

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CURSO DE 1958

CAPITULO I

OPERADORES Y SU USO

2507

(Apuntes de clase del Prof. Albino Bocaz)

CAPITULO I

OPERADORES Y SU USO

1.1 Introducción.

El desarrollo de formulas de interpolación y el proceso de integración numérica, que son los casos de cálculo numérico que preferentemente analizaremos en el desarrollo del Curso, se simplifican al máximo tanto en la parte deductiva como en la de "notación", si se hace uso de determinados "operadores". Estos operadores son sencillamente ciertos símbolos matemáticos usados en el cálculo que definen un determinado proceso numérico.

Tanto el desarrollo de las propiedades de mayor utilidad de estos operadores como otros asuntos de interpolación e integración numérica, se harán en base de las ideas expuestas en los textos: Mathematics for Actuarial Students, parte II de Harry Freeman (Cambridge, 1952) y Calculus of finite differences de Charles Jordan (Chelsea Publishing, Nueva York, 1950).

De estos dos textos el que presenta una exposición más completa y sistemática sobre el tema es el libro de Jordan, el que será útil de adquirir, si se quiere profundizar las materias dadas en estos apuntes y estudiar otras de mayor profundidad. Además el texto de Jordan presenta una gran variedad de ejemplos aplicables en el campo de la Estadística.

Como se dijo más arriba, un operador se denota por una letra (mayúscula o minúscula) de nuestro alfabeto, del alfabeto griego ó de cualquier otra forma de escritura (letra gótica pej.). Esta letra generalmente es la letra inicial de la palabra principal que indica el proceso de cálculo por realizar.

Asi por ejemplo, un proceso de cálculo muy usado es el proceso de derivación o sea el cálculo de la derivada de una función y_x de la variable x . Ya que la palabra "derivación" comienza con la letra "D" se adopta esta letra para indicar simbólicamente el proceso de derivación.

Se tiene asi por definición:

$$Dy_x = \frac{dy_x}{d_x} \quad (1)$$

Podemos reiterar el proceso de derivación sobre la función y_x es decir calcular la 2ª derivada de la función, lo que se indicará sencillamente por

$$D^2 y_x \quad (2)$$

permitiendo expresar de esa manera la derivada de orden k por la escueta expresión:

$$D^k y_x \quad (3)$$

De esta manera puede verse que el uso del símbolo "D" referente a la operación de derivación de una función simplifica extraordinariamente la escritura de las derivadas de cualquier orden y permite encontrar útiles relaciones para las derivadas de una función.

Debe hacerse notar que los operadores que indicaremos se refieren únicamente a los usados en el campo de la interpolación y de la integración numérica, pero ello no quiere decir que éstos sean los únicos operadores usados en Matemáticas. El estudio de la Estadística teórica se simplifica extraordinariamente con el uso de ciertos operadores y en todas las otras ciencias la introducción de operadores se hace sumamente necesaria y útil para desarrollar teorías.

No siempre usaremos la notación introducida por el autor de un operador, sino que nos apartaremos a veces de la propuesta, reemplazando las letras griegas (si en caso que ese fué el signo introducido por el autor) por las correspondientes letras de nuestro alfabeto o bien usando otra letra del alfabeto (números de Stirling de 2ª clase pej.). Esto aparte de simplificar la notación, introduce evidente ganancia en la impresión tipográfica.

1.2 Operadores de uso más frecuente.

Aparte del operador "D" recién indicado, los operadores que con mayor frecuencia nos encontraremos en el cálculo numérico que nos preocupa (interpolación e integración numérica) son los siguientes:

a) OPERADOR DE DESPLAZAMIENTO UNIDAD DE E.

Si la variable y_x es una función de la variable x y si x recibe un incremento unitario (en nuestra escala de medidas) tal que y_x pasa a tomar el valor y_{x+1} el cálculo del valor de la función y_x para un punto desplazado en una unidad del

valor inicial se indica sencillamente anteponiendo a y_x la letra E.

De esta manera la operación de desplazamiento queda definida únicamente por la relación:

$$y_{x+1} = Ey_x \quad (4)$$

Podemos estar interesados en calcular el valor de la función y_x para otro incremento finito (unitario) de la variable x , es decir calcular el valor de la función y_x en el punto $(x+2)$, esta operación en base del operador de desplazamiento se indicará simbólicamente por:

$$y_{x+2} = E^2 y_x \quad (5)$$

y si reiteramos el proceso un total de k veces, se podrá escribir:

$$y_{x+k} = E^k y_x \quad (6)$$

que equivale a decir que se está evaluando el valor de y_x para k unidades hacia adelante del valor inicial.

Puede interesar también la determinación del valor de la función y_x para puntos anteriores a x , lo que se denotará cambiando el signo del número k , con lo que se tendrá:

$$y_{x-k} = E^{-k} y_x \quad (7)$$

para indicar un desplazamiento en k unidades hacia la izquierda del valor inicial.

Ej. 1 Probar que la función $y_x = a+bx$ cumple con la condición:

$$(E-1)^2 y_x = 0$$

Demostración

La condición puede escribirse en la forma;

$$(E^2 - 2E + 1) y_x = 0$$

y como: $E^2 y_x = y_{x+2} = a+b(x+2)$; $E y_x = y_{x+1} = a+b(x+1)$

luego de reemplazar en la ecuación de condición se ve que este tipo de función la satisface.

Ej. 2 Encontrar la función y_x de (x) que cumple la condición:

$$y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 0$$

Solución

La ecuación de condición puede escribirse:

$$(E^2 - 3E + 2) y_x = 0$$

si introducimos la función $y_x = ar^x$, la ecuación de condición se transforma en

$$cr^x(r^2 - 3r + 2) = 0$$

que exige:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

es decir una ecuación semejante a la de condición en que se ha cambiado E por r . Esta ecuación recibe el nombre de "ecuación característica". La solución de la ecuación característica de los valores de " r " necesarios para escribir la solución general. Para nuestro caso particular, la solución general es:

$$y_x = c_1 + c_2 2^x$$

ya que $r_1=1$ y $r_2=2$ son las raíces de la ecuación característica.

Ej. 3 Encontrar la función (y_x) que satisface la ecuación de condición:

$$y_{x+2} - 6y_{x+1} + 9y_x = 0$$

Solución

La ecuación de condición puede escribirse:

$$(E^2 - 6E + 9)y_x = 0$$

lo que lleva a la ecuación característica: $r^2 - 6r + 9 = 0$

cuyas raíces son iguales $r_1 = r_2 = 3$. De esa manera la solución general es:

$$y_x = c_1 r_1^x + c_2 r_2^x$$

pero dado a que las raíces son iguales la solución debe escribirse en función de una sola raíz. Haciendo $r_2 = r_1 + \xi$ puede verse que

$$\frac{(r_1 + \xi)^x - r_1^x}{\xi}$$

es también una solución de la ecuación. Si hacemos tender la cantidad ξ hacia 0, lo que lleva a que $r_2 \rightarrow r_1$ (las raíces coinciden) ya que:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(r_1 + \xi)^x - r_1^x}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} x r_1^{x-1} + \xi f(r_1^x) = x r_1^{x-1}$$

entonces la expresión $x r_1^{x-1}$ es también una solución de la ecuación de condición, si r_1 es una raíz doble en la ecuación característica.

De esta manera la solución buscada es:

$$y_x = (c_1 + c_2 x) 3^x$$

Nota

Puede suceder el caso que la raíz r_1 sea de multiplicidad k , es decir, la ecuación característica tenga k raíces de igual valor r_1 . En este caso para encontrar la solución general se consideran primeramente las k raíces como si fueran diferentes en la forma:

$$r_{1i} = r_1 + \xi; r_1 + 2\xi; \dots r_1 + (k-1)\xi$$

siendo ξ una cantidad que después se hará tender a 0. En ese caso una solución de la ecuación es:

$$\frac{1}{i! \xi^i} (r_1 + i\xi)^x - c_1^i (r_1 + i\xi - \xi)^x + \dots + (-1)^i r_1^x$$

y si hacemos $\xi=0$ la solución tomará la forma:

$$y_x = c_i^x r_1^{x-i} a_i \quad \text{ó} \quad y_x = c_i c_i^x r_1^x$$

con lo cual la contribución en la solución general de parte de la raíz múltiple será:

$$y_x = (c_1 + c_2 c_1^x + c_3 c_2^x + \dots + c_k c_{k-1}^x) r_1^x$$

Una vez que se ha determinado la forma general de la solución, en la que aparecerán una serie de constantes c_i , éstas tomarán valores bien definidos, imponiendo la condición que deben reproducir (en magnitud) los valores observados.

Ej. 4. Encontrar la ley (y_x) que rige la formación n de los números de la siguiente serie:

8, 12, 19, 29, 42,

Solución

Es fácil demostrar que los números de esta serie cumplen con la condición:

$$(E-1)^3 y_x = 0$$

es decir que la ecuación característica tiene una raíz de multiplicidad 3.

En base de la nota anterior, la solución general es:

$$y_x = c_1 + c_2 c_1^x + c_3 c_2^x$$

quedando por determinar las constantes por las condiciones iniciales. Es decir para $x=0$; $x=1$; $x=2$; los valores de y_x deben coincidir con los valores observados (en magnitud).

De esta manera se tiene:

$$c_1 = 8; c_2 = 4; c_3 = 3$$

con lo cual la ley de los números observados es:

$$y_x = 8 + 4 c_1^x + 3 c_2^x$$

Nota

Mas adelante se indicará la expresión que rige la magnitud de las constantes c_i (8,4,3, en este caso particular) para un caso general cualquiera. Se indicará que esos valores corresponden a lo que se denominaría "diferencias guías!"

Ej. 5 Un jugador lanza una moneda obteniendo (1) punto si aparece "cara" y (2) puntos si aparece "sello". Lanza la moneda hasta que logra obtener (n) puntos por lo menos. ¿Cuál es la probabilidad que logre reunir exactamente (n) puntos?

Solución

Denominaremos (p_n) la probabilidad de obtener exactamente n puntos.

Hay dos maneras posibles de alcanzar n puntos exactamente, obteniendo

- a) un "sello" cuando lleve (n-2) puntos
- b) una "cara" cuando lleve (n-1) puntos.

Las probabilidades respectivas son $\frac{1}{2} p_{n-2}$ y $\frac{1}{2} p_{n-1}$ y dado a que estos sucesos pueden acontecer independientemente, la probabilidad p_n es igual a

$$p_n = \frac{1}{2} (p_{n-1} + p_{n-2})$$

Esta ecuación se puede resolver (encontrar la forma general de p_n) introduciendo la forma auxiliar:

$$p_n = c r^n$$

lo que lleva a la ecuación característica:

$$2r^2 = r+1$$

cuyas raíces son:

$$r=1; r_2 = -\frac{1}{2}$$

con lo cual la probabilidad p_n toma la forma:

$$p_n = c_1 + (-1)^n \frac{c_2}{2^n}$$

Las constantes deben tomar valores tal que se cumplan las condiciones iniciales:

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \frac{3}{4}$$

lo que exige:

$$c_2 = \frac{1}{3} \qquad c_1 = \frac{2}{3}$$

llegándose finalmente a:

$$p_n = \frac{1}{3} \left[2 + (-1)^n \frac{1}{2^n} \right]$$

que es la probabilidad pedida.

Ej. 6 Encontrar las funciones (u) y (v) que satisfacen el sistema de ecuaciones simultáneas.

$$\begin{cases} (2E-17)u+(E-4)v = 0 \\ (2E-1)u+(E-2)v = 0 \end{cases}$$

Solución

Multiplicando la 1ª por (2E-1) y la 2ª por (4E-17) y restando ambos resultados se tiene:

$$(E^2-8E+15)v = 0$$

cuya solución es:

$$v_x = c_1 3^x + c_2 5^x$$

y para la función u se obtiene:

$$u_x = \frac{c_1}{5} 3^x - \frac{c_2}{3} 5^x$$

Ej. 7 Demostrar que la función \mathcal{Y}_x que satisface la ecuación de condición:

$$a_n E_y^n + a_{n-1} E_y^{n-1} + \dots + a_1 E_y + a_0 y = f(x)$$

está formada por 2 partes: la 1ª obtenida sin considerar el 2º miembro y la 2ª buscando una solución particular para la ecuación de condición x.

Demostración

La ecuación de condición puede escribirse bajo la forma reducida:

$$\varphi(E)y_x = f(x)$$

siendo:

$$\varphi(E) = a_n E^n + \dots + a_1 E + a_0$$

Si "u" es una solución particular debe satisfacer la ecuación de condición, es decir debe tenerse:

$$\varphi(E)[u] = f(x)$$

y restando estas 2 ecuaciones miembro a miembro se tiene:

$$\varphi(E)(y_x - u) = 0$$

lo que nos indica que la función:

$$z = y_x - u$$

es la solución obtenida sin considerar el 2º miembro, con lo cual la solución general será:

$$y_x = z + u$$

que completa la demostración.

Por ejemplo, buscar la función y_x que satisface la ecuación de condición:

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 2$$

La ecuación sin el 2º miembro tiene como ecuación característica:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = 2; \quad r_2 = 3$$

de ese modo la función "z" de la variable "x" es:

$$z = c_1 2^x + c_2 3^x$$

quedando por encontrar la solución particular "u".

Dado que la ecuación de condición puede escribirse bajo la forma;

$$(E^2 - 5E + 6)y_x = 2$$

aplicando el operador E en ambos miembros se tiene:

$$E(E^2 - 5E + 6)y_x = 2$$

y restando ambas expresiones para eliminar el 2º miembro se tiene:

$$(E^2 - 5E + 6)(E-1)y_x = 0$$

es decir aparecen 2 factores: el primero que es obtenido sin considerar el 2º miembro y el nuevo factor (E-1). La presencia de este factor indica que la solución particular es:

$$u = 1$$

quedando como solución general:

$$y_x = 1 + c_1 2^x + c_2 3^x$$

Ej. 8 Encontrar la función y_x que satisface la ecuación de condición:

$$y_{x+3} - 7y_{x+2} + 16y_{x+1} - 12y_x = ca^x$$

Solución

La ecuación de condición puede escribirse:

$$(E^3 - 7E^2 + 16E - 12)y_x = ca^x$$

Para eliminar el 2º miembro amplificamos por (E-a), ya que

$$(E-a) ca^x = 0$$

obteniéndose:

$$(E^3 - 7E^2 + 16E - 12)(E-a)y_x = 0$$

De allí que la parte "z" se obtiene de la ecuación característica:

$$r^3 - 7r^2 + 16a - 12$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = r_2 = 2; \quad r_3 = 3$$

resultando:

$$z = (c_1 + c_2 x) 2^x + c_3 3^x$$

y para la solución particular reemplazando en la ecuación de condición, y_x por

$$u = c_4 a^x$$

se llega a que la constante c_4 vale: $c_4 = \frac{c}{a^3 - 7a^2 + 16a - 12}$

con lo cual la función y_x pedida es:

$$y_x = \frac{ca^x}{a^3 - 7a^2 + 16a - 12} + (c_1 + c_2 x)2^x + c_3 3^x$$

Ej. 9 Encontrar la función y_x que satisface la ecuación de condición:

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 3y_x = 3^x$$

Solución

La solución "z" se encuentra en base de la ecuación característica:

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 3$$

Para la solución particular, se ve que multiplicando por (E-3) se anula el 2º miembro, o sea, la solución particular es:

$$u = c_3 3^x$$

pero resulta que esta ya fué una solución encontrada para "z" por lo que se hace necesario buscar de otra manera la solución particular.

Para ello vamos a colocar en lugar de 3^x la cantidad $(3 + \varepsilon)^x$, quedando entonces la solución particular como:

$$u = \frac{(3 + \varepsilon)^x - 3^x}{\varphi(3 + \varepsilon)}$$

expresión que para $\varepsilon \rightarrow 0$ lleva a un valor indeterminado. Aplicando la regla de L'Hôpital para levantar la indeterminación, es decir, derivando numerador y denominador y haciendo luego $\varepsilon = 0$, se tiene:

$$u = \frac{x3^{x-1}}{2}$$

con lo cual el valor de la función y_x buscada es:

$$y_x = \frac{x3^{x-1}}{2} + c_1 + c_2 3^x$$

Ej. 10 Encontrar la solución de la ecuación:

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 3y_x = x4^x$$

Solución

La función "z" se encuentra en base de la ecuación característica:

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 3$$

Pero ya que

$$(E-4)^2 x4^x = 0$$

entonces la solución particular tiene que ser de la forma:

$$u = (c_1 + c_2 x)4^x$$

y reemplazando en la ecuación de condición se encuentra:

$$c_2 = 1/3; \quad c_1 = -16/9$$

de modo que la función y_x buscada es:

$$y = \frac{3x-16}{9} 4^x + c_1 + c_2 3^x$$

Nota

Más adelante, cuando se pase el operador Δ^{-1} y se indiquen las fórmulas del operador inverso, se dará la solución general para la ecuación de condición:

$$a_n y_{x+n} + \dots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = f(x)$$

b) OPERADOR DE "DIFERENCIA FINITA" U OPERADOR Δ .

El cálculo de las diferencias finitas de una función y_x o de una serie de valores observados igualmente espaciados a distancias "h" que tomaremos como unidades de incremento en nuestro sistema, consiste sencillamente en el cálculo de los incrementos de la función y_x para cada uno de los incrementos finitos del argumento x .

Es decir si se conocen los n valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ de la función y_x para los valores $x, (x+1), (x+2), \dots, x+(n-1)$ de la variable, las diferencias finitas son las diferencias entre los valores sucesivos de y_x :

$$(y_1 - y_0); (y_2 - y_1); (y_3 - y_2); \dots (y_n - y_{n-1}) \quad (8)$$

cada una de las cuales se denota de la manera siguiente:

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{n-1} \quad (9)$$

de modo que en general se tendrá:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (10)$$

A los números Δy_i recién determinados se les puede calcular sus sucesivas diferencias finitas, es decir, la serie anterior da origen a la serie de 2^o diferencias finitas:

$$\Delta^2 y_0; \Delta^2 y_1; \Delta^2 y_2; \dots, \Delta^2 y_{n-2} \quad (11)$$

que expresadas en función de los valores observados son respectivamente:

$$(y_2 - 2y_1 + y_0); (y_3 - 2y_2 + y_1); \dots (y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}) \quad (12)$$

El proceso de cálculo de diferencias puede continuarse hasta llegar a la diferencia finita de orden (n), puesto que a partir de ese momento solamente se dispondrá de un solo valor.

Todo lo anterior puede resumirse en lo que se denomina "tabla de diferencias finitas", y que corresponde al conjunto de los siguientes valores:

x	y_x	1 ^{as} diferencias	2 ^{as} diferencias	3 ^{as} diferencias
x	y_x			
x+1	y_{x+1}	Δy_x		
x+2	y_{x+2}	Δy_{x+1}	$\Delta^2 y_x$	
x+3	y_{x+3}	Δy_{x+2}	$\Delta^2 y_{x+1}$	$\Delta^3 y_x$
x+4	y_{x+4}	Δy_{x+3}	$\Delta^2 y_{x+2}$	$\Delta^3 y_{x+1}$
x+5	y_{x+5}	Δy_{x+4}	$\Delta^2 y_{x+3}$	$\Delta^3 y_{x+2}$

En esta tabla los valores que quedan en la diagonal superior, es decir, los valores y_x ; Δy_x ; $\Delta^2 y_x$; $\Delta^3 y_x$ reciben el nombre de "diferencias guías".

Ej. 1 Construir la tabla de diferencias finitas para la siguiente serie de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7
y_x	1	8	27	64	125	216	343

Solución

La tabla de diferencias finitas contiene los siguientes valores:

x	y_x	Δy_x	$\Delta^2 y_x$	$\Delta^3 y_x$
1	1			
2	8	7		
3	27	19	12	6
4	64	37	18	6
5	125	61	24	6
6	216	91	30	6
7	343	127	36	6

debe notarse que todas las diferencias de orden 3 tienen el mismo valor (6) y que los números y_x son exactamente los cubos de x .

Ej. 2 Construir la tabla de diferencias finitas para la serie de valores:

x	0.750	0.760	0.770	0.780	0.790	0.800	0.810
y_x	0.4724	0.4677	0.4630	0.4584	0.4538	0.4493	0.4449

Solución

x	y_x	Δy_x	$\Delta^2 y_x$
0.750	0.4724		
0.760	0.4677	0.0047	
0.770	0.4630	0.0047	0.0000
0.780	0.4584	0.0046	0.0001
0.790	0.4538	0.0046	0.0000
0.800	0.4493	0.0045	0.0001
0.810	0.4448	0.0045	0.0000

La tabla nos indica que "prácticamente" las diferencias de 2^o orden son "nulas" o sea que para calcular un valor intermedio bastará considerar únicamente hasta las diferencias primeras.

(La parte de valores indicados han sido tomados de la tabla de e^{-x} indicados en la Tabla XI de SIX - PLACE TABLES - Edward S. Allen, Mc Graw Hill, 7^a Edición 4^a Impresión, 1947. Esta tabla por su tamaño reducido 12x19 cms. y por su contenido es útil de tener a disposición.)

Ej. 3 Probar que para la serie de valores que más abajo se indican las 2^{as} diferencias finitas son prácticamente constantes e iguales a 0.0002:

P	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55
u	0.6745	0.6588	0.6433	0.6280	0.6128	0.5978

Solución

Las primeras y segundas diferencias son:

Δu	- 0.0157	- 0.0155	- 0.0153	- 0.0152	- 0.0150
$\Delta^2 u$		0.0002	0.0002	0.0001	0.0002

De esta manera para calcular el valor de "u" correspondiente a un "P" no indicado en la serie de valores y con magnitudes comprendidas entre los valores indicados, deben considerarse solamente hasta las diferencias de 2º orden.

Nota

Los valores de "P" y de "u" dados en el ejemplo han sido tomados de la Tabla I sobre la distribución normal incluida en las Tablas Estadísticas de R.A.Fisher - F. Yates. Ediciones Aguilar. Madrid.

Ej. 4 Para la serie de valores:

x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
y	715	2005	2893	3171	2721	1551	-169	-2071	-3553	-3743	-1463	4807

confeccionar la tabla de diferencias finitas.

Solución

La tabla de diferencias finitas es la siguiente:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
715					
2005	1290				
2893	888	- 402			
3171	278	- 610	208		
2721	- 450	- 728	- 118	90	
1551	-1170	- 720	8	126	36
- 169	-1720	- 550	170	162	36
-2071	-1902	- 182	368	198	36
-3553	-1482	420	602	234	36
-3743	- 190	1292	872	270	36
-1463	2280	2470	1178	306	36
4807	6270	3990	1520	342	36

Nota:

Los valores de "y" corresponden al polinomio ortogonal de 5º grado para n=24, dado en la XXIII de las Tablas de Fisher-Yates, ya citadas.

Relación entre los operadores de desplazamiento y diferencia finita.

En base de la definición de operador E se puede escribir;

$$y_{x+1} = E y_x \quad (13)$$

y tomando en consideración la definición de diferencia finita de 1^{er} orden:

$$y_{x+1} - y_x = \Delta y_x \quad (14)$$

y eliminando entre estas relaciones y_{x+1} se tiene:

$$\Delta y_x = E y_x - y_x \quad (15)$$

y eliminando la función común y_x a la que se aplican los operadores, se puede escribir la relación de equivalencia:

$$\Delta \equiv E - 1 \quad (16)$$

que presta múltiples ventajas, ya que permite expresar un operador en función del otro.

La relación permite determinar:

- el término general de una serie de datos observados
- la diferencia finita de orden k para esos mismos datos.

Efectivamente

$$E \equiv 1 + \Delta \quad (17)$$

$$E^k \equiv (1 + \Delta)^k \quad (18)$$

y desarrollando de acuerdo la fórmula del binomio de Newton se tiene:

$$E^k \equiv 1 + C_1^k \Delta + C_2^k \Delta^2 + C_3^k \Delta^3 + \dots \quad (19)$$

lo que aplicado a la función y_x nos lleva a:

$$E^k y_x = y_{x+k} = y_x + C_1^k \Delta y_x + C_2^k \Delta^2 y_x + \dots \quad (20)$$

que nos permite conocer el valor de la función y_x para un valor de la variable (x) que dista de (k) unidades del valor inicial. Dado que la fórmula del binomio es válida para cualquier valor de k esta fórmula permitirá calcular el valor de la función (si ésta es continua) en cualquier punto de la escala de las x .

Nota

Cuando k es negativo, se tendrá:

$$E^{-k}y_x = y_x - C_1^k \Delta y_x + C_2^{k+1} \Delta^2 y_x - C_3^{k+2} \Delta^3 y_x + \dots \quad (21)$$

En cuanto a la relación que nos permite calcular las diferencias finitas en función de los datos observados sin necesidad de preparar la tabla de diferencias finitas, esta se deduce así:

$$E^k \equiv (E-1)^k \quad (22)$$

y en base nuevamente a la fórmula de Newton se tendrá:

$$\Delta^k \equiv E^k - C_1^k E^{k-1} + C_2^k E^{k-2} - C_3^k E^{k-3} + \dots \quad (23)$$

lo que aplicado a la función y_x permite escribir:

$$E^k y_x \equiv y_{x+k} - C_1^k y_{x+k-1} + C_2^k y_{x+k-2} - C_3^k y_{x+k-3} + \dots \quad (24)$$

Ej. 1 Determinar el valor de y_{10} conocidos los siguientes valores:

x	0	1	2	3	4	5	6
y_x	1	4	13	36	81	156	269

Solución

La tabla de diferencias finitas es la siguiente:

y	Δ	Δ^2	Δ^3
1			
4	3		
13	9	6	
36	23	14	8
81	45	22	8
156	75	30	8
269	113	38	8

de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} y_{10} &= E^{10} y_0 = y_0 + C_1^{10} \Delta y_0 + C_2^{10} \Delta^2 y_0 + C_3^{10} \Delta^3 y_0 \\ &= 1 + 10 \times 3 + 45 \times 6 + 120 \times 8 = 1 + 30 + 270 + 960 = 1261 \end{aligned}$$

Ej. 2 Determinar el valor de y_3 conocidos los siguientes valores:

x	5	6	7	8	9	10
y_x	10.1	18.1	29.5	44.9	64.9	90.1

Solución

La tabla de diferencias finitas es la siguiente:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
5	10.1	.		
6	18.1	8.0		
7	29.5	11.4	3.4	
8	44.9	15.4	4.0	0.6
9	64.9	20.0	4.6	0.6
10	90.1	25.2	5.2	0.6

de donde:

$$y_3 = E^{-2}y_5 = (1+\Delta)^{-2}y_5 = y_5 - C_1^2 \Delta y_5 + C_2^3 \Delta^2 y_5 - C_3^4 \Delta^3 y_5$$

$$= 10.1 - 2 \times 8.0 + 3 \times 3.4 - 4 \times 0.6 = \underline{1.9}$$

Ej. 3 Si y_x es de la forma $(x^3 - x^2 + x + 10)$ verificar por la construcción de una tabla de diferencias finitas que el valor de y_{10} es 920. Usese los valores de la función y_x para los valores de $x = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.

Solución

La tabla de diferencias finitas es:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
1	11			
2	16	5		
3	31	15	10	
4	62	31	16	6
5	115	53	22	6
6	196	81	28	6

con lo cual se tiene:

$$y_{10} = E^9 y_1 = y_1 + C_1^9 \Delta y_1 + C_2^9 \Delta^2 y_1 + C_3^9 \Delta^3 y_1$$

$$= 11 + 9x5 + 36x10 + 84x6 = 11 + 45 + 360 + 504 = \underline{920}$$

Ej. 4 Si y_x es un polinomio en (x) y si se conocen los siguientes valores $y_2=y_3=27; y_4=78; y_5=169$. Encontrar la función y_x .

Solución

La tabla de diferencias finitas es:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
2	27			
3	27	0		
4	78	51	51	
5	169	91	40	-11

con lo cual se tiene:

$$y_x = E^{x-2} y_2 = y_2 + C_1^{x-2} \Delta y_2 + C_2^{x-2} \Delta^2 y_2 + C_3^{x-2} \Delta^3 y_2$$

$$= 27 + \frac{(x-2)(x-3)}{2!} 51 - \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{3!} 11$$

y reduciendo se llega a:

$$y_x = (-11x^3 + 252x^2 - 1051x + 1344)/6$$

Ej. 5 Determinar y_{12} dado los valores:

x	0	1	2	3	4	5
y	3	14	40	86	157	258

Solución

La tabla de diferencias finitas es:

x	y_x	Δ	Δ^2	Δ^3
0	3			
1	14	11		
2	40	26	15	
3	86	46	20	5
4	157	71	25	5
5	258	101	30	5

con lo cual:

$$y_{12} = E^{12} y_0 = y_0 + C_1^{12} \Delta y_0 + C_2^{12} \Delta^2 y_0 + C_3^{12} \Delta^3 y_0$$

$$= 3 + 12x + 11 + 66x + 15 + 220x + 5 = 2225$$

Nota

Si se quiere evitar el cálculo de las diferencias finitas puede usarse cualquiera de dos formas distintas de la expresión que dá el valor E^k en función de los E^j de orden inferior. Estas formas son:

Forma 1:
$$E^k = \sum_0^{\lambda} (-1)^{j+\lambda} C_j^k C_{k-\lambda-1}^{k-j-1} E^j = \sum_0^{\lambda} A_{k,j} E^j \quad (25)$$

Forma 2:
$$E^k = \frac{k(\lambda+1)}{(\lambda+1)!} \sum_0^{\lambda} (-1)^{j+\lambda} \frac{j+1}{k-j} C_{j+1}^{\lambda-1} E^j \quad (26)$$

siendo:
$$k_{(\lambda+1)} = k(k-1)(k-2)\dots(k-1) \quad (27)$$

y λ el orden al cual las diferencias finitas son iguales.

La primera forma es útil para determinar valores de y_x más allá de los valores observados (esta operación de cálculo de denomina extrapolación, y nos preocuparemos con mayor detalle en el capítulo siguiente).

La 2ª forma es útil cuando se trata de determinar un valor y_x para un valor de x entre dos valores de (x) dados en la tabla de valores observados. Esta operación recibe el nombre de "interpolación directa" y será el tema del capítulo 2.

Para facilitar las operaciones se ha confeccionado una tabla con los coeficientes

$$A_{k,j} = (-1)^{j+\lambda} C_j^k C_{k-\lambda-1}^{k-j-1}$$

para valores de 2,3,4,5 que son los más usados en problemas de interpolación.

Véase a continuación la tabla.

$$\lambda = 2$$

$k \setminus j$	0	1	2
3	1	- 3	3
4	3	- 8	6
5	6	- 15	10
6	10	- 24	15
7	15	- 35	21
8	21	- 48	28
9	28	- 63	36
10	36	- 80	45
11	45	- 99	55
12	55	- 120	66
13	66	-143	78
14	78	-168	91
15	91	-195	105

$$\lambda = 3$$

$k \setminus j$	0	1	2	3
4	- 1	4	- 6	4
5	- 4	15	- 20	10
6	- 10	36	- 45	20
7	- 20	70	- 84	35
8	- 35	120	- 140	56
9	- 56	189	- 216	84
10	- 84	280	- 315	120
11	-120	396	- 440	165
12	-165	540	- 594	220
13	-220	715	- 780	286
14	-286	924	-1001	364
15	-364	1070	-1260	455

$$\lambda = 4$$

$k \setminus j$	0	1	2	3	4
5	1	- 5	10	- 10	5
6	5	- 24	45	- 40	15
7	15	- 70	126	- 105	35
8	35	- 160	280	- 224	70
9	70	- 315	540	- 420	126
10	126	- 560	945	- 720	210
11	210	- 924	1540	-1155	330
12	330	-1440	2376	-1760	495
13	495	-3145	3510	-2574	715
14	715	-3980	5005	-3640	1001
15	1001	-4295	6930	-5005	1365

$$\lambda = 5$$

$k \setminus j$	0	1	2	3	4	5
6	- 1	6	- 15	20	- 15	6
7	- 6	35	- 84	105	- 70	21
8	- 21	120	- 280	336	- 210	56
9	- 56	315	- 720	840	- 504	126
10	- 126	700	- 1575	1800	-1050	252
11	- 252	1386	- 3080	3456	-1980	462
12	- 462	2520	- 5544	6160	-3465	792
13	- 792	4290	- 9360	10296	-5720	1287
14	-1287	6930	-15015	16380	-9009	2002
15	-2002	10725	-23100	25025	-13650	3003

Ej. 6 (El mismo ejemplo 5)

Determinar el valor de y_{12} conociendo los siguientes valores:

x	0	1	2	3	4	5
y_x	3	14	40	86	157	258

Solución

Las diferencias finitas de 3 órdenes son iguales, por lo tanto $\lambda=3$; $k=12$ y entrando en la tabla, se tiene:

$$\begin{aligned} y_{12} &= -165y_0 + 540y_1 - 594y_2 + 220y_3 \\ &= -165(3) + 540(14) - 594(40) + 220(86) = \underline{2225} \end{aligned}$$

que es el mismo valor encontrado en el ejemplo 5

Ej. 7 (El mismo caso presentado en el ejemplo 2 de página 19)

Determinar el valor de y_3 conociendo los siguientes valores:

x	5	6	7	8	9	10
y_x	10.1	18.1	29.5	44.9	64.9	90.1

Solución

Tomamos la serie de valores en sentido inverso, para poder aplicar la fórmula. Como en este caso las 3 diferencias finitas son iguales entre si, el valor y_3 pedido se calcula usando los valores $k=7$; $\lambda=3$, con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} y_3 &= -20y_{10} + 70y_9 - 84y_8 + 35y_7 \\ &= -20(90.1) + 70(64.9) - 84(44.9) + 35(29.5) = \underline{1.9} \end{aligned}$$

que es el mismo valor ya encontrado usando las diferencias finitas.

Nota

Podrían haberse usado los 4 valores más vecinos de y_3 , con $k=5$; $\lambda=3$ se habría tenido:

$$y_3 = -4y_8 + 15y_7 + 20y_6 + 10y_5$$

$$= -4(44.9) + 15(29.5) - 20(18.1) + 10(10.1) = \underline{1.9}$$

igual que antes.

Ej. 8 Determinar el valor de $y_{27.5}$ conociendo los siguientes valores:

x	25	26	27	28	29
y_x	16.195	15.919	15.630	15.326	15.006

Solución

Por tener 5 valores podemos aceptar que las diferencias de 4^o orden son constantes. Aplicando la 2^a forma de la expresión de E^k , dado a que $k=2.5$ se tiene:

$$y_{27.5} = \frac{2.5(5)}{5!} \left(\frac{1}{2.5} C^5_1 y_{25} - \frac{2}{1.5} C^5_2 y_{26} + \frac{3}{0.5} C^5_3 y_{27} - \frac{4}{0.5} C^5_4 y_{28} + \frac{5}{1.5} C^5_5 y_{29} \right)$$

$$= \frac{2.5(5)}{5! \cdot 0.3} (0.6y_{25} - 4.0y_{26} + 18.0y_{27} + 12.0y_{28} - y_{29})$$

$$= \frac{5x}{128} (396,287) = \underline{15,480}$$

Ej. 9 Dada la serie de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6
y_x	72795	71651	70458	67919	66566	65152

determinar el valor de y_3 .

Solución

Cuando en una serie de valores y_x falta alguno de los valores intermedios (1 ó 2) se puede completar la serie introduciendo la condición $\Delta^k = 0$, es decir, suponiendo que las diferencias finitas de cierto orden (k) son todas nulas. Si el número de valores disponibles no exceden 8 pej. y solamente falta 1 término en la serie, puede aceptarse que las diferencias finitas de un orden igual al número de términos son nulas. Si faltan 2 términos debe reducirse en 1 más, el grado k.

Esta condición permitirá determinar el término "perdido". Para el caso recién presentado dado a que se tiene 6 términos puede imponerse la condición:

$$\Delta^6 y_0 = 0$$

con lo cual:

$$(E-1)^6 y_0 = 0$$

$$y_6 - 6y_5 + 15y_4 - 20y_3 + 15y_2 - 6y_1 + y_0 = 0$$

lo que dá para y_3 :

$$y_3 = \frac{1}{20} [(y_0 + y_6) - 6(y_1 + y_5) + 15(y_2 + y_4)]$$

y sustituyendo los valores observados se encuentra:

$$y_3 = \frac{1}{20} (137947 - 6 \times 138217 + 15 \times 133377) = 1384300/20 = \underline{69215}$$

Ej. 10 El número de miembros de cierta Sociedad para los años que se indica fueron los siguientes:

Año	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949
n°	845	367	...	346	821	772	...	757	761	796

no sabiéndose (por imposibilidad de conseguir la información) cuántos miembros formaron la Sociedad en los años 1942 y 1946. Determinar los números probables de miembros para esos años.

Solución

La serie está formada por n=8 términos y 2 omisiones, de modo que usaremos la condición $\Delta^7 y_x = 0$.

De esta manera se tiene:

$$(E-1)^7 y_0 = 0 \therefore 21y_2 + 7y_6 = -(y_0 - y_7) + 7y_1 + 21y_5 + 35(y_3 + y_4)$$

$$(E-1)^7 y_2 = 0 \therefore y_2 + 35y_6 = y_9 + 7(y_3 - y_3) - 21(y_4 - y_7) + 35y_5$$

que dá origen al sistema:

$$\begin{cases} 21y_2 + 7y_6 = 23068 \\ y_2 + 35y_6 = 27067 \end{cases}$$

cuya solución nos da:

$$y_{1942} = 349; \quad y_{1946} = 749$$

Ej. 11 Estimar el valor de y_{15} dado los siguientes valores:

$$y_0 = 0; \quad y_{10} = 15; \quad y_{20} = 50$$

Si se conociera el valor de $y_5 = 35$ ¿cómo calcularía el valor de y_{15} ?

Solución

Para la primera parte del problema usamos la fórmula: de pag. 21, forma 2, con $k=1.5$; $\lambda=2$, lo que nos permite escribir:

$$y_{15} = \frac{1.5(3)}{3!} \left(\frac{1}{1.5} C_1^3 y_0 - \frac{2}{0.5} C_2^3 y_{10} + \frac{3}{0.5} C_3^3 y_{20} \right) = \frac{1.5(3)}{3!} (2y_0 - 12y_{10} + 6y_{20}) = 30$$

En caso de conocer el valor y_5 puede atacarse el problema como el de los ejercicios anteriores, es decir búsqueda del (ó los) términos para completar la serie. En este caso aplicamos la condición $\Delta^4 = 0$ con lo cual se tiene:

$$y_0 - 4y_5 + 6y_{10} - 4y_{15} + y_{20} = 0$$

$$4y_{15} = y_0 - 4y_5 + 6y_{10} + y_{20} = 0 - 140 + 90 + 50 = 0$$

Ej. 12 Dado los valores:

$$y_{75} = 2459; \quad y_{80} = 2013; \quad y_{85} = 1130; \quad y_{90} = 402$$

determinar la magnitud de los valores y_{82} e y_{79} .

Solución

Tomando como unidad la distancia 5 entre los puntos observados, para y_{79} se tiene: ($k=0.3$)

$$y_{79} = \frac{0.3(4)}{4!} \left(-\frac{1}{0.3} C_1^4 y_{75} - \frac{2}{0.2} C_2^4 y_{80} + \frac{3}{1.2} C_3^4 y_{85} - \frac{4}{2.2} C_4^4 y_{90} \right) \\ = \frac{0.3(4)}{4! \cdot 11} (55y_{75} + 660y_{80} - 110y_{85} + 20y_{90}) = 0.16(13453,65) = 2152.6$$

Para y_{32} se tiene: ($k=1.4$)

$$y_{32} = \frac{1.4(4)}{4! \cdot 0.23} (0.8y_{75} + 0.4y_{30} + 5.6y_{35} - 0.7y_{90}) = 0.08(21310.6) = \underline{1704.3}$$

Ej. 13 Dado los valores:

$$y_0 = 117.7; \quad y_2 = 110.5; \quad y_4 = 102.7; \quad y_{10} = 75.4$$

obtener el resto de valores y_x para x comprendido entre 0 y 10.

Solución

Por tenerse 4 ecuaciones de condición usamos la condición:

$$\Delta^4 = 0$$

con lo cual:

$$y_x = E^x y_0 = y_0 + x \Delta_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta_0^3$$

de modo que se tiene para:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \quad -7.2 = 2 \Delta_0 + \Delta_0^2 \\ x = 4 \quad -15.0 = 4 \Delta_0 + 6 \Delta_0^2 + 4 \Delta_0^3 \\ x = 10 \quad -42.3 = 10 \Delta_0 + 45 \Delta_0^2 + 120 \Delta_0^3 \end{array} \right\}$$

sistema cuya 4 solución nos da:

$$\Delta_0 = -3.527; \quad \Delta_0^2 = -0.146; \quad \Delta_0^3 = -0.004$$

es decir que y_x es de la forma:

$$y_x = 117.7 - 3.527 C_1^x - 0.146 C_2^x - 0.004 C_3^x$$

obteniéndose los valores:

$$y_1 = 114.2; \quad y_3 = 106.7; \quad y_5 = 98.6; \quad y_6 = 94.3; \quad y_7 = 89.8; \quad y_8 = 85.2; \quad y_9 = 80.3$$

Ej. 14 Dadas las condiciones:

$$y_1 = 1; \quad y_2 + y_3 = 5.41; \quad y_4 + y_5 + y_6 = 13.47$$

$$y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} = 90.36$$

determinar los valores individuales.

Solución

Imponiendo la condición $\Delta^4 = 0$ se tiene que:

$$y_x = y_1 + C_1^{x-1} \Delta_1 + C_2^{x-1} \Delta_1^2 + C_3^{x-1} \Delta_1^3$$

y reemplazando las ecuaciones de condición se tiene el sistema:

$$\begin{array}{l} 3.41 = 3\Delta_1^2 + \Delta_1^2 \\ 15.47 = 12\Delta_1 + 19\Delta_1^2 + 15\Delta_1^3 \\ 84.36 = 51\Delta_1 + 200\Delta_1^2 + 450\Delta_1^3 \end{array}$$

cuya resolución nos dá:

$$\Delta_1 = 1.10 \quad \Delta_1^2 = 0.108 \quad \Delta_1^3 = 0.014$$

con lo cual y_x toma la forma:

$$y_x = 1 + 1.10 C_1^x + 0.11 C_2^x + 0.014 C_3^x$$

resultando los valores individuales iguales a:

$$y_2=2,10; \quad y_3=3,31; \quad y_4=4,64; \quad y_5=6,11; \quad y_6=7,73; \quad y_7=9,51 \quad y_8=11,47$$

$$y_9=13,62; \quad y_{10}=15,97; \quad y_{11}=18,54; \quad y_{12}=21,35$$

Ej. 15 Dadas las siguientes condiciones:

$$y_0 = 40365; \quad \sum_0^3 y_x = 175212; \quad \sum_0^6 y_x = 329240; \quad \sum_0^9 y_x = 500426$$

obtener los valores individuales.

Solución

Imponiendo la condición: $\Delta^4 = 0$

se puede escribir para el valor y_x :

$$y_x = y_0 + C_1^x \Delta_0 + C_2^x \Delta_0^2 + C_3^x \Delta_0^3$$

dando las ecuaciones de condición el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 175212 &= 4y_0 + 6\Delta_0 + 4\Delta_0^2 + \Delta_0^3 \\ 329240 &= 7y_0 + 21\Delta_0 + 35\Delta_0^2 + 35\Delta_0^3 \\ 500426 &= 10y_0 + 45\Delta_0 + 120\Delta_0^2 + 210\Delta_0^3 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\Delta_0 = 2301,38; \quad \Delta_0^2 = -65,53 \quad \Delta_0^3 = 2,31$$

con lo cual y_x toma la forma:

$$y_x = 4036,5 + 2301,4 C_1^x - 65,5 C_2^x + 2,3 C_3^x$$

relación que nos permite encontrar los valores individuales.

Ej. 16 Dadas las ecuaciones de condición:

$$S_0 = \sum_0^4 y_x; \quad S_1 = \sum_1^9 y_x; \quad S_2 = \sum_2^{14} y_x; \quad S_3 = \sum_3^{19} y_x; \quad S_4 = \sum_4^{24} y_x$$

determinar los valores individuales del grupo S_2 .

Solución

Designando por S_x la función de x que da la suma de valores y_x para un valor de x menor que una cantidad determinada, se tiene que los valores anteriores dan origen a la siguiente serie:

x	0	1	2	3	4
S_x	0	S_1	S_1+S_2	$S_1+S_2+S_3$	$S_1+S_2+S_3+S_4$

De ese modo, tomando 5 como unidad, la función S_x es igual a:

$$S_x = C_1^x S_1 + C_2^x \Delta S_1 + C_3^x \Delta^2 S_1 + C_4^x \Delta^3 S_1$$

Para encontrar la expresión general para y_x debemos determinar la 1ª diferencia finita de S_x , o sea, $y_x = \Delta S_x$ y dado que $\Delta C_j^x = C_{j-1}^x$

$$y_x = S_1 + C_1^x \Delta S_1 + C_2^x \Delta^2 S_1 + C_3^x \Delta^3 S_1$$

Los valores individuales del grupo S_2 se obtienen reemplazando en la relación para y_x , x por los valores 2,0; 2,2; 2,2; 2,6; 2,8.

Ej. 17 Demostrar la siguiente fórmula:

$$E^x = 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \frac{\Delta^2}{E} + C_3^{x+1} \frac{\Delta^3}{E} + C_4^{x+1} \frac{\Delta^4}{E^2} + C_5^{x+2} \frac{\Delta^5}{E^2} + \dots \quad (28)$$

Demostración

Se sabe que:

$$E^x = 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \Delta^2 + C_3^x \Delta^3 + C_4^x \Delta^4 + C_5^x \Delta^5 + \dots \quad (19)$$

si a partir de la 2ª diferencia finita introducimos el factor $\frac{1+\Delta}{E} \equiv 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} E^x &= 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \Delta^2 \frac{1+\Delta}{E} + C_3^x \Delta^3 \frac{1+\Delta}{E} + \dots \\ &= 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \frac{\Delta^2}{E} + (C_2^x + C_3^x) \frac{\Delta^3}{E} + (C_3^x + C_4^x) \frac{\Delta^4}{E} + \dots \end{aligned}$$

y considerando que:

$$C_j^x + C_{j+1}^x = \frac{x+1}{j+1}$$

esto nos lleva a escribir:

$$E^x = 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \frac{\Delta^2}{E} + C_3^{x+1} \frac{\Delta^3}{E} + C_4^{x+1} \frac{\Delta^4}{E} + \dots$$

En esta nueva relación a partir de la 4ª diferencia finita volvemos a introducir el mismo factor $\frac{1+\Delta}{E} \equiv 1$, con lo cual se tiene:

$$E^x = 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \frac{\Delta^2}{E} + C_3^{x+1} \frac{\Delta^3}{E} + C_4^{x+1} \frac{\Delta^4}{E^2} (C_4^{x+1} + C_5^{x+1}) \frac{\Delta^4}{E^2} + (C_5^{x+1} + C_6^{x+1}) \frac{\Delta^5}{E^2} + \dots$$

lo que nos lleva a:

$$E^x = 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \frac{\Delta^2}{E} + C_3^{x+1} \frac{\Delta^3}{E} + C_4^{x+1} \frac{\Delta^4}{E^2} + C_5^{x+2} \frac{\Delta^5}{E^2} + \dots$$

continuando este proceso con las 6ªs diferencias hacia adelante; luego en la fórmula resultante con la 3ª diferencia finita hacia adelante, se puede ver que se tendrá en general:

$$E^x = \sum_{j=0}^{\infty} \left(C_{2j}^{x+j-1} \frac{\Delta^{2j}}{E^j} + C_{2j+1}^{x+j} \frac{\Delta^{2j+1}}{E^j} \right) \quad (29)$$

que corresponde a la fórmula que se trataba de demostrar. Esta fórmula recibe el nombre de 1ª fórmula de Gauss (ó fórmula de avance)

Ej. 18 Demostrar la fórmula siguiente:

$$E^x = 1 + C_1^x \frac{\Delta}{E} + C_2^{x+1} \frac{\Delta^2}{E^2} + C_3^{x+1} \frac{\Delta^3}{E^2} + C_4^{x+2} \frac{\Delta^4}{E^2} + \dots \quad (30)$$

Demostración

Se parte de la misma relación para E^x ; pero ahora se introduce el factor $\frac{1+\Delta}{E} = 1$, desde la 1ª diferencia finita. En la fórmula resultante se vuelve a introducir a partir de la 3ª diferencia finita y en general en las diferencias de orden impar del tipo $(2j-1)$ siendo j el orden del reemplazo del factor $\frac{1+\Delta}{E} = 1$.

La fórmula se debe también a Gauss y se denomina 2ª fórmula de Gauss (ó fórmula recesiva de Gauss) y puede escribirse en la forma:

$$E^x = \sum_{j=0}^{\infty} \left(C_{2j}^{x+j} \frac{\Delta^{2j}}{E^j} + C_{2j+1}^{x+j} \frac{\Delta^{2j+1}}{E^{j+1}} \right) \quad (31)$$

(c) OPERADOR DEL "VALOR MEDIO" U OPERADOR M

Si entre los extremos del intervalo $(x, x+1)$, la función y_x de la variable (x) toma los valores y_x e y_{x+1} , el valor medio de la función en ese intervalo (tomado como unidad) está dado por definición:

$$My_x = \frac{1}{2}(y_x + y_{x+1}) \quad (32)$$

que se denota simbólicamente anteponiendo a la función y_x la letra mayúscula "M".

La definición de "M" permite determinar relaciones entre este operador con los operadores E y Δ . Efectivamente reemplazando en (32) el valor de y_{x+1} por Ey_x

$$My_x = \frac{1}{2}(y_x + Ey_x) \quad (33)$$

y dejando de lado la función y_x común a la que se aplican se tiene la identidad:

$$M \equiv \frac{1}{2}(1 + E) \quad (34)$$

y con respecto al operador de diferencia, la identidad:

$$M \equiv 1 + \frac{\Delta}{2} \quad (35)$$

relaciones que permiten determinar el valor medio de una función si se conocen ya sea diferentes valores de la función y_x en el intervalo ó las diferencias finitas.

De la fórmula del binomio de Newton se tiene:

$$M^k \equiv \frac{1}{2^k} \sum_0^k c_j^k E^j \quad (36)$$

$$\equiv \sum c_j^k \left(\frac{\Delta}{2}\right)^j \quad (37)$$

para cada una de las relaciones (21) y (22).

d) OPERADOR DE "DIFERENCIA CENTRAL" (δ).

Al igual que el operador M , este operador fué introducido por Sheppard. El uso de este operador simplifica bastante la deducción y escritura de fórmulas de interpolación.

Por definición la operación " δ " corresponde al cálculo de la expresión:

$$\delta y_x = y_{x+\frac{h}{2}} - y_{x-\frac{h}{2}} \quad (38)$$

En base de esta definición, ya que:

$$E^{1/2} y_x = y_{x+h/2}; \quad E^{-1/2} y_x = y_{x-h/2} \quad (39)$$

entonces se tiene que entre " δ " y " E " existe la relación:

$$\begin{aligned} \delta &= E^{1/2} - E^{-1/2} \\ &= \Delta / E^{1/2} \end{aligned} \quad (40)$$

Junto al operador " δ " está el operador μ de valor medio, definido por la relación:

$$\mu y_x = \frac{1}{2} \left[y_{x+\frac{h}{2}} + y_{x-\frac{h}{2}} \right] \quad (41)$$

De esa manera se tiene:

$$\mu = \frac{1}{2} \left(E^{1/2} + E^{-1/2} \right) \quad (42)$$

que es la relación entre el operador " μ " y el operador "E".

De las relaciones (27) y (29), por suma se obtiene:

$$2\mu + \delta = 2E^{1/2} \quad (43)$$

y multiplicando esta igualdad miembro a miembro por la relación (27), se tiene:

$$\begin{aligned} (2\mu + \delta)\delta &= 2E^{1/2}(E^{1/2} - E^{-1/2}) \\ &= 2(E-1) = 2\Delta \end{aligned} \quad (44)$$

con lo cual se tienen las relaciones de interés:

$$\begin{aligned} \Delta &= \mu\delta + \frac{\delta^2}{2} \\ E &= 1 + \mu\delta + \frac{\delta^2}{2} \end{aligned} \quad (45)$$

El uso del operador " δ " de "diferencia central" permite escribir para E^x la siguiente expresión:

$$E^x = \sum_0^{\infty} \left(C_{2j+1}^{x+j} E^{\delta^{2j}} - C_{2j+1}^{x+j-1} \delta^{2j} \right) \quad (46)$$

fórmula que recibe el nombre de "fórmula de Everett"

Esta fórmula se obtiene de la siguiente manera:

La 1ª fórmula de Gauss nos da:

$$E^x = 1 + C_1^x \Delta + C_2^x \frac{\Delta^2}{E} + C_3^{x+1} \frac{\Delta^3}{E} + C_4^{x+1} \frac{\Delta^4}{E^2} + C_5^{x+2} \frac{\Delta^5}{E^2} + \dots \quad (28)$$

La 2ª fórmula de Gauss nos da:

$$E^{x-1} = 1 + C_1^{x-1} \frac{\Delta}{E} + C_2^x \frac{\Delta^2}{E} + C_3^x \frac{\Delta^3}{E^2} + C_4^{x+1} \frac{\Delta^4}{E^2} + C_5^{x+1} \frac{\Delta^5}{E^3} + \dots \quad (30)$$

y restando ambas relaciones se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 E^x - E^{x-1} &= C_1^x \Delta + C_3^{x+1} \frac{\Delta^3}{E} + C_5^{x+2} \frac{\Delta^5}{E^2} + \dots \\
 &= \left(C_1^{x-1} \frac{\Delta}{E} + C_3^x \frac{\Delta^3}{E^2} + C_5^{x+1} \frac{\Delta^5}{E^2} + \dots \right) \\
 &= \frac{\Delta}{E} \left[\left(C_1^x + C_3^{x+1} \delta^2 + C_5^{x+2} \delta^4 + \dots \right) E - \left(C_1^{x-1} + C_3^x \delta^2 + C_5^{x+1} \delta^4 + \dots \right) \right]
 \end{aligned}$$

pero dado que:

$$E^x - E^{x-1} = \frac{\Delta}{E} (E^x)$$

luego de simplificar por el factor $\frac{\Delta}{E}$ se tiene:

$$E^x = \left(C_1^x + C_3^{x+1} \delta^2 + C_5^{x+2} \delta^4 + \dots \right) E - \left(C_1^{x-1} + C_3^x \delta^2 + C_5^{x+1} \delta^4 + \dots \right) \quad (47)$$

que es precisamente la fórmula dada anteriormente.

Esta fórmula tiene la ventaja en las aplicaciones, que solamente hace uso de la mitad de las diferencias finitas.

Para facilitar el uso de esta fórmula se da la siguiente tabla reducida:

x	C_1^x	C_3^{x+1}	C_5^{x+2}	C_7^{x+3}	x	C_1^x	C_3^{x+1}	C_5^{x+2}	C_7^{x+3}
0.1	0.1	-0.01650	0.00329	-0.00070	0.2	0.2	-0.03200	0.00634	-0.00135
0.3	0.3	-0.04550	0.00890	-0.00189	0.4	0.4	-0.05600	0.01075	-0.00226
0.5	0.5	-0.06250	0.01172	-0.00244	0.6	0.6	-0.06400	0.01165	-0.00240
0.7	0.7	-0.05950	0.01044	-0.00212	0.8	0.8	-0.04300	0.00806	-0.00161
0.9	0.9	-0.02850	0.00455	-0.00089					

Nota

Una tabla mas detallada puede encontrarse en "Tables of Applied Mathematics" in Finance, Insurance, Statistics. Editada por James W. Glover Ann Arbor Michigan.

Ej. 1 Se da la siguiente serie de valores pivotaes (Tabla #1 de "Tablas de Vida para Chile" 1920-1930-1940, O. Cabello, J. Vildosola y M. Latorre)

x	7	12	17	22	27	32	37
$1000q_x$	3610	3013	6406	8956	9382	9740	10797

Se pide determinar los valores del intervalo 17- 27.

Solución

Debemos primeramente determinar los valores de las diferencias centrales:

$$\delta^2 y \text{ y } \delta^4$$

Estos valores se obtienen a través de las relaciones:

$$\delta_j^2 = (y_{j+1} + y_{j-1}) - 2y_j$$

$$\delta_j^4 = (y_{j+2} + y_{j-2}) - 4(y_{j+1} + y_{j-1}) + 6y_j$$

De modo que para la serie de valores observados tomando como origen (x=0) la edad 17 años, tenemos:

j	-2	-1	0	1	2	3	4
y _j	3610	3013	6406	8956	9382	9740	10797

$$\delta_0^2 = 11969 - 12312 = -343 \quad \delta_1^2 = 15733 - 17912 = -2124 \quad \delta_2^2 = 18696 - 13764 = -68$$

$$\delta_0^4 = 12992 - 47376 = 38436 = 3552 \quad \delta_1^4 = 12753 - 63152 + 53736 = 3337 \quad \delta_2^4 = 17203 - 74784 + 56292 = -1239$$

Podemos preparar la siguiente tabla de cálculo:

x	C ₁ ^x y _j	C ₃ ^{x+1 2} _j	C ₅ ^{x+2 4} _j	1000q _x	x
					↓
j = 0	0.2	1231.2	27.0	22.5	
	0.4	2562.4	47.2	33.2	
	0.6	3843.6	54.0	41.4	
	0.8	5124.8	40.5	28.6	
j = 1	0.2	1791.2	63.0	21.2	7074.3
	0.4	3532.4	113.9	35.9	7676.2
	0.6	5373.6	135.9	33.9	8196.2
	0.8	7164.8	102.0	26.9	8624.4
j = 2	0.2	1876.4	2.2	-14.5	9157.3
	0.4	3752.8	3.8	-24.6	9280.4
	0.6	5629.2	4.4	-26.7	9344.1
	0.8	7505.6	3.3	-13.4	9370.9

que en forma sistemática nos permite calcular los valores pedidos. Los valores indicados al final de la línea se obtienen sumando algebraicamente los valores de esa línea y agregando los valores de la línea simétrica respecto de la línea de separación.

Asi por ejemplo: para la edad 13:

$$(1791.2+63.0+21.2) + (5124.3+40.5+23.6) = \underline{7074.3}$$

para la edad 26:

$$(7505.6+3.3 -13.4) + (1791.2+63.0+21.2) = \underline{9370.9}$$

Más adelante(en el Capítulo 2) se indicará cómo evitar la formación de esta tabla de cálculo, usando para ello multiplicadores especiales, que resulta de escribir de otra manera mas cómoda la fórmula de Everett.

Ej. 2 De acuerdo a ciertas hipótesis sobre mortalidad y natalidad en el futuro, se estima que para los años 1952,57,62,67,72,77 y 82, la población chilena alcanzaría la siguiente dotación: (habitantes en miles)

Año	1952	1957	1962	1967	1972	1977	1982
Población	6162	6933	7836	8878	10074	11460	13077

Se pide determinar los valores (población estimada) en los años del intervalo 1962-1972.

Solución

Tomando como origen el año 1962 y como unidad un período de 5 años se tiene la siguiente serie:

j	-2	-1	0	1	2	3	4
y _j	6162	6933	7836	8878	10074	11460	13077

De allí que los valores de las diferencias centrales son:

$$D_0^2 = 15811-15672 = \underline{139} \quad D_1^2 = 17910-17756 = \underline{154} \quad D_2^2 = 20338-20148 = \underline{190}$$

$$D_0^4 = 16236-63244+47016 = \underline{8} \quad D_1^4 = 18393-71640+53263 = \underline{21} \quad D_2^4 = 20913-81352+60444 = \underline{5}$$

con lo cual podemos confeccionar la siguiente tabla de cálculo:

	C_{15}^x	$C_{3j}^{x+1;2}$	$C_{5j}^{x+2;4}$	Población estimada (en miles)	Año
0.2	1567.2	-4.4	0.1		
0.4	3134.4	-7.8	0.1		
0.6	4701.6	-3.9	0.1		
0.8	6263.8	-6.7	0.1		
0.2	1775.6	-4.9	0.1	8033.0	1963
0.4	3551.2	-8.6	0.2	8235.6	1964
0.6	5326.8	-9.9	0.2	8443.8	1965
0.8	7102.4	-7.4	0.2	8658.1	1966
0.2	2014.8	-6.1	0.0	9103.9	1967
0.4	4029.6	-10.6	0.0	9336.1	1968
0.6	6044.4	-12.2	0.0	9575.0	1969
0.8	8059.2	-9.1	0.0	9820.9	1970

Ej. 3 (Mismo caso del ejemplo anterior).

C. Jordan ha logrado demostrar que:

$$y_x = I_1 - C_2^x (I_1 - I_2) + C_4^{x+1} (2I_1 - 3I_2 + I_3) - C_6^{x+2} (5I_1 - 9I_2 + 5I_3 - I_4) + \dots$$

cuyo término general es:

$$C_{2j-2}^{x+j-2} \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} C_{j+k}^{2j+1} \frac{2k-1}{2j+1} I_k$$

siendo:

$$I_k = \frac{1}{2k-1} \left[(x+k-1)y_k + (k-x)y_{1-k} \right]$$

En base de este resultado (fórmula de Jordan) determinar los valores y_x para x variando entre $x=0$ y $x=2$, de 0.2 en 0.2, si se conocen los siguientes valores observados:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y_x	6162	6933	7336	8878	10074	11460	13077

Solución

La demostración de la relación de Jordan puede verse en el libro de que es autor ("Calculus of Finite Differences", Chelsea Publishing Company, New York 1950, pags. 390-409).

Nota

Para facilitar ciertos cálculos de rutina (determinación de los valores individuales dados grupos quinquenales, decenales o bien puntos pivotaes espaciados en 5 o 10 unidades) se dan las siguientes tablas auxiliares.

Tabla de valores de los coeficientes $(-1)^{j-1} C_{2j-2}^{x+j-2}$

x	$-C_2^x$	C_4^{x+1}	$-C_6^{x+2}$	C_8^{x+3}	x
0.1	0.04500	0.00734	0.00159	0.00034	0.9
0.2	0.08000	0.01440	0.00296	0.00064	0.8
0.3	0.10500	0.01934	0.00400	0.00087	0.7
0.4	0.12000	0.02240	0.00466	0.00102	0.6
0.5	0.12500	0.02344	0.00483	0.00107	0.5

Tabla de coeficientes de los términos I_j .

x	Coeficiente		Coeficiente de			Coeficiente de				x
	I_1	I_2	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_4	
0.1	1.045	-0.045	1.06063	-0.06352	0.00734	1.06363	-0.08283	0.01579	-0.00159	0.9
0.2	1.030	-0.080	1.10830	-0.12320	0.01440	1.12360	-0.14984	0.02920	-0.00296	0.8
0.3	1.105	-0.105	1.14368	-0.16302	0.01934	1.16368	-0.19902	0.03934	-0.00400	0.7
0.4	1.120	-0.120	1.16430	-0.18720	0.02240	1.18810	-0.22914	0.04570	-0.00460	0.6
0.5	1.125	-0.125	1.17183	-0.19532	0.02344	1.19628	-0.23924	0.04784	-0.00488	0.5

La primera de estas tablas, da los valores de los coeficientes binomiales que intervienen en la fórmula de y_x . La 2ª tabla se usa en los casos en que el número de valores observados en torno del cual se quiere calcular el valor y_x es igual a

4, 6 ó 8, estando la mitad de estos valores (2, 3 ó 4 respectivamente) por debajo y por encima del valor buscado.

Solución

Volviendo a nuestro ejemplo, los valores comprendidos entre 0 y 1, tienen 3 valores por debajo y 4 valores por encima; de modo que para el cálculo descartaremos el valor superior (13077). Para el cálculo de los puntos en el intervalo 1 - 2 descartaremos el valor inferior (6162) para tener 3 valores a ambos lados de ese intervalo.

De esa manera los valores pedidos se calculan usando la siguiente tabla de cálculo:

x	I ₁	I ₂	I ₃	
0.8	8044.4	8189.4	8493.1	8033.0
0.6	8252.8	8398.8	8705.0	8235.6
0.4	8461.2	8608.2	8917.0	8443.9
0.2	8669.6	8817.6	9128.9	8658.0
0.8	9117.2	9285.6	9636.4	9103.9
0.6	9356.4	9527.2	9882.1	9336.2
0.4	9595.6	9768.8	10127.9	9575.1
0.2	9834.8	10010.4	10373.6	9820.9

En esta tabla puede verse que las etapas de cálculo son:

- cálculo de los valores I_j (valores de interpolación rectilínea, como veremos más adelante)
- cálculo de los valores Y_x usando los "multiplicadores" de la 2^a tabla.

Así por ejemplo el 1^{er} valor calculado se obtuvo:

$$\underline{1.10880}(8044.4) - \underline{0.12320}(8189.4) + \underline{0.01440}(8493.1) = \underline{8033.0}$$

e) REGRESIÓN DE "DIFERENCIAS DIVIDIDAS" (Δ).

En muchas ocasiones se dispone de los valores y_x de una función de la variable x para valores del argumento que no guardan ninguna relación entre sí (como ser datos observados a intervalos iguales de tiempo)

Si x_i y x_j son dos valores vecinos de \underline{x} , para los cuales la función $y_{\underline{x}}$ toma los valores y_i e y_j , entonces el cambio relativo de la función queda determinada por la expresión:

$$\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad (48)$$

y la operación se denota simbólicamente por Δ .

De esa manera, la operación "diferencia dividida" queda definida por la relación:

$$\Delta y = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad (49)$$

adoptando la notación propuesta por Aitken.

Nota

En el Capítulo 2, daremos las fórmulas y propiedades más importantes de este operador.

f) OPERADOR "FUNCIÓN GENERATRIZ" (G).

Si $y_{\underline{x}}$ es una cierta función de la variable \underline{x} , los valores de esta función para los diversos valores posibles de \underline{x} , forman una secuencia o serie de valores. Supongamos que el valor del argumento \underline{x} solamente puede adquirir valores enteros y positivos

$$x : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad n$$

y que los valores de la función $y_{\underline{x}}$ sean:

$$y_{\underline{x}} : y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad \dots \quad y_n$$

la función

$$G(t) = \sum y_{\underline{x}} t^{\underline{x}} \quad (50)$$

formada multiplicando cada término $y_{\underline{x}}$ por la potencia \underline{x} de cierta variable auxiliar t , y sumando todos estos posibles términos, recibe el nombre de "función generadora" de la secuencia de valores " $y_{\underline{x}}$ ". La búsqueda de la función generadora de la secuencia $y_{\underline{x}}$ se denota por el símbolo "G", quedando entonces:

$$Gy_{\underline{x}} = \sum y_{\underline{x}} t^{\underline{x}} \quad (51)$$

El uso de la función generatriz se debe a Laplace (1812) y significa un aporte importante al análisis.

Ej. 1 ¿Cuál es la función generatriz de la secuencia de números definidos por la relación $1/x!$?

Solución

De acuerdo a la definición:

$$g(t) = G \frac{1}{x!} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{x!} t^x \quad (52)$$

Derivando una vez esta relación se tiene:

$$Dg(t) = \sum \frac{t^{x-1}}{(x-1)!} = g(t)$$

lo que permite escribir:

$$\frac{Dg(t)}{g(t)} = 1$$

relación que puede integrarse directamente, con la condición que para $t=1$ la función generadora toma el valor "e", obteniéndose:

$$g(t) = e^t \quad (53)$$

Ej. 2 ¿Cuál es la función generadora de los números $1/x$?

Solución

De acuerdo a la definición de función generadora, se tiene:

$$g = G\left(\frac{1}{x}\right) = \sum \frac{t^x}{x} \quad (54)$$

derivando como antes, una sola vez, se encuentra:

$$Dg = \sum t^{x-1} = \frac{1}{1-t}$$

que puede integrarse directamente, con la condición que para $t=0$, la función generadora toma el valor 0, con lo cual la función generadora de los números $1/x$ es:

$$g = -\log(1-t) \quad (55)$$

Lej. 6. Si $g(t)$ es la función generadora de la secuencia de valores y_x demostrar que:

$$D^k g(t) = \sum x(x-1)\dots(x-k+1)y_x t^{x-k} \quad (56)$$

Demstración

De acuerdo a la definición de función generadora se puede escribir:

$$g(t) = \sum y_x t^x \quad (57)$$

derivando una primera vez, se tiene:

$$Dg(t) = \sum xy_x t^{x-1} \quad (58)$$

Volviendo a derivar se encuentra:

$$D^2 g(t) = \sum x(x-1)y_x t^{x-2} \quad (59)$$

y continuando esta operación hasta completar k derivaciones sucesivas en total, se tiene:

$$D^k g(t) = \sum x(x-1)\dots(x-k+1)y_x t^{x-k} \quad (60)$$

si esta relación la multiplicamos por t^k , se llega a la igualdad que se trataba de demostrar.

Lej. 7

Si en la ecuación 58 cambiamos (x) por $(x+1)$ se tiene:

$$Dg(t) = G(x+1)y_{x+1}$$

Si en la ecuación 59 cambiamos (x) por $(x+2)$ se obtiene:

$$D^2 g(t) = G(x+2)(x+1)y_{x+2}$$

estos resultados permiten encontrar la función generatriz $g(t)$ de la secuencia y_x , cuando no se conoce explícitamente la ley y_x , sino una relación de recurrencia entre valores sucesivos de la función.

Por ejemplo, para determinar la función generadora para la secuencia y_x que cumple la ley de recurrencia:

$$2(x+1)y_{x+1} = (2x+1)y_x \quad (61)$$

debemos aplicar a ambos miembros de la relación (61) el operador G, es decir

$$2G(x+1)y_{x+1} - 2Gxy_x - Gy_x = 0$$

y tomando en consideración la relación (60):

$$2Dg - 2tg - g = 0$$

lo que permite escribir:

$$Dg/g = 1/2(1-t)$$

que puede integrarse fácilmente, dando:

$$g(t) = C(1-t)^{-1/2}$$

quedando únicamente el cálculo de la constante de integración C, que debe ser forzadamente igual a y_0 .

g) OPERADOR Θ .

Este operador define la siguiente operación:

- cálculo de la derivada de una función
- multiplicación de esa derivada por la variable x.

En símbolos puede escribirse entonces:

$$\Theta \equiv xD \quad (62)$$

esta operación puede reiterarse k veces, dando origen a la siguiente fórmula de interés:

$$\Theta^k \equiv \sum_k^j x^j D^j \quad (63)$$

en la que los números Z_k^j reciben el nombre de "numeros de Stirling de 2ª clase". Este nombre se debe a Nielsen.

Es útil demostrar que es posible desarrollar θ^k en potencias de D^j para lo cual seguiremos el siguiente camino.

Aceptado que es posible el desarrollo, reiteramos la operación θ sobre θ^k con lo cual se obtiene:

$$\theta^{k+1} = \theta \cdot \theta^k = \sum Z_k^j xD(x^j D^j) = \sum Z_k^j (j x^j D^j + x^{j+1} D^{j+1})$$

relación que debe ser igual a:

$$\sum a_{k+1,j} x^j D^j$$

igualando los coeficientes de $x^j D^j$ tendremos:

$$a_{k+1,j} = a_{k,j-1} + j a_{k,j}$$

que es la relación que liga números de Stirling de 2ª clase y que permite -al igual que la relación entre los coeficientes binomiales- determinar el valor de estos números para valores diferentes de k y j .

Para facilitar la aplicación de la relación (63) se da una tabla de estos números para k y j variando desde 1 a 10. Para valores superiores (hasta 25) puede consultarse la Tabla XXII de "Tablas Estadísticas de R.A. Fisher - F. Yates. Ediciones Aguilar, Madrid."

Tabla.- Números de Stirling de 2ª clase Z_k^j

$k \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	954	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Ej. 1 Demostrar que el momento de orden k, respecto al origen, para la distribución f(x) está dado por la relación

$$\mu_k = \left[\Theta^k g(t) \right]_{t=1}$$

siendo g(t) la función generadora de la secuencia f(x).

Solución

La función generadora de los diversos valores de una función f(x) es por definición:

$$g(t) = \sum_0^{\infty} f(x)t^x$$

aplicando el operador Θ^k a ambos miembros de la relación se tiene:

$$\Theta^k g(t) = \sum_0^{\infty} f(x)(\Theta^k t^x)$$

quedando como problema fundamental determinar el valor de la expresión

$$\Theta^k t^x$$

La operación Θ sobre una potencia ejerce la misma acción que la derivada sencilla sobre e^{tx} , ya que se tiene:

$$D e^{tx} = t e^{tx}; \quad \Theta t^x = x t^x; \quad \Theta^k t^x = x^k t^x$$

de esa manera se llega a que:

$$\Theta^k g(t) = \sum_0^{\infty} x^k f(x) t^x \quad (64)$$

es decir que la operación Θ^k aplicada a la función generadora de la secuencia f(x), con la condición t=1, nos da el momento de orden k, respecto al origen para la distribución f(x).

Ej. 2 Determinar la expresión general del momento de orden k respecto del origen para la distribución binomial

$$p_x = C_x^n P^x Q^{n-x}$$

Solución

En base de la fórmula del ejemplo anterior, tenemos que determinar primeramente la función generadora de la secuencia p_x , la que es:

$$g(t) = \sum_x C_x^n P^x Q^{n-x} t^x = (Q+Pt)^n$$

aplicando el operador Θ^k tenemos:

$$\Theta^k (Q+Pt)^n = \sum_j Z_k^j t^j n(j) P^j (Q+Pt)^{n-j}$$

y haciendo $t=1$ llegamos finalmente a la relación pedida:

$$V_k = \sum_{j=1}^k Z_k^j n(j) P^j$$

1.3 Operadores aplicados a las formas elementales clásicas

El conocimiento de ciertas fórmulas de aplicación de los operadores recién indicados a las formas elementales clásicas, permite obtener el máximo de aprovechamiento posible de estos elementos simbólicos.

Por esa razón se indicarán las fórmulas básicas que deben saberse para que resulte cómodo y sencillo la deducción de fórmulas más avanzadas.

Fórmulas con el operador E.

Estas fórmulas son las siguientes:

- 1) $E (C y_x) = C E y_x$
- 2) $E (\sum y_x) = \sum (E y_x)$
- 3) $E (uv) = E u E v$
- 4) $E^k (uv) = E^k u E^k v$

que por la sencillez de su estructura no necesitan ser demostradas. (En la primera fórmula se entiende que el factor c es una constante).

Fórmulas con el operador Δ .

Estas fórmulas son las siguientes:

- 1) $\Delta (cy_x) = c \Delta y_x$
- 2) $\Delta (\sum y_x) = \sum (\Delta y_x)$
- 3) $\Delta (uv) = v \Delta u + \Delta v \cdot u = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v$
- 4) $\Delta^k (uv) = \sum C_i^k \Delta^i u \Delta^{k-i} v$
- 5) $\Delta (u_1 u_2 \dots u_k) = \sum p \frac{\Delta u_i}{u_i} + \sum \sum p \frac{\Delta u_i \Delta u_j}{u_i u_j} + \sum \sum \sum p \frac{\Delta u_i \Delta u_j \Delta u_k}{u_i u_j u_k}$

siendo $p = u_1 u_2 \dots u_k$

- 6) $\Delta a^x = a^x (a^h - 1); \quad \Delta^k a^x = a^x (a^h - 1)^k$
- 7) $\Delta x_{(n)} = n x_{(n-1)}; \quad \Delta^k x_{(n)} = n^{(k)} x_{(n-k)}$

siendo $x_{(n)} = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$

- 8) $\Delta x_{(n,h)} = h n x_{(n-1,h)}; \quad \Delta^k x_{(n,h)} = h^k n^{(k)} x_{(n-k,h)}$

siendo $x_{(n,h)} = x(x-h)(x-2h) \dots (x-nh+h)$

- 9) $\Delta C_n^x = C_{n-1}^x; \quad \Delta^k C_n^x = C_{n-k}^x$
- 10) $\Delta C_n^{-x} = -C_{n-1}^{-x-1}$

siendo $C_n^{-x} = (-1)^n C_n^{x+n-1}$

$$\Delta^k C_n^{-x} = (-1)^k C_{n-k}^{-x-k}$$

- 11) $\Delta^k \frac{1}{C_n^x} = \frac{(-1)^k}{(n+k) C_{n+k}^{x+k}}$

- 12) $\Delta e^{\frac{D}{h} x} = 1$

$$13) \quad \Delta^k = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{k}{j} D^j$$

$$14) \quad D^k = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{k!}{j!} S_j^k \Delta^j$$

Por tratarse de un juego más numeroso de fórmulas nos detendremos a demostrar algunas de ellas, ya que en general son de bastante uso.

Fórmula 3: Diferencia finita de un producto.

Se tiene que: $\Delta(uv) = (E-1)uv = Ev - uv$

Ahora bien, la operación $E(uv)$ es igual a $Eu Ev$, y si reemplazamos Ev por su equivalente $(\Delta-1)v$, se tiene:

$$\Delta(uv) = Eu Ev - uv = Eu (\Delta+1)v - uv$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= Eu \Delta v + v (Eu - u) \\ &= Eu \Delta v + v \Delta u \end{aligned}$$

En cuanto a la 2ª relación esta puede demostrarse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= (E-1)uv = E(uv) - uv = Eu Ev - uv \\ &= (\Delta+1)u (\Delta+1)v - uv \end{aligned}$$

y al efectuar el producto se elimina el término uv , quedando

$$\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v \quad (65)$$

Fórmula 4: Esta fórmula se la conoce como fórmula de Leibnitz, la que permite el cálculo de la diferencia de orden k del producto de 2 funciones, si se conocen las diferencias de cada una de las funciones del producto.

La demostración puede hacerse del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta^k(uv) &= (E-1)^k uv = E^k u E^k v - C_1^k E^{k-1} u E^{k-1} v + C_2^k E^{k-2} u E^{k-2} v \mp \dots \\ &= (u + C_1^k \Delta u + C_2^k \Delta^2 u + \dots) E^{k-1} v - C_1^k (u + C_1^{k-1} \Delta u + C_2^{k-1} \Delta^2 u + \dots) E^{k-1} v \\ &\quad + C_2^k (u + C_1^{k-2} \Delta u + C_2^{k-2} \Delta^2 u + \dots) E^{k-2} v \end{aligned}$$

expresión que puede escribirse bajo la forma:

$$\begin{aligned}
 \Delta^k(uv) &= (E^k u - C_1^k E^{k-1} v + C_2^k E^{k-2} v - \dots)u + C_1^k (E^k v - C_1^{k-1} E^{k-1} v + C_2^{k-1} E^{k-2} v - \dots)\Delta u \\
 &\quad + C_2^k (E^k v - C_1^{k-2} E^{k-1} v + C_2^{k-2} E^{k-2} v - \dots)\Delta^2 u \\
 &= u \cdot [(E-1)^k v] + C_1^k \Delta u \cdot [(E-1)^{k-1} E v] + C_2^k \Delta^2 u [(E-1)^{k-2} E^2 v] + \dots \\
 &= u (\Delta^k v) + C_1^k \Delta u (\Delta^{k-1} E v) + C_2^k \Delta^2 u (\Delta^{k-2} E^2 v) + \dots \quad (66)
 \end{aligned}$$

Fórmula 7: Diferencia finita de un producto de factores equidistantes.

Por definición se tiene que:

$$x_{(n)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{(n)} &= (x+1)_{(n)} - x_{(n)} \\
 &= (x+1)x(x-1)\dots(x-n+2) - x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)
 \end{aligned}$$

Esta diferencia tiene el factor común, de modo que:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{(n)} &= x(x-1)(x-2)\dots(x-n+2) [(x+1) - (x-n+1)] \\
 &= n x_{(n-1)} \quad (67)
 \end{aligned}$$

Al reiterar el proceso de diferenciación, tendremos:

$$\Delta^2 x_{(n)} = n \Delta x_{(n-1)} = n(n-1) x_{(n-2)} \quad (68)$$

y después de k veces de realizado el proceso, es fácil ver que de llegará a la fórmula 7.

Fórmula 9: Diferencia finita de los coeficientes binomiales.

Esta fórmula fluye inmediatamente de la anterior. Efectivamente:

$$C_n^x = \frac{x(n)}{n!}$$

de donde:

$$\Delta C_n^x = \frac{1}{n!} \Delta x(n) = \frac{n x(n-1)}{n!} = \frac{x(n-1)}{(n-1)!} = C_{n-1}^x \quad (69)$$

y de la misma manera:

$$\Delta^k C_n^x = \frac{1}{n!} \Delta^k x(n) = n(k) \frac{x(n-k)}{n!} = \frac{x(n-k)}{(n-k)!} = C_{n-k}^x \quad (70)$$

Fórmula 11: Diferenciación del recíproco de los coeficientes binomiales.

La demostración puede hacerse del modo siguiente:

$$\frac{1}{C_n^x} = \frac{n! (x-n)!}{x!} = \frac{n!}{x(n)}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{C_n^x} \right) &= n! \left[\frac{1}{(x+1)x(x-1)\dots(x-n+2)} - \frac{1}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)} \right] \\ &= n! \frac{(x-n+1)-(x+1)}{(x+1)(n+1)} = -\frac{n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x+1)(n+1)} = -\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{C_{n+1}^{x+1}} \quad (71) \end{aligned}$$

reiterando el proceso de diferenciación se tiene:

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{C_n^x} \right) = -\frac{n}{n+1} \Delta \frac{1}{C_{n+1}^{x+1}} = \left(-\frac{n}{n+1} \right) \left(-\frac{n+1}{n+2} \right) \frac{1}{C_{n+2}^{x+2}} = \frac{n}{n+2} \frac{1}{C_{n+2}^{x+2}} \quad (72)$$

lo que hace prever la fórmula correspondiente al proceso de diferenciar k veces el recíproco del coeficiente binomial.

Fórmula 12: Primera diferencia finita en función de las derivadas de la función.

De acuerdo a la fórmula de Taylor, se tiene:

$$y_{x+h} = y_x + \frac{h}{1!} D y_x + \frac{h^2}{2!} D^2 y_x + \frac{h^3}{3!} D^3 y_x + \dots$$

pero teniendo en cuenta el desarrollo

$$1^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

comparando estas dos relaciones, puede escribirse simbólicamente la primera en la forma: $e^{hD}(y_x)$ y como $y_{x+h} = E^h y_x$ entonces:

$$E^h y_x = e^{hD} y_x$$

de la cual se puede eliminar la función común y_x , a la cual se aplica ambas operaciones, lo que nos lleva a la relación:

$$E \equiv e^D \quad (73)$$

de la que se deduce:

$$\Delta \equiv e^{D-1} \quad (74)$$

Fórmula 13: Diferencia finita de orden k conociendo las derivadas de la función.

Esta fórmula resulta cómoda cuando se conoce la expresión analítica de la función y_x ; el proceso de cálculo de las diferencias finitas sucesivas es complicado por ser de difícil estructura la expresión analítica a la que se aplica el proceso.

En base a la fórmula 12, tenemos;

$$\Delta^k \equiv (e^D - 1)^k$$

expresión que es posible desarrollar en potencias de D, en la forma:

$$(e^D - 1) \equiv \sum_k^{\infty} a_{k,j} \frac{D^j}{j!}$$

con lo cual nuestro problema queda reducido a determinar los coeficientes $a_{k,j}$. Para la determinación de estos coeficientes derivamos una vez ambos miembros de la relación, lo que nos da:

$$k \left[(e^D - 1)^k + (e^D - 1)^{k-1} \right] = k \left(\sum_k^{\infty} a_{k,j} \frac{D^j}{j!} + \sum_{k-1}^{\infty} a_{k-1,j} \frac{D^j}{j!} \right) = \sum_k^{\infty} a_{k,j} \frac{D^{j-1}}{(j-1)!}$$

y que permite igualar los coeficientes de D^j en ambos miembros, originándose la relación:

$$k(a_{k,j} + a_{k-1,j}) = a_{k,j+1}$$

con lo cual, de manera bastante sencilla, es posible obtener esos coeficientes $a_{k,j}$.

Estos coeficientes se denominan "diferencias de las potencias (k) de cero" y se denotan por el símbolo $\Delta^k 0^j$ que para comodidad reduciremos a la forma O_j^k , para indicar que se trata del "número de manera de ocupar (k) lugares con (j) objetos, con permutación de estos lugares y sin dejar lugares vacíos". A fin de hacer cómodo el uso de estos números en las aplicaciones, se ha confeccionado una tabla de estos coeficientes para valores de (k) y (j) variando desde 1 a 10.

De esta manera en definitiva tendremos:

$$\Delta^k \equiv \sum_j^{\infty} O_j^k \frac{D^j}{j!} \quad (75)$$

Tabla.- Valores de los coeficientes O_j^k

$j \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	2								
3	1	6	6							
4	1	14	36	24						
5	1	30	150	240	120					
6	1	62	540	1560	1800	720				
7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040			
8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320		
9	1	510	18150	186840	834120	1905120	2328480	1451520	362880	
10	1	1022	55980	813520	510300	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

Ej. 1 Determinar la 2ª diferencia finita para la función $y_x = x^3$.

Solución

$$\Delta^2 x^3 = O_2^2 \frac{D^2}{2!} + O_3^2 \frac{D^3}{3!} x^3 = (D^2 + D^3)x^3 = 6x + 6$$

Ej. 2 Determinar el valor de la expresión:

$$\Delta^{10} (1-ax)(1-bx^2)(1-cx^3)(1-dx^4)$$

Solución

La diferencia finita de orden 10, exige el cálculo de las derivadas de la función aparte del orden 10. Como esta expresión es de orden 10 la diferencia pedida vale:

$$\Delta^{10}(abcdx^{10}) = \frac{0^{10}}{10} \frac{D^{10}}{10!} (abcdx^{10}) = D^{10}(abcdx^{10}) = abcd 10!$$

Ej. 3 Avaluar el valor de la expresión:

$$\Delta^n(ax^n + bx^{n-1})$$

Solución

Ya que deben calcularse las derivadas de orden n y superior, el 2º término no participa en nuestros cálculos, teniéndose por lo tanto:

$$\Delta^n(ax^n + bx^{n-1}) = \Delta^n(ax^n) = a \Delta^n x^n = a D^n! x^n = an!$$

Fórmula 14: Derivada de orden (k) en función de las diferencias finitas.

En múltiples ocasiones, para una serie de observaciones no es posible conocer la forma analítica exacta, pero las observaciones en sí, permiten calcular las diferencias finitas de la función observada. En ese caso puede interesar el cálculo de los valores de las derivadas de la serie empírica en los puntos observados o en otros lugares, lo que se consigue a través del uso de esta fórmula general.

Para demostrar esta fórmula, debemos notar que:

$$1 + \Delta \equiv e^D$$

de lo que se deduce:

$$D \equiv \log(1 + \Delta)$$

de donde la derivada de orden k vale:

$$D^k \equiv [\log(1 + \Delta)]^k$$

expresión que puede desarrollarse en potencias de Δ , en la forma:

$$[\log(1 + \Delta)]^k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} \frac{\Delta^j}{j!}$$

El problema se reduce ahora a la determinación de estos coeficientes $a_{k,j}$, lo que puede hacerse de la manera siguiente:

derivamos ambos miembros de la expresión, lo que nos da:

$$k \left[\log(1+\Delta) \right]^{k-1} = (1+\Delta) \sum_1 a_{k,j} \frac{\Delta^{j-1}}{j-1} = k \sum a_{k-1,j} \frac{\Delta^j}{j!}$$

y si igualamos los coeficientes de la potencia j de Δ , se encuentra:

$$a_{k,j+1} + j a_{k,j} = k a_{k-1,j}$$

relación que nos permite evaluar los coeficientes $a_{k,j}$, para valores variables de k y j . A fin de evitar la confección de una tabla con números que crecen muy rápidamente, conviene introducir otra suerte de coeficientes, que están relacionados de la siguiente manera:

$$S_k^{j+1} = S_{k-1}^j - j S_k^j$$

relación obtenida de la anterior previa división de ambos miembros por $k!$. Estos coeficientes $S_k^j = a_{k,j}/k!$ reciben el nombre de "números de Stirling de 1ª clase" y juegan un papel bastante importante en los desarrollos en serie.

En definitiva tenemos la relación:

$$D^k \equiv \sum_k^{\infty} k! S_k^j \cdot \frac{\Delta^j}{j!} \quad (76)$$

que para facilidad de aplicación se han calculado los números S_k^j para valores de k y j variando desde 1 a 10.

Tabla.- Números de Stirling 1ª clase S_k^j

$j \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	-1	1								
3	2	-3	1							
4	-6	11	-6	1						
5	24	-50	35	-10	1					
6	-120	274	-225	85	-15	1				
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1			
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1		
9	-40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1	
10	362880	1026576	-1172700	723680	-269325	63273	-9450	870	-45	1

resultando así para las 3 primeras derivadas:

$$\begin{aligned}
 D &\equiv \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \\
 D^2 &\equiv \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \frac{5}{6} \Delta^5 + \dots \\
 D^3 &\equiv \Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta^4 + \frac{7}{4} \Delta^5 - \dots
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

Ej. 1 Encontrar una expresión general para la derivada de orden k de los coeficientes binomiales C_n^x .

Demostración

El problema fundamental es desarrollar los factoriales en serie de potencias de x, ya que este elemento es fácil de derivar. Para ello escribamos:

$$x_{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{n,j} x^j$$

si multiplicamos por x ambos miembros se tiene:

$$x_{(n+1)} + n x_{(n)} = \sum a_{n,j} x^{j+1}$$

y aceptando cierto y posible el desarrollo de los factoriales, tenemos después de igualar los coeficientes de la potencia x^j de ambos miembros:

$$a_{n+1,j} + n a_{n,j} = a_{n,j-1}$$

relación que corresponde a la de los "números de Stirling de 1ª clase".

De esa manera tenemos:

$$x_{(n)} = \sum_{j=1}^n S_j^n x^j$$

relación que dividida por n! nos da el coeficiente binomial C_n^x .

De allí se deduce que la derivada de orden (k) de los coeficientes binomiales es igual a:

$$D^k C_n^x = \frac{1}{n!} \sum_{j=k}^n S_j^n j(j-1)\dots(j-k+1) x^{j-k} \tag{78}$$

Nota

De la relación anterior puede deducirse la integral de los coeficientes binomiales:

$$\int C_n^x d_x = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n+1} S_j^n \frac{x^{j+1}}{j+1} + k \quad (79)$$

Ej. 2 Si por definición la fuerza de mortalidad es $\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{d_x}$, siendo l_x el número de sobrevivientes en el x^{avo} cumpleaños, determinar el valor μ_{50} dada la siguiente información:

Edad x	50	51	52	53
x	73499	72724	71753	70599

Solución

En base de esta información se tiene:

x	l_x	$\Delta^1 l_x$	$\Delta^2 l_x$	$\Delta^3 l_x$
50	73499			
51	72724	- 775		
52	71753	- 971	-196	
53	70599	-1154	-183	13

de donde:

$$Dl_x = \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} \right) l_x$$

$$= -775 + 98 + 4.33 = - 672.67$$

$$\mu_{50} = \frac{672.67}{73499} = 0.00915$$

Ej. 3 Demostrar que la tercera derivada de una función de x, está dada aproximadamente por la tercera diferencia en el punto $(x-3/2)$.

Demostración

En símbolos se debe demostrar que, aproximadamente, se tiene:

$$D^3 y_x = \Delta^3 y_{x-3/2}$$

De acuerdo con la fórmula 14 tenemos:

$$D^3 = \Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta^4 + \frac{7}{4} \Delta^5 - \frac{15}{8} \Delta^6 + \frac{29}{16} \Delta^7 + \dots$$

Esta relación la podemos comparar con el desarrollo siguiente:

$$\Delta^3 e^{-3/2} = \Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta^4 + \frac{15}{8} \Delta^5 - \frac{35}{16} \Delta^6 + \frac{315}{128} \Delta^7 + \dots$$

lo que permite ver que ambas expresiones son muy parecidas, lo que viene a demostrar la proposición.

Ej. 4 Si se define el siguiente operador "f" de subdivisión de intervalos a través de la relación:

$$E \equiv (1 + f)^m \quad (80)$$

demostrar que se tiene:

$$f^k \equiv \frac{k!}{m^k} \sum_{j=k}^{\infty} P_{k,j} \frac{\Delta^j}{j!} \quad (81)$$

on que los coeficientes $P_{k,j}$ cumplen con la ley de recurrencia:

$$P_{k,j} = P_{k-1,j-1} + \left[k(w+1) - j + 1 \right] P_{k,j-1} \quad (82)$$

$$\text{siendo } w = \frac{1}{m} - 1$$

Demostración:

De acuerdo a la definición del operador "f" podemos escribir:

$$f \equiv E^{\frac{1}{m}} - 1$$

y teniendo en consideración que:

$$E = e^D$$

entonces:

$$f^k \equiv (e^{\frac{D}{m}} - 1)^k = \frac{k!}{m^k} \sum_{j=k}^{\infty} Z_j^k \frac{D^j}{j!}$$

siendo Z_j^k los números de Stirling, de 2ª clase.

Ahora bien, las derivadas las podemos expresar en función de las diferencias finitas a través de la relación (fórmula 14):

$$D^j = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{j!}{i!} S_i^j \Delta^i$$

con todo lo cual se tiene, luego de reemplazar:

$$c^{(k)} = \frac{k!}{m^k} \sum_{j=k}^{\infty} P_{k,j} \frac{\Delta^j}{j!}$$

siendo:

$$P_{k,j} = \sum_{j=k}^{k+j} Z_j^k S_{k+j}^j \frac{1}{m^{j-k}}$$

Podemos encontrar la ley de recurrencia de estos coeficientes usando las leyes de recurrencia entre los números de Stirling de 1ª y 2ª clase:

$$S_n^m = S_{n-1}^{m-1} - (n-1) S_{n-1}^m \quad (83)$$

$$Z_n^m = Z_{n-1}^{m-1} + m Z_{n-1}^m \quad (84)$$

con lo cual se tendrá la ley de recurrencia:

$$P_{k,j} = P_{k-1,j-1} + [k(w+1)-j+1] P_{k,j-1} \quad (85)$$

siendo:

$$w = \frac{1}{m} - 1$$

Este operador " δ " de subdivisión de intervalos es de bastante uso en problemas de ajuste (o de suavizamiento) o de búsqueda de valores intermedios, dándose valores (pivotaes) igualmente distanciados en varias unidades. (Es corriente determinar valores distanciados en 5 unidades o tal vez en 10 y después se desea determinar los valores intermedios).

Como por ejemplo: Dada la serie de valores

Edad x:	45	50	55	60	65
y _x :	2.871	2.404	2.083	1.862	1.712

se pide determinar los valores de y_x para $x=46, 47, 48$ y 49 años.

En este caso resulta muy cómodo calcular las diferencias " $\delta, \delta^2, \delta^3, \delta^4$ " en función de las diferencias $\Delta, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$, de los valores observados.

Por esta razón es sumamente útil tener a disposición una tabla de los coeficientes $P_{k,j}$ para cualquier valor de "m", la que se da a continuación:

Tabla.- Valores de $P_{k,j}$

$j \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1				
2	w	1			
3	$w(1)$	$3w$	1		
4	$w(2)$	$w(7w-4)$	$6w$	1	
5	$w(3)$	$w(1)(15w-10)$	$w(25w-10)$	$10w$	1

la que se complementa con una tabla para $m=5$ que es un caso bastante corriente.

$j \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1				
2	$-4/5$	1			
3	$36/25$	$-12/5$	1		
4	$-504/125$	$192/25$	$-24/5$	1	
5	$9576/625$	$-792/25$	24	-3	1

de modo que para la subdivisión de intervalos con datos originales (o pivotaes) espaciados igualmente en 5 unidades, los diversos valores de las diferencias finitas $\delta, \delta^2, \delta^3, \delta^4$, serán:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{\infty} P_{1,j} \frac{\Delta^j}{j!} = \frac{1}{5} \left(P_{1,1} \frac{\Delta}{1!} + P_{1,2} \frac{\Delta^2}{2!} + P_{1,3} \frac{\Delta^3}{3!} + P_{1,4} \frac{\Delta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \frac{\Delta}{5} - 2 \frac{\Delta^2}{5^2} + 6 \frac{\Delta^3}{5^3} - 21 \frac{\Delta^4}{5^4} + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} f^2 &\equiv \frac{2!}{5^2} \sum_2^{\infty} P_{2,j} \frac{\Delta^j}{j!} = \frac{\Delta!}{5^2} \frac{\Delta^2}{2!} - \frac{12}{5} \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{192}{25} \frac{\Delta^4}{4!} - \frac{792}{25} \frac{\Delta^5}{5!} + \dots \\ &= \frac{\Delta^2}{5^2} - 4 \frac{\Delta^3}{5^3} + 16 \frac{\Delta^4}{5^4} - 66 \frac{\Delta^5}{5^5} + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

de la misma manera:

$$f^3 \equiv \frac{\Delta^3}{5^3} - 6 \frac{\Delta^4}{5^4} + 30 \frac{\Delta^5}{5^5} + \dots \quad (38)$$

$$f^4 \equiv \frac{\Delta^4}{5^4} - 8 \frac{\Delta^5}{5^5} + \dots \quad (39)$$

Aplicando estas relaciones para el ejemplo numérico dado más arriba se tiene:

$$\Delta_0 = -0.467 \quad \Delta_0^2 = 0.146 \quad \Delta_0^3 = -0.046 \quad \Delta_0^4 = 0.017$$

de donde:

$$f_0 = -0.10736 \quad f_0^2 = 0.007747 \quad f_0^3 = -0.0005312 \quad f_0^4 = 0.0000272$$

Ej. 1 Dado los valores $y_0 = 0$; $y_{10} = 174$; $y_{20} = 347$; $y_{30} = 513$. Determinar los valores intermedios entre y_0 e y_{10} .

Solución

$$m = 10; \quad w = 9/10$$

con lo cual:

$$f = \frac{1}{10} \left(\frac{\Delta}{1!} - \frac{9}{10} \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{171}{100} \frac{\Delta^3}{3!} \right) = 17.42$$

$$f^2 = \frac{2!}{10^2} \frac{\Delta^2}{2!} - \frac{27}{10} \frac{\Delta^3}{3!} = -\frac{2}{100} \times 0.05 = -\underline{0.001} \text{ (despreciable)}$$

es decir los valores son:

f	25	35	45	55	65	75	85	95
17,42	34.94	52.26	69.58	87.10	104.52	121.94	139.36	156.78

Ej. 2 Dado los valores $Y_0 = 23.1234$; $Y_6 = 23.7234$; $Y_{12} = 24.6834$; $Y_{18} = 26.1330$.
 Determinar los valores intermedios entre Y_0 e Y_6 .

Solución

$$m = 6$$

$$w = -5/6$$

con lo cual:

y	Δ	Δ^2	Δ^3
23.1234			
23.7234	0.60000		
24.6834	0.9600	0.3600	
26.1330	1.4496	0.4896	0.1296

$$f = \frac{1}{6} \frac{\Delta}{1!} - \frac{5}{6} \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{55}{36} \frac{\Delta^3}{3!} = \frac{0.4830}{6} = \underline{0.0805}$$

$$f^2 = \frac{2!}{6^2} \frac{\Delta^2}{2!} - \frac{5}{2} \frac{\Delta^3}{3!} = \frac{0.2520}{36} = \underline{0.0070}$$

$$f^3 = \frac{3!}{6^3} \frac{\Delta^3}{3!} = \frac{0.1296}{216} = \underline{0.0006}$$

k	23.1234			
1	23.2039	0.0805		
2	23.2914	0.0875	0.0070	
3	23.3865	0.0951	0.0076	0.0006
4	23.4898	0.1033	0.0082	0.0006
5	23.6019	0.1121	0.0088	0.0006
	23.7234	0.145	0.0094	0.0006

o bien:

$$y_k = 23.1234 + c_1^k 0.0805 + c_2^k 0.0070 + c_3^k 0.0006$$

Fórmulas con el operador M.

Las fórmulas de mayor utilidad son las siguientes:

$$1) \quad M(cy_x) = c My_x$$

$$2) \quad M(\sum y_x) = \sum My_x$$

$$3) \quad M(uv) = uv - vMu + Eu Mv$$

$$4) \quad M^k(uv) = \sum \frac{1}{2^j} C_j^k \Delta^j u E^j M^{k-j} v$$

$$5) \quad E a^x = \frac{a^x}{2} (a^h + 1)$$

$$6) \quad M x_{(n)} = (x+1 - \frac{n}{2}) x_{(n-1)}$$

$$7) \quad M C_n^x = \frac{2x+2-n}{n} C_{n-1}^x$$

$$8) \quad M C_x^n = \frac{1}{2} C_{x+1}^{n+1}; \quad M^k C_x^n = \frac{1}{2^k} C_{x+k}^{n+k}$$

de las que demostraremos:

Fórmula 3: Media de un producto (uv)

Se tiene que:

$$\begin{aligned} M(uv) &= \frac{1}{2} (1+E)uv = \frac{uv}{2} + \frac{Eu Ev}{2} \\ &= \frac{uv}{2} + Eu(M - \frac{1}{2})v = \frac{uv}{2} - \frac{v Eu}{2} + Eu Mv \\ &= \frac{uv}{2} - v(M - \frac{1}{2})u + Eu Mv \end{aligned}$$

$$\therefore M(uv) = uv - v Mu + Eu Mv \quad (90)$$

Fórmula 4: Media de orden k del producto (uv).

El problema fundamental es determinar la forma mas cómoda para $M(uv)$. Esta forma es la siguiente:

$$M(uv) = \frac{1+E}{2} uv = \frac{uv}{2} + \frac{Eu Ev}{2} = \frac{uv}{2} + \frac{(1+\Delta)^u}{2} Ev$$

$$= \left(\frac{uv}{2} + \frac{u Ev}{2} \right) + \frac{\Delta u Ev}{2} = u Mv + \frac{\Delta u Ev}{2}$$

De allí puede deducirse la forma de $M^2(uv)$, aplicando el operador (M) a la media de (uv). En efecto:

$$M^2(uv) = M(Muv) = M(u Mv) + M\left(\frac{\Delta u Ev}{2}\right)$$

Los valores medios de cada uno de los sumandos pueden obtenerse de la expresión anterior

$$M(u Mv) = u M^2v + \frac{\Delta u E(Mv)}{2}$$

$$M \frac{\Delta u Ev}{2} = \frac{\Delta u M(Ev)}{2} + \frac{\Delta^2 u \cdot E^2v}{4}$$

con lo cual:

$$M^2(uv) = u M^2v + 2 \frac{\Delta u EMv}{2} + \frac{\Delta^2 u E^2v}{2^2}$$

Reiterando el operador (M) se tiene:

$$M^3(uv) = u(M^3v) + 3 \frac{\Delta u EM^2v}{2} + 3 \frac{\Delta^2 u E^2Mv}{2^2} + \frac{\Delta^3 u E^3v}{2^3}$$

expresión que puede generalizarse fácilmente, ya que los coeficientes numéricos son precisamente los coeficientes binomiales, de donde:

$$M^k(uv) = u M^k(v) + C_1^k \cdot \frac{\Delta u EM^{k-1}v}{2} + C_2^k \frac{\Delta^2 u E^2M^{k-2}v}{2^2} + \dots + \frac{\Delta^k u E^k v}{2^k}$$

Esta fórmula permite determinar el valor de $M^k(uv)$ si se conocen las medias de orden inferior.

Fórmula 8: Valor medio de orden k de los coeficientes binomiales.

Por definición se tiene:

$$M \binom{n}{x} = \frac{1}{2} (\binom{n}{x+1} + \binom{n}{x})$$

lo que puede reducirse a:

$$M \binom{n}{x} = \frac{1}{2} \frac{n!}{(x+1)!(n-x)!} (n-x)+(x+1) = \frac{1}{2} \frac{(n+1)!}{(x+1)!(n-x)!} = \frac{1}{2} \binom{n+1}{x+1} \quad (92)$$

reiterando el proceso de la media hasta llegar a la media de orden k se tiene la fórmula dada.

Fórmulas con el operador G .

Las fórmulas de mayor utilidad son las siguientes:

- 1) $G (c y_x) = c G y_x$
- 2) $G (\Sigma y_x) = \Sigma G y_x$
- 3) $G y_{x+1} = \left[\bar{g}(t) - y_0 \right] / t$
- 4) $G (\Delta y_x) = \left[(1-t) \bar{g}(t) - y_0 \right] / t$
- 5) $G (E^k y_x) = \left[\bar{g}(t) - \sum_0^{k-1} y_j t^j \right] / t^k$
- 6) $G \binom{n}{x} = (1+t)^n$
- 7) $G \binom{x}{n} = t^n / (1-t)^{n+1}$

$$8) \quad G \ x_{(k)} y_x = t^k D^k g(t)$$

$$9) \quad G \ (x+1)y_{x+1} = D g(t)$$

$$10) \quad G(x+2)(x+1)y_{x+2} = D^2 g(t)$$

De estas fórmulas, la fórmula (8) ya fué demostrada al presentar el operador G , y las fórmulas (9) y (10) son casos especiales de (7)

Nos ocuparemos entonces de las fórmulas restantes:

Fórmula 4: Función generadora de las primeras diferencias de una función y_x .

Se tiene que:

$$G(\Delta y_x) = G(E-1)y_x = G y_{x+1} - G y_x$$

y en base a la fórmula 3, se llega a que:

$$G(\Delta y_x) = \left[\frac{g(t) - y_0}{t} \right] - g(t) \quad (93)$$

que corresponde a la fórmula propuesta.

Fórmula 5: Función generadora de $E^k y_x$.

La función generatriz puede escribirse en la forma:

$$g(t) = \sum_0^{k-1} y_j t^j + G y_{x+k}$$

y dado a que $y_{x+k} = E^k y_x$, es fácil ver entonces que ello corresponde a la fórmula propuesta.

1.4 Operaciones inversas con el operador Δ .

Al igual que sucede en el cálculo diferencial y el cálculo integral, las operaciones Δ y M pueden realizarse en sentido inverso, es decir, puede determinarse la función y_x de x cuya primera diferencia es una forma dada v_x . Esto, como se anotó mas arriba, es semejante al caso de buscar la integral de una función de x .

De acuerdo a la definición de diferencia finita se tiene:

$$\Delta y_x = y_{x+h} - y_x \quad (94)$$

si a esta diferencia la denominamos v_x , entonces en un intervalo de variación $(a, a+nh)$ se tendrán las relaciones:

$$\begin{aligned} y_{a+h} - y_a &= \Delta y_a = v_a \\ y_{a+2h} - y_{a+h} &= \Delta y_{a+h} = v_{a+h} \end{aligned} \quad (95)$$

$$y_{a+(n+1)h} - y_{a+nh} = \Delta y_{a+nh} = v_{a+nh}$$

y sumando miembro a miembro estas diferencias se obtendrá:

$$\sum_a^{a+nh} v_x = y_{a+(n+1)h} - y_a \quad (96)$$

relación que expresa que la suma de n términos de la serie v_x , es igual a la diferencia de los valores $y_{a+(n+1)h}$ e y_a de la función inversa y_x (en el sentido de diferencia finita).

Esta relación nos permite por lo tanto determinar la suma de n términos de una serie cuyo término general es de la forma v_x , si se conoce la función inversa de v_x . De esta manera aparece la operación Δ^{-1} y para el caso recién indicado se tendrá:

$$\Delta^{-1} v_x = y_x \quad (97)$$

$$\sum_{\bar{a}}^{a+nh} v_x = \Delta^{-1}(v_{x+(n+1)h} - v_a) \quad (93)$$

Debe advertirse que los operadores Δ y Δ^{-1} no son conmutativos, es decir, del orden en que se realicen las operaciones depende el resultado final. Por lo tanto, la operación $\Delta \Delta^{-1}$ no conduce al mismo resultado que la operación $\Delta^{-1} \Delta$. Siempre se tendrá que $\Delta \Delta^{-1} = 1$ en cambio $\Delta^{-1} \Delta$ será en general diferente de 1.

Fórmulas de uso más frecuente con el operador Δ^{-1} .

Estas fórmulas son las siguientes:

- 1) $\Delta^{-1} c = \frac{c}{h} x + k$
- 2) $\Delta^{-1} x_{(n,h)} = \frac{x_{(n+1,h)}}{h(n+1)} + k$
- 3) $\Delta^{-1} c_n^x = \frac{1}{h} c_{n+1}^x + k$
- 4) $\Delta^{-1} a^x = \frac{a^x}{a^{h-1}} + k$
- 5) $\Delta^{-1} x a^x = \frac{x a^x}{a^h - 1} - \frac{h a^{h+h}}{(a^h - 1)^2} + k$
- 6) $\Delta^{-1} (-1) c_x^n = (-1)^{x+1} c_{x-1}^{n-1} + k$
- 7) $\Delta^{-1} (-1)^x a^x = (-1)^{x+1} \frac{a^x}{a+1} + k$
- 8) $\Delta^{-1} \frac{1}{(x+nh)_{(n,h)}} = - \frac{1}{h(n-1)(x+nh-h)_{(n-1,h)}} + k$
- 9) $\sum_{\bar{a}}^{n-1} y_x = \sum_{\bar{a}}^{\infty} c_j^n \Delta^{j-1} y_0$

$$10) \quad \Delta^{-1} x^k = \sum_{j=1}^k z_k^j \frac{x(j+1)}{j+1} + k$$

$$11) \quad \Delta^{-1}(u \Delta v) = uv - \Delta^{-1}(Ev \Delta u)$$

$$12) \quad \Delta^{-1}(u \Delta v) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \Delta^{-1}(\Delta^{-1} E^{j-1} v) \Delta^{j-1} u$$

De estas fórmulas demostraremos las fórmulas 9, 10, 11 y 12.

Fórmula 9: Suma de n términos de una serie cuyo término general es y_x .

De acuerdo a la fórmula (71) se tiene:

$$\sum_0^{n-1} y_x = \Delta^{-1}(y_n - y_0)$$

quedando reducido entonces el problema a expresar y_n en función de y_0 y las diferencias finitas guías: Δy_0 ; $\Delta^2 y_0$; $\Delta^3 y_0$; ...

Se sabe además que:

$$y_x = E^x y_0 = y_0 + C_1^x \Delta y_0 + C_2^x \Delta^2 y_0 + \dots$$

con lo cual tenemos:

$$\Delta^{-1} y_x = C_1^x y_0 + C_2^x \Delta y_0 + C_3^x \Delta^2 y_0 + \dots$$

y haciendo un reemplazo en el segundo miembro de la suma:

$$\sum_0^{n-1} y_x = C_1^n y_0 + C_2^n \Delta y_0 + C_3^n \Delta^2 y_0 + \dots \quad (99)$$

con lo cual queda demostrada la fórmula.

Ej. Determinar la suma de los cubos de los (n) primeros números de la serie natural de números enteros.

Solución

El problema es evaluar la suma: $S_3 = \sum_0^{n-1} (x+1)^3$

En este caso $k=3$, necesitándose entonces determinar las 3 primeras diferencias finitas de la función.

$$y_x = (x+1)^3$$

Las diferencias finitas son:

$$\Delta y_x = 3x^2 + 9x + 7$$

$$\Delta^2 y_x = 6x + 12$$

$$\Delta^3 y_x = 6$$

con lo cual las diferencias guías toman los valores:

$$\Delta y_0 = 7; \quad \Delta^2 y_0 = 12; \quad \Delta^3 y_0 = 6$$

lo que permite escribir:

$$S_3 = C_1^n + 7 C_2^n + 12 C_3^n + 6 C_4^n$$

expresión que se reduce finalmente a:

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

es decir: la suma de los cubos de los (n) primeros números de la serie natural de números, es igual al cuadrado de la suma de estos números.

Fórmula 10: Expresión que da la suma de las potencias (k) de los (n) primeros números de la serie natural en función de factoriales.

El problema fundamental es expresar la función $y_x = x^n$ en función de factoriales bajo la forma:

$$x^n = a_{n,1} x(1) + a_{n,2} x(2) + a_{n,3} x(3) + \dots$$

En esta expresión ahora es necesario determinar la ley que rige la formación

de estos números $a_{n,j}$, de la misma manera como se hace con los coeficientes binomiales.

Para este objeto multiplicamos ambos miembros por x , notando que:

$$x x_{(j)} = x_{(j+1)} + j x_{(j)}$$

con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= a_{n,1} [x_{(1)} + x_{(2)}] + a_{n,2} [2 x_{(2)} + x_{(3)}] + a_{n,3} [3 x_{(3)} + x_{(4)}] + \dots \\ &= a_{n+1,1} x_{(1)} + a_{n+1,2} x_{(2)} + a_{n+1,3} x_{(3)} + \dots \end{aligned}$$

En esta expresión podemos igualar los coeficientes de $x_{(j)}$, lo que lleva a la relación:

$$a_{n,j-1} + j a_{n,j} = a_{n+1,j}$$

la que nos permite determinar de manera bastante sencilla el valor de estos coeficientes para valores variables de (n) y (j) . Estos coeficientes reciben el nombre de "números de Stirling de 2ª clase" y los denotaremos por Z_n^j .

De allí que la suma es equivalente a:

$$\Delta^{-1} x^k = \sum_k Z_k^j \Delta^{-1} x_{(j)} + k$$

y realizando la operación $\Delta^{-1} x_{(j)}$ se llega a:

$$\sum_1^n x^k = \sum_1^n Z_k^j \cdot \frac{(n+1)(j+1)}{j+1} \quad (100)$$

Para facilidad de aplicación de los números Z_k^j de Stirling de 2ª clase, consúltese la tabla de esos números para (n) y (j) variable desde 1 a 10, dada en pag. 43, cuando se pasó el operador θ .

Ej. 1 Calcular la suma de los cuadrados de los (n) primeros números.

Solución

Se tiene:

$$\sum_{1}^n x^2 = \frac{(n+1)(2)}{2} z_2^1 + \frac{(n+1)(3)}{3} z_2^2 =$$
$$= \frac{(n+1)^n}{2} + \frac{(n+1) n(n-1)}{3} = n(n+1)(2n+1)/6$$

Ej. 2 El mismo de antes: Cálculo de la suma de los (n) primeros cubos de los números de la serie natural.

Solución

Se tiene:

$$\sum_{1}^n x^3 = \frac{(n+1)2}{2} z_3^1 + \frac{(n+1)3}{3} z_3^2 + \frac{(n+1)4}{4} z_3^3$$
$$= \frac{(n+1)n(1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)(3)}{3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(1)}{4} =$$
$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Fórmula 12: De la suma reiterada por partes.

Se sabe que:

$$\Delta uv = u \Delta v + Ev \Delta u$$

o sea:

$$u \Delta v = \Delta(uv) - Ev \Delta u \quad (101)$$

y aplicando el operador Δ^{-1} a ambos miembros se tendrá:

$$\Delta^{-1}(u \Delta v) = uv - \Delta^{-1}(Ev \Delta u) \quad (102)$$

Esta relación la aplicamos al término $(Ev \Delta u)$, obteniéndose:

$$\Delta^{-1}(Ev \Delta u) = \Delta u \Delta^{-1}(Ev) - \Delta^{-1}(\Delta^{-1} E^2 v \Delta^2 u) \quad (103)$$

valor que sustituimos en la relación (73) llegando a:

$$\Delta^{-1}(u\Delta v) = uv - \Delta^{-1}(Ev)\Delta u + \Delta^{-1}(\Delta^{-1}E^2v\Delta^2u) \quad (104)$$

De la misma manera aplicando la fórmula (73) al término $(\Delta^{-1}E^2v\Delta^2u)$ se tendrá:

$$\Delta^{-1}(E^2v\Delta^2u) = \Delta^2u \cdot \Delta^{-1}(\Delta^{-1}E^2v) - \Delta^{-1}(\Delta^{-1}E^3v\Delta^3u) \quad (105)$$

y haciendo la sustitución en la relación (75) se tiene:

$$\Delta^{-1}(u\Delta v) = uv - \Delta^{-1}(Ev)\Delta u + \Delta^{-1}(\Delta^{-1}E^2v)\Delta^2u - \Delta^{-1}(\Delta^{-1}E^3v\Delta^3u) \quad (106)$$

con lo cual ya puede verse la ley de formación, la que corresponde a la dada en la fórmula (7).

Ej. 1 Demostrar que la suma de la serie:

$$C_2^x 2^{-x} + C_3^{x+1} 2^{-x-1} + \dots + C_{n+2}^{x+n} 2^{-x-n} + \dots$$

es igual a

$$2 - (1+x)/2^{x-1}$$

Solución

Observando la relación (77) podemos ver que si hacemos los cambios: $u = 2^{-x}$;

$v = x$ se obtienen los respectivos términos de la serie que deseamos sumar.

La suma la obtenemos en base de la fórmula:

$$\Delta^{-1}(x a^x) = \frac{x a^x}{a^h - 1} - \frac{h a^{x+h}}{(a^h - 1)^2} + k$$

haciendo los cambios:

$$a=1/2; \quad h=1$$

y determinándose la constante k con la condición que para $x = 0$ debe tenerse que la suma vale 2. En definitiva la suma pedida vale:

$$2 - (1+x)2^{1-x}$$

Ej. 2 Determinación de la solución particular para la ecuación

$$a_n y_{x+n} + \dots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = f(x)$$

en el caso general.

Solución

La ecuación de condición puede escribirse abreviadamente de la manera:

$$\psi(E) y_x = f(x)$$

y la solución particular por lo tanto es:

$$u = \frac{1}{\psi(E)} f(x) \quad (107)$$

El denominador puede descomponerse en factores en la forma:

$$\frac{1}{\psi(E)} = \frac{b_1}{E-r_1} + \frac{b_2}{E-r_2} + \dots + \frac{b_n}{E-r_n} \quad (108)$$

siendo:

$$b_j = \left| \frac{1}{D \psi(r)} \right|_{r=r_j} \quad (109)$$

ya que:

$$(E-a) \left[a^{x-1} F(x) \right] = a^x \Delta F(x) \quad (110)$$

cambiando $a^x \Delta F(x)$ por $f(x)$ se tendrá en esta relación:

$$(E-a) \left[a^{x-1} \Delta^{-1} a^{-x} f(x) \right] = f(x)$$

o sea que:

$$\frac{1}{E-a} f(x) = a^{x-1} \Delta^{-1} \left[a^{-x} f(x) \right]$$

con lo cual la solución particular es igual a:

$$u = b_1 r_1^{x-1} \Delta^{-1} \left[r_1^{-x} f(x) \right] + \dots + b_n r_n^{x-1} \Delta^{-1} \left[r_n^{-x} f(x) \right] \quad (111)$$

y siempre y cuando que "r" no sea una raíz de la ecuación: $\zeta(r) = 0$.

Nota

Para una mayor profundización del tema "Ecuaciones de diferencias finitas" puede consultarse la obra de Jordan en el Capítulo XI. Los ejemplos que aquí se han analizado se han dado únicamente para indicar cómo se pueden aprovechar los operadores para resolver este u otros asuntos en el campo de las diferencias finitas.

CAPÍTULO I
OPERADORES LINEALES

(Apuntes de clase del Prof. Albino Rocaz)

LISTA DE ERRATAS

Página nº	Línea nº	Dice:	Debe decir:
3	2	únicamente	unívocamente
4	6	$y_x = ar^x$	$y_x = cr^x$
5	14	r_{1i}	r_1 ;
5	17	$\frac{1}{i! c^i} (r_1 + i!)^x - c_1^i (r_1 + i! - c)^x$ $+ \dots + (-1)^i r_1^x$	$\frac{1}{i! c^i} \left[(r_1 + i!)^x - c_1^i (r_1 + i! - c)^x \right.$ $\left. + \dots + (-1)^i r_1^x \right]$
5	19	$y_x = c_i^x r_1^{x-i} a_i$	$y_x = c_i^x r_1^{x-i} a_i$
5	19	$y_x = c_i c_i^x r_1^x$	$y_x = c_i c_i^x r_1^x$
6	20	$y_x = 8 + 4 c_1^x + 3 c_2^x$	$y_x = 8 + 4 c_1^x + 3 c_2^x$
8	19	$a_n E^n y + \dots + a_1 E y + \dots$	$a_n E^n y + \dots + a_1 y + \dots$
9	18	$r^2 - 5r + 6c0$	$r^2 - 5r + 6 = 0$
10	20	$r^3 - 7r^2 + 16c = 12$	$r^3 - 7r^2 + 16r = 12$
15	9	0.0001	- 0.0001
15	11	0.0001	- 0.0001
18	5	así: $k \equiv (E-1)^k$	así: $\Delta^k \equiv (E-1)^k$

Página No	Línea No	Dice	Debe decir:
19	15	$10 \cdot 1 - 2 \times 8 \cdot 0 + 3 \times 3 \cdot 4 - 4 \times 0 \cdot 6 = 1.9$	$10 \cdot 1 - 2 \times 6 \cdot 0 + 3 \times 3 \cdot 4 - 4 \times 0 \cdot 6 = 1.9$
20	19	$\begin{array}{c ccc} x & 0 & 1 & \dots \\ \hline y & 3 & 14 & \dots \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} x & 0 & 1 & \dots \\ \hline y_x & 3 & 14 & \dots \end{array}$
21	9	$C_{j+1}^{x-1} E^j$	$C_{j+1}^{x+1} E^j$
21	10	$k(\cdot+1) = k(k-1)\dots$	$k(\lambda+1) = k(k-1)\dots$
22	12	en la columna 3: -20	-120
22	23	en la columna 11: 3456	3465
22	última	en la columna 3: -4295	-4290
23	6	3 órdenes	3er. orden
23	16	3 diferencias	3as. diferencias
25	5	= 0	= 0
26	11	$-\Delta^4$	Δ^4
29	21	y dado que $\Delta C_j^x = C_{j-1}^x$	y dado que $\Delta C_j^x = C_{j-1}^x$, entonces podemos escribir:
29	24	2,2; 2,2;	2,2; 2,4;
30	varios	$E^x =$	$E^x =$
31	2, 10	$E^x =$	$E^x =$
34	6	... el factor Δ/E se tiene:	... el factor Δ/E se tiene:
35	15	$C_3^{x+1} \begin{array}{c} 2 \\ j \end{array}$	$C_3^{x+1} \begin{array}{c} j \\ 2 \end{array}$
35	15	$C_5^{x+2} \begin{array}{c} 4 \\ j \end{array}$	$C_5^{x+2} \begin{array}{c} 4 \\ j \end{array}$
37	2	$C_5^{x+2} \begin{array}{c} 4 \\ j \end{array}$	$C_5^{x+2} \begin{array}{c} 4 \\ j \end{array}$

Página Nº	Línea No	Dice	Debe decir:
38	23	en la columna I ₄ : -0.00460	-0.00466
43	21	$\sum z_k^j x^j D^j$	$\sum z_k^j x^j D^j$
46	6	$\sum z_k^j t^j n_{(j)} P^j (C+Pt)^{n-j}$	$\sum z_k^j t^j n_{(j)} P^j (C+Pt)^{n-j}$
47	7	$\frac{\Delta u_i \Delta u_j}{u_i - u_j}$	$\frac{\Delta u_i \Delta u_j}{u_i u_j}$
		$+\sum \sum \sum \frac{\Delta u_i \Delta u_j \Delta u_k}{u_i - u_j u_k}$	$+\sum \sum \sum \frac{\Delta u_i \Delta u_j \Delta u_k}{u_i u_j u_k}$
47	12	$\Delta x_{(n,n)}$	$\Delta x_{(n,h)}$
47	17	C_{n-u}^{-x-u}	C_{n-k}^{-x-k}
47	13	C_{n+u}^{x+k}	C_{n+k}^{x+k}
47	última	$\Delta =$	$\Delta =$
49	17	que e llegará	que se llegará
50	2	$\dots = \frac{nx(n-1)}{n!} \dots$	$\dots = \frac{nx(n-1)}{n!}$
50	última	e^{1t}	e^t
51	16	$(e^D - 1)^k$	$(e^D - 1)^k$
55	2	$\dots \frac{\Delta^3}{3} + \frac{\Delta^4}{4} \dots$	$\dots \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} \dots$
56	8	$\frac{\text{Edad } x}{x}$	$\frac{\text{Edad } x}{1_x}$

Página No	Línea No	Dice:	Debe decir:
56	18	$D1_x =$	$D1_x \doteq$
57	1	$D^3 y_x =$	$D^3 y_x \doteq$
60	1	$= \frac{\Delta!}{5^2}$	$= \frac{2!}{5^2}$
60	13	$w=9/10$	$w = -9/10$
60	última	25 35 45 55 65 75 85 95	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, j
63	4	$\dots + \frac{(1 + \Delta)^u}{2} E_v$	$\dots + \frac{(1 + \Delta) u}{2} E_v$
64	16	$= \left[g(t) - \sum_{j=0}^{k-1} y_j t^j \right] / t^k$	$= \left[g(t) - \sum_{j=0}^{k-1} y_j t^j \right] / t^k$
67	12	$= \frac{x a^x}{a^h - 1} - \frac{h a^{h+h}}{(a^h - 1)^2} + k$	$= \frac{x a^x}{a^h - 1} - \frac{h a^{x+h}}{(a^h - 1)^2} + k$
71	4	$= \frac{(n+1)^n}{2} + \dots$	$= \frac{(n+1) n}{2} + \dots$
72	17	$v = x$	$\Delta v = x$
73	2	$\dots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = f(x)$	$\dots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = f(x)$