L

Nº 2

José Ibarra

ASIGNACION DE RECURSOS, PROGRAMACION LINEAL Y TEORIA ECONOMICA

CUADERNOS DEL INSTITUTO LATINOAMERICANO
DE PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL

Serie I - Núm. 2 Apuntes de Clase

José Ibarra

ASIGNACION DE RECURSOS PROGRAMACION LINEAL Y TEORIA ECONOMICA

Santiago de Chile

1967

Indice

1. El problema general

La elección entre alternativas para usar los recursos escasos de un país o región, en función de objetivos generales de un plan de desarrollo económico y social, presenta problemas teóricos y prácticos de bastante complejidad. En primer lugar, es necesario tener muy claro el criterio general de preferencia que se decida adoptar; éste puede ser arbitrario, o seguir las normas de una teoría de optimización determinada.

Una vez que se haya adoptado el criterio general, la ordenación de los proyectos según su prioridad resultará de la aplicación de reglas o de fórmulas que incorporan esos criterios a través de ciertos parámetros que relacionan las diversas magnitudes pertinentes. El segundo problema es, por tanto, el cálculo de esos parámetros para que reflejen adecuadamente los criterios generales adoptados.

Para aclarar la naturaleza de estos problemas conviene pensar primeramente en un planteamiento simplificado de la planificación del uso de recursos, en términos totalmente físicos.

El problema puede tomar dos formas distintas, donde lo fundamental es la eficiencia técnica de la solución buscada.

La primera, sería la de tratar de obtener un conjunto de metas físicas dadas, para cuya producción hay diversas alternativas, con las técnicas que usen el mínimo posible de recursos escasos.

El otro problema que se puede presentar al planificador es el de tratar de obtener el máximo posible de producción de un conjunto de metas físicas con una cuantía dada de recursos disponibles. Se entiende en este caso que los bienes y servicios, que constituyen las metas, son demandados en proporciones conocidas, y que hay técnicas alternativas para producirlos.

Cada uno de estos planteamientos expuestos en esa forma simplificada, en que sólo hay envuelto un problema tecnológico, puede tener una solución técnica relativamente sencilla.

La dificultad del problema real de la planificación, desde el punto de vista económico, es que ambos planteamientos no son independientes entre sí, sino que se presentan simultáneamente y hay que darles una solución conjunta.

En efecto, el aporte de recursos (factores de producción) - por parte de sus dueños - al proceso de producción, implica generalmente un sacrificio que estos tratarán de minimizar. El ejemplo más evidente de ello es el aporte del trabajo personal a la producción. Esto lo contempla el primer problema planteado, pero no así el segundo, en que se supone que la cantidad de factores que se aportan al proceso de producción es dada.

Por otra parte, las proporciones en que se demandan los distintos bienes y servicios de uso final, que se suponen conocidas en el segundo problema, dependerán de los ingresos relativos que obtengan los distintos dueños de recursos por sus aportes de los mismos al proceso productivo, y de sus preferencias relativas por el uso de los diferentes bienes y servicios finales.

Estas dificultades, que se presentan en un contexto estático del problema, se agravan cuando se considera que algunos de los recursos escasos necesarios para la producción no están determinados exógenamente al sistema productivo, sino que provienen de la acumulación - en forma de bienes de capital - de una parte de los bienes producidos. La necesidad de acumulación de bienes de capital para incrementar la producción futura reduce las posibilidades presentes de consumo y aumenta las de consumo futuro, por lo que no se puede escapar a la consideración intertemporal simultánea de las metas y de la asignación de recursos en cada instante del tiempo.

Para solucionar el problema es necesario valorar, de alguna manera, los beneficios que cada individuo obtiene por el uso de la parte de la producción a la que tiene acceso y los sacrificios en que incurre por el aporte de los recursos que posee al proceso general de producción.

La valoración de estos elementos será diferente en sistemas económicos basados en distintas filosofías, en que las normas de participación y de conducta de cada individuo en el proceso económico son diferentes.

Las diversas formas específicas que se pueden adoptar para resolver el problema implican, por tanto, la adopción de teorías determinadas del valor, las que conducen a la adopción de ciertos parámetros de valor asociados con cada una de ellas, parámetros que toman generalmente la forma de precios.

La evaluación de proyectos de uso de recursos debería ceñirse a criterios que consideren los objetivos más amplios de un plan de desarrollo económico y social usando los parámetros (o precios) que estén acordes con la teoría del valor adoptada, como elementos de ponderación de las magnitudes físicas.

En este estudio se discutirá principalmente el problema de la obtención o cálculo de sistemas de precios para evaluar proyectos, a través de la técnica de programación lineal, admitiendo que se han adoptado teorías específicas del valor y bajo supuestos simplificadores determinados que se indicarán.

Gran parte de la discusión se basará en la concepción neoclásica de la teoría del valor y de la teoría del bienestar derivada de la misma. Según ésta, la obtención de un óptimo exige condiciones de competencia perfecta en todos los mercados. Sin embargo, la introducción de elementos de decisión extra-mercado, necesarios en la planificación, que se incorporarán al esquema mencionado, permiten tratar situaciones de mercado distintas, que conducen a ciertas posiciones de óptimo que se postulan en un plan.

2. Supuestos básicos y solución de la teoría neoclásica al problema de la asignación de recursos

Según la teoría neoclásica del bienestar, dada una distribución inicial de la propiedad de los recursos escasos, si todos los problemas que requieren una decisión económica se resolviesen por medio de la operación de mercados de competencia perfecta, se llegaría a maximizar en el tiempo, el bienestar individual y colectivo de todos los que intervienen en el proceso económico, en el doble papel de aportadores de recursos escasos al proceso de producción y de usuarios del producto social obtenido.

Para llegar a demostrar estas hipótesis hay que postular la existencia de funciones de bienestar para cada individuo. Dichas funciones permitirán comparar las situaciones relativas de bienestar de los mismos, ante distintas posiciones de consumo y de aporte de los factores que poseen al proceso de producción.1/

La operación de mercados de competencia perfecta - con todas las implicaciones conocidas en cuanto a la estructura y funcionamiento de dichos mercados - conduciría automáticamente a obtener a través del sistema de precios de equilibrio general la maximización, en el tiempo, de las funciones de bienestar. El resultado a que se llega se conoce con el nombre de "óptimo de Pareto". Este se define como aquella estructura de consumo y de aporte de factores en que ningún individuo podría estar mejor 2/ en otra situación cualquiera concebible, sin

1/ Se ha llegado a demostrar que no es necesaria una medición cuantitativa de los diferentes grados de bienestar de cada individuo, sino una medición ordinal de los mismos, para alcanzar las conclusiones buscadas.

2/ La expresión "estar mejor" se emplea en el sentido de "tener un valor más alto de la función de bienestar".

perjudicar la situación de otro individuo.[1]

Dentro de este esquema, la actuación racional de cada unidad económica colocada en una situación perfectamente competitiva llevaría a soluciones de mercado que serían óptimas - en el sentido antes indicado - tanto en lo que se refiere a magnitudes físicas involucradas como a precios unitarios de las mismas.

El problema de la asignación de recursos quedaría resuelto, al nivel micro-económico, por las decisiones individuales de los empresarios competitivos, al elegir las alternativas de inversión que maximicen sus beneficios (que es la conducta racional que se espera de ellos). Los elementos de juicio de los empresarios para calcular los beneficios de las distintas alternativas serían las relaciones entre insumos y productos que las caracterizan y los precios de competencia del mercado, que para ellos son datos. Como, en general, las diversas alternativas implican decisiones cuyos resultados dependen no sólo de lo que está sucediendo en el presente sino también de lo que sucederá en el futuro, durante el período de duración de la inversión fija necesaria los empresarios deben tener además un juicio formado sobre la evolución que pueden experimentar los datos comentados en ese período.

Una vez elegidas las alternativas de inversión queda definido el problema de la asignación de recursos al poner en marcha esos proyectos, para lo cual los empresarios tienen que contratar el uso del resto de los recursos necesarios en las técnicas de producción elegidas.

1/ Sin embargo, esto no resuelve todos los problemas éticos de valor, porque hay un "óptimo de Pareto" diferente para cada distribución inicial de los recursos escasos entre los individuos y siempre habría que tomar una decisión sobre cuál es una distribución inicial "justa" de los mismos para llegar a un óptimo absoluto.

El paso de una situación de equilibrio a otra en que el nivel de producción es mayor, puede ocurrir de varias maneras. Se podría, por ejemplo, suponer una situación de equilibrio con pleno uso de los recursos existentes, en que éstos no aumenten pero en que se inventen nuevas tecnologías que podrían producir las mismas cosas que se estaban produciendo, con un empleo menor de recursos.

Otra alternativa sería que la disponibilidad de recursos aumente paulatinamente (la fuerza de trabajo crece y se generan nuevos ahorros, por ejemplo), lo que tendería a bajar los precios relativos de dichos recursos, con posibilidades de beneficios para los productores.

Una tercera alternativa sería la de un cambio autónomo en la demanda global provocado por fuerzas exógenas al sistema competitivo (por ejemplo: cambio en los gustos, aumento de la demanda externa, o gastos autónomos del gobierno, etc.) que produciría cambios en la demanda de los diferentes productos según las preferencias relativas de los consumidores. Estos cambios de demanda provocarían cambios de precios de los bienes finales, abriendo oportunidades de producción con beneficios extraordinarios en las ramas en que hubiese aumentos de precios.

Las dos primeras alternativas, que iniciarían un proceso de aumento de la producción sobre los niveles de equilibrio iniciales, serían originadas por el lado de la oferta y la tercera por el lado de la demanda. Estas situaciones pueden, sin embargo, coexistir, o bien alternarse pero de cualquier modo, una vez iniciada la perturbación de la situación de equilibrio inicial, el mecanismo de la competencia tendería a ajustar el sistema a una nueva posición de equilibrio, a un nivel más alto de producción.

Desde el punto de vista del uso de los recursos, en cualquier caso, éstos se irían asignando a medida que los empresarios tomasen sus decisiones de inversión, según la regla de maximización de los beneficios esperados en las diversas alternativas.

3. Los problemas prácticos de la evaluación de proyectos en la programación económica

El programador que trate de aplicar los conceptos teóricos anteriormente descritos a las situaciones reales de países de economías capitalistas con producción enteramente privada o mixta, encontrará seguramente un conjunto de dificultades teóricas y prácticas de importancia. Aquí se abordarán algunos de estos problemas para situarlos dentro del marco de un esquema de planificación, que es lo que interesa.

En primer lugar, la existencia de óptimos diferentes, a que conduce la teoría neo-clásica, según sean las distintas distribuciones iniciales de la riqueza existente requiere, desde el punto de vista de la sociedad en su conjunto, que la situación de partida se caracterice por cierto grado mínimo de equidad, difícil de definir con precisión, pero fácil de calificar como injusto cuando las diferencias son demasiado grandes (caso frecuente en países subdesarrollados). En este último caso, aun si se consiguiese reproducir las condiciones de mercado que exige la competencia perfecta, el óptimo a que se llegaría en la distribución del ingreso estaría viciado con el mismo calificativo de injusticia de la situación inicial y las posibilidades de acumulación de riqueza, derivadas del ahorro de los ingresos corrientes, probablemente acentuarían dicha situación.

En segundo lugar, frecuentemente la distribución muy concentrada de la riqueza se encuentra asociada a una estructura social y política que también concentra el poder de negociación y decisión económica. Esto atenta contra la posibilidad de funcionamiento efectivo de las condiciones de competencia perfecta, las que se basan precisamente en el hecho de que ninguna unidad económica tiene poder suficiente para influir en las soluciones de mercado y obtener beneficios más que proporcionales al valor intrínseco de su aporte a dichas soluciones.

En este caso puede ser imposible establecer en la práctica un sistema de mercado que cumpla con todas las condiciones que exige la competencia perfecta, y lo que más puede aspirar el programador es calcular mediante modelos simulados de competencia perfecta, lo que sucedería "si" rigiesen dichas condiciones, para tratar de obtener resultados semejantes mediante la política económica.

El efecto del alejamiento de las condiciones de funcionamiento de los mercados reales con respecto a las teóricas afecta generalmente, en menor o mayor grado, a todas las condiciones de la competencia perfecta, conduciendo a soluciones de mercado que dejan de ser óptimas y se traducen, entre otras cosas, en mayor concentración de la riqueza y del ingreso, desocupación de recursos escasos y obtención de un producto menor que el máximo posible.

Citaremos algunos de los efectos sobre las condiciones de mercado de competencia perfecta, que son consecuencia de las causas anotadas anteriormente.

Las diferencias pronunciadas en la posición social y económica de los individuos, por ejemplo, conduce a condiciones desiguales en cuanto al libre acceso a las actividades de producción, al conocimiento de las condiciones de diferentes mercados, a la movilidad de factores de producción, etc.

Por otra parte, hay otro conjunto de factores que - especialmente en países subdesarrollados - hacen que sea difícil establecer de hecho la competencia.

En primer lugar, algunas actividades vitales para el desarrollo económico constituyen monopolios naturales (servicio de transporte ferroviario, servicios eléctricos y de agua potable, gran parte de los de comunicaciones, etc.).

En segundo lugar, los esfuerzos de industrialización en base a tecnologías importadas creadas para servir a grandes mercados con un uso intensivo de capital, imponen condiciones monopólicas en muchos rubros, en los que el tamaño del mercado es comparable al tamaño mínimo de las plantas que se pueden importar.

En tercer lugar, la necesidad de proveer un mínimo de servicios esenciales, tales como los de educación, salubridad, previsión, etc., a la mayoría menos favorecida de la población y de controlar y regular el proceso económico - para disminuir las injusticias a que conducen las condiciones comentadas anteriormente - hacen que la acción del Estado dentro de la vida económica tenga un peso considerable. Este hecho aparta nuevamente las condiciones reales de los supuestos teóricos neoclásicos, en que tal acción debería ser muy pequeña para no interferir con las leyes naturales del juego de mercados perfectos.

Las implicaciones de todo esto para el programador que evalúa proyectos de asignación de recursos son: 1) No puede aceptar los precios de mercado como guía eficaz para la asignación óptima; 2) No puede simular totalmente, por medio de modelos, las condiciones de competencia perfecta, porque éstas no son alcanzables en la práctica y 3) Debe considerar en sus modelos de optimización la existencia de factores económico-institucionales dados y de decisión gubernativa, que apartan el problema real de las condiciones de competencia perfecta en todos los mercados.

4. Los tipos de soluciones de la programación al problema de la asignación de recursos

Las soluciones teóricas a los problemas discutidos en el punto anterior representan un compromiso entre la aplicación del esquema neo-clásico y la necesidad de alterar algunos de los supuestos de dicho esquema. Esto es necesario para dar cabida a la acción correctora del Estado en muchos aspectos en que las condiciones actuales y previsibles del funcionamiento de los mercados impiden que se considere adecuadamente las preferencias e intereses de la mayoría de la población.

Cuando se considera la intervención directa o indirecta del Estado se supone que éste posee, además de instrumentos de teoría económica, elementos de juicio o normas de preferencia que le permite tomar decisiones racionales que conduzcan a resultados "mejores" (en términos de bienestar), que los que conseguiría la operación de los mercados existentes.

Otro aspecto de gran importancia, que incide en la naturaleza de las soluciones que se pueden obtener por modelos matemáticos que simulan las condiciones de los problemas prácticos es el de la complejidad analítica y matemática que resulta de tomar en cuenta todos los factores pertinentes, lo que obliga a simplificar la realidad, concentrando la atención de cada modelo en algunos aspectos que se considera más relevantes.

Por estos motivos, los modelos usuales que se plantean para obtener criterios de selección entre alternativas de uso de recursos representan un compromiso entre: a) el deseo de simular las condiciones teóricas de la competencia perfecta en todos los mercados; b) la necesidad de incluir metas exógenas en ese esquema; y c) la imposibilidad práctica de considerar adecuadamente todos los aspectos del problema.

El grado de compromiso entre estos requisitos varía en los diversos planteamientos o modelos, de acuerdo con los objetivos que se persigan, la disponibilidad de datos para plantear adecuadamente las condiciones de funcionamiento de los diversos mercados, el refinamiento de los instrumentos de planificación disponibles, etc.

Es así como la mayor parte de los modelos destinados a obtener criterios para la evaluación de proyectos de uso de recursos, concentran la atención en las funciones de producción, simulando condiciones de competencia perfecta en la demanda de los recursos y la oferta de bienes y servicios y considerando como datos todas las variables que deberían ser proporcionadas por la operación del resto de los mercados. Este último supuesto implica que se considera que hay equilibrio en todos los mercados no incluidos explícitamente en el modelo y que se conocen los resultados netos de esos equilibrios parciales, representados por las constantes o datos mencionados en el párrafo anterior. El cálculo o determinación de estos datos del modelo debe hacerse separadamente del mismo, por métodos que tomen en cuenta todo el resto de las variables del plan general.

Es allí donde entra el cálculo de las demandas totales previstas de cada tipo de bienes y servicios (entre las que se incluyen las metas fijadas exógenamente por la oficina de planificación) y la determinación de la capacidad existente para su producción (oferta). La diferencia entre estos dos cálculos indica el monto de las demandas netas que hay que abastecer con los proyectos a evaluar.

Asimismo, sustrayendo de la existencia total de recursos prevista la demanda de los mismos que requiere la operación de la capacidad instalada, se obtiene la oferta neta de recursos con que se cuenta para la operación de los nuevos proyectos. De este modo, los elementos que hacen que la totalidad del problema incluya soluciones elegidas por la oficina de planificación están incluidos en las metas dadas del modelo que nos preocupa, en el que se tratará de simular la solución que daría la competencia perfecta.

En esas condiciones simplificadas, el problema se reduce, en lo que se refiere a la solución de las variables físicas, a encontrar una combinación de proyectos cuyos niveles de producción satisfagan todas las condiciones del modelo,1/ al mismo tiempo que minimicen el uso del recurso que se considere más escaso.

La conducta individual del empresario de minimizar costos para maximizar beneficios se traduce, en competencia perfecta, en una solución de mercado óptima. Esta solución se alcanza a través de un sistema de precios relativos (dados para cada productor competitivo) que deja con sobre-beneficios nulos a todos los productores que adoptan las técnicas óptimas. Cualquier empresario que intentara producir con otras técnicas existentes obtendría pérdidas y se vería obligado a abandonar el mercado en un cierto plazo.

En el capítulo siguiente se discuten las condiciones que deberá reunir el sistema de precios de competencia para solucionar el problema.

1/ Condiciones que se refieren a igualar la oferta de productos con demandas dadas y la demanda de ciertos recursos con su oferta conocida de antemano.

5. Condiciones que debe cumplir un sistema de precios sociales para la evaluación de proyectos

De las consideraciones anteriores se desprende que el sistema de precios que se busca debe ser el mismo que resultaría si rigiesen condiciones de competencia perfecta en ciertos mercados elegidos a priori y cuyo funcionamiento se detalla en el modelo que servirá de patrón de evaluación.

Esto lleva implícito que el resto de los mercados no tratados detalladamente en dicho modelo se consideran también en equilibrio. Dichos equilibrios deben juzgarse separadamente, en función de las metas generales de un plan de desarrollo; de la capacidad de producción existente; de las preferencias relativas de las unidades económicas manifestada libremente en esos mercados, o modificados por las metas introducidas por el organismo de planificación; y, en general, por la consideración de todos los factores pertinentes a las situaciones efectivas previsibles que influirán en esos equilibrios.

La relación entre los dos modelos descritos - que explícita o implícitamente se desarrollan en forma simultánea - constituyen las metas dadas para el modelo de asignación de recursos, que se obtienen como residuo neto de ofertas y demandas del modelo general.

El sistema de precios de equilibrio que se obtiene de un modelo de asignación de recursos como el descrito, estando basado en la reproducción de las condiciones de competencia perfecta en ciertos mercados, se diferencia sin embargo del que se obtendría de una situación completamente generalizada de competencia perfecta, en sentido de que las metas que hay que tomar en cuenta para su obtención dependen parcialmente de decisiones extra-mercado, introducidas por el Estado con criterios sociales.

El sistema de precios de equilibrio generalizado suele llamarse sistema de precios de oportunidad, debido a que estando éstos determinados en función de las preferencias relativas por los distintos bienes y la escasez relativa de los recursos necesarios para producirlos en cada oportunidad específica, la reasignación de recursos mide la pérdida de producción que se experimenta al alterar el equilibrio existente.

La introducción de elementos de decisión distintos de los que proporcionarían los mercados existentes para tomar en cuenta objetivos sociales introducidos por el Estado pero conservando parcialmente el tipo de solución de competencia perfecta, justifica denominar al sistema de precios que se obtiene como "precios de oportunidad social".

Las propiedades generales que debe cumplir un sistema de precios de oportunidad social serían las siguientes:

a) Debe conducir a los mismos resultados que se obtendrían de un sistema de precios de equilibrio de competencia perfecta en todos los mercados, respetando las metas sociales introducidas por el Estado como expresión de preferencias colectivas;

b) Debe conducir a una maximización del producto social en el tiempo, con uso mínimo de recursos escasos.

Estas condiciones generales tienen varias implicaciones o corolarios. Los más importantes son:

i) Las condiciones de equilibrio expresadas en el primer requisito están destinadas a garantizar que se producirán los tipos de bienes y servicios deseados por la comunidad en las cantidades necesarias de acuerdo con las disponibilidades previsibles de recursos.

ii) El segundo requisito es una forma de expresar el problema más general de maximizar el bienestar que es posible alcanzar. Se entiende que el bienestar está correlacionado positivamente con la mayor disponibilidad de bienes y servicios y negativamente con el aporte de recursos a la producción.

iii) Los aspectos de la distribución óptima del producto y de la contribución necesaria de factores de los individuos estarían determinados por la reproducción de la solución de competencia perfecta, corregida por la introducción de metas sociales por el Estado, lo que en última instancia significa la aceptación de elementos redistributivos necesarios para mejorar las desigualdades extremas de la situación inicial.

iv) El segundo requisito representa una condición de eficiencia técnica indispensable, en la cual es importante destacar que se trata de una condición intertemporal que no puede ser ignorada al asignar recursos en períodos determinados.

Recién después de aclarados estos aspectos generales, se puede dar un significado concreto a los diversos supuestos que se pueden plantear para obtener criterios para la asignación de recursos.1/

En algunos de estos modelos por ejemplo, el crecimiento del producto está determinado fuera del modelo de asignación de recursos - específicamente en el modelo de programación general - y por tanto el primero sólo recoge la incógnita de cuál es el uso mínimo de recursos con que se pueden obtener las metas de producto prefijadas. En otros, el modelo general fija el monto disponible de todos los recursos, inclusive del capital, y el modelo de asignación recoge solamente la pregunta de cuál es el producto máximo que se puede obtener con esos recursos dados.2/

En ambos casos, se supone que las técnicas generales de planificación son lo suficientemente perfectas como para que los elementos residuales fijos que entregan al modelo de asignación de recursos representen una solución complementaria de óptimo. Muchas veces será necesario, sin embargo, recurrir a ajustes entre ambos modelos por el método de aproximaciones sucesivas.

1/ Desafortunadamente, estos supuestos casi nunca se indican explícitamente en la formulación de estos modelos.

2/ En este caso es necesario conocer la composición relativa de las demandas que pueden ser abastecidas por los nuevos proyectos.

Es conveniente aclarar que el tipo de soluciones generales que aquí se discute no tiene necesariamente relación con criterios más restringidos para la asignación de recursos, en que la atención del programador se concentra en la corrección de los precios de ciertos mercados parciales que obviamente están en desequilibrio. Tal es el caso del uso de "precios de cálculo", distintos de los de mercado, que tienden a lograr esos equilibrios parciales sin una noción de equilibrio general. Ejemplos de estos criterios son la asignación de precios de cálculo inferiores a los de mercados para la mano de obra, cuando hay desocupación; y superiores para divisas cuando hay problemas de déficit en la balanza de pagos.

Sería conveniente designar a aquellos precios con nombres distintos, que indiquen el carácter restringido de sus fundamentos teóricos, con la expresión "precios de cálculo de equilibrio parcial".

6. Métodos generales de cálculo de sistemas de precios para la evaluación de proyectos

La complejidad y la naturaleza misma de los problemas de evaluar un conjunto de proyectos a un sistema de precios distinto de los de mercado que corrija las distorsiones debidas al funcionamiento imperfecto de los mercados - hace muchas veces necesario recurrir a sistemas de aproximaciones sucesivas, en que se va pasando de soluciones parciales o aproximadas a soluciones mejores hasta llegar al óptimo buscado.

Las soluciones parciales de cada etapa pueden ser obtenidas por métodos formales, o por simple tanteo de prueba y error.

Si lo que se busca es un "sistema de precios de oportunidad social" que cumpla con las condiciones a) y b) expuestas en el número 5 de este estudio, un método adecuado de aproximaciones sucesivas sería el de buscar combinaciones de precios de equilibrio que cumplan con la condición a), o sea que "conduzcan a un equilibrio en todos los mercados especificados" y luego elegir, entre ellas, aquélla que cumpla con la segunda condición, o sea, la maximización del producto social en el tiempo con el uso mínimo de recursos. Es deseable que los métodos formales de este tipo provean de reglas para pasar de una solución determinada a otra mejor para evitar el cálculo de todas las soluciones posibles que pueden ser muchas.

A los sistemas de precios de equilibrio de cada etapa se les denomina "precios de cálculo" o "precios de sombra", que se transforman en "precios de oportunidad social", o de "equilibrio general" cuando se llega al óptimo.

Los métodos más rigurosos para calcular los precios de oportunidad social deben constar de modelos de equilibrio general que incluyan las vinculaciones de los proyectos a evaluar con todo el resto de la economía, o con un grupo de variables importantes de ella.

La complejidad analítica y matemática que pueda resultar de los esfuerzos por obtener modelos muy comprensivos y con relaciones de producción muy exactas, puede llevar a dificultades insalvables en este tipo de planteamientos. Es por eso que se recurre frecuentemente a planteamientos simplificados que permiten manejar el problema con relativa facilidad.

Dentro de esos planteamientos se ha popularizado enormemente la técnica de "programación lineal" que se comenta en el resto del estudio.

7. La técnica de "programación matemática" como instrumento para calcular los precios de oportunidad social"

La técnica de "programación matemática" - de la que la "programación lineal" es un caso especial - es un método de solución para el siguiente problema: dada una función matemática "Z" que depende de un número "u" cualquiera de variables, $(x_1, x_2, \ldots x_u)$, encontrar los valores máximos (o mínimos) que puede tener "Z", cuando las diversas variables independientes "x_j" no pueden tomar valores arbitrarios cualesquiera, sino que tienen que cumplir una serie de condiciones representadas por un número "s" determinado de relaciones matemáticas independientes entre las variables x_j. Las relaciones matemáticas entre las variables independientes pueden ser del tipo de igualdades estrictas (ecuaciones) o de desigualdades (inecuaciones), lo que es una ventaja adicional para su aplicación a problemas económicos.

En términos matemáticos, el problema se conoce con el nombre de cálculo de máximos (o mínimos) condicionados, y tiene la siguiente representación simbólica general:

Maximizar (o minimizar) la función:

$$Z = f\,(x_1, x_2, \ldots\ldots x_u) \qquad [1]$$

sujetas las variables x_j a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &\varphi_1\,(x_1, x_2, \ldots\ldots x_u) \leq k_1 \\ &\varphi_2\,(x_1, x_2, \ldots\ldots x_u) \leq k_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\varphi_s\,(x_1, x_2, \ldots\ldots x_u) \leq k_s \end{aligned} \qquad [2]$$

La adaptación de este problema matemático al problema de asignación de recursos, tal como se ha descrito en los puntos 1 a 6 de este estudio, se realiza de la siguiente forma:

i) Cada x_j representa los valores que pueden tomar algunas de las variables importantes de nuestro problema económico, tales como: los niveles de producción física de proyectos o sectores específicos, los niveles de consumo total de la población, los niveles que puede tener el ingreso total, los precios de los diferentes bienes, servicios o factores, etc.

ii) Cada relación matemática del sistema de inecuaciones [2] representa la disponibilidad de un bien, servicio o recurso determinado. La forma matemática de dependencia de cada x_j debe expresar el efecto que los distintos valores que puede tomar cada x_j tiene sobre la oferta o demanda de los elementos de cada línea.

iii) Las constantes "$\overset{bi}{k_i}$" de los segundos miembros representan datos conocidos de demandas u ofertas de los diferentes elementos descritos en cada línea. Aquí se incluyen las metas exógenas fijadas por la oficina de planificación y las condiciones iniciales dadas que afectan la oferta o demanda de esos diferentes elementos.

Con esas convenciones cada ecuación o inecuación "ϕ_i" representa el equilibrio de un mercado determinado.

iv) La forma matemática de la función [1] debe expresar el criterio de optimización que se adopta, que en nuestro caso específico deberá ser el de maximizar el producto en el tiempo y/o minimizar el uso de recursos.

Esta última condición se remplazará en la forma específica de plantear el problema que se explicará mas adelante, por una condición distinta, pero equivalente en competencia perfecta. Dicha condición es la de maximizar los beneficios de todas las actividades de producción y a su vez se expresa, por comodidad, por la condición de minimizar los insumos de capital requeridos por el conjunto de proyectos.

Si se adopta esta última forma de optimización, la relación matemática de dependencia de cada x_j en la ecuación [1] debe expresar los insumos de capital que requieren los distintos valores posibles de x_j. El valor Z será en este caso la suma de los insumos de capital que requerirían diversas combinaciones posibles de niveles de las variables x_j.

La "programación lineal" es un caso especial del problema general de la programación matemática, en que se conviene que todas las relaciones de dependencia entre las diversas variables son relaciones algebráicas lineales, es decir, que todas las variables aparecen elevadas a la primera potencia, multiplicadas por coeficientes constantes de proporcionalidad. Se excluyen, por tanto, relaciones de tipo logarítmico, exponencial, trigonométrico, etc.

Esta hipótesis no es una condición del método general de la programación matemática, pero es la que mas se usa por que existen algoritmos de cálculo para su resolución expedita, lo que no sucede con relaciones mas complicadas. Como las condiciones que se impoenen en el tratamiento del problema general son demasiado restrictivas, se indicará también la manera de generalizarlo.

Las condiciones son las siguientes:

1. Las únicas variables que se consideran en el problema son los niveles de producción física de los diversos proyectos a evaluar (en número de "u"), los que denominaremos Q_j, para valores de $j = 1, 2 \ldots\ldots, u$. (Los Q_j corresponden a los x_j del problema general.)

2. Se considerarán "q" productos (bienes y servicios) y "f" recursos (o factores de producción) distintos, cuyos mercados se tratarán en forma explícita.

3. Se considerarán conocidos los valores de aquellas partes de todas las ofertas y demandas de los "q + f" elementos (cuyos mercados se definen en el punto anterior) que dependen de factores distintos a los niveles de producción de los proyectos (Q_j).

4. La función criterio que hay que minimizar toma la siguiente forma:

$$[3] \quad Z = c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_u Q_u$$

donde el coeficiente "c_j" representa el insumo unitario de capital del proyecto "j". (Cuando $Q_j = 1$)

Las funciones [2] toman la forma siguiente:

$$[4] \left\{ \begin{array}{llllll}
\varphi_1 \equiv a_{11}Q_1 & + a_{12}Q_2 & + & + a_{1j}Q_j & + \ldots + a_{1u}Q_u & \geq b_1 \\
\varphi_2 \equiv a_{21}Q_1 & + a_{22}Q_2 & + & + a_{2j}Q_j & + \ldots + a_{2u}Q_u & \geq b_2 \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\varphi_i \equiv a_{i1}Q_1 & + a_{i2}Q_2 & + & + a_{ij}Q_j & + a_{iu}Q_u & \geq b_i \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\varphi_q \equiv a_{q1}Q_1 & + a_{q2}Q_2 & & + a_{qj}Q_j & + a_{qu}Q_u & \geq b_m \\
\varphi_{q+1} \equiv a_{q+1,1}Q_1 & + a_{q+1,2}Q_2 & + & a_{q+1,j}Q_j & + a_{q+1,u}Q_u & \leq r_1 \\
\varphi_{q+f} \equiv a_{q+f,1}Q_1 & + a_{q+f,2}Q_2 & & a_{q+1,j}Q_j + & a_{q+1,u}Q_u & \leq r_f
\end{array} \right.$$

Las "q" primeras líneas representan mercados de los "q" bienes y servicios que se consideran en el modelo. Los segundos miembros (b_i) representan las demandas netas - fijadas exógenamente al mismo - por esos bienes y servicios fuera del sistema de producción de los proyectos 1 a "u".

Las "f" últimas ecuaciones representan mercados de los "f" recursos - exceptuando el capital - que intervienen en la producción de los proyectos considerados. Los segundos miembros (r_1 a r_f) representan las ofertas netas de esos recursos - fijadas exógenamente al modelo - fuera del sistema de producción de los proyectos indicados.

Para comprender mas cabalmente el significado de las metas se dará un ejemplo de los elementos que podrían jugar en su determinación. Para ello supondremos primero que toda la economía se divide en los mismos "q" sectores ya definidos, que indican los bienes y servicios cuyos mercados interesa tratar explícitamente y luego que por algún método se puede estimar el volumen físico de las demandas finales previstas, para cada uno de los "q" sectores, designando por y_1, y_2, ... y_q a estas demandas.1/

Del mismo modo se calculará, por algún método, la oferta total de los recursos escasos especificados en las condiciones 1 a f, las que designaremos por R_1, R_2 ......, R_f.

Si se desea utilizar totalmente la capacidad instalada de producción en los "q" sectores, capacidad que se expresará a través de los volúmenes físicos máximos de producción de cada uno de ellos, que denominaremos $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, ... $\bar{Z}_q$, dichos volúmenes representarían la oferta bruta existente en cada sector. Como la operación de la capacidad instalada requiere de insumos intermedios que pueden ser abastecidos en parte, o en total, por las producciones $\bar{Z}_j$, habría que calcular el monto de dichas demandas por los productos de cada sector. Luego se obtiene, por diferencia con los volúmenes totales de producción posibles $\bar{Z}_j$, las ofertas de bienes finales que pueden ser abastecidos por la capacidad ya instalada.2/

1/ Estas demandas se podrían calcular, por ejemplo, en base al conocimiento de sus valores en un período inicial y a las hipótesis de incremento del ingreso y de su distribución, a través de elasticidades ingreso, a lo que habría que agregar las metas de consumo introducidas exógenamente por el Estado.

2/ Si se dispusiera de una matriz de insumo-producto de la capacidad instalada, la oferta neta de bienes finales que podría proporcionar la operación al máximo de dicha capacidad, estaría dada por la expresión matricial $(\bar{Z} - B\bar{Z})$, en que $\bar{Z}$ sería el vector de capacidades de producción y B la matriz de insumo-producto aludida.

Si se designan por W_1, W_2, ..., W_q, a las demandas intermedias por los productos especificados en las líneas 1 a q se tendrá que las demandas finales netas que pueden ser abastecidas con el uso de la capacidad instalada, serán iguales a las diferencias $\bar{Z}_1 - W_1$; $\bar{Z}_2 - W_2$, ..., $\bar{Z}_q - W_q$.

Por otra parte, la operación al máximo de la capacidad instalada requiere del uso de recursos escasos en cantidades determinadas, que es posible cuantificar. Llamaremos S_1, S_2, ..., S_f, al monto total de cada uno de los "f" recursos que requiere la operación de la capacidad instalada existente.

La diferencia entre la disponibilidad total de recursos de cada sector y los requerimientos de los mismos para operar la capacidad instalada daría las ofertas netas de recursos que quedan para operar los nuevos proyectos, que son los que hemos denominado con los simbolos "r_i"; verificándose las siguientes igualdades: $r_1 = R_1 - S_1$; $r_2 = R_2 - S_2$, ... $r_f = R_f - S_f$ 1/

Las demandas netas insatisfechas de los 2 productos que deben ser abastecidas por los nuevos proyectos estarían dadas por las expresiones siguientes: 2/

$$b_1 = y_1 - (Z_1 - W_1)$$
$$b_2 = y_2 - (Z_2 - W_2)$$
$$\vdots$$
$$b_q = y_q - (Z_q - W_q)$$

1/ Si se dispusieran de coeficientes de insumo-producto indicativos del uso de recursos de cada sector, el vector "r" estaría dado por la expresión $r = R - C\bar{Z}$, en que C sería la matriz rectangular (de orden fxq) de coeficientes de insumo-producto, relativos al uso de recursos.

2/ En notación matricial de insumo-producto se tendrá: $b=y-(I - B)\bar{Z}$.

Una vez aclarado el significado de las metas, continuaremos con la descripción del resto de los elementos que componen el modelo.

Se entiende que cada uno de los proyectos produce uno de los bienes o servicios enumerados en las "q" primeras líneas, o sea que su operación produce un aumento de la oferta en la línea (mercado) correspondiente. También se supone que cada proyecto tiene insumos de por lo menos uno de los productos o factores que se detallan en las "q + f" líneas, o sea que su operación produce un aumento de la demanda en las líneas (mercados) correspondientes.

Debido a la hipótesis de proporcionalidad de las relaciones existentes entre las variables, los efectos que la operación de un proyecto cualquiera "j" produce sobre el aumento de la oferta o de la demanda en cada uno de los mercados especificados en las relaciones [4], serán proporcionales a los niveles que tome la variable Q_j. Los coeficientes de proporcionalidad son los coeficientes de los primeros miembros de las relaciones [4] que multiplican a los valores Q_j.

Se podrá notar que cada variable Q aparece una sola vez en cada relación del sistema [4], afectada por un coeficiente determinado. La columna de coeficientes asociada con cada variable describe el efecto que ésta tiene sobre la oferta o la demanda de cada mercado, a un nivel unitario de operación de los diversos Q_j. El efecto total de cada proyecto se obtiene multiplicando los coeficientes unitarios por los diversos valores que pueden tomar las variables Q_j. Más específicamente, un coeficiente cualquiera "a_{ij}" que se encuentra en la línea "i" de la columna "j", y que multiplica a la variable Q_j, se puede definir como el efecto que la producción de una unidad física por parte del proyecto "j" tiene sobre la oferta o demanda del mercado a que se refiere la línea "i".

Si el proyecto "j" es productor del bien especificado en la "i", la producción de una unidad, por ese proyecto, representará un aumento de la oferta del bien "i" en una unidad, y el coeficiente a_{ij} valdrá uno; excepto en el caso de que el proyecto consuma internamente un porcentaje de su propia producción (por ejemplo, electricidad consumida en una planta eléctrica), en cuyo caso el coeficiente será siempre positivo, pero menor que uno. Si la proporción de autoconsumo es del 10 por ciento, el coeficiente de aporte neto a la oferta será igual a (1 - 0.10) = + 0.9.

Si el proyecto "j", en cambio, usa como insumo el bien o recurso especificado en una línea "i" cualquiera (en que "i" puede tomar valores entre 1 y "q + f"), el coeficiente "a_{ij}" respectivo será negativo e indicará las unidades físicas del bien o factor a que se refiere la línea "i", que son necesarias (demandadas) para producir una unidad física del bien que produce el proyecto "j".

Los coeficientes "a_{ij}" tienen, por tanto, el mismo significado que los coeficientes de insumo-producto de Leontief (expresados estos últimos en términos físicos), cuando se refieren a insumos por el sector "j" de los elementos de la línea "i", con la diferencia que se les afecta de signo negativo para indicar que el efecto del proyecto "j" sobre la disponibilidad del elemento "i", es una demanda.

Cuando los coeficientes "i" y "j" se refieren a un mismo producto, en cambio, o sea cuando el proyecto "j" es productor del bien o servicio especificado en la línea "i", el efecto neto del proyecto "j" sobre la disponibilidad del elemento "i" constituye una oferta, por lo que lleva signo positivo.

En adelante, y adoptando la terminología aceptada en estos problemas, se denominarán "actividades" a lo que se ha llamado "proyectos"; esto le da más generalidad a su interpretación.

El cuadro N° 1 resume la presentación formal del problema en una forma convencional que facilita su resolución.

<u>Cuadro N° 1</u>

ACTIVIDADES				Condiciones o restricciones	Metas
Q_1	Q_2	Q_j	Q_u		
a_{11}	a_{12}	a_{1j}	a_{1u}	$\geqslant$	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{2j}	a_{2u}	$\geqslant$	b_2
.					
.					
.					
a_{i1}	a_{i2}	a_{ij}	a_{iu}	$\geqslant$	b_i
a_{q1}	a_{q2}	a_{qj}	a_{qu}	$\geqslant$	b_q
$a_{q+1,1}$	$a_{q+1,2}$ ...	$a_{q+1,j}$ ...	$a_{q+1,u}$	$\geqslant$	$-r_1$
.					
.					
.					
$a_{q+f,1}$	$a_{q+f,2}$ ...	$a_{q+f,j}$ ...	$a_{q+f,u}$	$\geqslant$	$-r_f$
c_1	c_2	c_j	c_u	=	Z (minimizar)

El problema matemático queda totalmente planteado si se conviene en que cada variable Qj multiplica a todos los coeficientes de la columna que la variable encabeza (incluso a los c_j de la última línea) y luego se suman horizontalmente los productos de cada línea hasta la columna "u". Estas sumas del primer miembro de cada línea deben cumplir con las condiciones que se indican de ser mayores o iguales a cantidades dadas, que son las metas.

El signo negativo que se ha colocado a las ofertas de recursos se debe a que la condición para los mismos es que la demanda sea menor o igual a la oferta ($D_r \leq O_r$); pero como se convino en que las demandas del primer miembro tendrían signos negativos, al multiplicar ambos miembros de las desigualdades por -1 se obtiene ($-D_r \geq - O_r$), lo que permite, además, conservar el mismo sentido para todas las desigualdades.

El problema consiste en encontrar un conjunto de valores no negativos de las variables "Q_j" que cumplan con todas las condiciones de mercado impuestas en las "q + f" restricciones y que hagan mínimo el uso total de capital, expresado en el valor de Z.

La condición de no negatividad de las variables Q_j expresa la carencia de sentido que tendría una actividad productora operando a niveles negativos. En cambio es permisible que algunas actividades operen a un nivel cero, lo que significa que se desecha su uso por su ineficiencia, de acuerdo con el criterio de optimización elegido.

A diferencia con el sistema de insumo-producto, en que sólo hay una manera de producir cada bien o servicio, en este sistema se pueden incorporar varias tecnologías para producir una misma cosa, estando cada tecnología representada por una actividad diferente, con coeficientes distintos.

Este hecho es el que permite la sustitución de factores de producción entre sí, al pasar de una tecnología a otra con insumos diferentes, de modo que al comparar dos o mas tecnologías se está comparando las combinaciones diferentes de factores que estas requieren, directa o indirectamente, para producir un mismo producto.

Aparentemente esta sustitución podría hacerse solamente de manera discontinua, al remplazar una tecnología por otra que tiene requisitos diferentes de insumos en cantidades discretas determinadas. Esto no es necesariamente cierto, porque combinando en proporciones variables dos tecnologías cualesquiera, es posible una sustitución contínua de factores en todo el rango de variación en las proporciones de factores que abarcan esas dos tecnologías.

La diferencia entre esta situación y la descrita en la teoría marginalista de la sustitución de factores en las funciones de producción es que las isocuantas se forman por intersección de rectas, en vez de ser curvas cuya tangente cambia continuamente.1/

Volviendo a las condiciones del modelo, se entiende que el problema está planteado en términos físicos, es decir, que las metas y niveles de producción están expresadas en unidades físicas tales como: toneladas de productos agrícolas, KWH, horas-hombre de trabajo, etc. Asimismo, los coeficientes de las diversas relaciones son cocientes entre unidades físicas. Cuando las relaciones han sido deducidas de unidades de valor, en vez de unidades físicas, se supone que esos valores representan cantidades físicas determinadas, a precios del año base del cálculo.

La conveniencia de trabajar con unidades de valor a precios de un año base, en vez de unidades físicas, surge de las necesidades de agregación de productos con características físicas distintas, pero que cumplan funciones similares para reducir los problemas a dimensiones razonables. Si se trabajara con unidades físicas habría que tener

---

1/ En la medida que se tengan muchas tecnologías alternativas para producir cada producto y en que cada una es ligeramente diferente de otra, el mapa de isocuantas que daría la programación lineal se acercará cada vez mas a los de la representación marginalista clásica.

tantas condiciones de mercado distintas como productos y factores distintos que intervengan en los problemas propuestos, lo que elevaría su número a cantidades enormes e inmanejables.

La mayor dificultad de estimar adecuadamente las "mercancías compuestas" cuando se plantea el problema en términos de valor, a precios de un año base, está probablemente en el concepto de uso de capital, de la función criterio. Si hubiese un sólo bien de capital, digamos tornos, dicho uso se podría computar en horas-torno insumidas, pero como hay gran variedad de bienes de capital, su medición debe hacerse en millones de pesos-año de uso de capital.

Con todas estas convenciones, el problema queda reducido a encontrar las actividades con las que conviene operar, cuáles proyectos elegir y el nivel de operación, para cumplir con las metas físicas y reducir al mínimo el uso del capital. (El uso del resto de los factores de producción queda condicionado por las metas que se fijan a este respecto en las "f" últimas líneas.)

Así expuesto, el problema resulta casi idéntico con el primero planteado en el punto 1 de este artículo, y expresado de la siguiente manera: "obtener un conjunto de metas físicas dadas, para producir las cuales hay diversas alternativas, con las técnicas que usen el mínimo posible de recursos escasos".

Sin embargo, esta discusión sobre las hipótesis que hubo que hacer para reducir el problema general - mucho más complejo - a este planteamiento simplificado, nos permite ahora dar una interpretación correcta a los coeficientes del problema y a su solución física y de precios.

8. El método "Simplex modificado" para resolver problemas de programación lineal

El problema matemático planteado en el cuadro N° 1 - donde las restricciones de mercado tienen la forma de desigualdades - lo hace indefinido, por lo que conviene transformarlo en un problema definido mediante la introducción de variables adicionales que cuantifiquen el monto de las posibles discrepancias entre ambos miembros de cada inecuación.

La forma original del problema - con desigualdades - se presta especialmente para los problemas económicos, que a menudo son del siguiente tipo: producir a lo menos tanta cantidad de determinado producto; usar una cantidad de divisas no mayor de tanto; usar hasta un máximo de hectáreas de cultivo, etc. En este tipo de problemas no hay una solución única definida, pues cualquier solución para las variables que cumpla dichas restricciones con exceso u holgura, es aceptable. Entre las diversas soluciones aceptables habrá algunas mejores que otras, según los valores que resulten en la función criterio, y habrá una óptima (o varias óptimas). En el óptimo pueden haber algunas restricciones realmente limitativas, aquéllas en que se cumple exactamente la igualdad entre ambos miembros; y otras redundantes, cuando se cumple con holgura la restricción. En este último caso, la interpretación económica de dicho fenómeno es de gran importancia. Si se trata de un factor de producción que en el óptimo no es usado totalmente, quiere decir que ese factor no es limitativo para la producción de las metas y pasa a ser un bien libre, cuyo precio de oportunidad en competencia perfecta es nulo. Si el elemento redundante es un bien que, en el óptimo, se produce con exceso a la demanda prevista, se trata de un bien libre, para cuya producción sobre la demanda actual no hay que sacrificar la producción de ningún otro bien, lo que también se traduce en un precio de oportunidad igual a cero, en condiciones de competencia perfecta.

La definición matemática del problema consiste en agregar una variable de holgura [illegible] en cada línea en que hay una desigualdad. El coeficiente de cada variable de holgura es unitario y el valor de la misma es siempre igual, por definición, a la diferencia entre ambos miembros, para valores dados del resto de las variables. Esto permite, una vez introducidas las variables de holgura, remplazar todas las desigualdades por ecuaciones.

En el cuadro N° 2 se indica la forma final que toma el problema del cuadro N° 1 cuando se han agregado las variables de holgura. Se detallan allí nuevas líneas y columnas que servirán para la demostración del método de resolución del problema.

Se ha agregado también en el cuadro N° 2 una primera columna denominada "precios de cálculo". Hay un precio para cada línea, el cual se definirá por el momento como el "precio imputado" para los bienes, servicios, o factores, descritos en cada línea del problema. Estos precios que multiplican a todos los elementos que hay en cada línea (en ambos miembros de las relaciones matemáticas), permiten considerar simultáneamente con el problema físico, el problema económico - en términos de valor - que hay envuelto en el mismo.

Los precios de cálculo son nuevas variables que se agregan al problema, y su correcta interpretación permite tomar en cuenta las implicaciones económicas estáticas e intertemporales que se describieron en el punto 1 de este artículo.

El problema físico que plantea el esquema del cuadro N° 2 se caracteriza (sin considerar la función criterio) por ser un sistema de "q + f" ecuaciones lineales con "u + q + f" variables, en el caso

Cuadro 2

Precios de cálculo	Actividades								Holguras			Condiciones o restricciones	Metas
	Q_1	Q_2	Q_c....	Q_j....	$Q_ñ$....	Q_o....	Q_s....	Q_u....	V_1	V_2....	V_{q+f}		
P_1	a_{11},	a_{12}....	a_{1c}....	a_{1j}....	$a_{1ñ}$....	a_{1o}....	a_{1s}....	a_{1u}	-1	0....	0	=	b_1
P_2	a_{21},	a_{22}....	a_{2c}....	a_{2j}....	$a_{2ñ}$....	a_{2o}....	a_{2s}....	a_{2u}	0	-1....	0	=	b_2
⋮													
P_i	a_{i1},	a_{i2}....	a_{ic}....	a_{ij}....	$a_{iñ}$....	a_{io}....	a_{is}....	a_{iu}	0	0....	0	=	b_i
⋮													
P_j	a_{j1},	a_{j2}....	a_{jc}....	a_{jj}....	$a_{jñ}$....	a_{jo}....	a_{js}....	a_{ju}	0	0....	0	=	b_j
⋮													
$P_ñ$	$a_{ñ1}$,	$a_{ñ2}$....	$a_{ñc}$....	$a_{ñj}$....	$a_{ññ}$....	$a_{ño}$....	$a_{ñs}$....	$a_{ñu}$	0	0....	0	=	$b_ñ$
⋮													
P_q	a_{q1},	a_{q2}....	a_{qc}....	a_{qj}....	$a_{qñ}$....	a_{qo}....	a_{qs}....	a_{qu}	0	0....	0	=	b_q
P_{r1}	$a_{q+1,1}$,	$a_{q+1,2}$....	$a_{q+1,c}$....	$a_{q+1,j}$....	$a_{q+1,ñ}$....	$a_{q+1,o}$....	$a_{q+1,s}$....	$a_{q+1,u}$	-1	0....	0	=	$-r_1$
⋮													
P_{rf}	$a_{q+f,1}$,	$a_{q+f,2}$....	$a_{q+f,c}$....	$a_{q+f,j}$....	$a_{q+f,ñ}$....	$a_{q+f,o}$....	$a_{q+f,s}$....	$a_{q+f,u}$	0	0....	-1	=	$-r_f$
P_k	c_1	c_2.....	c_c.....	c_j.....	$c_ñ$.....	c_o.....	c_s.....	c_u	0	0	0	=	Z(mín.)

más general en que cada una de las restricciones sea originalmente una desigualdad.1/

Dicho problema es indeterminado matemáticamente, por haber más variables que ecuaciones,2/ y tiene una infinidad de "soluciones" distintas. Para hacerlo determinado hay que dar valores arbitrarios a un número de variables igual al exceso de las mismas sobre el número de ecuaciones y resolver el sistema determinado que resulta.3/

Los sistemas determinados que resultan por el procedimiento anterior tienen, por lo tanto, "q + f" variables y "q + f" ecuaciones. Dichos sistemas resultan de elegir "q + f" actividades como incógnitas y de dar valores arbitrarios a todo el resto de las variables.

1/ En ciertos problemas, algunas de las restricciones se pueden presentar originalmente como igualdades y otras como desigualdades, por lo que el número total de variables de holgura es menor que "q + f", e igual al número de desigualdades originales.

Lo más frecuente en problemas como el que aquí se discute es que las "q" primeras restricciones se planteen originalmente como igualdades y las últimas "f", relativas al uso de recursos, como desigualdades. En dicho caso el número total de variables físicas es de "u + f".

2/ Si hubiese menos variables que ecuaciones, el sistema sería sobredeterminado y no tendría solución, a menos que algunas ecuaciones fueran dependientes entre sí, es decir que se pudiesen deducir algunas a partir de las otras.

3/ Si algunas de las restricciones son igualdades desde un comienzo, no es evidente que siempre hay mas variables que ecuaciones. Si no hubiese ninguna desigualdad, no habría variables de holgura y sería necesario comparar "u" variables con "q + f" ecuaciones. Debido a las condiciones del problema, "u" debe ser siempre mayor, o a lo menos igual a "q", pero no hay seguridad que sea igual o mayor que "q + f". En el caso mas frecuente, que se cita en el párrafo anterior, en que las "f" últimas restricciones son desigualdades, el número de variables "u + f" es siempre mayor que "q + f".

A los sistemas de este tipo, donde los valores arbitrarios que se da a las variables que sobran son todos iguales a cero, se les llamará "sistemas básicos", y soluciones básicas a los valores de las incógnitas que resultan de resolverlos. Se demostrará mas adelante que la solución que minimiza la función criterio es una de las soluciones básicas.

El hecho de colocar algunas de las variables a un nivel igual a cero hace que las actividades correspondientes desaparezcan completamente del problema, lo que equivale a desechar momentáneamente esos proyectos.

Un método de resolver el problema es el de calcular todas las soluciones básicas diferentes que resultan de elegir arbitrariamente combinaciones distintas de "q + f" actividades, que forman bases diferentes, eliminando el resto de las actividades que no se incluyen en cada base.

Introduciendo sucesivamente los valores de las distintas soluciones básicas en la función criterio se tendrían diferentes valores de Z, de los cuales se elige el menor, siendo la solución básica correspondiente, la solución óptima del problema.

Hay que hacer la salvedad de que la elección arbitraria de las bases puede dar soluciones negativas para algunas de las variables. Estas soluciones se denominan "no factibles" y se desechan en la comparación de los valores correspondientes de la función criterio.

Este método de solución se denomina "de descripción completa" y su uso es limitado porque en general el número de soluciones básicas distintas que hay que calcular es muy elevado.

Los métodos "simplex" y "simplex modificado", que es el que se describirá aquí, parten de la obtención de una determinada solución básica factible, que da un valor determinado de la función criterio, y proveen de reglas para pasar a otra solución básica que dé un valor menor de la función criterio. De esta manera se evita el cálculo de un gran número de soluciones inferiores.[1/]

El método simplex revisado tiene además la ventaja de proveer una excelente interpretación económica de los precios de cálculo que se obtienen en cada etapa de la resolución.

La primera etapa de éste método consiste en encontrar una primera solución básica factible, para lo cual basta elegir "q + f" actividades cualesquiera (incluyendo a las actividades de holgura) que formen una base y plantear el sistema de ecuaciones del cuadro N° 2, suprimiendo todas las actividades no incluidas en la base. La única precaución que hay que tomar para que la solución sea factible, es que entre las actividades elegidas haya por lo menos una actividad productora de cada uno de los bienes y servicios especificados en las líneas 1 a q; de otra manera faltarían las ofertas necesarias en cada uno de esos mercados.[2/] Exceptuando esta precaución, la elección de la primera base es arbitraria.

Supongamos que la primera base elegida comience con la actividad Q_c, incluya las actividades Q_j, $Q_ñ$ y termine con la actividad Q_o. Supongamos también que la actividad Q_c sea productora del bien especificado en la primera línea, la actividad Q_o productora de los bienes especificados en la línea "q", y que entre las actividades intermedias haya por lo menos una que produce cada uno del resto de los bienes y servicios que se especifican en las primeras "q" restricciones.

1/ La expresión "soluciones inferiores" se refiere al hecho que involucran valores de la función criterio mayores que el que se obtiene con la solución de la primera base.

2/ Conviene recordar que se reconoce que una actividad cualquiera "j" es productora de los bienes especificados en una línea "i" por el hecho de que su coeficiente a_{ij} es positivo.

El sistema de ecuaciones resultante tendrá la forma siguiente:

$$[5]\left\{\begin{array}{lcl}
a_{1c}Q_c + \dots + a_{1j}Q_j + \dots + a_{1\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \dots + a_{1o}Q_o & = & b_1 \\
a_{2c}Q_c + \dots \quad a_{2j}Q_j + \dots + a_{2\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \dots \quad a_{2o}Q_o & = & b_2 \\
\vdots & & \\
a_{ic}Q_c + \dots \quad a_{ij}Q_j + \dots + a_{i\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \dots \quad a_{io}Q_o & = & b_i \\
\vdots & & \\
a_{\tilde{n}c}Q_c + \dots + a_{\tilde{n}j}Q_j + \dots + a_{\tilde{n}\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \dots \quad a_{\tilde{n}o}Q_o & = & b_{\tilde{n}} \\
\vdots & & \\
a_{qc}Q_c + \dots + a_{qj}Q_j \quad \dots + a_{q\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \dots + a_{qo}Q_o & = & b_q \\
a_{q+1,c}Q_c + \dots + a_{q+1,j}Q_j + \dots + a_{q+1,\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \dots \quad a_{q+1,o}Q_o & = & -r_1 \\
\vdots & & \\
a_{q+f,c}Q_c + \dots + a_{q+f,j}Q_j + \dots \quad a_{q+f,\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \dots + a_{q+f,o}Q_o & = & -r_f
\end{array}\right.$$

Este sistema, que tiene "q + f" ecuaciones y "q + f" variables (porque se han elegido "q + f" actividades para formar la base), es perfectamente determinado y tiene una solución única, siempre que las ecuaciones sean linealmente independientes.

Los valores de las variables que solucionan el sistema - los que se pueden obtener por cualquiera de los métodos conocidos para resolver ecuaciones simultáneas - constituyen la primera solución básica factible. Esto quiere decir que si se decidiera adoptar la tecnología correspondiente a las actividades elegidas, el sistema de producción que éstas forman, operando a los niveles calculados, proporcionaría una oferta neta de bienes y servicios igual a las demandas netas previstas para los mismos (metas b_i). También dicho sistema produciría una demanda de recursos igual a las ofertas previstas "r_i".

Si entre las actividades de la base hay actividades de holgura, los excesos de oferta de bienes o de factores de producción quedan cuantificados por los valores de las variables de holgura correspondientes. La demanda de "uso de capital" del sistema de producción elegido queda definida por el valor de Z correspondiente.

La segunda etapa en la resolución del problema consiste en calcular el sistema de precios que regiría en condiciones de competencia perfecta, con la tecnología elegida, en los mercados de factores y productos. La existencia de condiciones de competencia perfecta implica que todas las empresas (actividades) maximizan sus sobrebeneficios a un nivel de cero, para lo cual se requiere que los costos marginales sean iguales a los ingresos marginales.

Para plantear estas relaciones de valor, basta multiplicar las cantidades físicas de cada línea por el precio de cálculo correspondiente. Los ingresos de una actividad "j" cualquiera están determinados por la venta neta que ella hace de los bienes o servicios que produce, los que se ubican dentro de la columna correspondiente a la actividad "j", por la línea en que la actividad tiene un coeficiente positivo. Supongamos que la actividad "j" produce el bien indicado en la línea "i"; al nivel unitario de operación de la actividad "j", el ingreso medio de dicha actividad será $p_i \; a_{ij}$.

La actividad "j" tendrá todo el resto de los coeficientes de su columna negativos, por tratarse de insumos de bienes intermedios o factores de producción. Los costos medios de adquisición de estos insumos, al nivel unitario de operación de la actividad "j", estarán expresados por los productos de los precios de cálculo de cada línea por los coeficientes técnicos de la actividad "j" en las líneas respectivas.

La suma algebráica de los productos de los precios de cálculo por los coeficientes técnicos respectivos de cada línea de la actividad "j", hasta la línea "q + f", representa la diferencia entre ingresos y egresos corrientes medios (unitarios) de dicha actividad. A esta diferencia, que designaremos por ϕ_j se la puede denominar beneficio unitario bruto de la actividad "j".

Si se resta al beneficio unitario bruto el insumo por uso de capital - que al nivel unitario de operación de la actividad "j" es igual a $p_k.c_j$ - se tendrían los beneficios netos que designaremos por $\pi_j = \phi_j - p_k c_j$, y que en condiciones de competencia perfecta deben ser iguales a cero.

Las relaciones anteriores se refieren a ingresos y costos medios y no a los marginales, pero debido a que se trata de funciones lineales homogéneas (sin términos constantes), los conceptos medios y marginales son equivalentes.

Conviene aclarar aquí que si bien cada actividad representa una industria determinada, el supuesto de competencia implica que en cada industria hay un número suficientemente grande de empresas individuales - que aquí suponemos son todas iguales - para que ninguna pueda influir aisladamente en el precio de venta del producto de la industria.

Al analizar lo que sucede a una empresa al nivel unitario de operación, se está analizando lo que sucede simultáneamente a todas las empresas individuales idénticas que componen la industria respectiva; también está implícito el supuesto de que hay retornos constantes a escala, lo que significa que la única manera de aumentar la producción es reproducir exactamente los requisitos de la producción al nivel unitario, no habiendo posibilidades de economías ni deseconomías de escala.

La condición de que los beneficios netos unitarios de cada empresa en cada una de las actividades de la base sean iguales a cero, lleva a plantear el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$
\begin{array}{ll}
 & a_{1c}p_1+a_{2c}p_2+\ldots+a_{ic}p_i+\ldots+a_{jc}p_j+\ldots+a_{ñc}p_{ñ}+\ldots+a_{qc}p_q+a_{q+1,c}p_{r1}+\ldots+a_{q+f,c}p_{rf}-c_cp_k = 0 \\
 & \vdots \\
 & a_{1j}p_1+a_{2j}p_2+\ldots+a_{ij}p_i+\ldots+a_{jj}p_j+\ldots a_{ñj}p_{ñ}+\ldots+a_{qj}p_q+a_{q+1,j}p_{r1}+\ldots+a_{q+f,j}p_{rf}-c_jp_k = 0 \\
[6] & \vdots \\
 & a_{1ñ}p_1+a_{2ñ}p_2+\ldots+a_{iñ}p_i+\ldots+a_{jñ}p_j+\ldots+a_{ññ}p_{ñ}+\ldots+a_{qñ}p_q+a_{q+1,ñ}p_{r1}+\ldots+a_{q+f,ñ}p_{rf}-c_{ñ}p_k = 0 \\
 & \vdots \\
 & a_{1o}p_1+a_{2o}p_2+\ldots+a_{io}p_i+\ldots+a_{jo}p_j+\ldots+a_{ño}p_{ñ}+\ldots+a_{qo}p_q+a_{q+1,o}p_{r1}+\ldots+a_{q+f,o}p_{rf}-c_op_k = 0
\end{array}
$$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene "q + f" ecuaciones y "q + f + 1" incógnitas, que son los precios de cálculo, por lo que tiene un grado de libertad. Para solucionarlo, se da un valor arbitrario a uno de los precios, con lo que queda un sistema determinado que tiene una solución única. Generalmente, se conviene en tomar como numerario al precio del uso del capital ($p_k = 1$), lo que permite calcular los otros precios relativos, referidos a p_k. Para calcular dichos precios, basta pasar al segundo miembro los términos c_i, y resolver mediante cualquier método conocido, el sistema de ecuaciones lineales simultáneas resultante.

Este sistema de ecuaciones [6], que tiene los mismos coeficientes que el sistema [5], pero en el cual las líneas de coeficientes se han reemplazado por las columnas respectivas; las variables de cantidad se han reemplazado por los precios y las metas por los coeficientes de la función criterio, se denomina "problema dual" del problema físico, y su resolución indica los precios relativos de equilibrio que habría en condiciones de competencia perfecta si rigiera la tecnología elegida en la primera base.

Estos precios "de cuenta" o "de cálculo" cumplen con la primera condición exigida a los precios de oportunidad social que estamos buscando (ver capítulo 5), vale decir la de conducir a un equilibrio de competencia perfecta en todos los mercados, respetando las metas sociales introducidas por el Estado y siempre que las técnicas adoptadas fuesen las mejores disponibles. Sin embargo, dichos precios no cumplen necesariamente con la segunda condición, cual es conducir a una maximización del producto social en el tiempo, con un uso mínimo de recursos escasos, porque las técnicas adoptadas se eligieron arbitrariamente y hay que comprobar si entre las no incluidas hay algunas que usen menos recursos.

El tercer paso de la resolución consiste en aplicar el sistema de precios de cálculo, asociado con la primera base, para evaluar el resultado económico que tendrían las actividades excluidas de dicha base si rigiesen esos precios. Tal evaluación consiste en calcular los beneficios netos (π_s) que aquéllas tendrían dada esta condición, procedimiento que se hace al nivel unitario de operación de cada una de ellas.

Para una actividad cualquiera "s" excluida de la primera base, los beneficios brutos unitarios ϕ_s están dados por la suma de los productos de los precios por los coeficientes técnicos de la columna "s".

$$[7] \quad \phi_s = a_{1s}p_1^1 + a_{2s}p_2^1 + \dots + a_{is}p_i^1 + \dots + a_{js}p_j^1 + \dots + a_{\tilde{n}s}p_{\tilde{n}}^1 + \dots + a_{qs}p_q^1 + a_{q+1,s}p_{r1}^1 + \dots + a_{q+f,s}p_{rf}^1$$

El índice superior "1" que se ha colocado a los precios indica que son precios de cálculo asociados con la primera base.

Conviene recordar que la actividad "s" debe producir alguno de los productos especificados en las "q" primeras líneas, por lo que uno de los coeficientes anteriores es positivo; el producto de dicho coeficiente por el precio respectivo da el ingreso medio (y marginal) de dicha actividad. Los demás coeficientes deberán ser negativos y, al ser multiplicados por los precios y sumados algebráicamente, darán la suma de los costos medios (y marginales) corrientes de la actividad.

Los beneficios netos π_s de la actividad "s" serán iguales a la diferencia entre los beneficios brutos y el costo medio (y marginal) por concepto de uso de capital (c_s).1/

[8] $$\pi_s = \phi_s - c_s$$

Si la actividad "s" tiene beneficios netos positivos, calculados éstos a los precios de cálculo de la primera base, quiera decir que en condiciones competitivas convendría a algún empresario producir con la tecnología del proyecto "s", pues obtendría beneficios positivos, mientras que los proyectos que funcionaran con la tecnología de la primera base tendrían beneficios netos iguales a cero. Una vez que se introdujera la actividad "s", ésta desplazaría a algunos productores que estaban en la primera base, y la competencia llevaría a un reajuste gradual de los precios hasta que todas las actividades tuviesen nuevamente beneficios netos nulos. Este proceso es el que inspira el resto de la metodología por seguir en el método simplex revisado.

Los beneficios netos definidos por las fórmulas [7] y [8] se calculan para todas las actividades que quedaron excluidas de la primera base, y se elige entre aquéllas las que tengan beneficios netos positivos a la que los tenga mayores para incluirla en una nueva base.

Supongamos que la actividad elegida es la "s". Dicha actividad tiene beneficios netos positivos porque usa directa e indirectamente (a través de sus insumos) una cantidad menor de capital que las que formaban la primera base.

1/ El precio del uso del capital es unitario por lo que $c_s p_k = c_s$.

La discusión de las etapas siguientes está destinada a la identificación de la actividad de la primera base que debe ser remplazada por la actividad "s", lo que está intimamente relacionado con la perturbación del equilibrio ya alcanzado que produce la operación de dicha actividad en todos los mercados. Esta alteración se produce porque la actividad "s" aumenta la oferta de uno de los productos que se indican en las "q" primeras líneas y aumenta la demanda de todo el resto de los productos y factores especificados en las "q + f" ecuaciones.

Para que la operación de la actividad "s" a algún nivel positivo no rompa el equilibrio logrado, será necesario alterar los niveles de producción de la primera base de una manera tal que el efecto conjunto que se produzca sea exactamente equivalente al efecto que la actividad "s" produce en la oferta y demanda de todos los mercados.

Para calcular estos efectos equivalentes se plantea en primer lugar el problema de calcular qué niveles de operación de las actividades incluidas en la primera base producen sobre las ofertas y demandas de todos los mercados el mismo efecto conjunto que el producido por la actividad "s" operada al nivel unitario. Este último efecto está definido por los coeficientes técnicos de la columna de coeficientes de la actividad "s".

Matemáticamente, esta operación se denomina "cálculo de la combinación equivalente de la actividad "s", en términos de las actividades de la primera base". Su cálculo está dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_{1c}\bar{Q}_c+\dots+a_{1j}\bar{Q}_j+\dots+a_{1\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}}+\dots+a_{1o}\bar{Q}_o = a_{1s}$$

$$a_{2c}\bar{Q}_c+\dots+a_{2j}\bar{Q}_j+\dots+a_{2\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}}+\dots+a_{2o}\bar{Q}_o = a_{2s}$$

$$\vdots$$

$$a_{ic}\bar{Q}_c+\dots+a_{ij}\bar{Q}_j+\dots+a_{i\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}}+\dots+a_{io}\bar{Q}_o = a_{is}$$

$$\vdots$$

$$[9] \quad a_{\tilde{n}c}\bar{Q}_c+\dots+a_{\tilde{n}j}\bar{Q}_j+\dots+a_{\tilde{n}\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}}+\dots+a_{\tilde{n}o}\bar{Q}_o = a_{\tilde{n}s}$$

$$\vdots$$

$$a_{qc}\bar{Q}_c+\dots+a_{qj}\bar{Q}_j+\dots+a_{q\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}}+\dots+a_{qo}\bar{Q}_o = a_{qs}$$

$$a_{q+1,c}\bar{Q}_c+\dots+a_{q+1,j}\bar{Q}_j+\dots+a_{q+1,\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}}+\dots+a_{q+1,o}\bar{Q}_o = a_{q+1,s}$$

$$\vdots$$

$$a_{q+f,c}\bar{Q}_c+\dots+a_{q+f,j}\bar{Q}_j+\dots+a_{q+f,\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}}+\dots+a_{q+f,o}\bar{Q}_o = a_{q+f,s}$$

Este sistema de ecuaciones es idéntico al sistema [5] con que se calcularon los niveles de operación de la primera base, excepto que se ha cambiado los segundos miembros de las ecuaciones [5] (que eran las metas) por la columna de coeficientes técnicos de la actividad "s".

Como las variables "Q_j" que entran en este sistema son las mismas que en el sistema [5], pero tendrán valores de solución diferentes, en el sistema [9] se les ha agregado una barra para distinguirlas de los valores de solución del sistema [5].

Es fácilmente comprobable que por tratarse de ecuaciones lineales los valores de solución del sistema [9]: $\bar{Q}_c,\dots,\bar{Q}_j,\dots,\bar{Q}_o$ quedarían multiplicados todos por Q_s si el segundo miembro de las ecuaciones se multiplicara todo por Q_s, o sea, si la actividad "s" se operara al nivel Q_s en vez de al nivel unitario. Para la línea "i" del sistema

[9], esto se expresaría mediante la ecuación:

$$a_{ic}\bar{Q}_c Q_s + \ldots + a_{ij}\bar{Q}_j Q_s + \ldots a_{i\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}} Q_s + \ldots + a_{io}\bar{Q}_o Q_s = a_{is} Q_s \tag{10}$$

Ahora podemos hacer el siguiente razonamiento: la operación de la actividad "s" tiene sobre un mercado cualquiera - por ejemplo, el de la línea "i" - el efecto de alterar la demanda (o la oferta, dependiendo del signo de a_{is}) de ese mercado en $a_{is}Q_s$, lo que rompe el equilibrio de la línea "i" expresado en la siguiente ecuación del sistema [5]:

$$a_{ic}Q_c + \ldots + a_{ij}Q_j + \ldots + a_{i\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \ldots + a_{io}Q_o = b_i \quad ;$$

a la que habría que sumar $a_{is}Q_s$ en el primer miembro, destruyéndose la igualdad.

Para contrarrestar esta alteración del equilibrio basta restar en el primer miembro de dicha igualdad el efecto conjunto de la combinación equivalente de la actividad "s" sobre el mercado "i" que, por definición, es idéntico al de dicha actividad en el mercado "i".

El resultado final del nuevo equilibrio en el mercado "i" sería el siguiente:

$$(a_{ic}Q_c + \ldots + a_{ij}Q_j + \ldots + a_{i\tilde{n}}Q_{\tilde{n}} + \ldots + a_{io}Q_o) - (a_{ic}\bar{Q}_c Q_s + \ldots + a_{ij}\bar{Q}_j Q_s + \ldots + a_{i\tilde{n}}\bar{Q}_{\tilde{n}} Q_s + \ldots + a_{io}\bar{Q}_o Q_s) + a_{is}Q_s = b_i \quad ;$$

lo que se debe a que la diferencia entre el segundo paréntesis y el término $a_{is}Q_s$ es igual a cero, según la ecuación [10].

Reordenando la ecuación precedente, se tiene:

$$a_{ic}(Q_c - \bar{Q}_c Q_s) + \ldots + a_{ij}(Q_j - \bar{Q}_j Q_s) + \ldots + a_{i\tilde{n}}(Q_{\tilde{n}} - \bar{Q}_{\tilde{n}} Q_s) + \ldots + a_{io}(Q_o - \bar{Q}_o Q_s) + a_{is}Q_s = b_i \tag{11}$$

Esto significa que si a partir del equilibrio obtenido en la primera base se comienza a operar una nueva actividad "s" no incluida en ella, se puede conservar ese equilibrio siempre que se rebaje cada uno de los niveles de operación de equilibrio de la base en Q_s veces el valor de la combinación equivalente de la actividad "s" en términos de la base.

Para dar cabida a la operación de "s" al nivel Q_s, los niveles corregidos de operación de las actividades de la base se calculan, por lo tanto, con las expresiones siguientes:

$$
[12] \quad
\begin{array}{l}
Q_c - Q_s\bar{Q}_c \\
\vdots \\
Q_j - Q_s\bar{Q}_j \\
\vdots \\
Q_{ñ} - Q_s\bar{Q}_{ñ} \\
\vdots \\
Q_o - Q_s\bar{Q}_o
\end{array}
$$

La actividad "s" tiene beneficios positivos porque usa directa e indirectamente (a través de sus insumos) menos capital que su combinación equivalente, de manera que mientras más alto sea el nivel de operación de Q_s - y consecuentemente, mientras más sea necesario rebajar los niveles de actividad de la base - menor se hará el insumo total de capital.

Debe recordarse que al fijar la disponibilidad neta de equilibrio de los otros factores distintos del capital, y al calcular los programas factibles cuidando de que la demanda conjunta de recursos de dichos programas iguale a esa disponibilidad, el único recurso que se puede minimizar es el capital, lo que se obtiene al cambiar tecnologías que permitan sustituir su uso por el de otros factores.

Por este motivo, convendrá introducir la actividad "s" al mayor nivel posible, con la limitación de que los niveles de operación corregidos de la base no se hagan negativos, si bien es permisible que uno o varios de ellos queden operando a un nivel igual a cero.

Igualando a cero cada una de las expresiones [12] podremos averiguar qué valor de Q_s reduce a cero los niveles de operación corregidos de cada una de las actividades de la base.

$$[13] \qquad \begin{aligned} Q_c - Q_s\bar{Q}_c &= 0 \\ &\vdots \\ Q_j - Q_s\bar{Q}_j &= 0 \\ &\vdots \\ Q_ñ - Q_s\bar{Q}_ñ &= 0 \\ &\vdots \\ Q_o - Q_s\bar{Q}_o &= 0 \end{aligned}$$

Calculando Q_s de cada una de las ecuaciones independientes [13] (lo que da "q + f" valores distintos de Q_s) elegimos el menor de todos los valores positivos que resulten como el valor máximo a que se puede introducir Q_s, pues a valores superiores de dicha variable la actividad correspondiente corregida quedaría operando a niveles negativos, dando una solución inadmisible.1/

Supongamos que el menor valor positivo de Q_s obtenido del sistema [11] sea el que hace cero el valor corregido de operación de la actividad "ñ" de la base.

$$[14] \qquad Q_s^* = \frac{Q_ñ}{\bar{Q}_ñ}$$

Ahora podemos pasar a una segunda base, en que se remplaza la actividad "ñ" de la primera por la actividad "s" operada al nivel Q_s^*.

1/ Los valores negativos de Q_s que resulten del sistema [11] no interesan porque el valor corregido de la actividad correspondiente sería siempre positivo en esos casos.

Los niveles de operación corregidos del resto de las actividades de la primera base estarán dados por las ecuaciones:

$$Q_c^* = Q_c - Q_s^*\bar{Q}_c$$
$$\vdots$$
$$Q_j^* = Q_j - Q_s^*Q_j$$
$$\vdots$$
$$Q_{\tilde{n}}^* = 0 \;; \quad Q_s^* = Q_s^*$$
$$\vdots$$
$$Q_o^* = Q_o - Q_s^*\bar{Q}_o$$

El tener una nueva base con tecnología diferente - pues se ha cambiado una de las columnas de coeficientes - hace que varíe el sistema de precios de equilibrio que regiría en condiciones de competencia perfecta. El segundo sistema de precios de cálculo se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones idéntico al [6], excepto por el cambio de la actividad "ñ" por la "s". Con este sistema se evalúan las actividades excluidas de la segunda base y se elige la que tenga mayores beneficios netos positivos para que forme parte de una tercera base. La actividad que sale de la segunda base se determina de la misma manera que en la etapa anterior.

Siguiendo la rutina de cálculo descrita se irá consiguiendo en cada etapa una solución básica factible que use menos capital que el empleado en la etapa anterior. El proceso se termina cuando se llega a una base a cuyos precios de equilibrio no hay ninguna actividad, de las excluidas de la misma, que tenga beneficios netos positivos.

Los valores de solución de las actividades de esta última base cumplen con la condición de lograr el equilibrio en los "q + f" mercados descritos, puesto que como que se partió de una primera base factible el método garantiza que en el paso de una a otra se conserva el equilibrio ya alcanzado en esa primera etapa.

Por otra parte, el sistema de precios relativos asociado con la última base - que refleja la tecnología que describen las actividades incluidas en ella - es el sistema de precios que, en condiciones de competencia perfecta, llevaría precisamente a elegir esas formas de producción que son las que, cumpliendo con las metas, minimizan el uso de capital.

Al minimizar el uso del capital, que es el único recurso que se puede variar - pues el del resto está fijado (en forma óptima) en las metas - se logra minimizar los costos sociales totales del plan para producir una cantidad óptima de producto, que también se especifica en las metas.

El sistema de precios asociado con la base óptima cumple, por tanto, con las dos condiciones exigidas al sistema de precios sociales que se busca, y una vez calculado puede usarse descentralizadamente para evaluar proyectos no detallados en el modelo.

También se puede demostrar ahora que la solución óptima es la solución básica encontrada, y no puede ser otra que tenga más actividades operadas a niveles positivos que las "q + f" encontradas por el procedimiento descrito.

En efecto, el procedimiento analizado para introducir nuevas actividades sin romper el equilibrio de los mercados alcanzado en una solución básica cualquiera permite, siempre que se desee, operar más de "q + f" actividades, teniendo cuidado de corregir los valores de la solución básica rebajándolos en el valor de la combinación equivalente.

Pero como la solución básica última se caracteriza por el hecho de que, al sistema de precios asociada a la misma, no hay ninguna otra actividad que tenga beneficios positivos, en condiciones de competencia perfecta, quiere decir que cualquiera otra actividad que se deseara operar tendría costos mayores que las de la base, por usar mas capital; luego, su introducción significaría aumentar el uso total de capital ya alcanzado en la última solución básica.

9. Crítica a los planteamientos usuales de programación lineal para resolver problemas económicos Proposición de soluciones

Hemos visto que el planteamiento del problema explicado en detalle en el punto 8 de este estudio, proviene de la simplificación de uno mucho más general, el que tratado correctamente en todas sus implicaciones conduce a la consideración del problema más amplio de la teoría económica: el del equilibrio en el tiempo de todas las variables.

Esta simplificación tiene sentido solamente si se supone que existe otro modelo general de planificación, que asegure que los elementos de conexión del modelo parcial comentado (metas) con todo el resto de las variables de la economía, representen un óptimo social deseable.

Sin embargo, una vez aceptada esta premisa, es necesario que el modelo de optimización destinado a obtener criterios de asignación de recursos que está basado en la teoría neo-clásica del bienestar, a que se llega por la competencia perfecta respete el planteamiento de dicha teoría. De otra manera, se corre el riesgo que las soluciones que dé el modelo no sean comparables con las soluciones imperfectas que dan los mercados existentes, que son los que se intenta corregir.

Los problemas que se comentarán en este punto se derivan de la necesidad de considerar los aspectos intertemporales envueltos en el concepto del uso de capital que interviene en las funciones criterio del modelo de programación lineal, y de su relación con el resto de las variables económicas del mismo.

El primer problema surge de que muchas inversiones necesarias en nuevos proyectos tienen períodos de maduración (instalación y puesta en marcha) superiores a un año, lo que obliga a hacer las inversiones necesarias con la debida anticipación a las demandas previstas. En estos casos, las metas de nuestro problema se refieren a un año distinto, posterior a aquél en que hay que hacer las inversiones que se están minimizando en la función criterio.

El segundo problema surge de la necesidad de producir los bienes de capital que constituyen las inversiones que se calculan, pués en tal caso dichos bienes deben ser parte de las metas de producción en el año que corresponda, factor que no se ha considerado en el planteamiento anterior.

El tercer problema se refiere al significado y forma de calcular los coeficientes c_j, de capital, que intervienen en la función criterio. En gran parte de la literatura existente sobre el tema se definen esos coeficientes como las necesidades de capital (inversión) que requieren las distintas actividades (proyectos) para producir una unidad física de sus respectivos productos.

Es fácil ver que el cálculo de los beneficios medios (y marginales) netos que se efectúa con la fórmula [8] no tendrían en ese caso ninguna relación con el cálculo que exige la teoría económica o con el que haría un empresario privado colocado en esa misma situación. Ello se debe a que se están comparando cantidades no homogéneas, cuales son el flujo de ingresos y los costos medios - representados por el cálculo de los beneficios medios brutos de la fórmula [7] - con el costo medio del stock de capital necesario para producir esos flujos.

El cálculo correcto del costo del uso del capital en términos de un flujo anual, debe incluir los costos medios que por concepto de intereses y amortización anual de la inversión, y en condiciones de equilibrio intertemporal, representa una inversión unitaria "c_j" como la definida anteriormente. Estos costos, medidos en términos sociales, dependen de la tasa de interés de equilibrio (de oportunidad social) y de la vida útil de los bienes de capital que constituyen la inversión. La forma más correcta de calcularlos es multiplicando la inversión unitaria necesaria por el "factor de recuperación del capital" correspondiente. Si llamamos c'_j a estos costos equivalentes, su cálculo estaría dado por la expresión

$$[16] \quad c'_j = c_j \frac{i(1+i)^{n_j}}{(1+i)^{n_j} - 1} \qquad (\text{para } j = 1, \ldots, u)$$

donde c_j es la inversión fija necesaria para producir una unidad física por parte de la actividad "j"; "i" es la tasa de interés de oportunidad social; y "n_j" es la vida útil de las inversiones necesarias en la actividad "j".1/

Para que el problema planteado en el punto 8 de este estudio tenga significación económica, la función criterio debe contener los coeficientes c'_j y no los "c_j" pues, de otra manera, se están ignorando los problemas intertemporales que hay involucrados en la comparación de una inversión (que es un stock) con los flujos anuales de ingresos y gastos que ella origina a lo largo de la vida útil de los bienes de capital que la componen.

Al colocar como coeficientes de la función criterio las expresiones que se obtienen de la fórmula [16] - que dependen de la tasa de interés de equilibrio intertemporal - aquélla expresará exactamente los costos anuales equivalentes de las inversiones necesarias en los diferentes proyectos, costos que son comparables con el resto de los que se computan en los otros mercados que tienen relación con cada proyecto. La comparación es teóricamente válida si la conversión de stocks a flujos se hace a una tasa de interés de oportunidad social que sea

1/ No está demás recordar que el "factor recuperación del capital" se puede obtener como la suma de un factor denominado "factor del fondo acumulativo de amortización", que es igual a $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ y de la tasa de interés "i". El fondo acumulativo de amortización multiplicado por el capital, da la carga uniforme anual por concepto de amortización que, colocada acumulativamente a interés compuesto es capaz de recuperar la inversión en n años.

compatible con las metas generales del plan de desarrollo. 1/

Como un modelo de programación lineal estático - como el comentado aquí - no da el valor de la tasa de interés de equilibrio que hay que usar en la fórmula [16], sino que ella depende (como las metas) del modelo general del plan de desarrollo, se ve una vez más que los criterios de evaluación que se obtienen también dependen estrechamente de dicho modelo general de programación.

Una vez decidida la tasa de interés que hay que usar y conociendo la vida útil de los bienes de capital (n_j) que componen la inversión necesaria en cada proyecto "j", resulta claro que los coeficientes c'_j son números perfectamente determinados y la técnica de optimización descrita puede ser aplicada sin mayores problemas. Igualmente, al aplicar dicha técnica ya sea colocando $p_c = 1$, o p_c igual a cualquier otro número, los precios relativos que se obtienen son los mismos.

Sin embargo, es necesario tener perfectamente claro el hecho de que los precios relativos que se obtienen no son los mismos si se usan distintas tasas de interés para calcular los factores de recuperación del capital por la fórmula [16], aun en el caso en que todos los proyectos tengan la misma vida útil, pues los factores de recuperación del capital no son proporcionales a la tasa de interés.

El único caso en que los factores de recuperación del capital serían estrictamente proporcionales (iguales) a la tasa de interés de equilibrio, ocurriría cuando todos los bienes de capital tuviesen vida

---

1/ Hasta aquí se ha tomado en cuenta sólo la inversión fija necesaria. Si se quiere hacer lo mismo con la inversión en capital circulante, la fórmula [16] se transformaría en la siguiente:

$$c'_j = c_j \frac{i\,(1+i)^{n_j}}{(1+i)^{n_j}-1} + e_j i$$

donde e_j se definiría como el capital circulante necesario para producir una unidad física, por parte del proyecto "j".

útil infinita, caso hipotético muy alejado de la realidad como para que tenga uso práctico. En este caso, el problema de programación lineal planteado en la forma usual (con coeficientes c_j en vez de los c'_j) tendría sentido teórico y práctico para la solución de los precios relativos de óptimo que da el modelo, ya sea que se use $p_c = 1$ o a cualquier otro número.

Los tres problemas planteados en este punto podrían tener una solución teórica dentro del modelo de asignación de recursos si este se planteara como un modelo dinámico, donde se pueden hacer explícitas las interrelaciones que hay, en el tiempo, entre la formación de stocks y el resto de las variables que representan los flujos anuales de cada período.

Un planteamiento dinámico del problema permite considerar debidamente la secuencia anual de las inversiones según su período de maduración y la inclusión automática de las mismas en las demandas finales. Además, la solución del problema dual del modelo dinámico físico da una respuesta para la tasa de interés de equilibrio, como expresión de la productividad física marginal de las inversiones y de la tasa de ahorro elegida en función del modelo general de desarrollo.

La solución que aquí se propone para conservar la simplicidad del modelo estático estudiado, se expone a continuación.

Para resolver el tercer problema - el cálculo de la tasa de interés de oportunidad social necesaria para la determinación de los coeficientes c'_j de la función criterio - se puede intentar dos caminos.

El primero consiste en plantear un modelo dinámico muy reducido en que intervengan las variables macroeconómicas más importantes, cuya solución directa daría la tasa de crecimiento general de la economía, en tanto que su solución dual daría la tasa de interés de oportunidad social compatible con la anterior.

El segundo camino es más pragmático y consiste en aplicar la fórmula propuesta por Solow 1/ y citada por Chakravarty. 2/ La fórmula Solow es una generalización del resultado obtenido por Von Neumann, quien planteó en 1930 un modelo dinámico cerrado (en que el consumo de los trabajadores es una actividad más del modelo, en proporciones fijas necesarias para su subsistencia) en el que se reinvierte todo el producto neto (exceso del producto nacional sobre el consumo). En esas condiciones, se demuestra que la tasa máxima de crecimiento equilibrado del sistema es igual a la tasa mínima de interés de equilibrio.

Si no se reinvierte todo el producto neto, la tasa mínima de interés de equilibrio intertemporal estaría dada por la fórmula Solow, que es la siguiente:

$$[15] \quad i \text{ mínima} = \frac{g}{\sigma_r + \frac{1-D}{D}\sigma_s}$$

donde "g" es la tasa de crecimiento de la economía, D es la proporción que representan las utilidades dentro del ingreso nacional, σ_r es el coeficiente de ahorro de los rentistas y σ_s el de los asalariados.

La fórmula de Solow tiene la ventaja, desde el punto de vista del programador, de que la tasa de interés de oportunidad queda definida en función de tres variables macroeconómicas que quedan determinadas desde un comienzo, cuando se plantean las metas generales de un plan de desarrollo. Estas variables son la tasa de desarrollo y los coeficientes de ahorro de dos grandes sectores de la población.

1/ R.M., Solow "Notes towards a Wicksellian Theory of Distributive Share" (mimeografiado).

2/ S. Chakravarty "The Use of Shadow Prices in Programme Evaluation", en el libro Capital Formation and Economic Development Edited by P.N. Rosenstein-Rodan. George Allen and Unwin Ltd. 1964.

Una vez resuelto el problema del cálculo de la tasa de interés de oportunidad social y conociendo la vida útil de las inversiones de todos los proyectos y los coeficientes de capital "c_j", bastará calcular los coeficientes c'_j por medio de la fórmula [14] para poder plantear correctamente el problema de minimizar el uso del capital por medio del método descrito.

Los otros dos problemas derivados del período de maduración de las inversiones y de la necesidad de incluir éstas en las metas se podrían resolver por medio de aproximaciones sucesivas, incluyendo en las demandas finales de cada año la parte de las inversiones que corresponda realizar, según resulten de minimizar las funciones criterio de cada período, y volviendo a resolver el problema de minimización con las nuevas demandas finales que resulten en cada etapa.

10. Posibilidades de ampliación del modelo estático de programación lineal con fines de programación económica

Posiblemente, las simplificaciones que más alejan de la realidad al modelo estático comentado residen en las hipótesis de que la demanda neta de bienes y servicios que ocurre fuera del sistema de producción es conocida, lo mismo que la oferta neta de factores de producción (excepto el capital).

El hecho de que estas magnitudes que constituyen las metas (en unidades físicas) se calculen independientemente del modelo, hace que dichas cantidades sean insensibles a cambios en los precios de equilibrio, o sea, se suponen totalmente inelásticas a los precios. En lo que concierne al consumo privado y a la oferta de factores de producción, principalmente, esto no es muy realista.

Un primer mejoramiento del modelo estudiado podría ser el considerar una parte de las demandas y ofertas netas como variables, las que podrían hacerse depender de funciones sencillas (lineales, por ejmplo) de los precios de los bienes y factores. Sin embargo, ello convertiría el problema completo en uno de segundo grado (programación cuadrática), pues las cantidades físicas dependen de los precios, por lo que al multiplicar aquéllas por éstos para plantear el problema dual en términos de valor, quedarían los segundos elevados al cuadrado. La dificultad es que no hay un método general - como el simplex, para la programación lineal - para resolver los problemas de programación cuadrática si bien hay métodos para casos especiales de tipo cuadrático.

Un paso adicional para lograr un modelo más completo sería hacer explícitos los mercados de valores y de dinero - que han sido ignorados a lo largo de toda la metodología comentada - suponiendo que hay en ellas posibilidades de alcanzar un equilibrio que sea compatible con las metas físicas. Los problemas que puede traer la inclusión de esos mercados son difíciles de prever y constituyen un campo abierto a la investigación.

En todo caso, las posibilidades de ampliación del modelo de asignación de recursos significan intentos de reunir en un solo esquema de planificación los dos modelos que hemos comentado. Esto tiene gran interés teórico y práctico, pero exige el uso de instrumentos matemáticos cada vez más complejos.

En todo caso, las posibilidades de ampliación del modelo de asignación de recursos significan intentos de reunir en un solo esquema de planificación los dos modelos que hemos comentado. Esto tiene gran interés teórico y práctico, pero exige el uso de instrumentos matemáticos cada vez más complejos.

El Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social (ILPES) es un organismo autónomo creado bajo la égida de la Comisión Económica para América Latina (CEPAL) y establecido el 1º de julio de 1962 en Santiago de Chile como proyecto del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (Fondo Especial) con amplio apoyo del Banco Interamericano de Desarrollo (BID). Cuenta además con aportaciones directas de los gobiernos latinoamericanos y de otros organismos internacionales y privados. El objeto principal del Instituto es proporcionar, a solicitud de los gobiernos, servicios de capacitación y asesoramiento en América Latina y realizar investigaciones en diversos campos económicos y sociales. Desde su fundación, el Instituto ha venido ampliando y profundizando la acción iniciada por la CEPAL en materia de planificación merced al esfuerzo conjunto de un grupo de economistas y sociólogos dedicado por completo al estudio y búsqueda de soluciones de los problemas que preocupan en la actualidad a los países de esta parte del mundo.

Con el nombre común de Cuadernos del Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social se inician diversas publicaciones, que abrigan en su conjunto un mismo propósito. Por el momento los cuadernos se compondrán de tres series distintas que declaran en su título la naturaleza de su contenido: apuntes de clase; anticipos de investigación, y manuales operativos.

Con la publicación de sus cuadernos el Instituto persigue informar a un público más amplio de algunas de sus tareas de investigación y de enseñanza que no pueden menos de modificarse continuamente, ya sea por nuevas orientaciones de la ciencia o por la aparición de problemas antes desconocidos. Esa información quiere hacerse de tal modo que constituya invitación a un diálogo en el que se apoye realmente una auténtica cooperación intelectual. Por ello, es indudable que la mejor manera de alcanzar esas metas es hacer comunicables algunas de las tareas del Instituto en sus etapas de formación. Se trata, pues, de trabajos o fragmentos de trabajos que no pretenden en modo alguno la plena madurez de forma o contenido y que, por consiguiente, en uno u otro plano han de ser modificados en su día de acuerdo en lo posible -y ese sería el ideal que pretenden alcanzar los cuadernos- con el consenso científico suscitado por el diálogo y la discusión.

Los apuntes de clase dicen por sí mismos lo que la serie significa: lecciones o fragmentos de lecciones que pueden ser útiles no sólo al becario de los cursos de capacitación del Instituto y al estudiante de otros centros de enseñanza, sino al interesado en determinadas cuestiones no obstante las insuficiencias que necesariamente lleva consigo la expresión académica. Los anticipos de investigación tratan de hacer viable el estado de esfuerzos de conocimiento en sus etapas iniciales y que, sin embargo, contienen ya en ciernes el horizonte de la investigación perseguida. Los manuales operativos se conciben como instrumentos de trabajo que faciliten la acción de los organismos gubernamentales, y en general de los especialistas en ese campo, en tareas prácticas de la planificación muchas veces de carácter urgente.

En consecuencia, se presenta estos cuadernos al público con una conciencia crítica de todas sus limitaciones por ver precisamente en ella el mejor estímulo para la tarea que el Instituto tiene por delante.