

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA



NACIONES
UNIDAS

SANTIAGO DE CHILE



UNIVERSIDAD
DE CHILE

A 28

ALGUNOS MODELOS TEORICOS Y NUMERICOS DE POBLACION*

por

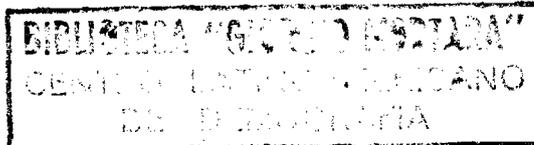
LEON TABAH
Profesor del CELADE

* Este trabajo está sujeto a modificaciones de forma y de fondo. Se reproduce exclusivamente para consultas del personal y de los estudiantes del Centro Latinoamericano de Demografía.

Serie B
E/CN.CELADE/B.1
D.5/6.Rev.2

2370 ✓

Santiago, Chile
1964



I N D I C E

	<u>Página</u>
INTRODUCCION	1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
Cap. I LAS POBLACIONES EXPONENCIALES	4
Cap. II POBLACIONES CON LEY DE MORTALIDAD POR EDAD CONSTANTE	5
1. Curva de los nacimientos	5
2. Curva de las defunciones	11
3. Aplicación numérica	12
a) Número de nacimientos	12
b) Número de defunciones	14
c) Tasa de natalidad	15
d) Tasa de mortalidad	15
Cap. III POBLACIONES MALTHUSIANAS POR CONSTRUCCION	17
1. Hipótesis de una mortalidad independiente del tiempo.....	18
2. Hipótesis de una estructura por edad independiente del tiempo	19
3. Propiedades	20
4. Aplicación numérica	42
a) Tasa de incremento	43
b) Tasa de natalidad	43
c) Número de los nacimientos	46
d) Tasa de mortalidad	47
e) Edad media	47
f) Relación entre la estructura por edad y los componentes	48
g) Cálculo de la tasa de natalidad y de la tasa de incremento basado en el conocimiento de $c(x)$ y de $p(x)$	50
h) Estimación de la omisión censal de los niños y corrección de la estructura por edad para las edades avanzadas	53
i) Cálculo de la tasa de natalidad de Colombia, sexo femenino, conociendo la estructura por grandes grupos de edad y de la tabla de mortalidad	55

	<u>Página</u>
c) Solución de Wicksell	98
d) Solución gráfica	98
e) Cálculo de la tasa intrínseca de natalidad	101
f) Cálculo de la tasa neta de reproducción mediante el índice de Thompson	101
g) Tiempo en que se alcanza el estado estable	102
Cap. VIII COMPARACION DE POBLACIONES QUE DIFIEREN EN FECUNDIDAD Y EN MORTALIDAD	109
1. Comparación de dos poblaciones estables que difieren solamente en fecundidad	109
2. Comparación de dos poblaciones malthusianas o estables que difieren solamente en mortalidad	113
3. Comparación de dos poblaciones que difieren a la vez en fecundidad y en mortalidad	123
4. Aplicaciones numéricas	124
a) Cálculo de la tasa de natalidad y de la tasa de incremento de Colombia basándose en la estructura por edad	124
b) Cálculo de las tasas brutas y netas de reproducción de Colombia en 1950 basándose en el conocimiento de la tasa de incremento	126
c) Estimación de la tasa de natalidad de Colombia a partir del conocimiento de la tasa de incremento	128
d) Estimación de la omisión censal de los niños de 0 a 4 años en Colombia en 1951	128

INDICE DE CUADROS Y GRAFICOS

Cuadro 1 Comparación entre distribuciones por edad registradas y calculadas en la hipótesis de un estado malthusiano de la población	22
2 Comparación entre la estructura por edad de la población de Colombia y la estructura por edad de una población teórica que tenga igual natalidad e igual tabla de vida que las de Colombia, alrededor de 1951	23
3 Ejemplo ilustrativo de una población malthusiana. Estructura por edad de la población de Colombia en 1950, sexo femenino, sometida a una mortalidad constante	45
4 Ejemplo de cálculo de una estructura por edad teórica de una población malthusiana que corresponde a una tasa de incremento $r = 0.0275$ y una mortalidad modelo al nivel $e_0^o = 46$ años, sexo femenino	49

	<u>Página</u>
Gráfico 6	91
7 Determinación gráfica de la tasa intrínseca de incremento, Colombia, 1950	100
9 Relaciones entre las estructuras por edad de la población estable, sexo masculino, correspondiente a $e_0^0 = 46$ y $r = 0.0275$ y de una serie de poblaciones estables de igual mortalidad y diferentes tasas de incremento inscritas en las rectas	115
10 Relaciones $\frac{I^p(x)}{II^p(x)}$ en las tablas modelo de mortalidad. En la curva superior se tomó para $I^p(x)$ la tabla $e_0^0 = 40$ años y para $II^p(x)$, $e_0^0 = 46$ años; en la curva inferior se tomó para $I^p(x)$ la tabla $e_0^0 = 40$ años y para $II^p(x)$, $e_0^0 = 44$ años	116

INTRODUCCION

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideraremos una población cerrada, es decir, una población cuyo efectivo varía únicamente con los nacimientos y las defunciones, excluyéndose la inmigración y la emigración. Cada individuo sale de la población sólo por defunción y el efectivo sólo crece por nacimientos de niños cuyos padres pertenecen a esa misma población.

En las páginas que siguen habrá que tener siempre presente la hipótesis recién enunciada, muy cómoda, pero a veces alejada de la realidad.

Tomemos la población en dos instantes t y $t+\Delta t$. Tendremos que considerar los efectivos $N(t)$ y $N(t+\Delta t)$ y los números:

- n_1 = efectivo de individuos que pertenecen a la población en el instante t y que ya no le pertenecen en el instante $t+\Delta t$.
- n_2 = efectivo de individuos que pertenecen a la población en el instante $t+\Delta t$ y que no le pertenecían en el instante t .
- n_{12} = efectivo "permanente", es decir, número de individuos que pertenecen a la población a la vez en los instantes t y $t+\Delta t$.
- $n_{\bar{1}2}$ = efectivo de individuos que nacieron entre t y $t+\Delta t$ y que fallecieron antes de $t+\Delta t$.

La evolución del efectivo de la población se caracteriza por las ecuaciones siguientes:

$$N(t) = n_{12} + n_1$$

$$N(t+\Delta t) = n_{12} + n_2$$

$$\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t) = n_2 - n_1$$

A continuación consideraremos algunos modelos teóricos de poblaciones contruidos al suponer independiente del tiempo una o dos de las seis funciones anteriores. En esta forma se ha tratado de ver:

- qué otras funciones son también independientes del tiempo, y
- cuáles son las relaciones fundamentales que existen entre los distintos componentes.

A lo largo de este trabajo adoptaremos, en la medida de lo posible, la terminología empleada por A. Lotka.

Capítulo II

POBLACIONES CON LEY DE MORTALIDAD POR EDAD CONSTANTE

Supongamos ahora que el único dato de la población conocido e invariable con el tiempo es la ley de supervivencia $p(x)$.

1. Curva de los nacimientos

Demostremos primero la proposición siguiente en su forma general:

Si el efectivo de la población $N(t)$ sigue una trayectoria determinada y si los $p(x,t)$ permanecen constantes con el tiempo, los nacimientos siguen en primera aproximación la misma trayectoria que la población total, con la diferencia que se encuentra reducida por la esperanza de vida al nacer y desplazada en la representación gráfica hacia la izquierda en k_1 , primer acumulante con respecto al origen de la función

$$\frac{p(x)}{e_0^0}$$

el cual depende únicamente de la mortalidad.

Veremos luego el caso particular en que $N(t)$ sigue una función exponencial, lo que nos llevará a lo que se llama más adelante las poblaciones "asintóticamente malthusianas".

Designemos por e_0^0 la esperanza de vida al nacer que se define por:

$$e_0^0 = \int_0^{\infty} p(x) dx \quad (\text{II. 1})$$

Esta expresión representa el número medio de años vividos por un grupo de individuos sometidos, del nacimiento hasta la extinción del grupo, a las mismas tasas de mortalidad por edad.

El momento de orden i se obtiene derivando la F.G.M. i veces y luego, haciendo $t = 0$. Si $M(t)$ se desarrolla en potencias de t , el momento de orden i es también igual al coeficiente de

$$\frac{t^i}{i!}$$

en el desarrollo.

De la misma manera, el cumulante de orden i se obtiene derivando i veces la F.G.C. y luego, haciendo $t = 0$. El cumulante de orden i es también el coeficiente de

$$\frac{t^i}{i!}$$

al desarrollar en serie el logaritmo de la F.G.M. Los cumulantes se definen entonces en términos de momentos y es evidente que el cumulante de orden i existe en la medida en que existen momentos de orden i y de órdenes menores. Formalmente, los cumulantes se obtienen al identificar los coeficientes de t en la igualdad:

$$k_1 t + \frac{k_2 t^2}{2!} + \frac{k_3 t^3}{3!} + \dots = \log \left(1 + \nu_1 t + \frac{\nu_2 t^2}{2!} + \frac{\nu_3 t^3}{3!} + \dots \right)$$

Esta identificación nos lleva a las siguientes relaciones:

$$k_1 = \nu_1$$

$$k_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \nu_2 - k_1^2$$

$$k_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \nu_3 - k_1(\nu_2 + 2k_2)$$

$$k_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 - 3\nu_2^2 + 12\nu_1^2\nu_2 - 6\nu_1^4 = \nu_4 - k_1(\nu_3 + 3k_3) - 3\nu_2^2$$

etc. ...

y, en forma más general, los momentos y cumulantes siguen entre sí la relación de recurrencia siguiente:

$$\nu_i - k_i = \sum_{j=1}^{i-1} C_j^{i-1} \nu_j k_{i-j}$$

Si aplicamos el mismo operador a la función $N(t)$

$$N(t+k_1) = e^{k_1 D} N(t)$$

la ecuación anterior se escribe

$$B(t) = \frac{1}{e_0} e^{-K(-D)-k_1 D} e^{k_1 D} N(t)$$

Desarrollando $e^{-K(-D)-k_1 D}$ en potencias de D obtenemos:

$$B(t) = \frac{1}{e_0} N(t+k_1) e^{-\frac{k_2}{2!} D^2 + \frac{k_3}{3!} D^3 + \dots}$$

$$B(t) = \frac{1}{e_0} N(t+k_1) \left(1 - \frac{k_2}{2!} D^2 + \frac{k_3}{3!} D^3 - \frac{k_4 - 3k_2^2}{4!} D^4 + \dots \right)$$

$$B(t) = \frac{1}{e_0} \left[N(t+k_1) - \frac{k_2}{2!} N''(t+k_1) + \frac{k_3}{3!} N'''(t+k_1) - \frac{k_4 - 3k_2^2}{4!} N^{IV}(t+k_1) + \dots \right]$$

donde $N''(t)$, $N'''(t)$ y $N^{IV}(t)$ son las derivadas segundas, terceras y cuartas de $N(t)$ con respecto a la variable t .

En primera aproximación tenemos:

$$B(t) = \frac{1}{e_0} N(t+k_1)$$

lo que nos proponíamos demostrar.

Supongamos ahora que $N(t)$ es una función exponencial y se escribe por la fórmula

$$N(t) = N(0) e^{rt}$$

Encontramos para el número de nacimientos

$$B(t) = \frac{N(0)}{e_0} e^{r(t+k_1)} \left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \frac{k_4 - 3k_2^2}{4!} r^4 + \dots \right]$$

2. Curva de las defunciones

Podemos partir de la ecuación

$$D(t) dt = B(t) dt - N'(t)$$

Ya hemos encontrado para $B(t)$ la expresión

$$B(t) = \frac{1}{e_0} e^{-K(-D)} N(t)$$

Desarrollemos $e^{-K(-D)}$ en serie y ordenemos en potencias de D :

$$e^{-K(-D)} = 1 + \frac{k_1}{1!} D + \frac{k_1^2 - k_2}{2!} D^2 + \frac{k_3 - 3k_1 k_2 + k_1^3}{3!} D^3 + \dots$$

Reemplazando en $B(t)$ tenemos:

$$B(t) = \frac{1}{e_0} N(t) \left[1 + \frac{k_1}{1!} N'(t) + \frac{k_1^2 - k_2}{2!} N''(t) + \frac{k_3 - 3k_1 k_2 + k_1^3}{3!} N'''(t) + \dots \right]$$

De modo que $D(t)$ llega a escribirse

$$D(t) = \frac{1}{e_0} N(t) \left[1 + \frac{k_1 - e_0}{1!} N'(t) + \frac{k_1^2 - k_2}{2!} N''(t) + \frac{k_3 - 3k_1 k_2 + k_1^3}{3!} N'''(t) + \dots \right]$$

Suponiendo que $N(t)$ sigue un camino exponencial $N(t) = N(0) e^{rt}$, llegamos a la ecuación

$$D(t) = \frac{N(0)}{e_0} e^{rt} \left[1 + \frac{r}{1!} (k_1 - e_0) + \frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) + \frac{r^3}{3!} (k_3 - 3k_1 k_2 + k_1^3) + \dots \right]$$

Si designamos por G la expresión

$$G = \frac{N(0)}{e_0} \left[1 + \frac{r}{1!} (k_1 - e_0) + \frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) + \dots \right]$$

obtenemos

$$D(t) = G e^{rt}$$

$$k_1 = 33.159$$

$$k_2 = 456.29$$

$$k_3 = 3\ 630.6$$

$$k_4 = -177\ 309$$

Si la población total sigue una ley exponencial $N(t) = N(0) e^{rt}$ con $N(0) = 100\ 000$ y $r = 0.0275$, obtenemos

$$H = \frac{N(0)}{e_0} \left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \frac{k_4}{4!} r^4 + \dots \right]$$

$$H_1 = \frac{N(0)}{e_0} = \frac{100\ 000}{46} = 2\ 174, \text{ en primera aproximación}$$

$$H_2 = H_1 - H_1 \frac{k_2}{2!} r^2 = 1\ 799, \text{ en segunda aproximación}$$

$$H_3 = H_2 + H_1 \frac{k_3}{3!} r^3 = 1\ 826, \text{ en tercera aproximación}$$

$$H_4 = H_3 - H_1 \frac{k_4}{4!} r^4 = 1\ 835, \text{ en cuarta aproximación}$$

y para los nacimientos:

$$B(t) = H e^{r(t+k_1)}$$

t	1 ^a aproximación $B(t)=H_1 e^{r(t+k_1)}$	2 ^a aproximación $B(t)=H_2 e^{r(t+k_1)}$	3 ^a aproximación $B(t)=H_3 e^{r(t+k_1)}$	4 ^a aproximación $B(t)=H_4 e^{r(t+k_1)}$
0	5 413	4 400	4 547	4 569
10	7 127	5 897	5 986	6 015
20	9 383	7 764	7 881	7 919
30	12 352	10 221	10 375	10 426
40	16 262	13 457	13 658	13 726
50	21 408	17 715	17 981	18 070

Vemos que la primera aproximación difiere bastante de las demás y que, en el caso de una población similar a la elegida aquí, es incorrecto decir que la curva de los nacimientos es igual a la población total reducida por la esperanza de vida al nacer. El factor de reducción H es algo más complejo.

En efecto, vemos en el gráfico que las curvas de $\frac{B(t) N(0)}{H}$ se encuentran a la izquierda de la curva de $N(t)$ y a una distancia constante $-k_1$.

c) Tasa de natalidad

La fórmula $b = \frac{H}{N(0)} e^{rk_1}$ da para la tasa de natalidad:

1 ^a aproximación	2 ^a aproximación	3 ^a aproximación	4 ^a aproximación
$b = \frac{H_1 e^{rk_1}}{N(0)}$	$b = \frac{H_2 e^{rk_1}}{N(0)}$	$b = \frac{H_3 e^{rk_1}}{N(0)}$	$b = \frac{H_4 e^{rk_1}}{N(0)}$

Por mil	54.13	44.80	45.47	45.69
---------	-------	-------	-------	-------

d) Tasa de mortalidad

Se obtiene por la fórmula (II. 4)

$$d(t) = \frac{G}{N(0)}$$

1 ^a aproximación	2 ^a aproximación	3 ^a aproximación	4 ^a aproximación
$d = \frac{G_1}{N(0)}$	$d = \frac{G_2}{N(0)}$	$d = \frac{G_3}{N(0)}$	$d = \frac{G_4}{N(0)}$

Por mil	21.74	14.07	19.37	18.97
---------	-------	-------	-------	-------

Capítulo III

POBLACIONES MALTHUSIANAS POR CONSTRUCCION

Lotka ha definido las poblaciones malthusianas como aquellas en las cuales la ley de mortalidad por edad y la estructura por edad son independientes del tiempo. El empleo del vocablo "malthusiana" crea cierta ambigüedad, ya que se acostumbra a darle un sentido más bien sociológico que matemático. En general, calificase así a las parejas que se esfuerzan por regular su descendencia; o, desde un punto de vista doctrinario, a un comportamiento general restrictivo, ya sea en el plano demográfico, en el económico u otro. Por esta razón, el Diccionario Demográfico publicado por las Naciones Unidas (párrafo 702) prefiere la expresión "población exponencial", pero no se presta para nuestro tema, ya que el modelo concebido por Lotka es más complejo que aquel en que el efectivo de la población sólo aumenta en forma exponencial. Aun cuando el efectivo, los nacimientos y las defunciones aumentasen según leyes exponenciales, el modelo sería todavía más sencillo que el de Lotka.

Conservaremos la expresión imaginada por este autor a pesar de las imperfecciones que presenta, pero agregándole el complemento "por construcción", para así distinguir estas poblaciones de otras que llamaremos "asintóticamente malthusianas", por ser idénticas a las primeras, pero en forma solamente asintótica, después de haber evolucionado durante cierto intervalo de tiempo. Esta distinción no la había previsto Lotka.

Introduciremos sucesivamente las dos suposiciones de que las funciones $p(x)$ y $c(x)$ permanecen invariables con el tiempo, y veremos las consecuencias de tales hipótesis en un conjunto de propiedades.

2. Hipótesis de una estructura por edad independiente del tiempo

Hemos visto ya la relación siguiente entre el efectivo durante el tiempo t y los nacimientos ocurridos en los tiempos anteriores:

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) dx.$$

En cuanto al número de individuos de edad comprendida entre x_1 y x_2 , llega a ser:

$$N(x_1 - x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} B(t-x) p(x) dx.$$

Si llamamos $c(x, t) dx$ la proporción de los individuos de edad comprendida entre x y $x+dx$ en la cantidad total, tenemos

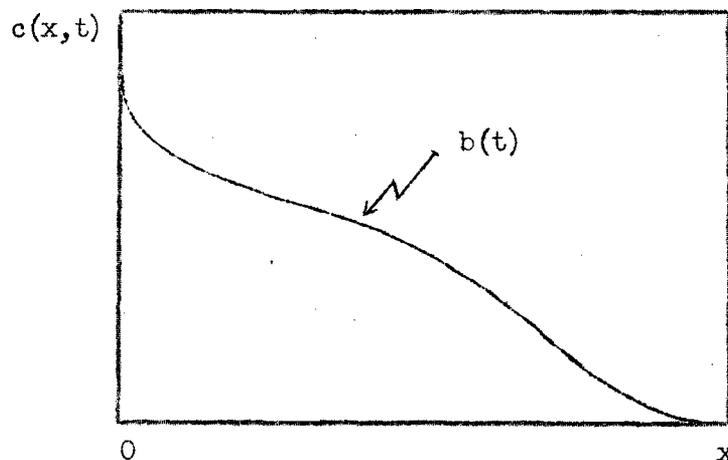
$$c(x, t) dx = \frac{B(t-x)}{N(t)} p(x) dx$$

y como todos los individuos tienen forzosamente una edad comprendida entre 0 y t , resulta:

$$\int_0^{\infty} c(x, t) dx = 1.$$

Al nacimiento tenemos $c(0, t) = \frac{B(t)}{N(t)} p(0)$, y como $p(0) = 1$, resulta $c(0, t) = \frac{B(t)}{N(t)} = b(t)$. Dentro de una curva de distribución por edad, la ordenada en el origen es la tasa de natalidad (véase el gráfico 3).

Gráfico 3



Tenemos, en efecto:

$$N(t) = N(o) e^{rt}$$

$$B(t) = b N(t) = b N(o) e^{rt} = B(o) e^{rt}$$

$$D(t) = d N(t) = d N(o) e^{rt} = D(o) e^{rt}$$

Más adelante veremos las relaciones que existen entre los coeficientes $B(o)$, $D(o)$ y $N(o)$.

3^a propiedad. La estructura por edad y la tasa de supervivencia son invariables. En el razonamiento que hemos seguido, esto es cierto por hipótesis. Existe además la relación siguiente entre la estructura por edad y los demás componentes:

$$c(x) = b e^{-rx} p(x) \quad (\text{III. 1})$$

En efecto, $c(x)$ se escribe, como lo hemos visto ya:

$$c(x) = \frac{B(t-x)}{N(t)} p(x)$$

y, tomando en cuenta la segunda propiedad:

$$c(x) = \frac{bN(o) e^{r(t-x)}}{N(o) e^{rt}} = b e^{-rx} p(x).$$

Esta ecuación permite el cálculo de la estructura por edad a partir solamente de la función de supervivencia y de la tasa de incremento, ya que la tasa de natalidad es una constante.

En el cuadro 1 hemos dado, a título puramente ilustrativo, las distribuciones por edad teóricas y registradas de Inglaterra en el período 1871-1880 (calculadas por A. Lotka), Alemania en el período 1891-1900 (calculadas por L. Bortkiewicz) y Suecia en el año 1910 (calculadas por H. Cramer); y en el cuadro 2, las de Colombia alrededor del año 1951 (calculadas por nosotros; véase el detalle del cálculo en el cuadro 2).

Como puede observarse, la concordancia entre las distribuciones teóricas y observadas es bastante satisfactoria para cada población. No hemos indicado aquí los procedimientos de cálculo, lo que se hace en las aplicaciones numéricas que siguen al final de este capítulo.

Cuadro 2

COMPARACION ENTRE LA ESTRUCTURA POR EDAD DE LA POBLACION DE COLOMBIA Y LA ESTRUCTURA POR EDAD DE UNA POBLACION TEORICA QUE TENGA IGUAL NATALIDAD E IGUAL TABLA DE VIDA QUE LAS DE COLOMBIA, ALREDEDOR DE 1951 (POBLACIONES REDUCIDAS EN 100 000)

Grupos de edad	Hombres		Mujeres	
	Población al 9-5-1951 <u>b/</u>	Población teórica	Población al 9-5-1951	Población teórica
0 - 4	17 634	18 578	17 477	17 956
5 - 9	14 139	14 514	14 033	14 455
10 - 14	12 174	12 365	12 128	12 311
15 - 19	10 235	10 546	10 126	10 476
20 - 24	8 814	8 902	8 711	8 828
25 - 29	7 496	7 460	7 401	7 389
30 - 34	6 273	6 237	6 190	6 167
35 - 39	5 338	5 193	5 263	5 132
40 - 44	4 475	4 289	4 430	4 254
45 - 49	3 639	3 494	3 640	3 498
50 - 54	2 902	2 788	2 952	2 836
55 - 59	2 291	2 160	2 386	2 248
60 - 64	1 673	1 601	1 800	1 716
65 - 69	1 206	1 109	1 348	1 230
70 - 74	768	691	897	797
75 - 79	464	367	570	441
80 - 84	260	154	339	194
85 - 89	134	44	175	60
90 - 94	56	7	94	11
95 y más	24	1	40	1
Total	100 000	100 000	100 000	100 000

a/ Las poblaciones malthusianas teóricas corresponden a esperanzas de vida al nacer de 44 años para hombres y 46 años para mujeres, con tasas de incremento de 0.0275 para los hombres y las mujeres.

b/ Población de Colombia censada el 9 de mayo de 1951 ajustada por subenumeración de los niños y por irregularidades en ciertas edades (método de King-Karup).

y la ecuación (III. 2) llega a ser:

$$b_{r=0} = \frac{1}{\int_0^{\infty} p(x) dx} = \frac{1}{e_0^o}$$

Como $r = 0$, tenemos $b=d$.

El efectivo de la población permanece invariable, así como los nacimientos y las defunciones, que son iguales, ya que

$$N(t) = N(0) e^{rt} = N(0)$$

$$B(t) = b N(t) = b N(0)$$

$$D(t) = d N(t) = d N(0) = b N(0)$$

y $b=d$

El estado estacionario es entonces el que se obtiene si las funciones $p(x)$ y $c(x)$ son invariables y si $r=0$. Veremos más adelante que esta situación también puede lograrse no en forma inmediata, como es el presente caso, sino en forma asintótica.

6^a propiedad. La tasa de mortalidad puede expresarse en función de $p(x)$ y de r .

La combinación de la fórmula (III. 3) con $d=b-r$ nos permite escribir:

$$d = \frac{1}{e_0^o} e^{-K(-r)} - r \quad (\text{III. 4})$$

Indicamos más adelante (gráfico 3) las curvas de la tasa de mortalidad d calculada según la fórmula (III. 4) al dar a r diversos valores comprendidos entre 0.01 y 0.04 y basándose para la mortalidad en las tablas modelo de las Naciones Unidas.

Veremos más adelante que la curva de d con respecto a r , si se fija la ley de supervivencia $p(x)$, pasa por un mínimo cuando la tasa de natalidad es igual al recíproco de la edad media.

7^a propiedad. La tasa de incremento r puede expresarse en función de $p(x)$ y de b e independientemente de la estructura por edad.

Entre $D(o)$ y $N(o)$ existe la siguiente relación:

$$D(o) = \frac{N(o)}{e_o^o} \left[e^{-K(-r)} - r e_o^o \right]$$

10^a propiedad. La curva de las defunciones es exactamente igual a la de los nacimientos, salvo que se encuentra reducida por el coeficiente $1 - r e_o^o e^{K(-r)}$.

En efecto, al relacionar las fórmulas (III. 6) y (III. 7) obtenemos

$$D(t) = B(t) \left[1 - r e_o^o e^{K(-r)} \right]$$

11^a propiedad. La tasa de mortalidad d puede expresarse en función de b y de $p(x)$.

Combinando la ecuación (III. 4) con la ecuación $d = b - r$ se obtiene:

$$d = b - \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 2k_2 \log b e_o^o}}{k_2} \quad (\text{III. 8})$$

12^a propiedad. El número de nacimientos se multiplica por $b e_o^o$ en un intervalo de tiempo llamado "intervalo medio entre dos generaciones", cuyo valor se indica a continuación.

Llamemos T la expresión

$$T = - \frac{1}{r} K(-r) \quad (\text{III. 9})$$

La ecuación (III. 3) se escribe entonces:

$$b e_o^o = e^{rT} \quad (\text{III. 10})$$

T puede llamarse, por analogía con lo que suele hacerse para las poblaciones estables, según veremos más adelante, "intervalo medio entre dos generaciones". Este coeficiente mide el tiempo necesario para que el número de nacimientos sea multiplicado por $b e_o^o$.

En efecto, podemos escribir

$$b e_o^o = \frac{B(t)}{B(t-\theta)}$$

siendo θ un coeficiente cuyo valor vamos a determinar.

La comparación con (III. 3) permite escribir finalmente:

$$K'(r) = -K(-r) \quad (\text{III. 12})$$

Desarrollando las dos F.G.C. obtenemos:

$$\log b e_0^0 = k_1' r + k_2' \frac{r^2}{2!} + k_3' \frac{r^3}{3!} + \dots$$

$$\log b e_0^0 = k_1 r - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} + \dots$$

donde k_1' es el cumulante de orden i de la función $c(x)$. Restando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$(k_1' - k_1) r + \frac{k_2' + k_2}{2} r^2 + \frac{k_3' - k_3}{6} r^3 + \dots = 0 \quad (\text{III. 13})$$

Disponiendo de las funciones $c(x)$ y $p(x)$ puede calcularse r resolviendo una ecuación de primer o de segundo grado. Luego, conociendo r puede calcularse b mediante la fórmula (III. 3).

Nótese que puede escribirse en otra forma la relación que existe entre los cumulantes de la función $c(x)$ y de la función $p(x)$.

Volvamos a la ecuación

$$c(x) = b e^{-rx} p(x)$$

Pasando a la F.G.M. de $c(x)$ tenemos:

$$M'(t) = b e_0^0 \int_0^\infty \frac{e^{tx} e^{-rx} p(x) dx}{e_0^0}$$

siendo t una variable auxiliar.

Pasando a las F.G.C. tenemos:

$$K'(t) = \log b e_0^0 + K(t-r)$$

Desarrollamos las F.G.C.:

$$k_1' t + k_2' \frac{t^2}{2!} + k_3' \frac{t^3}{3!} + \dots = \log b e_0^0 + k_1(t-r) + k_2 \frac{(t-r)^2}{2!} + k_3 \frac{(t-r)^3}{3!} + \dots$$

$$b = \frac{1}{e_0^o} \frac{q_1}{q_2}$$

donde

q_1 es la relación entre la proporción de individuos comprendidos entre los límites de edad α_1 y α_2 (con $\alpha_1 < \alpha_2$), y la proporción de individuos comprendidos entre los límites de edad β_1 y β_2 (con $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2$),

y

q_2 es la misma relación en la población estacionaria.

Debemos tener entonces:

$$b = \frac{1}{e_0^o} \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} c(x) dx}{\int_{\beta_1}^{\beta_2} c(x) dx} \div \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(x) dx}{\int_{\beta_1}^{\beta_2} p(x) dx} \quad (\text{III. 16})$$

Vamos a demostrar que podemos obtener esto en primera aproximación.

Consideremos la función $p(x)$ entre los límites de edad α_1 y α_2 y llamemos $\alpha_2 - \alpha_1 e_0^{\alpha_1}$ la expresión

$$\alpha_2 - \alpha_1 e_0^{\alpha_1} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(x) dx$$

o sea, la esperanza de vida entre la edad α_1 y la edad α_2 .

Designemos por f_i el momento de orden i de la función $\frac{p(x)}{\alpha_2 - \alpha_1 e_0^{\alpha_1}}$

para x comprendido entre α_1 y α_2 :

$$f_i = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^i p(x) dx}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(x) dx}$$

Utilicemos el operador de desplazamiento $D = \frac{d}{dx}$ en la función $B(t)$, como ya lo hicimos anteriormente:

y como en (III. 10) ya habíamos encontrado

$$b e_0^o = e^{rT},$$

deducimos

$$T' = f_1' - f_1$$

La cantidad $f_1' - f_1$ representa la diferencia entre la edad media del grupo de mayor edad y la edad media del grupo de menor edad en la población estacionaria. Vemos entonces que la condición para que se demuestre la relación (III. 16) es que $f_1' - f_1$ sea igual al intervalo medio entre dos generaciones T .

Obtenemos así una medida aproximada de la tasa de natalidad si las edades límites de los grupos de edad que figuran en el numerador y en el denominador del índice son tales que la diferencia entre la edad media del grupo de mayor edad y la edad media del grupo de menor edad en la población estacionaria es igual al intervalo medio entre dos generaciones.

Pueden elegirse varias combinaciones de edad $\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2$, siempre que se respete la condición recién mencionada.

En la práctica, para muchas poblaciones, si se adopta $\alpha_1=0$ y $\alpha_2=4$, deberán tomarse $\beta_1 = 15$ y $\beta_2 = 49$, y si se adopta $\alpha_1=5$ y $\alpha_2=9$, deberán tomarse $\beta_1 = 20$ y $\beta_2 = 54$.

En la tabla de la segunda parte aparecen los valores de q_2 para $\alpha_1=0, \alpha_2=4, \beta_1=15, \beta_2=49$ y para $\alpha_1=5, \alpha_2=9, \beta_1=20$ y $\beta_2=54$. Los cálculos se hicieron para esperanzas de vida al nacer comprendidas entre 30 y 70 años, con intervalos de 1 año, de las tablas de mortalidad de las Naciones Unidas.

15a. propiedad. La edad media de la población \bar{x} puede expresarse en función de $p(x)$ y de r .

La edad media desempeña un papel importante. Sea \bar{x} esta edad media. Vamos a expresarla en función de la tasa de incremento y de los cumulantes de la función $\frac{p(x)}{e_0^o}$.

El número de individuos de edad x , durante el año t es, como ya lo hemos visto anteriormente,

y la F.G.C.

$$K(-r) = \log \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx - \log e_0^{\circ}$$

La derivada con respecto a r de M(-r) es

$$\frac{d M(-r)}{d r} = - \frac{1}{e_0^{\circ}} \int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx$$

de modo que

$$\frac{d M(-r)}{M(-r) dr} = \frac{d \log M(-r)}{dr} = \frac{d K(-r)}{dr} = - \bar{x}$$

y entonces

$$\bar{x} = - \frac{d}{dr} (- k_1 r + k_2 \cdot \frac{r^2}{2!} - k_3 \frac{r^3}{3!} + \dots)$$

que, luego de derivar con respecto a r, nos conduce a la fórmula (III. 18).

En una población estacionaria, haciendo $r = 0$, la ecuación (III. 18) se escribe:

$$\bar{x}_{r=0} = k_1 = \nu_1$$

16a. propiedad. La curva de la tasa de mortalidad en función de la tasa de incremento, cuando se fija la ley de supervivencia, pasa por un mínimo cuando $\bar{x} = \frac{1}{b}$.

Volvemos, en efecto, a la ecuación (III. 4) $d = \frac{1}{e_0^{\circ}} e^{-K(-r)} - r$ y derivamos d con respecto a la variable r:

$$\frac{dd}{dr} = - \left[\frac{e^{-K(-r)}}{e_0^{\circ}} \frac{d K(-r)}{dr} + 1 \right]$$

o sea:

$$\frac{dd}{dr} = - \left[(d+r) \frac{d K(-r)}{dr} + 1 \right]$$

Vemos que esta derivada se anula para $r = \frac{1}{\frac{d K(-r)}{dr} - d}$

Derivando con respecto a r , obtenemos

$$\frac{d c(x)}{c(x) dr} = \bar{x} - x$$

ya que, según hemos visto,

$$\bar{x} = - \frac{d K(-r)}{dr}$$

con lo cual

$$\frac{d c(x)}{dr} = c(x) (\bar{x} - x) \quad (\text{III. 20})$$

Esta derivada se anula para $x = \bar{x}$.

En cuanto a la derivada segunda, se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 c(x)}{dr^2} &= \frac{d c(x)}{dr} (\bar{x} - x) + c(x) \frac{d \bar{x}}{dr} \\ &= c(x) \left[(\bar{x} - x)^2 + \frac{d \bar{x}}{dr} \right] \\ &= c(x) \left[(\bar{x} - x)^2 - \sigma_x^2 \right] \end{aligned}$$

Como puede verse, esta derivada segunda se anula para $x = \bar{x}$. La función $c(x)$ pasa entonces por un mínimo o un máximo para el valor de r que hace que $\bar{x} = x$. Pero en este punto, la derivada segunda es negativa para valores de r positivos, ya que $\frac{d \bar{x}}{dr} = -\sigma_x^2$ es negativo. La curva de $c(x)$ pasa entonces por un máximo en el punto $x = \bar{x}$ y no por un mínimo cuando $r > 0$.

La función $c(x)$ tiene también puntos de inflexión para los valores de r que anulan las derivadas segundas, o sea, cuando

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x$$

En definitiva, si dibujamos las curvas de las proporciones de individuos de una edad x_1 determinada, en poblaciones malthusianas que tienen una misma mortalidad y distintas tasas de incremento, esta familia de curvas describe en los máximos las curvas de las proporciones de las edades medias de estas poblaciones (véase el gráfico 4). El mismo gráfico podría dibujarse para otro nivel de mortalidad. Estas observaciones podrían servir para algunos problemas de estimación. En efecto, ya que para una pareja de valores de

\bar{x}_1 , $c(\bar{x}_1)$ existe una sola población malthusiana, la estimación de e_0^0 y de r podría obtenerse ubicando en las distintas familias de curvas, la que en su máximo corresponde a los valores \bar{x}_1 y $c(\bar{x}_1)$ considerados. Este análisis puede hacerse siempre que se disponga de una red de poblaciones malthusianas en la cual se piensa que puede encontrarse la población estudiada.

19a. propiedad. Puede obtenerse la tasa de incremento mediante un procedimiento gráfico cuando se conocen $p(x)$ y b .

Supongamos, para empezar, que la población que se estudia no es necesariamente malthusiana y que disponemos para ella de $p(x)$ y de b . Para esta población, la relación (III. 2) no se cumple necesariamente, o sea, no es forzoso que se obtenga 1 al efectuar el producto de b por la función

$\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx$. Llamemos Ψ este producto y estudiemos su variación según el valor de r .

Derivamos Ψ con respecto a la variable r :

$$\frac{d\Psi}{dr} = -b \int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx$$

Siendo todos los términos que figuran dentro del signo integral positivos, $\frac{d\Psi}{dr}$ es necesariamente negativo y Ψ es entonces una función decreciente de r .

Por otra parte, tenemos:

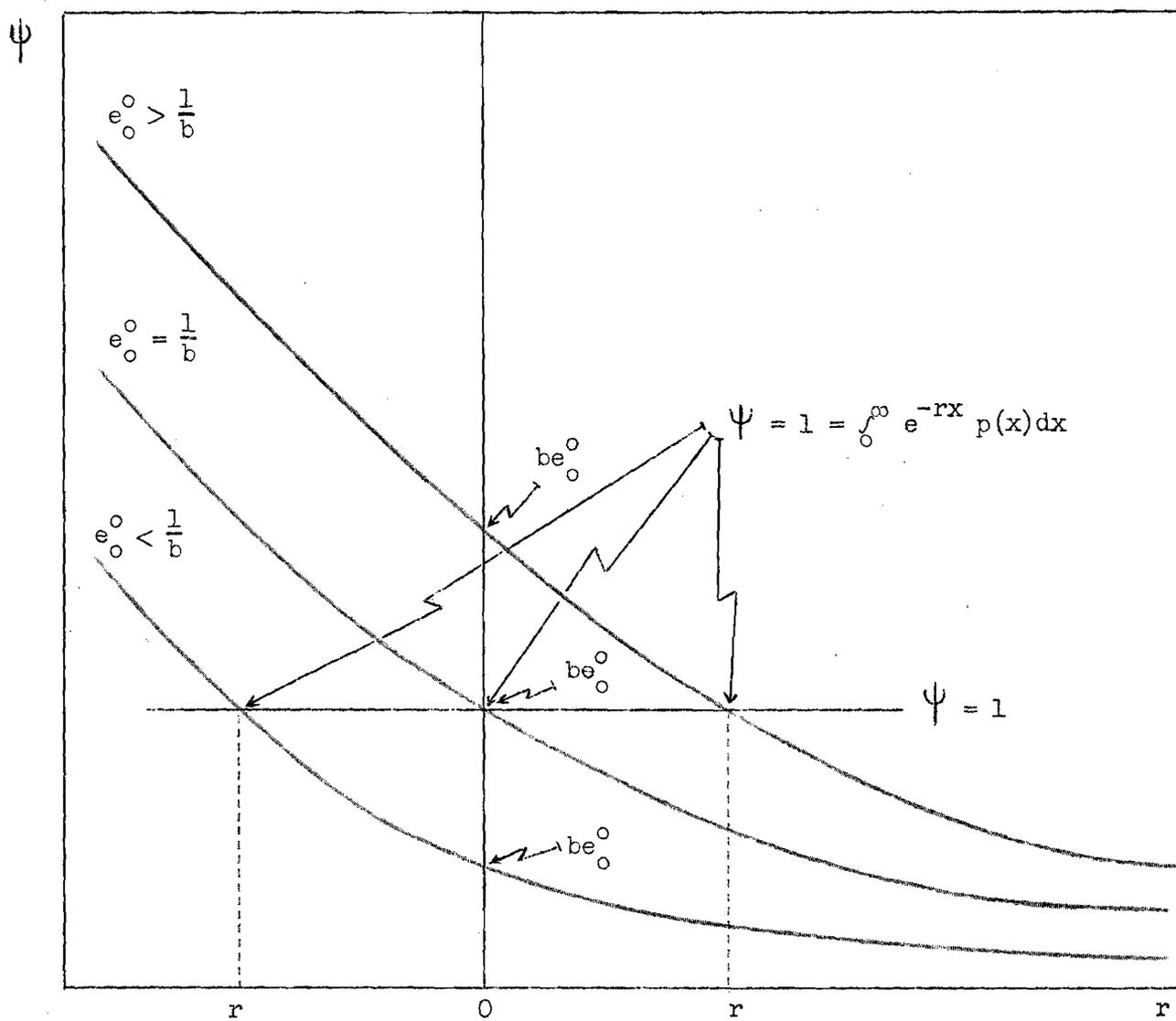
$$\Psi = 0 \quad \text{cuando } r = +\infty$$

$$\Psi = +\infty \quad \text{cuando } r = -\infty$$

$$\Psi = b e_0^0 \quad \text{cuando } r = 0$$

La curva de Ψ parte entonces de $-\infty$ cuando $r = +\infty$, decrece constantemente, corta el eje de las ordenadas en el punto $\Psi = b e_0^0$ y tiene por asíntota el eje de las abscisas (véase el gráfico 5).

Gráfico 5



$$c(0-4) = \frac{N_{0-4}^{50}}{N_{0-\omega}^{50}}$$

Como la estructura por edad se supone independiente del tiempo, tenemos también

$$c(0-4) = \frac{N_{0-4}^{55}}{N_{0-4}^{55} + N_{5-\omega}^{55}}$$

Ya que en esta relación conocemos $c(0-4)$ y $N_{5-\omega}^{55}$, podemos despejar N_{0-4}^{55} y encontramos:

$$N_{0-4}^{55} = 20\ 603$$

Las estructuras de 1950 y 1955 son idénticas, como puede comprobarse comparando las columnas 3 y 5; esto era de esperar ya que, como lo hemos dicho, por construcción la estructura por edad inicial se ha elegido de tal modo que combinada con la mortalidad al nivel $e_0^0 = 46$ años, se mantiene constante.

Puede comprobarse en las columnas 5 y 7 que, al repetirse la misma operación, la estructura de 1960 es idéntica a las de 1955 y 1950.

Estamos entonces en presencia de una población malthusiana por construcción.

a) Tasa de incremento

La población inicial de 100 000 se elevó a 114 737 en 1955 y a 131 650 en 1960. El aumento relativo de 1950 a 1955 es igual al aumento relativo de 1955 a 1960. Este incremento corresponde a una evolución exponencial con una tasa anual de 0.0275.

b) Tasa de natalidad

Calculamos la tasa de natalidad mediante la fórmula (III. 3)

$$b = \frac{e^{k_1 \frac{r}{1!} - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} + \dots}}{e_0^0}$$

Cuadro 3

EJEMPLO ILUSTRATIVO DE UNA POBLACION MALTHUSIANA. ESTRUCTURA POR EDAD DE LA POBLACION DE COLOMBIA EN 1950, SEXO FEMENINO, SOMETIDA A UNA MORTALIDAD CONSTANTE

Grupos de edad x, x+4	Distribución por 100 000 en 1950	Relaciones de supervivencia $\frac{P}{5^x}$	Efectivos en 1955	Distribución por 100 000 en 1955	Efectivos en 1960	Distribución por 100 000 en 1960
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0 - 4	17 956	0.9237	20 603	17 956	23 640	17 956
5 - 9	14 455	0.9772	16 586	14 455	19 031	14 455
10 - 14	12 311	0.9763	14 125	12 311	16 208	12 311
15 - 19	10 476	0.9669	12 019	10 476	13 790	10 476
20 - 24	8 828	0.9604	10 129	8 828	11 621	8 828
25 - 29	7 389	0.9575	8 478	7 389	9 728	7 389
30 - 34	6 167	0.9548	7 075	6 167	8 118	6 167
35 - 39	5 132	0.9511	5 888	5 132	6 755	5 132
40 - 44	4 254	0.9436	4 881	4 254	5 600	4 254
45 - 49	3 498	0.9302	4 014	3 498	4 606	3 498
50 - 54	2 836	0.9095	3 254	2 836	3 734	2 836
55 - 59	2 248	0.8758	2 579	2 248	2 960	2 248
60 - 64	1 716	0.8226	1 969	1 716	2 259	1 716
65 - 69	1 230	0.7438	1 412	1 230	1 620	1 230
70 - 74	797	0.6353	915	797	1 050	797
75 - 79	441	0.5035	506	441	581	441
80 - 84	194	0.3543	222	194	255	194
85 - 89	60	0.2078	69	60	79	60
90 - 94	11	0.1130	12	11	14	11
95 - 99	1	0.0000	1	1	1	1
Total	100 000		114 737	100 000	131 650	100 000

d) Tasa de mortalidad

La tasa de mortalidad resulta de la diferencia

$$b - r = d$$

Obtenemos $d = 18.83$ por mil, constante en el tiempo.

También podemos calcular d directamente a partir de las defunciones ocurridas durante el período 1950-1955.

Si a la población inicial de 100 000 le agregamos los nacimientos ocurridos en el período 1950-1955, o sea, 24 705, y si le restamos la población final, o sea, 114 737, obtenemos el número de defunciones ocurridas en el período, o sea, 9 967.

Tenemos la relación

$$\int_0^5 D(t) dt = d \int_0^5 N(t) dt$$

y, despejando d :

$$\begin{aligned} d &= \frac{\int_0^5 D(t) dt}{\int_0^5 N(t) dt} = \frac{r \int_0^5 D(t) dt}{N(0) (e^{5r} - 1)} \\ &= \frac{0.0275 \times 9\,967}{100\,000 \times 0.14737} = 18.60 \text{ o/oo} \end{aligned}$$

Para el año 1950 el número de defunciones es

$$d \int_0^1 N(t) dt = d N(0) \frac{e^r - 1}{r} = 0.01860 \times 100\,000 \times 1.02788 = 1\,911$$

e) Edad media

Al aplicar la fórmula (III. 18)

$$\bar{x} = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} - k_4 \frac{r^3}{3!} + \dots$$

con los valores de r y de los cumulantes anteriormente indicados, encontramos:

Cuadro 4

EJEMPLO DE CALCULO DE UNA ESTRUCTURA POR EDAD TEORICA DE UNA POBLACION MALTHUSIANA QUE CORRESPONDE A UNA TASA DE INCREMENTO $r = 0.0275$ Y UNA MORTALIDAD MODELO AL NIVEL $e_0^0 = 46$ AÑOS, SEXO FEMENINO

Grupos de edad $x, x+4$	${}_5L_x$	$e^{-r(x+2.5)}$	(2) x (3)	Distribución por 100 000
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0 - 4	417 001	0.933560	389 295	17 956
5 - 9	385 190	0.813629	313 402	14 455
10 - 14	376 422	0.709105	266 923	12 311
15 - 19	367 510	0.618009	227 124	10 476
20 - 24	355 363	0.538616	191 404	8 828
25 - 29	341 295	0.469422	160 210	7 389
30 - 34	326 803	0.409117	133 701	6 167
35 - 39	312 043	0.356559	111 262	5 132
40 - 44	296 773	0.310753	92 223	4 254
45 - 49	280 043	0.270832	75 845	3 498
50 - 54	260 488	0.236039	61 485	2 836
55 - 59	236 925	0.205716	48 739	2 248
60 - 64	207 493	0.179288	37 201	1 716
65 - 69	170 690	0.156256	26 671	1 230
70 - 74	126 965	0.136182	17 290	797
75 - 79	80 663	0.118687	9 574	441
80 - 84	40 615	0.103440	4 201	194
85 - 89	14 390	0.090151	1 297	60
90 - 94	2 990	0.078570	235	11
95 - 99	338	0.068476	23	1
Total			2 168 106	100 000

CUADRO 5

COLOMBIA - EJEMPLO DE ESTIMACION DE LA TASA DE NATALIDAD Y DE LA TASA DE INCREMENTO A PARTIR DE $c(x)$ Y DE $p(x)$. DATOS AJUSTADOS POR ERRORES DE DECLARACION DE EDAD, SEXO FEMENINO, 1950

GRUPOS DE EDAD	$c(x, x+4)$	${}_5L_x$	$\frac{c(x, x+4)}{{}_5L_x}$	$\log \frac{c(x, x+4)}{{}_5L_x} = y$	$\xi = x+2.5$	ξy	ξ^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
5 - 9	14 033	385 190	0.03643	- 3.312362	7.5	- 24.842715	56.25
10 - 14	12 128	376 422	0.03221	- 3.435478	12.5	- 42.943475	156.25
15 - 19	10 126	367 510	0.02755	- 3.591759	17.5	- 62.855678	306.25
20 - 24	8 711	355 363	0.02451	- 3.708674	22.5	- 83.445165	506.25
25 - 29	7 401	341 295	0.02168	- 3.833212	27.5	- 105.413390	756.25
30 - 34	6 190	326 803	0.01894	- 3.966479	32.5	- 128.910568	1 056.25
35 - 39	5 263	312 043	0.01686	- 4.082811	37.5	- 153.105413	1 406.25
40 - 44	4 430	296 773	0.01492	- 4.205052	42.5	- 178.714710	1 806.25
45 - 49	3 640	280 043	0.01299	- 4.343575	47.5	- 206.319813	2 256.25
			SUMA	-34.479396	247.5	- 986.550867	8 306.25
			MEDIA	- 3.831044	27.5		

$$-r = \frac{\sum \xi y - \bar{\xi} \sum y}{\sum \xi^2 - \bar{\xi} \sum \xi} = \frac{-986.550867 + 948.183390}{8306.25 - 6806.25} = \frac{-38.367477}{1500.00} = -0.02558$$

$$r = 0.02558$$

$$\log_e b = 3.831044 + 0.02558 (27.5) = -3.831044 + 0.703450 = 3.127594$$

$$b = 0.04382$$

h) Estimación de la omisión censal de los niños y corrección de la estructura por edad para las edades avanzadas

Si se aplica la ecuación de regresión anterior, obtenida mediante los datos relativos a los grupos de edades comprendidas entre 5 y 49 años, podemos completar, por extrapolación, la estructura por edad de los grupos marginales: 0-4 años y de 50-54 años en adelante. Disponemos así de un método que puede resultar cómodo para estimar la omisión censal de los niños y para corregir la estructura en las edades avanzadas.

Un ejemplo de cálculo se da en el cuadro 6. Vemos en él que la proporción de niños de 0-4 años es 17 143 por 100 000, en lugar de 16 316 por 100 000 observada en el censo. La omisión censal es

$$\frac{17\ 143 - 16\ 316}{17\ 143} = 4.82 \%$$

Cuadro 6

COLOMBIA - EJEMPLO DE ESTIMACION DE LA OMISION CENSAL DE LOS NIÑOS DE 0 - 4 AÑOS Y DE CORRECCION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD PARA LAS EDADES AVANZADAS, SEXO FEMENINO, 1950

Grupos de edad	x+2.5	$\text{Log}_e b^{-r(x+2.5)}$	$\frac{c(x,x+4)}{5^L x}$	$5^L x$	c(x,x+4) calculadas	c(x,x+4) en el censo
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0 - 4	2.5	- 3.191544	0.04111	417 001	17 143	16 316
50 - 54	52.5	- 4.470544	0.01144	260 488	2 980	3 108
55 - 59	57.5	- 4.598444	0.01007	236 925	2 386	1 871
60 - 64	62.5	- 4.726344	0.00886	207 493	1 838	2 070
65 - 69	67.5	- 4.854244	0.00780	170 690	1 331	1 121
70 - 74	72.5	- 4.982144	0.00686	126 965	871	1 012
75 - 79	77.5	- 5.110044	0.00604	80 663	487	485
80 - 84	82.5	- 5.237944	0.00531	40 615	216	439
85 - 89	87.5	- 5.365844	0.00467	14 390	67	153
90 - 94	92.5	- 5.493744	0.00411	2 990	12	106
95 - 99	97.5	- 5.621644	0.00362	338	1	72

i) Cálculo de la tasa de natalidad de Colombia, sexo femenino, conociendo la estructura por grandes grupos de edad y la tabla de mortalidad

Utilicemos la fórmula (III. 16):

$$b = \frac{1}{e_0^o} \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{e_0^o} \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} c(x) dx}{\int_{\beta_1}^{\beta_2} c(x) dx} \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(x) dx}{\int_{\beta_1}^{\beta_2} p(x) dx}$$

Consideraremos también aquí la tabla de mortalidad $e_0^o = 46$ años, sexo femenino.

Para los límites de los grupos de edad adoptaremos:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 4 \quad \beta_1 = 15 \quad \beta_2 = 49 \quad y$$

$$\alpha_1 = 5 \quad \alpha_2 = 9 \quad \beta_1 = 20 \quad \beta_2 = 54$$

Los valores de q_2 que reproducimos a continuación, se indican en la tabla de la segunda parte y la estructura por edad considerada es la del cuadro 2, sexo femenino.

Primer cálculo: Límites de edad

$$\underline{\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 4 \quad \beta_1 = 15 \quad \beta_2 = 49}$$

$$\int_0^4 c(x) dx = 0.17477$$

$$\int_{15}^{49} c(x) dx = 0.45761$$

$$q_1 = 0.3819$$

$$\int_0^4 p(x) dx = 0.417001$$

$$\int_{15}^{49} p(x) dx = 0.2279830$$

$$q_2 = 0.1829 \quad \frac{q_1}{q_2} = 2.0880 \quad b = \frac{1}{e_0^o} \frac{q_1}{q_2} = 45.39 \text{ o/oo}$$

Capítulo IV

OTROS MODELOS DE POBLACIONES MALTHUSIANAS POR CONSTRUCCION

En el modelo anterior definimos la población malthusiana al suponer, siguiendo a Lotka que las funciones $c(x)$ y $p(x)$ son invariables. Todas las propiedades que hemos enumerado se deducen lógicamente de estas hipótesis. Veremos que otros supuestos permiten llegar exactamente al mismo modelo de población.

1. Poblaciones con estructura por edad y tasa de incremento invariables

Supondremos esta vez, contrariamente a lo que se consideró en el modelo anterior, que las tasas de supervivencia no son por hipótesis independientes del tiempo, pero que a la vez $c(x)$ y r son constantes.

Llamaremos $P(x,t)$ la probabilidad de que un individuo que tenía la edad $x-1$ en el tiempo $t-1$, sobreviva al tiempo t . Si $N(x,t)$ es el número de individuos de edad x al instante t , $P(x,t)$ se define de la manera siguiente:

$$P(x,t) = \frac{N(x,t)}{N(x-1, t-1)}$$

Si la estructura por edad es independiente del tiempo y si el efectivo global de la población sigue una ley exponencial, el efectivo de cada edad también aumenta necesariamente en forma exponencial, con la misma tasa de incremento que el global. Siendo r esa tasa, tenemos

$$N(x, t + s) = N(x, t) e^{sr}$$

donde s es una constante.

2. Poblaciones con estructura por edad y tasa bruta de mortalidad constantes

Este caso es en realidad muy sencillo. En efecto, si $c(x)$ es independiente de t , la tasa de natalidad es constante, ya que $c(0) = b$. Y si b y d son constantes, $r = b - d$ también lo es. Este modelo se convierte entonces en el anterior, construido con la hipótesis de $c(x)$ y r constantes, el cual a su vez es equivalente al modelo malthusiano. Todas las relaciones y propiedades encontradas también son válidas en este caso.

3. Poblaciones con tasas de supervivencia constantes y nacimientos en aumento exponencial

Llamemos $N(x,t)$ el efectivo de edad x en el tiempo t . Podemos deducir de las hipótesis:

$$N(x,t) = B(t-x) p(x) = B(t) e^{-rx} p(x)$$

siendo r la tasa de incremento de los nacimientos.

La población total se obtiene al integrar con respecto a x :

$$N(t) = B(t) \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx$$

o sea:

$$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx}$$

Encontramos así la fórmula (III. 2) de las malthusianas.

En el tiempo $t+1$ el número de individuos de edad x es

$$N(x,t+1) = B(t+1-x) p(x) = B(t) e^{-r(x-1)} p(x)$$

de modo que

$$N(x,t+1) = e^r N(x,t)$$

Como el efectivo de cada edad aumenta con la misma tasa de incremento, la estructura por edad permanece constante y el modelo se convierte en la población malthusiana de Lotka, ya que $p(x)$ y $c(x)$ son invariables.

Capítulo V

POBLACIONES NO MALTHUSIANAS

Indicamos a continuación algunos modelos que no corresponden a las poblaciones malthusianas de Lotka, aun cuando también se consideran invariables dos funciones.

1. Poblaciones con estructura por edad y tasa de natalidad constantes

a) La población no es necesariamente malthusiana

Si la estructura por edad es independiente del tiempo, también la tasa de natalidad permanece constante con el tiempo, ya que $c(0) = b$. Entonces, en este modelo daría lo mismo suponer que la estructura por edad sola es independiente del tiempo.

Vemos que el hecho de que la estructura por edad permanezca fija no permite estimar la tasa de natalidad, ya que en la práctica la proporción de individuos que tienen la edad cero es desconocida.

De todos modos, el solo conocimiento de los $c(x)$ no es suficiente para determinar los demás elementos, $r(t)$, $d(t)$, $p(x,t)$, y las relaciones que existen entre ellos. Si no se agrega otra hipótesis sobre la constancia en el tiempo de $p(x,t)$ o de $r(t)$, por ejemplo, la población queda indeterminada.

b) Ejemplo numérico

Con un ejemplo numérico puede mostrarse que si la estructura por edad permanece sin alteraciones en el tiempo, las tasas de supervivencia no son necesariamente constantes. Tal es así que en el cuadro 7 representamos (columna 2) la estructura por edad de una población (sexo femenino) construida, según las relaciones encontradas en el modelo 1, con una tabla modelo de mortalidad correspondiente a una esperanza de vida al nacer de 46 años y una tasa de incremento de 0.0275. En la columna 3 de ese cuadro se representa

CUADRO 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO DE POBLACIÓN CON ESTRUCTURA POR EDAD Y TASA DE NATALIDAD CONSTANTE

GRUPOS DE EDAD	POBLACIÓN EN EL TIEMPO $t = 0^{\frac{a}{}}$	POBLACIÓN EN $t = 5$	POBLACIÓN EN $t = 10$	RELACIONES DE SUPERVIVENCIA EN EL 1ER QUINQUENIO	5^I_x EN EL 1ER QUINQUENIO	RELACIONES DE SUPERVIVENCIA EN EL 2º QUINQUENIO	5^I_x EN EL 2º QUINQUENIO $c/$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5) $b/$	(6)	(7)	(8)
0 - 4	17 956	19 752	22 715	0.88549	409 250	0.92572	408 550
5 - 9	14 455	15 900	18 285	0.93689	362 387	0.97943	378 203
10 - 14	12 311	13 542	15 573	0.93607	339 495	0.97865	370 423
15 - 19	10 476	11 524	13 253	0.92698	317 791	0.96910	362 514
20 - 24	8 828	9 711	11 168	0.92070	294 586	0.95231	351 312
25 - 29	7 309	8 128	9 345	0.91812	271 225	0.95989	338 071
30 - 34	6 167	6 784	7 802	0.91535	249 017	0.95695	324 511
35 - 39	5 132	5 645	6 492	0.91173	227 998	0.95323	310 541
40 - 44	4 254	4 679	5 381	0.90456	207 818	0.94571	296 017
45 - 49	3 498	3 848	4 425	0.89193	187 984	0.93243	279 946
50 - 54	2 836	3 120	3 588	0.87200	167 669	0.91153	261 030
55 - 59	2 248	2 473	2 844	0.83941	146 207	0.87747	237 937
60 - 64	1 716	1 887	2 170	0.78846	122 718	0.82458	208 783
65 - 69	1 230	1 353	1 556	0.71301	96 766	0.74575	172 158
70 - 74	797	877	1 009	0.60853	68 995	0.63625	128 387
75 - 79	441	485	558	0.48299	41 986	0.50515	81 686
80 - 84	194	213	245	0.34021	20 279	0.35681	41 264
85 - 89	60	66	76	0.20000	6 899	0.21212	14 723
90 - 94	11	12	14	0.09091	1 280	0.08333	3 123
95 - 99	1	1	1	0.00000	125	0.00000	260
TOTAL	100 000	110 000	126 500		3 546 525		4 569 439

a/ Esta población corresponde a un modelo malthusiano con $e_0^0 = 46$ años y $r = 0.0275$, sexo femenino.

b/ Al aplicar la fórmula $5^I_x = \frac{r N_{0-4}^5}{b N(0)(e^{5r} - 1)}$ se obtuvo $5^I_x =$

c/ Al aplicar la fórmula $5^I_x = \frac{r N_{0-4}^{10}}{b N(5)(e^{5r} - 1)}$ se obtuvo $5^I_x = 0.8171$

Capítulo VI

POBLACIONES ASINTOTICAMENTE MALTHUSIANAS

En el capítulo anterior se llegó al concepto de población malthusiana en forma inmediata, o sea, las hipótesis elegidas fueron tales que, siendo las funciones consideradas invariables, la población malthusiana está ya construida.

Vamos a ver otros tipos de población que permiten llegar exactamente al mismo concepto pero en forma asintótica, solamente después de que las funciones consideradas en las hipótesis hayan permanecido constantes durante un cierto intervalo de tiempo.

1. Poblaciones con tasas de supervivencia y tasa de incremento conocidas e invariables

Partamos de la ecuación siguiente, siendo P la tasa de incremento:

$$B(t) dt = D(t) dt + P N(t) dt.$$

Esta ecuación expresa que el número de nacimientos que ocurren en el intervalo de tiempo $t, t+dt$ es igual al número de defunciones más el incremento de población dentro del mismo intervalo, siendo P la tasa de incremento. La población en el instante t , como hemos visto, se expresa por

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) dx.$$

En cuanto al número de defunciones $D(t)$, se obtiene multiplicando el efectivo de una edad x por la tasa instantánea de mortalidad a la misma edad, o sea, $\frac{d p(x)}{p(x) dx}$:

$$D(t) = - \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) \frac{d p(x)}{p(x) dx}$$

Esta ecuación admite ya la raíz real $r_n = \rho$ y una serie de raíces complejas que se encuentran al resolver la ecuación

$$\int_0^{\infty} e^{-r_n x} p(x) dx = 0 \quad (\text{VI. 7})$$

Estas raíces complejas, con la condición que veremos más adelante, introducen oscilaciones en el número de los nacimientos que van amortiguándose alrededor del término aperiódico.

$$B(t) = Q_\rho e^{\rho t}$$

La ecuación (VI. 4) admite, en efecto, además de la raíz real, un número infinito de raíces complejas de la forma

$$\rho_n = u_n + i v_n \quad \text{con } i = \sqrt{-1}$$

Escribiendo estas raíces en forma trigonométrica tenemos:

$$e^{\rho_n t} = e^{u_n t} (\cos v_n t + i \operatorname{sen} v_n t)$$

La ecuación (VI. 2) llega entonces a escribirse:

$$B(t) = Q_\rho e^{\rho t} + \sum_{\rho_n \neq \rho} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t + i \sum_{\rho_n \neq \rho} Q_n e^{u_n t} \operatorname{sen} v_n t$$

Como $B(t)$ es necesariamente real y, en la práctica, según se verá en la aplicación numérica, u_n es negativo, el límite de $B(t)$ cuando t tiende a infinito es

$$B(t) = Q_\rho e^{\rho t} \quad (\text{VI. 6})$$

Así vemos que las raíces complejas introducen oscilaciones en la evolución de los nacimientos que van amortiguándose con el tiempo solamente si las partes reales de las raíces complejas son negativas. Con esta condición, el término aperiódico va dominando con el tiempo en la evolución del número de los nacimientos que llega a ser exclusivamente exponencial.

Cuando las fluctuaciones originales por las raíces complejas están enteramente amortiguadas, el término aperiódico se mantiene solo y entonces se logra la situación malthusiana. En efecto, llegamos a este momento

Puesto que ρ es la raíz real de la ecuación (VI. 4) y que, una vez que la población ha llegado a la situación límite, esta tasa indica el crecimiento tanto del efectivo global como de la cifra de los nacimientos, tenemos

$$\begin{aligned} N(t) &= N(0) e^{\rho t} = \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) dx \\ &= Q_{\rho} e^{\rho t} \int_0^{\infty} e^{-\rho x} p(x) dx \end{aligned}$$

De ahí

$$N(0) = Q_{\rho} \frac{1}{e_0} e^{K(-\rho)}$$

o sea:

$$Q_{\rho} = \frac{N(0)}{e_0} e^{-K(-\rho)} \quad (\text{VI. 7})$$

El número de los nacimientos en un momento t en que se alcanza la situación malthusiana, con respecto al instante cero a partir del cual las funciones $p(x)$ y ρ son constantes, es dado entonces por

$$B(t) = Q_{\rho} e^{\rho t} = \frac{N(0)}{e_0} e^{\rho t - K(-\rho)}$$

En cuanto a las cifras de las defunciones, tomando en cuenta la ecuación () se escriben:

$$D(t) = d N(t) = \frac{N(0)}{e_0} e^{\rho t} \left[e^{-K(-\rho)} - \rho e_0 \right]$$

Vemos una propiedad interesante de este modelo: el efectivo global, el número de nacimientos y el número de defunciones, debidos a la raíz de la ecuación fundamental (VI. 4), son independientes de la estructura por edad inicial. La población puede entonces construirse enteramente en cualquier momento en que llegó a la situación malthusiana, a partir del conocimiento de las dos funciones consideradas en las hipótesis, o sea, $p(x)$ y ρ .

2. Poblaciones con tasas de supervivencia y tasa de natalidad
conocidas e invariables

Partimos esta vez de la ecuación básica

$$B(t) = b N(t) = b \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) dx \quad (\text{VI. 8})$$

en la que suponemos $p(x)$ y b conocidos e independientes del tiempo.

Si suponemos, como en el modelo anterior, que $B(t)$ puede expresarse por una suma de exponenciales de la forma

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots, \quad (\text{VI. 2})$$

debemos buscar las soluciones de la ecuación

$$b \int_0^{\infty} e^{-r x} p(x) dx = 1 \quad (\text{VI. 9})$$

Esta ecuación admite, como la (VI. 4), una sola raíz real $r = \rho$ y una infinidad de raíces complejas que introducen oscilaciones en el número de los movimientos, siempre que la parte real de las raíces complejas sea negativa, como en el caso de la anterior. Las oscilaciones van amortiguándose hasta que el término $B(t) = Q_{\rho} e^{\rho t}$ se mantenga solo.

Cuando las amortiguaciones han desaparecido estamos en presencia de una población con $p(x)$ constante y $B(t)$ aumentando en forma exponencial, y el modelo se convierte en una población malthusiana.

Entonces se aplican todas las propiedades de estas últimas poblaciones. Con la fórmula (III. 2) se obtendrá la tasa intrínseca de incremento; con la (III. 3), la tasa intrínseca de mortalidad, y con la (III. 1), la estructura por edad intrínseca. Todas estas características se obtendrán a partir de las funciones $p(x)$ y b , que se supusieron conocidas e invariables.

a) Cálculo de la constante Q_{ρ} asociada a la raíz real

Busquemos las constantes Q iniciando el cálculo por Q_{ρ} , o sea, la constante asociada a la raíz real de la ecuación (VI. 9). Veremos luego las constantes asociadas a las raíces complejas. Cuando se conoce Q_{ρ} , todas

$$Q_p \int_0^{\infty} dt \left(\int_t^{\infty} e^{-\rho x} p(x) dx \right) = N(0) \int_0^{\infty} e^{-\rho t} dt \left(\int_0^{\infty} c_0(x) \frac{p(t+x)}{p(x)} dx \right)$$

obtenemos

$$Q_p \int_0^{\infty} x e^{-\rho x} p(x) dx = N(0) \int_0^{\infty} \frac{c_0(x)}{p(x)} e^{\rho x} g(x) dx$$

siendo

$$g(x) = \int_x^{\infty} e^{-\rho z} p(z) dz.$$

Si llamamos $G(x)$ la función definida por

$$G(x) = \frac{\int_x^{\infty} e^{-\rho z} p(z) dz}{\int_0^{\infty} x e^{-\rho x} p(x) dx} = \frac{g(x)}{\int_0^{\infty} g(x) dx}$$

obtenemos finalmente

$$Q_p = b N(0) \int_0^{\infty} \frac{c_0(x)}{c_{\infty}(x)} G(x) dx \quad (\text{VI. 11})$$

siendo $c_0(x)$ la estructura por edad inicial y $c_{\infty}(x)$ la estructura por edad límite malthusiana.

Si la población inicial es malthusiana, la población es entonces malthusiana por construcción. Tenemos

$$c_0(x) = c_{\infty}(x) \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} G(x) dx = 1$$

Entonces Q_p se convierte en

$$Q_p = b N(0),$$

lo que teníamos en las poblaciones malthusianas por construcción.

Vemos entonces una característica interesante de este modelo, que no habíamos encontrado en el anterior, como es la siguiente: en tamaño, la población va a depender, cuando llegue a su equilibrio tangencial, de la

siendo

$$A(x) = h(x) H(x) + k(x) K(x)$$

$$B(x) = k(x) H(x) - h(x) K(x)$$

La componente debida a las raíces complejas conjugadas es

$$B(t) = b N(0) e^{(u+iv)t} \int_0^{\infty} \frac{c_0(x)}{c_{\infty}(x)} [A(x) - iB(x)] dx + \\ + b N(0) e^{(u-iv)t} \int_0^{\infty} \frac{c_0(x)}{c_{\infty}(x)} [A(x) + iB(x)] dx$$

o sea:

$$B(t) = 2b N(0) e^{ut} \left[\cos vt \int_0^{\infty} \frac{A(x)}{H^2(x) + K^2(x)} \cdot \frac{c_0(x)}{c_{\infty}(x)} dx + \right. \\ \left. + \sin vt \int_0^{\infty} \frac{B(x)}{H^2(x) + K^2(x)} \cdot \frac{c_0(x)}{c_{\infty}(x)} dx \right]$$

La parte entre paréntesis cuadrados desaparece cuando t tiende a infinito si u es negativo, como se comprueba con un ejemplo numérico en el anexo.

3. Poblaciones con tasas de supervivencia y tasa bruta de mortalidad conocidas e invariables

El interés de este modelo reside en que considera funciones relativas solamente a la mortalidad.

La ecuación básica que nos sirve de punto de partida es la siguiente:

$$D(t) = d \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) dx = - \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) \frac{d p(x)}{p(x) dx} dx \quad (\text{VI. 13})$$

Esta ecuación expresa que el número de defunciones $D(t)$ puede obtenerse de dos maneras, según se multipliquen el efectivo global por la tasa bruta de mortalidad, o los efectivos de cada edad por las tasas instantáneas de mortalidad en esas edades. El modelo supone que en esta ecuación d y $p(x)$ son conocidas e invariables.

Si entonces $p(x)$ y d son los únicos elementos que se suponen conocidos e invariables, también se puede llegar al concepto de población malthusiana, pero tenemos esta vez una solución dual en el límites. Entonces se debería disponer de un dato más para saber cuál de los dos valores P_1 y P_2 se adapta a la población. Si estas dos raíces están bastante separadas y si tenemos algún conocimiento, por burdo que sea, de la estructura por edad, o del nivel de la natalidad, se podría descartar una de las dos raíces. También puede suceder, si $r < -\frac{1}{\frac{dK(-r)}{dr}} - d$, que la población no tenga ningún límite y que entonces no llegue nunca a ser malthusiana.

Para obtener los valores P_1 y P_2 que corresponden a los $p(x)$ y d , de los cuales disponemos, puede procederse de la manera siguiente:

La ecuación () se escribe en la forma

$$(d+r) e^{\frac{0}{c}} = e^{\frac{k_1 r}{1!} - \frac{k_2 r^2}{2!} \pm \dots}$$

Se traza la recta que representa la parte izquierda de la ecuación tomando como variable r , y se buscan los puntos de contacto con la parte derecha de la ecuación, si existen.

Para ilustrar este modelo, en el gráfico hemos indicado la curva de la tasa de mortalidad d que corresponde a poblaciones malthusianas construidas, a partir de las tablas modelo de mortalidad de las Naciones Unidas, con una esperanza de vida al nacer de 46 años (sexo femenino) y distintas tasas de incremento. Como puede verse, para $d = 0.0190$ existen dos tasas posibles de incremento: $P_1 = 0.0155$ y $P_2 = 0.0305$. La curva pasa por un mínimo para $P = \frac{1}{x} - d$, o sea, $b = \frac{1}{x}$. En la práctica, no es difícil eliminar una de las dos soluciones. En efecto, si la población es subdesarrollada, con alta natalidad y mortalidad moderada, la tasa de incremento sobrepasa 0.02 y P_2 es más verosímil que P_1 . Si la tasa de mortalidad d fuera exactamente igual al mínimo de la curva, o sea, 0.01871 , se tendría una sola solución $P = 0.0232$. Si d fuera inferior a 0.01871 no se tendría ninguna población malthusiana que correspondiera a las condiciones del modelo.

Una vez que se tiene la tasa intrínseca de incremento, la tasa intrínseca de natalidad y la estructura por edad intrínseca se obtienen respectivamente, con las fórmulas (III. 3) y (III. 1).

Capítulo VII

POBLACIONES ESTABLES

Estas poblaciones se definen clásicamente como la situación límite a la cual se llega en la hipótesis de que las tasas por edad de fecundidad y de mortalidad se mantengan invariables. Corresponden al esquema que Lotka llama "poblaciones con estructura por edad estables".

1. Evolución del efectivo global y del número de nacimientos y de defunciones

La ecuación básica que sirve en este modelo es

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-x) \varphi(x) p(x) dx$$

donde $\varphi(x)$ representa la tasa de fecundidad femenina para la edad x .

Supongamos, como en los modelos anteriores, que $B(t)$ puede expresarse por una serie de exponenciales:

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots \quad (\text{VII. 1})$$

de modo que la ecuación () se escribe:

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} \int_0^{\infty} e^{-r_1 x} \varphi(x) p(x) dx + \\ + Q_2 e^{r_2 t} \int_0^{\infty} e^{-r_2 x} \varphi(x) p(x) dx + \dots \quad (\text{VII. 2})$$

Identificando término a término los coeficientes $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$, ... en los miembros de la derecha de estas dos ecuaciones, llegamos a buscar la solución de

expresa esas oscilaciones, que van amortiguándose alrededor del término aperiódico $Q_p e^{\rho t}$. Después de este momento, los nacimientos siguen una ley exponencial y estamos entonces en presencia de una población con ley de mortalidad invariable y nacimientos que varían en forma exponencial, o sea, de una población malthusiana. Todas las propiedades de estas poblaciones se aplican cuando las oscilaciones han desaparecido.

La tasa de incremento ρ tiene las propiedades siguientes:

- Es independiente de la estructura por edad del momento inicial, o de cualquier otro momento, ya que depende solamente de las funciones $\phi(x)$ y $p(x)$ entre las edades 15 y 50 años, según veremos.
- Mide la velocidad de aumento del efectivo de la población y del número de nacimientos y de defunciones, desde el momento en que se alcanza el equilibrio estable. Es entonces un valor asintótico, similar en su significación a la tasa intrínseca de incremento definida en los modelos malthusianos.

Todas las fórmulas (III. 1) a (III. 20) de las poblaciones malthusianas se aplican a las estables. Pero, además, por el hecho de que conocemos la función $\phi(x)$, existen otras fórmulas que hacen intervenir $\phi(x)$. Veamos estas nuevas fórmulas, específicas del modelo que estudiamos y que derivan únicamente del hecho de que las informaciones de que disponemos son relativamente detalladas. Las designaremos con los números 19 a 25, agregándolas a los 18 ya mencionados para las malthusianas.

19a. propiedad. El número de los nacimientos se multiplica por la tasa neta de reproducción en un intervalo de tiempo llamado "intervalo medio entre dos generaciones".

Designemos por R' y R las tasas brutas y netas de reproducción que se definen de la manera siguiente:

$$R' = \int_0^{\infty} \phi(x) dx$$

$$R = \int_0^{\infty} \phi(x) p(x) dx$$

Como los nacimientos siguen una trayectoria exponencial, con una tasa de incremento P , la relación anterior se escribe

$$R = \frac{B(t)}{B(t-\theta)} = \frac{B(0) e^{Pt}}{B(0) e^{P(t-\theta)}} = e^{P\theta}$$

La comparación de la ecuación (18) y de esta última relación nos permite escribir:

$$\theta = T'' \quad R = \frac{B(t)}{B(t-T'')} \quad (\text{VII. 8})$$

La tasa neta de reproducción en el tiempo t es igual a la relación entre los nacimientos ocurridos en el tiempo t y los nacimientos que hubieran ocurrido T'' años atrás, en el supuesto de que la fecundidad y la mortalidad hubieran permanecido constantes.

Vemos así que la expresión T , llamada clásicamente "intervalo medio entre dos generaciones", se confunde con el intervalo de tiempo que se necesita para que el número de los nacimientos se multiplique por el coeficiente R , en el caso de que permanezcan constantes las tasas de fecundidad por edad y las probabilidades de supervivencia.

Siendo T dependiente de los cumulantes de la función

$$\frac{\Psi(x) p(x)}{R}$$

el valor que toma varía según los niveles de $\Psi(x)$ y de $p(x)$ durante el período fértil de las mujeres. Pero, en la práctica, T varía en general muy poco: entre los límites 27 y 30 años, como lo comprobaremos más adelante. Su valor es muy parecido al de la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos.

Hagamos una observación de interés. La ecuación (22) nos indica que la tasa neta de reproducción mide la variación de los nacimientos - y también del efectivo de la población, ya que evoluciona al mismo ritmo que los nacimientos - durante el intervalo de tiempo T , al suponer que las funciones $\Psi(x)$ y $p(x)$ permanecen constantes. En cuanto a la tasa intrínseca de incremento, mide también el aumento o la disminución de los nacimientos o de la

Reemplazando esta expresión de $\varphi(x)$ $p(x)$ en la ecuación

$$\int e^{-px} \varphi(x) p(x) dx = 1$$

e integrando, se llega a la solución

$$\rho' = \gamma \left[R^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right]$$

que es la solución de Wicksell.

La solución ρ de Lotka y la solución ρ' de Wicksell no difieren mucho en la práctica.

En efecto, la fórmula

$$\rho = \frac{k_1'' - \sqrt{k_1''^2 - 2k_2'' \log R}}{k_2''}$$

se escribe

$$\rho = \gamma \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\beta} \log R} \right]$$

Para comparar estas dos soluciones desarrollamos ρ y ρ' en serie; obtenemos:

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta} \log R + \frac{\gamma}{2\beta^2} \log^2 R + \frac{\gamma}{2\beta^3} \log^3 R + \dots$$

$$\rho' = \frac{\gamma}{\beta} \log R + \frac{\gamma}{2\beta^2} \log^2 R + \frac{\gamma}{6\beta^3} \log^3 R + \dots$$

La diferencia $\rho - \rho'$ es de tercer orden y se escribe

$$\rho - \rho' = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\beta^3} \log^3 R$$

Si tomamos en el denominador la parte principal de ρ , o sea, $\rho = \frac{\gamma}{\beta} \log R$, la diferencia relativa se escribe

$$\frac{\rho - \rho'}{\rho} = \frac{\log^2 R}{3\beta^2}$$

Ahora bien, $M''(t)$, función generadora de los momentos (F.G.M.) de la función

$$\frac{\psi(x) p(x)}{R}$$

se escribe, tomando para la variable auxiliar $t = -\rho$;

$$M''(-\rho) = \frac{1}{R} \int e^{-\rho x} \psi(x) p(x) dx = \frac{1}{R}$$

y la función generadora de los cumulantes (F.G.C.):

$$K''(-\rho) = \log \int e^{-\rho x} \psi(x) p(x) dx - \log R = -\log R$$

El denominador de \bar{x}_m puede escribirse entonces

$$N(t) \text{ b } R M''(-\rho)$$

y el numerador

$$-N(t) \text{ b } R \frac{d M''(-\rho)}{d \rho}$$

de modo que

$$\bar{x}_m = - \frac{d M''(-\rho)}{M''(-\rho) d \rho} = - \frac{d K''(-\rho)}{d \rho}$$

y, al derivar $K''(-\rho)$:

$$\bar{x}_m = - \frac{1}{\rho} \sum \frac{(-\rho)^2}{(i-1)!} k_i'' \quad (\text{VII. 10})$$

La expresión de \bar{x}_m es exactamente igual a la de \bar{x} de las poblaciones malthusianas o estables, salvo que en la primera aparecen los cumulantes K''_i de la función

$$\frac{p(x) \psi(x)}{R}$$

y en la segunda, los cumulantes k_i de la función $\frac{p(x)}{e_0}$

La diferencia $\bar{x}_m - T$ es, en primera aproximación:

una aproximación más tosca, pero a veces suficiente, haciendo

$$\log \left(b \frac{e^0}{R} \right) = 0,$$

ya que los términos sucesivos que figuran en el exponente son alternativamente negativos y positivos, conduce a la siguiente relación entre la tasa de natalidad, la esperanza de vida al nacer y la tasa neta de reproducción:

$$b = \frac{R}{e^0} \quad (\text{VII. 13})$$

Las fórmulas (VII. 11), (VII. 12) y (VII. 13) permiten pasar de una tasa de natalidad a una tasa neta de reproducción, o viceversa.

La fórmula (III. 3) nos había indicado que puede obtenerse la tasa de natalidad de una población malthusiana conociendo solamente la tasa de incremento y las tasas de supervivencia. Vemos ahora que el cálculo de la tasa neta de reproducción de una población estable exige disponer, además, de algunos datos acerca de la distribución de los nacimientos según la edad de las madres, salvo si se utiliza la fórmula abreviada (VII. 13). En consecuencia, dos poblaciones estables que tienen la misma tabla de vida y la misma tasa de natalidad no tendrán por lo tanto necesariamente igual tasa neta de reproducción. Sucederá así solamente si tienen igual distribución de los nacimientos según la edad de las madres.

Los demás índices intrínsecos se deducirán también fácilmente a partir de las funciones $\phi(x)$ $p(x)$ incluidas en las hipótesis. La tasa intrínseca de mortalidad se obtendrá por diferencia entre la tasa intrínseca de natalidad y la tasa intrínseca de incremento. La estructura por edad intrínseca se obtendrá mediante la fórmula (III. 1).

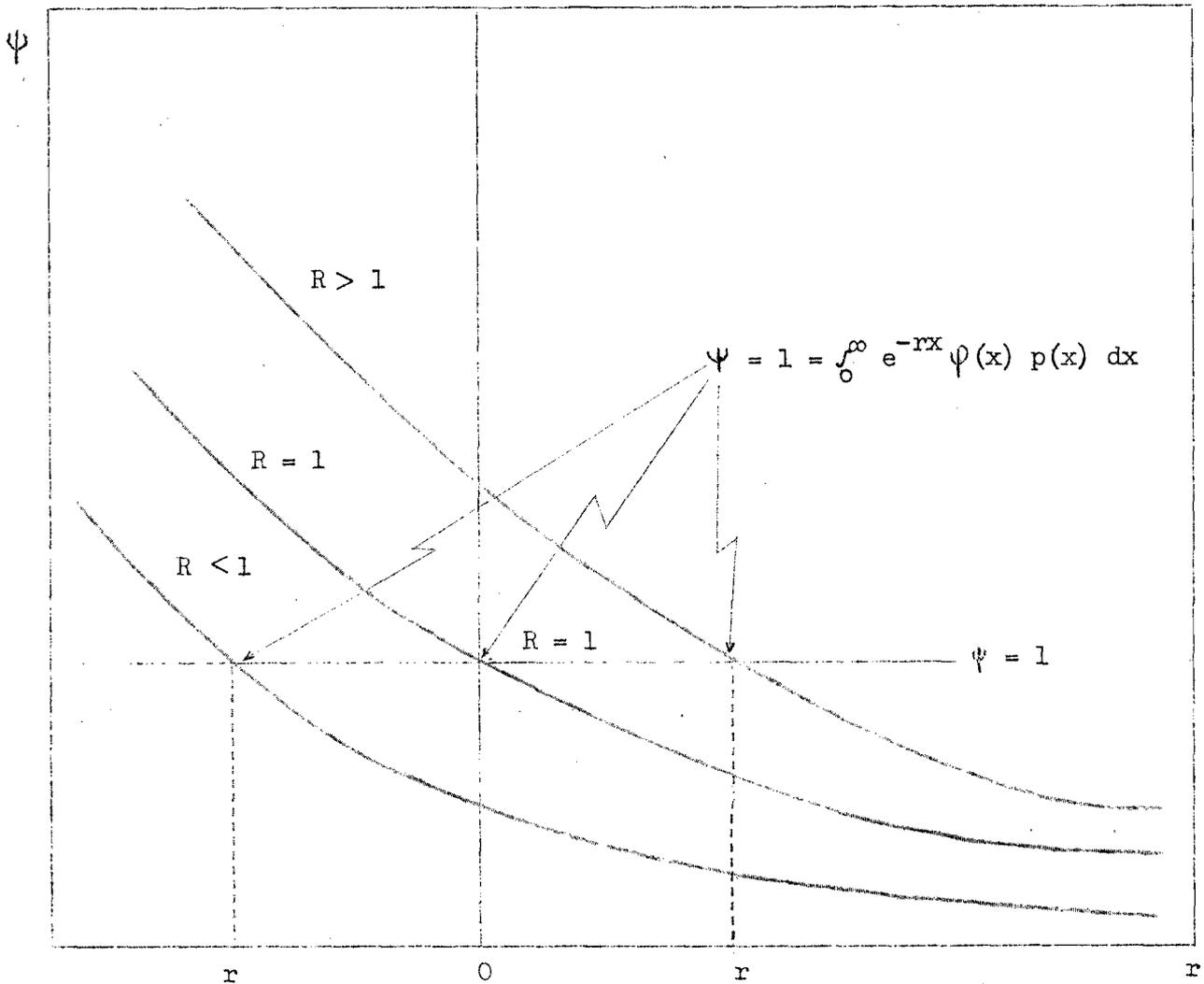
23a. propiedad. Puede obtenerse la tasa intrínseca de incremento a partir de las funciones $\phi(x)$ y $p(x)$ mediante un procedimiento gráfico.

Seguimos el mismo razonamiento que en la 18a. propiedad de las poblaciones malthusianas.

Supongamos que la población en estudio y para la cual se dispone de las funciones $\phi(x)$ y $p(x)$, no sea necesariamente estable. Para esta población, la integral

$P > 0$	si	$R > 1$
$P = 0$	si	$R = 1$
$P < 0$	si	$R < 1$

Gráfico 6



24a. propiedad. Existe una relación aproximada sencilla entre la tasa bruta y la tasa neta de reproducción.

Veamos una relación interesante entre la tasa bruta y la tasa neta de reproducción. Esta relación se ha aplicado muy a menudo en la construcción de las poblaciones modelo que figuran en la segunda parte de este trabajo.

Recordemos las fórmulas de las tasas brutas y netas de reproducción:

En la ecuación de R , podemos igualar δ con x_0 , ya que x_0 es un valor cualquiera entre 15 y 50 años. Haciendo esta substitución encontraremos:

$$R = R' p(\delta) \quad (\text{VII. 15})$$

Vemos que con la aproximación hecha ($p(x)$ lineal durante el período fértil), la tasa neta de reproducción es el producto de la tasa bruta de reproducción por la probabilidad de supervivencia a una edad próxima a la edad media de las madres.

Advirtamos que esta relación es válida en cualquier tipo de población, sea estable o no, ya que por definición las tasas de reproducción no son influidas por las estructuras por edad y dependen únicamente de las condiciones del momento en cuanto a fecundidad y mortalidad. No importa, entonces, que las tasas de fecundidad y mortalidad hayan cambiado en el pasado.

Al final de este capítulo veremos algunas aplicaciones de la fórmula (VII. 15).

25a. propiedad. Puede obtenerse una estimación de la tasa neta de reproducción mediante el conocimiento de la estructura por edad de las mujeres y de la población estacionaria.

La demostración es similar a la que se hizo para la 14a. propiedad de las poblaciones malthusianas. Se obtiene, usando el índice de Thompson, una estimación de la tasa neta de reproducción de la manera siguiente:

$$R = \frac{q_1}{q_2} \quad (\text{VII. 16})$$

Como en las poblaciones malthusianas ya se obtuvo la relación

$$b = \frac{1}{e_0^0} \frac{q_1}{q_2}$$

y puesto que, según la relación (VII. 13), en una población estable tenemos en primera aproximación

$$R = b e_0^0$$

el índice de Thompson queda entonces verificado.

Cuadro 8

EJEMPLO DE CALCULO DE TASA BRUTA Y NETA DE REPRODUCCION EN COLOMBIA, 1950

Grupos de edad x, x+t	Número de mujeres <u>a/</u>	Número de nacimientos <u>b/</u>	$\psi(x+2.5)$ (Por mil)	${}_5L_x$	$\psi(x+2.5) {}_5L_x$ (Por mil)
15 - 19	561 721	64 433	114.7	367 510	421.53
20 - 24	483 227	163 236	337.8	255 363	1 200.42
25 - 29	410 557	134 578	327.8	341 295	1 118.77
30 - 34	343 379	90 172	262.6	326 803	858.18
35 - 39	291 955	57 282	196.2	312 043	612.23
40 - 44	245 746	18 650	75.9	296 773	225.25
45 - 49	201 922	3 533	17.5	280 043	49.01
Total		1 332.5			4 485.39

a/ Datos censales ajustados.

b/ Nacimientos corregidos por el subregistro.

$$R' = \int_0^{\infty} \psi(x) dx \doteq \sum_{x=15}^{x=45} k \psi(x+2.5) = (0.4878)(5)(1 332.5) = 3 250$$

$$R = \int_0^{\infty} \psi(x) p(x) dx \doteq \sum_{x=15}^{x=45} k \psi(x+2.5) {}_5L_x = (0.4878)(4 485.39) = 2 188$$

b) Cálculo de la tasa intrínseca de incremento, de la edad media de las madres y del intervalo medio entre dos generaciones

En el cuadro 9 se indica un ejemplo de cálculo de ρ , \bar{x}_m y T para Colombia, sexo femenino, en 1950. Encontramos en la primera aproximación $\rho = 0.0275$. La segunda y la tercera aproximación indican respectivamente $\rho = 0.0276$ y $\rho = 0.0280$.

2a. aproximación de ρ

$$\log_e R = \rho k_1'' - \frac{\rho^2}{2} k_2'' \quad \therefore \quad \frac{k_2''}{2} \rho^2 - k_1'' \rho + \log_e R = 0$$

$$\rho = \frac{k_1'' - \sqrt{k_1''^2 - 2k_2'' \log_e R}}{k_2''}$$
$$= \frac{28.5177 - 813.5921 - 76.8795}{49.0937} = 0.0276$$

3a. aproximación de ρ

$$\log_e R = \rho k_1'' - \frac{\rho^2}{2} k_2'' + \frac{\rho^3}{6} k_3''$$

En $\frac{\rho^3}{6} k_3''$ se adopta el valor de la segunda aproximación de ρ y se resuelve una ecuación de segundo grado en ρ :

$$\frac{k_2''}{2} \rho^2 - k_1'' \rho + \log_e R - \frac{\rho^3}{2} k_1'' = 0$$

Se obtiene:

$$\rho = 0.0280$$

$$\bar{x}_m = k_1'' - k_2'' \rho + k_3'' \frac{\rho^2}{2} = 27.2283$$

$$T = k_1'' - k_2'' \frac{\rho}{2} + k_3'' \frac{\rho^2}{6} = 27.8630$$

Se comprueba así numéricamente que para una tasa intrínseca de incremento positiva tenemos

$$\bar{x}_m < T < k_1''$$

Estos cuatro valores fueron llevados al gráfico 7. La curva que los reúne corta la horizontal de ordenada 1 en un punto que corresponde a una tasa intrínseca de incremento levemente superior a 0.0280. La solución analítica había dado 0.0275.

Cuadro 10

CUADRO DESTINADO A PREPARAR LA RESOLUCION GRAFICA PARA LA ESTIMACION DE LA TASA INTRINSECA DE INCREMENTO, COLOMBIA, 1950

Grupos de edad x, x+4 (1)	$\psi(x+2.5) {}_5L_x$ (2)	$e^{-r(x+2.5)}$			
		r = 0.020 (3)	r = 0.025 (4)	r = 0.030 (5)	r = 0.035 (6)
15 - 19	421.53	0.70469	0.64565	0.59156	0.54199
20 - 24	1 200.42	0.63763	0.56977	0.50916	0.45498
25 - 29	1 118.77	0.57695	0.50823	0.43824	0.38194
30 - 34	858.18	0.52205	0.44375	0.37719	0.32061
35 - 39	612.23	0.47237	0.39160	0.32465	0.26915
40 - 44	225.25	0.42742	0.34559	0.27943	0.22594
45 - 49	49.01	0.38674	0.30498	0.24051	0.18966

	$1\ 000\ e^{-r(x+2.5)} \psi(x+2.5) {}_5L_x$			
	(7)	(8)	(9)	(10)
15 - 19	296.98	272.16	249.36	228.47
20 - 24	765.42	683.96	611.21	546.17
25 - 29	645.47	562.55	490.29	427.30
30 - 34	448.01	380.82	323.70	275.14
35 - 39	289.20	289.75	198.76	164.78
40 - 44	96.28	77.84	62.94	50.89
45 - 49	18.95	14.95	11.79	9.30
Total	2 560.31	2 232.03	1 948.05	1 702.05
Total x 0.4878	1 248.92	1 088.78	950.25	830.26

e) Cálculo de la tasa intrínseca de natalidad

Basándonos en los mismos datos, obtenemos para la tasa intrínseca de natalidad:

1a. aproximación

$$b = \frac{R}{e_o} = \frac{2.188}{46} = 0.04757$$

2a. aproximación

$$b = \frac{R}{e_o} e^{\rho(k_1 - k_1'')} = 0.04757 e^{0.1281} = 0.04757 \cdot 1.1366667 = 0.05407$$

3a. aproximación

$$b = \frac{R}{e_o} e^{\rho(k_1 - k_1'')} - \frac{\rho^2}{2} (k_2 - k_2'') = 0.05407 \cdot 0.857272 = 0.04635$$

4a. aproximación

$$b = e^{\rho(k_1 - k_1'')} - \frac{\rho^2}{2} (k_2 - k_2'') - \frac{\rho^3}{6} (k_3 - k_3'') = 0.04635 \cdot 1.012072 = 0.04691$$

Como las aproximaciones sucesivas son alternadas, la segunda nos aleja siempre bastante del resultado final. Cuando la tasa de incremento no es muy elevada (inferior a 2 por ciento), la primera aproximación es muy suficiente.

f) Cálculo de la tasa neta de reproducción mediante el índice de Thompson

Hemos visto que puede obtenerse una estimación de la tasa neta de reproducción con la fórmula

$$R = \frac{q_1}{q_2}$$

Ya hemos obtenido la tasa de natalidad al suponer que la población de Colombia puede asimilarse a una malthusiana con la fórmula

$$b = \frac{1}{e_o} \frac{q_1}{q_2}$$

Tasas de fecundidad, por mil

Edad	Punto de partida (Tasas de Colombia)	Durante la proyección (Tasas de Francia)
15 - 19	114.7	20.9
20 - 24	337.8	154.1
25 - 29	327.8	173.9
30 - 34	262.6	107.9
35 - 39	196.2	61.1
40 - 44	75.9	17.0
45 - 49	17.5	1.7

Cuadro 11

EVOLUCION DEL EFECTIVO DE MUJERES, DEL NUMERO DE NACIMIENTOS FEMENINOS
Y DE LA TASA DE NATALIDAD DURANTE LA PROYECCION

Tiempo	Efectivo de mujeres	Número de nacimientos femeninos	Tasa global de natalidad	Tiempo	Efectivo de mujeres	Número de nacimientos femeninos	Tasa global de natalidad
0	100 000	1 913	19.13	80	113 036	2 155	19.06
5	102 699	2 195	21.37	85	110 791	2 083	18.80
10	106 717	2 518	23.60	90	108 563	2 019	18.60
15	111 578	2 888	25.88	95	106 241	1 976	18.60
20	117 187	3 207	27.37	100	103 879	1 949	18.76
25	122 158	2 908	23.81	105	101 604	1 916	18.85
30	125 063	2 501	20.00	110	99 458	1 874	18.84
35	126 326	2 370	18.76	115	97 393	1 827	18.76
40	126 869	2 421	19.08	120	95 352	1 783	18.70
45	127 144	2 545	20.02	125	93 309	1 746	18.71
50	127 006	2 537	19.98	130	91 290	1 713	18.76
55	125 980	2 404	19.08	135	89 331	1 678	18.78
60	123 927	2 268	18.30	140	87 436	1 642	18.78
65	121 173	2 203	18.18	145	85 591	1 605	18.77
70	118 229	2 203	18.63	150	83 775	1 570	18.74
75	115 477	2 199	19.04				

Cuadro 14

COMPARACION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD EN EL TIEMPO $t = 80$ Y EN EL TIEMPO $t = 140$ DE LA PROYECCION CON EL ESTADO LIMITE ESTABLE

Grupos de edad	Estructura límite estable	Estructura en el tiempo $t = 80$	Diferencias con la estructura estable	Estructura en el tiempo $t = 140$	Diferencias con la estructura estable
0 - 4	7 910	8 031	- 121	7 917	- 7
5 - 9	7 465	7 500	- 35	7 469	- 4
10 - 14	7 454	7 336	+ 118	7 445	+ 9
15 - 19	7 435	7 261	+ 167	7 417	+ 18
20 - 24	7 345	7 343	+ 2	7 335	+ 10
25 - 29	7 208	7 458	- 250	7 222	- 14
30 - 34	7 051	7 344	- 293	7 081	- 30
35 - 39	6 879	6 853	+ 26	6 896	- 17
40 - 44	6 685	6 289	+ 396	6 661	+ 24
45 - 49	6 444	6 032	+ 412	6 397	+ 47
50 - 54	6 124	6 231	- 107	6 110	+ 14
55 - 59	5 691	6 407	- 716	5 741	- 50
60 - 64	5 093	5 593	- 500	5 166	- 73
65 - 69	4 280	4 082	+ 198	4 296	- 16
70 - 74	3 253	2 647	+ 606	3 198	+ 55
75 - 79	2 111	1 466	+ 645	2 062	+ 49
80 - 84	1 086	1 546	- 460	1 085	+ 1
85 - 89	393	478	- 85	406	- 13
90 - 94	83	87	- 4	87	- 4
95 - 99	10	9	+ 1	9	+ 1
Suma Absoluta			5 142		456

En cuanto a la estructura por edad, se modifica paulatinamente en el sentido de un envejecimiento constante debido al descenso de la fecundidad, como puede apreciarse en el cuadro 12, donde figuran las proporciones por grandes grupos de edad a intervalos de 20 años de la proyección y en el gráfico 7, donde figura la evolución de la estructura por grupos quinquenales. Vemos, aquí también, que después de unos 80 o 100 años las modificaciones en las estructuras son muy poco marcadas. Hemos tratado de precisar más el momento en que la estructura proyectada y la estructura límite final se confunden enteramente. Para esto se aplicó el test de Kolmogorov-Smirnov, que suele usarse para estimar el grado de concordancia entre una distribución de valores observados con alguna distribución teórica. El test consiste en comparar las distribuciones de frecuencias acumuladas, determinar el punto en que la diferencia entre las dos distribuciones es mayor y, finalmente, calcular la probabilidad de tal divergencia.

En el presente estudio se calculó la frecuencia acumulada por grupos quinquenales de edad de la estructura límite estable y de las estructuras de la población proyectada entre el tiempo $t = 80$ y el tiempo $t = 150$. Se buscaron los grupos de edad para los cuales las desviaciones son máximas y se calcularon las probabilidades de observar estas desviaciones. Los resultados aparecen en el cuadro 13.

Vemos que las diferencias máximas se observan en los grupos de edad comprendidos entre 55-59 y 70-74 años. Esas diferencias van disminuyendo constantemente a lo largo de la proyección entre $t = 80$ y $t = 145$. Las probabilidades de que tales diferencias se deban al azar van disminuyendo, siendo inferiores a 0.01 a partir del tiempo $t = 120$.

Entonces la estructura se confunde con la estructura límite estable después de 120 a 140 años de la proyección. La suma de las diferencias absolutas entre las proporciones de los grupos quinquenales de edad es de 5.142 por ciento en $t = 80$ y disminuye a 0.456 por ciento en $t = 140$, como puede apreciarse en el cuadro 14.

Hemos visto, sin embargo, que desde el tiempo $t = 80$ las tasas de natalidad, de mortalidad y de incremento son prácticamente constantes y se confunden con las tasas intrínsecas, a pesar de que en ese momento la suma de las diferencias absolutas con la estructura límite estable, en los grupos quinquenales, pasa de 5 por ciento.

Capítulo VIII

COMPARACION DE POBLACIONES QUE DIFIEREN EN FECUNDIDAD Y EN MORTALIDAD

En este capítulo consideraremos poblaciones estables que difieren en algunos aspectos (fecundidad, mortalidad, o fecundidad y mortalidad), con el propósito de utilizar eventualmente las relaciones encontradas en la construcción de las poblaciones numéricas modelo y ver si también nos pueden servir en algunos problemas de estimación.^{1/}

1. Comparación de dos poblaciones estables que difieren solamente en fecundidad

Supongamos, en primer término, que dos poblaciones estables que corresponden al modelo 11 anteriormente estudiado y que llamamos I y II, tienen las mismas probabilidades de supervivencia a cada edad $p(x)$, pero diferentes tasas específicas de fecundidad $\varphi(x)$.

Si se observan series de tasas de fecundidad por edades $\varphi(x)$ relativas a diferentes países en diferentes épocas, se llega a la conclusión que en general dos poblaciones de las cuales el comportamiento de las parejas es muy distinto en cuanto a la descendencia, tienen valores de $\varphi(x)$ que a partir de los 20-24 años son tanto más marcados cuanto más elevadas son las edades de las madres que se consideren. Esta observación, de carácter muy general y por supuesto muy aproximada, permite formular de la manera siguiente las diferencias en fecundidad que pueden existir entre las dos poblaciones llamadas I y II:

$${}_I\varphi(x) = {}_{II}\varphi(x) e^{ux} \quad (\text{VIII. 1})$$

donde u es un parámetro.

^{1/} Muchas de las relaciones que se exponen en esta parte han sido descritas en el artículo de A.J. Coale intitulado "The effects of changes on mortality and fertility on age composition", The Milbank Memorial Fund Quarterly, enero, 1956, págs. 79-114.

c) Existe una relación sencilla entre las tasas brutas de reproducción y las tasas intrínsecas de incremento de las dos poblaciones que comparamos.

En efecto, las tasas brutas de reproducción $I R'$ y $II R'$ se escriben:

$$I R' = \int_0^{\infty} I \psi(x) dx = \int_0^{\infty} e^{\Delta P x} II \psi(x) dx$$

$$II R' = \int_0^{\infty} II \psi(x) dx$$

Ahora bien, llamamos $II \psi_i''''$ el momento de orden i de la función $\frac{II \psi(x)}{II R'}$; al desarrollar $e^{\Delta P x}$ en serie de Taylor encontramos:

$$I R' = II R' \left[1 + \sum_1 \frac{(\Delta P)^i}{i!} II \psi_i'''' \right] \quad (\text{VIII. 3})$$

En la práctica, puede elegirse la población de referencia II de tal manera que $\Delta P = u$ sea pequeño y, en consecuencia, podemos conformarnos con la aproximación

$$I R' = II R' \left[1 + \Delta P II \psi_i'''' \right] \quad (\text{VIII. 4})$$

Esta relación permite calcular rápidamente y con pocos datos la tasa bruta de reproducción de una población para la cual se conoce la tasa intrínseca de incremento, o inversamente, calcular la tasa intrínseca de incremento a partir de la tasa bruta de reproducción. Basta tomar, para la población de referencia, por ejemplo la II, una población estable de igual mortalidad y para la cual conocemos la distribución de las edades de las madres al nacimiento de sus hijos. Esta población podría ser imaginaria, calculada en forma enteramente teórica, como las que presentamos más adelante en las aplicaciones numéricas.

Notamos que en las fórmulas (VIII. 3) y (VIII. 4) puede reemplazarse la tasa bruta de reproducción R' por la neta R y $II \psi_i''''$ por $I \psi_i''''$, ya que las dos poblaciones que comparamos tienen igual mortalidad.

d) Relación entre la tasa de natalidad y la proporción de niños.

Sumamos de la edad 0 a la edad x_j las dos partes de la ecuación (VIII. 2):

Si en la serie que figura en la segunda parte no seguimos más allá del término que contiene Δ^n , vemos la posibilidad de calcular la tasa de natalidad ${}_I b$ a partir del solo conocimiento de la tasa de incremento ${}_I r$. Basta para esto tomar para la población de referencia II una población modelo construida a partir de componentes que no parezcan alejarse demasiado de los de la población I. Veremos un ejemplo de tal cálculo en las aplicaciones numéricas al final de este capítulo.

2. Comparación de dos poblaciones malthusianas o estables que difieren solamente en mortalidad

Esta comparación nos servirá para definir en el capítulo siguiente las poblaciones cuasi-estables.

Es difícil describir en una fórmula única las diferencias en mortalidad que pueden observarse entre dos poblaciones, para todas las edades.

Supongamos en primer término que dos poblaciones estables, que llamaremos I y II, tienen iguales tasas de natalidad o de fecundidad por edades $\psi(x)$, pero diferentes tasas de mortalidad por edades.

Puede, por ejemplo, suponerse que el logaritmo de la relación entre las probabilidades de supervivencia a cada edad, de las dos poblaciones, es una función lineal de la edad:

$$\log \frac{{}_I p(x)}{{}_{II} p(x)} = -vx \quad (\text{VIII. 7})$$

donde v es un parámetro.

Esta hipótesis puede, en general, aceptarse entre 10 y 60 años cuando los niveles de mortalidad de las poblaciones I y II no difieren mucho, como puede fácilmente comprobarse con las tablas modelo de mortalidad. A título ilustrativo hemos indicado en el gráfico 10, en coordenadas semilogarítmicas, las relaciones

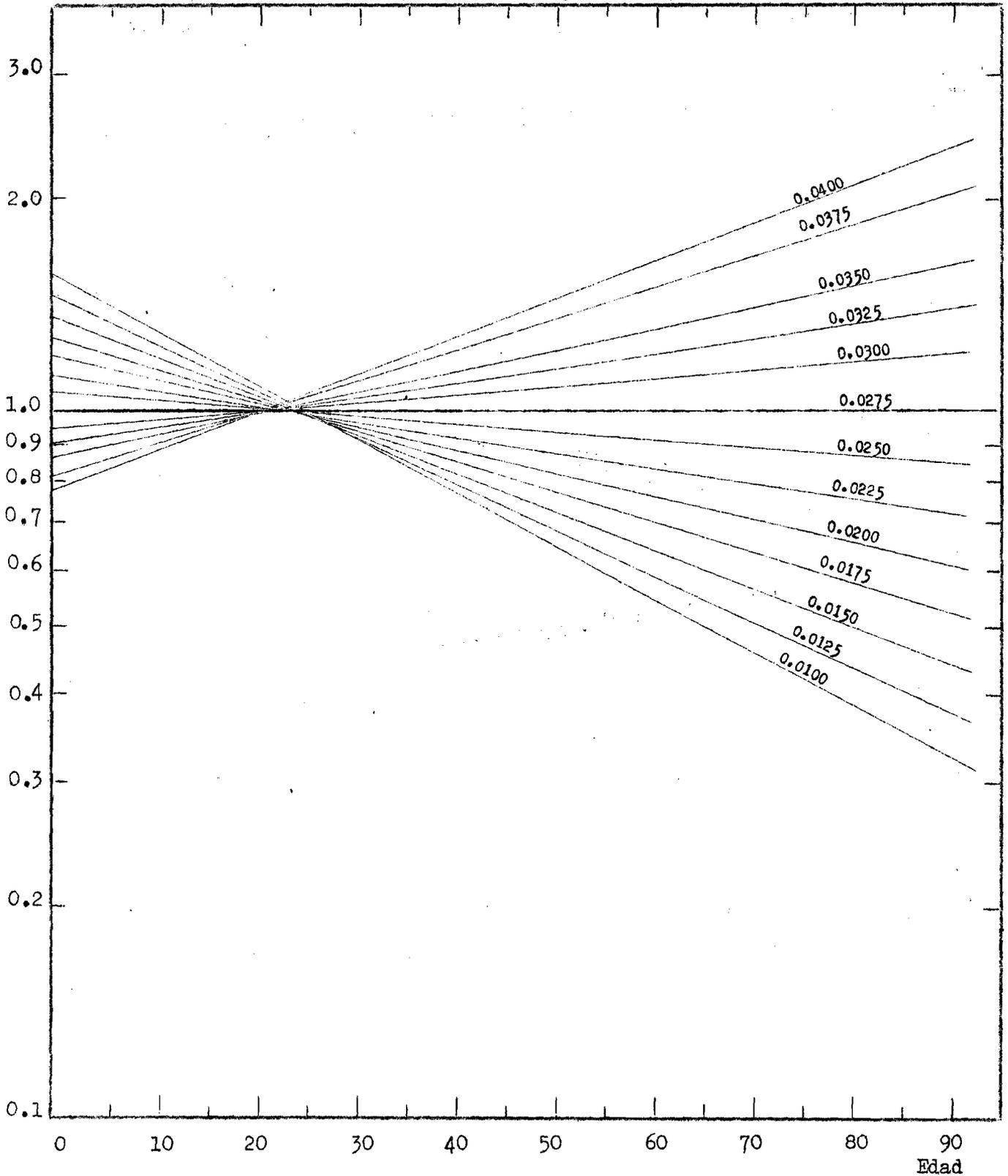
$$\log \frac{{}_I p(x)}{{}_{II} p(x)}$$

tomando para la población I la mortalidad modelo $e_0^0 = 40$ años y para la población II, $e_0^0 = 36$ años y $e_0^0 = 44$ años (sexo femenino). Vemos que entre los 10 y los 60 años las curvas se acercan mucho a líneas rectas.

Gráfico 9

RELACIONES ENTRE LAS ESTRUCTURAS POR EDAD DE LA POBLACION ESTABLE, SEXO MASCULINO, CORRESPONDIENTE A $e_0^o = 46$ Y $r = 0.0275$ Y DE UNA SERIE DE POBLACIONES ESTABLES DE IGUAL MORTALIDAD Y DIFERENTES TASAS DE INCREMENTO INSCRITAS EN LAS RECTAS

(Escala semilogarítmica)



Las curvas de las tasas instantáneas de mortalidad son paralelas.

Se demuestra que, en tal hipótesis:

1°. Las tasas de incremento difieren en la misma medida que las tasas instantáneas de mortalidad:

$$\Delta\rho = \rho_I - \rho_{II} = \mu_{II}(x) - \mu_I(x) = -v$$

Efectivamente, la ecuación (16) se escribe, para las dos poblaciones:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho_I x} \varphi(x) \rho_I^p(x) dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho_{II} x} \varphi(x) \rho_{II}^p(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(\rho_{II}^p - v)x} \varphi(x) \rho_I^p(x) dx = 1$$

y, restando estas dos expresiones:

$$\int_0^{\infty} \left[e^{-\rho_I x} - e^{-(\rho_{II}^p - v)x} \right] \varphi(x) \rho_I^p(x) dx = 0$$

Como $p(x)$ y $\varphi(x)$ son siempre positivas, tenemos necesariamente:

$$\Delta\rho - \rho_I - \rho_{II}^p = -v$$

2°. Las estructuras por edad de las dos poblaciones son idénticas:

$$I^c(x) = II^c(x)$$

Efectivamente, las estructuras por edad se escriben:

$$I^c(x) = \frac{e^{-\rho_I x} \rho_I^p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-\rho_I x} \rho_I^p(x) dx}$$

$$II^c(x) = \frac{e^{-\rho_{II}^p x} \rho_{II}^p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-\rho_{II}^p x} \rho_{II}^p(x) dx} = \frac{e^{-(\rho_I^p + v)x} e^{vx} \rho_I^p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-(\rho_I^p + v)x} e^{vx} \rho_I^p(x) dx} = I^c(x)$$

Las diferencias en mortalidad no tienen consecuencias sobre las estructuras por edad.

Cuadro 17

COMPARACION DE LAS ESTRUCTURAS POR EDAD DE DOS POBLACIONES
ESTABLES DE IGUAL FECUNDIDAD Y DIFERENTE MORTALIDAD

Grupos de edad	Estructura de la población I ^a /	Estructura de la población II ^b /	Relación entre las estructuras
0 - 4	15 834	16 423	0.964
5 - 9	13 076	13 796	0.948
10 - 14	11 547	11 890	0.971
15 - 19	10 201	10 243	0.996
20 - 24	8 911	8 770	1.016
25 - 29	7 725	7 480	1.033
30 - 34	6 677	6 375	1.047
35 - 39	5 743	5 422	1.059
40 - 44	4 896	4 588	1.067
45 - 49	4 111	3 847	1.069
50 - 54	3 381	3 176	1.065
55 - 59	2 693	2 561	1.052
60 - 64	2 047	1 993	1.027
65 y más	3 158	3 436	0.919
Total	100 000	100 000	

a/ Población estable construida con una mortalidad modelo $e_0 = 42$ años y las tasas de fecundidad por edades indicadas en el texto. Tenemos, además, en esta población: $I^b = 0.0414$ y $I^p = 0.02$.

b/ Población estable construida con una mortalidad modelo $e_0 = 56$ años y las tasas de fecundidad por edades indicadas en el texto. Tenemos, además: $II^b = 0.0397$ y $II^p = 0.0275$.

3°. Las tasas de natalidad de las dos poblaciones son iguales:

$$I^b = II^b$$

Efectivamente, al hacer la relación entre las estructuras por edad de las dos poblaciones obtenemos:

$$\frac{I^c(x)}{II^c(x)} = \frac{I^b}{II^b} e^{-(I^p - II^p + v)x}$$

Esto demuestra claramente que una diferencia entre las mortalidades infantiles equivale a una diferencia de signo contrario entre las tasas de fecundidad. Si en un país la mortalidad infantil revela un descenso y si éste es el único cambio que ocurre en esta población, la baja de la mortalidad infantil llega a ser exactamente igual a un aumento de la fecundidad.

Esta observación es de gran importancia práctica ya que en casi todos los países llamados subdesarrollados se observa una baja importante de la mortalidad infantil. Este movimiento actúa, entonces, sobre la estructura por edad y sobre la tasa de incremento en el mismo sentido que un aumento de la natalidad, o compensa, como lo veremos cuando tratemos de las poblaciones en "leve transición", en mayor o menor medida, un posible descenso de la fecundidad. Es muy probable que en Chile, por ejemplo, el descenso de la mortalidad infantil oculte en gran parte el efecto del descenso de la fecundidad sobre la estructura por edad, descenso que parece haber empezado hace unos veinte años. Esto explica por qué, en este país, a pesar del descenso de la fecundidad, la base de la pirámide por edad no se estrechó al pasar del censo de 1940 al de 1952 y al de 1960.

Hemos visto con la fórmula (VIII.8) que podemos ir más allá y establecer una relación cuantitativa entre ambos movimientos: descenso de la mortalidad infantil y aumento en la fecundidad. Supongamos, por ejemplo, que en un país la mortalidad infantil pasa de un 150 por mil a un 100 por mil y que no ocurren otros cambios en la situación demográfica de este país durante largo tiempo. Obtenemos entonces $\alpha = 1.0588$. Aplicando la relación () encontramos que el descenso de la mortalidad infantil es equivalente a un aumento de un 5.9 por ciento de las distintas tasas de fecundidad por edad y luego, de las tasas brutas y netas de reproducción.

También puede ponerse en evidencia una relación entre el descenso de mortalidad y el aumento que correspondería en la tasa de incremento.

Supongamos que las dos poblaciones que comparamos tienen igual intervalo medio entre dos generaciones T . Aplicando la relación () a ambos obtenemos:

$$I^R = e^{I \cdot T}$$

3. Comparación de dos poblaciones que difieren a la vez en fecundidad y en mortalidad

Esta comparación nos servirá para definir las poblaciones "en transición" en el capítulo que sigue.

Si dos poblaciones difieren a la vez en fecundidad y en mortalidad, según las hipótesis previstas para las ecuaciones (VIII. 1) y (VIII. 7) se demuestran las siguientes relaciones, aplicando los mismos razonamientos seguidos en los párrafos anteriores.

- 1) La diferencia entre las tasas de incremento es:

$$\Delta P = u - v$$

- 2) Las tasas netas de reproducción difieren en la forma siguiente:

$$I^R = II^R \left[1 + \sum_i \frac{(\Delta P)^i}{i!} II^{\nu''}_i \right] \quad (\text{VIII. 10})$$

siendo $II^{\nu''}_i$ el momento de orden i de la función $\frac{II^{\varphi(x)} II^p(x)}{II^R}$ en la población II.

En primera aproximación se tiene

$$I^R = II^R \left[1 + \Delta P II^{\nu''}_i \right] \quad (\text{VIII. 11})$$

- 3) Las relaciones entre las estructuras por edad nos llevan a:

$$\frac{I^c(x)}{II^c(x)} = \frac{I^b}{II^b} e^{-ux} \quad (\text{VIII. 12})$$

o sea, las relaciones entre las proporciones de individuos de cada edad son independientes de las diferencias en cuanto a mortalidad y están influidas sólo por las diferencias de fecundidad.

- 4) En primera aproximación, tenemos la relación siguiente entre la tasa de natalidad y la proporción de niños hasta la edad x_j :

$$\frac{\int_0^{x_j} I^c(x) dx}{\int_0^{x_j} II^c(x) dx} = \frac{I^b}{II^b} \quad (\text{VIII. 13})$$

Cuadro 18

CALCULO DE LA TASA DE INCREMENTO Y DE LA TASA DE NATALIDAD DE COLOMBIA,
SEXO FEMENINO, A PARTIR DE LA ESTRUCTURA POR EDAD

Grupos de edad	Estructura de Colombia en 1950	Estructura de una población estable a/	Relación entre las dos estructuras	$1.1939 e^{0.0075x}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0 - 4	17 826	15 347	1.162	1.172
5 - 9	14 377	12 829	1.121	1.129
10 - 14	12 267	11 343	1.080	1.086
15 - 19	10 458	10 020	1.044	1.047
20 - 24	8 829	8 766	1.007	1.008
25 - 29	7 404	7 618	0.972	0.972
30 - 34	6 109	6 601	0.938	0.934
35 - 39	5 160	5 702	0.905	0.899
40 - 44	4 286	4 909	0.873	0.869
45 - 49	3 531	4 190	0.843	0.836
50 - 54	2 868	3 528	0.813	0.806
55 - 59	2 277	2 903	0.784	0.774
60 - 64	1 742	2 299	0.758	0.749
65 - 69	1 251	1 712	0.731	0.720
70 - 74	812	1 152	0.705	0.693
75 - 79	415	662	0.681	0.667
80 - 84	198	303	0.653	0.644
85 - 89	61	96	0.635	0.620
90 - 99	12	20	0.600	0.583
Total	100 000	100 000		

a/ Las características de esta población estable figuran en el texto.

El valor obtenido directamente a partir de las tasas de fecundidad en las aplicaciones del modelo II había sido ${}_I R = 3.25$, o sea, poco distinto.

Podemos calcular la tasa neta de reproducción reemplazando en la fórmula () las tasas brutas por las netas y el momento ${}_{II} v''_1$ de la función

$$\frac{{}_{II} \psi(x)}{{}_{II} R'}$$

por el momento ${}_{II} v'''_1$ de la función

$$\frac{{}_{II} \psi(x) p(x)}{{}_{II} R}$$

Obtenemos ${}_{II} v'''_1 = 27.0756$ y, para la tasa neta de reproducción,

$${}_I R = 2.31 - 0.0025 \times 27.076 = 2.24$$

El valor obtenido directamente a partir de las tasas de fecundidad y de las tasas de supervivencia en las aplicaciones del modelo II es 2.19, también bastante cercano.

Notamos que este cálculo supone que se conoce el nivel de la mortalidad de Colombia, puesto que hemos elegido la población II entre poblaciones estables teóricas que tuvieran igual mortalidad que la de Colombia, o sea, $e_0^0 = 46$ años.

Si no se conociera el nivel de la mortalidad debería utilizarse la fórmula () en lugar de la (). Recordamos que el uso de esta fórmula muy aproximada es válido solamente en la medida en que la población de referencia II no tiene una mortalidad muy diferente de la población I. Para su aplicación se debería tener entonces una idea aproximada del nivel de la mortalidad de la población estudiada.

en la cual adoptaremos para la población I la de Colombia, sexo masculino, en 1951, y para la población II, la de una estable con las características siguientes: $e_0^o = 44$ años, y $II^F = 0.0325$. La proporción de niños de 0 a 4 años en esta población teórica es 0.19833 y la tasa de natalidad, 0.05270.

Supongamos que se conoce la tasa de natalidad de Colombia al nivel $I^b = 0.0463$. La aplicación de la fórmula () nos conduce a:

$$\int_0^4 I^c(x) dx = \frac{0.0470}{0.0527} 0.19833 = 0.1769$$

El censo de Colombia de 1951 arrojó una cifra de 5 579 259 hombres, de los cuales 951 333 tenían de 0 a 4 años. El número esperado de niños de 0 a 4 años es:

$$5\ 579\ 259 \times 0.1769 = 986\ 971$$

La omisión censal se estima entonces en

$$986\ 971 - 951\ 333 = 35\ 638$$

lo que representa un 3.6 por ciento de la cifra esperada.

Notamos que esta omisión se refiere específicamente al grupo de 0 a 4 años. No se comprende en esa cifra la omisión independiente de la edad, o sea, la omisión censal de grupos enteros de población que puede haber ocurrido.