PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, 19 de marzo de 1965

PROGRAMA DE MATEMATICAS Y
BIBLIOGRAFIA*

* Programa de Capacitación. Profesor Sr. Jaime Balcázar; Ayudantes, Sres. Vittorio Corbo, Jorge Carvajal y José M. Vildósola.

PROGRAMA DE CAPACITACION

Curso Básico 1965

Profesor: Sr. Jaime Balcázar

Programa de Matemáticas

1. Algebra

1.1 Repaso general de operaciones y expresiones algebraicas; simplificaciones y fracciones algebraicas

1.2 Radicales

1.3 Potencias

1.3.1 Binomio de Newton y triángulo de Pascal

1.4 Ecuaciones de primer grado con una variable

1.5 Ecuaciones de segundo grado con una variable

1.6 Ecuaciones de primer grado con dos variables

1.7 Ecuaciones de segundo grado con dos variables

1.8 Ecuaciones simultáneas de primer grado con dos variables

1.9 Ecuaciones simultáneas de primer grado con tres variables

1.9.1 Determinantes

2. Geometría analítica

2.1 Funciones y su representación gráfica

2.1.1 Ejes de coordenadas, cuadrantes, signos y representación de puntos

2.2 Representación gráfica de una función lineal (recta)

2.2.1 Coeficiente angular y ordenada en el origen

2.3 Representación gráfica de una función de segundo grado (curva)

/2.3.1

2.3.1 Características de una curva

2.3.2 Parábola

2.3.3 Hipérbola

2.4 Resolución gráfica de ecuaciones simultáneas de primer grado

2.5 Resolución gráfica de ecuaciones simultáneas de segundo grado

2.6 Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

3. <u>Logaritmos</u>

3.1 Definición y propiedades generales

3.2 Uso de tabla de logaritmos

3.3 Operaciones con logaritmos

4. <u>Tasas</u>

4.1 Progresiones

4.2 Sumatorias, concepto de series, fondo acumulativo

4.3 Tasas de crecimiento, interés compuesto

5. <u>Cálculo infinitesimal</u>

5.1 Concepto, definición y representación gráfica de la derivada

5.2 Diferenciación de sumas, productos y cocientes de funciones

5.3 Máximos y mínimos.

/BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

1. Baldor, A. "Algebra elemental", Ed. Cultural

2. Si se desea profundizar en algunos temas: Hall, H.S y Knight, S.R. "Algebra superior", Uteha, México 1948

3. Allen, R. G. - "Análisis matemático para economistas", Editorial Aguilar, Madrid.

4. Granville, W.A., Smith, P.F. y Longley, W.R. "Elements of the differential and integral calculus", Ginn and Co. (con traducción al castellano de Uteha, México).

5. Un tratamiento más amplio es: Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C.A. "Análisis matemático" 3 volúmenes, Editorial Kapelusz, Buenos Aires

oooooooooooooooo

PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, 4 de marzo de 1965

SEMINARIO DE MATEMATICAS - N° 1

* Programa de Capacitación, Profesor Sr. Jaime Balcázar; Ayudantes Sres. Vittorio Corbo, Jorge Carvajal y José M. Vildósola.

I SEMINARIO DE

MATEMATICAS

I. Calcular el valor de las siguientes expresiones para los valores indicados de la variable:

i) $A = \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{6} - (2x^2 - 6x)$ para $x = 2$

ii) $A = x - (x - 3 - 6) + x^2 - (3 + 2x)$ para $x = 5$

iii) $A = \frac{9ax}{8bx} : \frac{18x}{12a}$ para $x = -3$

II. Calcular el valor de x en las siguientes expresiones:

i) $x + 7{,}5 = 9{,}3$

ii) $0{,}3 = -6x$

iii) $3x + 2x - 4 = 21$

iv) $(3a - x) \cdot b = 3\,ab$

v) $9x + 4 = 31$

vi) $73x - 26 - 81x + 41 + 17x = 25 - x - 97 + 39x$

III. Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $\frac{5x - 1}{5x + 1} = \frac{2a + 3b}{3a + 2b}$

ii) $7\left(\frac{x}{a} - 1\right) = x\left(1 - \frac{a}{x}\right)$

iii) $2\frac{1}{5}\,x + 11 = 5\frac{1}{2}\,x$

iv) $\frac{5x}{7m} - \frac{3x}{5m} = 4$

/IV. i) ¿Que

IV. i) ¿Qué número hay que sumar a 739 para obtener 937?

ii) ¿Qué número da 3/4 si se le suma 1/12 ?

iii) ¿Qué número restado de 5,96 da el mismo resultado que sumado a 3,74 ?

iv) Averiguar el número cuyas tercera y quinta parte sumadas dan 40.

v) Hallar un número tal que restado de $19\frac{3}{4}$ y dividida esa diferencia por 5 da de cociente $\frac{3}{4}$.

vi) Un agricultor sufrió pérdidas con una tormenta de granizo. La cosecha se redujo a la tercera parte de lo que debió ser. Las pérdidas fueron $37\frac{1}{3}$ ton. Calcular cuál hubiese sido la cosecha sin el perjuicio ocasionado por el granizo.

vii) ¿A qué tasa de interés deberá colocarse un capital para que acumulado a sus intereses simples se duplique en 24 años?

V. Resolver los siguientes sistemas:

i) $5x + 3y = 21$
$7x - 8y = 5$

ii) $x + 2y = 12$
$2x - 3y = 6$

iii) $3x - 2y = 11$
$2x + 3y = 16$

iv) $x = 2y - 3$
$y = 2x - 15$

VI. i) Hallar dos números cuya suma es 1 000 y cuya diferencia es 222.

ii) La diferencia de dos números es 101 si se multiplica el primero por 3 y el segundo por 5, la diferencia es 1. Hallar los números.

iii) Dos números tienen las siguientes propiedades:
5 veces el primero y 3 veces el segundo dan, sumados, 102; la 1/5 parte del primero y la 1/3 parte del segundo dan, sumados, 6; hallar los números.

VII. Realizar las operaciones indicadas, simplificando los resultados.

i) $\frac{1}{3}\ ab^3 + \frac{1}{6}\ ab^3 - \frac{1}{2}\ ab^2$

ii) $(+3)^4 + (-4)^3 + 5^3 + (-5)^3$

iii) $a^2\ b \cdot ab^3$

iv) $6a^3\ x \cdot \frac{2}{3}\ a^4\ x$

v) $2a^4\ y \cdot 4\ y^3$

vi) $(3 + x)^2$

vii) $(\frac{1}{2} + 2x)^4$

viii) $(2a + b)^9$

VIII. i) Dos trabajadores, A y B, deben ejecutar cierto trabajo. Lo pueden terminar trabajando A 12 y B 8 días. También cumplen su cometido trabajando 12 días B y 9 días A. ¿En cuanto tiempo terminarán la labor trabajando:

1) cada uno solo?

2) los dos juntos?

ii) Un depósito puede llenarse con 3 grifos. Funcionando el primero y segundo a un tiempo, se llena el depósito en 36 minutos; con el segundo y tercero, en 24 minutos. También puede llenarse estando abierto el primero 36 minutos y el tercero 24. ¿Cuanto tiempo tardará en llenarse el depósito funcionando cada uno de los grifos por separado y cuánto tiempo funcionando todos juntos?

iii) A las 7 a.m. sale del punto A un mensajero en la dirección AB, que recorre 3 kms. en 5 hrs. A las 8 a.m. sale de B hacia A otro mensajero que en 8 hrs. recorre 3 kms. Hallar el punto de encuentro sabiendo que AB = 11 kms.

IX. i) $\sqrt{9\ a^2\ b^8}$

ii) $\sqrt[3]{-27\ a^9\ x^3\ y^9}$

iii) $x^{2/8}$

iv) $\sqrt[4]{\dfrac{16\ b^4\ c^8\ x^2}{32\ b^8\ c}}$

PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, 12 de marzo de 1965

SEMINARIO DE MATEMATICAS Nº 1

SOLUCIONES*

* Programa de Capacitación. Profesor Sr. Jaime Balcázar; Ayudantes: Sres. Vittorio Corbo, Jorge Carvajal y José M. Vildósola.

Seminario de Matemáticas Nº 1

Soluciones

I.

i) $A = \frac{(2)^2}{2} + \frac{3(2)^2}{3} + \frac{2 \cdot 2}{6} - (2\ (2)^2 - 6 \cdot 2)$

$A = 10\frac{2}{3}$

ii) $A = 5 - (5 - 3 - 6) + (5)^2 - [3 + 2(5)]$

$A = 21$

iii) $A = \frac{108\ a^2x}{144\ bx^2} = \frac{108\ a^2}{144\ b\ (-3)} = - \frac{36\ a^2}{144\ b}$

II. i) $x = 9.3 - 7.5 = 1.8$

ii) $0,3 = -6\ x \qquad x = -0,05$

iii) $5x = 25 \quad x = 4$

iv) $3a\ b - xb = 3\ ab$

$3a\ b\ (1-1) = x\ b$

$3a\ b \cdot 0 = x\ b$

$x = 0$

v) $9x = 27 \quad x = 3$

vi) $-29x = -87 \qquad x = 3$

III. i) $(5x - 1)\ (3a + 2b) = (5\ x + 1)\ (2a = 3b)$

$15\ ax + 10bx - 3a - 2\ b = 10\ ax + 15\ bx + 2a + 3b$

$15\ ax - 10ax + 10\ bx - 15bx = 2a + b + 3a + 2b$

$5ax - 5bx = 5a + 5b$

$ax - bx = a + b$

$x\ (a - b) = a + b$

$x = \frac{a + b}{a - b}$

/ii)

ii) $7\frac{x}{a} - 7 = x - a$

$$x\left(\frac{7}{a} - 1\right) = 7 - a$$

$$x = \frac{7 - a}{\frac{7}{a} - 1} = \frac{a\,(7 - a)}{7 - a} = a$$

iii) $2\frac{1}{5}\ x - 5\frac{1}{2}\,x = -11$

$$x\left(\frac{11}{2} - \frac{11}{5}\right) = 11$$

$$x = \left(\frac{55 - 22}{10}\right) = 11$$

$$x = \frac{110}{33}$$

iv) $\frac{25\,x - 21\,x}{35\ m} = 4$

$$x\ (\ 25 - 21\ ) = 140\ m$$

$$x = \frac{140}{4} = 35\ m$$

IV. i) $739 + x = 937$

$$x = 937 - 739 = 198$$

ii) $x + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{9 - 1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

iii) $5{,}96 - x = x + 3{,}74$

$$5{,}96 - 3{,}74 = 2\,x$$

$$2{,}22 = 2x$$

$$x = 1{,}11$$

iv) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 40$

$$\frac{5x + 3x}{15} = 40$$

$$8x = 15.40$$

$$x = \frac{15.40}{8} = 75$$

/v)

v) $\dfrac{19\frac{3}{4} - x}{5} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{79}{4} - x = \dfrac{15}{4}$

$x = \dfrac{79}{4} - \dfrac{15}{4} = \dfrac{64}{4}$

vi) sea x total de la cosecha sin granizo

$x - \dfrac{x}{3} = 37\frac{1}{3}$

$\dfrac{3x - x}{3} = \dfrac{112}{3}$

$2x = 112$

$x = 56$

vii) $M_f = Co\ (1 + ti)$

$2\ Co = Co\ (1 + 24i)$

$2 = (1 + 24i)$

$1 = 24i$

$\boxed{i = \dfrac{1}{24}}$

V. i) a) $5x + 3y = 21$
b) $7x - 8y = 5$

$y = \dfrac{21 - 5x}{3}$

$y = \dfrac{7x - 5}{8}$

Despejamos ambas ecuaciones a y

/ 7 $\frac{5}{3}$

$$7 - \frac{5}{3}\ x = \frac{7}{8}\ x\ \cdot \frac{5}{8}$$

$$x = 3$$

$$y = \frac{21}{3} - \frac{5}{3}(3)$$

$$y = 2$$

ii) a) $x + 2y = 12$

b) $2x - 3y = 6$

Otro método para resolver sería multiplicando por 2 la primera ecuación y restando la segunda de ella. Asi:

$$2x + 4y = 24$$

$$2x - 3y = 6$$

$$7y = 18$$

$$y = \frac{18}{7}$$

de a) $x = 12 - 2y = 12 - \frac{36}{7} = \frac{84 - 36}{7} = \frac{48}{7}$

iii) a) $3x - 2y = 11$

b) $2x + 3y = 16$

$6x - 4y = 22$ (Multiplicando la primera ecuación por 2)

$6x + 9y = 48$ (Multiplicando la segunda ecuación por 3)

$13y = 26$ (Restamos)

$y = 2$

de b) $2x = 16 - 3y$

$$x = \frac{16 - 3y}{2} = 5$$

iv) a)

iv) a) $x = 2y - 3$
b) $y = 2x - 15$

$y = 2\,(2y - 3) - 15$ (sustituimos la ecuación a) en b)

$y = 4\,y - 6 - 15$

$3y = 21$

$\boxed{y = 7}$

de a)

$x = 14 - 3 = 11$

VI. i) a) $x + y = 1\,000$
b) $x - y = 222$

$2x = 1\,222$

$x = 611$

de a) $y = 1\,000 - x = 389$

ii) $x - y = 101$
$3x - 5y = 1$

$3x - 3y = 303$ Multiplicamos la primera ecuación por 3
$3x - 5y = 1$

$2y = 302$ Restando

$\boxed{y = 151}$

$\boxed{x = 252}$

/iii)

iii) Las ecuaciones serán:

$5x + 3y = 102$

$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 6$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas nos da:

$y = 9$

$x = 15$

VII.

i) $A = \frac{1}{2} ab^3 - \frac{1}{2} ab^2$

$A = \frac{1}{2} ab^2 (b - 1)$

ii) $A = 81 - 64 + 125 - 125$

$A = 17$

iii) $a^3 b^4$

iv) $4 a^7 x^2$

v) $8 a^4 y^4$

vi) $(3 + x)^2 = 9 + 6x + x^2$

vii) $(\frac{1}{2} + 2x)^4 = (\frac{1}{2})^4 + 4 (\frac{1}{2})^3 (2x) + 6(\frac{1}{2})^2 (2x)^2 + 4(\frac{1}{2})(2x)^3$

$+ (2x)^4$

viii) $(2a + b)^9 = (2a)^9 + 9(2a)^8 b + 36(2a)^7 b^2 + 84 (2a)^6 b^3$

$126 (2a)^5 b^4 + 126 (2a)^4 b^5 + 84 (2a)^3 b^6 +$

$+ 36 (2a)^2 b^7 + 9 (2a) b^8 + b^9$

/VIII

VIII.

i)

1. $\frac{12}{x} + \frac{8}{y} = 1$

$\frac{9}{x} + \frac{12}{y} = 1$

Resolviendo nos da:

$x = 18$

$y = 24$

2. $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})n = 1$

$(\frac{1}{24} + \frac{1}{18})n = 1$

$\frac{3 + 4}{72}\, n = 1$

$n = \frac{72}{7}$

ii)

1. Para cada grifo por separado:

$\frac{36}{x} + \frac{36}{y} = 1$

$\frac{24}{y} + \frac{24}{2} = 1$

$\frac{36}{x} + \frac{24}{2} = 1$

Resolviendo estas 3 ecuaciones simultáneas, obtendremos:

$x = 90$ minutos $\quad y = 60$ minutos $\quad 2 = 40$ minutos

2. Para todos los grifos funcionando juntos:

$$n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$$

$$n\left(\frac{1}{90}+\frac{1}{60}+\frac{1}{40}\right)=1$$

$$n=\frac{360}{19}$$

iii) El mensajero A hasta las 8 a.m. habrá recorrido 0.6 Kms.

Sea x la distancia que recorrerá el mensajero A desde las 8 a.m. hasta encontrarse con el mensajero B. Entonces:

$$\frac{x}{3/5\text{ kph}}=\frac{11-0.6-x}{3/8\text{ kph}}$$

Por tanto: $x = 6.4$ km.

Se encontraron a 7 Kms. del punto A

IX.

i) $3a\,b^4$

ii) $-3\,a^3\,x\,y^3$

iii) $\sqrt{x}$

iv) $\dfrac{bc^2\,x^{\frac{1}{2}}}{b^2\,c^{1/4}\,2^{1/4}}$

$$=b^{-1}\,c^{7/4}\,x^{1/2}\,2^{-1/4}$$

PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, 16 de marzo de 1965

SEMINARIO DE MATEMATICAS N° 2 *

* Programa de Capacitación, Profesor Sr. Jaime Balcázar; Ayudantes Sres. Vittorio Corbo, Jorge Carvajal y José M. Vildósola.

SEMINARIO DE MATEMATICAS Nº 2

I. Ecuaciones

Resolver las siguientes ecuaciones, o sistemas de ecuaciones

i) $x^2 + 2x + 1 = 0$

ii) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

iii) $\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{1}{2} = 0$

iv)
$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 6 \\ 2x + 5y - 7z &= -9 \\ 3x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

II. Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

i) El lado mayor de un rectángulo es 7 m más largo y el menor 7 m más corto que los lados de un cuadrado. Encontrar el lado del cuadrado, sabiendo que las sumas de las áreas del rectángulo y del cuadrado es 4 951 m^2.

ii) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 250 m. Encontrar la longitud de los cotetos, sabiendo que el mayor es 382 m más largo que el menor.

iii) En un cuadrado la suma del lado y la diagonal es 100 m. Encontrar el área del cuadrado.

iv) Dos obreros que ganan distinto jornal, trabajan varios días. A falta 2 días al trabajo y percibe en total Eº 70.-; B falta 6 días y percibe Eº 54.- Si A hubiese faltado 6 días y B 2 días, A habría recibido Eº 3 menos que B. ¿Cuántos días trabajó y que jornal ganaba cada obrero?

/III.

III. Representaciones Gráficas

a) Representar gráficamente las siguientes relaciones:

i) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

ii) $y = \sqrt{21 - 4x - x^2}$

iii) $y = \sqrt{x}$

iv) $y = \frac{1}{2} x^2 - 2$

b) Resolver gráficamente:

$y = x^2 + 3$

$y = x + 5$

IV. Logaritmos

Determinar el valor de x en las siguientes expresiones:

i) $\log_{(2)} x = 3$

ii) $x = \log 6$ conocidos log 2 y log 3

iii) $x = \log 9 + \log 3$ conocidos log 12 y log 3

iv) Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301030$
$\log 3 = 0{,}477121$

Calcular: $x = \dfrac{\sqrt[4]{5\sqrt[10]{2}}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}$

V. Aplicaciones de los logaritmos

i) Si el ingreso de un país es 1 000 el 1° de enero de 1951, calcular la tasa de crecimiento anual para que el 31 de diciembre de 1960 sea de 2 000.

/ii) Una

ii) Una máquina avaluada en E° 1 875 se desvaloriza anualmente 10 por ciento. Determinar en cuantos años su valor se habrá reducido a la 3a. parte.

iii) El consumo de un país el año 1954 es E° 3 000 y en el año 1964 E° 5 500. A qué tasa creció entre ambos períodos.

iv) Dos capitales de los cuales el primero es E° 500 mayor que el segundo se colocan al 3,5 y al 5 por ciento respectivamente. Precisar el monto de cada uno de ellos sabiendo que al cabo de 20 años dan origen al mismo capital final.

PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, 18 de marzo de 1965

SEMINARIO DE MATEMATICAS Nº 2*

SOLUCIONES

* Programa de Capacitación. Profesor Sr. Jaime Balcázar; Ayudantes, Sres. Vittorio Corbo, Jorge Carvajal y José M. Vildósola.

SEMINARIO DE MATEMATICAS Nº 2

SOLUCIONES

I.

i) $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = -\frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

ii) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2{,}5$$

iii) $\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{1}{2} = 0$

multiplicando por 6 nos da:

$$2x^2 - 12x + 3 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-24}}{4}$$

$$x_1 = \frac{12 + \sqrt{120}}{4} \qquad x_2 = \frac{12 - \sqrt{120}}{4}$$

iv)
$$\left.\begin{array}{l} x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{array}\right|$$

$$\boxed{x = 1} \qquad \boxed{y = 2} \qquad \boxed{z = 3}$$

/II.

II.

i) x = lado del cuadrado

$(x + 7)(x - 7) + x^2 = 4951$

$\boxed{x = 50}$

ii) x = longitud cateto menor

$(1\,250)^2 = x^2 + (x + 382)^2$

$x = 672$

iii) x = lado del cuadrado

L = diagonal

$L^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

$L = x\sqrt{2}$

$L + x = 100$

$x\sqrt{2} + x = 100 \qquad x = \frac{100}{1+\sqrt{2}}$

área del cuadrado $= x^2 = \left(\frac{100}{1+\sqrt{2}}\right)$

iv) sea x = total de días que deberían haber trabajado ambos obreros

y = salario del obrero A

z = salario del obrero B

$(x - 2)\ y = 70$

$(x - 6)\ z = 54$

$(x - 6)\ y = (x - 2)\ z - 3$

$x = 30 \qquad y = 2{,}5 \qquad z = 2{,}25$

/III. Logaritmos

III. Logaritmos

i) $x = 2^3 = 8$

ii) $x = \log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3$

iii) $x = \log 9 + \log 3$

$x = \log 3^2 + \log 3 = 2 \log 3 + \log 3 = 3 \log 3$

iv) $x =$ $$x = \frac{\sqrt[4]{5}\ \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\ \sqrt{2}}}$$

$$\log x = \frac{1}{4} \log 5 + \frac{1}{10} \log 2 - \frac{1}{3} [\log 18 + \frac{1}{2} \log 2]$$

$$\log x = \frac{1}{4} \log \frac{10}{2} + \frac{1}{10} \log 2 - \frac{1}{3} [\log (3^2)(2) + \frac{1}{2} \log 2]$$

$$\log x = \frac{1}{4} (1 - \log 2) + \frac{1}{10} \log 2 - \frac{1}{3} [2 \log 3 + \log 2 + \frac{1}{2} \log 2]$$

$$\log x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{10} \log 2 - \frac{2}{3} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2$$

$$\log x = \frac{1}{4} - 0,65 \log 2 - 0,66 \log 3$$

$$x = \text{antilog} [\frac{1}{4} - 0,65 \log 2 - 0,66 \log 3]$$

V. Aplicaciones de logaritmos

i) $2\,000 = 1\,000 \; (1 + r)^{10}$

$\log 2 = 10 \log (1 + r)$

$0,301030 = 10 \log (1 + r)$

$0,030103 = \log (1 + r)$

$1 + r = 1,0715$

$r = 7,15\%$

ii) $\frac{1\,875}{3} = 1\,875 \; (1 - 0,1)^n$

$\frac{1}{3} = (1 - 0,1)^n$

$$\frac{1}{3} = (1 - 0{,}1)^n$$

$$\log 1 - \log 3 = n \ \log 0{,}9$$

$$\frac{-\ 0{,}47712}{0{,}954243 - 1} = n$$

$$n = \frac{0{,}47712}{0{,}045757}$$

iii) $5\ 500 = 3\ 000 \ (1 + \Upsilon)^{10}$

$$\log 5{,}5 = \log 3 + 10 \ \log (1 + \Upsilon)$$

$$0{,}74036 = 0{,}47712 + 10 \log (1 + \Upsilon)$$

$$\log (1 + \Upsilon) = 0{,}026324$$

$$1 + \Upsilon = 1{,}0625$$

$$\Upsilon = 6{,}25\%$$

iv) $x\ (1{,}05)^{20} = (x + 500)\ (1{,}035)^{20}$

$$\log x + 20 \log 1{,}05 = \log (x + 500) + 20 \log (1{,}035)$$

$$\log \frac{x}{x + 500} = 20 \ [\log 1{,}035 - \log 1{,}05 \ ]$$

$$= 20 \ [0{,}01494 - 0{,}02119]$$

$$\frac{x}{x + 500} = \text{antilog} \ [- 0{,}12500] = 0{,}75$$

$\underline{\underline{x = 1\ 500}}$

$C_1 = 1500$

$C_2 = 2000$

PRELIMINAR

Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, 23 de marzo de 1965

SEMINARIO DE MATEMATICAS - N° 3

* Programa de Capacitación, Profesor Sr. Jaime Balcázar; Ayudantes Sres. Vittorio Corbo, Jorge Carvajal y José M. Vildósola.

III SEMINARIO DE MATEM
MATEMATICAS

I. Sumatorias

i. Expresar simbólicamente la suma:

a) $a_1 + a_2 + a_3 + \text{---------} + a_p$

b) $x_1^o + X_2^1 + \text{-------------} x_n^{n-1}$

c) $a_1 + b_o + a_2 + b_1 + a_3 + b_2 + a_4 b_3$

ii. Desarrollar y reducir a la forma más simplificada:

a) $\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{x}{x_i}$

b) $\sum_{i=o}^{n} (a_i + b)^2 . c$

c) $\sum_{j=1}^{n} j$

d) $\sum_{i=1}^{4} (2 + 3_i)$

iii. Desarrollar

a) $\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i - 1}{(i + 2)}$

b) $x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} Y_j$ (para i= 1,2,3)

/II Derivadas

II. Derivadas

i. Derivar:

a) $y = 3x^2 + 5$

b) $y = x^3 - 2x + 7$

c) $y = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$

d) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

e) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

f) $y = (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 1}$

ii. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones

a) $y = u^6$, donde $u = 1 + 2x$

b) $15x = 15y + 5y^3 + 3y^5$

c) $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$

iii. Hallar la pendiente de la curva

$x^2 + xy + 2y^2 = 28$; en el punto $(2,3)$

iv. En la curva $y = x^3 + x$ hallar los puntos en los que la tangente es paralela a la recta $y = 4x$

v. Hallar el punto de la curva $y = 5x - x^2$ en el que la inclinación de la tangente es de 45°.

III. Máximas y mínimas

i. De una pieza cuadrada de cartón de lado "a" se desea construir una caja, abierta por arriba, del mayor volumen posible,

/ cortando de

cortando de las esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba el cartón para formar las caras laterales. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

IV. Tasas de crecimiento

1. El ingreso per cápita de un país es equivalente a US$ 500. Si en 1920 este era sólo de $115 y la población creció con una tasa de 2.5% encontrar la tasa de crecimiento del ingreso.

ii. Un país A parte de un ingreso per cápita de US$ 1000 que crece al 2% acumulativo anual. Otro país B que parte de un ingreso per cápita de US$ 350.

A qué tasa debe crecer el ingreso por persona de B para que en 10 años tengan ambos países el mismo ingreso per cápita?

iii. A 10 años plazo, cuánto crece el ingreso total si la población crece al 2% y el ingreso per cápita al 1%?

Cuánto crece el ingreso total en las mismas condiciones en 20 años?

PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, 25 de marzo 1965

SEMINARIO DE MATEMATICAS Nº 3*

SOLUCIONES

* Programa de Capacitación. Profesor Sr. Jaime Balcázar; Ayudantes, Sres. Vittorio Corbo, Jorge Carvajal y José M. Vildósola.

SEMINARIO DE MATEMATICAS Nº 3

SOLUCIONES

I. Sumatorias

a)

i) $\sum_{i=1}^{i=p} a_i$

ii) $\sum_{i=1}^{i=n} x_i^{i-1}$

iii) $\sum_{i=1}^{i=4} (a_i + b_{i-1})$

b)

i) $x\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{x_i} = x \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_m}{x_m}\right)$

ii) $\sum_{i=0}^{n} (a_i + b)^2 \cdot c = c\sum_{i=0}^{n} (a_i^2 + 2a_i b + b^2) =$

$c\left[\sum a_i^2 + 2 b\sum a_i + (n+1) b^2\right] =$

$= c\sum a_i^2 + 2 bc\sum a_i + (n + 1) b^2 c$

iii) $\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

iv) $\sum_{i=1}^{4} (2 + 3i) = 4 \cdot 2 + 3\sum i = 8 + 30 = 38$

c) $\sum_{i=1}^{6} \frac{x_{i-1}}{(i+2)} = \frac{x_o}{3} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{6} + \frac{x_4}{7} + \frac{x_5}{8}$

$x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} Y_j$ (para i = 1, 2, 3)

/x 1

$$x_1 = A_{11}\ Y_1 + A_{12}Y_2 + A_{13}\ Y_3 + \ldots\ldots + A_{1n}\ Y_n$$

$$x_2 = A_{21}\ Y_1 + A_{22}Y_2 + A_{23}\ Y_3 + \ldots\ldots + A_{2n}\ Y_n$$

$$x_3 = A_{31}\ Y_1 + A_{32}Y_2 + A_{33}\ Y_3 + \ldots\ldots + A_{3n}\ Y_n$$

II. Derivadas

a)

i) $y = 3\ x^2 + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 6\ x$$

ii) $y = x^3 - 2x + 7$

$$\frac{dy}{dx} = 3\ x^2 - 2$$

iii) $y = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot 2x}{x^2 + a^2)^2}$$

iv) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

v) $y = a\ x^3 + b\ _{x}2 + c\ x + d$

$$\frac{dy}{dx} = 3a\ x^2 + 2\ b\ x + c$$

vi) $y = (x^2 + 3)\ \sqrt{x^2} +1$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ x\ \sqrt{x^2} +1 + \frac{x^2 + 3}{2 \cdot \sqrt{x^2} + 1}\ 2\ x$$

$/\dfrac{dy}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \left[\frac{2(x^2+1) + x^2 + 3}{\sqrt{x^2+1}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^3 + 10x}{\sqrt{x^2+1}}$$

b)

i) $y = u^6$ $\qquad$ $u = 1 + 2\sqrt{x}$

$\frac{dy}{du} = 6u^5$ $\qquad$ $\frac{du}{dx} = \frac{2}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{6u^5}{\sqrt{x}}$$

ii) $15x = 15y + 5y^3 + 3y^5$

$$x = y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 + y^2 + y^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + y^2 + y^4}$$

iii) $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}{3\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt[3]{y^2}}{3\sqrt[6]{y} + 2}$$

/c) $x^2 + xy$

c) $x^2 + xy + 2y^2 = 28$

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 4y}$$

Para el punto (2,3) la pendiente vale:

$$-\frac{2 \cdot 2 + 3}{2 + 4 \cdot 3} = \frac{7}{14} = -\frac{1}{2}$$

d) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$ $\quad y = x^3 + x$

$3x^2 + 1 = 4$ $\quad y' = 1 + 1 = 2$ $\quad$ a) (1,2)

$x = \pm 1$ $\quad y'' = -1 -1 = -2$ $\quad$ b) (-1, -2)

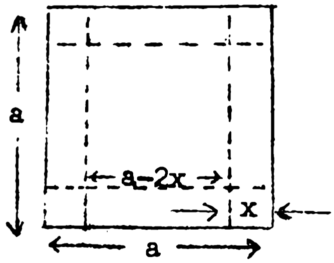
e) $y = 5x - x^2$

$\frac{dy}{dx} = 5 - 2x$ $\quad y = 5x - x^2$

$5 - 2x = 1$ $\quad y = 5 \cdot 2 - 2^2$

$\boxed{2 = x}$ $\quad \boxed{y = 6}$

III. <u>Máximos y Mínimos</u>



$x =$ lado del cuadrado a recortar

$a - 2x =$ lado que forma el fondo de la caja

Volumen de la caja es:

$$V = (a - 2x)^2 x$$

$$V = (a - 2x)^2 x$$

$$\frac{dV}{dx} = (a - 2x)^2 + x2(a - 2x)(-2) =$$

$$\frac{dV}{dx} = a^2 - 4\ ax + 4\ x^2 - 4\ ax + 8\ x^2 = a^2 - 8ax + 12\ x^2$$

Igualando a cero

$a^2 - 8\ ax + 12\ x^2 = 0$ y resolviendo la ecuación se obtienen los valores críticos $x' = \frac{a}{6}$ y $x'' = \frac{a}{2}$

Lógicamente $\frac{a}{2}$ no es máximo, sino por el contrario, un mínimo, ya que no quedaría material para construir la caja.

Por lo tanto el cuadrado que es necesario cortar tiene por lado $\frac{a}{6}$.

IV. <u>Tasas de crecimiento</u>

i) $y = y_o \left(\frac{1 + r}{1 + \beta} \right)^t$

$$500 = 115 \left(\frac{1 + 0.025}{1 + \beta} \right)^{45}$$

$$\beta = \cdot 23 \times 1.025^{45}$$

ii)

$$1\ 000\ (1.02)^{10} = 350\ (1 + x)^{10}$$

$$\log\ (1 + x) = 0.05419$$

$$1 + x = 1.1329$$

$$x = 13.3\%$$

iii)

$$(1 + I) = \left[(1 + \gamma)(1 + \beta) \right]^{10}$$

$$\log\ (1 + I) = 10 \left[\log\ (1 + \gamma) + \log\ (1 + \beta) \right]$$

$$= 10 \left[\log 1.01 + \log 1.02 \right]$$

$$I = 34.65\% \text{ en 10 años}$$

De la misma manera conseguimos $I = 81.3\%$ en 20 años.