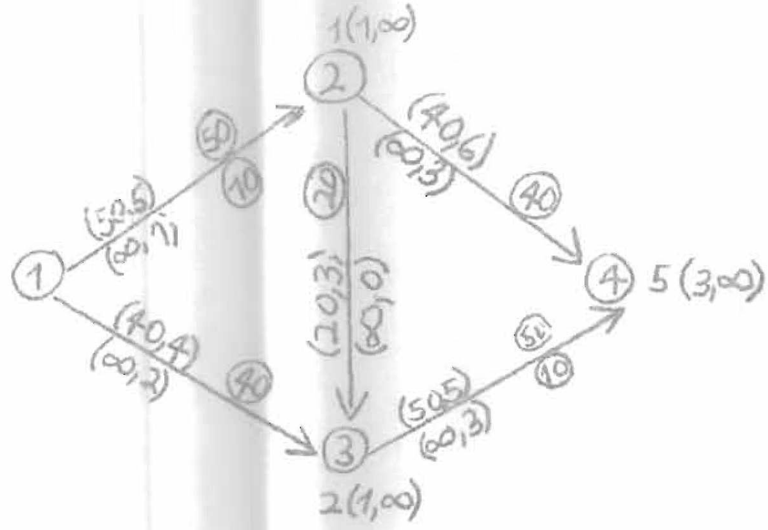
(d)


3(4,30)
50
(50,5)
(∞,1)
(40,4)
(∞,2)
20
(20,3)
(∞,0)
(40,6)
(∞,3)
30
9(3,30)
20
(50,5)
(∞,3)
4(1,40)

(e)


1(1,∞)
50
(50,5)
(∞,1)
(40,4)
(∞,2)
20
20
(20,3)
(∞,0)
(40,6)
(∞,3)
30
7(2,10)
7(3,10)
50
(50,5)
(∞,3)
4(1,10)

(f)



(g)

TABLA

ACTIVIDADES	DURACIONES				
(1,2)	3	5	3	1	1
(2,3)	3	1	1	3	1
(1,3)	4	4	4	4	4
(2,4)	6	6	6	6	4
(3,4)	5	5	5	3	3
Proyecto	13	11	9	7	5
Flujo total	20	50	80	100	00

Nótese que en la figura (f) el nudo 4 tiene doble marca; la razón de ello es que a él se llega, en el mismo tiempo, por dos caminos que son (2,4) y (3,4) por lo que el flujo total será la suma de los dos flujos, o sea, 20 así que al efectuar el regreso del flujo se debe hacer por ambos caminos.