

PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, diciembre de 1967

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES*

* Programa de Capacitación. Especialidad de Programación General.
Profesor: señor Arturo Núñez del Prado.

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

A. Conceptos Preliminares

Para la comprensión de este capítulo es necesario recordar los siguientes conceptos:

1. Sistema de ecuaciones lineales. Se trata de un conjunto de ecuaciones donde las variables estén elevadas a potencia unitaria. Se pretende obtener valores para las incógnitas de manera que satisfagan todas y cada una de las ecuaciones lineales del sistema. A continuación se da un ejemplo del caso general de un sistema de ecuaciones.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

2. Menor. Si en un determinante se suprime igual número de filas y columnas, se obtiene un determinante de menor orden llamado menor.
3. Rango o característica. Es el orden del mayor "menor" no nulo de una matriz. En otros términos, dada una matriz A, rectangular o cuadrada, si todos los menores de orden $r+1$ contenidos en ella son nulos, mientras que por lo menos un menor de orden r es distinto de cero, entonces se dice que la matriz es de rango r . Para la determinación del rango de una matriz, un método consiste en efectuar combinaciones elementales y obtener la forma normal de la matriz. El orden de la matriz idéntica contenida en la forma normal, dará el rango de la matriz.
4. Nulidad. Dada una matriz cuadrada A de rango r , se llame nulidad al complemento del rango al orden, es decir, $n-r$. En matrices rectangulares, hay dos tipos de nulidad: nulidad por filas ($m-r$) y nulidad por columnas ($n-r$).

/5. Matriz singular.

5. Matriz singular. Es aquélla cuyo determinante es nulo.
6. Dependencia lineal. Se dice que una fila o columna de una matriz o de un determinante es linealmente dependiente de otras, cuando resulta de una combinación lineal de éstas.

Un conjunto de funciones, vectores, matrices, etc., serán linealmente dependientes cuando satisfacen el siguiente tipo de relaciones lineales.

Para vectores

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = 0$$

Para matrices

$$C_1A + C_2B + \dots + C_nZ = 0$$

Para funciones

$$C_1f_1 + C_2f_2 + \dots + C_nf_n = 0$$

Sujetas a la restricción de que no todas las C_i deben ser nulas. En el caso de que la suma de los coeficientes C_i sea igual a la unidad, se tendrá una combinación lineal convexa (para C_i comprendido entre 0 y 1). Si no existe relación alguna del tipo señalado, se dice que los vectores, matrices o funciones son linealmente dependientes.

Dado el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

se comprueba que la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras:

$$\text{fila } 3^a = 3 \text{ fila } 2^a + 2 \text{ fila } 1^a$$

En consecuencia, el determinante es nulo y el rango necesariamente tendrá que ser menor a 3, que es el orden del determinante nulo.

/Es necesario

Es necesario recordar las siguientes propiedades:

- a) Las transformaciones elementales no introducen modificación en el rango de una matriz. En efecto, el determinante de una matriz operador de transformaciones elementales es siempre distinta de cero.
- b) Todo determinante nulo tiene una fila o columna que es combinación lineal de las demás. Esta propiedad generaliza los casos vistos de nulidad de los determinantes.

7. **Sistemas equivalentes.** Un cierto sistema A, es equivalente al sistema B, cuando ambos tienen las mismas soluciones. El teorema fundamental de la equivalencia enuncia que la realización de combinaciones lineales en las ecuaciones de un sistema, conduce a la obtención de sistemas equivalentes.

B. Tipos de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Es necesario identificar algunos tipos de sistemas.

1. **Sistemas compatibles.** Son aquéllos que admiten al menos un juego de valores consistentes para las incógnitas, valores que constituyen la solución del sistema. Dentro de los sistemas compatibles es necesario distinguir dos categorías.

- a) **Sistemas compatibles determinados** serán aquéllos que admiten solución única. Un ejemplo sencillo de este caso está dado por dos rectas que se cortan, donde el punto de intersección constituye la solución del sistema.
- b) **Sistema compatible indeterminado.** Es el caso en que el sistema admite más de una solución. Como ejemplo puede citarse las múltiples soluciones de dos rectas paralelas coincidentes.

2. **Sistemas incompatibles.** Son aquéllos que no admiten solución. Piénsese en el caso de dos rectas paralelas.

C. Resolución de Sistemas no Homogéneos

1. **Planteamiento.** Por sistema no homogéneo se entenderá aquél en que no todos los términos libres son nulos.

/Dado el

Dado el siguiente sistema:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = h_n$$

donde no todos los h_i sean nulos y donde la matriz A de los coeficientes a_{ij} tenga un determinante distinto de cero, es decir, se trate de una matriz no singular. Los clásicos métodos de resolución de sistemas como el de reducción, sustitución, etc., pierden eficiencia cuando el sistema contiene 4 o más ecuaciones o incógnitas. El anterior sistema, expresado en notación matricial, queda:

$$Ax = h$$

donde A: matriz de coeficientes

x: vector columna de incógnitas

h: vector columna de términos independientes

Premultiplicando la relación anterior por A^{-1} se tiene:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}h$$

$$Ix = A^{-1}h$$

$$x = A^{-1}h$$

$$\text{pero } A^{-1}h = \frac{\text{adj } A}{|A|} \cdot h$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & \dots & |A_{n1}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & & |A_{n2}| \\ \vdots & & & \\ |A_{1n}| & |A_{2n}| & & |A_{nn}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando la adjunta por el vector columna h, se tienen las siguientes relaciones:

/Ecuación

$$x_1 = \frac{1}{|A|} [h_1 |A_{11}| + h_2 |A_{21}| + \dots + h_n |A_{n1}|]$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|} [h_1 |A_{12}| + h_2 |A_{22}| + \dots + h_n |A_{n2}|]$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{|A|} [h_1 |A_{1n}| + h_2 |A_{2n}| + \dots + h_n |A_{nn}|]$$

El término entre paréntesis de la primera relación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ya que desarrollando este determinante por los elementos de la primera columna se obtiene la relación

$$h_1 |A_{11}| + h_2 |A_{21}| + \dots + h_n |A_{n1}|$$

En consecuencia

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & h_3 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$/x_n =$

$$x_n = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & h_n \end{vmatrix}$$

Observando las soluciones se concluye que el valor de x_1 es un cociente donde el denominador es el determinante principal y el numerador es el determinante principal en el que se ha sustituido la primera columna (coeficiente de x_1) por la columna de términos independientes. Para $x_2, x_3 \dots x_n$, se nota la sustitución de sus respectivas columnas de coeficientes por la columna de términos independientes. Este método corresponde con la conocida regla Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo:

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$

En este sistema se tiene que

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240$$

En consecuencia

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-240}{-120} = 2$$

/En forma

En forma similar se obtiene las soluciones para

$$x_2 = 0,2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0,8$$

Un método que tiene algunas ventajas sobre el anterior, es el que considera en su resolución la inversión, en forma explícita de la matriz de coeficientes. Se tenía que:

$$Ax = h$$

$$x = A^{-1}h$$

Basta multiplicar la inversa de A por el vector de términos libres para obtener las soluciones.

Ejemplo:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad [A^{-1}] = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{35}{18} \quad x_2 = \frac{29}{18} \quad x_3 = \frac{5}{18}$$

2. Tipos de solución

Si se tiene una expresión general de sistema no homogéneo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = k_n$$

/pueden formarse

pueden formarse dos matrices: M de orden $m \times n$ será la matriz de coeficientes y M' de orden $m \times n+1$ será la matriz agregada que se obtiene de M agregando la columna de términos independientes.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & k_n \end{bmatrix}$$

(m)(n) (m)(n+1)

Sea h el rango de M. Si existe solución, habrá un vector $\{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}$ tal que:

$$Mx = k$$

Resulta por lo tanto que:

$$R_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

De aquí se deduce que en la matriz M' la última columna, de términos independientes, resulta ser combinación lineal de las n primeras. Por lo tanto, M y M' tendrán el mismo rango. Si el rango de las matrices M y M' es h, el sistema tiene solución. Se pueden presentar los siguientes casos:

Si $m = n = h$, habrá solución única

Si $m = h$ y $n > h$, habrá múltiples soluciones

Si $m > h$ y $n = h$, habrá solución única, previa eliminación de $m - h$ ecuaciones que serán combinación lineal de las h primeras.

En el caso en que $m > h$ y $n > h$ el sistema tendrá infinitas soluciones. Será necesario, por una parte, eliminar $(m-h)$ ecuaciones y fijar valores a las $n-h$ incógnitas. La multiplicidad de soluciones proviene justamente de las infinitas posibilidades de fijar, exógenamente, valores a estas $n-h$ incógnitas. La diferencia aludida constituye una cota para el número de grados de libertad, es decir, $n-h$, que constituye la nulidad por columnas, es el máximo número de grados

/de libertad

Si se analiza el rango de la matriz ampliada, se comprobará que también es 3, ya que para que un sistema lineal sea compatible, es decir, tenga solución, es condición necesaria y suficiente que la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tengan el mismo rango.

D. Resolución de Sistemas Homogéneos

1. Planteamiento. Por sistema homogéneo se entenderá aquél en que todos los términos libres son nulos. Su forma general es la siguiente:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0$$

2. Tipos de solución. Es necesario puntualizar que este tipo de sistemas son siempre compatibles, porque siempre admiten solución trivial, es decir, se satisfacen todas y cada una de las ecuaciones con $x_i = 0$ para todo i .

Supóngase que admiten otro tipo de solución aparte de la trivial.

Si ella existe, es evidente que existirá un conjunto de valores tal que

$$x_1 = \alpha_1 \quad x_2 = \alpha_2 \quad \dots \quad x_n = \alpha_n$$

Pero además existirá otro conjunto:

$$\lambda \alpha_1 \quad \lambda \alpha_2 \quad \dots \quad \lambda \alpha_n$$

que también será solución. Esto implica que en el caso en que el sistema admita una solución distinta a la trivial, siempre será indeterminado.

Si $h = n$ la solución trivial será la única solución.

Si $h < n$ existirá infinitas soluciones, dando valores a las $n-h$ incógnitas que son los grados de libertad.

/Obsérvese el

Obsérvese el siguiente ejemplo:

$$3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, luego $n-h$ es 1, y será necesario fijar valor al grado de libertad existente. Supóngase que se fija $x_3 = 1$, los valores de x_1 y x_2 que satisfacen el sistema serán 2 y 3 respectivamente. Pero evidentemente también constituirá cualquier conjunto de valores proporcional a $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Por ejemplo también será solución: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ y $x_3 = 2$. En consecuencia, aun en el caso en que el sistema admita solución distinta a la trivial, siempre esta solución será indeterminada.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYS 440

LECTURE NOTES
BY
[Faint text, likely the name of the lecturer]