PRELIMINAR

Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y
Social
Programa de Capacitación

Santiago, septiembre de 1968

NOCIONES ELEMENTALES SOBRE TEORIA DE LA DECISION *

(Apuntes de clases)

* Apuntes de clases preparados por el Profesor Edmundo Meneses para la especialidad de programación presupuestaria del Curso Básico de Planificación de 1968.

NOCIONES ELEMENTALES SOBRE TEORIA DE LA DECISION

(Apuntes de clase)

Antes de formular un problema de decisiones deberíamos tener una idea de lo que éste constituye; es decir, cuáles son sus elementos fundamentales:

Primero, y lo más obvio, es el hecho de que existe un individuo o un grupo de individuos que está insatisfecho con un determinado estado de cosas y en consecuencia desea hacer algo para alterarlo en un determinado sentido. Este individuo o grupo es el primer componente del problema y lo llamaremos: el tomador de decisiones. Cuando el tomador de decisiones controla las operaciones de un sistema organizado de hombres y/o máquinas, nos referiremos a él como: el ejecutivo.

En segundo lugar, para que el tomador de decisiones tenga un problema debe desear algo diferente a lo que ya tiene; es decir, debe tener ciertos objetivos que no ha obtenido en el grado que lo desea. El objetivo constituye el segundo componente del problema.

En tercer lugar, el tomador de decisiones tiene su problema dentro de un marco en el cual dispone, o no dispone, de una cierta cantidad de recursos. En el tipo de problema que nos preocupa, este marco es un sistema organizado que generalmente abarca hombres, máquinas, elementos productivos, etc. El sistema es pues el tercer componente del problema.

Finalmente, el problema no puede existir a menos que el tomador de decisiones pueda elegir entre un mínimo de dos cursos de acción alternativos. Sin posibilidades de elección puede haber insatisfacción, pero no puede haber problema de decisión. Un problema siempre implica la cuestión: ¿qué hacer? Y esta cuestión es un problema cuando se dispone de varios cursos de acción alternativos. Los cursos de acción alternativos son el cuarto componente de un problema.

El campo de la toma de decisiones se divide generalmente de acuerdo a si la decisión se toma por un individuo o por un grupo:

i) decisiones individuales

ii) decisiones de grupo

y de acuerdo a las condiciones en que se efectúa respecto a los resultados posibles:

/a) decisiones bajo

a) decisiones bajo condiciones de certeza

b) decisiones bajo condiciones de riesgo

c) decisiones bajo condiciones de incertidumbre.

Respecto a la primera división, la distinción entre individuo y grupo no es de naturaleza biológico-social, sino simplemente funcional. Cualquier tomador de decisiones - un simple ser humano o una organización - de la cual se suponga que tiene un interés unitario que motiva sus decisiones puede ser tratado como un individuo en la teoría. Cualquier conjunto de tales individuos que tengan intereses en conflicto que deba resolverse, ya sea en abierto conflicto o mediante compromiso, será considerado un grupo.

En lo que se refiere a la segunda clasificación, supóngase que haya que elegir entre dos cursos de acción. Diremos que estamos en el dominio de la toma de decisiones bajo condiciones de:

a) certeza, si cada acción se sabe, conduce invariablemente a un resultado específico;

b) riesgo, si cada acción conduce a uno de un conjunto de resultados posibles, los cuales deben ocurrir con una probabilidad conocida. Desde el punto de vista de la teoría, se supone que las probabilidades son conocidas por el tomador de decisiones.

c) incertidumbre, si cada acción tiene como consecuencia un conjunto de resultados específicos, pero las probabilidades de estos resultados son completamente desconocidos.

Toma de decisiones bajo condiciones de certeza

Típicamente, la toma de decisiones bajo condiciones de certeza se reduce a esto: dado un conjunto de actos posibles, elegir aquél que maximice (o minimice) un indicador dado. Simbólicamente, sea x un acto genérico en un conjunto dado F de actos posibles, hallar aquel $x^{(o)}$ en F que rinda el máximo (mínimo) del indicador, es decir:

$$f\ (x^{(o)}) \geq f\ (x) \quad \text{para todo } x \text{ en } F.$$

Muy a menudo, el verdadero problema consiste en elegir en forma apropiada tal indicador. En muchos campos de la economía, utilidad y pérdida son indicadores adecuados, pero en otros contextos no se dispone de tales cantidades.

/Para citar

Para citar un ejemplo no trivial de toma de decisiones bajo condiciones de certeza, se ha elegido el clásico problema de programación lineal.

Supóngase que el gobierno desea realizar tres programas: P_1, P_2 y P_3, los cuales, supuestamente, resultan en bienes y servicios cuantificables. Para estas tareas se dispone de una cierta cantidad R_1 de recursos financieros, R_2 de recursos humanos y R_3 de recursos de capital (inversiones). El problema consiste en decidir los niveles de actividad de cada uno de los programas, de tal manera que se optimice el logro de los objetivos que se plantea el gobierno con dichos programas.

Si se analiza el problema, se verá que en él están presentes todos los elementos que se anotaron al comienzo: el tomador de decisiones está representado por el gobierno; el sistema, por el conjunto de recursos de todo tipo disponibles para realizar los objetivos perseguidos; el objetivo, representado por las metas de producción que el gobierno desea lograr mediante los programas citados; y, finalmente, los cursos de acción posible, representados por las infinitas combinaciones de recursos disponibles que den lugar a los correspondientes niveles de actividad de los programas.

Si se traduce esta situación real en un modelo matemático, éste tendría la forma siguiente:

Sean X_1, X_2 y X_3 los niveles de actividad de los programas P_1, P_2 y P_3, o sea, la cantidad de bienes y servicios a producir mediante la realización de los programas;

A_{ij} son los coeficientes que indican las cantidades necesarias del recurso i para producir una unidad del bien objeto del programa j.

La certeza en este tipo de proceso de decisión radica precisamente, en parte, en la existencia de este tipo de coeficientes.

Las condiciones de factibilidad de los distintos niveles de actividad estarán dados por el sistema de desigualdades

$$\sum_{i=1}^{3} A_{ij}X_j \leq R_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Estas condiciones de factibilidad definen pues los cursos de acción alternativos que tiene ante sí el tomador de decisiones.

/El criterio

El criterio de decisión de uno (o varios) de esos cursos de acción consiste en la maximización, digamos, del valor de la producción total, o sea

$$P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 = \text{máximo}$$

donde P_1 son los precios de los bienes y servicios objetos de los programas.

En resumen, el problema consiste en seleccionar niveles de actividad de los programas P_1, P_2 y P_3, de tal manera que éstos sean factibles desde el punto de vista de las disponibilidades de recursos R_1, R_2 y R_3 y además se maximice el valor de la producción total que resulte de esos programas.

Este es, claramente, un problema de decisión bajo condiciones de certeza, el cual ha sido transformado en el problema matemático de maximizar una función lineal en las variables condicionada por un conjunto de desigualdades también lineales. Obviamente, este problema no puede ser manejado con los métodos tradicionales del cálculo, y la teoría de los cuerpos convexos es crucial para su solución.

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Como se dijo antes, la toma de decisiones bajo condiciones de riesgo implica el conocimiento por parte del tomador de decisiones de las probabilidades de ocurrencias de los distintos resultados posibles al tomar un curso de acción determinado.

En estas circunstancias, el criterio de decisión consistirá en maximizar la utilidad esperada de los diferentes cursos de acción. Por ejemplo, supóngase que se desea invertir un millón de pesos y existen tres posibilidades de inversión a las cuales llamaremos S_1, S_2 y S_3. Los rendimientos anuales en estas tres inversiones son: para S_1 un 4 por ciento anual; para S_2 un 4,5 por ciento anual y para S_3 un 3 por ciento anual. Supóngase al mismo tiempo que esta información es válida solamente en el caso de que no haya guerra; de lo contrario, los rendimientos serían 4 por ciento para la inversión S_1; 2,75 por ciento para la inversión S_2 y 0 por ciento para la inversión S_3. Podríamos escribir esta situación en la siguiente tabla:

	Rendimientos	
	Paz	Guerra
Inversión S_1	40 000	40 000
Inversión S_2	45 000	22 500
Inversión S_3	30 000	0

Si las probabilidades de paz y guerra son respectivamente 0.7 y 0.3, podremos calcular el rendimiento esperado de cada una de las inversiones y se obtendría:

Inversión S_1	40 000
Inversión S_2	38 250
Inversión S_3	21 000

La decisión más adecuada en este caso de acuerdo al principio del máximo rendimiento esperado sería invertir en S_1.

El uso de este principio en la toma de decisiones requiere pues la evaluación de las probabilidades de ciertos eventos y los valores asociados con ellos. Este no es un procedimiento sencillo y muy pocas decisiones se han tomado en la práctica como resultado de calcular la utilidad esperada. No obstante, el ejercicio es útil porque afina la percepción del tomador de decisiones de los riesgos que puede estar corriendo al preferir determinadas selecciones y las consecuencias a las que debe hacer frente si estas determinaciones son equivocadas.

Decisiones bajo condiciones de incertidumbre. La toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre está basada en la nueva rama de la matemática llamada "Teoría de los Juegos de Estrategia". Explicaremos esta teoría basándonos en los juegos bipersonales de suma nula.

Juegos con punto de equilibrio

Con el fin de familiarizarnos con los conceptos fundamentales de la teoría haremos uso de un juego finito bipersonal de suma nula. Sea un juego con la siguiente matriz de pagos:

		JUGADOR B			
		B_1	B_2	B_2	B_2
JUGADOR A	A_1	-5	2	0	7
	A_2	7	6	4	8
	A_3	4	0	2	3

/El significado

El significado de esta presentación es el siguiente: el jugador A puede adoptar cualquiera de sus tres cursos de acción disponibles, A_1 A_2 y A_3; a su vez el jugador B puede oponer a la selección de A una cualquiera de sus alternativas B_1, B_2, B_3 y B_4. Una vez hecha la selección por parte de ambos jugadores y realizadas las movidas correspondientes, el jugador B debe pagar al jugador A la cantidad indicada por la cifra de la matriz donde se cruzan las estrategias de ambos jugadores. Es decir, a cada pareja de estrategias adoptadas por ambos jugadores corresponde un pago que el jugador B debe hacer a A. En el caso del ejemplo, a la pareja de estrategias (A_3B_1) corresponde un pago igual a 4; es decir si A selecciona su tercera estrategia y B responde con su estrategia B_1, entonces este último debe pagar a A la cantidad de 4. Nótese que algunos elementos de la matriz son negativos y ceros. En el caso de la pareja de estrategias (A_3B_4), el pago correspondiente es igual a -3; esto significa que en el caso de adoptar ambos jugadores las estrategias indicadas, entonces será A quien tenga que pagar a B la cantidad positiva 3. Para la pareja (A_3B_2) el pago es cero; es decir que en esta situación ninguno de los dos jugadores recibe pago alguno.

Una vez establecidas las reglas del juego, corresponde analizar cual debería ser el curso de acción de cada jugador si ambos actúan racionalmente con el objetivo final de lograr los resultados más favorables en dicha confrontación. Para ello, definiremos el concepto de <u>nivel de seguridad</u> de cada jugador ante cualquier curso de acción seleccionado. A cada estrategia seleccionada por uno de ellos le corresponderá un pago cuyo monto depende del curso de acción adoptado por su oponente; en el caso en que A seleccione su estrategia A_1, éste puede obtener un pago de -5, 2, 0 ó 7, de acuerdo a si B responde B_1, B_2, B_3 o B_4, respectivamente. El pago mínimo garantizado a A como producto de su decisión es -5, o sea, al seleccionar A su estrategia A_1, lo peor que podría ocurrirle es que tenga que desembolsar la cantidad 5. A esta cantidad, -5, que es la mínima de la fila A_1 se le llama nivel de seguridad de A respecto a su estrategia A_1. De la misma forma podemos determinar los niveles de seguridad de A respecto a sus otras estrategias, las cuales resultan ser 4 y -3 para las filas A_2 y A_3, respectivamente.

		JUGADOR B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	Nivel de seguridad (mínimo de la fila)
	A_1	-5	2	0	7	-5
JUGADOR A	A_2	7	6	4	8	4
	A_3	4	0	2	-3	-3
Nivel de seguridad (máximo de la columna)		7	6	4	8	

El nivel de seguridad del jugador B se define de acuerdo al siguiente criter si los elementos de la matriz representan desembolsos para B, entonces es obvio que lo peor que podría sucederle a B ante la adopción de una estrategia determina es que tenga que desembolsar una cantidad máxima. Es decir, si éste adopta su estrategia B_1 tendría que desembolsar -5, 7 ó 4, dependiendo de que A oponga a eso su estrategia A_1, A_2 ó A_3, respectivamente. Se puede apreciar que el resultado menos favorable que le cabe esperar es un desembolso de 7 cuando A presente su estrategia A_2. Esta cifra es la máxima de la columna B_1 y recibe el nombre de nivel de seguridad de B respecto a su estrategia B_1. En forma similar se pueden determinar los niveles de seguridad de B respecto a las otras columnas, las cuales serán 6, 4 y 8, respectivamente. En el cuadro anterior se han escrito los resultados obtenidos.

Si A espera obtener el resultado más favorable del juego, entonces la decisión más adecuada que podría tomar sería adoptar aquella estrategia que tenga el mayor nivel de seguridad posible; en este caso, la estrategia que posee esta característica es A_2 con un nivel de seguridad igual a 4. La adopción de la misma le garantiza a A un pago nunca inferior a 4. Se desprende de aquí que lo mejor que A puede hacer es adoptar la estrategia A_2, ya que cualquiera otra decisión le podría significar un resultado menos deseable.

Por su parte, B también tiene el propósito de lograr el resultado más favorable posible del juego. Pero, puesto que las cifras de la matriz representan desembolsos para este jugador y, en consecuencia, sus niveles de seguridad representan desembolsos máximos para sus estrategias, entonces se hace obvio que deberá tomar una decisión que haga mínimo su nivel de seguridad. En este caso

/deberá adoptar

deberá adoptar la estrategia B_3 con nivel de seguridad de 4. Esta decisión le garantiza a B que en ningún caso tendrá que desembolsar una cantidad mayor que 4.

Nótese que en este juego particular los niveles de seguridad de ambos jugadores respecto a las estrategias adoptadas coinciden. Las implicaciones de esta coincidencia son las siguientes: si ambos jugadores adoptan las estrategias mencionadas y el juego se repite un número indefinido de veces, entonces ninguno de ellos tendrá interés en cambiar de estrategia; la situación resultante es una de equilibrio estable. Las estrategias adoptadas por los jugadores son óptimas y la ganancia generada (4) es el valor del juego. Es necesario recalcar el hecho de que esta situación de equilibrio estable, la cual ninguno de ellos tiene interés en abandonar bajo pena de obtener resultados menos favorables, es posible solamente por la existencia de ese elemento de la matriz, el cual tiene la característica de ser el menor de su fila y al mismo tiempo el mayor de su columna. A este punto particular se le llama punto de equilibrio o punto de osculación (o aún, punto montura, traducción literal del inglés "saddle point"). La existencia del punto de equilibrio determina que los jugadores adopten lo que en jerga técnica se denomina estrategias puras. La distinción precisa del término quedará clara al tratar otro tipo de estrategias más adelante.

El juego tiene, pues, una solución óptima, la cual consiste en hallar las estrategias de los jugadores y el valor del juego de tal manera que la adopción de las mismas constituya una situación estable.

<u>Juegos sin punto de equilibrio</u>

Analizaremos ahora un juego que no tiene punto de equilibrio y examinaremos entonces lo que se entenderá por solución del mismo. Consideremos el juego que tiene la siguiente matriz de pagos:

<u>JUGADOR B</u>

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	3	11
A_2	8	5	2

/Se observará

Se observará que en dicha matriz no existe ningún elemento que sea a la vez el mínimo de su fila y el máximo de su columna. No tiene punto de equilibrio

Siguiendo la línea de razonamiento anterior, A determina sus niveles de seguridad respecto a sus estrategias puras A_1 y A_2; éstas resultan ser 1 y 2, respectivamente. Al maximizar su nivel de seguridad, éste se decide por su estrategia A_2, la cual le garantiza una ganancia no inferior a 2, cualquiera que sea la estrategia que oponga B. A su vez, B determina sus niveles de seguridad de acuerdo a su situación en el juego y éstas resultan ser 8, 5 y 11 respecto a sus estrategias puras B_1, B_2 y B_3, respectivamente. Deberá pues adoptar aquella estrategia que haga mínimo su nivel de seguridad; ésta es la estrategia pura B_2 con un nivel de seguridad igual a 5. Se aprecia aquí que los niveles de seguridad de ambos jugadores respecto a las estrategias mencionadas no coinciden, o sea, el juego no tiene punto de equilibrio. De todas maneras, hemos supuesto que los jugadores han tomado su decisión de acuerdo con el criterio establecido. ¿Qué implicaciones tiene la no existencia de un punto de equilibrio respecto a la estabilidad de la conducta de los jugadores en el desarrollo repetido del juego?

Antes de entrar en materia, es necesario suponer que este es un juego repetitivo, o sea, se pretende jugarlo un número indefinido de veces; lo contrario implica que cualquiera movida sería buena.

Al enfrentar ambos jugadores las estrategias seleccionadas (A_2B_2), el pago que B debe hacer a A es 5. Si el juego continúa repitiéndose en la misma forma, puede apreciarse que el jugador A no tiene interés en cambiar su estrategia, ya que ésta le rinde una ganancia mayor que el máximo que esperaba (2). Seguirá pues exhibiendo en forma estable la estrategia A_2. Sin embargo, la situación es completamente diferente para el jugador B, ya que al darse cuenta de que A sólo juega A_2 en forma inalterable, éste ve la posibilidad de disminuir su pérdida adoptando una estrategia distinta. Adoptará la estrategia B_3, con lo cual consigue disminuir su pérdida a 2. Ahora la situación es estable para B, ya que su decisión le significa un desembolso menor que el mínimo que esperaba; sin embargo, este cambio transforma la situación del jugador A, haciéndola inestable. Al constatar que B exhibe en forma constante la estrategia B_3 con una disminución del pago que estaba percibiendo antes del cambio, A aprecia la conveniencia de modificar su curso de acción y adopta la estrategia A_1, con lo cual elevará su ganancia a 11.

Puede fácilmente comprobarse que en esta situación los jugadores deberán estar modificando continuamente su curso de acción en busca de posiciones más favorables sin lograr jamás una situación de equilibrio. Considerando en conjunto las formas en que se está realizando el juego, se aprecia que las estrategias globales que han adoptado los jugadores consisten en una mezcla de sus estrategias puras. Se dice en este caso que las estrategias adoptadas por los jugadores constituyen estrategias mixtas o aleatorias.

Analizaremos entonces la racionalidad de la conducta de los jugadores bajo el lente de la existencia de tales estrategias mixtas.

Supondremos que A exhibirá sus dos estrategias puras mezcladas en proporciones (probabilidades) x_1 y x_2 donde $x_1 + x_2 = 1$ y simbolizaremos dicha estrategia mixta por el vector (x_1, x_2). En general, x_i será la probabilidad de que el jugador A use su estrategia pura A_i en una realización particular del juego. Al mismo tiempo el jugador B adoptará una mezcla de sus estrategias puras con probabilidades y_1, y_2 y y_3 donde $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ y simbolizaremos dicha estrategia por el vector (y_1, y_2, y_3). En general, y_j es la probabilidad que B adopte una estrategia pura B_j en una realización particular del juego.

Cuando el jugador A exhiba sus estrategias A_1 y A_2 con probabilidades x_1 y x_2 y B responda con su estrategia B_1 entonces la esperanza matemática de su ganancia será $w_1 = x_1 + 8x_2$; si B, en cambio, responde con su estrategia B_2 su ganancia esperada será $w_2 = 3x_1 + 5x_2$; y, finalmente, al oponer B su estrategia pura B_3, la ganancia esperada de A será $w_3 = 11x_1 + 2x_2$. Se definirá el nivel de seguridad de A con respecto a su estrategia mixta (x_1, x_2) como la ganancia mínima esperada entre las tres ya mencionadas:

$$w = \min(w_1, w_2, w_3)$$

Análogamente, cuando el jugador B adopte sus estrategias puras B_1, B_2 y B_3 con probabilidades y_1, y_2 y y_3 respectivamente y A oponga su estrategia A_1 entonces la pérdida esperada de B será $u_1 = y_1 + 3y_2 + 11y_3$; y si A responde con su estrategia A_2, la esperanza matemática de su pérdida será $u_2 = 8y_1 + 5y_2 + 2y_3$. Se define su nivel de seguridad como la pérdida esperada máxima:

$$u = \max(u_1, u_2)$$

/El problema

El problema para ambos jugadores consiste ahora en establecer las probabilidades con que harán uso de sus respectivas estrategias puras de tal manera que el resultado esperado para ambos sea el más favorable.

A deberá entonces resolver el siguiente problema: hallar un vector

$$X = (x_1, x_2)$$

con componentes no nulas y un escalar w tal que:

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 &= w \\ 3x_1 + 5x_2 &= w \\ 11x_1 + 2x_2 &= w \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

con un w máximo.

Por su parte, B deberá hallar un vector

$$Y = (y_1, y_2, y_3)$$

con componentes no negativas y un escalar u de tal forma que:

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 + 11y_3 &= u \\ 8y_1 + 5y_2 + 2y_3 &= u \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

haciendo u mínima.

Puede demostrarse que al encontrar ambos jugadores sus estrategias mixtas que satisfagan las condiciones establecidas se verificará:

$$u = w = v$$

constituyendo esa cantidad v el valor del juego.

En el caso del ejemplo, las estrategias encontradas son: para A (3/11, 8/11) y para B (0, 9/11, 2/11), las cuales constituyen sus estrategias óptimas, y el valor del juego v = 49/11.

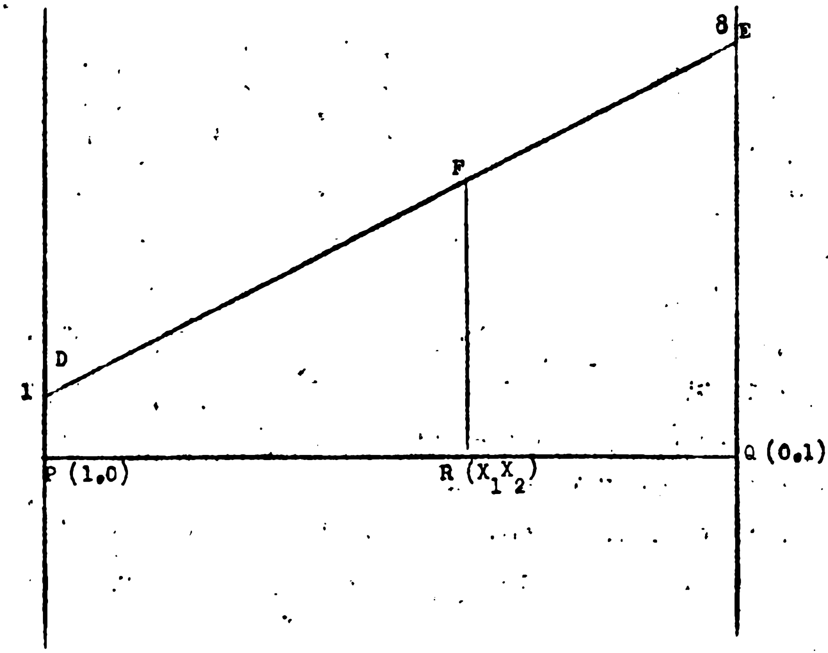
La interpretación de la solución hallada es la siguiente: la decisión óptima de cada jugador consistirá en adoptar en cada partida del juego una estrategia pura mediante un procedimiento aleatorio adecuado, tal como el lanzamiento de un dado, que asigne a cada una de ellas la probabilidad establecida. Cabe recalcar el hecho de que la elección debe hacerse en forma aleatoria en contra de una aplicación sistemática de las proporciones indicadas ya que ello permitiría al adversario poner en práctica una

/estrategia que

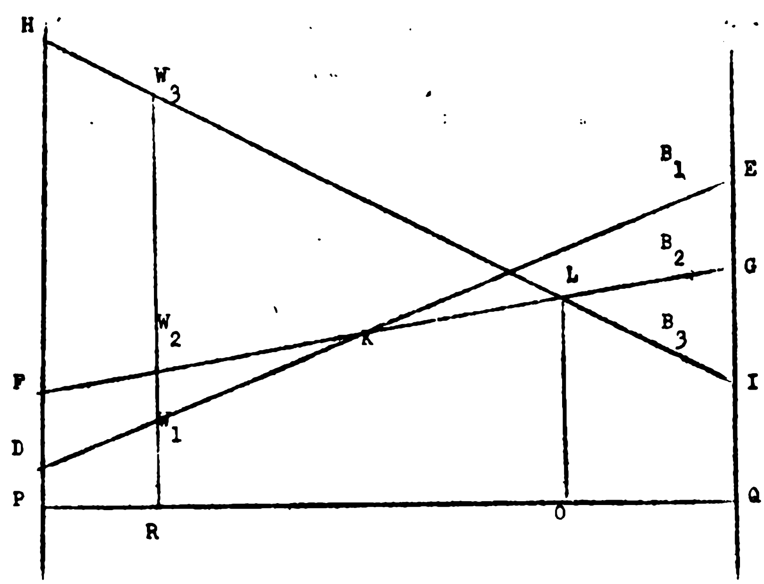
estrategia que llevase la posición del primero al plano más desfavorable. Por ejemplo, supóngase que A interpreta su estrategia (3/11, 8/11) en el sentido de que de cada 11 partidos jugados en los tres primeros debe exhibir la estrategia pura A_1 y en los ocho siguientes A_2 y pone en práctica el procedimiento. Bastará que se juegue algunos partidos para que B descubra el mecanismo de decisión que emplea A y actúa en consecuencia para mejorar su posición: abandonará su estrategia calculada y en cambio opondrá la estrategia pura B_1 en los tres primeros partidos y B_3 en los ocho siguientes haciendo ganar la ganancia media de A a 19/11 que es peor resultado posible. Obviamente, la estrategia adoptada por A no contradice la óptima enunciada pero sólo ha conseguido con su aplicación un resultado desastroso y ello se ha debido a que en el mecanismo de selección de A ha estado ausente el elemento de aleatoriedad que es fundamental para que la teoría tenga validez.

Para hacer más claridad en las ideas expuestas, daremos una interpretación geométrica del juego usando el mismo ejemplo anterior. En la figura que se acompaña PQ es un trazo de magnitud igual a la unidad, sobre un eje de abscisas. Cualquier punto R dentro del trazo PQ representa una estrategia mixta del jugador A: (x_1, x_2) donde el valor del segmento PR es la probabilidad de usar la estrategia pura A_1 y el segmento RQ es la probabilidad de la estrategia pura A_2. El punto P representará la estrategia (1, 0) en que A sólo adoptará la estrategia pura A_1 y el punto R representa la estrategia (0, 1) en que A sólo adopta la estrategia pura A_2. La ordenada de cualquiera de los puntos del trazo PQ representa la esperanza matemática del pago de A cuando B oponga cualquiera de sus estrategias puras en respuesta a la movida de A. Supongamos que al usar A su estrategia pura A_1 su oponente adopta su estrategia pura B_1, entonces la ordenada PD igual a 1 representa el pago que corresponde a la pareja (A_1, B_1) y la ordenada QE igual a 8 el pago correspondiente a la pareja (A_2, B_1). Si se unen los puntos D y E mediante una recta, es facil demostrar que la ordenada del punto R será igual a $8x_1 + x_2$ que es la esperanza matemática del pago cuando al adoptar A su estrategia mixta (x_1, x_2) B opone su estrategia B_1; o sea, los puntos de la recta DE representan las ganancias esperadas de A cuando este adopta su estrategia mixta (x_1, x_2) y B opone su estrategia pura B_1.

/Figura



Una representación similar obtendremos para cada estrategia pura que B oponga a la estrategia adoptada por A y la figura quedará al final como sigue:



Es fácil constatar que a cada punto del trazo PQ (estrategia de A) corresponden tres ordenadas representativas de las ganancias esperadas de A al oponer B cada una de sus tres estrategias puras. Cuando A adopte la estrategia mixta representada por el punto R, estas tres ordenadas serán RW_1, RW_2 y RW_3. Ya habíamos establecido que el nivel de seguridad de A respecto a cualquiera estrategia era la mínima esperanza matemática de ganancia correspondiente a esa estrategia; entonces será obvio que el nivel de seguridad de A respecto a su estrategia R será la ordenada RW_1. También será obvio que el nivel de seguridad de A es variable de acuerdo con la estrategia adoptada y esa variabilidad está representada por la ordenada de los puntos de la poligonal DKLJ en la figura. Entonces el problema de elección de una estrategia óptima para A consistirá en elegir aquel punto de la poligonal que tenga una ordenada máxima. Esta ordenada será el valor del juego y la abscisa de dicho punto corresponderá a la estrategia óptima de A.

Haciendo los cálculos en la figura se puede establecer que la estrategia óptima de A es (8/11, 3/11) y el valor juego es 49/11. Respecto al jugador B, lo único que queda claro es que deberá usar una estrategia mixta en la cual debe mezclar solamente sus estrategias puras B_2 y B_3 pero el valor numérico de las proporciones no puede establecerse.

Para resolver el problema del jugador B en forma similar haremos uso de otra representación gráfica del juego.

/En el

En el sistema de coordenadas del gráfico, la abscisa representa la ganancia esperada de A cuando este adopta su estrategia pura A_1 y la ordenada representa la ganancia esperada del mismo cuando adopta la estrategia pura A_2 y la estrategia adoptada por B es cualquiera de sus estrategias mixtas. Así la abscisa del punto B_1 representa la ganancia de A cuando B juega B_1 y A responde A_1 (o sea, 1) y la ordenada representa la ganancia de A cuando B juega B_1 y A responde A_2 (o sea, 8). Las coordenadas de los puntos del casco convexo $B_1B_2B_3$ son las ganancias esperadas cuando B adopta sus estrategias mixtas. Se puede apreciar que la elección mejor para A será jugar A_1 cuando el punto B_i caiga debajo de la linea L de 45° (donde la abscisa es mayor que la ordenada) y jugar A_2 cuando el B_i caiga sobre la mencionada línea (donde la ordenada es mayor que la abscisa); obviamente deberá jugar una mezcla de ambas estrategias puras cuando el punto caiga en la línea L.

Para B, el nivel de seguridad estará dado por la coordenada máxima del punto representativo de su estrategia. Si el punto está debajo de L, el nivel de seguridad de B estará representado por la abscisa y si está por encima de L, el nivel de seguridad será la ordenada. Se ve pues que la solución del problema para B, consistirá en encontrar un punto en el casco convexo que sea tangente con el cuadrado de área mínima formado por los ejes del sistema de coordenadas.

En este caso, la solución del juego para B estará representada gráficamente por el punto O cuyas coordenadas son iguales e iguales al valor del juego v, siendo su estrategia mixta óptima una mezcla de sus estrategias puras B_2 y B_3. Las proporciones en que deberá mezclar ambas estrategias puras serán proporcionales a los segmentos OB_2 y OB_3. Realizando el cálculo sobre el gráfico se obtiene $y_2 = 9/11$ y $y_3 = 2/11$; $v = 49/11$. Esto significa que B deberá oponer a la estrategia-mixta de A (3/11, 8/11) su propia estrategia mixta (0, 9/11, 2/11) lo cual le garantizará una pérdida esperada no superior a 49/11. Estos resultados coinciden con los obtenidos anteriormente en forma algebráica.

/Como, puede

Como, puede apreciarse, ha quedado completamente resuelto el juego propuesto al inicio mediante un sencillo expediente geométrico. Este método tiene la grave limitación de ser aplicable solamente en los casos en que la matriz de pagos es de 2xm o de 3xm. En los casos en que los oponentes tengan a su disposición un número de estrategias puras mayor que 3 ya no es posible aplicarlo y la búsqueda de una solución se complica sobremanera. En estos casos, es posible resolver el problema reduciéndolo a un programa lineal y resolviendo por cualquiera de los métodos conocidos.

/Toma de

Toma de decisiones bajo incertidumbre como un juego jugado por un individuo contra la naturaleza

Las situaciones con las que tenemos que enfrentarnos con frecuencia en la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre pueden presentarse como cierto tipo de juegos de estrategia y tratar de hallar la decisión óptima basándose en la teoría de los juegos.

En semejante juego se presentan dos oponentes A y B. Uno de ellos es un individuo y el otro es "la naturaleza" cuya acción se manifiesta en forma de fenómenos naturales que influyen en el resultado de las acciones del individuo (inundación, sequía, cambio en la situación del mercado, etc.) e independientes de su voluntad. Tenemos que ver, por lo tanto, con lo que se llama "el juego del hombre contra la naturaleza". La persona A "que juega contra la naturaleza" trata de proceder en lo posible lo más prudentemente, aplicando, por ejemplo, la estrategia minimax, o sea, tratando de elegir entre las distintas situaciones desfavorables para él, una que produzca los menores daños en sus funciones. El segundo rival B - la naturaleza - procede de un modo totalmente casual pero en forma tal que al fenómeno "naturaleza" no es posible aplicar el cálculo de probabilidades. Los restantes principios del juego contra la naturaleza son los mismos que ya fueron descritos anteriormente al tratar del juego estratégico entre dos personas.

Las estrategias que el individuo tiene que elegir al jugar contra la naturaleza se determinan mediante decisiones y las estrategias de la naturaleza son los estados naturales. Si los elementos de la matriz de este juego corresponden a los ingresos que se podrán obtener como resultado de tomar tal o cual decisión por parte del individuo, se procederá entonces, evidentemente, de acuerdo con el principio del maximin. Por razonamiento supone que la naturaleza elige para él la situación peor (y por tanto, en cada decisión debe tener en cuenta el mínimo de ingresos) y toma una decisión tal que corresponda a los ingresos mínimo máximos. Por el otro lado, si la matriz de pagos se compone de elementos que determinan los gastos que hay que efectuar por realizar determinadas acciones, el individuo procede entonces de acuerdo al principio del minimax porque - razonando análogamente al caso anterior - debe suponer que la naturaleza elige

/una situación

una situación que será la peor para él y que, por lo tanto, requerirá los gastos máximos posibles.

Consideramos el problema basado en la elaboración de un programa óptimo de inversiones energéticas supongamos que existen posibilidades de construir cuatro tipos de centrales eléctricas:

A_1 = termoeléctrica
A_2 = hidroeléctrica con presas
A_3 = fluviales sin instalaciones de exclusas
A_4 = fluviales con instalaciones de exclusas

La efectividad de cada uno de los cuatro tipos de inversiones dependen de una gran variedad de factores, como por ejemplo, las condiciones climáticas (inundaciones, sequía, helada, etc.) así como los precios del petróleo, los costos de su transporte, etc. Supongamos que se pueda distinguir - al menos a grosso-modo - cuatro casos distintos de los cuales cada uno significa un determinado conjunto de factores que tienen influencia en la futura efectividad de las inversiones en energía. De acuerdo con esto se consideran cuatro estados de la naturaleza que se representarán por B_1, B_2, B_3 y B_4:

La efectividad económica de la construcción de distintos tipos de centrales eléctricas (determinada por ejemplo como porcentaje de incremento del ingreso nacional con relación al importe de los desembolsos de inversión) de acuerdo a los estados de la naturaleza se muestra en cuadro siguiente.

Puesto que los elementos de la matriz del juego expresan los beneficios (porcentaje de aumentos del ingreso nacional) que se logran gracias a la toma de decisiones de inversión adecuadas es por lo que la solución determinada de acuerdo al principio del maximin aplicado en la teoría de los juegos estratégicos es

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} = 3$$

lo que al mismo tiempo significa que convendría realizar la construcción de las centrales eléctricas fluviales sin instalaciones de exclusas.

Por otra parte si se supone que los distintos elementos de la matriz del juego presentados en el cuadro siguiente significan los correspondientes

/Cuadro

Tipo de central eléctrica \ Estados de la naturaleza	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	Promedio
A_1: Central termoeléctrica	5	2	8	4	2	8	5
A_2: Central hidroeléctrica con presa	2	3	4	12	2	12	7
A_3: Central eléctrica fluvial sin instalaciones de exclusas	8	5	3	10	3	10	6.5
A_4: Central eléctrica fluvial con instalaciones de exclusas	1	4	2	8	1	8	4.5
$\max\limits_i a_{ij}$	8	5	8	12			

gastos en inversiones (por ejemplo, los costos de construcción de la central eléctrica) entonces la solución determinada se tomaría de acuerdo al principio del minimax:

$$\min_i \ \max_j \ a_{ij} = 8$$

lo cual significa al mismo tiempo que convendría tomar la decisión A_1 ó A_4, y por consiguiente, construir las centrales termoeléctricas o las fluviales con la instalaciones de exclusas.

El principio de Hurwicz

Las decisiones tomadas basándose en la estrategia minimax toma en cuenta los estados de la naturaleza menos beneficiosos para las medidas humanas, es pues una estrategia asegurativa y pesimista. Por otra parte los supuestos de que las decisiones del hombre tropiezan con los estados naturales más ventajosos serían demasiado optimistas y las decisiones basadas en semejantes supuestos serían arriesgadas.

Resulta lógico que en la elección de la estrategia en lugar de dos situaciones extremas se adoptara una situación intermedia. Si en el caso

/de la

de la decisión A_1 el mejor resultado correspondiente al estado de la naturaleza B_3 es 8, y el peor estado de la naturaleza correspondiente a B_2 es 2, entonces como medida que hiciera posible la comparación de las consecuencias de estas decisiones con las consecuencias de otras decisiones podría adoptarse una media aritmética de estos dos números, es decir $1/2(8 + 2) = 5$. Para la decisión A_2 la media análoga es 7, para la decisión A_3 es 6.5 y para la decisión A_4 es 4.5. Basándose en este criterio, como decisión óptima convendría adoptar la estrategia A_2 y por tanto construir central hidroeléctrica con presa.

Este tipo de regla de compromiso (en relación al principio minimax) dirigida hacia la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre fue propuesto por Leonid Hurwicz.

<u>Principio de Savage</u>

Veamos ahora otra regla de procedimientos en la elección de la decisión óptima en condiciones de incertidumbre basada en el principio del "Minimax de los resultados de una decisión desacertada" (principio del minimax de la aflicción) introducida hace algunos años por el estadístico Savage.

La aplicación práctica de este principio se basa en la matriz de los resultados de las decisiones erróneas, llamada también "matriz de la aflicción" la cual en su aplicación al caso mencionado tiene la siguiente forma:

Estrategias \ Estados de la naturaleza	B_1	B_2	B_3	B_4	$\max\limits_j a_{ij}$
A_1	3	3	0	8	8
A_2	6	2	4	0	6
A_3	0	0	5	2	5
A_4	7	1	6	6	7

Esta matriz se construye basándose en la comparación del resultado de la decisión tomada con el resultado de la decisión que se tomaría conociendo

/el estado

el estado de la naturaleza. Si se produce un estado de la naturaleza B_1 entonces, tal como se desprende de la matriz del comienzo se demuestra que debería construirse centrales eléctricas fluviales sin instalaciones de exclusas (decisión A_3) ya que con un estado de la naturaleza B_1 a la decisión A_3 corresponde la máxima efectividad igual a 8. Sin embargo, si construimos centrales termoeléctricas y se produce el estado de la naturaleza B_1 entonces lo que perdemos en efectividad debido a un error en la decisión es 8 - 5 = 3 unidades. Así mismo, la construcción de una central de represa produce una pérdida de 8 - 2 = 6 unidades y la construcción de una central eléctrica fluvial con instalaciones de exclusas produce una pérdida de 8 - 1 = 7 unidades.

Los números así obtenidos se anotan en el renglón correspondiente de la primera columna de la matriz de resultado de decisiones erróneas. Evidentemente en el renglón tercero de la primera columna se anota cero ya que construyendo las centrales fluviales sin instalaciones de exclusas no se sufre ningún daño; dicha decisión no es errónea. Del mismo modo se calculan todos los demás elementos de la matriz.

La esencia del principio del minimax de Savage se basa en no permitir pérdidas demasiado grandes resultante de decisiones erróneas. Observando la matriz de las pérdidas alternativas notamos que la construcción de centrales termoeléctricas puede originar una pérdida máxima de 8 unidades, la construcción de centrales hidroeléctricas 6 unidades; la construcción de centrales eléctricas fluviales sin exclusas 5 unidades, y la construcción de centrales eléctricas fluviales con exclusas 7 unidades. Utilizando el principio de minimax de Savage conviene evidentemente adoptar la decisión A_3, o sea, construir centrales eléctricas fluviales sin exclusas ya que este tipo de decisión ofrece los menores daños posibles. El minimax de los daños alternativos es en este caso 5 unidades. Algunos autores llaman a la matriz de resultados de decisiones erróneas "matriz de la aflicción" ya que sus elementos expresan cierto grado de intensidad de aflicción resultante de haber tomado decisiones erróneas. En realidad, como se dijo, los elementos de la matriz de daños alternativos especifican las pérdidas producidas por una decisión

/errónea con

errónea con lo que nos enteramos del error de dicha decisión cuando la decisión fue realizada y se produjo uno de los estados naturales posibles.

El principio de Savage se aplica en la práctica con bastante frecuencia. En realidad al decidirse a tomar una de las alternativas uno elige con mucha frecuencia aquélla cuya realización puede producir los resultados menos perjudiciales aunque esta parezca ser errónea. Procediendo de esta forma nos basamos en la práctica en el principio minimax formulado matemáticamente por Savage.