CELADE

SUBSEDE

Inés Azofeifa

APUNTES DE MATRICES I

Serie BS No. 5
Edición Provisional

San José, Costa Rica
Agosto - 1972

01426.00=No pedido DOCPAL(NACCESO)   1972=Fecha publ.

AZOFEIFA, Ines (Au)
Apuntes de matrices I.
Agosto 1972; Pags:93
Editorial: CELADE. San Jose CR
Serie BS 5
Idioma:Es   Distr:Restringida   Impresion:Mimeo

Pais/region principal:ZZ   Paises tratados:ZZ
Descriptores:<MATEMATICAS> <ANALISIS MATRICIAL*>
Proyecto: <CELADE>
Categ. Revista:<POBL:MEDICION>
Fechas datos demogr:9999-9999   No. de Ref= 0

(Inf. interna para DOCPAL: ISIS=04235 LS =m Dfd)

APUNTES DE MATRICES

Introducción

Las matrices constituyen un instrumento muy valioso para tratar con modelos lineales. En los últimos años los modelos matemáticos lineales han desempeñado un papel importante en casi todas las ciencias físicas y sociales. El objeto de un modelo matemático es el de tener una descripción más objetiva de un determinado fenómeno.

Para definir matemáticamente cualquier cosa del mundo real es necesario diseñar un modelo matemático apropiado que relacione las variables que intervienen.

No pretendemos dar la definición de lo que se entiende por un modelo lineal; sin embargo, podríamos indicar que todos los modelos lineales poseen propiedades de aditividad y homogeneidad.

a) Aditividad.

Si una variable x_1 produce un efecto t_1 y otra variable x_2 produce un efecto t_2 cuando dichas variables intervienen solas, debe tenerse entonces que x_1 y x_2 actuando juntas produzcan un efecto $t_1 + t_2$.

b) Homogeneidad.

Si una variable x_1 produce un efecto t_1 cuando actúa sola, entonces para cualquier número real k, la variable kx_1 debe producir el efecto kt_1.

Por eso cuando se tiene un modelo lineal en un conjunto de variables dado no pueden existir potencias superiores a 1 en las variables; ni funciones tales como $\log x_1$, $\exp x_1$, etc.

1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

En la exposición de nuestro curso utilizaremos muchos resultados, sin demostración, que son propios del Algebra Lineal; sí estaremos interesados en la interpretación correcta de los mismos y su aplicación hasta donde nos sea posible.

Antes de entrar de lleno en la parte de la teoría de matrices que nos interesa, creemos conveniente introducir algunas propiedades sobre el conjunto de vectores $\mathbb{R}^n$, que pasamos a definir:

Con el símbolo $\mathbb{R}$ denotamos al conjunto de los números reales, y con C al conjunto de los números complejos. En la mayoría de los casos trabajaremos con números reales, sin embargo gran parte de los resultados donde intervengan seguirán siendo validos si trabajamos con C. Aquí n denota un número natural ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Para un n dado, $\mathbb{R}^n$ denota el conjunto de todos los elementos (n - tuples) de la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde los a_i son números reales. Por ejemplo si $n = 3$, $(1, 0, -2)$ es un elemento de $\mathbb{R}$, también serían $(0, 0, 0)$ y $(128, 0.57, -592)$.

a) Igualdad de tuples

En $\mathbb{R}^n$ (n fijo) dos n - tuples $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2 \ldots, b_n)$ son iguales si y solamente si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$; y en este caso escribiremos $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ si $n = 3$, entonces en R^3 los 3 - tuples $(1, 3, -4)$ y $(1, 3, x)$ son iguales solamente si $x = -4$; sin embargo, no podríamos decir que $(1, 0, 1)$ sea igual a $(1, 1, 0)$, entonces tenemos que $(1, 0, 1) \neq (1, 1, 0)$

b) Operaciones en $\mathbb{R}^n$

Para un n fijo, esto n - tuples se pueden sumar y multiplicar por un número real, como sigue:

i. Suma en $\mathbb{R}^n$

$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

Ejemplo: $(n = 3)$

$(1, -4, 0) + (3, 6, -1) = (1 + 3, -4 + 6; 0 - 1) = (4; 2; -1)$

es decir

$(1, -4, o) + (3, 6, -1) = (4, 2, -1)$

Observamos que al sumar dos n - tuple el resultado es también un n - tuple

ii. Multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^n$ (aquí escalar significa un número real)

Si $k \in R$ entonces $k.(a_1, \dots, a_n) = k(ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$: $k = -2$, entonces

$k\ (1, -4, 0) = (k.1, k(-4), k.o) = (-2, 8, 0)$

es decir $-2(1, -4, o) = (-2, 8, o)$

Observe que al multiplicar un n - tuple por un número real el resultado es un n - tuple

c) Propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}^n$

Cada una de las operaciones en $\mathbb{R}^n$ goza de ciertas propiedades, además de otras propiedades que relacionan una operación con la otra.

i. La suma en $\mathbb{R}^n$ es asociativa.

Significa que se verifica la siguiente igualdad cualesquiera que sean los n - tuples en cuestión

$$\left[(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)\right] + (c_1, c_2, \dots, c_n) =$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + \left[(b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2 \dots, c_n)\right]$$

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$:

Sumar (1, 2, -2) con $\left[(-1, 0, 1) + (2, 3, 0)\right]$ da el mismo resultado que sumar $\left[(1, 2, -2) + (-1, 0, 1)\right]$ con (2, 3, 0)

En efecto:

$(-1, 0, 1) + (2, 3, 0) = (1, 3, 1)$, así

$(1, 2, -2) + \left[(-1, 0, 1) + (2, 3, 0)\right] = (1, 2, -2) + (1, 3, 1)$
$= (2, 5, -1)$

Por otra parte:

$(1, 2, -2) + (-1, 0, 1) = (0, 2, -1)$, así

$\left[(1, 2, -2) + (-1, 0, 1)\right] + (2, 3, 0) = (0, 2, -1) + (2, 3, 0) =$
$(2, 5, -1)$

de donde se obtiene la igualdad:

$(1, 2, -2) + \left[(-1, 0, 1) + (2, 3, 0)\right] = \left[(1, 2, -2) + (-1, 0, 1)\right] +$
$(2, 3, 0)$.

ii. La suma en $\mathbb{R}^n$ es conmutativa.

Significa que en cualesquiera que sean los n-tuples $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene siempre la igualdad:

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (b_1, \ldots, b_n) +$
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

$(1, -2, 0) + (4, 7, -1) = (5, 5, -1)$, pero también
$(4, 7, -1) + (1, -2, 0) = (5, 5, -1)$

iii. Existencia de un "cero" en $\mathbb{R}^n$

El n-tuple $(0, 0, \ldots, 0)$ (hemos colocado n veces el cero) satisface la siguiente propiedad respecto a la suma en $\mathbb{R}^n$: cualquiera que sea el elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que:

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0) + (a_1, \ldots, a_n) =$

iv. Existencia de inversos en $\mathbb{R}^n$ con respecto a la suma

Esto significa que dado un elemento $(a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathbb{R}^n$ es posible encontrar otro n-tuple, digamos $(b_1, \ldots, b_n)$ que satisfacen la siguiente igualdad:

$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (0, 0, \ldots, 0)$

En efecto, dado $(a_1, \ldots, a_n)$, el n-tuple $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ satisface esa propiedad de acuerdo a la definición de suma en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Consideremos $(-2, 4, -\frac{1}{5})$ entonces el 3-tuple que sumado con este nos da el cero en $\mathbb{R}^3$ es precisamente $(2, -4, \frac{1}{5})$ pues se tiene que $(-2, 4, -\frac{1}{5}) + (2, -4, \frac{1}{5}) = (0, 0, 0)$

Las anteriores son propiedades exclusivamente de la suma en $\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora las propiedades de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$.

v. La multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ es asociativa, significa que si k, t son números reales y $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-tuple en $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene siempre la igualdad:

$k\left[t(a_1, \ldots, a_n)\right] = (kt)(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$:

con $k = 5$, $t = -1$

$5.\left[(-1)(1, -2, 0)\right] = 5.(-1, 2, 0) = (-5, 10, 0)$, pero

$\left[5.(-1)\right].(1, -2, 0) = (-5).(1, -2, 0) = (-5, 10, 0)$

vi. El número real 1 tiene la siguiente propiedad en la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$

Cualquiera que sea el n-tuple $(a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $1.(a_1, \ldots, a_n) = a_1, \ldots, a_n)$.

Las siguientes exhiben propiedades donde se relacionan las dos operaciones entre si.

vii. La multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ es distributiva respecto a la suma en $\mathbb{R}^n$

Significa que si k es un número real y $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ n - tuples en $\mathbb{R}^n$ se tiene siempre la siguiente igualdad

$k\cdot\left[(a_1, \dots, a_n)+(b_1, \dots, b_n)\right] = k\cdot(a_1, \dots, a_n) + k\,(b_1, \dots, b_n)$

<u>Ejemplo en $\mathbb{R}^4$:</u> $k = 2$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-1, 2, -4, 5)$; $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, -2, -1, 1)$

entonces

$2\left[(-1, 2, -4, 5)+(0, -2, -1, 1)\right] = 2\cdot(-1, 0, -5, 6) = (-2, 0, -10, 12)$

Por otra parte:

$2(-1, 2, -4, 5) + 2(0, -2, -1, 1) =$

$(-2, 4, -8, 10) + (0, -4, -2, 2) = (-2, 0, -10, 12)$.

viii. Si k, t son números reales y $(a_1, \dots, a_n)$ un n - tuple en $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$(k+t)\cdot(a_1, \dots, a_n) = k(a_1, \dots, a_n) + t\,(a_1, \dots, a_n)$

<u>Ejemplo en $\mathbb{R}^4$</u>

$k = -1$ $\qquad$ $t = 2$

entonces $(-1+2)(3, 2, -1, 1) = 1\cdot(3, 2, -1, 1) = (3, 2, -1, 1)$

Por otra parte:

$(-1)\cdot(3, 2, -1, 1) + 2\,(3, 2, -1, 1) =$

$(-3, -2, 1, -1) + (6, 4, -2, 2) = (3, 2, -1, 1)$

<u>Definición</u>

$\mathbb{R}^n$ provisto de la suma y multiplicación por escalares (con las 8 propiedades ya citadas) constituye un ESPACIO VECTORIAL SOBRE $\mathbb{R}$; diremos simplemente el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Los elementos del ESPACIO VECTO -

d) Combinación lineal de vectores.

Para simplificar, consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y obser - vemos que el vector (6, 5, 10) se puede expresar también como -1. (2, -1, 0) + 2(4, 2, 5), (de acuerdo a la suma y **multiplicación** por escalares en $\mathbb{R}^3$), entonces diremos que (6, 5, 10) está expresado como COMBINACION LINEAL de los vectores (2, -1, 0) y (4, 2, 5) donde los coeficientes de esta combinación lineal son -1 y 2 respectivamente.

En general una combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^n$ no es más que una expresión de la forma $k\,(a_1, \ldots, a_n) + t\,(b_1, \ldots, b_n) + \ldots + h.(d_1, \ldots, d_n)$ donde los k, t, ..., h son números reales.

Es de sumo interés, cuando tengamos un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$, determinar un número mínimo de vectores para tal conjunto que tenga la propiedad de que cualquier otro vector de ese mismo conjunto se exprese combinación lineal de aquellos.

Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, todo vector (a, b, c) se puede expresar como combinación lineal de los 3 vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1); en efecto (a, b, c) = a.(1, 0, 0) + b. (0, 1, 0) + c. (0, 0, 1) como el lector puede fácilmente verificar.

<u>Ejemplo en $\mathbb{R}^3$:</u> (-2, 4, -1) = -2 (1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) - 1(0, 0, 1).

i. Base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Analicemos el caso del vector (0, 0, 0) en $\mathbb{R}^3$ y de los vectores (2, -1, 0) y $(1, -\frac{1}{2}, 0)$. Se tiene que el vector (0,0,0) en $\mathbb{R}^3$ se puede expresar, evidentemente como (0, 0, 0) = $0.\ (2, -1, 0) + 0.\ (1, -\frac{1}{2}, 0)$, pero también como (0, 0, 0) = $-1\,(2, -1, 0) + 2(1, -\frac{1}{2}, 0)$, Hemos expresado en dos <u>formas diferentes</u> el vector cero en $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores (2, -1, 0) y $(1, -\frac{1}{2}, 0)$; en un caso los coefi -

ficientes de esta combinación lineal son el cero y el cero; en otro caso son -1 y 2. Esto es debido a la naturaleza de los vectores (2, -1, 0) y $(1, -\frac{1}{2}, 0)$ ya que uno de ellos se puede expresar en términos del otro $(2, -1, 0) = 2(1, -\frac{1}{2}, 0)$. Esto no sucede con los vectores (2, 0, 0) , (0, 1, 0), (0,0,1) pues la <u>única forma</u> de expresar al (0, 0, 0) en términos de ellos dos es por medio de la combinación lineal (0, 0, 0) = 0. (1, 0, 0) + 0.(0, 1, 0) + 0.(0, 0, 1),(con coeficientes iguales a cero!)

Cualesquiera 3 elementos de $\mathbb{R}^3$, que como los 3 vectores (1,0,0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) tienen las dos propiedades siguientes:

a) Todo elemento de $\mathbb{R}^3$ se expresa como combinación lineal de ellos.

b) La única forma de expresar al vector (0, 0, 0) como combinación lineal de ellos es con coeficientes todos iguales a cero (lo que equivale a decir que ninguno de ellos se expresa como combinación lineal de las otras dos), constituyen lo que se llama una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ (evidentemente esto se generaliza a $\mathbb{R}^n$).

ii. Dependencia lineal - Independencia lineal

Cuando un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ es tal que ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de algunos de los restantes diremos que tal conjunto es LINEALMENTE INDEPENDIENTE, en caso contrario, diremos que es linealmente dependiente.

<u>Ejemplos</u>

1) Los vectores (2, 3, 1), (1, 0, 4), (2, 4, 1) y (0, 3, 2) son linealmente dependientes (en $\mathbb{R}^3$)

Podemos cerciorarnos de esto por dos caminos:

- El vector (0, 0, 0) se puede expresar como una combinación lineal de esos cuatro vectores con coeficientes no todos cero:

  $(0, 0, 0) = -29(2, 3, 1) + 4(1, 0, 4) + 27(2, 4, 1) - 7(0, 3, 2)$,

  como el lector puede verificar fácilmente.

- Uno de ellos se expresa como combinación lineal de los 3 restantes:

  $$(1, 0, 4) = \frac{29}{4}(2, 3, 1) - \frac{27}{4}(2, 4, 1) + \frac{7}{4}(0, 3, 2)$$

NOTA

En realidad el hecho de que estos cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ sean linealmente dependientes no depende de los vectores en sí, sino que es debido a un resultado que estipula: En $\mathbb{R}^n$, todo conjunto de más de n vectores es linealmente dependiente. En el caso particular que estamos considerando, tenemos cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, luego ellos son L.D. (linealmente dependientes)

2) En $\mathbb{R}^4$ los vectores (0, 4, 0, 7), (2, 3, -1, 6) son L. I. (linealmente independientes), en efecto si el vector cero de $\mathbb{R}^4$ se expresara en términos de ellos $(0, 0, 0) = k(0, 4, 0, 7) + t(2, 3, -1, 6)$ entonces de acuerdo a las operaciones en $\mathbb{R}^4$ se tendría :

$(0, 0, 0) = (0, 4k, 0, 7k) + (2t, 3t, -t, 6t) =$

$(0, 0, 0, 0) = (2t, 4k + 3t, -t, 7k, + 6t)$ que por definición de igual de 4 - tuples en $\mathbb{R}^4$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2t \quad &= 0 \\ 4k + 3t &= 0 \\ -t \quad &= 0 \\ 7k + 6t &= 0 \end{aligned}$$

evidentemente estó implica que $A = 0$, $k = 0$; luégo hemos demostrado que la única forma de expresar al véctor cero de $\mathbb{R}^4$ como combinación lineal de (0, 4, 0, 7) , (2, 3, -1, 6) es con coeficientes iguales a cero.

NOTAS

a) No debemos olvidar que este es el mecanismo que se utiliza para probar la independencia lineal de un cierto número de vectores, pero más importante es tener presente el significado de esta noción (independencia lineal). En nuestro caso particular tenemos que ninguno de estos dos vectores puede expresarse en términos del otro.

b) Generalmente, el estudio de la independencia o dependencia lineal de un cierto número de vectores conduce a la solución de un cierto sistema de ecuaciones.

e) Ejercicios

i. Expresar el vector $x = (4, 5)$ como combinación lineal de los vectores (1, 3) y (2, 2). Si esto fuera posible que podría conducir respecto a la independencia o dependencia lineal de los vectores (4, 5), (2, 3), (2, 2).?

ii. Si $a = (3, 2, 1)$, $b = (1, 5, 6)$ encontrar x en $\mathbb{R}^3$ (por supuesto) para que se cumpla la siguiente igualdad $3a + 2x = 5b$

iii. Sin cálculos previos, podría asegurar que los vectores (1, - 2, 1), (2, -4, 2) son L. I. o L. D.?

iv. Cuál es el número máximo de vectores en $\mathbb{R}^5$ que sean L. I. ?

v. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$:

- (3, 0, 2) ; (7, 0, 9) ; (4, 1, 2)
- (1, 1, 0) ; (3, 1, 1) ; (5, 2, 1)
- (1, 5, 7) ; (4, 0, 6) ; (1, 0, 0)

2. Matrices: definición y primeras propiedades

a) Definición

Una matriz se define como un "arreglo rectangular" de números ordenados en filas y columnas, de la manera siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los elementos a_{ij} son en general números (pueden ser también polinomios, etc), y su doble subíndice indica la fila y columna de la matriz A donde se encuentra. El primer índice indica la fila, el segundo la columna. En el caso anterior la matriz A posee m filas y n columnas en tal caso diremos que A es una matriz de tamaño m x n. Los elementos a_{ij} se llaman las entradas de la matriz A, más específicamente a_{ij} es la entrada (i,j) de la matriz A.

Observe pues que en una matriz de tamaño 3×4 (con 3 filas y 4 columnas) el primer subíndice de sus entradas toma los valores 1, 2, 3, mientras que el segundo subíndice toma los valores 1, 2, 3, 4.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces A es una matriz 3×4 donde:

$$
\begin{array}{llll}
a_{11} = 1 & a_{12} = 3 & a_{13} = -5 & a_{14} = 0 \\
a_{21} = 2 & a_{22} = 0 & a_{23} = -1 & a_{24} = 1 \\
a_{31} = 4 & a_{32} = 0 & a_{33} = -2 & a_{34} = 2
\end{array}
$$

Estudiaremos las matrices desde un punto de vista general con el objeto de que los estudiantes de Demografía tengan a mano un instrumento de trabajo que les pueda ser útil en muchas circunstancias.

Todos estamos familiarizados con el problema de resolver un sistema homogéneo de ecuaciones del tipo, por ejemplo,:

$$
\left.\begin{array}{r}
2x + 3y - 4z = 0 \\
-x \qquad + 2z = 0 \\
5y - \tfrac{1}{2}z = 0
\end{array}\right\} (*)
$$

Uno de los métodos de solución de (*) consiste en simplificar el sistema de tal manera que se puedan llevar a otro donde los valores de x, y, z que satisfacen el sistema sea más fácil de obtener. La simplificación se efectua sumando una ecuación a otra, o multiplicando una ecuación por un número distinto de cero, etc, pero en realidad en este proceso solo utilizamos los coeficientes del sistema; por tal razón se trabaja con la matriz

$$
\begin{bmatrix}
2 & 3 & -4 \\
-1 & 0 & 2 \\
0 & 5 & -1/2
\end{bmatrix}
$$

que es "la matriz asociada" al sistema y sobre ella efectuamos cierto tipo de operaciones, como veremos luego, que son las que haríamos directamente sobre el sistema (*)

b) Igualdad de Matrices

Para que dos matrices sean iguales deben satisfacer:

i. Ser del mismo tamaño.

ii. Cada entrada (i,j) en una de ellas debe ser igual a la entrada (i,j) de la otra y recíprocamente.

<u>Ejemplo</u>:

i. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & 5 \end{bmatrix}$ solamente si $x=2$, $y=1$

ii. Las matrices $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

no son iguales pues no tienen el mismo tamaño.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

no son iguales pues aunque tiene el mismo tamaño 2×3 la entrada (2,2) de A es o, mientras que la misma entrada (2,2) de B es 1.

Notación: si una matriz la denotamos con A, entonces la entrada (i,j) de A la denotaremos por $(A)_{ij}$.

Nota: Una matriz queda perfectamente definida si conocemos cada una de las entradas que la forman.

c) Operaciones con matrices

Esencialmente trabajaremos con 3 operaciones, en el conjunto de matrices: suma, producto y multiplicación por un escalar, las cuales pasamos a definir inmediatamente.

i. Suma de matrices: (Sólo se pueden sumar matrices del mismo tamaño).

Si A y B son matrices de tamaño $m \times n$ la matriz suma de A con B, notada A+B, está definida por $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$, donde $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, es decir, la entrada (i,j) de la primera con la entrada, también, (ij) de la segunda.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & 5 & 6 \\ 0 & -z & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A+B = \begin{bmatrix} -1+x & 5 & 3 \\ 0 & -z & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que al sumar dos matrices de tamaño $m \times n$, el resultado es otra matriz del mismo tamaño, $m \times n$.

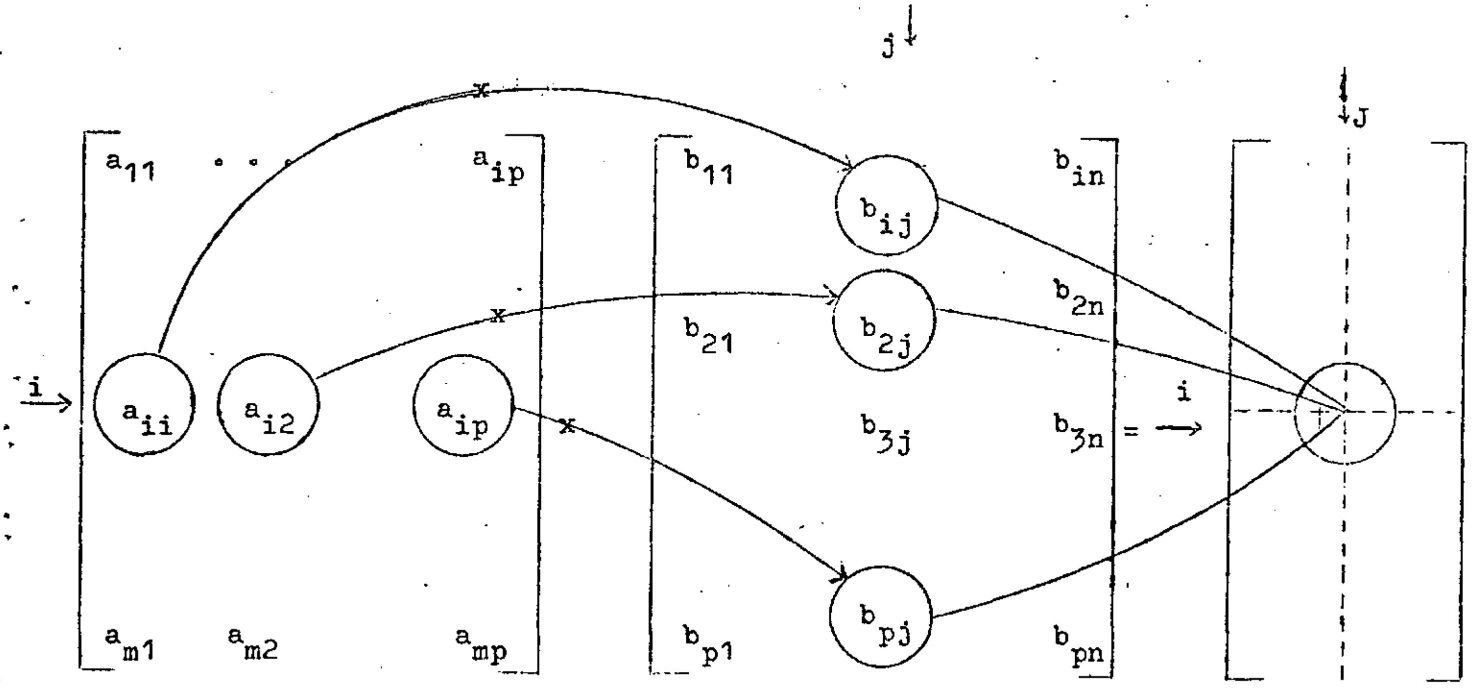
ii. Producto de matrices (El número de columnas de la primera de - be ser igual al número de filas de la segunda).

Si A es una matriz de tamaño $m \times p$ y B es matriz de tamaño $p \times n$ entonces el producto de A con B, notado A.B es una ma - triz de tamaño de $m \times n$ y definida por:

$$(A.B)_{ij} = \sum_{k=1}^{P} (A)_{ik} \cdot (B)_{kj}$$

para cada (i,j) con $i = 1, \ldots, m$
$j = 1, \ldots, n$

Gráficamente, podríamos representarlo así:



II II II

A B A . B

Ejemplo:

$$\text{Sea } A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A es de tamaño 3×3, B es de tamaño 3×5, luego se pueden multiplicar y $A \circ B$ será una matriz 3×5 (observe que no se puede multiplicar B por A)

$$A \circ B = \begin{bmatrix} -1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 3\cdot 0 & -1\cdot 4 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0 & -1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0 & -1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 3\cdot(1) & -1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 3\cdot(1) \\ 4\cdot 3 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 0 & 4\cdot 4 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 0 & 4\cdot 0 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 0 & 4\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 4\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot 4 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & -4 & -4 \\ 8 & 16 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

iii. Multiplicación de una matriz por un escalar (ninguna restricción).

Si A es una matriz de tamaño $p \times q$, y k es un número real entonces $k \circ A$ denota una matriz tal que $(k \circ A)_{ij} = k \circ (A)_{ij}$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad k = -3$$

Entonces

$$k \cdot A = -3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) & -3.0 & -3.3 \\ -3.0 & -3.2 & -3(-5) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

Observe que al multiplicar una matriz de tamaño $p \times q$ por un escalar, la matriz que resulta es también de tamaño $p \times q$

d) Propiedades de las 3 operaciones entre matrices.

i. Si A, B, C, son matrices del mismo tamaño se tienen las siguientes igualdades:

a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociatividad de la suma)

ii. $A + B = B + A$ (conmutatividad de la suma)

iii. $k(A + B) = kA + kB$, donde k es un número real arbitrario.

Si A, B, C, son matrices tales que pueda efectuarse la suma de B y C, y el producto de A con $B + C$ entonces

iv. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributividad)

v. $(P + Q) \cdot T = P \cdot T + Q \cdot T$ cuando P, Q, T, sean matrices de tamaños convenientes (distributividad)

vi. $(P \cdot Q) \cdot C = P \cdot (Q \cdot C)$ cuando P, Q, T, sean matrices de tamaños convenientes (asociatividad de la multiplicación)

NOTA

En general se tiene que $A \cdot B \neq B \cdot A$ (la multiplicación de matrices no es conmutativa)

Evidentemente también podemos restar matrices del mismo tamaño:

vi.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

vii.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

viii. Si
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule A^3 de dos maneras distintas (A^3 significa $(AA) \cdot A$ o $A \cdot (A \cdot A)$ puesto que la multiplicación es asociativa)

ix. Si
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

encontrar una matriz D, 3×2 tal que $A + B - D = 0$

x. De acuerdo a la definición de igualdad de matrices muestre $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$ donde A, B, C y D, son matrices de tamaños apropiados. Muestre también la ley conmutativa de la suma y de las leyes distributivas

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Muestre que $A \circ B = A\,C$. Observe entonces que $A \circ B = A\,C$ no implica necesariamente que $B = C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Muestre que $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$. (como ya sabiamos!)

xii.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} x_1 = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \\ x_2 = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \\ x_3 = a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones en las incógnitas y_1, y_2 (se supone que x_1, x_2, x_3 y los a_{ij} son números conocidos), tal sistema puede escribirse en forma matricial como $\boxed{A \circ Y = X}$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Si ahora efectuamos un cambio de variable (en las incógnitas)

$$(**) \quad \begin{cases} y_1 = b_{11} z_1 + b_{12}\, z_2 \\ y_2 = b_{21} z_1 + b_{22}\, z_2 \end{cases}$$

el sistema original se escribe

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21}) z_1 + (a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22})\, z_2 \\ x_2 = (a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21}) z_1 + (a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22})\, z_2 \\ x_3 = (a_{31}\, b_{11} + a_{32}\, b_{21}) z_1 + (a_{31}\, b_{12} + a_{32}\, b_{22})\, z_2 \end{cases}$$

En notación matricial este sistema (en z_1 y z_2) se escribe

$$X = C \circ Z \quad \text{donde} \quad C = \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} \\ a_{31}\, b_{11} + a_{32}\, b_{21} & a_{31}\, b_{12} + a_{32}\, b_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Pero observe que (**) puede también escribirse en notación matricial como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = B \circ Z \text{ ; pero } C = A \circ B$$

así que $X = (A \cdot B)\, Z$

xiii. Si

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 &= 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{aligned}\right\} (1)$$

con

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_1 + 2z_2 \\ y_2 &= 2z_1 - z_2 \\ y_3 &= 2z_1 + 3z_2 \end{aligned}\right\}$$

verifique que el sistema (1) puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{bmatrix}$$

xiv. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ (matriz cuadrada) se llama traza de A, a la suma de las entradas de A que tienen los dos subíndices iguales (elementos de la diagonal de A).

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces la traza de A es $1+6+0=7$: $Tr(A) = 7$

Muestre entonces que si A y B son dos matrices y k es un número real se tiene siempre que:

1) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

2) $Tr(k \cdot A) = k \cdot Tr(A)$

xv. Determinar las matrices B que satisfacen la igualdad

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar todas las matrices que conmutan con la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

f) Algunos tipos de matrices

i. Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada $(n \times n)$ de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

es decir tal que todas aquellas entradas a_{ij} con $i \neq j$ son cero

Muy frecuentemente se escribe $A = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn})$.

Ejemplos

1)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{diag}\,(0,\ 1,\ -2)$$

2) Una matriz diag $(1, 1, \ldots 1)$ de tamaño $n \times n$ es llamada la matriz identidad $n \times n$ y se denota I_n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedad de la matriz identidad : Si A es una matriz $n \times p$ entonces se tiene siempre las dos igualdades siguientes:

(1) : $I_n \circ A = A$

$A \circ I_p = A$

Evidentemente, en el caso en que A sea cuadrada, $n \times n$ entonces $I_n \circ A = A \circ I_n = A$

A manera de ilustración, vamos a hacer la demostración de (1) : $I_n \cdot A = A$:

- $I_n \cdot A$ tiene tamaño $n \times p$, A es $n \times p$
- Una entrada arbitraria (i, j) de la matriz $I_n \cdot A$ debe ser igual a la correspondiente entrada (i, j) de la matriz A.

En efecto $(I_n \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (I_n)_{ik}(A)_{kj} = (I_n)_{i1}(A)_{1j} + (I_n)_{i2}(A)_{2j} + \ldots + (I_n)_{in}(A)_{nj} = 0 + 0 + \ldots + (I_n)_{ii}(A)_{ij} + 0 + \ldots + 0 = 1(A)_{ij} = (A)_{ij}$ (de acuerdo a la definición de matriz identidad I_n)

3) Si λ es un número real entonces $\lambda \; I_n$ es una matriz diagonal: $\lambda \; I_n = \text{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ y es llamada <u>matriz escalar</u>

ii. La matriz cero de tamaño $m \times n$

Es una matriz de tamaño $m \times n$ donde todas sus entradas son cero

Ejemplo
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz cero, 2×3

<u>Propiedades de la matriz cero</u>

1) Si A es una matriz de tamaño $p \times q$ y B es la matriz cero $p \times q$ se tiene la siguiente igualdad: $A + B = B + A = A$

Demostración:

Es suficiente mostrar que $A + B = A$ (porqué?)

- $A + B$ y A tienen el mismo tamaño : $p \times q$
- $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = (A)_{ij} + 0 = A_{ij}$, es decir $(A+B)_{ij} = A_{ij}$, cualesquiera que sean los subíndices (i,j), i variando de 1 a p y j variando de 1 a q.

2) Si P es una matriz $m \times n$ y B la matriz cero $p \times m$, C la matriz cero $n \times t$ se tiene que $B \cdot P$ es la matriz cero $p \times n$ y $P \cdot C$ es la matriz cero $m \times t$.

Para simplificar, se escribe $B \cdot P = 0$, $P \cdot C = 0$ o, aún más $0 \cdot P = 0$, $P \cdot 0 = 0$

iii. Matriz triangular

c_1) Triangular Superior : es una matriz <u>cuadrada</u> A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Tiene la forma siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

c_2)Triangular inferior: Matriz cuadrada B cuyos elementos $b_{ij} = 0$ para $i < j$. Tiene la forma siguiente

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que una matriz diagonal es triangular superior y triangular inferior; reciprocamente, una matriz cuadrada que sea simultáneamente triangular superior y triangular inferior es necesariamente diagonal.

Tanto la matriz triangular como la diagonal son de gran utilidad pues su forma relativamente simple facilita muchos cálculos.

iv. Transpuesta de una matriz

Dada una matriz A, de tamaño $m \times n$, la matriz notada A', cuyas columnas son las filas de A se llama la transpuesta de A; más precisamente $(A')_{ij} = A_{ji}$. Observe que entonces A' tiene tamaño $n \times m$.

<u>Ejemplo</u>

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ entonces } A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>Propiedades de la transpuesta:</u>

1) $(A + B)' = A' + B'$
2) $(A')' = A$
3) $(k \cdot A)' = k \cdot A'$, k número real.(escolar)
4) $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$ donde A y B son matrices de tamaños apropiados.

Demostración de 1):

$$\left((A+B)'\right)_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = (A')_{ij} + (B')_{ij} =$$

$$(A'+B')_{ij}$$

Instamos al lector que trate de demostrar las restantes propiedades pues no ofrecen dificultad alguna.

v. Matrices elementales

Operaciones elementales sobre una matriz; estas serán de importancia en la búsqueda de la inversa de una matriz cuadrada: Esencialmente consideraremos 6 tipos de operaciones elementales, 3 de ellas que se efectúan sobre las filas de una matriz y las otras 3 son las correspondientes efectuadas sobre las columnas de la misma.

1) Multiplicar el vector fila i de la matriz por un escalar k distinto de cero (tal operación la denotamos por $O_i(k)$).
2) Intercambiar las filas i, j de la matriz (tal operación la denotamos por O_{ij}).
3) Sumar al vector fila i de la matriz, t veces el vector fila j de la misma matriz, (tal operación la denotamos por $O_{ij}(t)$, t es un número real o complejo)

4)
5) las correspondientes a las columnas
6)

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $O_2(-1)(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

($O_2(-1)(A)$ significa la matriz obtenida, aplicando a A la operación $O_2(-1)$: multiplicar el vector fila 2 de A por (-1).

$$O_{31}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad O_{23}(-4)(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 9 & -8 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Matriz elemental</u> : Es la matriz obtenida de la matriz identidad, aplicando a ésta alguna operación elemental.

Notación:

$E_i(k)$ la matriz elemental correspondiente a operación 1)

E_{ij} la matriz elemental correspondiente a operación 2)

$E_{ij}(t)$ la matriz elemental correspondiente a operación 3)

$K_j(t)$ la matriz elemental correspondiente a operación 4) para columnas; etc.

<u>Ejemplos</u>

$E_4(-2)$ de tamaño 4×4 es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para el mismo tamaño se tiene:

$$E_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{31}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Efecto de las matrices elementales sobre una matriz cualquiera</u>: Si una matriz A se multiplica a la izquierda (respectivamente a la derecha) por una matriz elemental (de fila) la matriz que resulta es la que se obtiene de aplicar a A la operación elemental (fila) correspondiente a esa matriz elemental, más específicamente. Si A es de tamaño $m \times n$ y $E_i(k)$, $E_{ij}(k)$, E_{ij} son las matrices elementales de tamaño $m \times n$ (cuadradas!) se tiene que:

$E_i(k) \cdot A = O_i(k)(A)$

$E_{ij}(k) \cdot A = O_{ij}(k)(A)$

$E_{ij} A \quad = O_{ij}(A)$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}; \quad k_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } A \cdot k_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 13 & -2 \end{bmatrix}$$

que no es otra que la matriz obtenida de A aplicando la operación $O_{21}(2)$ sobre las columnas:

$$E_{12}(2) = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad ; \text{así } E_{12}(2) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

que es precisamente la matriz que se obtiene al aplicar a A la operación fila $O_{12}(2)$.

Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada: Las operaciones elementales serán de gran utilidad para calcular la inversa de una matriz y además para determinar un número asociado a cada matriz y que se llama su rango.

Nos basamos en lo siguiente: Dada una matriz cuadrada A, tamaño $n \times m$, si existe una matriz B, también cuadrada, que satisfaga las dos igualdades $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, entonces B es, por definición laiinversa de A, y como depende de A la denotamos por $B = A^{-1}$; así A^{-1}, la inversa de A, es tal que $A \cdot A' = A^{-1} \cdot A = I_n$. Se demuestra en Algebra Lineal que dada una ma -

triz A cuadrada, es suficiente encontrar una matriz cuadrada B que satizfaga $B \circ A = I_n$ (o $A \circ B = I_n$) para que B sea la inversa de A (es decir, automáticamente se satisface la otra propiedad).

Partimos de la matriz A, tamaño $n \times n$; sean B_i, $i = 1, \ldots, k$ que representan matrices elementales (filas) de tamaño $n \times n$ que satisfacen

$B_k (\circ \circ \circ (B_2(B_1 \circ A)) \ ) = I_n$, entonces

$(B_k \circ \circ \circ \circ B_2 \cdot B_1) \circ A = I_n$ es decir $B_k \circ \circ \circ B_i \circ \circ \circ B_1$ es la inversa de A; pero como multiplicar por matrices elementales es lo mismo que efectuar las operaciones correspondientes sobre la matriz, es suficiente de ir aplicando sucesivamente las operacionès elementales correspondientes a las B_i, <u>sobre la matriz I_n</u> como se ilustra en el ejemplo

$$\text{Sea} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{hallar } Q^{-1}$$

Efectuamos operaciones elementales sobre las filas de Q (o sobre las columnas - pero no mezcladas!) hasta obtener la matriz identidad 3×3, y <u>simultáneamente</u> efectuamos las mismas operaciones sobre las filas de I_3 (o las columnas, si este fuera el caso).

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O_{21}(-1)\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\0 & 1 & 0\\1 & 3 & 4\end{bmatrix};\qquad O_{21}(-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$O_{31}(-1)\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};\qquad O_{31}(-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$O_{12}(-3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};\qquad O_{12}(-3)\begin{bmatrix}4 & -3 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$O_{13}(-3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I_3!\;;\qquad O_{13}(-3)\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix} = B = Q^{-1}$$

El lector puede verificar que

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{bmatrix} = I_3$$

NOTAS

a) No toda matriz cuadrada posee inversa

b) La inversa de una matriz es única

c) Para que una matriz cuadrada posea inversa es necesario y suficiente que todos sus vectores filas (o sus vectores columnas) sean linealmente independientes

d) Si en el proceso de obtención de la inversa de una matriz descrito anteriormente, nos encontramos con una matriz que tiene un vector fila (o un vector columna) igual al cero, no vale la pena continuar en la búsqueda de la inversa pues esta no existe (vea parte a) de esta nota), es el mismo caso cuando nos encontremos con dos filas o dos columnas linealmente dependientes

<u>Ejemplo</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 11 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{O_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{O_{13}(-2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \; ! \; ;$$

entonces A no posee inversa. Observe que la fila 1 de A es combinación lineal de las otras dos filas:

$$(3, 10, 11) = (1, 4, 3) + 2(1, 3, 4)$$

Resultado: Si A y B son dos matrices cuadradas inversibles (que poseen inversa) y tales que se pueden multiplicar, entonces

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Existen otros métodos para determinar la inversa de una matriz; entre ellos uno utilizando la noción de determinante

G) Ejercicios

i. Muestre que las matrices elementales poseen inversa; determinar éstas para un tamaño particular que usted eligirá

ii. Determine la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

(tomados de Theory and Problems of Matrices by Ayres. Colección Schaum)

Inversas de matrices especiales

1) Matriz diagonal: Una matriz diagonal con todas sus entradas distintas de cero, posee inversa.

Si $A = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ entonces

$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$ pues

$$\text{en } A = \begin{bmatrix} d_1 & & \bigcirc \\ & d_2 & \\ \bigcirc & & \ddots \; d_n \end{bmatrix}$$

las operaciones elementales que tenemos que aplicar para reducirla a la identidad I_n, es multiplicar cada fila i por $\frac{1}{d_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

2) La inversa de la identidad es ella misma

3) Matriz involuntaria: matriz cuadrada A tal que $A^2 = I$, entonces $\underline{A^{-1} = A}$

4) Matriz permutación : matriz cuadrada en la que existe un elemento y sólo uno, igual a 1 en cada línea y cada columna.

<u>Ejemplo</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, hay $n \cdot n$ matrices permutación de tamaño $n \times n$. Estas matrices, son siempre inversibles. Cómo podria justificarlo sin hacer los cálculos?

5) Matrices triangulares: su inversa es fácil de calcular

<u>Ejemplo</u>

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

determinamos su inversa en forma directa:

A^{-1} debe ser una matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

tal que $A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

entonces se tiene el siguiente sistema

$$\begin{array}{llll} 4a+d+g=1 & 2d+3g=0 & 4g=0 & g=0 \\ 4b+e+h=0 & 2e+3h=1 & 4h=0 & h=0 \\ 4c+f+i=0 & 2f+3i=0 & 4i=1 & i=1/4 \end{array}$$

$i = 1/4$ entonces $2f+3i=0$ da $f = -\frac{3}{4.2} = -\frac{3}{8}$

$2e+3h=1$ con $h=0$ $\quad e = 1/2$

$2d+3g=0$ con $g=0$ $\quad d=0$

$4c+f+i=0$ con $i=1/4$, $f=-\frac{3}{8}$ $\quad 4c = -1/4 + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

$$c = \frac{1}{32}$$

$4b+e+h=0$ con $h=0$, $e=1/2$ $\quad 4b = -1/2 \quad b = -\frac{1}{8}$

$4a+d+g=1$ con $g=0$, $d=0$ $\quad 4a = 1 \quad a = +\frac{1}{4}$

En definitiva: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

<u>Rango de una matriz</u>. (Noción asociada a cualquier tipo de matriz)

Matrices equivalentes : Dos matrices de igual tamaño se dicen ser equivalentes, si una se obtiene de la otra mediante aplicación de operaciones elementales (sobre filas y columnas).

Es fácil ver que toda matriz es equivalente a si misma y que A equivalente a B y B equivalente a C implica que A es también equivalente a C (transitividad)

Definición

El rango de una matriz A es un número que representa al mayor número de vectores líneas de A que son linealmente independientes (se demuestra, y no es fácil de hacer aquí , que es exactamente el número máximo de columnas linealmente independientes de A). Aceptamos el siguiente resultado: Dos matrices del mismo tamaño son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

Esto nos permite obtener el rango de una matriz A reduciendo esta a una forma más simple (equivalente a ella) donde si se pueda leer más fácilmente su RANGO ; Efectuamos operaciones elementales sobre las filas de A(o/y sobre las columnas) como en el proceso para obtener su inversa (las matrices que se van obteniendo son equivalentes a A y por lo tanto tienen el mismo rango)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y en esta matriz las dos primeras filas son L. I., la otra fila es cero; si ahora reducimos esta última por columnas (no hay necesidad para efecto de averiguar su rango) llegamos a una matriz de la forma

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y se llama la forma canónica de la matriz original A.

El número de "unos" que aparece en su forma canónica es el rango de la matriz A, en este caso es 2.

La matriz B es de la forma $\begin{matrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

Ejercicio

Determinar el rango de las siguientes matrices

$$\begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} \; ; \quad \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; ; \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

3. Sistemas de ecuaciones lineales

Vamos a utilizar la noción de rango de una matriz para analizar todo lo concerniente a la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, tanto en el caso homogéneo como en el no homogéneo adelantando que en el proceso clásico de obtención de soluciones de tales sistemas (eliminación) únicamente intervenían los coeficientes del sistema, con los cuales formábamos una matriz.

Dado un sistema de ecuaciones lineales como:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & = & y_1 \\
a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & = & y_2 \\
\vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & = & y_n
\end{array}\right\} \quad (1)$$

con <u>m</u> ecuaciones y <u>n</u> incógnitas (las $x_1, x_2, \ldots, x_n$) diremos que es HOMOGENEO si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$ y diremos que es NO HOMOGENEO en caso contrario. Se supone que los a_{ij}, para $i=1, \ldots, m$; $j= 1, \ldots, n$ son números conocidos, lo mismo que $y_1, y_2, \ldots, y_m$; si x_i son las incógnitas cuyos valores debemos determinar; así, determinar una solución de (1) es encontrar valores de $x_1, \ldots, x_n$ que sustituidos en el sistema y efectuadas las operaciones indicadas, satisfagan cada una de las m ecuaciones que constituyen el sistema.

Ejemplo : En el sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$ constituyen una solución del sistema puesto que

$$2.2+3.(-1)=1$$
$$-2+2.1=0$$

(Este es un caso particular donde el sistema posee una sola solución, pero en general puede poseer más de una).

Notación matricial para un sistema de ecuaciones lineales

Matriz asociada a un sistema. Matriz aumentada.

La matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ formada

por los coeficientes de las incógnitas del sistema (1) será llamada la matriz del sistema (1) (atención a la colocación de los coeficientes!);

y la matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{bmatrix}$

(hemos considerado una columna más con respecto a la anterior) se llamará la MATRIZ AUMENTADA DEL SISTEMA.

Ejemplo:

Es el sistema
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -2 \\ 4x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 7 \\ x_1 + 1/2x_3 - 1/5x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

La matriz asociada es:
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1/5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz aumentada es:
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1/5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notación matricial para un sistema de ecuaciones

Si A denota la matriz del sistema (1);
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}$$

entonces de acuerdo a la definición de la multiplicación se tiene que $\boxed{A \cdot X = Y}$ y esto se llama "la notación matricial del sistema (1)".

Entonces en un sistema dado, se conoce A y Y nuestro problema es determinar X tal que AX = X es una soluoión del sistema!

El caso de (*) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ se tiene que

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$ y entonces $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

es una solución de (*) puesto que $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Método para determinar las soluciones

a) Caso Homogéneo : $AX = 0$

-Aquí 0 denota a la matriz m x 1 con todas sus entradas cero, o al vector columnar cero en $\mathbb{R}^m$.

-Si la matriz A del sistema homogéneo es cuadrada (tantas ecuaciones como incógnitas) y además es inversible entonces la única solución de AX = 0 es $X = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$, la solución trivial!

i. $X = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$ siempre es solución del sistema homogéneo $AX = 0$

ii. En general las soluciones las obtendremos de acuerdo al siguiente criterio: sobre la matriz del sistema efectuamos operaciones elementales como para la obtención de su rango (pero sólo operaciones sobre las filas!) y una vez que llegamos a la forma más reducida, volvemos a escribir el sistema original pero con la matriz reducida, las incógnitas que no corresponden a la columna donde aparecen los unos (los unos indicadores del rango cuando se reduce por filas) serán incógnitas independientes, es decir a ellas asignamos valores arbitrarios, los valores de las otras quedan automaticamente determinados por las ecuaciones y así obtenemos una solución del sistema.

Si n es el número de incógnitas del sistema, r el rango de la matriz asociada al sistema, entonces n-r es el número de incógnitas independientes.

<u>Ejemplo</u>: resolver el siguiente sistema:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Matriz asociada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notación matricial para el sistema

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 5/9 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el rango de A es 3, hay pues, 4-3=1 incógnita independiente: x_4.

El sistema original es equivalente (es decir posee las mismas soluciones) al sistema.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad -2/9x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad +8/9x_4 &= 0 \\ x_3 \; +5/9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

entonces $x_1= 2/9x_4$; $x_2= -8/9x_4$; $x_3= -5/9x_4$, así dando valores arbitrarios a x_4 obtenemos los correspondientes valores de x_1, x_2, x_3, x_4. Si $x_4 = 9$, entonces $x_3=-5$, $x_2=-8$, $x_4 = 2$ de donde resulta <u>una</u> solución

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Otra podría ser que $x_4 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2/9 \\ -8/9 \\ -5/9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En general las soluciones del sistema son de la forma

$$\begin{bmatrix} 2/9\ k \\ -8/9\ k \\ -5/9\ k \\ k \end{bmatrix}$$

donde k puede tomar cualquier valor. En particular, observe que obtenemos la solución trivial cuando tomamos $k=0$,
Es fácil ver que el rango r de una matriz de tamaño $m \times n$ siempre es menor o igual que m y n simultáneamente, por lo tanto si m es estrictamente menor que n (menos ecuaciones que incógnitas) el sistema de ecuaciones homogéneo siempre tendrá (al menos una) solución distinta de la trivial.
Observe que si X es solución de un sistema $AX = 0$ entonces cualquiera que sea el número k, también kX es solución ya

que A (kX) = k (AX) = k 0 = 0. Además si X' , X'' son soluciones de AX = 0, se tiene que X' + X'' también lo es pues A (X' + X'') = AX' + AX'' = 0.

b) <u>Caso No Homogéneo</u> AX = Y, con Y $\neq$ 0.

i. Si A es cuadrada (igual número de ecuaciones que de incógnitas) y además inversible entonces AX = Y posee una única solución: $X = A^{-1}Y$.

ii. A diferencia de un sistema homogéneo, un sistema no homogéneo puede no poseer solución; es el caso de

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 \quad &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ -1/5x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

iii. Soluciones de un sistema no homogéneo: para obtenerlas utilizamos el siguiente criterio.

Consideramos la matriz aumentada del sistema y mediante operaciones elementales sobre las filas la reducimos a una matriz equivalente como se hizo para el caso no homogéneo, el criterio que seguimos para la existencia de soluciones es: si la matriz del sistema y su matriz aumentada poseen el mismo rango, entonces existe solución para el sistema, en caso contrario no existe solución.

<u>Ejemplo</u>. Resolver:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \end{aligned}$$

La matriz aumentada de este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto el rango de la matriz aumentada es 3 y es el mismo que el de la matriz del sistema por lo tanto existe solución, las cuales se pueden obtener del sistema determinado por la última matriz:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Hay dos incógnitas independientes (5-3=2) que pueden ser x_3 y x_5 pues estan en las columnas que no contienen los "unos" que determinan el rango.

Podemos dar valores arbitrarios a x_3 y x_5.

si $x_3 = a$, $x_5 = b$ entonces $x_1 = 1$, $x_2 = 2a$, $x_4 = -3b$.

De manera más general, las soluciones son de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2a \\ a \\ -3b \\ b \end{bmatrix} \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ arbitrarios.}$$

Por ejemplo, si $a=2$, $b=-1$ entonces $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ es una solución.

Ejercicios. Resolver:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

b) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Relación entre las soluciones de un sistema no-homogéneo y las de el homogéneo asociado

Existe una importante relación entre las soluciones de un sistema de la forma $AX = Y$ y las soluciones del sistema $AX = 0$ (llamado sistema homogéneo asociado al $AX = Y$). Dada una solución X_o fija del sistema $AX=Y$ todas las demás se obtienen sumando a X_o las soluciones del sistema $AX=0$. En efecto si X_o es solución de $AX = Y$ que supondremos fija, sea X_o^1 otra solución de $AX = Y$, entonces $X_o - X_o'$ es solución de $AX = 0$ pues $A(X_o'-X_o) = Y - Y = 0$; así $X_o' = X_o + H$ donde $H = X_o' - X_o$, H solución de $AX = 0$. Por otra parte, si T es solución de $AX = 0$, entonces $X_o + T$ es solución de $AX = Y$ pues $A(X_o + T) = AX_o + AT = Y + 0 = Y$.

Dicho de otra manera: para determinar todas las soluciones de un sistema no homogéneo, basta encontrar una de ellas y las demás se obtienen sumando a ésta, soluciones del sistema homogéneo asociado.

4. Determinantes

Esta importante noción asociada a una matriz cuadrada nos va a permitir entre otras cosas, obtener más información sobre la naturaleza de una matriz; para su formulación necesitamos de la noción de permutación.

a) Permutación de n símbolos (n es un entero natural)

Consideramos los n símbolos 1, 2, 3, ..., n en su orden natural; los mismos n símbolos considerados en otro orden constituye lo que se llama una permutación de orden n. En general para un n dado, hay exactamente $n!$ ($n! = 1 . 2 \ldots (n-1)n$) permutaciones de símbolos. Por ejemplo: si $n=3$, las $3! = 1 . 2 . 3 = 6$ permutaciones de 3 símbolos son: a) 1, 2, 3; b) 1, 3, 2; c) 2, 1, 3; d) 2, 3, 1; e) 3, 2, 1; f) 3, 1, 2.

Una permutación arbitraria de n símbolos puede notarse en general con $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, donde aparecen <u>todos</u> los símbolos de 1 a n (sin repetirse); i_1 significa el símbolo colocado en el primer lugar, i_2 el símbolo colocado en el segundo lugar, etc. Si tenemos símbolos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (no necesariamente los números naturales de 1 a n) a cada premutación de los símbolos de 1 a n corresponde una permutación de los símbolos $a_1, a_2, \ldots, a_n$; así por ejemplo, si $n=3$, a la permutación 3, 1, 2, corresponde la permutación a_3, a_1, a_2.

Otro ejemplo: (permutación asociada a los subíndices de las entradas de una matriz).

Consideramos la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Para una fila dada, la 2 por ejemplo, el segundo subíndice de sus entradas varía de 1 a 4; estas entradas son: $A_{12} = 5$, $A_{22}=0$, $A_{23}=4$, $A_{24}=1$; entonces, con estos segundos subíndices (el primer subíndice es constante en cada fila) podemos considerar permutaciones de orden 4. Diremos por ejemplo, que el vector (5, 0, 4, 1) corresponde a la permutación 1, 2, 3, 4 de la fila

2 y que el vector (0, 4, 5, 1) corresponde a la permutación 2, 3, 1, 4 de la fila 2 pues $A_{22}=0$, $A_{23}=4$, $A_{21}=5$, $A_{24}=1$.
Qué vector corresponde a la permutación 1, 4, 3, 2 de la fila 2?
Respuesta: (5, 1, 4, 0) = (A_{21}, A_{24}, A_{23}, A_{22}). Cosa similar podríamos hacer con las columnas.

b) Permutaciones pares e impares

Dada una permutación de n símbolos, llamaremos inversión el intercambio de 2 símbolos en la permutación; por ejemplo para n=4 consideramos la permutación 2, 1, 3, 4, entonces la permutación 4, 1, 3, 2 la hemos obtenido de la anterior mediante una inversión; intercambiando los elementos 4 y 2. (Los demás quedan fijos!).
Ahora dada una permutación, estaremos interesados en saber el número de inversiones que tenemos que efectuar sucesivamente sobre ella para llevarla a su orden natural; esto determina la paridad de la permutación.
Por ejemplo, si n=5 y tenemos la permutación 2, 3, 5, 4, 1, para llevarla a su orden natural necesitamos efectuar sucesivamente (por ejemplo) las inversiones: 2, 3, 1, 4, 5 luego 2, 1 3, 4, 5 luego 1, 2, 3, 4, 5 que es la permutación natural, hemos efectuado 3 inversiones para llevarla a su orden natural (3 es número impar) entonces la permutación original se llamará IMPAR, caso contrario se llamará PAR.

Es necesario poner en evidencia que la permutación 2, 3, 4, 5, 1 pudo llevarse a su forma natural por otro camino: 2, 3, 5, 4, 1

2, 5, 3, 4, 1 2, 1, 3, 4, 5 1, 2, 3, 4, 5,

pero siempre el número de inversiones necesario es impar (lo mismo sucederá con las permutaciones pares).

La permutación 4, 5, 3, 1, 2 es par. (4, 5, 3, 1, 2,

4, 2, 3, 1, 5 5, 2, 3, 1, 4 1, 2, 3, 5, 4

1, 2, 3, 4, 5).

Definición de determinante de una matriz cuadrada

Dada una permutación $i_1, \ldots, i_n$, denotaremos con $E_{i1; i2, \ldots, in}$ (E: léase Epsilon!) al siguiente número:

$$E_{i1, i2, \ldots, in} = \begin{cases} 1 \text{ si } i_1, \ldots, i_n \text{ es permutación par} \\ -1 \text{ si } i_1, \ldots, i_n \text{ es permutación impar} \end{cases}$$

Ejemplo 1) $E_{2,3,5,4,1} = -1$; $E_{4,5,3,1,2} = 1$

Sea A una matriz $n \times n$; $A = ((a_{ij}))$, $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, n$; para cada permutación $i_1, i_2, \ldots, i_n$ consideremos el producto $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ni_n}$ (losprimeros subíndices en su orden natural y los segundosson los de la permutación $i_1, \ldots, i_n$), ahora $E_{i1, i2, \ldots, in}(a_{1i}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ni_n})$ y para las n! permutaciones de los n símbolos hacemos lo mismo y luego efectuamos la suma y llegamos a la expresión :

(1) : $E_{i1, i2, \ldots, in}\, a_{in}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ni_n} \equiv \det(A)$ donde

significa que la suma se extiende a los n! permutaciones de los n símbolos; (1) es un "número" llamado el determinante de la matriz A y denotado por det (A) o A

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{matrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} \quad , \quad \text{matriz } 3 \times 3$$

las $3! = 1.2.3 = 6$ permutaciones de 3 símbolos son: 1, 2, 3,; 1, 3, 2,; 2, 1, 3,; 2, 3, 1,; 3, 2, 1,; 3, 1, 2,. Entonces $E_{1,2,3} = 1$; $E_{1,2,3} = -1$ $E_{2,1,3} = -1$; $E_{2,3,1} = 1$; $E_{3,2,1} = -1$; $E_{3,1,2} = 1$.

(Siempre existe igual número de permutaciones pares que impares).

En la matriz dada se tiene:

$a_{11} = -1$; $a_{12} = 4$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 4$

$a_{31} = -1$; $a_{32} = 1$; $a_{33} = 1$; asociados a cada permutación tenemos los siguientes productos:

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1 \cdot -1 \cdot 1 = 1$; $E_{1,2,3} \cdot a_{\dots} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1$

$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} = -1 \cdot 4 \cdot 1 = -4$; $E_{1,3,2} \cdot a_{\dots} \cdot a_{23} \cdot a_{32} = 4$

$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} = 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0$; $E_{2,1,3} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} = 0$

$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = 4 \cdot 4 \cdot (-1) = -16$; $E_{2,3,1} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = -16$

$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2$; $E_{3,2,1} \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = -2$

$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$; $E_{3,1,2} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} = 0$

De manera que Det (A) = 1+4+0-16-2 = -13.

Observe que, mientras una matriz no tiene valor númerico en determinante será en general un número.

Ejemplo:

Muy familiar es el determinante de orden 2 (de una matriz 2 x 2):

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; entonces $\det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Nota:

Si A es n x n, entonces también podemos escribir $\det(A) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{j_1, \ldots, j_n}\, a_{j_1 1}, a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}$, es decir efectuando permutaciones sobre los primeros subíndices; además puede observar que en cada término de esta suma se ha tomado exactamente <u>una</u> entrada de cada fila y una de cada columna.

Ejemplo:

Si $A = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ entonces $\det(A) = d_1 \cdot \ldots, d_n$. pues en la suma (1) todos los términos $a_{i_1 1} \ldots a_{n i_n}$ que no correspondan a la permutación natural se anulan. Podemos concluir que $\det(A) = 0$ si y sólo si algunas de las entradas diagonales es cero.

i. Propiedades del determinante

1) De acuerdo a la definición (1) si A es una matriz tal que todas las entradas de una fila, o una columna son cero , entonces $\det(A) = 0$ (ver nota precedente)

2) Si A es, n x n entonces $\det(A) = \det(A')$; una matriz y su transpuesta poseen el mismo determinante

3) Como se comportan los determinantes de matrices equivalentes?

a. Consideremos la operación elemental $O_i(k)$ aplicada a matriz A, n x n; se tiene que $|O_i(k)(A)| = k.|A|$. es decir si una fila de A se multiplica por un escalar entonces se obtiene una matriz B tal que $|B| = k|A|$.

b. (Resultado similar por columnas); por consecuencia se tiene que si $|k.A| = k^n |A|$.

c. $|O_{i(i+1)}(A)| = -|A|$, es decir si se intercambian dos filas adyacentes de A, la matriz resultante tiene un determinante que es el opuesto del determinante de A (idem para columnas)

d. $|O_{ij}(k)(A)| = |A|$; es decir, si multiplicamos las entradas de una fila por un escalar y la sumamos a otra fila entonces el determinante de la matriz resultante es el mismo que el de la matriz original (idem para columnas)

e. Si todo elemento de la i-ava fila (o columna) de A es la suma de p términos entonces det (A) puede expresarse como la suma de p determinantes.

<u>Ejemplo</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4+x & 5+2 & 3+z \\ 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{entonces}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ x & 2 & z \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

<u>Nota:</u>

a) Esta última propiedad no significa que det(A + B) = det A + det B (<u>Falso</u> en general!)

b) Daba una matriz; por ejemplo $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ entonces la expresión $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ se escribe en lugar de det $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

4) Si A y B son dos matrices cuadradas, n x n, entonces det (A. B) = det (A) det (B)

Ejercicios: Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ o & d & e \\ o & o & f \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix}$$

ii. Métodos de evaluación de un determinante:

1) Desarrollo por cofactores:

Si A es matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$, en la expresión de det (A)= $\sum_{\nu} \varepsilon_{i1}, \ldots, i_n \; a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$, podemos reagrupar todos los términos que contiene a a_{11}, luego a a_{12}, $a_{13}, \ldots, a_{1n}$, en esa forma, det (A) se escribe:

(2) $\det(A) = a_{11}\overline{A}_{11} + a_{12}\overline{A}_{12} + \ldots + a_{1n}\overline{A}_{1n}$ donde

$\overline{A}_{1j} = (-1)^{1+j} H_{1j}$ siendo H_{1j} el determinante de la submatriz de A que resulta de eliminar a A su fila 1 y columna j; y diremos que (2) es el desarrollo por cofactores, de det (A) siguiendo los elementos de la primera fila.

Si en lugar de considerar los elementos de la primera fila, consideramos los de la fila i, o columna j tenemos lo siguiente:

4) $\det(A) = a_{i1}\overline{A}_{21} + a_{i2}\overline{A}_{i2} + \ldots + a_{in}\overline{A}_{in}$

5) $\det(A) = a_{1j}\overline{A}_{1j} + a_{2j}\overline{A}_{ij} + \ldots + a_{nj}\overline{A}_{nj}$

donde $\overline{A}_{ij} = (-1)^{i+j} H_{ij}$ donde H_{ij} es el determinante de la submatriz que resulta eliminando la i-ava fila y j-ava columna de A. $\overline{A}_{ij}$ se llama el cofactor del elemento a_{ij}.

En 4) tenemos el desarrollo por cofactores de A siguiendo los elementos de la fila i; en 5) desarrollo por cofactores siguiendo los elementos de la columna j.

<u>Ejemplo:</u>

$$\text{Sea} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El desarrollo por cofactores de det(A) siguiendo los elementos de la fila 2 $(i = 2)$ es:

$\det(A) = a_{21}\,\bar{A}_{21} + a_{22}\bar{A}_{22} + a_{23}\,\bar{A}_{23}$, donde

$$\bar{A}_{21} = (-1)^{1+2}\, H_{21}$$

$$\bar{A}_{22} = (-1)^{2+2}\, H_{22} \qquad H_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\bar{A}_{23} = (-1)^{2+3}\, H_{23}$$

$$a_{12}a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}$$

$$H_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$H_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

$$\det(A) = a_{21}\left[a_{32}\cdot a_{13} - a_{12}a_{33}\right] + a_{22}\left[a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}\right] +$$
$$a_{23}\left[a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}\right]$$
$$= a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} +$$
$$a_{23}a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11}a_{32}$$
$$= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} +$$
$$a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(esta última siendo la definición de det(A) para A, 3 x 3 y la hemos obtenido a partir del desarrollo por cofactores según los elementos de la 2a. fila)

$$= a_{13}\left[a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right] + a_{23}\left[a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}\right] +$$
$$a_{33}\left[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right]$$
$$= a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} +$$
$$a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

que es el desarrollo por cofactores de det(A) siguiendo los elementos de la columna 3 de A.

Para el caso 2 x 2 tenemos la fórmula ya conocida:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix};\ \det A = a_{11}\overline{A}_{11} + a_{12}\overline{A}_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} +$$
$$a_{12}(-1)^{1+2}\,a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejercicio:

a) Evaluar $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 7 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

- Según los elementos de 1a. fila
- Según los elementos de 2a. fila

b) Evaluar $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^3 & y^3 \end{vmatrix}$

- De dos formas distintas

c) Evaluar

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$$

2) Expansión de Laplace:

Es un método más general que el anterior en el cual se efectúa a la evaluación del determinante siguiendo los elementos de una (sólo una) fila o una columna. En la expansión por el método de Laplace se utiliza simultáneamente varias filas o varias columnas; aquí el determinante se escribe como suma de términos cada uno de los cuales es producto de dos determinantes.

Antes de introducir la fórmula para det(A) utilizando el método de Laplace consideremos las siguientes nociones : Menor complementario y Cofactor complementario.

Sea A una matriz dada de orden n (tamaño $n \times n$), fijemos $m < n$, y consideremos m filas de A, de subíndices i_1, i_2, ..., i_m con $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, consideremos también-

m columnas de A de subíndices $j_1, \dots, j_m$ con $j_1 < j_2 < \dots < j_m$. Sea P la submatriz de A de tamaño $(n-m) \times (n-m)$ obtenida al eliminar en A las entradas de las filas $i_1, i_2, \dots, i_m$ y columnas $j_1, j_2, \dots, j_m$.

Sea N la submatriz $m \times m$ formada por las filas $i_1, i_2, \dots, i_m$ y columnas $j_1, j_2, \dots, j_m$; entonces $|P|$ se llama el <u>menor complementario</u> de la submatriz N.

Ahora consideremos $(-1)^{(i_1+i_2+\dots+i_m)+(j_1+\dots+j_m)} \cdot |P| = |M|$ que es, por definición el <u>cofactor complementario</u> de N en A.

<u>Ejemplo:</u>

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Consideremos filas 1 y 3, columnas 2 y 5: $i_1 = 1$, $i_2 = 3$; $j_1 = 2$, $j_2 = 5$, aquí $m = 2$, entonces N para este caso es :

$$N = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{bmatrix}$$

El menor complementario de N es :

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

por lo tanto el cofactor complementario de N en A es, en este ejemplo,

$$(-1)^{1+3+2+5} |P| = -|P|.$$

De estás consideraciones podemos deducir una nueva manera de evaluar un determinante: Se escogen m filas cualesquiera de A, de estas m filas podemos formas $n!/m!(n-m)!$ submatrices distintas de orden m. (que juegan el papel de N) donde $n!/m!(n-m)!$ define el número de combinaciones de n columnas de A al tomar m a la vez (pero manteniendo el orden natural). Para cada submatriz N calculamos $|\ |$ y su correspondiente cofactor complementario $|M|$; luego formamos el producto $|N| . |M|$; hay exactamente $n!/m!(n-m)!$ productos $|N| . |M|$ y luego sumamos todos ellos para obtener det(A).

$$|A| = \sum_{j_1<j2.<jn} |N(i_1, \ldots, i_m| j_1,\ldots jm)| . |M| \qquad \text{donde}$$

$N(i_1, \ldots, i_m|j_1,\ldots, j_m)$ es la submatriz $m \times m$ formada por las entradas de filas $i_1, \ldots, i_m$ y columnas $j_1, \ldots, j_m$. La suma se efectúa sobre todas las $n!/m!(n-m)!$ escogencias de $j_1, \ldots, j_m$. La notación $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$ indica que la suma se toma sobre las elecciones de las columnas conservando el orden de ellas.

<u>Ejemplo</u>

$$\text{Evaluar det } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

utilizando las filas 1 y 4

Aquí $m = 2$, $n = 4$ entonces habrá $4!/2!1! = 6$ términos en la suma, $i_1 = 1$, $i_2 = 4$; las 6 escogencias posibles de 2 columnas conservando el orden son:

a) $j_1 = 1$ $j_2 = 2$ b) $j_1 = 1$ $j_2 = 3$ c) $j_1 = 1$ $j_2 = 4$ d) $j_1 = 2$ $j_2 = 3$

e) $j_1 = 2$ $j_2 = 4$ f) $j_1 = 3$ $j_2 = 4$

y las submatrices (N) correspondientes, con sus respec - tivos cofactores complementarios son:

$$|N_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}, \quad |N_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad |N_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|N_4| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad |N_5| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad |N_6| = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad |M_2| = -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix},$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_4| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix},$$

$$|M_5| = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_6| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Luego det (A) $= |N_1| \cdot |M_1| + |N_2| \cdot |M_2| + |N_3| \cdot |M_3| +$
$|N_4| \cdot (M_4) + |N_5| \cdot |M_5| + |N_6| \cdot |M_6| =$

$$\sum_{i=1}^{6} (N_i)\,(M_i)$$

<u>Ejercicio</u>:

Evaluar
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

utilizando el método de Laplace de acuerdo a filas 2 y 3.

iii. Adjunta de una matriz:

En la obtención de det(A) mediante expansión por cofacto - res se tenía que:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\overline{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\overline{A}_{ij}$$

donde cada término de la suma está multiplicado por su co - factor; si en lugar de efectuar la suma de los productos de las entradas de una fila (o columna) por sus respectivos co factores, vamos multiplicando cada entrada en fila i, por ejemplo por los cofactores de otra fila, entonces la suma es siempre cero, es decir

$$a_{i1}\overline{A}_{j} + a_{i2}\overline{A}_{j2} + \dots + a_{in}\overline{A}_{jn} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 0 \\ \det(A) \text{ si } i = j \end{cases}$$

lo que podemos resumir con el delta de Kronecker en :

$$(*)\ a_{i1} + \overline{A}_{j1} + \dots + a_{in}\overline{A}_{jn} = \det(A)\delta_{ij}, \text{ donde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si} \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Esta última expresión corresponde a la entrada (i,j) de un producto de matrices; en efecto: consideremos la matriz C, n x n, cuya entrada general C_{ij} está dada por $C_{ij} = \overline{A}_{ji}$ (C_{ij} es el cofactor de la entrada (J,i) de A); entonces si efectuamos el producto (A . C) y consideramos su entrada (i,j) se tiene que

$$(A \cdot C)_{ij} = a_{i1}C_{1j} + a_{i2}C_{2j} + \dots + a_{in}C_{nj} =$$

$a_{i1}\overline{A}_{j1} + a_{i2}\overline{A}_{j2} + \dots + a_{in}\overline{A}_{jn}$ que no es otra cosa que la expresión en (*), así, $(AC)_{ij} = |A|\delta_{ij} = (|A|.I)_{ij}$

quiere decir AC y $|A|.I$ son dos matrices de igual tamaño que tienen iguales sus entradas, entonces son iguales:

$$A . C = |A| . I$$

Similarmente se demuestra que $C . A = |A| . I$; en definitiva tenemos:

$$A . C = C . A = |A| . I$$; la matriz C se llama adjunta de A y se denota por A^+ :

$$A . A^+ = A^+ . A = |A| . I$$

(Observe que A^+ una matriz formada por los cofactores de A pero invirtiendo los subíndices, es la transpuesta de los cofactores de A).

De la última igualdad se deducen importantes resultados.

1) Una matriz A es inversible si y sólo si su determinante es distinto de cero.
2) La inversa de una matriz A, n x n, se puede obtener en términos de su determinante y su adjunta por:

$$A^{-1} = \frac{A^+}{|A|}$$

5. Matrices Congruentes y Matrices Semejantes

Definición: Sean A y B matrices cuadradas, n x n, diremos que A es congruente a B y escribiremos $A \overset{c}{\sim} B$, si existe una matriz P, n x n, inversible tal que $B = P' AP$ (1)

Como P debe ser inversible y tales matrices son siempre producto de matrices elementales, entonces la igualdad (1) puede interpretarse de la manera siguiente: B se obtiene de A aplicando a esta pares de operaciones elementales (cada par de operaciones consiste de una operación sobre las filas y la correspondiente operación sobre las colum -

nas). Podemos observar que matrices congruentes son también equivalentes y por lo tanto matrices congruentes poseen el mismo rango.

El caso que más nos interesa de la noción de congruencia es con respecto a matrices simétricas, donde tenemos 3 resultados importantes:

a) Toda matriz simétrica A, de rango r es congruente a una matriz diagonal cuyos primeros r elementos diagonales son distintos de cero, y cero los demás.

Ejemplo

Consideremos la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

encontremos una matriz P inversible, 4×4, tal que $P' AP = D$; para encontrar P, aplicamos pares de operaciones elementales sobre las filas y columnas de A, hasta obtener una forma diagonal. Con las operaciones efectuadas sobre las filas de $(A \vdots I_4)$ obtenemos P' luego obtenemos la transpuesta de P' y tenemos P:

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

entonces $A \overset{c}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que es diagonal

(la matriz A tiene rango 3!)

$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de manera que $P = (P')' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

La matriz diagonal obtenida anteriormente puede aún "reducirse" más hasta tener una matriz diagonal con las primeras tres entradas de la diagonal 1 o -1, y el resto ceros; entonces tenemos:

b) Toda matriz A simétrica de rango r con entradas números reales es congruente a una matriz diagonal de la forma:

$$H = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

p es llamado el índice de A.

Continuando con nuestro ejemplo:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{c}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Aquí $H = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

con $I_1 = I_2$, $-I_{r-p} = -I_{3-2} = -I_1 = \left[(-1)\right]$

En la forma (2) se supone que trabajamos con operaciones que utilizan únicamente números reales; pero si trabajamos con números complejos, el resultado en 2) puede ser aún más refinado.

c) Toda matriz A, n x n, con entradas números complejos, de rango r- es congruente una matriz diagonal D cuyas primeras r entradas son todas iguales a 1 y cero las demás, es decir

$$D = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ejemplo:

Consideremos el caso de la matriz A del ejemplo anterior, que, ya teníamos, es congruente a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pero utilizando números complejos podemos reducirla a la forma D en (3); es suficiente multiplicar fila 3 por i, seguido de esta misma operación y la columna 3; tenemos así:

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{c}{\sim} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Aquí la matriz $Q = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

es inversible y además

$$Q' A Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otro tipo de equivalencia que será de gran utilidad posteriormente es la semejanza

Definición: Dos matrices A y B, $n \times n$, se dicen ser semejantes si P inversible, $n \times n$ tal que $B = P^{-1} AP$; escribiremos $A \overset{s}{\sim} B$.

Observe que $A \overset{s}{\sim} B$ implica que $\det(A) = \det(B)$ pues $B = P^{-1} A P$ se tiene que $\det(B) = \det(P^{-1} AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) =$

$$\det(P^{-1}) \det(P) \cdot \det(A)$$

$$= \det(P)^{-1} \det(P) \cdot \det A =$$

$$1 \cdot \det(A) = \det(A)$$

Ejercicios

Obtenga la matriz P que "diagonaliza" cada una de las matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1+i & 2 \\ -i & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

para los 3 tipos de "diagonalización" indicados antes

6. Ecuación característica

Muchas de las más importantes aplicaciones de Matrices en las ciencias sociales están intimamente relacionadas con el siguiente problema: Dada una matriz cuadrada A, $n \times n$, encontrar escalares y vectores **x** distintos de cero que satisfagan simultáneamente la ecuación:

(1) $A \cdot X = \lambda \cdot X$; es el llamado problema de valores propios.

Nuestro interés es ahora, indicar bajo que condiciones el problema se puède resolver.

Evidentemente para $x = 0$, cualquiera que sea λ (1) se satisface, sin embargo esta solución trivial no tiene interés alguno.

La ecuación (1) puede escribirse en la forma:

(2) $(A - \lambda I_n)\, x = 0$

y visto aquí el problema planteado se reduce a encontrar (número real o complejo) tal que el sistema homogéneo (2) tenga soluciones no triviales; pero esto se cumple (ya lo sabemos) si y solamente si la matriz $A - \lambda I_n$ (matriz asociada al sistema homogéneo (2)) es <u>no</u> inversible, lo cual, dado que $A - \lambda I_n$ es cuadrada, se cumple si y solo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$; más explícitamente

(3) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

debe ser cero para λ sea un escalar para el cual existen $x \neq 0$ que satisfacen a (1)

<u>Polinomio característico y ecuación característica de una matriz.</u> El desarrollo del determinante (3) conduce a un polinomio de grado n en λ tal polinomio lo representamos por $\phi(\lambda)$ y se llama: Polinomio característico de la matriz A y la ecuación $\phi(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de la matriz A

Así pues: los λ para los cuales existen $x \neq 0$ tales que $AX = \lambda X$, son exactamente los ceros del polinomio $\phi(\lambda)$, de manera que para encontrar estos λ es suficiente resolver la ecuación característica de A. Las soluciones de esta ecuación pueden ser números complejos no necesariamente reales aún cuando la matriz A tenga todas sus entradas en $\mathbb{R}$.

<u>Raíces o ceros de un polinomio.</u> Recordamos que un polinomio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ de grado n ($a_n \neq 0$), se factoriza completamente en la forma

(4) $\quad p(x) = b(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n),$

n factores lineales, y que por lo tanto $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son sus raices que pueden ser números complejos aún cuando los a_i de $p(x)$ sean todos reales, en la expresión (4) algunos factores pueden aparecer repetidos, tal es el caso del polinomio

$p(x) = (x-2)^3 (x+3)^4 (x-7)$; aquí sus raices son 2, -3 y 7; y diremos 2 es una raiz de multiplicidad 3, -3 es raíz de multiplicidad 4 y 7 es raíz de multiplicidad 1.

En el caso del polinomio $\phi(\lambda)$ este se puede factorizar por:

$$\phi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$$

en términos de sus raíces, pero

$$\phi(\lambda) = (-\lambda)^n + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + a_1(-\lambda) + a_0$$ si

se desarrolló (3); se demuestra entonces que

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$a_{n-2} = \sum_{j\ i} \lambda_i \lambda_j = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + \ldots + \lambda_2\lambda_n + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$a_{n-r} = \sum_{k\ \ldots\ j\ i} \lambda_i \lambda_j \ldots \lambda_k$$ (cada término es producto de r de los λ_i)

$\vdots$

$$a_0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n$$

Vectores Característicos y raíces características

Dada una matriz A, mxm; si existe λ y X $\neq 0$ tal que

$AX = \lambda X$ decimos que λ es raíz característica de la matriz A y que X es vector característico de A asociado a la raíz característica λ.

También se usa la expresión valor propio y vector propio respectivamente. El nombre valor latente por raíz latente es de uso habitual entre los sociólogos.

Tenemos entonces: las raíces características de una matriz A se obtienen resolviendo su ecuación característica.

Ejemplo: Encontrar los valores propios y vectores propios correspondientes, de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$

$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \qquad \varphi(\lambda) = 0 \ldots$ (a)

Su ecuación característica tiene las soluciones $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ pues $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$; así pues -1 y 3 son los valores característicos de A. Cuáles son sus vectores propios?

Vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -1$: son los X $\neq 0$ tales que $AX = (-1)X$; pongamos $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

resolviendo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= -x_2 \end{aligned}\right| \text{ o sea } \left|\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

de donde $x_1 + x_2 = 0$, así pues $x_1 = -x_2$, entonces la forma general de la solución de este sistema es

$$X = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ donde a es cualquier número.

Particularizando a=2, por ejemplo, tendríamos que

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$ es vector característico de A asociando al valor característico $\lambda = -1$. En general todos los vectores característicos de A asociados a $\lambda = -1$ son múltiplos de $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 3$ son los $X \neq 0$ tales que $Ax = 3x$; si

$$X = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$ y resolvemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$ tenemos que

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &= 3y_1 \\ 2y_1 + y_2 &= 3y_2 \end{aligned}\right| \text{ o sea}$$

$$\left.\begin{aligned} -2y_1 + 2y_2 &= 0 \\ 2y_1 - 2y_2 &= 0 \end{aligned}\right|$$

de donde $-y_1 + y_2 = 0$ lo que da $y_1 = y_2$;

la forma general de las soluciones de este sistema es $X = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ donde a es cualquier número.

Particularizando a= 3, se tiene $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $\lambda = 3$.

En el ejemplo anterior podemos observar que los vectores

$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, que son vectores propios de A, asociados a $\lambda = -1$, $\lambda = 3$ respectivamente, son linealmente independientes; esto es cierto en general de acuerdo al siguiente

<u>Resultado</u>: Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valores característicos distintos de una matriz A, y sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ cualesquier vectores característicos respectivamente asociados con estas raíces, entonces $X_1, \ldots, X_k$ constituyen un conjunto linealmente independientes.

<u>Ejercicios</u>:

a) Determinar vectores característicos y raíces características de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & i \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Muestre $\lambda = 0$ es raíz característica de A sí y solo sí es no inversible.

c) Demuestre qué matrices semejantes tienen la misma ecuación característica y por lo tanto los mismos valores característicos.

d) Para qué valores de $\mathbb{R}$ las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 4k \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}$$

tienen raíces i) reales y distintas, ii) reales e iguales iii) complejas?

Raíces características de las matrices diagonales y triangulares:

Sea $A = \text{diag.}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, matriz diagonal $n \times n$; consideremos $|A - \lambda I| = \varphi(\lambda)$ el polinomio característico de A, entonces se tiene que

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} d_1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & d_n-\lambda \end{vmatrix} = (d_1-\lambda)(d_2-\lambda)\cdots(d_n-\lambda)$$

de manera que las raíces de la ecuación característica de A, $\varphi(\lambda) = 0$, son precisamente las entradas diagonales de A.

Lo mismo diríamos para una matriz triangular, pues si B triangular, digamos:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces $B - \lambda I$ es también una matriz triangular de manera que

$$|B - \lambda I| = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

y de nuevo tenemos que las raíces características de B, matriz triangular, son precisamente las entradas diagonales.

En el caso de la matriz diagonal $A = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ investiguemos cuáles serán sus propios vectores.

Como cada d_i es un valor propio, calculemos los vectores propios asociados a éste:

$$AX = d_i X \;,\; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & d_2 \cdots & 0 \\ 0 & \vdots \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \; x_1 \\ d_2 \; x_1 \\ d_n \; x_n \end{bmatrix} = d_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \; x_1 = d_i \; x_1 \\ d_i \; x_i = d_i \; x_i \\ d_n \; x \; = d_i \; x_n \end{array}\right| \text{— o sea} \quad \begin{array}{l} (d_1 - d_i)x_1 = 0 \\ (d_2 - d_i)x_2 = 0 \\ (d_i - d_i)x_i = 0 \\ \vdots \\ (d_n - d_i)x_n = 0 \end{array}$$

entonces un vector característico asociado a d_i es:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con 1 en el lugar i}$$

Ejemplo: los valores propios de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{son } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$$

y son exactamente los mismos valores propios de la matriz

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores propios de Matrices Simétricas:

En gran parte de los problemas de valor propio de Matrices cuyas entradas son números reales son también Matrices Simétricas y en este caso la teoría es mucho más simple. Los resultados que se tienen para matrices simétricas son los siguientes:

a) Cada valor propio de una matriz simétrica es real y de aquí se concluye que los vectores propios de tal matriz están constituidos por entradas que son todas números reales.

b) Los vectores propios correspondientes a valores propios distintos forman un conjunto ortogonal de vectores (en general teníamos que eran linealmente independientes, pero ortogonalidad implica independencia lineal).

Ejemplo:

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ que es simétrica y con entradas números reales; su ecuación característica es:

$$\left| A - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda = 0;$$

los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$

Los correspondientes vectores propios:

$$\lambda_1 = 0: \quad A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + \sqrt{2}\,x_2 &= 0 \\ \sqrt{2}\,x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ que es una sola ecuación}$$

$2x_1 + \sqrt{2}\,x_2 = 0$ cuyas soluciones son también las soluciones de

$$x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_2 = 0 \quad \text{o sea} \quad \boxed{x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,x_2}$$

En particular $X = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ es vector propio de A asociado a $\lambda_1 = 0$

$\underline{\lambda_2 = 3:}$

Resolviendo el sistema

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tenemos que:

$$x_1 = \sqrt{2}\, x_2$$

y entonces $Y = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ es vector propio de A

asociado al valor propio de $\lambda_2 = 3$.

Como X, Y, son vectores propios de A correspondientes a valores propios distintos, de acuerdo a 2) ellos deben ser ortogonales:

$$X \cdot Y = (-1) \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2}) \cdot 1 = 0. \;!$$

Por el contrario si tomamos $X' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{bmatrix}$

que es otro vector propio de A asociado a $\lambda_1 = 0$ entonces

$X \cdot X' = (-1)\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot (-1) \neq 0$ es decir no son ortogonales (corresponden a un mismo valor propio).

c) En el ejemplo anterior los vectores X y X' no constituyen un conjunto linealmente independiente pues $\sqrt{2}\, X' = X$; en general no será posible encontrar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ que sean vectores propios de A asociados al mismo valor propio $\lambda_1 = 0$ de acuerdo al siguiente resultado (aquí $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad 1):

Sin un valor propio λ, de la matriz simétrica A, tiene multiplicidad $k \geqslant 2$ entonces existen $X_1, \ldots, X_k$, k vectores propios de A correspondientes al mismo valor λ, con $X_1, \ldots, X_k$ ortonormales (y por lo tanto, linealmente independientes). No puede haber más de k vectores propios de A, linealmente independientes y asociados a λ

Ejemplo: Encontrar un conjunto de tres vectores propios ortonormales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 6 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es $\varphi(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 7)$.

$$= (\lambda - 3)^2 (7 - \lambda)$$

Por lo tanto, su ecuación característica $\varphi(\lambda) = 0$ tiene por raíces $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 7$ peso 3 con multiplicidad 2; 3 y 7 son pues los valores propios de A.

$\lambda_2 = 7$: los vectores propios asociados a este valor propio se obtienen de resolver: $A X = 7 X$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

el sistema que se obtiene es

$$\left.\begin{array}{r} -4x_1 = 0 \\ 3x_2 + \sqrt{3}\, x_3 = 0 \\ \sqrt{3}\, x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right|$$

de donde $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} x_3$; entonces

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{3}\, a} \end{bmatrix} = \underline{a} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$ es la forma general de

los vectores propios de A correspondientes a $\lambda_2 = 7$; existen muchos vectores X con esta propiedad, es cuestión de dar valores a $\underline{a}$, pero de acuerdo a 3) no podemos encontrar dos de estos y que sean ortogon<u>a</u>

les ni siquiera linealmente independientes pues 7 es una raíz de multiplicidad 1.

$\lambda_1 = 3$: los valores propios de A para $\lambda = 3$ se obtienen al resolver:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

o sea el sistema:

$$x_2 + \sqrt{3}\, x_3 = 0$$

$$\sqrt{3}\, x_2 + 3\, x_3 = 0 \qquad \text{con } x_2 \text{ arbitrario}$$

o sea: $x_2 = -\sqrt{3}\, x_3$ con x_1 arbitrario

$$Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \frac{-b}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ es la forma general}$$

de los vectores característicos de A correspondientes al valor propio $\lambda = 3$. De acuerdo a 3) podemos encontrar 2 vectores propios ortogonales correspondientes a $\lambda = 3$.

En efecto:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ cumplen}$$

esas condiciones:

$$\text{Tenemos } X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Y_1 \cdot Y_2 = 0 \text{ !}$$

evidentemente se tiene $X \cdot Y_1 = 0$, $X \cdot Y_2 = 0$ de acuerdo al resultado 2) ; así

X, Y_1, Y_2 forman un conjunto de tres vectores propios de A que son <u>ortogonales</u>,: si los queremos ortonormales entonces consideramos

$$z_1 = \frac{x}{|x|} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \frac{y_1}{|y_1|} = y_1$$

$$z_3 = \frac{y_2}{y_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

se satisfacen las condiciones pedidas.

c) Diagonalización de matrices simétricas.

Si A es matriz simétrica, n x n, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios (cada valor propio λ_i está repetido tantas veces cuantas sea su multiplicidad) entonces de acuerdo a 3) existe por lo menos un conjunto $x_1, \ldots, x_n$ de vectores propios de A, asociados respectivamente a los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, formando un conjunto de vectores ortonormales es decir:

$$x_i \cdot x_j = \delta_{ij} \quad \text{(para todo i , j)}$$

consideremos la matriz Q , cuyas columnas son los vectores $x_1, \ldots, x_n$; entonces la matriz Q tiene las siguientes propiedades:

a) Q es inversible

b) $Q^{-1} = Q'$

es decir Q es ortogonal

Q' A Q es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son precisamente los valores propios de A.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$ (vea ejemplo de parte 2))

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$ son vectores

propios de A ; normalizados resultan:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Considere $$Q = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $$Q' \, A \, Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, las raíces características tienen multiplicidad 1.

Más general es el siguiente ejemplo:

En el caso de la matriz simétrica $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 6 \end{bmatrix}$$

ya tratada anteriormente, tenemos:

los vectores $$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \; ; \; Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \; ; \; Z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como vectores propios de A, Z_1 asociado al valor propio $\lambda = 7$ y Z_2 , Z_3 asociado al valor propio $\lambda = 3$ este último de multiplicidad 2.

Considerando la matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

entonces se tiene que

$$Q' A Q = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ (efectuando las multiplicaciones)

De acuerdo a punto 4) y a la definición de semejanza, tenemos que: <u>toda matriz A simétrica es semejante a una matriz diagonal $(d_1, \ldots d_n)$ donde los d_i son los valores propios de A.</u>

Definición: Decimos que una matriz cuadrada B (no necesariamente simétrica) es diagonalizable por semejanza si B es semejante a una matriz diagonal.

El problema de diagonalizar una matriz por semejanza es de suma importancia, y la teoría de valores propios nos da criterio, como veremos luego, para saber cuándo tal diagonalización existe.

<u>Ejercicios</u>:

Valores y Vectores Propios de Matrices no simétricas:

El problema de valores propios de matrices no simétricas, no ofrece resultados tan concretos como en el caso de matrices simétricas, ya tratado anteriormente.

Podríamos indicar, a manera de ejemplo, que si A es una matriz nxn no simétrica, se tiene que:

a) Los valores propios de A no necesariamente son reales

b) Vectores propios de A correspondientes a valores propios distintos no serán ortogonales, en general.

c) Si λ es valor propio de A, con multiplicidad k entonces no existirá, en general, k vectores propios ortogonales de A, asociados a ese λ.

d) A no necesariamente es diagonalizable por semejanza

Desde luego, siempre tendremos para A el resultado ya enunciado: vectores propios de A correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes (no necesariamente ortogonales!).

Ejemplo:

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

su polinomio característico es $\varphi(\lambda) =$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5$$

Su ecuación característica $\varphi(\lambda) = 0$ tiene 3 raíces que son: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$ que son los valores característicos de A.

Para $\lambda = 5$: los vectores propios de A asociando a 5 vienen dados por

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y resolviendo este sistema tenemos que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisface la condición.

...ue es raíz de multiplicidad 2, los vectores propios co-
vienen dados por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0$$

...o es posible encontrar un conjunto de dos vectores pro-
...ndientes a $\lambda = 1$, linealmente independientes, por ejem

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\lambda) = (1-\lambda)^2$ entonces

...aíz característica de B de multiplicidad 2 y los vectores
...ios de B asociados a $\lambda = 1$ son de la forma $X = a.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

...to no es posible encontrar un conjunto de 2 vectores pro-
...ealmente independientes (a pesar de ser $\lambda = 1$ raíz de
...d 2).

...ión de matrices no simétricas

...ible diagonalizar por semejanza una matriz no simétrica?;
...os el siguiente resultado:

... A de orden n tiene n vectores propios linealmente inde -
...ntonces existe una matriz P inversible, n x n tal que
...onal, con entradas diagonales que son los valores pro-

...ye P : Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n vectores propios de A,
...pendientes entonces podemos tomar como P la matriz

cuyos vectores columnas son los x_1, $x_2, \ldots, x_n$ (la matriz P no será en general ortogonal, como en el caso de matrices simétricas!).

Entonces tenemos también lo siguiente: si una matriz A, $n_x n$ tiene sus valores propios todos distintos, entonces A es diagonalizable por semejanza, pues existen n vectores propios linealmente independientes (uno correspondiente a cada valor propio).

Pero si los valores propios de A no son todos distintos, no estamos seguros de encontrar n vectores propios de A linealmente independientes, y en este caso, se presenta cuando existe por lo menos un valor propio de A con multiplicidad superior a 1. Si sucede como en el caso de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

que no es simétrica, donde $\lambda = 1$ es raíz de multiplicidad 2, sin embargo, fue posible encontrar 2 vectores propios de A asociados a $\lambda = 1$, formando un conjunto linealmente independiente, entonces A es diagonizable por semejanza y

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ es inversible y diagonaliza A.

En general podemos usar el siguiente criterio para saber si una matriz no simétrica, con raíces características de multiplicidad superior a 1 es diagonizable por semejanza:

Sea A una matriz no simétrica, n x n; si para cada λ valor propio de A con multiplicidad $k > 1$, se cumple que $n - r = k$ con r= rango $(A - \lambda I)$ entonces A es diagonalizable por semejanza pues en este caso es posible encontrar n vectores propios de A, formando un conjunto linealmente independiente.

...mplo:

...rcicios resueltos:

Determinar los valores propios de las matrices A y B, e investigar si son o no diagonalizables

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...) Consideremos la matriz A

Su polinomio característico es $\phi(\lambda) =$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

...ara resolverlo, sumemos la última línea a la primera

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

...uego la primera restada de la última:

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

... valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

...matriz A será diagonalizable si $3 -$ rango $(A - I_3) = 2$ ó sea rango $(A - I_3) = 1$, pero

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

...tonces $A - I_3$ es de rango 2 y $3 -$ rango $(A - I_3) = 1 \neq 2$

...o tanto A no es diagonalizable por semejanza.

b) Consideremos la matriz B: su polinomio característico es:

$$\varphi(\lambda) = \left|B - \lambda I_3\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2 \cdot (\lambda + 1)$$

Busquemos el rango de $B - I_3$:

$$B - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tiene rango } 1$$

por lo tanto $3 - \text{rango}\,(B - I_3) = 3 - 1 = 2$ que es la multiplicidad de la raíz $\lambda = 1$, así que B es diagonizable.

2) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 1 & 0 & m \end{bmatrix}$

estudiar las condiciones sobre n , m para que A sea diagonalizable.

Consideremos el polinomio característico de A

$$\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & n \\ 1 & 0 & m-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 \; (m - \lambda)$$

i) $m = 1$, entonces $\lambda = 1$ es valor propio de multiplicidad 3, y así la matriz es diagonalizable si rango $(A - I_3) = 0$ pero rango $(A - I_3) = 1$ ó 2 según que n sea distinto de cero o no. De manera que para $m = 1$ la matriz A no es diagonalizable.

ii) $m \neq 1$: La matriz A será diagonalizable si la matriz $(A - I_3)$ es de rango 1 $\left((3 - 1) = 2\right.$ que es la multiplicidad de $\lambda = 1$)

Consideremos dos posibilidades para n. (siempre $m \neq 1$)

a) $n \neq 0$: El rango de $A - I_3$ es dos entonces la matriz A no es diagonalizable.

b) $n = 0$: El rango de $A - I$ es igual a 1 entonces $3 - 1 = 2$ que es la multiplicidad de $\lambda = 1$.

Luego con $m \neq 1$, $n = 0$ la matriz A si es diagonizable; busquemos la matriz P que diagonaliza A:

Los vectores propios de A asociados a $\lambda = 1$ se obtienen de

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ y la solución viene

dada por los vectores x de la forma: $X = \begin{bmatrix} (1-m) & k_2 \\ & k_1 \\ & k_2 \end{bmatrix}$ donde

k_1 , k_2 son números arbitrarios, particularizando se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1-m \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman un conjunto de vectores propios de A linealmente independientes.

Los vectores propios de A asociados a la raíz $\lambda = m$. ($m \neq 1$) se obtienen de

$$\begin{bmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$, cuya solución

Viene dada por el conjunto de vectores de la forma $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$, y tomando $k = 1$, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-m \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$: un conjunto, de 3 vectores

propios de A, que es linealmente independiente

Considere $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-m \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

entonces $P^{-1} = \frac{1}{1-m} \begin{bmatrix} 0 & 1-m & 0 \\ -1 & 0 & 1-m \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $m \neq 1$.

y se verifica que

$$P^{-1} . A . P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matriz diagonal!

3) Investigar si la matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es diagonalizable;

en caso afirmativo encontrar una matriz diagonal D y matriz P inversible tal que $P^{-1} . M . P = D$.

La ecuación característica de M viene dada por:

$$(*) \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$, lo que podemos

resolver mediante las siguientes transformaciones:

$$(2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de donde $(2 - \lambda)^2 (1 - \lambda) = 0$ es la ecuación en (*).

propios de M son: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

2 valor propio de multiplicidad 2

onalizable si rango de M-2 I = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

go 1, y en efecto es así:

$$\begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ es de rango 1

s dos vectores propios de M que sean linealmente independien - sociados a la raíz $\lambda = 2$; estos vienen dados por la solución

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

orma general es: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 - m_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$

rizando tenemos $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

1: vectores propios de M asociados a $\lambda = 1$; se obtiene de

$$\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ cuya solución

general viene dada por : $X = \begin{bmatrix} m \\ m \\ -m \end{bmatrix}$, en particular :

$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es vector propio de M asociado a $\lambda = 1$.

Tome $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

entonces $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

y además se tiene $D = P^{-1} . M . P$ como se quería .

4) El objeto de este ejercicio es presentar en un ejemplo un interesante resultado que se estipula en el llamado Teorema de CAYLEY-HAMILTON que estipula lo siguiente: Si A es una matriz cuadrada nxn , y $\varphi(\lambda)$ su ecuación característica, se tiene que $\varphi(A) = 0$ (es decir toda matriz satisface su propia ecuación característica).

En efecto, de la conocida relación

$(\lambda I - A)\,\mathrm{Adj}\,(\lambda I - A) = |\lambda I - A| \,.\, I$

o sea $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{+} = \varphi(\lambda) \,.\, I$

se obtiene que $\varphi(A) = 0$

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$ es su ecuación caracterís-

; pero $\varphi(A) = -A^3 + 7A^2 - 11A + 5 \circ I_3$ y se obtiene que

$$\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} ; \quad A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}$$

, de manera que

$$-\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

...iangularización de matrices mediante sus vectores propios.

...uchas veces no es posible diagonizar por semejanza una matriz sin embargo, puede "triangulizarse" y es un problema que también ofrece interés. Se tiene el siguiente resultado:

...da matriz cuadrada A es semejante a una matriz triangular cuyos elementos diagonales son los valores característicos de A.

... procedimiento a seguir es el siguiente:

...an $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ las raíces características de A, y sea X_1 un vector propio de A asociado a λ_1 ($AX = \lambda_1 X$)

...nsidere ahora una matriz Q, n x n cuya primera columna es X_1 y tal ...e $|Q_1| \neq 0$; se tiene que

$$Q^{-1} A\, Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$ donde A_1 es de tamaño (n - 1) x (n - 1) ;

... $n = 2$, entonces $A_1 = [\lambda_2]$ y se tiene la matriz triangular si no, ... X_2 un vector característico de A_1 correspondiente a la raíz λ_2, y ...deremos Q_2 matriz cuya primera columna es X_2 y tal que $|Q_2| \neq 0$.

...ene $$Q_2^{-1} A\, Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$ con A_2 de orden n - 2.

Si $n = 3$ entonces $A_2 = \left[\lambda_3\right]$, se tiene la matriz triangular, y la matriz que triangulizo es

$$Q = Q_1 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$, en caso contrario

continuamos el proceso y después de $n - 1$ etapas a lo sumo, obtenemos una matriz

$$Q = Q_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

tal que $Q^{-1} A Q$ es triangular con entradas diagonales que son los valores característicos de A.

Ejemplo:

$$\text{consideremos } A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -9 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

sus raíces características son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 4$,

$$X_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ es un vector característico de A asociado a $\lambda_1 = 1$

Sea $$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, entonces $$Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

y $$Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -15 & 20 \\ 4 & -12 & 16 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$,una raíz característica de A ,es

= -1 y un vector característico de A_1 asociado a -1 es

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \text{ sea } Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces } Q_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2^{-1} A_1 Q_2 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \text{ con } A_2 = \begin{bmatrix} -48 & 64 \\ -11 & 48 \end{bmatrix}$$

ora $\lambda_3 = 2$ es raíz característica de A_2 y un vector propio de A_2 co-

cido a 2 es: $X_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$; considere entonces $Q_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$,

i $Q_3^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ y $Q_3^{-1} A_2 Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ y también

$$= Q_1 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{160} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 40 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 20 & 0 \\ -180 & 40 & -220 & 160 \end{bmatrix}$$

nde $Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ es triangular!