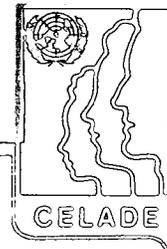


Albino Bocaz S.

EL USO DE MODELOS LINEALES
EN EL ANALISIS DEMOGRAFICO, CON APLICACIONES
AL ESTUDIO DE LA MORTALIDAD INFANTIL

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA



Santiago de Chile

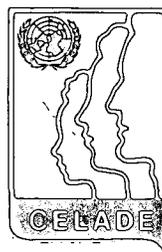
Abril de 1980

11-11-11

Albino Bocaz S.

EL USO DE MODELOS LINEALES
EN EL ANALISIS DEMOGRAFICO, CON APLICACIONES
AL ESTUDIO DE LA MORTALIDAD INFANTIL

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA



Serie A, N° 166

Santiago de Chile

Abril de 1980

INDICE

	<i>Página</i>
1. Introducción	1
2. Estructura de un modelo lineal	4
3. El principio de mínimos cuadrados	10
4. Estructura de la matriz ($X'X$)	11
5. Matrices de correlación	18
6. Medidas de la bondad de reproducción del modelo	22
7. Valores esperados de las estimaciones de los parámetros	26
8. Cambio de la estructura lineal de los efectos principales y de interacción en un modelo lineal	30
9. Aplicaciones	36
Ejemplo 1	36
Ejemplo 2	53
Ejemplo 3	62

Índice de cuadros

Cuadro

1 Distribución de nacidos vivos en el trienio 1957-1959, en la ciudad de Nueva York, según edad de la madre, raza y orden de la paridez	37
2 Distribución de nacidos muertos y de nacidos vivos fallecidos antes de los 28 días, en el trienio 1957-1959, en la ciudad de Nueva York, según edad de la madre, raza y orden de la paridez	37
3 Tasas de mortalidad perinatal (por mil) observadas en el trienio 1957-1959, en la ciudad de Nueva York, específicas por edad de la madre, raza y orden de la paridez	38
4 Tasas "teóricas" de natalidad perinatal bajo un modelo lineal que considera los efectos principales y la interacción edad-paridez	42
5 Chile: Distribución de los nacidos vivos por ocupación del padre y orden de la paridez, según nivel de instrucción de la madre, 1972	53

<i>Cuadro</i>	<i>Página</i>
6 Chile: Distribución de las defunciones de menores de 28 días, por ocupación del padre y orden de la paridez, según nivel de instrucción de la madre, 1972	54
7 Chile: Tasas de mortalidad neonatal por ocupación del padre y orden de la paridez, según nivel de instrucción de la madre, 1972	55
8 Chile: Tasas de mortalidad neonatal observadas y teóricas, por ocupación del padre y orden de la paridez del nacido <u>vi</u> vo, según nivel de instrucción de la madre, 1972	61
9 Chile: Distribución de los nacidos vivos que han sobrevivido los primeros 27 días de vida, por ocupación del padre y orden de la paridez, según nivel de instrucción de la madre, 1972	63
10 Chile: Distribución de fallecidos de 28 días hasta 11 meses de edad, por ocupación del padre y orden de la paridez, según nivel de instrucción de la madre, 1972	63
11 Chile: Tasas de mortalidad post-neonatal, por ocupación del padre y orden de la paridez, según nivel de instrucción de la madre, 1972	64
12 Chile: Importancia relativa de los cuadrados medios en relación con la mortalidad neonatal y post-neonatal, según tipo de efectos, 1972	66
13 Chile: Tasas de mortalidad post-neonatal observadas y teóricas, por ocupación del padre y orden de la paridez, según nivel de instrucción de la madre, 1972	68

1. *Introducción*

La realización, hasta el presente, de numerosas encuestas demográficas permite disponer en la actualidad de un valioso material de información demográfica con el cual es posible investigar la variación o interrelación de un indicador demográfico en función de una serie de variables de control. Así, por ejemplo, con los datos de una encuesta muestral de fecundidad en que se investiga básicamente la formación de la familia (historia de natalidad), es posible relacionar el tamaño de familia alcanzado (paridez alcanzada) en función de: la edad de la mujer encuestada; la duración de la unión; el uso de métodos de planificación de la familia y otras variables auxiliares tales como el nivel educacional de la mujer, el nivel socio-económico de la familia, el lugar de residencia, etc.

En otros casos, es posible disponer de estadísticas vitales en que se registra adecuadamente la natalidad y datos tales como: la edad de la madre, el orden de la paridez, el nivel educacional de la madre, la ocupación del padre, etc., lo que permite analizar la variación de la fecundidad específica en función de los efectos principales o de los de interacción de esas variables.

Asimismo, las estadísticas sobre mortalidad infantil permiten analizar la variación de la mortalidad neonatal y postneonatal en función de factores tales como: la edad de la madre, el orden de la paridez, la residencia geográfica, la ocupación del padre, el nivel educacional de la madre, el nivel de la atención materno-infantil, etc.

Corrientemente, los análisis que se realizan llama la atención acerca de la variación de un indicador demográfico recurriendo al uso de la correlación (gráfica o numérica simple) que puede detectarse entre el indicador y cada una de las variables cuantitativas o cualitativas consideradas por el indicador.

En muchos otros casos cuando se comparan dos poblaciones o más, se avanza en el análisis en el sentido de tratar de medir la influencia de ciertos factores en la variación del indicador demográfico recurriendo al uso de tasas tipificadas o tasas esperadas, en que por lo general lo que se elimina, básicamente, es el efecto de estructura.

Todos esos intentos, sin embargo, no logran determinar de manera más directa la importancia relativa que tienen los diversos factores, ya sea (en forma directa) bajo el supuesto que actuaran en forma independiente o en interrelación.

Una forma de análisis que se presta para enfrentar, con mayor éxito, la medición de la importancia relativa de los efectos simples (o "principales" como más adelante se los denomina) y los de interacción, la constituyen los modelos lineales de regresión múltiple (con o sin transformación de la variable dependiente). Se puede decir que un modelo lineal representa un método de relativa sencillez para descomponer los valores medios observados en las diversas subclases consideradas (en la tabla de múltiple entrada) en una serie de componentes, cada una de las cuales pretende medir el efecto (medio) que en ese valor medio de celda tiene cada una de las variables consideradas, ya sea actuando en forma independiente o en interrelación con las otras variables funcionales.

Se ha usado la expresión "efecto" que la variable tiene sobre la medida obtenida en una subclase particular, sin querer indicar con ello que esa variable puede ser considerada como un factor condicionante (o causal) del nivel alcanzado por el indicador demográfico. Únicamente, a través del modelo, se trata de indicar que según sea la categoría (o nivel) considerada en la variable ella tiene cierta importancia en la determinación (funcional) del valor indicado en la subclase. Además, el modelo lineal prevé que si se considera simultáneamente otra variable, la combinación especial de categorías que implica la subclase, para cada una de esas variables, puede implicar un probable "efecto de interacción", que debe tenerse en cuenta para describir mejor el nivel alcanzado por el indicador demográfico en esa subclase.

En el análisis de las propiedades más generales de un modelo lineal, usado en el estudio de tablas de múltiple entrada, se indicarán las relaciones matemáticas de mayor interés, para muchos lectores ya conocidas, dándoles una estructura especialmente práctica, con el propósito que el proceso numérico de determinación de los parámetros se lleve de modo relativamente cómodo.

Con base en este propósito, se hace un detenido análisis de la estructura de las submatrices en que se apoya la determinación de los componentes (o parámetros) del modelo lineal, de modo que la determinación de los elementos de esas diferentes submatrices (submarginales condicionados) se realice en forma sencilla. No está de más anticipar, desde ya, que en la medida que las interacciones son de cierta importancia, la matriz que debe invertirse para determinar el valor de los parámetros del modelo es de una dimensión tal que el proceso numérico solamente puede realizarse con el uso de un computador.

También se presenta, en este documento, un sistema sencillo para expresar el modelo lineal, de manera que nunca se forme una matriz de rango incompleto. Como bien se sabe, una matriz de rango incompleto obliga a modificar ciertas líneas de la matriz, introduciendo para ello otras relaciones de dependencia lineal (restricciones) entre los parámetros del modelo. Además, la introducción de estas nuevas relaciones hace que la matriz resulte de una dimensión exagerada, sin ninguna necesidad. Por otra parte, puede demostrarse que es relativamente simple relacionar estos parámetros con los de un modelo en que los parámetros tienen otro tipo de dependencia lineal.

Finalmente, para aclarar mayormente el uso de las numerosas relaciones indicadas en el texto, se incluyen tres aplicaciones numéricas referentes a mortalidad infantil. Estos ejemplos sirven, además, para indicar (numéricamente) cómo a través de un modelo lineal es posible estimar la importancia de los efectos principales y de los de interacción de orden 1 de las diferentes variables y en qué medida se hace necesario medir estas interacciones para lograr una mejor descripción de los valores medios observados en las diferentes subclases.

2. Estructura de un modelo lineal

El modelo lineal que se analizará corresponde al que se aplica en el caso de una tabla de tres entradas (tres criterios de clasificación), modelo que contiene no solamente los componentes referentes a los efectos principales, sino también a los de interacción de orden 1 (entre 2 factores) y los de interacción de orden 2 (entre los 3 factores).

Estas relaciones pueden extenderse, con relativa facilidad, para tablas con un número mayor de entradas.

Denotemos por:

- $i = 1, 2, 3 \dots, a$ a) las (a) categorías en que se han separado los individuos según la variable (2) considerada.
- $j = 1, 2, 3 \dots, b$ b) las (b) categorías correspondientes a la variable (3) considerada.
- $k = 1, 2, 3 \dots, c$ c) las (c) categorías correspondientes a la variable (4) considerada.

(En el caso del análisis de la mortalidad infantil la variable (2) puede ser la "edad de la madre del nacido vivo"; la variable (3), "el orden de la paridez"; la variable (4), "el nivel socio-económico del padre").

- n_{ijk} = número de individuos en la subclase (ijk).
- x_{ijkm} = valor de la variable (1) para el m ésimo individuo en la subclase (ijk). En el caso de una variable cualitativa: $x_{ijk} = 1$ si el individuo tiene la característica (el nacido vivo muere antes de los 28 días de vida). $x_{ijk} = 0$ si el individuo no la tiene (el nacido vivo no muere antes de los primeros 28 días de vida).
- $x_{ijk} = \sum_{m=1}^{n_{ijk}} x_{ijkm}$ = número total de individuos de la subclase (ijk) que tienen una determinada característica.

Si se adopta un modelo lineal completo (MC), se tiene que el valor medio esperado para la característica considerada, para cada individuo de la subclase (ijk), es igual a:

$$\bar{x}_{ijk} = \mu + a_i + b_j + c_k + u_{ij} + v_{ik} + w_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad (1)$$

siendo

- μ = efecto global medio.
- a_i = efecto simple de la variable (2).
- b_j = efecto simple de la variable (3).
- c_k = efecto simple de la variable (4).
- u_{ij} = efecto de interacción de las variables (2) y (3).
- v_{ik} = efecto de interacción de las variables (2) y (4).
- w_{jk} = efecto de interacción de las variables (3) y (4).
- ϵ_{ijk} = efecto de interacción de las variables (2), (3) y (4), simultáneamente.

Podemos modificar los componentes indicados en el Modelo (1) determinando nuevos componentes, funciones lineales de los componentes originales, tomando como nivel de referencia, el valor correspondiente a la subclase (111). Para esta subclase se tiene:

$$(111) = \mu + a_1 + b_1 + c_1 + u_{11} + v_{11} + w_{11} + \epsilon_{111} \quad (2)$$

y como

$$(i11) = \mu + a_i + b_1 + c_1 + u_{i1} + v_{i1} + w_{11} + \epsilon_{i11} \quad (3)$$

se puede escribir:

$$\lambda_i = (i11) - (111) = (a_i - a_1) + (u_{i1} - u_{11}) + (v_{i1} - v_{11}) + (\epsilon_{i11} - \epsilon_{111}) \quad (4)$$

que representaría simplemente el efecto del cambio de categoría (i) con respecto a la variable (2) moviéndose desde el nivel inferior ($i=1, j=1, k=1$) de las variables (2), (3) y (4) hasta el nivel ($i \neq 1, j=1, k=1$).

De la misma manera dado que

$$(1j1) = \mu + a_1 + b_j + c_1 + u_{1j} + v_{11} + w_{j1} + \varepsilon_{1j1} \quad (5)$$

$$\mu_j = (1j1) - (111) = (b_j - b_1) + (u_{1j} - u_{11}) + (w_{j1} - w_{11}) + (\varepsilon_{1j1} - \varepsilon_{111})$$

(μ_j) representaría el diferencial simple al cambiar de categoría (j) con respecto a la variable (3), moviéndose desde el nivel inferior ($i=1, j=1, k=1$) de las variables (2), (3) y (4) hasta un nivel ($i=1; j \neq 1; k=1$).

$$(11k) = \mu + a_1 + b_1 + c_k + u_{11} + v_{1k} + w_{1k} + \varepsilon_{11k} \quad (6)$$

$$\rho_k = (11k) - (111) = (c_k - c_1) + (v_{1k} - v_{11}) + (w_{1k} - w_{11}) + (\varepsilon_{11k} - \varepsilon_{111})$$

siendo (ρ_k) el diferencial simple al cambiar de categoría (k) con respecto a la variable (4), moviéndose desde el nivel inferior ($i=1, j=1, k=1$) de las variables (2), (3) y (4) hasta el nivel ($i=1, j=1, k \neq 1$).

Como puede observarse, los componentes (λ_i, μ_j, ρ_k) no solamente toman en cuenta los efectos simples de las variables (2), (3) y (4), esto es, el efecto si actuaran en forma independiente, sino los efectos de interacción que puede existir entre el nivel (1) de la variable (2) y los niveles (j, k) de las otras (2) variables.

De esa manera, es necesario determinar el efecto adicional al cambiar de categoría (o nivel) con respecto a la variable (3), si se toma en cuenta que ese cambio puede estar asociado con el nivel ($j \neq 1$) de la variable (3).

El valor teórico medio en la subclase (i, j) es igual a:

$$(i, j, 1) = \mu + a_i + b_j + c_1 + u_{ij} + v_{i1} + w_{j1} + \varepsilon_{ij1}$$

cuya diferencia con el valor de la subclase de referencia ($i, 1, 1$) es:

$$(i, j, 1) - (i, 1, 1) = (b_j - b_1) + (u_{ij} - u_{i1}) + (w_{j1} - w_{11}) + (\varepsilon_{ij1} - \varepsilon_{i11})$$

que puede escribirse en la forma

$$(i, j, 1) - (i, 1, 1) = \mu_j + \hat{u}_{ij} \quad (7)$$

siendo

$$\hat{u}_{ij} = [(u_{ij} - u_{1j}) - (u_{i1} - u_{11})] + [(\varepsilon_{ij1} - \varepsilon_{1j1}) - (\varepsilon_{i11} - \varepsilon_{111})] \quad (8)$$

$$\text{con: } \hat{u}_{ij} = 0 \quad (9)$$

lo que nos indica que además del efecto simple (μ_j) existe un efecto adicional de interacción entre la variable (2) y (3) medido por (\hat{u}_{ij}).

De la misma manera se tiene que en la subclase ($i1k$) el valor medio esperado es igual a:

$$(i1k) = \mu + a_i + b_1 + c_k + u_{i1} + v_{ik} + w_{1k} + \epsilon_{i1k}$$

cuya diferencia con el valor medio de la subclase ($i11$) puede escribirse como:

$$(i1k) - (i11) = \rho_k + \hat{v}_{ik} \quad (10)$$

siendo:

$$\hat{v}_{ik} = [(v_{ik} - v_{1k}) - (v_{i1} - v_{11})] + [(\epsilon_{i1k} - \epsilon_{11k}) - (\epsilon_{i11} - \epsilon_{111})] \quad (11)$$

con:

$$\hat{v}_{ik} = 0 \quad (12)$$

esto es, que aparte del efecto simple (ρ_k) existe un efecto de interacción (\hat{v}_{ik}) entre las variables (2) y (4).

Finalmente para la subclase ($1jk$) se tiene

$$(1jk) = \mu + a_1 + b_j + c_k + u_{1j} + v_{1k} + w_{jk} + \epsilon_{1jk}$$

y su diferencia con respecto a la subclase de referencia (111) es

$$(1jk) - (1j1) = \rho_k + \hat{w}_{jk} \quad (13)$$

siendo

$$\hat{w}_{jk} = (w_{jk} - w_{1k}) - (w_{j1} - w_{11}) + (\epsilon_{1jk} - \epsilon_{11k}) - (\epsilon_{1j1} - \epsilon_{111}) \quad (14)$$

con:

$$\hat{w}_{1k} = 0 \quad (15)$$

lo que nos indica que existe un efecto de interacción (\hat{w}_{jk}) entre las variables (3) y (4).

Por otra parte para las subclases (ijk) con $i, j \neq 1$ se tiene:

$$(ijk) - (ij1) = \rho_k + \hat{v}_{ik} + \hat{w}_{jk} + \hat{\epsilon}_{ijk} \quad (16)$$

siendo:

$$\hat{\xi}_{ijk} = [(\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{1jk}) - (\varepsilon_{ij1} - \varepsilon_{1j1}) - (\varepsilon_{i1k} - \varepsilon_{11k}) - (\varepsilon_{i11} - \varepsilon_{111})] \quad (17)$$

con:

$$\hat{\xi}_{ijk} = 0 \quad (18)$$

siendo ($\hat{\xi}_{ijk}$) la componente necesaria para que las medias teóricas, en las subclases (ijk), dadas por el modelo lineal, "coincidan" con las medias observadas. Como puede observarse esta componente está formada íntegramente por interacciones de orden (2) entre las variables (2), (3) y (4) consideradas.

En resumen, el modelo indicado en (1) puede escribirse en la forma alternativa:

$$\bar{x}_{ijk} = \lambda_0 + (\lambda_i + \mu_j + \rho_k) + (\hat{u}_{ij} + \hat{v}_{ik} + \hat{w}_{jk}) + \hat{\xi}_{ijk} \quad (19)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= (111) & \hat{u}_{ij} &= (ij1) - (i11) - \mu_j \\ \lambda_i &= (i11) - (111) & \hat{v}_{ik} &= (i1k) - (i11) - \rho_k \\ \mu_j &= (1j1) - (111) & \hat{w}_{jk} &= (1jk) - (1j1) - \rho_k \\ \rho_k &= (11k) - (111) & \hat{\xi}_{ijk} &= (ijk) - (ij1) - (\rho_k + \hat{v}_{ik} + \hat{w}_{jk}) \end{aligned} \quad (20)$$

con:

$$\lambda_1 = \mu_1 = \rho_1 = 0 \quad \hat{u}_{1j} = \hat{v}_{1k} = \hat{w}_{1k} = \hat{\xi}_{1jk} = 0 \quad (21)$$

El modelo indicado en (19) puede recibir el nombre de modelo lineal "completo" esto es, que los valores teóricos previstos por él coinciden con los valores observados en las subclases (ijk).

Es posible verificar, en algunos casos, previa comprobación estadística o bien numérica, que las interacciones de orden (2), en un modelo lineal dado por la relación (19), no son de importancia. De esa manera, si no se tiene en cuenta este tipo de interacciones el modelo lineal pasa a denominarse un modelo lineal "incompleto". (MLI).

En este último caso ya no se reproducirán fielmente las medias en las subclases, pero es posible comprobar, numéricamente, que la reproducción de valores en las subclases es bastante adecuada.

En un tabla de triple entrada, considerando que las interacciones de orden dos son despreciables, la determinación de los diversos parámetros del modelo (incompleto) se torna difícil ya que, en este caso, no es posible determinarlos, como en el modelo completo, por un proceso de cálculo de diferencias entre las medias observadas en las subclases. La determinación de los parámetros del modelo incompleto puede hacerse mediante un proceso de aproximaciones sucesivas, que puede resultar de lenta convergencia, o bien invirtiendo la matriz correspondiente, de rango relativamente grande. Esta última solución es de mayor utilidad ya que permite hacer pruebas de significación estadística con las interacciones encontradas.

Como se indicará más adelante, si el número de categorías consideradas para las (3) variables son (a), (b) y (c), respectivamente, la determinación de los efectos simples (o principales) y de las interacciones de orden uno, exige la inversión de una matriz de rango:

$$m = a(b+c-1) + (b-1)(c-1) \quad (22)$$

o, lo que es lo mismo, se debe resolver un sistema de (m) ecuaciones simultáneas.

De esa manera, si se hace un análisis de la variación de la mortalidad infantil, a través de un modelo lineal "incompleto" considerando la edad de la madre, el orden de la paridez y el nivel socio-económico de la familia, y si se tiene, por ejemplo:

- 7 categorías para la variable: edad de la madre del recién nacido.
- 7 categorías para la variable: orden de la paridez.
- 3 categorías para la variable: nivel socio-económico (ocupación) del padre, se estará frente a la inversión de una matriz de rango.

$$7(7+3-1) + (7-1)(3-1) = 75$$

3. El principio de mínimos cuadrados

Para la determinación de los efectos indicados en el modelo (19), no teniendo en cuenta las interacciones de orden 2, es útil introducir los siguientes vectores auxiliares:

- 1_0 = vector columna ($n \times 1$) con todos los elementos iguales a 1.
- 1_i = vector columna ($n \times 1$) con elementos iguales a 1 si se trata de una categoría (i) particular. El modelo tiene $(a-1)$ vectores de este tipo.
- $1_{.j}$ y $1_{..k}$ = vectores columna ($n \times 1$) con elementos iguales a 1 si se trata de una categoría (j) o (k) particular. El resto de los elementos es nulo. El modelo tiene $(b-1)$ vectores ($1_{.j}$) y $(c-1)$ vectores de tipo $1_{..k}$.
- 1_{ij} = vector columna ($n \times 1$) con elementos iguales a 1 si se trata de una subclase (ij) particular. El resto de los elementos es nulo. El modelo tiene $(a-1)(b-1)$ vectores de este tipo.
- $1_{i.k}$ y $1_{.jk}$ = vectores columnas de ($n \times 1$) con las condiciones indicadas para el vector 1_{ij} , si se trata de las subclases (ik) y (jk) particulares. El modelo tiene $(a-1)(c-1)$ vectores de tipo ($1_{i.k}$).

Teniendo estos vectores, los valores (x) observados para la variable "dependiente" (variable 1) están dados por la relación:

$$x_1 = Xb + \epsilon = \lambda_0 1_n + \left(\sum_{i=2}^a \lambda_i 1_{i.} + \sum_{j=2}^b \mu_j 1_{.j} + \sum_{k=2}^c \rho_k 1_{..k} \right) + \left(\sum_{i=2}^a \sum_{j=2}^b \hat{u}_{ij} 1_{ij} + \sum_{i=2}^a \sum_{k=2}^c \hat{v}_{ik} 1_{i.k} + \sum_{j=2}^b \sum_{k=2}^c \hat{w}_{jk} 1_{.jk} \right) \quad (23)$$

con:

$$b' = [\lambda_0 | (\lambda_i)' (u_j)' (\rho_k)' | (u_{ij})' (v_{ik})' (w_{jk})'] \quad (24)$$

siendo:

- $(\lambda_{i.})$ vector de los efectos $\lambda_{i.}$
- $(\mu_{.j})$ vector de los efectos $\mu_{.j}$
- $(\rho_{.k})$ vector de los efectos $\rho_{.k}$
- $(u_{ij.})$ vector de los efectos de interacción $\hat{u}_{ij.}$
- $(v_{.ik})$ vector de los efectos de interacción $\hat{v}_{.ik}$
- $(w_{.jk})$ vector de los efectos de interacción $\hat{w}_{.jk}$
- (ϵ) vector (nx_1) de las diferencias entre valores observados y valores teóricos.

Para la determinación de los parámetros indicados en el vector (b) de la relación (24), podemos adoptar el principio de suma mínima de cuadrados de las discrepancias (ϵ) , esto es,

$$Q = \epsilon' \epsilon = (x_1 - Xb)' (x_1 - Xb) = x_1' x_1 - 2b' X' x_1 + b' (X' X) b \quad (25)$$

función-escalar que derivada con respecto (b) nos da

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2X' x_1 + 2(X' X) b \quad (26)$$

que bajo la condición de mínimo, nos conduce a la ecuación-normal:

$$(X' X) \hat{b} = X' x_1 \quad (27)$$

cuya solución es:

$$\hat{b} = (X' X)^{-1} X' x_1 \quad (28)$$

que nos confirma el problema señalado de inversión de una matriz de dimensión:

$$m = a(b+c-1) + (b-1)(c-1)$$

4. Estructura de la matriz $(X' X)$

Con el objeto de programar adecuadamente la inversión de la matriz $(X' X)$ es conveniente conocer la estructura (o tipos de elementos) que contienen las diversas submatrices que componen esta gran matriz. Para ello consideraremos la siguiente forma de escribir la matriz (X) de dimensión nx $a(b+c-1) + (b-1)(c-1)$.

$$X = (1_n \mid A_1 A_2 A_3 \mid U \ V \ W) \quad (29)$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 1'_n &= (11 \dots 1) && \text{un vector columna de dimensi3n } (nx1). \\
 A_1 &= (1_{2..} 1_{3..} \dots 1_{a..}) && \text{una matriz de dimensi3n } nx(a-1). \\
 A_2 &= (1_{.2.} 1_{.3.} \dots 1_{.b.}) && \text{una matriz de dimensi3n } nx(b-1). \\
 A_3 &= (1_{..2} 1_{..3} \dots 1_{..c}) && \text{una matriz de dimensi3n } nx(c-1). \\
 U &= (1_{ij.}) && \text{una matriz de dimensi3n } nx(a-1)(b-1). \\
 V &= (1_{i.k}) && \text{una matriz de dimensi3n } nx(a-1)(c-1). \\
 W &= (1_{.jk}) && \text{una matriz de dimensi3n } nx(b-1)(c-1);
 \end{aligned}$$

de esa manera la matriz producto ($X'X$) es una matriz simétrica igual a:

$$X'X = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
 n & 1'_n A_1 & 1'_n A_2 & 1'_n A_3 & 1'_n U & 1'_n V & 1'_n W \\
 \hline
 & A'_1 A_1 & A'_1 A_2 & A'_1 A_3 & A'_1 U & A'_1 V & A'_1 W \\
 & & A'_2 A_2 & A'_2 A_3 & A'_2 U & A'_2 V & A'_2 W \\
 & & & A'_3 A_3 & A'_3 U & A'_3 V & A'_3 W \\
 \hline
 & & & & U'U & U'V & U'W \\
 & & & & & V'V & V'W \\
 & & & & & & W'W
 \end{array} \right)$$

en que, por comodidad, solamente se han escrito los elementos diagonales y las submatrices sobre la diagonal que se repiten en forma simétrica bajo esa diagonal principal. Adem3as, se han formado ciertos recuadros en que se destacan los elementos de la matriz ($X'X$), cuando no se consideran las interacciones de orden uno, en cuyo caso la matriz ($X'X$) es de dimensi3n $(a+b+c-2) \times (a+b+c-2)$ y toma la forma m3s reducida

$$X'X = \left(\begin{array}{c|ccc}
 n & 1'_n A_1 & 1'_n A_2 & 1'_n A_3 \\
 \hline
 & A'_1 A_1 & A'_1 A_2 & A'_1 A_3 \\
 & & A'_2 A_2 & A'_2 A_3 \\
 & & & A'_3 A_3
 \end{array} \right)$$

Conviene anticipar que al describir las estructuras de las diversas submatrices que componen la matriz ($X'X$) se usar3a, a veces, la expresi3n

"matriz de tipo diagonal", queriendo con ello significar que es posible aceptar una generalización de la forma básica de una matriz diagonal, con elementos (escalares) en la diagonal principal. Podemos aceptar que los elementos diagonales en lugar de ser escalares pueden ser vectores o aun, en forma más general, matrices.

La estructura de las diversas matrices que integran la gran matriz $(X'X)$ es la siguiente:

- $A_1' A_1 = D(n_{i..})$ = matriz diagonal de dimensión $(a-1) \times (a-1)$, con elementos iguales a $(n_{i..})$.
- $A_1' A_2 = (n_{ij})$ = matriz de dimensión $(a-1) \times (b-1)$, con elemento (ij) igual a (n_{ij}) .
- $A_1' A_3 = (n_{i.k})$ = matriz de dimensión $(a-1) \times (c-1)$, con elemento (ij) igual a $(n_{i.k})$.
- $A_1' U = D(n'_{j/i})$ = matriz de "tipo diagonal" de dimensión $(a-1) \times (a-1)$ $(b-1)$, con vectores línea en la "diagonal" iguales a $n_{j/i}$. Los $(a-1)$ vectores diagonales tienen $(b-1)$ elementos. Así, por ejemplo $n'_{j/3} = (n_{32}, n_{33}, \dots, n_{3b})$.
- $A_1' V = D(n'_{k/i})$ = matriz de "tipo diagonal" de dimensión $(a-1) \times (a-1)$ $(c-1)$, con vectores líneas en la diagonal iguales a $n'_{k/i}$. Estos $(a-1)$ vectores líneas tienen $(c-1)$ elementos. Así, por ejemplo $n'_{k/3} = (n_{3.2}, n_{3.3}, \dots, n_{3.c})$.
- $A_1' W = (A_{ik/j})$ = matriz de dimensión $(a-1) \times (b-1) (c-1)$, formada por $(b-1)$ submatrices $A_{ik/j}$ de dimensión $(a-1) (c-1)$, cuyos elementos son (n_{ijk}) . Así, por ejemplo

$$A_{ik/3} = \begin{pmatrix} n_{232} & n_{233} & \dots & n_{23c} \\ n_{332} & n_{333} & \dots & n_{33c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{a32} & n_{a33} & & n_{a3c} \end{pmatrix}$$

$A_2'A = D(n_{.j.}) =$ matriz diagonal de dimensión $(b-1) \times (b-1)$, con elementos diagonales iguales a $(n_{.j.})$.

$A_2'A_3 = (n_{.jk}) =$ matriz de dimensión $(b-1) \times (c-1)$, con elementos iguales a $(n_{.jk})$.

$A_2'U = (D_{j/i}) =$ matriz de dimensión $(b-1) \times (a-1) (b-1)$, formada por submatrices diagonales $(D_{j/i})$, de dimensión $(b-1) (b-1)$, con elementos iguales a $(n_{ij.})$. Así por ejemplo:

$$D_{j/2} = \begin{pmatrix} n_{22} & & & & & \\ & n_{23} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & n_{2b} \end{pmatrix}$$

$A_2'V = (A_{jk/i}) =$ matriz de dimensión $(b-1) \times (a-1) (c-1)$, formada por $(b-1)$ submatrices $A_{jk/i}$ de dimensión $(b-1) \times (c-1)$, con elementos (n_{ijk}) . Así por ejemplo:

$$A_{jk/3} = \begin{pmatrix} n_{322} & n_{323} & \dots & n_{32c} \\ n_{332} & n_{333} & \dots & n_{33c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{3b2} & n_{3b3} & \dots & n_{3bc} \end{pmatrix}$$

$A_2'W = D n'_{k/j} =$ matriz de tipo "diagonal" de dimensión $(b-1) \times (b-1) (c-1)$, cuyos elementos diagonales son vectores línea $n'_{k/j}$ de $(c-1)$ elementos. Así por ejemplo:

$$n'_{k/3} = (n_{.32} \ n_{.33} \ \dots \ n_{.3c})$$

$A_3'A_3 = D(n_{..k}) =$ matriz diagonal de dimensión $(c-1) \times (c-1)$, cuyos elementos de la diagonal son iguales a $(n_{..k})$.

$A_3^U = (A_{k/j/i})$ = matriz de dimensión $(c-1) \times (a-1) (b-1)$, formada por $(a-1)$ submatrices $A_{k/j/i}$ de dimensión $(c-1) \times (b-1)$, cuyos elementos son (n_{ijk}) . Así, por ejemplo:

$$A_{j^k/3} = (n_{ijk}) = \begin{pmatrix} n_{322} & n_{332} & \cdots & n_{3b2} \\ n_{323} & n_{333} & \cdots & n_{3b3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{32c} & n_{33c} & \cdots & n_{3bc} \end{pmatrix}$$

$A_3^V = (D_{k/i})$ = matriz de dimensión $(c-1) \times (a-1) (c-1)$, formada por $(a-1)$ submatrices diagonales $(D_{k/i})$ de dimensión $(c-1) (c-1)$, cuyos elementos son $(n_{i.k})$. Así, por ejemplo:

$$D_{k/3} = \begin{pmatrix} n_{3.2} & & & & \\ & n_{3.3} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & n_{3.c} \end{pmatrix}$$

$A_3^W = (D_{k/j})$ = matriz de dimensión $(c-1) \times (b-1) (c-1)$, formada por $(b-1)$ submatrices diagonales $(D_{k/j})$ de dimensión $(c-1) (c-1)$, con elementos diagonales iguales a $(n_{.jk})$. Así, por ejemplo:

$$D_{k/3} = \begin{pmatrix} n_{.32} & & & & \\ & n_{.33} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & n_{.3c} \end{pmatrix}$$

$U'U = (D_{j/i})$ = matriz de tipo "diagonal" de dimensión $(a-1)(b-1)$ x $(a-1)(b-1)$, formada por $(a-1)$ submatrices diagonales $(D_{j/i})$ de dimensión $(b-1) \times (b-1)$, cuyos elementos son (n_{ij}) . Así, por ejemplo:

$$D_{j/2} = \begin{pmatrix} n_{22} & & & & \\ & n_{23} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & n_{2b} \end{pmatrix}$$

$U'V = (D_{jk/i})$ = matriz de tipo "diagonal" de dimensión $(a-1)(b-1)$ x $(a-1)(c-1)$ con $(a-1)$ submatrices $(A_{jk/i})$ de dimensión $(b-1) \times (c-1)$ en la diagonal y elementos (n_{ijk}) . Así, por ejemplo:

$$A_{jk/3} = \begin{pmatrix} n_{322} & n_{323} & \dots & n_{32c} \\ n_{332} & n_{333} & \dots & n_{33c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{3b2} & n_{3b3} & \dots & n_{3bc} \end{pmatrix}$$

(b-1) x (c-1)

$U'W = (D_{jk/i})$ = matriz de dimensión $(a-1)(b-1) \times (b-1)(c-1)$, formada por $(a-1)$ submatrices de tipo diagonal de dimensión $(b-1) \times (c-1)$. Estas $(a-1)$ submatrices de "tipo diagonal" son matrices con vectores $(n'_{k/ij})$ como elementos en la diagonal. Por ejemplo para $i=2$.

$$D_{jk/2} = (n'_{k/2j}) = \begin{pmatrix} n'_{k/22} & & & & \\ & n'_{k/23} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & n'_{k/26} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{con: } n'_{k/22} &= (n_{222} \quad n_{223} \quad \dots \quad n_{22c}) \\ n'_{k/23} &= (n_{232} \quad n_{233} \quad \dots \quad n_{23c}) \\ \dots & \quad (\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots) \\ n'_{k/2b} &= (n_{2b2} \quad n_{2b2} \quad \dots \quad n_{2bc}) \end{aligned}$$

$V'V = (D_{k/i})$ = matriz diagonal de dimensión $(a-1)(c-1) \times (a-1)(c-1)$, formada por $(a-1)$ submatrices diagonales de $(D_{k/i})$ de dimensión $(c-1) \times (c-1)$, con elementos $(n_{i.k})$. Así, por ejemplo:

$$D_{k/2} = \begin{pmatrix} n_{2.2} & & & & & \\ & n_{2.3} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & n_{2.c} \end{pmatrix}$$

$V'W = (D_{jk/i})$ = matriz de dimensión $(a-1)(c-1) \times (b-1)(c-1)$, formada por $(a-1)$ submatrices $(D_{jk/i})$ de dimensión $(c-1) \times (b-1)(c-1)$. Estas submatrices $D_{jk/i}$ están formadas a su vez por $(b-1)$ submatrices diagonales $(D_{k/ij})$, de elementos (n_{ijk}) . Así, por ejemplo para $i=2$.

$$D_{jk/2} = (D_{k/22} \quad D_{k/23} \quad \dots \quad D_{k/2b}) = \begin{pmatrix} n_{222} & n_{232} & \dots & n_{2b2} \\ n_{223} & n_{233} & \dots & n_{2b3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{22c} & n_{23c} & \dots & n_{2bc} \end{pmatrix}$$

$W'W = (D_{k/j})$ = matriz diagonal de dimensión $(b-1)(c-1) \times (b-1)(c-1)$, formada por $(b-1)$ submatrices $D_{k/j}$ de dimensión

$(c-1) \times (c-1)$ y elementos (n_{jk}) . Así, por ejemplo para $j=3$.

$$D_{k/3} = \begin{pmatrix} n_{.32} & & & & & \\ & n_{.33} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & n_{.3c} \end{pmatrix}$$

5. Matrices de correlación

Es conveniente cambiar la estructura de la matriz $(X'X)$ por otra estructura en que se destaque el grado de correlación que tienen los diversos vectores introducidos. Para ello se puede hacer notar que, si se tiene una variable aleatoria (x_j) , los (n) valores correspondientes a las (n) observaciones realizadas pueden representarse por el vector $(x_j)' = (x_{j1} \ x_{j2} \ \dots \ x_{jn})$.

La media (o promedio) de estos (n) valores (x_{ji}) es igual a $(1_n' x_j / n)$, siendo $(1_n')$ un vector línea con (n) elementos iguales a (1) .

El vector de las (n) desviaciones con respecto a la media es:

$$d_j = \begin{pmatrix} x_{j1} - \bar{x}_j \\ x_{j2} - \bar{x}_j \\ \dots \\ x_{jn} - \bar{x}_j \end{pmatrix} = x_j - \left(\frac{1_n' x_j}{n} \right) 1_n = \left(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n} \right) x_j \quad (30)$$

Si en lugar de tener una sola variable (x_j) , tenemos una serie de $(k-1)$ variables: $x_2 \ x_3 \ \dots \ x_k$, estos $(k-1)$ valores dan origen a una matriz de dimensión $(n_{x(k-1)})$:

$$x = (x_2 \ x_3 \ \dots \ x_k) \quad (31)$$

que premultiplicada por la matriz idempotente $(I_n - 1_n 1_n' / n)$, nos conduce a la matriz de las desviaciones (d_{ij}) con respecto a las medias respectivas:

$$D_2 = I - \left(\frac{1_n 1_n'}{n} \right) X_2 = (d_2 \ d_3 \ \dots \ d_k) \quad (32)$$

En lugar de usar estas desviaciones absolutas podemos introducir las desviaciones relativas:

$$z_j = d_j / \sigma_j \quad (33)$$

siendo (σ_j) la desviación típica correspondiente a la variable (x_j) con lo cual se puede escribir:

$$D_2 = (\sigma_2 z_2 \ \sigma_3 z_3 \ \dots \ \sigma_k z_k) = (z_2 z_3 \ \dots \ z_k) D_{\sigma_x} = Z_2 D_{\sigma_x} \quad (34)$$

siendo:

$$Z_2 = (z_2 z_3 \ \dots \ z_k) \quad (35)$$

$$D_{\sigma_x} = \begin{pmatrix} \sigma_{2x} & & & \\ & \sigma_{3x} & & \\ & & \dots & \\ & & & \sigma_{kx} \end{pmatrix}$$

de manera que:

$$D_2' D_2 = X_2' \left(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n} \right) X_2 = D_{\sigma_x} Z_2' Z_2 D_{\sigma_x} = n D_{\sigma_x} R_2 D_{\sigma_x} \quad (36)$$

siendo (R_2) la matriz de correlaciones de orden cero de las variables (x_j) .

Por otra parte, si se tiene la matriz:

$$Y_2 = (y_2 y_3 \ \dots \ y_k) \quad (37)$$

$$D_3 = \left(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n} \right) \cdot Y_2 = (\delta_2 \delta_3 \ \dots \ \delta_k) \quad (38)$$

la matriz (D_3) puede escribirse como:

$$D_3 = Z_3' D_{\sigma_y} \quad (39)$$

de modo que:

$$D_2' D_3 = X_2' \left(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n} \right) y_3 = D_{\sigma_x} Z_2' Z_3' D_{\sigma_y} = n D_{\sigma_x} R_{xy} D_{\sigma_y} \quad (40)$$

siendo (R_{xy}) la matriz de correlaciones entre las variables (x_i) e (y_j).

Se puede escribir ahora la matriz (X), indicada en (29) en forma más compacta aún:

$$X = (1_n \mid A_0 \mid U_0) \quad (41)$$

correspondiendo la submatriz (A_0) a los vectores de los efectos principales y la submatriz (U_0) a la de los vectores de las interacciones de orden (1).

La ecuación normal definida por la relación (27) puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1_n' \\ A_0' \\ U_0' \end{pmatrix} (1_n \mid A_0 \mid U_0) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n' \\ A_0' \\ U_0' \end{pmatrix} x_1 \quad (42)$$

siendo (v_0) el valor estimado para la celda (111) de referencia general; (v_2) el vector con elementos correspondientes a los efectos principales y (v_3) el vector de los elementos correspondientes a los efectos de interacción de orden (1).

La relación (38) puede descomponerse en las (3) relaciones siguientes:

$$n v_0 + (1_n' A_0) v_2 + (1_n' U_0) v_3 = 1_n' x_1 \quad (43)$$

$$(A_0' 1_n) v_0 + (A_0' A_0) v_2 + (A_0' U_0) v_3 = A_0' x_1 \quad (44)$$

$$(U_0' 1_n) v_0 + (U_0' A_0) v_2 + (U_0' U_0) v_3 = U_0' x_1 \quad (45)$$

sustituyendo en las ecuaciones (44) y (45) el valor de (v_0) dado por la ecuación (43) se llega a:

$$A'_0 \left(I_n - \frac{1}{n} \frac{1'1'}{n} \right) A_0 v_2 + A'_0 \left(I_n - \frac{1}{n} \frac{1'1'}{n} \right) U_0 v_3 = A'_0 \left(I_n - \frac{1}{n} \frac{1'1'}{n} \right) x_1$$

$$U'_0 \left(I_n - \frac{1}{n} \frac{1'1'}{n} \right) A_0 v_2 + U'_0 \left(I_n - \frac{1}{n} \frac{1'1'}{n} \right) U_0 v_3 = U'_0 \left(I_n - \frac{1}{n} \frac{1'1'}{n} \right) x_1 \quad (47)$$

y teniendo en cuenta las relaciones (36) y (38) se puede escribir:

$$(nD_{\sigma_A} R_{A^D}^D) v_2 + (nD_{\sigma_A} R_{AU^D}^D) v_3 = nD_{\sigma_A} \eta_{A1} \sigma_1 \quad (48)$$

$$(nD_{\sigma_U} R_{AU^D}^D) v_2 + (nD_{\sigma_U} R_{U^D}^D) v_3 = nD_{\sigma_U} \eta_{U1} \sigma_1 \quad (49)$$

siendo (η_{A1}) el vector de las correlaciones de los efectos principales con la variable dependiente y (η_{U1}) el vector de las correlaciones de las interacciones de orden (1) con esa misma variable dependiente.

Las relaciones (48) y (49) pueden escribirse en forma muy compacta de la manera:

$$R_{A^D} \beta_A + R_{AU^D} \beta_U = \eta_{A1} \quad (50)$$

$$R_{AU^D} \beta_A + R_{U^D} \beta_U = \eta_{U1}$$

siendo:

$$\beta_A = D_{\sigma_A} v_2 / \sigma_1 ; \quad \beta_U = D_{\sigma_U} v_3 / \sigma_1 \quad (51)$$

los vectores de los efectos principales y de interacción de orden (1) debidamente tipificados.

La solución del sistema (50) simbólicamente es igual a:

$$\beta_U = (R_U - R_{AU} R_A^{-1} R_{AU})^{-1} (\eta_{U1} - R_{AU} R_A^{-1} \eta_{A1}) \quad (52)$$

$$\beta_A = R_A^{-1} (\eta_{A1} - R_{AU} \beta_U) \quad (53)$$

lo que nos indica que habiendo determinado el inverso de la matriz de correlación (R_A) , de dimensión $(a+b+c-3)$, entre los vectores referentes a los efectos principales, se debe proceder posteriormente a la inversión

de una matriz cuya dimensión ($m_0 \times m_0$) depende del número de interacciones de orden (1) consideradas en el modelo, ($m_0 = m - (a+b+c-2)$ con $m = c(b+c-1) + (b-1)(c-1)$), si se toman en cuenta todas las interacciones de orden (1).

Si en el modelo lineal se descarta el efecto de las interacciones de orden (1), el modelo toma el nombre de modelo "lineal simple". En ese caso, el sistema (50) se reduce a:

$$R_A \beta_A = \kappa_{A1} \quad (54)$$

cuya solución se expresa simbólicamente como:

$$\beta_A = R_A^{-1} \kappa_{A1} \quad (55)$$

lo que indica que es suficiente invertir la matriz de correlaciones de los efectos principales de rango ($a+b+c-2$).

6. Medidas de la bondad de reproducción del modelo

La suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores observados y los valores previstos por el modelo lineal puede escribirse como:

$$\begin{aligned} Q_{\min} &= x_1' x_1 - \hat{b}' X' x_1 = x_1' x_1 - (v_0' v_2' v_3') \begin{pmatrix} 1_n' x_1 \\ A_0' x_1 \\ U_0' x_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1' x_1 - [1_n' x_1 v_0 + v_2' (A_0' x_1) + v_3' U_0' x_1] \end{aligned} \quad (56)$$

y teniendo en cuenta la relación (43) que permite expresar (v_0) en función de los vectores (v_2) y (v_3) se puede escribir:

$$Q_{\min} = x_1' \left(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n} \right) x_1 - v_2' A_0' \left(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n} \right) x_1 - v_3' U_0' \left(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n} \right) x_1 \quad (57)$$

y con base en las relaciones (36), (40) y (51) se tiene:

$$Q_{\min} = n \sigma_1^2 [1 - (\beta_A' \kappa_{A1} + \beta_U' \kappa_{U1})] = n \sigma_1^2 (1 - \beta' \kappa) \quad (58)$$

siendo:

$$\beta' = (\beta_A' \beta_U') ; \quad \kappa' = (\kappa_{A1} \kappa_{U1})$$

de modo que la reducción, debido a la consideración de efectos principales e interacciones de orden 1, puede representarse simbólicamente como:

$$(\beta'_k) \quad (59)$$

Si se adopta el modelo lineal "completo", las medias teóricas, en las diversas subclases ($i'jk$), coinciden con las medias observadas, pero aun a ese nivel de desagregación existe una variabilidad interna entre las observaciones, por el hecho de estar usando una media (o tasa) común para cada uno de los ($n_{i'jk}$) incluidos en esa subclase. Si consideramos que el número total de los individuos que tienen la característica considerada (variable 1) en la subclase ($i'jk$) es ($x_{i'jk}$) y que la variable considerada toma el valor (1) para los individuos que tienen la característica y el valor (0) para los que carecen de ella, la suma de cuadrados de las desviaciones de los valores individuales con respecto al valor medio ($p_{i'jk}$) es igual a:

$$Q_{i'jk} = x_{i'jk} (1-p_{i'jk})^2 + (n_{i'jk} - x_{i'jk}) (0-p_{i'jk})^2 \quad (60)$$

siendo:

$$p_{i'jk} = x_{i'jk} / n_{i'jk} \quad (61)$$

la proporción de individuos que en la subclase ($i'jk$) tienen la característica considerada.

De esa manera la relación (60) puede escribirse como:

$$Q_{i'jk} = x_{i'jk} q_{i'jk} \quad (62)$$

siendo:

$$q_{i'jk} = 1 - p_{i'jk} \quad (63)$$

y de esa manera el valor de (Q_{min}), bajo un modelo lineal "completo", es igual a:

$$(Q_{min})_{MLC} = \sum_{i'jk} n_{i'jk} q_{i'jk} = xq [1 - (\beta'_k)_{MLC}] \quad (64)$$

siendo:

$$\beta' = (\beta'_A \beta'_U \beta'_V) ; \quad n' = (n'_{A1} n'_{U1} n'_{V1}) \quad (65)$$

en que se han agregado los vectores (β_V) y (κ_{V1}) , correspondientes a las contribuciones de las interacciones de orden 2. Debe destacarse que los valores de los elementos de los vectores (β_A) y (β_U) en el caso del modelo lineal completo son diferentes a los que se determinan con un modelo incompleto.

En lugar de recurrir al uso de la suma de productos $(\beta\kappa)$, para determinar la reducción debida al uso de un modelo lineal completo, tal como se indica en la relación (58), es posible relacionar los valores de (Q_{min}) del modelo lineal con uno incompleto cualquiera.

Si se denota por (p_T) la tasa teórica en la subclase (ijk) usando un modelo lineal incompleto, el valor de (Q_{min}) para ese modelo puede escribirse como:

$$(Q_{min})_{MLI} = \sum_{ijk} (np_o q_T^2 + nq_o p_T^2) \quad (66)$$

siendo (p_o) la tasa observada en la celda (ijk) o, lo que es lo mismo, la proporción de individuos de esa subclase que presentan la condición particularmente analizada (les ocurre el suceso o participan en él).

Dado que:

$$p_o q_T^2 + q_o p_T^2 = p_o (1-p_T)^2 + q_o p_T^2 \quad (67)$$

siendo

$$q_o = 1-p_o ; \quad q_T = 1-p_T$$

la relación (67) puede escribirse como:

$$p_o q_T^2 + q_o p_T^2 = p_o - 2p_o p_T + p_T^2$$

o lo que es lo mismo:

$$p_o (p_o + q_o) - 2p_o p_T + p_T^2$$

de modo que finalmente se tiene la igualdad:

$$p_o q_T^2 + q_o p_T^2 = p_o q_o + (p_o - p_T)^2$$

con lo cual:

$$Q_{min}(MLI) = (Q_{min})_{MLC} + \sum_{ijk} n(p_o - p_T)^2 \quad (68)$$

siendo

$$(Q_{min})_{MLC} = \sum_{ijk} (np_o q_o) \quad (69)$$

De esa manera, de la relación (68) puede deducirse que la diferencia entre los valores de (Q_{min}) , entre un modelo lineal completo y uno incompleto, está dada por la suma "ponderada" de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados (p_o) y los valores teóricos (p_T) dados por el modelo lineal.

La relación (68), por otra parte, nos indica que el (Q_{min}) de un modelo lineal completo es el menor de todos, ya que ese caso $p_T = p_o$.

También la relación (68) puede ser calculada cuando no existe ninguna relación entre los valores de las tasas observadas en las subclases (ijk) y los diversos niveles (o categorías) de las variables consideradas.

De esa manera si $p_T = p$ (cte), siendo $p = x/n$, la tasa general, el valor de $Q_{min}(SR)$ es igual a:

$$Q_{min}(SR) = \sum_{ijk} p_o q_o + \sum_{ijk} n(p_o - p)^2 = \sum_{ijk} np_o - p \sum_{ijk} np_o = xq \quad (70)$$

siendo $x = \sum_{ijk} (np_o)$

$$q = 1 - p$$

y representa el valor mayor de Q_{min} .

La diferencia entre $Q_{min}(SR)$ y $Q_{min}(MLC)$ representa la máxima reducción "posible" debida al modelo de regresión. Esta diferencia es igual a:

$$Q_{min}(SR) - Q_{min}(MLC) = xq - \sum_{ijk} (np_o q_o) \quad (71)$$

De la misma manera, la reducción debida al uso de un modelo lineal incompleto es igual a:

$$Q_{min}(SR) - Q_{min}(MLI) = xq - \left[\sum_{ijk} np_o q_o + \sum_{ijk} n(p_o - p_T)^2 \right] \quad (72)$$

lo que permite determinar la eficiencia (η) de un modelo lineal incompleto mediante la relación:

$$\eta = 1 - \frac{\sum_{ijk} n(p_o - p_T)^2}{[xq - \sum_{ijk} (np_o q_o)]} \quad (73)$$

También es posible medir la eficiencia de reproducción de un modelo lineal incompleto usando los coeficientes tipificados de regresión y las correlaciones de las variables "auxiliares" y la variable dependiente.

Ya que la mayor reducción, debido a la regresión, se logra con el uso del modelo lineal "completo", la que según la relación (63) es igual a:

$$(\beta'x) \text{ MLC} \quad (74)$$

y que por un modelo lineal incompleto es:

$$(\beta'x) \text{ MLI}$$

la eficiencia de un modelo lineal incompleto está medida por la razón:

$$\theta = (\beta'x) \text{ MLI} / (\beta'x) \text{ MLC} \quad (75)$$

7. Valores esperados de las estimaciones de los parámetros

Es útil señalar que el vector:

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (76)$$

dado como solución al resolver la ecuación indicada en (42), tiene un valor esperado que coincide con el valor poblacional (b).

En efecto, dado que:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'x_1 \quad (77)$$

$$x_1 = Xb + \epsilon \quad (78)$$

entonces:

$$\hat{b} = b + (X'X)^{-1} X'\epsilon \quad (79)$$

de modo que el valor esperado de (\hat{b}) es:

$$E(\hat{b}) = b + (X'X)^{-1} X'(E\varepsilon) = b \quad (80)$$

dado que:

$$E(\varepsilon) = 0 \quad (81)$$

La variancia del vector (\hat{b}) está dada por:

$$\text{Var}(\hat{b}) = E(\hat{b}-b)(\hat{b}-b)' = (X'X)^{-1} E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 (X'X)^{-1} \quad (82)$$

teniendo en cuenta que los residuos (ε) son independientes y tienen variancia igual a (σ^2) .

La relación (82) nos indica, por lo tanto, que los coeficientes para las variancias y covariancias de los efectos principales y de interacción de orden 1 (elementos del vector \hat{b}) se obtienen invirtiendo la matriz $(X'X)$. Por esa razón pasemos ahora a considerar cuál es la estructura de esa matriz-inversa, para mostrar que está relacionada con los inversos de las matrices R_A y $(R_U - R_{AU}R_A^{-1}R_{AU})$ indicadas en la relación (52).

Para encontrar los elementos de la matriz inversa de $(X'X)$ escribimos la igualdad de condición de inverso:

$$\begin{pmatrix} n & 1'A_{n0} & 1'U_{n0} \\ A'_{0n} & A'A_{oo} & A'U_{oo} \\ U'_{0n} & U'A_{oo} & U'U_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & C_{22} & C_{23} \\ c_3 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (83)$$

con la condición $C_{32}=C_{23}$

Igualando los correspondientes elementos de la primera columna se tiene:

$$nc_1 + (1'A_{n0})c_2 + (1'U_{n0})c_3 = 1 \quad (84)$$

$$(A'_{0n})c_1 - (A'A_{oo})c_2 + (A'U_{oo})c_3 = 0 \quad (85)$$

$$(U'_{0n})c_1 + (U'A_{oo})c_2 + (U'U_{oo})c_3 = 0 \quad (86)$$

y reemplazando el valor escalar (c_1), deducido de la relación (84), en las relaciones (85) y (86), luego de reducir se llega a:

$$R_A \hat{c}_2 + R_{AU} \hat{c}_3 = \theta_2 \quad (87)$$

$$R_{AU} \hat{c}_2 + R_U \hat{c}_3 = \theta_3 \quad (88)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \hat{c}_2 &= D_{\sigma_A} c_2 ; & \theta_2 &= -D_{\sigma_A}^{-1} (A'_0 1_n / n^2) \\ \hat{c}_3 &= D_{\sigma_U} c_3 ; & \theta_3 &= -D_{\sigma_U}^{-1} (U'_0 1_n / n^2) \end{aligned} \quad (89)$$

que nos conduce a la solución:

$$\hat{c}_3 = (R_U - R_{AU} R_A^{-1} R_{AU})^{-1} (\theta_3 - R_A R_{AU}^{-1} \theta_2) \quad (90)$$

$$\hat{c}_2 = R_A^{-1} (\theta_2 - R_{AU} \hat{c}_3)$$

De la misma manera, igualando los correspondientes elementos de la segunda "columna":

$$R_A \hat{c}_{22} + R_{AU} \hat{c}_{32} = D_{\sigma_A}^{-1} \quad (91)$$

$$R_{AU} \hat{c}_{22} + R_U \hat{c}_{32} = 0 \quad (92)$$

siendo:

$$\hat{c}_{22} = D_{\sigma_A} c_{22} ; \quad \hat{c}_{32} = D_{\sigma_U} c_{32}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{32} &= - (R_U - R_{AU} R_A^{-1} R_{AU})^{-1} R_{AU} R_A^{-1} D_{\sigma_A}^{-1} \\ \hat{c}_{22} &= R_A^{-1} (D_{\sigma_A}^{-1} - R_{AU} \hat{c}_{32}) \end{aligned} \quad (93)$$

Finalmente, igualando los elementos de la tercera "columna" se tiene:

$$R_A \hat{c}_{23} + R_{AU} \hat{c}_{33} = 0 \quad (94)$$

$$R_{AU} \hat{c}_{23} + R_U \hat{c}_{33} = D_{\sigma_U}^{-1}$$

siendo:

$$\hat{C}_{23} = D_{\sigma_A} C_{23} ; \quad \hat{C}_{33} = D_{\sigma_U} C_{33} \quad (95)$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{33} &= (R_U - R_{AU} R_A^{-1} R_{AU})^{-1} D_{\sigma_U}^{-1} \\ \hat{C}_{23} &= -R_A^{-1} R_{AU} \hat{C}_{33} \end{aligned} \quad (96)$$

La determinación de los elementos de la matriz inversa $(X'X)$ no es suficiente para poder realizar las pruebas de significación estadística (hipótesis de nulidad) acerca de los efectos principales y de los de interacción de orden 1. De acuerdo a la relación (82) se hace necesario disponer de una estimación de la variancia interna (variabilidad dentro de las subclases ijk).

Para ello podemos usar como punto de apoyo el valor de la suma mínima de residuos:

$$\begin{aligned} Q_{min} &= x_1' x_1 - \tilde{b}' X' x_1 \\ &= x_1' x_1 - x_1' X(X'X)^{-1} X' x_1 \\ &= x_1' A x_1 \end{aligned} \quad (97)$$

siendo:

$$A = I_n - X(X'X)^{-1} X' \quad (98)$$

una matriz idempotente que cumple con la condición adicional:

$$AX = 0 \quad (99)$$

Podemos expresar el valor de (Q_{min}) en función de las desviaciones (ϵ) teniendo en cuenta la relación (70), de modo que:

$$A x_1 = A(Xb + \epsilon) = A\epsilon$$

cuyo traspuesto nos da: $x_1' A = \epsilon' A$

con lo cual podemos escribir:

$$Q_{min} = \epsilon' A \epsilon \quad (100)$$

$$E(Q_{\min}) = E(\epsilon' A \epsilon) = \sigma^2 \text{ Traza } A \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \text{y como Traza } (A) &= \text{Traza } [I_n - X(X'X)^{-1} X'] = \text{Traza } I_n - \text{Traza } X(X'X)^{-1} X' \\ &= \text{Traza } I_n - \text{Traza } [(X'X)^{-1} X'X] = \text{Traza } I_n - \text{Traza } I_m \\ &= (n - m) \end{aligned}$$

la estimación de la variancia interna (σ^2), supuesta igual para todas las subclases (hipótesis de homocedesticidad, no del todo aceptable), estaría dada por:

$$\text{Est. } (\sigma^2) = Q_{\min} / (n - m) \quad (102)$$

El valor de (Q_{\min}) que debe usarse en la relación (102) corresponde al que se obtiene cuando se usa el modelo lineal completo en cuyo caso las medias teóricas coinciden con las medias observadas. Como debe recordarse, la suma de cuadrados en este caso es:

$$Q_{\min} = \sum_{ijk} x_{ijk}^0 q_{ijk}^0 = xq [1 - (B'X)_{MLC}]$$

8. Cambio de la estructura lineal de los efectos principales y de interacción en un modelo lineal

El modelo lineal escrito en la forma (19) puede modificarse de manera lineal análoga, si se adopta otro tipo de función lineal para las componentes indicadas en la forma (1). La ventaja de la forma indicada por las relaciones (19), (20) y (21) está en que se llega a un sistema de (m) ecuaciones simultáneas con una matriz (X) de rango (m).

Partiendo de la forma inicialmente indicada en la relación (1), podemos incluir algunas restricciones en las componentes referentes a efectos principales y a los de interacción.

Para los efectos principales (a_i), (b_j) y (c_k) podemos incluir las condiciones lineales de equilibrio:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = \sum_k c_k = 0 \quad (103)$$

De la misma manera para las interacciones de orden 1:

$$\sum_i u_{ij} = \sum_j u_{ij} = 0 ; \quad \sum_i v_{ik} = \sum_k v_{ik} = 0 ; \quad \sum_j w_{jk} = \sum_k w_{jk} = 0 \quad (104)$$

y para las interacciones de orden 2:

$$\sum_i \xi_{ijk} = \sum_j \xi_{ijk} = \sum_k \xi_{ijk} = 0 \quad (105)$$

De esta manera, si en las celdas (ijk) se tienen los valores teóricos (x_{ijk}), cuyas estimaciones están apoyadas por ($\bar{n}=n/abc$) observaciones, que se toman como unidad, se tiene:

$$x = \sum_{ijk} (x_{ijk}) = abc\mu + bc \sum_i a_i + ac \sum_j b_j + ab \sum_k c_k + c \sum_{ij} u_{ij} + b \sum_{ik} v_{ik} + a \sum_{jk} w_{jk} + \sum_{ijk} \xi_{ijk}$$

y teniendo en cuenta las restricciones de dependencia lineal, indicadas por las relaciones (103), (104) y (105):

$$\mu = x/abc = \bar{x} \quad (106)$$

De la misma manera:

$$\sum_{jk} x_{ijk} = \bar{x}_{i..} = bc (\mu + a_i)$$

con lo cual:

$$a_i = \bar{x}_{i..} - \mu \quad (107)$$

con:

$$\bar{x}_{i..} = x_{i..} / bc \quad (108)$$

y análogamente:

$$\sum_{ik} x_{ijk} = x_{.j.} = ac (\mu + b_j)$$

$$\sum_{ij} x_{ijk} = x_{..k} = ab (\mu + c_k)$$

de donde se deduce:

$$b_j = \bar{x}_{.j.} - \mu \quad (109)$$

$$c_k = \bar{x}_{..k} - \mu \quad (110)$$

siendo:

$$\bar{x}_{.j.} = x_{.j.}/ac \quad (111)$$

$$\bar{x}_{..k} = x_{..k}/ab \quad (112)$$

De esa manera, si se ha adoptado un modelo lineal incompleto (descartando las interacciones de orden 2), la determinación de los parámetros $\lambda_0, \lambda_i, \mu_j, \rho_k, u_{ij}, v_{ik}, w_{jk}$ permitirá conocer para las celdas (ijk) los valores teóricos (x_{ijk}) . Con estos valores teóricos será posible deducir las medias marginales imponderadas $\bar{x}_{1\dots}, \bar{x}_{.j.}$ y $\bar{x}_{..k}$, indicadas en las relaciones (109), (110) y (111) y deducir de las relaciones (108), (109) y (110) estimaciones para los efectos principales $(a_i), (b_j)$ y (c_k) .

Por otra parte, las estimaciones de los efectos de interacción de orden 1 se deducen con las relaciones:

$$u_{ij} = \bar{x}_{ij.} - (\bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.}) + \mu \quad (113)$$

$$v_{ik} = \bar{x}_{i.k} - (\bar{x}_{i..} + \bar{x}_{..k}) + \mu \quad (114)$$

$$w_{jk} = \bar{x}_{.jk} - (\bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k}) + \mu \quad (115)$$

siendo:

$$\bar{x}_{ij.} = \sum_k \bar{x}_{ijk}/c$$

$$\bar{x}_{i.k} = \sum_j \bar{x}_{ijk}/b$$

$$\bar{x}_{ijk} = \sum_i \bar{x}_{ijk}/a \quad (116)$$

Finalmente, si se tratase del modelo lineal completo en que como bien se sabe, el modelo reproduce exactamente los valores en las celdas (ijk) , la estimación de los efectos de interacción de orden (2) se haría usando la relación:

$$\varepsilon_{ijk} = x_{ijk} - (\bar{x}_{ij.} + \bar{x}_{i.k} + \bar{x}_{.jk}) + (\bar{x}_{i\dots} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k}) - \mu \quad (117)$$

Manteniendo la situación anterior, de considerar que cada valor (x_{ijk}) está apoyado por un número igual de observaciones ($\bar{n}=n/abc$), que pueden ser tomadas como unitarias, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} x_{ijk}^2 &= abc\mu^2 + bc \sum_i a_i^2 + ac \sum_j b_j^2 + ab \sum_k c_k^2 + c \sum_{ij} u_{ij}^2 + \\ &+ b \sum_{ik} v_{ik}^2 + a \sum_{jk} w_{jk}^2 + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 \end{aligned}$$

relación que escrita en la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 / abc &= \sum_{ijk} x_{ijk}^2 / abc - \left(\mu^2 + \frac{\sum a_i^2}{a} + \frac{\sum b_j^2}{b} + \frac{\sum c_k^2}{c} + \frac{\sum u_{ij}^2}{ab} + \frac{\sum v_{ik}^2}{ac} + \right. \\ &\left. + \frac{\sum w_{jk}^2}{bc} \right) \end{aligned} \quad (118)$$

permite deducir el cuadrado medio de las interacciones de orden (2), en función de los cuadrados medios de los efectos principales y de las interacciones de orden (1). Por otra parte, todos estos cuadrados medios, basados en función de las observaciones, no estiman insesgadamente los correspondientes cuadrados medios de la población. Cada uno de esos cuadrados medios muestrales deben sufrir una corrección dependiente de la variancia interna de las subclases y del número de efectos considerados. Ya se ha visto que esta variancia interna, bajo el principio de homocedasticidad adoptada en la determinación de los parámetros, está dada por la relación (102):

$$\hat{\sigma}^2 = Q_{min} / (n-m)$$

que puede escribirse en la forma alternativa:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{ijk} n_{ijk}^2 \sigma_{ijk}^2 / (n-m) \quad (119)$$

siendo:

$$\sigma_{ijk}^2 = p_{ijk} q_{ijk} / n_{ijk}$$

cuando las medias (x_{ijk}) en las celdas (ijk) se refieren a tasas específicas.

Como se ha supuesto que en cada celda (ijk) existe el mismo número medio de observaciones (\bar{n}), se tiene:

$$\hat{\sigma}^2 = \bar{n} \Sigma \sigma_{ijk}^2 / (n-m)$$

o bien:

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{n}} = \Sigma \sigma_{ijk}^2 / abc \quad (120)$$

La determinación de las estimaciones "insesgadas" de estos cuadrados medios es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Est. } \left(\frac{\Sigma a_i^2}{a}\right) &= \frac{\Sigma \hat{a}_i^2}{a} - (a-1) \theta \quad 1/ \\ \text{Est. } \left(\frac{\Sigma b_j^2}{b}\right) &= \frac{\Sigma \hat{b}_j^2}{b} - (b-1) \theta \\ \text{Est. } \left(\frac{\Sigma c_k^2}{c}\right) &= \frac{\Sigma \hat{c}_k^2}{c} - (c-1) \theta \\ \text{Est. } \left(\frac{\Sigma u_{ij}^2}{ab}\right) &= \frac{\Sigma \hat{u}_{ij}^2}{ab} - (a-1)(b-1) \\ \text{Est. } \left(\frac{\Sigma v_{ik}^2}{ac}\right) &= \frac{\Sigma \hat{v}_{ik}^2}{ac} - (a-1)(c-1) \theta \\ \text{Est. } \left(\frac{\Sigma w_{jk}^2}{bc}\right) &= \frac{\Sigma \hat{w}_{jk}^2}{bc} - (b-1)(c-1) \theta \\ \text{Est. } \left(\frac{\Sigma \varepsilon_{ijk}^2}{abc}\right) &= \frac{\Sigma \hat{\varepsilon}_{ijk}^2}{abc} - (a-1)(b-1)(c-1) \theta \end{aligned} \quad (121)$$

siendo:

$$\theta = \Sigma \sigma_{ijk}^2 / (abc)^2 \quad (122)$$

1/ Ya que: $E\hat{a}_i = a_i$; $\Sigma(\hat{a}_i - a_i)^2 / \sigma_a^2$ se distribuye como χ^2 con $(a-1)$ grados de libertad. De esa manera: $E[(\hat{a}_i - a_i)^2 / \sigma_a^2] = (a-1)$ ó $E\Sigma \hat{a}_i^2 = \Sigma a_i^2 + (a-1) \sigma_a^2$ y como: $\sigma_a^2 = \bar{\sigma}^2 / bc$; $E\left(\frac{\Sigma \hat{a}_i^2}{a}\right) = \frac{\Sigma a_i^2}{a} + (a-1) \frac{\bar{\sigma}^2}{abc}$; con $\bar{\sigma}^2 = \Sigma \sigma_{ijk}^2 / abc$.

La determinación de las diversas estimaciones de los cuadrados medios de efectos principales y de interacciones indicadas por la relación (121) sirve para verificar numéricamente la importancia relativa que cada factor considerado tiene, ya sea que se considere actuando independientemente o en interacción con otro factor (interacciones de orden 1).

El cambio de la estructura lineal, de los efectos principales y de interacción, en un modelo lineal puede también realizarse sin necesidad de calcular previamente los valores teóricos (x_{ijk}) de las celdas, dados por el modelo adoptado. Si se conocen los valores de los parámetros del modelo lineal escrito en la forma indicada por la relación (19), se tiene que:

$$\bar{x} = \lambda_0 + \bar{\lambda} + \bar{\mu} + \bar{\rho} + \bar{u} + \bar{v} + \bar{w} + \bar{\epsilon} \quad (123)$$

$$\bar{x}_{i..} = \lambda_0 + \lambda_i + \bar{\mu} + \bar{\rho} + \bar{u}_{i.} + \bar{v}_{i.} + \bar{w} + \bar{\epsilon}_{i..} \quad (124)$$

$$\bar{x}_{.j.} = \lambda_0 + \bar{\lambda} + \mu_j + \bar{\rho} + \bar{u}_{.j} + \bar{v}_{.j} + \bar{w}_{.j} + \bar{\epsilon}_{.j.} \quad (125)$$

$$\bar{x}_{..k} = \lambda_0 + \bar{\lambda} + \bar{\mu} + \rho_k + \bar{u}_{.k} + \bar{v}_{.k} + \bar{w}_{.k} + \bar{\epsilon}_{..k} \quad (126)$$

$$\bar{x}_{ij.} = \lambda_0 + \lambda_i + \mu_j + \bar{\rho} + u_{ij} + \bar{v}_{i.} + \bar{w}_{.j} + \bar{\epsilon}_{ij.} \quad (127)$$

$$\bar{x}_{i.k} = \lambda_0 + \lambda_i + \bar{\mu} + \rho_k + \bar{u}_{i.} + v_{ik} + \bar{w}_{.k} + \bar{\epsilon}_{i.k} \quad (128)$$

$$\bar{x}_{.jk} = \lambda_0 + \bar{\lambda} + \mu_j + \rho_k + \bar{u}_{.j} + v_{.k} + w_{jk} + \bar{\epsilon}_{.jk} \quad (129)$$

siendo:

$$\bar{\lambda} = \sum_i \lambda_i/a ; \bar{\mu} = \sum_j \mu_j/b ; \bar{\rho} = \sum_k \rho_k/c$$

$$\bar{u}_{i.} = \sum_{ij} u_{ij}/ab ; \bar{v}_{i.} = \sum_{ik} v_{ik}/ac ; \bar{w}_{.j} = \sum_{jk} w_{jk}/bc \quad (130)$$

$$\bar{u}_{i.} = \sum_j u_{ij}/b ; \bar{v}_{i.} = \sum_k v_{ik}/c ; \bar{w}_{.j} = \sum_k w_{jk}/c \quad (131)$$

$$\bar{u}_{.j} = \sum_i u_{ij}/a ; \bar{v}_{.k} = \sum_i v_{ik}/a ; \bar{w}_{.k} = \sum_j w_{jk}/b \quad (132)$$

$$\bar{\epsilon} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}/abc ; \bar{\epsilon}_{i..} = \sum_{jk} \epsilon_{ijk}/bc ; \bar{\epsilon}_{i.j} = \sum_k \epsilon_{ijk}/c \quad (133)$$

suponiendo que (a), (b) y (c) son los números de categorías para las variables (2), (3) y (4) consideradas en la tabla de triple entrada.

Con base en estas relaciones, teniendo en cuenta las relaciones (106); (107); (109); (110); (113); (114) y (115), se tiene:

$$a_i^0 = (\lambda_i \bar{\lambda}) + (\bar{u}_{i.} - \bar{u}) + (\bar{v}_{i.} - \bar{v}) + (\bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi}) \quad (134)$$

$$b_j^0 = (\mu_j - \bar{\mu}) + (\bar{u}_{.j} - \bar{u}) + (\bar{w}_{j.} - \bar{w}) + (\bar{\xi}_{.j.} - \bar{\xi}) \quad (135)$$

$$c_k^0 = (\rho_k - \bar{\rho}) + (\bar{v}_{.k} - \bar{v}) + (\bar{w}_{.k} - \bar{w}) + (\bar{\xi}_{..k} - \bar{\xi}) \quad (136)$$

$$u_{ij}^0 = [u_{ij} - (\bar{u}_{i.} + \bar{u}_{.j}) + \bar{u}] + (\bar{\xi}_{ij.} - \bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi}_{.j.} + \bar{\xi}) \quad (137)$$

$$v_{jk}^0 = [v_{jk} - (\bar{v}_{i.} + \bar{v}_{.k}) + \bar{v}] + (\bar{\xi}_{ik.} - \bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi}_{..k} + \bar{\xi}) \quad (138)$$

$$w_{jk}^0 = [w_{jk} - (\bar{w}_{.j} + \bar{w}_{.k}) + \bar{w}] + (\bar{\xi}_{.jk.} - \bar{\xi}_{.j.} - \bar{\xi}_{..k} + \bar{\xi}) \quad (139)$$

$$\xi_{ijk}^0 = \bar{\xi}_{ijk} - (\bar{\xi}_{ij.} + \bar{\xi}_{i.k} + \bar{\xi}_{.jk}) + (\bar{\xi}_{i..} + \bar{\xi}_{.j.} + \bar{\xi}_{..k}) - \bar{\xi} \quad (140)$$

9. Aplicaciones

Usaremos algunas tablas de doble o triple entrada referentes a datos sobre mortalidad infantil, con el objeto de indicar la forma de cálculo de la importancia relativa de los efectos principales y de las interacciones, bajo el supuesto que ya han sido determinados los parámetros de los diferentes modelos lineales aceptados (completo o incompleto).

Ejemplo 1

Se dispone de la información sobre nacidos vivos en el trienio 1957-1959 en la ciudad de Nueva York, según edad de la madre, raza (blanca y no blanca) y orden de la paridez. A esta información se le agrega la correspondiente a nacidos muertos y nacidos vivos fallecidos antes de cumplir los 28 días (mortalidad neonatal), lo que permite calcular tasas de mortalidad perinatal específica por las (3) características consideradas.

La información usada se indica en el cuadro 1.

Cuadro 1

DISTRIBUCION DE NACIDOS VIVOS EN EL TRIENIO 1957-1959, EN LA CIUDAD DE NUEVA YORK, SEGUN EDAD DE LA MADRE, RAZA Y ORDEN DE LA PARIDEZ

Grupos de edades (i)		Orden de la paridez (k)					Total
		k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	
<i>Blancos (j=1)</i>							
i=1	20-24	55 782	34 575	13 322	4 652	2 822	111 153
2	25-29	29 393	39 805	23 926	10 587	9 510	113 221
3	30-34	10 318	18 414	17 825	10 065	12 334	68 956
4	35-39	3 629	6 456	7 990	5 714	9 449	33 232
<i>Total</i>		<i>99 122</i>	<i>99 250</i>	<i>63 063</i>	<i>31 018</i>	<i>34 115</i>	<i>326 568</i>
<i>No blancos (j=2)</i>							
i=1	20-24	8 964	9 327	6 390	3 549	2 962	31 192
2	25-29	3 044	4 533	4 485	3 807	7 081	22 950
3	30-34	1 274	2 241	2 612	2 317	6 743	15 187
4	35-39	449	914	1 089	1 073	3 635	7 160
<i>Total</i>		<i>13 731</i>	<i>17 015</i>	<i>14 576</i>	<i>10 746</i>	<i>20 421</i>	<i>76 489</i>

Fuente: Fischler, B., Peritz, E., y Wingerd, J., "On Linear Models in the Study of Perinatal Mortality", en *Demography*, vol. 8, N° 3, agosto 1971, págs. 401-410.

Cuadro 2

DISTRIBUCION DE NACIDOS MUERTOS Y DE NACIDOS VIVOS FALLECIDOS ANTES DE LOS 28 DIAS, EN EL TRIENIO 1957-1959, EN LA CIUDAD DE NUEVA YORK, SEGUN EDAD DE LA MADRE, RAZA Y ORDEN DE LA PARIDEZ

Grupos de edades (i)		Orden de la paridez (k)					Total
		k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	
<i>Blancos (j=1)</i>							
i=1	20-24	1 393	947	514	217	205	3 222
2	25-29	811	963	703	413	531	3 421
3	30-34	376	556	560	388	623	2 503
4	35-39	200	239	314	231	605	1 589
<i>Total</i>		<i>2 726</i>	<i>2 705</i>	<i>2 091</i>	<i>1 249</i>	<i>1 964</i>	<i>10 735</i>
<i>No blancos (j=2)</i>							
i=1	20-24	435	430	337	213	202	1 617
2	25-29	158	195	225	226	532	1 336
3	30-34	101	124	177	155	526	1 083
4	35-39	53	76	83	76	305	593
<i>Total</i>		<i>747</i>	<i>825</i>	<i>822</i>	<i>670</i>	<i>1 565</i>	<i>4 629</i>

Con base en estas informaciones se tienen las siguientes tasas específicas de mortalidad perinatal:

Cuadro 3

TASAS DE MORTALIDAD PERINATAL (POR MIL) OBSERVADAS EN EL TRIENIO 1957-1959, EN LA CIUDAD DE NUEVA YORK, ESPECIFICAS POR EDAD DE LA MADRE, RAZA Y ORDEN DE LA PARIDEZ

Grupos de edades (i)		Orden de la paridez (k)					Total
		k	k	k	k	k	
		<i>Blancos (j=1)</i>					
$i=1$	20-24	24,0	27,4	38,6	46,6	72,6	29,0
2	25-29	27,6	24,2	29,4	39,0	55,8	30,2
3	30-34	36,4	30,2	31,4	38,5	50,5	36,3
4	35-39	55,1	37,0	39,3	40,4	64,0	47,8
<i>Total</i>		<i>27,5</i>	<i>27,2</i>	<i>33,2</i>	<i>40,3</i>	<i>57,6</i>	<i>32,9</i>
		<i>No blancos (j=2)</i>					
$i=1$	20-24	48,5	46,1	52,7	60,0	68,2	51,8
2	25-29	51,9	43,0	50,2	59,4	75,1	58,2
3	30-34	79,3	55,3	67,8	66,9	78,0	71,3
4	35-39	118,0	83,2	76,2	70,8	83,9	82,8
<i>Total</i>		<i>54,4</i>	<i>48,5</i>	<i>56,4</i>	<i>62,4</i>	<i>76,6</i>	<i>60,5</i>

Observando el cuadro 3, puede notarse que la mortalidad perinatal del grupo de no-blancos es bastante superior al de blancos (60,5 contra 32,9). Esto nos indica que existe un importante diferencial de raza, que nos da para el segundo grupo una sobremortalidad relativa del 84 por ciento.

Por otra parte, si las tasas marginales según la edad para cada uno de los grupos se refieren a sus niveles respectivos, se tiene:

Grupo (j)	Grupos de edades (i)			
	20-24	25-29	30-34	35-39
1	0,88	0,92	1,10	1,45
2	0,86	0,96	1,18	1,37

lo que nos indica que para ambos grupos se podría aceptar un "patrón marginal" común, según la edad o, lo que es lo mismo, que la interacción de orden 1 entre paridez y raza es poco importante. Los mismos coeficientes

relativos calculados según grupos de edades para cada grupo (j) nos indican que el factor "edad de la madre" es relativamente importante. La mortalidad crece a medida que la madre tiene una edad mayor.

De la misma forma podemos referir las tasas marginales según la paridez teniendo en cuenta el nivel observado en cada grupo (j), con lo que se tiene:

Grupo (j)	Orden de la paridez (k)				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	0,84	0,83	1,01	1,23	1,75
2	0,90	0,80	0,93	1,03	1,27

notándose ahora que la variación de la mortalidad perinatal en cada uno de los grupos (j), con respecto a la paridez, es menos semejante. Esto nos indica que la variación de la mortalidad perinatal varía más según el orden de la paridez que según la edad y que el efecto de interacción edad-raza es mayor.

A este nivel de los argumentos, se podría intentar buscar métricos que nos permitieran resumir adecuadamente la mayor importancia relativa de ciertos efectos principales frente a otros. Las tasas calculadas según la raza, ya nos han indicado que el efecto de "raza" es el de mayor importancia. Lo mismo podría intentarse para los efectos de interacción de orden (1), pero tales métricos ya han sido ideados en lo que se denomina "cuadrados medios" (estimados) de efectos principales y de interacción.

Para determinar los cuadrados medios, que permiten comparar numéricamente la importancia de los efectos principales y los de interacción, se debe usar el modelo lineal completo. Como se ha dicho en varias ocasiones, el modelo lineal completo cumple con la condición que reproduce "exactamente" las medias observadas en las diferentes subclases (ijk).

Usando los valores observados en el cuadro (3) se tienen las siguientes estimaciones para los efectos principales:

i	$x_{i..}$	$\bar{x}_{i..}$	\hat{a}	k	$x_{..k}$	$\bar{x}_{..k}$	\hat{c}
1	484,7	48,47	- 5,09	1	440,8	55,10	1,54
2	455,6	45,56	- 8,00	2	346,4	43,30	-10,26
3	534,3	53,43	- 0,13	3	385,6	48,20	- 5,36
4	667,9	66,79	13,23	4	421,6	52,70	- 0,86
	2 142,5	53,56		5	548,1	68,51	14,95
					2 142,5	53,56	

j	$x_{.j}$	$\bar{x}_{.j}$	\hat{b}_j
1	808,0	40,40	-13,16
2	1 334,5	66,73	13,16
	2 142,5	53,56	

Para las estimaciones de los efectos de interacción de orden 1, aplicando las relaciones (113), (114) y (115) se tiene:

i	x_{i1}	\bar{x}_{i1}	\hat{u}_{i1}	k	$x_{.1k}$	$\bar{x}_{.1k}$	\hat{w}_{1k}
1	209,2	41,84	6,53	1	143,1	35,78	-6,16
2	176,0	35,20	2,80	2	118,8	29,70	-0,44
3	187,0	37,40	-2,87	3	138,7	34,68	-0,36
4	235,8	47,16	-6,47	4	164,5	41,12	1,58
				5	242,9	60,72	5,37

k	$x_{1.k}$	$\bar{x}_{1.k}$	\hat{v}_{1k}	$x_{2.k}$	$\bar{x}_{2.k}$	\hat{v}_{2k}	$x_{3.k}$	$\bar{x}_{3.k}$	\hat{v}_{3k}	$x_{4.k}$	$\bar{x}_{4.k}$	\hat{v}_{4k}
1	72,5	36,25	-13,76	79,5	39,75	-7,35	115,7	57,85	2,88	173,1	86,55	13,22
2	73,5	36,74	- 1,46	67,2	33,60	-1,70	85,5	42,75	-0,42	120,2	60,10	3,57
3	91,3	45,65	2,54	79,6	39,80	-0,40	99,2	49,60	1,53	115,5	57,75	- 3,68
4	106,6	53,30	5,69	98,4	49,20	4,50	105,4	52,70	0,13	111,2	55,60	-10,23
5	140,8	70,40	6,98	130,9	65,45	4,94	128,5	64,25	-4,13	147,9	73,95	- 7,79

Conocidas las estimaciones de los efectos principales y de interacción de orden 1, es posible determinar los cuadrados medios de esos efectos, que no es otra cosa que la suma de los cuadrados de cada efecto dividida por el número de efectos sumados.

De esa manera se tiene:

$$\sum \hat{a}_i^2 / a = 66,24 ; \quad \sum \hat{b}_j^2 / b = 174,24 ; \quad \sum \hat{c}_k^2 / c = 72,12$$

$$\sum \hat{u}_{i,j}^2 / ab = 25,14 ; \quad \sum \hat{v}_{i,k}^2 / ac = 46,71 ; \quad \sum \hat{w}_{j,k}^2 / bc = 13,92$$

con: $a=4$; $b=2$; $c=5$.

y para el cuadrado medio de interacciones de orden 2 usando la relación (118):

$$\sum \hat{\xi}_{ijk} / abc = 3\,274,58 - (2\,868,94 + 66,24 + 174,24 + 72,12 + 25,14 + 46,71 + 13,92) = 7,27$$

Estas estimaciones deben corregirse, por efecto de sesgo, de acuerdo a las interacciones indicadas en las relaciones (121) que, como se ha dicho, dependen de la variancia interna media de las tasas específicas.

Dado que:

$$\sum_{ijk} (pq/n)_{ijk} = 821,30$$

$$\sigma^2 = 821,30/40 = 20,53$$

$$\theta = 20,53/40 = 0,5133,$$

las estimaciones "insesgadas" de los cuadrados medios de efectos es la siguiente:

Edad	64,7
Raza	173,7
Paridez	70,1
Edad x Raza	23,6
Edad x Paridez	40,6
Raza x Paridez	11,9
Edad x Raza x Paridez	(1,1)

pudiendo verse la enorme contribución de la raza, en la variación de las tasas de mortalidad. Además es de importancia el efecto de la paridez y el de la edad, notándose que las dos se acercan al efecto de raza. De los efectos de interacción de orden 1 el de mayor relevancia es el de la paridez, teniendo una menor la interacción de la raza. Finalmente se puede ver que la importancia de la interacción raza-paridez es poca y aún mucho menor la de la interacción de orden 2.

De allí se deduce que un modelo lineal incompleto, que tome en cuenta los efectos principales de edad, raza y paridez y el de interacción entre edad y paridez, conducirá a una adecuada reproducción de las tasas específicas observadas.

Consideremos este modelo incompleto en que las tasas teóricas son las siguientes:

Cuadro 4

TASAS "TEORICAS" DE NATALIDAD PERINATAL BAJO UN MODELO LINEAL
QUE CONSIDERA LOS EFECTOS PRINCIPALES
Y LA INTERACCION EDAD-PARIDEZ

Grupos de edades (i)		Orden de la paridez (k)				
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
<i>Blancos (j=1)</i>						
$i=1$	20-24	24,2	26,6	35,9	42,7	58,8
2	25-29	27,7	23,9	29,1	38,4	54,5
3	30-34	38,7	30,5	33,1	39,6	52,3
4	35-39	59,6	39,9	41,0	41,7	63,3
<i>No blancos (j=2)</i>						
$i=1$	20-24	46,8	49,1	58,4	65,2	81,4
2	25-29	50,2	46,4	51,6	61,0	77,0
3	30-34	61,2	53,0	55,7	62,1	74,8
4	35-39	82,1	62,5	63,5	64,2	85,8

para cuantificar la eficiencia de la reproducción resumida de acuerdo a la relación (74). Las diversas componentes del modelo lineal incompleto, de acuerdo a las relaciones (20) y (21) son las siguientes:

$$\begin{array}{llllll}
 \lambda_0 = 24,2 & \lambda_2 = 3,5 & \rho_2 = 2,4 & v_{22} = -6,2 & v_{32} = -10,6 & v_{42} = -22,1 \\
 & \lambda_3 = 14,5 & \rho_3 = 11,7 & v_{23} = -10,3 & v_{33} = -17,3 & v_{43} = -30,3 \\
 & \lambda_4 = 35,4 & \rho_4 = 18,5 & v_{24} = -7,8 & v_{34} = -17,6 & v_{44} = -36,4 \\
 & \mu_2 = 22,6 & \rho_5 = 34,6 & v_{25} = -7,8 & v_{35} = -21,0 & v_{45} = -30,9
 \end{array}$$

solución que se puede expresar en función de los efectos "tipificados" (β) y que aplicadas a las correlaciones de orden (0), entre los vectores de los efectos y el de las variables dependientes (variable 1), nos da:

Parámetros	Valor	σ_v	β	r_{v1}	(β) (r)
λ_2	3,5	0,47298	8,635	-0,01117	(1,792)
λ_3	14,5	0,40642	30,740	0,01180	
λ_4	35,4	0,30030	55,452	0,02751	
μ_2	22,6	0,39212	46,226	0,05631	(2,603)
ρ_2	2,4	0,45305	5,672	-0,02608	(3,677)
ρ_3	11,7	0,39436	24,068	-0,00177	
ρ_4	18,5	0,30476	29,409	0,01372	
ρ_5	34,6	0,34205	61,734	0,05611	
v_{22}	-6,2	0,31290	-10,119	-0,02218	(0,041)
v_{23}	-10,3	0,25597	-13,752	-0,00797	
v_{24}	-7,8	0,18557	-7,550	0,00620	
v_{25}	-7,8	0,19867	-8,083	0,03042	
v_{32}	-10,6	0,22050	-12,192	-0,00641	(-0,549)
v_{33}	-17,3	0,21939	-19,798	-0,00259	
v_{34}	-17,6	0,17256	-15,842	0,00524	
v_{35}	-21,0	0,21235	-23,261	0,02560	
v_{42}	-22,1	0,13398	-15,445	0,00322	(-1,124)
v_{43}	-30,3	0,14838	-23,452	0,00437	
v_{44}	-36,4	0,12867	-24,431	0,00479	
v_{45}	-30,9	0,17722	-28,564	0,02994	

De modo que la suma $(\beta' r_{MLI})$ es igual a 8,440.

Esta suma debe compararse con la suma que se tiene bajo un modelo lineal completo.

Los valores de los (39) parámetros en este caso, debidamente tipificados, pueden verse en la tabla siguiente:

Parámetros	Valor	β	r_{v1}
λ_2	3,6	8,882	-0,01117
λ_3	12,4	26,288	0,01180
λ_4	31,1	48,716	0,02751
μ_2	24,5	50,112	0,05631
ρ_2	3,4	8,035	-0,02608
ρ_3	14,6	30,033	-0,00177
ρ_4	22,6	35,927	0,01372
ρ_5	48,6	86,712	0,05611
v_{22}	- 6,8	-11,099	-0,02218
v_{23}	-12,8	-17,090	-0,00797
v_{24}	-11,2	-10,841	0,00620
v_{25}	-20,4	-21,141	0,03042
v_{32}	- 9,6	-11,042	-0,00641
v_{33}	-19,6	-22,430	-0,00259
v_{34}	-20,5	-18,452	0,00524
v_{35}	-34,5	-38,214	0,02560
v_{42}	-21,5	-15,026	0,00322
v_{43}	-30,4	-23,529	0,00437
v_{44}	-37,3	-25,035	0,00479
v_{45}	-39,7	-36,699	0,02994
u_{22}	- 0,2	- 0,242	0,02564
u_{32}	18,4	18,276	0,03416
u_{42}	38,4	26,458	0,03129

(continúa)

Parámetros	Valor	β	λ_{v1}
w_{22}	- 5,8	- 6,083	0,01125
w_{23}	-10,4	-10,128	0,01837
w_{24}	-11,1	- 9,327	0,02087
w_{25}	-28,9	-33,061	0,04630
ϵ_{222}	0,3	0,165	0,00267
ϵ_{223}	6,9	3,776	0,00661
ϵ_{224}	7,2	3,633	0,01077
ϵ_{225}	23,9	16,379	0,02575
ϵ_{322}	-12,0	- 4,655	0,00668
ϵ_{323}	3,9	1,632	0,01245
ϵ_{324}	- 3,4	- 1,341	0,01138
ϵ_{325}	13,5	9,032	0,02708
ϵ_{422}	-10,9	-2,705	0,01118
ϵ_{423}	-15,6	-4,224	0,01032
ϵ_{424}	-21,4	-5,752	0,00879
ϵ_{425}	-14,1	-6,953	0,02274

de la que se deduce la siguiente distribución de las contribuciones de los diversos efectos:

Parámetros	$\beta' \lambda$
λ	1,551
μ	2,822
ρ	5,096
v	-2,644
u	1,446
w	-1,980
ξ	0,422
<i>Total</i>	<i>6,713</i>

de modo que la eficiencia (bondad de reproducción) del modelo lineal incompleto, en que se consideran los efectos principales y la interacción entre la edad y la paridez, es igual a:

$$(6438/6713) 100 = 95,9 \text{ por ciento}$$

Cambiando las componentes del modelo lineal completo, dadas por las relaciones (19), (20) y (21), a las del modelo presentado en la relación (1), se debe recurrir al uso de las relaciones (134) a (140), con lo cual debe calcularse previamente:

i	λ_i	j	μ_j	k	$\frac{u_{ij}}{\rho_k}$	i	$j=1$	$j=2$	\bar{u}_i
1	0,0	1	0,0	1	0,0	1	0,0	0,0	0,0
2	3,6	2	24,5	2	3,4	2	0,0	-0,2	-0,1
3	12,4			3	14,6	3	0,0	18,4	9,2
4	31,1			4	22,6	4	0,0	38,4	19,2
				5	48,6				
$\bar{\lambda} =$	11,78	$\bar{\mu} =$	12,25	$\bar{\rho} =$	17,84	$\bar{u}_j =$	0,0	14,15	7,08

i	v_{ik}					\bar{v}_i
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,0	-6,8	-12,8	-11,2	-20,4	-10,24
3	0,0	-9,6	-19,6	-20,5	-34,5	-16,84
4	0,0	-21,5	-30,4	-37,3	-39,7	-25,78
\bar{v}_{ik}	0,0	-9,48	-15,70	-17,25	-23,65	-13,22

k	w_{jk}		$\bar{w}_{.k}$
	$j=1$	$j=2$	
1	0,0	0,0	0,0
2	0,0	- 5,8	- 2,90
3	0,0	-10,4	- 5,20
4	0,0	-11,1	- 5,55
5	0,0	-23,9	-14,45
\bar{w}_j	0,0	-11,24	- 5,62

i	$\epsilon_{i1k} \quad j=1$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
ϵ_{ijk}	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

$k=1$	$\epsilon_{i2k} \quad j=2$				$\bar{\epsilon}_{i..}$
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
0,0	0,3	6,9	7,2	23,9	3,83
0,0	-12,0	3,9	- 5,4	13,5	0,20
0,0	-10,9	-15,6	-21,4	-14,1	-6,20
0,0	- 5,65	- 1,20	- 4,40	5,82	(-0,54)

i	$\bar{\xi}_{ij}$	
	$j=1$	$j=2$
1	0,00	0,00
2	0,00	7,66
3	0,00	0,40
4	0,00	-12,40
$\xi_{.j}$	0,00	- 1,08

i	$\bar{\xi}_{i.k}$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,15	3,45	3,60	11,95
3	0,00	-6,00	1,95	- 1,70	6,75
4	0,00	-5,45	-7,80	-10,70	- 7,05
$\bar{\xi}_{..k}$	0,00	-2,82	-0,60	- 2,20	2,91

de modo que los efectos principales y los de interacción son:

i	a_i^0	$x_{i..}$	j	b_j^0	$x_{.j}$	k	c_k^0	$x_{..k}$
1	- 5,10	4 839	1	-13,17	10 735	1	1,54	3 473
2	- 8,01	4 757	2	13,17	4 629	2	-10,27	3 530
3	- 0,14	3 586				3	- 5,36	2 913
4	13,22	2 182				4	- 0,86	1 919
						5	14,95	3 529

$$\sum_i^0 a_i x_{i..} = -34 438$$

$$\sum_j b_j x_{.j} = -80 416$$

$$\sum_k^0 c_k x_{..k} = 4 590$$

i	u_{ij}^0	
	$j=1$	$j=2$
1	6,54(3 222)	-6,54(1 617)
2	2,81(3 421)	-2,81(1 336)
3	-2,86(2 503)	2,86(1 083)
4	-6,46(1 589)	6,46(593)

$$\sum u_{ij}^0 x_{ij} = 5 860$$

i	v_{ik}^0				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	-13,76(1 774)	-1,45(1 377)	2,54(851)	5,69(430)	6,98(407)
2	- 7,35(969)	-1,69(1 158)	-0,40(928)	4,50(639)	4,94(1 063)
3	2,88(477)	-0,41(630)	1,53(737)	0,13(543)	-4,13(1149)
4	18,22(253)	3,58(315)	-3,68(397)	-10,33(307)	-7,79(910)
$\sum v_{ik}^0 x_{i.k} = -28 718$					

j	w_{jk}^0				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	-6,16(2 726)	-0,43(2 705)	-0,36(2 091)	1,59(1 249)	5,37(1 964)
2	6,16(747)	0,43(825)	0,36(822)	-1,59(670)	-5,37(1 565)
$\sum w_{jk}^0 x_{.jk} = -10 392$					

i	$\xi_{ijk}^0 \quad j=1$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	0,54(1 339)	-2,29(937)	-0,06(514)	-1,65(217)	3,45(205)
2	4,37(811)	1,39(963)	0,32(703)	-1,43(413)	-4,67(531)
3	0,74(376)	3,91(556)	-1,81(560)	0,24(388)	-3,10(623)
4	-5,66(200)	-3,04(239)	1,54(314)	2,84(231)	4,30(605)

i	$\xi_{ijk}^0 \quad j=2$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	-0,54(435)	2,29(430)	0,06(337)	1,65(213)	-3,05(202)
2	-4,37(158)	-1,39(195)	-0,32(225)	1,43(2 226)	4,57(532)
3	-0,74(101)	-3,91(124)	1,81(177)	-0,24(155)	3,10(526)
4	5,66(53)	3,04(76)	-1,54(83)	-2,84(76)	-4,30(305)
$\sum \xi_{ijk}^0 x_{ijk} = 4 822$					

y dado que: $\mu = 53,57$ las diversas contribuciones de los efectos principales y de los de interacción a la reducción de los cuadrados son:

μx	=	823 049
$\Sigma a_{i..}^0 x_{i..}$	=	- 34 438
$\Sigma b_{.j.}^0 x_{.j.}$	=	- 80 416
$\Sigma c_{..k}^0 x_{..k}$	=	4 590
$\Sigma u_{ij.}^0 x_{ij.}$	=	5 860
$\Sigma v_{ik.}^0 x_{ik.}$	=	- 28 718
$\Sigma w_{.jk}^0 x_{.jk}$	=	- 10 392
$\Sigma \varepsilon_{ijk}^0 x_{ijk}$	=	4 822
<i>Total</i>		<i>684 357</i>

y dado que la suma de cuadrados de la variable (1) para los $n=403\ 057$ nacidos vivos es $(xq) = 15\ 364$ ($1 - 15\ 364/403\ 057$) = $14\ 778,34$, la reducción debida a la regresión es:

$$\begin{aligned} [1 - (x - \hat{b} \cdot X' x_1) / xq] &= (10^3 - [15\ 364(10)^3 - 684\ 357] / 14\ 778,34)10^3 \\ &= 6\ 679 \end{aligned}$$

En el caso de un modelo incompleto en que se toman en cuenta los efectos principales y solamente la interacción entre la edad y la paridez, se tienen:

	μ		51,37
	a_1^0		- 2,43
$b =$	a_2^0	=	- 5,35
	a_3^0		- 1,23
	a_4^0		- 9,03

(continúa)

	b_1^0	-11,30
	b_2^0	11,30
	c_1^0	- 2,52
	c_2^0	- 9,84
	c_3^0	- 5,30
	c_4^0	0,53
	c_5^0	17,16
	v_{11}^0	-10,92
$b =$	v_{12}^0	- 1,20
	v_{13}^0	3,56
	v_{14}^0	4,53
	v_{15}^0	4,00
	v_{21}^0	- 4,50
	v_{22}^0	- 0,98
	v_{23}^0	- 0,32
	v_{24}^0	3,15
	v_{25}^0	2,62
	v_{31}^0	2,38

(continua)

	v_{32}^0	1,50
	v_{33}^0	- 0,44
	v_{34}^0	0,23
	v_{35}^0	- 3,70
$b =$	v_{41}^0	13,02
	v_{42}^0	0,64
	v_{43}^0	- 2,84
	v_{44}^0	- 7,93
	v_{45}^0	- 2,96

y la reducción debida a la regresión es:

$$\begin{aligned} [1 - (x - \hat{b} X' x_1) / xq] &= (10^3 - [15\ 364 (10)^3 - 680\ 531] / \\ & / 14\ 778,34) 10^3 = 6\ 420 \end{aligned}$$

de manera que la eficiencia del modelo incompleto es igual a:

$$(6\ 420 / 6\ 679) 100 = 96,1 \text{ por ciento}$$

valor prácticamente igual al indicado anteriormente. (La diferencia se debe a los redondeos numéricos).

Ejemplo 2

De acuerdo con la información sobre natalidad y mortalidad neonatal ocurrida en Chile en el año 1972, la distribución de nacidos vivos y de defunciones de menores de 28 días, clasificados por ocupación del padre, orden de la paridez y nivel de instrucción de la madre,^{2/} es la siguiente:

Cuadro 5

CHILE: DISTRIBUCION DE LOS NACIDOS VIVOS POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ, SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972a/

Nacidos vivos por ocupación del padre (*j*)

Nivel de instrucción de la madre (<i>i</i>)	Orden de la paridez (<i>k</i>)						Total
	<i>k</i> =1	<i>k</i> =2	<i>k</i> =3	<i>k</i> =4	<i>k</i> =5	<i>k</i> =6	
<i>Padre empleado (j = 1)</i>							
<i>i</i> = 1	233	166	117	72	60	152	800
2	8 206	6 381	4 084	2 521	1 437	2 702	25 331
3	18 522	12 993	6 581	2 660	1 086	1 051	42 893
<i>Total</i>	26 961	19 540	10 782	5 253	2 583	3 905	69 024
<i>Padre obrero (j = 2)</i>							
<i>i</i> = 1	1 680	1 688	1 567	1 403	140	5 636	13 314
2	30 930	25 246	17 621	11 482	7 879	19 923	112 721
3	5 147	3 394	1 730	853	415	595	12 134
<i>Total</i>	37 757	30 328	20 558	13 738	9 634	26 154	138 169

a/ Taucher, Erica, *Mortalidad Infantil en Chile. Tendencias, Diferencias y Causas*, CELADE, octubre, 1978 (indédito).

^{2/} *j* : ocupación del padre
 j = 1 (empleado)
 j = 2 (obrero)
k : orden de la paridez
 k = 6 (6 o más)
i : nivel de instrucción de la madre
 i = 1 (ningún nivel)
 i = 2 (educación básica)
 i = 3 (educación media o superior)

Cuadro 6

CHILE: DISTRIBUCION DE LAS DEFUNCIONES DE MENORES DE 28 DIAS,
POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ, SEGUN NIVEL
DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972^{a/}

Defunciones de menores de 28 días por ocupación del padre (j)

Nivel de ins- trucción de la madre (i)	Orden de paridez (k)						Total
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	
<i>Padre empleado (j = 1)</i>							
i = 1	10	2	4	2	3	7	28
2	128	115	80	50	37	54	464
3	245	185	115	70	24	31	670
<i>Total</i>	<i>383</i>	<i>302</i>	<i>199</i>	<i>122</i>	<i>64</i>	<i>92</i>	<i>1 162</i>
<i>Padre obrero (j = 2)</i>							
i = 1	85	82	55	55	46	183	506
2	722	640	384	270	190	551	2 717
3	124	85	53	14	19	25	320
<i>Total</i>	<i>931</i>	<i>767</i>	<i>492</i>	<i>339</i>	<i>255</i>	<i>759</i>	<i>3 543</i>

a/ Taucher, Erica, *Mortalidad Infantil en Chile. Tendencias, Diferencias y Causas*, CELADE, octubre, 1978 (inédito).

Con base en los datos indicados en los cuadros 5 y 6, se obtuvieron las tasas específicas de mortalidad neonatal indicadas en el cuadro 7.

Cuadro 7

CHILE: TASAS DE MORTALIDAD NEONATAL POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ, SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972

Tasas de mortalidad neonatal por ocupación del padre (j)

Nivel de ins- trucción de la madre (i)	Orden de la paridez (k)						Total
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	
<i>Padre empleado (j = 1)</i>							
i = 1	42,92	12,05	34,19	27,78	50,00	46,05	35,00
2	15,60	18,02	19,59	19,83	25,75	19,98	18,32
3	13,23	14,24	17,47	26,32	22,10	29,50	15,62
Total	14,21	15,46	18,46	23,22	24,78	23,56	(16,83)
<i>Padre obrero (j = 2)</i>							
i = 1	50,60	48,58	35,10	39,20	34,33	32,47	38,01
2	23,34	23,77	22,25	23,52	24,11	27,66	24,10
3	24,09	25,04	30,64	16,41	45,78	42,02	26,37
Total	24,66	25,29	23,93	24,68	26,47	29,02	(25,64)

Con estas tasas medias por subclase (ijk), es posible determinar los componentes del modelo lineal completo indicado en la relación (1). Usando las relaciones (106) a (117) se encuentra:

i	\hat{a}_i	j	\hat{b}_j	i	u_{i1}	u_{i2}
1	9,34	1	-3,17	1	0,90	-0,90
2	-6,48	2	3,17	2	1,02	-1,02
3	-2,86			3	-1,92	1,92

k	1	2	3	4	5	6
c_k	-0,14	-4,82	-1,89	-2,92	5,25	4,52

k	1	2	3	4	5	6
v_{1k}	9,12	-2,65	-1,23	-1,35	-0,87	-3,02
v_{2k}	-2,35	3,78	0,85	2,63	-2,28	-2,63
v_{3k}	-6,77	-1,13	0,38	-1,28	3,15	5,65

k	1	2	3	4	5	6
w_{1k}	-1,21	-5,69	0,41	2,31	2,11	2,08
w_{2k}	1,21	5,69	-0,41	-2,31	-2,11	-2,08

lo que permite determinar los cuadrados medios del efecto global, de los efectos principales y de las interacciones de orden 1:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 807,98 & \Sigma u_{ij}^2/ab &= 1,84 \\ \hat{\Sigma} a_i^2/a &= 45,89 & \Sigma v_{ik}^2/ac &= 12,98 \\ \hat{\Sigma} b_j^2/b &= 10,08 & \Sigma w_{jk}^2/bc &= 8,02 \\ \hat{\Sigma} c_k^2/c &= 13,92 \end{aligned}$$

y como:

$$\Sigma x_{ijk}^2/abc = 927,43$$

de acuerdo con la relación (118):

$$\Sigma \xi_{ijk}^2/abc = 26,72$$

De esta manera puede verse que la variación de las tasas de mortalidad neonatal depende, en medida importante, del nivel educacional de la madre del recién nacido, (45,9 por ciento), del orden de la paridez (13,9 por ciento), de la interacción entre la educación de la madre y el orden de la paridez (13,0 por ciento) y, finalmente, de la interacción de orden 2, entre educación de la madre, orden de la paridez y ocupación del padre.

Este resultado es sensiblemente diferente al encontrado para el caso de la mortalidad perinatal en la ciudad de Nueva York (ejemplo 1), en

donde el efecto de interacción de orden 2 entre la edad de la madre, el orden de la paridez y la raza era prácticamente despreciable.

Aun así se procederá a determinar las tasas teóricas bajo un modelo lineal incompleto en que se descartan las interacciones de orden 2. Los valores teóricos que se obtendrán con este modelo incompleto, permitirán calcular la eficiencia del modelo pudiendo comprobarse que ésta última es del orden del 87 por ciento, confirmando el efecto de omisión de la interacción de orden 2.

Antes de indicar los valores de los diversos componentes del modelo escrito en la forma indicada en la relación (19), se explicitarán los diversos vectores y submatrices componentes de la gran matriz ($X'X$).

Se tiene:

$$1'_n 1_n = 207 \ 193 \quad 1'_n A_1 = (138 \ 052 \ 55 \ 027) \quad 1'_n A_2 = (138 \ 169)$$

$$1'_n A_3 = (49 \ 868 \ 31 \ 340 \ 18 \ 991 \ 12 \ 217 \ 30 \ 059)$$

$$1'_n U = (112 \ 721 \ 12 \ 134)$$

$$1'_n W = (30 \ 328 \ 20 \ 598 \ 13 \ 738 \ 9 \ 634 \ 26 \ 154)$$

$$1'_n V = (31 \ 627 \ 21 \ 345 \ 14 \ 003 \ 9 \ 316 \ 22 \ 625 \ 16 \ 387 \ 8 \ 311 \ 3 \ 513 \\ 1 \ 501 \ 1 \ 646)$$

$$A'_1 A_1 = \begin{pmatrix} 138 \ 052 & 0 \\ 0 & 55 \ 027 \end{pmatrix} \quad A'_1 A_2 = \begin{pmatrix} 112 \ 721 \\ 12 \ 134 \end{pmatrix} \quad A'_1 U = \begin{pmatrix} 112 \ 721 & 0 \\ 0 & 12 \ 134 \end{pmatrix}$$

$$A'_1 A_3 = \begin{pmatrix} 31 \ 627 & 21 \ 345 & 14 \ 003 & 9 \ 316 & 22 \ 625 \\ 16 \ 387 & 8 \ 311 & 3 \ 513 & 1 \ 501 & 1 \ 646 \end{pmatrix}$$

$$A'_1 V = \begin{pmatrix} 31 \ 627 & 21 \ 345 & 14 \ 003 & 9 \ 316 & 22 \ 625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \ 387 & 8 \ 311 & 3 \ 513 & 1 \ 501 & 1 \ 646 \end{pmatrix}$$

$$A'_1 W = \begin{pmatrix} 25 \ 246 & 17 \ 261 & 11 \ 482 & 7 \ 879 & 19 \ 923 \\ 3 \ 394 & 1 \ 730 & 853 & 415 & 595 \end{pmatrix}$$

$$A'_2 A_2 = (138 \ 169) \quad A'_2 A_3 = (30 \ 328 \ 20 \ 558 \ 13 \ 738 \ 9 \ 634 \ 26 \ 154)$$

$$A'_2 U = (112 \ 721 \ 12 \ 134)$$

$$A'_2 V = (25 \ 246 \ 17 \ 261 \ 11 \ 482 \ 7 \ 879 \ 19 \ 923 \ 3 \ 394 \ 1 \ 730 \ 853 \ 415 \ 595)$$

$$A_2' W = (30 \ 328 \ 20 \ 558 \ 13 \ 738 \ 9 \ 634 \ 26 \ 154)$$

$$A_3' A_3 = \begin{pmatrix} 49 \ 868 & & & & & \\ & 31 \ 340 & & & & \\ & & 18 \ 991 & & & \\ & & & 12 \ 217 & & \\ & & & & 30 \ 059 & \end{pmatrix}$$

$$A_3' U = \begin{pmatrix} 25 \ 246 & 3 \ 394 \\ 17 \ 261 & 1 \ 730 \\ 11 \ 482 & 853 \\ 7 \ 879 & 415 \\ 19 \ 923 & 595 \end{pmatrix}$$

$$A_3' V = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 31 \ 627 & & & & & & 16 \ 387 & & & & \\ & 21 \ 345 & & & & & & 8 \ 311 & & & \\ & & 14 \ 003 & & & & & & 3 \ 513 & & \\ & & & 9 \ 316 & & & & & & 1 \ 501 & \\ & & & & 22 \ 625 & & & & & & 1 \ 646 \end{array} \right)$$

$$A_3' W = \begin{pmatrix} 30 \ 328 & & & & & \\ & 20 \ 558 & & & & \\ & & 13 \ 738 & & & \\ & & & 9 \ 634 & & \\ & & & & 26 \ 154 & \end{pmatrix}$$

$$U' U = \begin{pmatrix} 112 \ 721 & 0 \\ 0 & 12 \ 134 \end{pmatrix}$$

$$U' V = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 25 \ 246 & 17 \ 261 & 11 \ 482 & 7 \ 879 & 19 \ 923 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 \ 394 & 1 \ 730 & 853 & 415 & 595 \end{array} \right)$$

$$U' W = \begin{pmatrix} 25 \ 246 & 17 \ 261 & 11 \ 482 & 7 \ 879 & 19 \ 923 \\ 3 \ 394 & 1 \ 730 & 853 & 415 & 595 \end{pmatrix}$$

$$U' x_1 = \begin{pmatrix} 2 & 717 \\ & 320 \end{pmatrix}$$

$$(V' x_1)' = (715 \quad 464 \quad 320 \quad 227 \quad 605 \quad 270 \quad 168 \quad 84 \quad 43 \quad 56)$$

$$(W' x_1)' = (767 \quad 492 \quad 339 \quad 255 \quad 759)$$

que nos conduce a la solución:

$$\begin{array}{llll} \lambda_0 = 43,169 & \lambda_2 = -27,055 & \lambda_3 = -30,062 & \mu_2 = 8,619 \\ \rho_2 = -6,377 & \rho_3 = -13,806 & \rho_4 = -5,669 & \rho_5 = -11,358 \\ \rho_6 = -18,237 & u_{22} = -1,526 & u_{32} = 2,799 & \\ v_{22} = 7,476 & v_{23} = 15,868 & v_{24} = 12,673 & v_{25} = 18,084 \\ v_{26} = 23,069 & v_{32} = 7,451 & v_{33} = 19,096 & v_{34} = 15,501 \\ v_{35} = 25,204 & v_{36} = 35,209 & & \\ w_{22} = 0,334 & w_{23} = -2,688 & w_{24} = 7,416 & w_{25} = -5,287 \\ w_{26} = -0,512 & & & \end{array}$$

lo que permite determinar los valores "teóricos" en las diversas subclases (ijk).

En el cuadro 8 se indican los valores "teóricos" obtenidos usando el modelo lineal incompleto (descartando las interacciones de orden 2) junto a los valores observados.

Cuadro 8

CHILE: TASAS DE MORTALIDAD NEONATAL OBSERVADAS Y TEORICAS, POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ DEL NACIDO VIVO, SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972

Tasas de mortalidad neonatal observadas (O) y teóricas (T), por ocupación del padre (j)

Nivel de instrucción de la madre (i)	Orden de la paridez (k)											
	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5		k = 6	
	O	T	O	T	O	T	O	T	O	T	O	T
	<i>Padre empleado (j = 1)</i>											
i = 1	42,92	43,17	(12,05)	(36,79)	34,19	29,36	(27,78)	(37,50)	(50,00)	(31,81)	(46,05)	(24,93)
2	15,60	16,11	18,02	17,21	19,59	18,18	19,83	23,12	25,75	22,84	19,98	20,95
3	13,23	13,11	14,24	14,18	17,47	18,40	26,32	22,94	22,10	26,95	29,50	30,08
	<i>Padre obrero (j = 2)</i>											
i = 1	50,60	51,79	48,58	45,08	35,10	35,29	39,20	38,70	34,33	35,14	32,47	33,04
2	23,34	23,21	23,77	23,97	22,25	22,58	23,52	22,80	24,11	24,65	27,66	27,53
3	24,09	24,52	25,04	25,26	(30,64)	(27,13)	(16,41)	(26,94)	(45,78)	(33,08)	42,02	40,99

Nota: Se indica con un paréntesis aquellos pares que presentan una mayor discrepancia.

Ya que:

$$\sum_{ijk} (np_{00} q_0) = 4\,589,82^{3/} \quad \sum_{ijk} n(p_0 - p_T)^2 = 0,5403$$

$$xq = 4\,598,16$$

la eficiencia del modelo lineal incompleto habiendo descartado las interacciones de orden 2 es igual a:

$$\eta = [1 - 0,5403/(4\,598,16 - 4\,589,82)] 100 = 93,5 \text{ por ciento}$$

que no resulta mayor debido a la presencia de tasas específicas que no se reproducen adecuadamente.

De acuerdo al cuadro 8, las tasas de mortalidad neonatal correspondientes a nacidos vivos en que la madre no tiene "ningún tipo de instrucción" y que el padre es "empleado" son las que presentan discrepancias mayores. De la misma manera -en oposición- en el caso en que la madre del nacido vivo tiene un nivel educacional "alto" y el marido es "obrero" tampoco estarán adecuadamente reproducidas.

Es por tanto posible aceptar que en esos grupos de combinación poco frecuente entre el nivel de educación de la madre y la ocupación del padre, tendrán importancia los efectos de las interacciones de orden 2.

Ejemplo 3

Aplicación al análisis de la mortalidad post-neonatal. Caso Chile 1972.

3/ Es importante indicar que el valor de $Q_{\min} = 4\,589,82 + 0,54 = 4\,590,36$, puede calcularse alternativamente usando la relación: $Q_{\min} = x - b(X'X_1) = 4\,705 - 115,03 = 4\,589,97$, valor algo diferente al anterior por efecto de los redondeos numéricos.

Cuadro 9

CHILE: DISTRIBUCION DE LOS NACIDOS VIVOS QUE HAN SOBREVIVIDO LOS PRIMEROS 27 DIAS DE VIDA, POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ, SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972

Distribución de los nacidos vivos que han sobrevivido los primeros 27 días de vida, por ocupación del padre (j)

Nivel de ins- trucción de la madre (i)	Orden de la paridez (k)						Total
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	
<i>Padre empleado (j = 1)</i>							
i = 1	223	164	113	70	57	146	772
2	8 078	6 266	4 004	2 471	1 400	2 648	24 867
3	18 277	12 808	6 466	2 590	1 062	1 020	42 223
<i>Total</i>	<i>26 578</i>	<i>29 238</i>	<i>10 583</i>	<i>5 131</i>	<i>2 519</i>	<i>3 813</i>	<i>67 862</i>
<i>Padre obrero (j = 2)</i>							
i = 1	1 595	1 606	1 512	1 348	1 294	5 453	12 808
2	30 208	24 646	16 877	11 212	7 689	19 372	110 004
3	5 023	3 309	1 677	839	396	570	11 814
<i>Total</i>	<i>36 826</i>	<i>19 561</i>	<i>20 066</i>	<i>13 399</i>	<i>9 379</i>	<i>25 395</i>	<i>134 626</i>

Cuadro 10

CHILE: DISTRIBUCION DE FALLECIDOS DE 28 DIAS HASTA 11 MESES DE EDAD, POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ, SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972

Distribución de fallecidos de 28 días hasta 11 meses de edad, por ocupación del padre (j)

Nivel de ins- trucción de la madre (i)	Orden de la paridez (k)						Total
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	
<i>Padre empleado (j = 1)</i>							
i = 1	6	7	6	6	5	11	41
2	114	128	90	51	38	79	500
3	129	92	54	37	17	23	352
<i>Total</i>	<i>249</i>	<i>227</i>	<i>150</i>	<i>94</i>	<i>60</i>	<i>113</i>	<i>893</i>
<i>Padre obrero (j = 2)</i>							
i = 1	127	140	113	106	90	364	940
2	1 047	966	683	456	325	875	4 352
3	126	128	60	32	23	38	407
<i>Total</i>	<i>1 300</i>	<i>1 234</i>	<i>856</i>	<i>594</i>	<i>438</i>	<i>1 277</i>	<i>5 699</i>

Con los datos de los cuadros 9 y 10 se han calculado las correspondientes tasas de mortalidad post-neonatal para Chile en el año 1972.

Cuadro 11

CHILE: TASAS DE MORTALIDAD POST-NEONATAL, POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ, SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972

*Tasas de mortalidad post-neonatal (en miles),
por ocupación del padre (j)*

Nivel de instrucción de la madre (i)	Orden de la paridez (k)						Total
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	
<i>Padre empleado (j = 1)</i>							
i = 1	26,91	42,68	53,10	85,71	87,72	75,86	53,11
2	14,11	20,43	22,48	20,64	27,14	29,83	20,11
3	7,06	7,18	8,35	14,29	16,01	22,55	8,34
<i>Total</i>	<i>9,37</i>	<i>11,80</i>	<i>14,17</i>	<i>18,32</i>	<i>23,82</i>	<i>29,64</i>	<i>13,16</i>
<i>Padre obrero (j = 2)</i>							
i = 1	79,62	87,17	74,74	78,64	69,55	66,75	73,39
2	34,66	39,20	40,47	40,67	42,27	45,17	39,56
3	25,08	38,68	35,78	38,14	58,08	66,67	34,45
<i>Total</i>	<i>35,30</i>	<i>41,74</i>	<i>42,66</i>	<i>44,33</i>	<i>46,70</i>	<i>50,29</i>	<i>42,33</i>

La medición de la importancia de los efectos principales y de los de interacción se pueden hacer por medio del cálculo de los cuadrados medios correspondientes. Aplicando las relaciones (106) a (118) se encuentra:

i	\hat{a}_i	j	\hat{b}_j	i	u_{i1}	u_{i2}
1	26,17	1	-10,54	1	3,50	-3,50
2	-11,45	2	10,54	2	1,55	-1,55
3	-14,72			3	-5,05	5,05

k	1	2	3	4	5	6
c_k	-11,63	-3,65	-3,72	3,48	7,26	8,27

k	1	2	3	4	5	6
v_{1k}	-4,14	-0,46	-1,40	9,66	2,34	-6,00
v_{2k}	4,59	2,04	3,77	-4,24	-3,97	-2,19
v_{3k}	-0,45	-1,58	-2,37	-5,42	1,63	8,19

k	1	2	3	4	5	6
w_{1k}	-4,68	-5,26	-0,64	4,40	4,03	2,15
w_{2k}	4,68	5,26	0,64	-4,40	-4,03	-2,15

$\mu = 42\ 872$

con lo cual, los cuadrados medios sin corregir valen:

$$\mu^2 = 1\ 838,00 ; \quad \hat{\Sigma} a_{i.}^2/a = 344,22 ; \quad \hat{\Sigma} b_{.j}^2/b = 111,09 ; \quad \hat{\Sigma} c_{.k}^2/c = 49,27 ;$$

$$\Sigma u_{ij}^2/ab = 13,38 ; \quad \Sigma w_{jk}^2/ac = 18,86 ; \quad \Sigma w_{jk}^2/bc = 15,03$$

y dado que:

$$\Sigma x_{ijk}^2/abc = 2\ 444,77$$

por diferencia se tiene que:

$$\Sigma \epsilon_{ijk}^2/abc = 54,92$$

Si se adoptan estos cuadrados medios, sin corregir, como medida de la importancia de cada uno de los diferentes tipos de efectos, en las tasas observadas, se puede decir que: el efecto más importante es el debido al

nivel de instrucción de la madre y que el nivel ocupacional del padre tiene la tercera parte de la importancia que la característica anterior. Por otra parte, el orden de la paridez representa 1/7 de importancia con respecto al nivel de instrucción de la madre.

Los efectos de interacción de orden 1 tienen una importancia bastante menor, ya que en su conjunto exceden levemente al efecto relativo de la paridez. Finalmente, aunque se corrija el cuadrado medio referente al efecto de interacción de orden 2, estos efectos de interacción de orden 2 son importantes.

Dado que no se dispone de la distribución de los nacidos según la edad de la madre u otro tipo de característica, no es posible descubrir si el efecto de las interacciones de orden 2 dependen de esta variable.

Por otra parte, es interesante comparar los resultados obtenidos en este ejemplo (mortalidad post-neonatal) con los obtenidos en el ejemplo 2 (mortalidad neo-natal).

Si convencionalmente sumamos todos los cuadrados medios y calculamos la importancia relativa de cada uno de los cuadrados medios se tiene:

Cuadro 12

CHILE: IMPORTANCIA RELATIVA DE LOS CUADRADOS MEDIOS EN RELACION
CON LA MORTALIDAD NEONATAL Y POST-NEONATAL,
SEGUN TIPO DE EFECTOS, 1972

Tipos de efectos	Importancia relativa de los cuadrados medios (Por cien)	
	Mortalidad neo-natal	Mortalidad post-neonatal
a) <i>Efectos principales</i>	58	83
Instrucción de la madre	38	57
Ocupación del padre	8	18
Orden de la paridez	12	8
b) <i>Interacciones de orden 1</i>	20	8
Instrucción - ocupación	2	2
Instrucción - paridez	11	3
Ocupación - paridez	7	3
c) <i>Interacciones de orden 2</i>	22	9
Instrucción - ocupación - paridez	22	9
<i>Total</i>	100	100

puede verse que en ambos casos es muy importante el nivel de instrucción de la madre, pero su importancia se acrecienta en la mortalidad post-neonatal. La ocupación del padre que tenía relativamente poca relevancia en la mortalidad neo-natal también se acrecienta (más del doble de la importancia), de modo que la suma de los efectos principales de ambas características explicaría el 75 por ciento de la variación de la mortalidad post-neonatal.

Un hecho favorable en este ejemplo sobre mortalidad post-neonatal, es que la importancia relativa de las interacciones de orden 2 se reduce a menos de la mitad con respecto al caso de la mortalidad neonatal.

Adoptando un modelo lineal incompleto, sin considerar el efecto de las interacciones de orden 2, se tiene la siguiente solución para los parámetros del modelo escrito en la forma (19):

$$\begin{array}{lll}
 \lambda_0 = 53,601 & \lambda_2 = 37,208 & \lambda_3 = -47,877 \\
 \mu_2 = 22,290 & \rho_2 = 5,955 & \rho_3 = -2,165 \\
 \rho_4 = 3,277 & \rho_5 = -4,598 & \rho_6 = -7,445 \\
 u_{22} = -4,634 & u_{32} = 1,924 & v_{22} = -3,908 \\
 v_{23} = 7,604 & v_{24} = 2,125 & v_{25} = 13,237 \\
 v_{26} = 19,638 & v_{32} = -3,740 & v_{33} = 5,221 \\
 v_{34} = 4,961 & v_{35} = 19,742 & v_{36} = 31,729 \\
 w_{22} = 3,603 & w_{23} = 1,133 & w_{24} = 0,964 \\
 w_{25} = -0,036 & w_{26} = -0,904 &
 \end{array}$$

a partir de estos parámetros pueden deducirse los valores teóricos para su comparación con los correspondientes valores observados.

Cuadro 13

CHILE: TASAS DE MORTALIDAD POST-NEONATAL OBSERVADAS Y TEORICAS, POR OCUPACION DEL PADRE Y ORDEN DE LA PARIDEZ, SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DE LA MADRE, 1972

*Tasas de mortalidad post-neonatal observadas (O) y teóricas (T),
por ocupación del padre (j)*

Nivel de ins- trucción de la madre (i)	Orden de la paridez (k)											
	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5		k=6	
	O	T	O	T	O	T	O	T	O	T	O	T
<i>Padre empleado (j = 1)</i>												
i = 1	(26,91)	(53,60)	(42,68)	(59,56)	53,10	51,44	(85,71)	(56,88)	(87,74)	(49,00)	(75,80)	(46,16)
2	14,11	16,39	20,43	18,44	22,48	21,83	20,64	21,80	27,14	25,03	29,83	28,59
3	7,06	5,72	7,18	7,94	8,35	8,78	14,29	13,96	16,01	20,87	22,55	30,09
<i>Padre obrero (j = 2)</i>												
i = 1	79,62	75,89	87,17	85,45	74,74	74,86	78,64	80,13	69,55	71,26	66,75	67,54
2	34,66	34,05	39,20	39,70	40,47	40,62	40,67	40,42	42,27	42,65	45,17	45,34
3	25,08	29,94	38,68	35,76	35,78	34,13	38,14	39,14	(58,08)	(45,05)	(66,67)	(53,32)

Observando los valores indicados en el cuadro 13, puede comprobarse que existe una aceptable reproducción del modelo. Solamente los valores (11k), a excepción del valor en la celda (110), presentan discrepancias de importancia. Estas categorías incluyen 659 nacidos vivos, o sea el 3,2 por mil del total de nacidos vivos. Al igual que en el caso de la mortalidad neonatal estos grupos corresponden a los nacidos vivos de madres que no tienen ningún nivel de instrucción y padres empleados.

Con respecto a la combinación opuesta, o sea nacidos vivos de madres de nivel de instrucción alto y padres obreros, los valores no discrepan tanto como sucedió para el caso de la mortalidad neonatal. Solamente los valores correspondientes a las dos últimas categorías de paridez, presentan discrepancias. Estas dos categorías incluyen 2 122 nacidos vivos o sea el 1 por ciento del total de los nacidos vivos considerados. Por lo tanto, para estos grupos de nacidos vivos es importante el efecto de las interacciones de orden 2.

A pesar de las circunstancias expuestas, puede decirse que el modelo lineal incompleto reproduce adecuadamente las tasas de mortalidad post-neonatal correspondientes al 98,6 por ciento del total de nacidos vivos.

Conociendo los valores teóricos de las tasas en las subclases (ijk) es posible determinar los valores de (Q_{min}) tanto para el modelo lineal completo, como para el modelo lineal incompleto, en que se descartan las interacciones de orden 1, como para aquel en que se supone que la variación de las tasas específicas no depende de las variables consideradas ($Q_{min}(SR)$) (situación extrema).

Se tiene:

$$Q_{min}(MLC) = \sum_{ijk} (n p_o q_o) = 6\ 316,93$$

$$Q_{min}(SR) = xq = 6\ 377,40$$

$$\sum_{ijk} n(p_o = p_T)^2 = 1,0627$$

con lo cual la eficiencia de reproducción del modelo lineal incompleto es:

$$\eta = [1 - (1,0627/60\ 463)] \cdot 100 = 98,2 \text{ por ciento}$$

que nos indica que, en este caso, el modelo lineal logra una reproducción mejor de las tasas específicas de mortalidad post-neonatal que de las de mortalidad neonatal.

También es útil destacar que el valor alternativo de (Q_{min}) para el modelo incompleto:

$$Q_{min(MLI)} = x - \hat{b} (X'x_1) = 6\ 592 - 274,13 = 6\ 317,87$$

es muy semejante al obtenido aplicando la relación:

$$\begin{aligned} Q_{min(MLI)} &= Q_{min(MLC)} + \sum_{ijk} (n p_0 q_0) \\ &= 6\ 316,93 + 1,06 = 6\ 317,99 \end{aligned}$$

y que la diferencia observada se debe esencialmente a los redondeos numéricos.

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CELADE

Edificio Naciones Unidas
Avenida Dag Hammarskjöld
Casilla 91, Santiago, CHILE

Apartado Postal 5249
San José, COSTA RICA