

~~10/1~~
B/15
c.1

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CURSO DE 1958

P R I M E R A P A R T E

- CAPITULO I. LA NATALIDAD EN EL MUNDO
- CAPITULO II. LAS RELACIONES FUNDAMENTALES EN UNA POBLACION ESTABLE
- CAPITULO III. LA POBLACION LOGISTICA
- CAPITULO IV. FECUNDIDAD - REPRODUCCION
- CAPITULO V. RELACION ENTRE LAS TASAS DE REPRODUCCION Y LA TASA INTRINSECA DE INCREMENTO
- CAPITULO VI. CRITICA DEL CONCEPTO CLASICO DE LA FECUNDIDAD Y DE LA REPRODUCCION
- CAPITULO VII. LA MEDIDA DE LA FECUNDIDAD Y DE LA REPRODUCCION A BASE DE DATOS CENSALES

2412

(Apuntes de clase del Prof. León Tabah)

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

C A P I T U L O I

LA NATALIDAD EN EL MUNDO

Es muy difícil, para muchos países del mundo, conseguir los datos estadísticos más sencillos respecto a los nacimientos, debido a la subnumeración más o menos importante, sobre todo en Africa, varios países de América del Sur y Asia. En el cuadro siguiente, damos las tasas de natalidad en los cinco continentes alrededor del año 1955, con estimaciones para las partes del mundo donde no fué posible encontrar datos estadísticos seguros:

Cuadro 1. Tasas de natalidad en los cinco continentes alrededor del año 1955
(tasas por 1.000 habitantes).

<u>Africa</u>	45-50 *
<u>América:</u>	
Estados Unidos y Canadá	25
América Central	45-50 *
América del Sur	40-45 *
<u>Asia:</u>	
Cercano Oriente	45 *
Asia del Sur y Central	45-50 *
Japón	20
Otros países del Lejano Oriente	45 *
<u>Europa:</u>	
Europa septentrional, occidental y central	19
Europa meridional	22
Europa oriental	27
<u>Oceanía:</u>	24

* Estimación

Como puede verse en este cuadro, el conjunto de todo Asia, excepto el Japón, Africa y América Latina, que cuenta en total los dos tercios de la población mundial, la tasa de natalidad puede ser estimada en 45 a 50 por 1.000. La tasa más baja es para Europa septentrional, occidental y central con 19 por 1.000.

Notaremos desde ahora un hecho importante. La natalidad de los países subdesarrollados, que varía en general entre 40 y 50 por mil, es mayor que la de Europa occidental a fines del siglo XVIII (alrededor de 35 a 40 por mil), antes que empezara la limitación de los nacimientos. Al contrario, la tasa de mortalidad en estos países subdesarrollados sigue bajando desde hace unos diez o veinte años, de manera muy rápida, de modo que la tasa de incremento alcanza frecuentemente 20, 25 y aún 30 por mil, mientras que en Europa de fines de siglo XVIII o de principios del siglo XIX, la tasa de incremento pasaba excepcionalmente del 10 por mil.

Daremos, ahora, las tasas brutas de natalidad, de manera más detallada, o estimaciones de éstas cuando las tengamos.

I. Natalidad en Africa.

Siendo la subnumeración casi general, pocos países africanos disponen de estadísticas de estado civil fidedignas. Hemos reproducido en el cuadro II las tasas oficiales, o estimadas, para los países en los cuales se consiguen datos bastante seguros, o donde fueron efectuadas varias investigaciones. La mayoría de las tasas se encontraron entre 45 y 50 por mil.

Cuadro II. Tasas brutas de natalidad en ciertos países africanos (tasas por mil habitantes).

País	Período	Tasa de natalidad por mil, redondeada
Algeria (población musulmana)(1)	1950	46
Egipto (2)	1951-1954	49
Guinea Francesa (3)	1954-1955	50
Isla Maurice (2)	1951-1954	46
Nigeria (Lagos solamente) (2)	1951-1953	49
Uganda (4)	1950	40-45
Rodesia del Norte (5)	1950	59
Rodesia del Sur (6)	1948	46
Ruanda Urundi (7)	1955	46
Tanganika (4)	1950	40-45

(1) Breil J. La population des departements algériens. Etude de démographie

II. Natalidad en Asia.

Al igual que Africa, pocos países de Asia tienen estadísticas de estado civil fidedignas y raras veces se puede fiar de los datos oficiales brutos para medir la natalidad. En el cuadro III hemos reproducido datos recogidos, sobre todo, en un informe de la novena sesión de la Comisión de la Población de las Naciones Unidas en 1957 *. Las tasas indicadas en este cuadro son de tres tipos:

1. Tasas que resultan de estadísticas oficiales en países que poseen una organización del estado civil bastante antigua y luego segura. Es el caso de Israel para la población judía, Japón, Malasia y Singapur. Desgraciadamente, este conjunto de países representa una proporción débil respecto a la población total de Asia.
2. Tasas de natalidad que resultan de investigaciones o de estimaciones particulares. Es el caso de India, Irán, Israel (para la población musulmana),

quantitative. Service de la statistique générale de l'Algérie. Alger 1955, 1 vol., in 8o., 79p.

Tabah L. La population algérienne. Croissance, niveau de vie, investissements. Population, Paris, 1956, XI, 429-460.

- (2) Naciones Unidas - Anuario demográfico 1955.
- (3) L'enquête démographique de Guinée 1954-1955. Résultats provisoires, 1er. f. Documents et statistiques, Paris, 1956, Ministère de la France d'Outre-Mer.
- (4) Martin G.I. Some estimates of the general age distribution, fertility and rate of natural increase of the African Population of British East Africa. Population Studies, Nov. 1953.
- (5) Cifra provisoria, resultado de una investigación, citada en un informe a la novena sesión de la Comisión de la Población. Naciones Unidas 1957. E/C.N. 9/139.
- (6) Shaul J.R. y Myburgh A.L. Vital Statistics of the African Population of Southern Rhodesia in 1948; Population Studies, Marzo 1951.
- (7) Neesen V. Quelques données démographiques sur la population du Ruanda - Urun-di Zaire, Nov. 1953.

* Quelques données sur la population mondiale et les tendances démographiques. Naciones Unidas. Comisión de la Población 1957. E/CN 9/139.

3. Tasas de natalidad que resultan de estimaciones teóricas hechas por el Servicio de la Población de las Naciones Unidas *, basadas en el "método de la población estable", según las leyes de la demografía pura establecidas por Lotka y Wicksell. Los demógrafos de las Naciones Unidas han calculado una serie de tablas correspondientes a todos los tipos de poblaciones estables que pueden encontrarse en el mundo. El interés práctico de estas tablas es el siguiente: cuando uno conoce ciertos datos para una población particular (por ejemplo la estructura por edades y la tabla de supervivencia, o la estructura por edades y la tasa de natalidad) se puede encontrar la población estable modelo, que se acerque más a la población estudiada y luego encontrar fácilmente los otros factores demográficos que faltan. Por ejemplo, si se conoce en un país, ya sea de manera oficial o mediante una investigación, la estructura por edades y la tabla de supervivencia, se puede, desde luego, obtener una estimación de la tasa de natalidad. El uso de estas tablas supone solamente que la población estudiada está más o menos en una situación estable, lo que parece verdadero para la mayoría de los países de Asia. Veremos, más adelante, en el curso, la base teórica de estos cálculos.

Como puede verse en el cuadro III, que da los resultados de las estimaciones para Asia, los valores de la tasa se extienden entre 40 y 50 por mil habitantes (muy frecuentemente más cerca de 50 que de 40), igualmente para Africa.

La tasa del Japón llama la atención. En efecto, la fecundidad de este país ha bajado profundamente desde 1950 debido a la difusión de los métodos anticoncepcionales, a las medidas de esterilización y, sobre todo, al gran número de abortos legales previsto en la "ley de protección eugénica" de 1948 **. La tasa de natalidad ha bajado en Japón a un nivel comparable al de Francia, aunque la composición por edades de Japón es mucho más joven que la de Francia.

* Quelques données sur la population mondiale et les tendances démographiques. Naciones Unidas. Comisión de la Población 1957. E/CN 9/139.

** El número de esterilizaciones fué estimado en 1953, en 30.000, y el de abortos en más de un millón anualmente desde 1953. Una tendencia reciente parece vislumbrarse para substituir los abortos por los métodos anticoncepcionales. Hasta ahora la contracepción se observa sobre todo en las capas sociales más altas, mientras que los abortos y las esterilización se producen más en familias de bajo ingreso.

Cuadro III. Tasas de natalidad en ciertos países del continente asiático (tasas por mil habitantes).

País	Período	Tasa de natalidad por mil, redondeada
Birmania (1)	1950-1955	45
Ceilán (2)	1950-1955	40
China (Formosa) (2)	1950-1955	50
Chipre (2)	1950-1955	30
India (3)	1950-1955	40
Irán (4)	1940-1950	50
Israel (población judía) (1)	1953-1955	28
Israel (población musulmana) (5)	1938	50
Japón (1)	1953-1955	20
Malasia (1)	1953-1955	44
Pakistán (2)	1950-1955	50
Filipinas (2)	1950-1955	50
Singapur (1)	1953-1955	49
Tailandia (2)	1950-1955	50
Turquía (2)	1950-1955	40

(1) Naciones Unidas. Anuario demográfico 1955.

(2) Estimación hecha por el Servicio de la Población en las Naciones Unidas y sometida a la Comisión de la Población, novena sesión, en 1957. La estimación supone la población estable (estructura por edades constante, con tasas de natalidad y de mortalidad independientes del tiempo, como lo veremos más adelante).

(3) La estimación hecha por el Servicio de la Población, según el método de la población estable, es igual a la estimación de K. Davies en "The population of India and Pakistan" Princeton University Press, 1951.

(4) Estimación deducida de una investigación hecha en una población rural del Sur-Oeste de Teherán para medir la natalidad en el período 1940-1950. Véase Mashayekhi M.B., Mead P.A., Hayes G.S. Some demographic Aspects of a Rural Area in Iran. Milbank Memorial Fund Quarterly, XXXI, No. 2, Abril, 1953.

(5) Cifra citada por L. Henry en "Le Tiers monde. Sous-développement et développement" I.N.E.D. Paris 1956. Travaux et Documents. Cahier No. 27, p. 1950.

III. Natalidad en países latinoamericanos.

Se dispone de datos de estado civil en casi todos los países de Sudamérica, en general, de mejor calidad que para Africa o Asia, pero que carecen todavía de entera seguridad. La subnumeración de los nacimientos es frecuentemente de 10%, y aún de 20%. Las estadísticas más próximas a la realidad, en los últimos años, se encuentran para Argentina, Ecuador, Guatemala, México, Puerto Rico, Salvador y Venezuela. La insuficiencia del registro de los nacimientos en estos países es menor que 5%. En cambio la subnumeración alcanza 10% a 20% en Bolivia, Chile, Colombia, Costa Rica, Honduras, Jamaica, Nicaragua, Panamá, Perú, República Dominicana. Tres países no publican tasas oficiales de natalidad: Brasil, Cuba, Paraguay.

Hemos indicado en el cuadro IV, las tasas oficiales o estimadas de natalidad en los diversos países latinoamericanos. Las estimaciones resultan de cálculos hechos por el Servicio de la Población de las Naciones Unidas, según el "método de población estable" expuesto previamente de manera esquemática. Notamos que el supuesto de la estabilidad de la estructura de la población parece adecuado para todos los países latinoamericanos, salvo Argentina. En este país el método no fué aplicado, puesto que los datos oficiales son de buena calidad.

Tres conclusiones se obtienen de el cuadro IV:

1. El nivel de la natalidad aparece más alto en América Central que en América del Sur. En la primera parte del continente la tasa de natalidad alcanza 50 por mil en tres países (Guatemala, Nicaragua y Rep. Dominicana) mientras que en Sudamérica la tasa de natalidad no pasa del 45 por mil. Las diferencias entre las tasas de mortalidad son menores, por lo tanto, el ritmo de crecimiento es más alto en América Central que en América del Sur.
2. Se piensa generalmente que se han producido pocos cambios en los niveles de la natalidad en países latinoamericanos hasta ahora, salvo para Argentina, Uruguay y tal vez Chile, en donde la fecundidad parece haber sufrido un ligero descenso hace unos diez o quince años. Se puede decir para casi todos los países de Sudamérica, que poseen una tasa de natalidad mayor de 40 por mil, que están en el primer estado de la "Revolución demográfica" (baja de la mortalidad sin que se modifique sen-

siblemente la fecundidad), caracterizándose el segundo estado por el descenso de la fecundidad.

3. Argentina y Uruguay tienen tasas parecidas a las de Europa o de América del Norte, y muy diferentes a las de otros países latinoamericanos. Esta situación puede explicarse por la influencia de la inmigración, sobre todo de origen europeo, por el nivel educacional, el desarrollo de la urbanización y de la industrialización.

Cuadro IV. Tasas de natalidad en algunos países latinoamericanos (tasas por mil habitantes).

País	Período	Tasa de natalidad por mil, redondeada
Argentina (1)	1953-1955	24
Bolivia (2)	1950-1955	39
Brasil (2)	1950-1955	45
Chile (3)	1952-1955	36
Colombia (2)	1950-1955	45
Costa Rica (2)	1950-1955	45
Cuba (2)	1950-1955	35
Ecuador (1)	1950-1955	45
Guatemala (1)	1950-1955	50
Honduras (2)	1950-1955	45
Jamaica (2)	1950-1955	40
México (1)	1950-1955	45
Nicaragua (2)	1950-1955	50
Panamá (2)	1950-1955	45
Paraguay (2)	1950-1955	45
Perú (2)	1950-1955	45
Puerto Rico (1)	1950-1955	36
República Dominicana (2)	1950-1955	50
Salvador (2)	1950-1955	50
Venezuela (2)	1950-1955	45

(1) Naciones Unidas. Anuario demográfico 1955.

(2) Estimación hecha por el servicio de la Población de las Naciones Unidas con el método de la población estable, véase NU.E/CN 9/139

(3) Cabello O.- Jour. Int. Am. St. Inst. Junio 1956, XIV, 302-308.

IV. Natalidad en Europa.

Los países europeos, antes de la segunda guerra mundial, podían ser divididos en 3 grupos esenciales respecto a la natalidad (cuadro V):

1. Países de baja natalidad (tasas comprendidas entre 14 y 20 por mil). Se encontraban en este grupo casi todos los países de Europa septentrional, occidental y central. Los número de nacimientos y de defunciones se compensaban más o menos cada año. Además, la permanencia de esta situación durante un largo tiempo había envejecido las estructuras por edades de tal manera, que un enderezamiento de estas estructuras hubiera pedido un movimiento en el sentido contrario igualmente pronunciado en el tiempo.
2. Países de natalidad media (tasas comprendidas entre 20 y 30 por mil) y que se agrupaban en gran parte en Europa meridional.
3. Países de alta natalidad (tasas mayores que 30 por mil), situados en Europa oriental, más la U.R.S.S.

Después de la segunda guerra mundial puede distinguirse casi la misma agrupación, salvo que las diferencias no son tan pronunciadas. En efecto, un aumento de las tasas de natalidad se produjo en el primer grupo, mientras que el descenso se acentuó en el segundo y en el tercer grupo. La baja más notable se observó en los países de Europa meridional: Italia, España, Portugal y Grecia, y puede decirse que poca diferencia se distingue ahora entre Francia y estos países, aún cuando Francia se caracterizaba, hace unos 20 años, por su débil nivel de fecundidad.

Los países de Europa oriental han bajado de natalidad en menor proporción que los países de Europa meridional.

Cuadro V. Tasas brutas de natalidad en los países europeos, ordenados por orden creciente en 1930-34. (Tasas por mil habitantes).

Pais	1930-1934	1947-1949	1953-1955
<u>Grupo 1.</u> (baja natalidad antes de la II guerra mundial)			
Suecia	14,1	18,2	14,9
Austria	15,1	17,5	15,1
Noruega	15,7	20,5	18,6
Reino Unido	15,8	18,6	15,6
Alemania	16,3	-	-
Alemania oriental	-	13,1	16,3
Alemania occidental	-	16,6	15,6
Suiza	16,7	19,0	17,0
Francia	17,3	22,0	18,8
Bélgica	17,6	17,5	16,7
Dinamarca	17,9	20,4	17,5
Luxemburgo	18,1	14,6	16,1
Irlanda	19,5	22,3	21,2
Checoslovaquia	19,7	23,1	21,3
<u>Grupo 2.</u> (natalidad media antes de la II guerra mundial)			
Finlandia	20,0	27,2	21,5
Países Bajos	21,7	25,6	21,6
Hungría	23,2	22,3	21,2
Italia	24,5	21,5	18,0
España	27,6	22,2	20,4
Polonia	28,9	28,4	29,3
Portugal	29,3	25,6	23,3
<u>Grupo 3.</u> (alta natalidad antes de la II guerra mundial)			
Grecia	30,0	18,6	19,0
U.R.S.S.	30,0	?	25,7
Bulgaria	30,3	24,2	20,3
Rumania	33,7	22,4	23,7

Fuentes: Naciones Unidas, Anuario demográfico y Boletín mensual de Estadística.

V. Natalidad en Canadá, Estados Unidos, Australia, Nueva Zelandia y población europea de Sudáfrica.

En este grupo de países la tasa de natalidad ha aumentado desde hace unos veinte años, y el nivel general actual es muy parecido al de Europa oriental (Cuadro VI).

Cuadro VI. Tasas brutas de natalidad en Canadá, Estados Unidos, Australia, Nueva Zelandia y Unión Sudafricana (tasas por mil habitantes).

País	1935-1939	1947-1949	1953-1955
Australia	17,2	23,4	22,7
Canadá	20,3	27,8	28,4
Nueva Zelandia (europeos)	17,4	25,9	24,6
Unión Sudafricana(europeos)	24,7	26,6	25,1

Fuentes: Naciones Unidas, Anuario demográfico y Boletín mensual de Estadística.

CAPITULO II

LAS RELACIONES FUNDAMENTALES DE UNA POBLACIÓN ESTABLE

Tomaremos una población estable, es decir, una población cuyo efectivo varíe solamente con los nacimientos y las defunciones, excluyéndose la inmigración y la emigración. Cada individuo sale de la población solamente por defunción y el efectivo sólo crece por nacimientos de niños cuyos padres pertenecen a la población.

Habrá que tener siempre presente esta hipótesis, recién enunciada y muy cómoda, pero a veces fuera de la realidad, en las páginas siguientes.

Sea $N(t)$ el efectivo de la población a principios del período t ; $B(t)$ el número de nacimientos y $D(t)$ el número de defunciones en el curso del mismo período t ; $\Delta N(t)$ el incremento de la población entre el principio del período del período t y el principio del período $t + 1$. Podemos decir:

$$(1) \quad \Delta N(t) = B(t) - D(t)$$

El incremento relativo es:

$$(2) \quad \frac{\Delta N(t)}{\Delta_t N(t)} = r(t) = \frac{B(t)}{N(t)} - \frac{D(t)}{N(t)} = b(t) - d(t)$$

siendo $b(t)$ y $d(t)$ las tasas de natalidad y de mortalidad.

La relación fundamental.

Sea $p(a,t)$ la probabilidad, evaluada al momento del nacimiento, de que un individuo sobreviva al instante t y edad a . El nacimiento de este individuo tiene luego lugar al instante $t - a$.

Supongamos ahora que la mortalidad no varía con el tiempo, lo que nos permite escribir $p(a)$, en vez de $p(a,t)$. Las probabilidades de supervivencia a la edad a son las mismas, cualquiera que sea la época considerada. Para calcular $p(a)$, se aísla un número de recién nacidos $l(0)$ y se calcula las relaciones $\frac{l(a)}{l(0)}$ del número de sobrevivientes en la edad $l(a)$ con el número inicial de

Cuadro VII. Comparación entre distribuciones por edades registradas y calculadas en la hipótesis de un estado estable de la población (ambos sexos).

Grupos de edades	Alemania (1891-1900)		Suecia (1910)	
	Observada	Calculada	Observada	Calculada
0-9	244	244	218	218
10-19	198	198	192	185
20-29	164	170	156	155
30-39	134	131	125	129
40-49	105	101	102	107
50-59	78	78	88	86
60-69	50	51	66	65
70-79	22	23	40	40
80 y más	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>13</u>	<u>15</u>
Total	999	1001	1000	1000

Grupos de edades	Inglaterra (1871-1880)	
	Observada	Calculada
0-4	136	138
5-9	120	116
10-14	107	106
15-19	97	96
20-24	89	87
25-34	147	149
35-44	113	117
45-54	86	86
55-64	59	60
65-74	33	32
75 y más	<u>13</u>	<u>12</u>
Total	1000	999

Fuente: A. Lotka - Théorie analytique des associations biologiques - Deuxième partie. Paris, 1939, Hermann & Cie. 149 p.

Cuadro VIII. Comparación entre la estructura por edades de la población de Chile y la estructura por edades de una población estable que tenga igual natalidad e igual tabla de vida que las de Chile alrededor del año 1952 (poblaciones reducidas en 100.000). Las poblaciones estables teóricas corresponden a esperanzas de vida al nacimiento de 50 años para hombres y 53 años para mujeres, a tasas de incremento de 0,0200 para hombres y 0,0225 para mujeres.

Edades	Hombres		Mujeres	
	Población al 30-VI-1952 *	Población estable	Población al 30-VI-1952 *	Población estable
	3.428	3.382	3.204	3.162
1-4	12.220	11.977	11.499	11.603
5-9	13.239	13.043	12.568	12.826
10-14	11.258	11.473	10.906	11.330
15-19	9.949	10.089	10.104	9.779
20-24	8.915	8.798	9.309	8.737
25-29	7.346	7.632	7.783	7.613
30-34	6.427	6.612	6.720	6.632
35-39	6.141	5.712	6.228	5.753
40-44	5.309	4.903	5.180	4.963
45-49	4.399	4.162	4.352	4.255
50-54	3.545	3.473	3.492	3.603
55-59	2.749	2.822	2.881	2.999
60-64	2.059	2.203	2.171	2.408
65-69	1.383	1.617	1.529	1.834
70-74	834	1.079	964	1.292
75-79	457	622	597	739
80-84	221	287	329	335
85-89	85	94	129	115
90-94	27	18	42	25
95 y más	9	2	13	3
Totales	100.000	100.000	100.000	100.000

* Población de Chile censada el 24 de Abril de 1952 ajustada por:

- 1) Subnumeración de los niños
- 2) Irregularidades en ciertas edades (método de King-Karup)
- 3) Incremento hasta el 30 de Junio de 1952.

Cuadro IX. Cálculo de la tasa de natalidad y de la estructura por edades en una población estable que tuviera igual tasa de incremento e igual tabla de vida que las de Chile alrededor del año 1952 (cálculo para mujeres).

Edad a	r a r=0,0225	e ^{-ra}	p(a) *	Grupo de edad	L(a) **	L(a)e ^{-ra}	bL(a)e ^{-ra}
0	0,00000	1,00000	1,00000	0-1	0,90546	0,90546	0,03162
1	0,02250	0,97775	0,87395	1-4	3,39815	3,32254	0,11602
5	0,11250	0,89360	0,82745	5-9	4,11018	3,67286	0,11329
10	0,22500	0,79852	0,81662	10-14	4,06325	3,24459	0,11329
15	0,33750	0,71355	0,80868	15-19	4,00385	2,80051	0,09779
20	0,45000	0,6373	0,79486	20-24	3,92425	2,50222	0,08737
25	0,56250	0,56978	0,77484	25-29	3,82650	2,18026	0,07613
30	0,67500	0,50916	0,75576	30-34	3,73025	1,89929	0,06632
35	0,78750	0,45498	0,73634	35-39	3,62148	1,64770	0,05753
40	0,90000	0,40657	0,71225	40-44	3,49568	1,42124	0,04963
45	1,01250	0,36331	0,68602	45-49	3,35418	1,21861	0,04255
50	1,12500	0,32465	0,65565	50-54	3,17822	1,03181	0,03603
55	1,23750	0,29040	0,61564	55-59	2,95742	0,85883	0,02999
60	1,35000	0,25924	0,56733	60-64	2,65970	0,68950	0,02408
65	1,46250	0,23166	0,49655	65-69	2,26768	0,52533	0,01834
70	1,57500	0,20701	0,41052	70-74	1,78725	0,36998	0,01292
75	1,68750	0,18517	0,30438	75-79	1,16490	0,21151	0,00739
80	1,80000	0,16530	0,16158	80-84	0,58005	0,09588	0,00335
85	1,91250	0,14771	0,07044	85-89	0,22240	0,23285	0,00115
90	2,02500	0,13199	0,01852	90-94	0,05320	0,00702	0,00025
95	2,13750	0,11795	0,00276	95-99	0,00740	0,00087	0,00003
100	2,25000	0,10540	0,00020	100-104			
Total						28,63886	1,00000
Recíproco del total (tasa de natalidad)						0,0349175	

* Bocaz A. Tabla abreviada de vida para 1952. Estadística chilena. Santiago. Mayo - Junio 1954, p. 154-160.

** Se utilizaron los coeficientes de separación siguientes: $L_0 = 0,25 p(0) + 0,75 p(1)$; $L_{1-4} = 1,9 p(1) + 2,1 p(5)$; $L_{5-9} = 2,5 p(5) + 2,5 p(10)$; $L_{10-14} = 2,5 p(10) + 2,5 p(15)$; etc.

En esta columna aparece también la estructura por edad de una población estacionaria.

Caso particular de una población estacionaria.

Consideramos ahora una población estable de un tipo particular, donde la tasa de crecimiento vegetativo es cero ($r = 0$). Luego la ecuación (10) se transforma en:

$$(15) \quad C_{r=0}(a) = b p(a)$$

En una población estacionaria, sometida a la misma tabla de vida, el número de individuos de cada edad es proporcional a la probabilidad de supervivencia indicada por la tabla de vida.

En cuanto a la tasa de natalidad, llega a ser:

$$(16) \quad b_{r=0} = 1 / \int_0^w p(a) da = 1/L_0$$

siendo L_0 la esperanza de vida al nacimiento, es decir, el número medio de años de vida dentro de un grupo N de individuos sometidos durante toda la vida a la misma tabla de sobrevivencia. Empleando los símbolos actuariales escribiremos:

$$L_0 = \frac{1}{l_0} \sum_{a=0}^{a=w} l_a$$

En una población estacionaria la tasa de natalidad, como la tasa de mortalidad es igual al recíproco de la esperanza de vida al nacimiento.

De la misma manera que el estado estable es logrado a largo plazo si se mantuvieran constantes las tasas de natalidad y de mortalidad, el estado estacionario es el que se obtendría si las tasas de natalidad y de mortalidad permanecieran iguales durante un largo tiempo.

Edad media de una población estable.

La edad media de una población estable juega un papel importante como se verá más adelante. Sea A_r esta edad media. El número de individuos de edad a , durante el año t es, como ya lo hemos visto anteriormente:

$$c(a) N(t) = b e^{-ra} p(a) N(t)$$

El número de años vividos por este grupo es:

$$a b e^{-ra} p(a) N(t)$$

De manera que la edad media de la población es:

$$A_r = \frac{b N(t) \int_0^w a e^{-ra} p(a) da}{b N(t) \int_0^w e^{-ra} p(a) da}$$
$$(17) \quad A_r = \frac{\int_0^w a e^{-ra} p(a) da}{\int_0^w e^{-ra} p(a) da}$$

Transformaremos esta expresión para que sea más fácil de calcular. Para esto desarrollaremos e^{-ra} en serie de Taylor:

$$e^{-ra} = 1 - \frac{ra}{1!} + \frac{r^2 a^2}{2!} - \frac{r^3 a^3}{3!} + \frac{r^4 a^4}{4!} - \dots$$

luego:

$$\int_0^w e^{-ra} p(a) da = \int_0^w p(a) da - \frac{r}{1!} \int_0^w a p(a) da + \frac{r^2}{2!} \int_0^w a^2 p(a) da - \dots$$

y

$$\int_0^w a e^{-ra} p(a) da = \int_0^w a p(a) da - \frac{r}{1!} \int_0^w a^2 p(a) da + \frac{r^2}{2!} \int_0^w a^3 p(a) da - \dots$$

Llamaremos

$$(18) \quad L_n = \int_0^w a^n p(a) da$$

el momento de orden n de la función de supervivencia. En particular, el momento

de orden cero L_0 es la esperanza de vida ya encontrada ($L_0 = \int_0^{\omega} p(a) da$).

Tenemos luego:

$$\int_0^{\omega} e^{-ra} p(a) da = L_0 - \frac{r}{1!} L_1 + \frac{r^2}{2!} L_2 - \frac{r^3}{3!} L_3 + \dots$$

$$\int_0^{\omega} a e^{-ra} p(a) da = L_1 - \frac{r}{1!} L_2 + \frac{r^2}{2!} L_3 - \frac{r^3}{3!} L_4 + \dots$$

y A_r llega a ser:

$$A_r = \frac{L_1 - \frac{r}{1!} L_2 + \frac{r^2}{2!} L_3 - \frac{r^3}{3!} L_4 + \dots}{L_0 - \frac{r}{1!} L_1 + \frac{r^2}{2!} L_2 - \frac{r^3}{3!} L_3 + \dots}$$

Es como si fuer $A_r = \frac{L_1}{L_0}$, $A_r = \frac{L_1 - rL_2}{L_0 - rL_1}$

luego $\frac{L_1 - rL_2}{L_0 - rL_1} = \frac{L_1}{L_0}$

$L_1 L_0 - r L_0 L_2 = L_1 L_0 - r L_1^2$

$\frac{r L_0 L_2}{L_0^2} = r \frac{L_2}{L_0} \Rightarrow r \frac{L_2}{L_0} = r \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^2$

$r \left[\frac{L_2}{L_0} - \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^2 \right]$

$$A_r = \frac{L_1}{L_0} - r \left[\frac{L_2}{L_0} - \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^2 \right] + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{L_3}{L_0} - 3 \frac{L_2 L_1}{L_0 L_0} + 2 \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^3 \right] - \frac{r^3}{3!} \left[\frac{L_4}{L_0} - 4 \frac{L_3 L_1}{L_0 L_0} - 3 \left(\frac{L_2}{L_0} \right)^2 + 12 \frac{L_2}{L_0} \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^2 - 6 \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^4 \right]$$

$$(19) \quad A_r = \lambda_1 - \frac{r}{1!} \lambda_2 + \frac{r^2}{2!} \lambda_3 - \frac{r^3}{3!} \lambda_4 + \dots$$

donde

$$(20) \quad \lambda_1 = \frac{L_1}{L_0}$$

$$(21) \quad \lambda_2 = \frac{L_2}{L_0} - \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^2$$

$$(22) \quad \lambda_3 = \frac{L_3}{L_0} - 3 \frac{L_1 L_2}{L_0 L_0} + 2 \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^3$$

$$(23) \quad \lambda_4 = \frac{L_4}{L_0} - 4 \frac{L_3 L_1}{L_0 L_0} - 3 \left(\frac{L_2}{L_0} \right)^2 + 12 \frac{L_2}{L_0} \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^2 - 6 \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^4$$

λ_n es llamado el seminvariante o cumulante de orden n de la función de supervivencia *.

Valores de seminvariantes hasta cierto orden son indicados en los cuadros X y XI por diferentes niveles posibles de mortalidad. En los cuadros XII y XIII se indica un ejemplo de cálculo de los tres primeros momentos y seminvariantes de la función de supervivencia para Brasil, 1940, mujeres.

Edad media de una población estacionaria.

Recordando que en una población estacionaria $r = 0$, la ecuación (19) llega a ser:

$$(24) \quad A_0 = \lambda_1 = \frac{L_1}{L_0}$$

En el cuadro XIV son indicadas las edades medias en poblaciones estables según diferentes niveles de mortalidad, caracterizados en la esperanza de vida al nacimiento y diferentes niveles de tasas de incremento y a base de la fórmula (19). Las edades medias que corresponden a tasas de incremento iguales a cero se refieren, entonces, a poblaciones estacionarias.

Relación entre la edad media de una población estable, la tasa de incremento y las tasas de supervivencia.

La ecuación (19) se puede escribir:

$$\frac{\lambda_3}{2!} r^2 - \lambda_2 r + \lambda_1 - A_r = 0$$

* Sobre la relación entre momentos y cumulantes véase: M.G. Kendall, The advanced theory of statistics - London - Griffin 1947, p.60.

Cuadro X Seminvariantes de primer, segundo, tercer y cuarto orden
según la esperanza de vida al nacimiento (hombres).

L_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
20	22,2825	305,4677	3.561,465	- 27.899
22	23,1281	320,5383	3.645,272	- 38.500
24	23,9463	334,9808	3,708,918	- 48.600
26	24,7376	348,8060	3.757,600	- 59.600
28	25,5023	362,0245	3.780,510	- 71.500
30	26,2408	374,6467	3.790,846	- 82.980
32	26,9534	386,6833	3.785,801	- 96.500
34	27,6404	398,1446	3.766,572	- 109.400
36	28,3024	409,0414	3.734,353	- 121.200
38	28,9396	419,3843	3.690,339	- 132.500
40	29,5524	429,1837	3.635,726	- 142.770
42	30,1410	438,4503	3.571,710	- 154.000
44	30,7061	447,1944	3.499,485	- 164.100
46	31,2478	455,4268	3.420,246	- 173.800
48	31,7665	463,1581	3.335,188	- 183.000
50	32,2625	470,3987	3.245,507	- 193.410
52	32,7364	477,1593	3.152,399	- 203.000
54	33,1883	483,4502	3.057,058	- 212.200
56	33,6187	489,2822	2.960,678	- 221.500
58	34,0279	494,6659	2.864,456	- 229.900
60	34,4164	499,6117	2.769,589	- 238.117
62	34,7845	504,1303	2.677,268	- 246.000
64	35,1324	508,2320	2.588,691	- 253.500
66	35,4606	511,9276	2.505,052	- 260.000
68	35,7695	515,2277	2.427,546	- 265.900
70	36,0594	518,1427	2.357,370	- 271.039

Cuadro XI Seminvariantes de primer, segundo, tercer y cuarto orden según esperanza de vida al nacimiento (mujeres).

L_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4^*
20	22,3318	324,4885	4.181,018	- 27.899
22	23,2323	339,0932	4.245,965	- 38.500
24	24,1001	353,0592	4.286,252	- 48.600
26	24,9356	366,4044	4.303,602	- 59.600
28	25,7397	379,1472	4.299,739	- 71.500
30	26,5132	391,3055	4.276,387	- 82.980
32	27,2568	402,8976	4.235,270	- 96.500
34	27,9713	413,9416	4.178,110	- 109.400
36	28,6574	424,4557	4.106,632	- 121.200
38	29,3158	434,4579	4.022,560	- 132.500
40	29,9474	443,9665	3.927,616	- 142.770
42	30,5528	452,9993	3.823,526	- 154.000
44	31,1329	461,5753	3.712,012	- 164.100
46	31,6882	469,7117	3.594,793	- 173.800
48	32,2196	477,4271	3.473,608	- 183.000
50	32,7280	484,7395	3.350,165	- 193.410
52	33,2139	491,6671	3.226,194	- 203.000
54	33,6782	498,2281	3.103,417	- 212.200
56	34,1216	504,4405	2.983,560	- 221.500
58	34,5447	510,3226	2.868,344	- 229.900
60	34,9486	515,8925	2.759,494	- 238.117
62	35,3337	521,1683	2.658,734	- 246.000
64	35,7010	526,1681	2.567,787	- 253.500
66	36,0511	530,9102	2.488,377	- 260.000
68	36,3847	535,4126	2.422,228	- 265.900
70	36,7028	539,6935	2.371,063	- 271.039

* Se tomó, con bastante aproximación, para la estimación del seminvariante, orden 4, λ_4 los valores indicados en el cuadro anterior para los hombres.

Cuadro XII. Cálculo de los momentos de la función de sobrevivencia para Brasil, 1940, mujeres.

Edad a	p(a)	a p(a)	a ² p(a)	a ³ p(a)
0	1,00000	0	0	0
1	0,83120	0,83120	0,83120	0,83120
2	0,81073	1,62146	3,24292	12,9717
3	0,79026	2,37078	7,11234	21,3370
4	0,76979	3,07916	12,31664	49,2666
5	0,74923	3,74615	18,73075	93,6537
10	0,72545	7,25450	72,54500	725,4500
15	0,70868	10,63020	159,45300	2.391,7950
20	0,68495	13,69900	273,98000	5.479,6000
25	0,65419	16,35475	408,86875	10.221,7187
30	0,62174	18,65220	559,56600	16.786,9800
35	0,58896	20,61360	721,47600	25.251,6600
40	0,55578	22,23120	889,24800	35.569,9200
45	0,52160	23,47200	1056,24000	47.530,8000
50	0,48370	24,18500	1209,25000	60.462,5000
55	0,43980	24,18900	1330,39500	73.171,7250
60	0,38795	23,27700	1396,62000	83.797,2000
65	0,32387	21,05155	1368,35075	88.942,7987
70	0,24840	17,38800	1217,16000	85.201,2000
75	0,16517	12,38775	929,08125	69.681,0937
80	0,08791	7,03280	562,62400	45.009,9200
85	0,03320	2,82200	439,87000	20.388,9500
90	0,01100	0,99000	89,10000	8.019,0000
95	0,00480	0,45600	43,32000	4.115,4000
100	0,00048	0,04800	4,80000	480,0000

$L_0 = 42,56123$ *
 $L_1 = 1.354,56688$ *
 $L_2 = 62.736,79948$ *
 $L_3 = 3.415.350,7508$ *

* De la edad 5 en adelante se utilizó la regla de los trapecios para hacer las sumatorias en cada intervalo de cinco años de edad.

Cuadro XIII Cálculo de los seminvariantes de la función de sobrevivencia para Brasil, 1940, mujeres.

$L_0 = 42,56123$	$\frac{L_1}{L_0} = 31,8263$	$\left(\frac{L_1}{L_0}\right)^2 = 1.012,9134$
$L_1 = 1.354,56688$	$\frac{L_2}{L_0} = 1.474,0363$	$\left(\frac{L_1}{L_0}\right)^3 = 32.237,2857$
$L_2 = 62.736,79948$	$\frac{L_3}{L_0} = 80.245,5838$	$2\left(\frac{L_1}{L_0}\right)^2 = 64.474,5714$
$L_3 = 3.415.350,75080$		$\frac{L_1}{L_0} \cdot \frac{L_2}{L_0} = 46.913,1215$
		$3 \frac{L_1}{L_0} \cdot \frac{L_2}{L_0} = 140.739,3645$
		80.245,5838
	1.474,0363	- 140.739,3645
	- 1.012,9134	+ <u>64.474,5714</u>
$\lambda_1 = 31,8263$	$\lambda_2 = 461,1229$	$\lambda_3 = 3.980,7907$

Cuadro XIV. Edad media en poblaciones estables según diferentes niveles de la mortalidad y de la tasa de incremento (hombres).

Esperanza de vida al nacimiento L_0	Tasa de incremento							
	0,0000	0,0100	0,0150	0,0200	0,0250	0,0300	0,0350	0,0400
20	22,2825	19,411	18,117	16,923	15,831	14,847	13,972	13,211
22	23,1281	20,111	18,752	17,498	16,354	15,326	14,417	13,633
24	23,9463	20,790	19,366	18,053	16,857	15,785	14,841	14,033
26	24,7376	21,447	19,961	18,592	17,346	16,231	15,254	14,424
28	25,5023	22,083	20,537	19,018	17,819	16,665	15,658	14,808
30	26,2408	22,698	21,094	19,617	18,275	17,081	16,043	15,173
32	26,9534	23,292	21,633	20,106	18,721	17,491	16,428	15,544
34	27,6404	23,866	22,154	20,577	19,149	17,883	16,794	15,895
36	28,3024	24,419	22,655	21,030	19,559	18,257	17,139	16,221
38	28,9396	24,769	23,139	21,467	19,953	18,615	17,468	16,530
40	29,5524	25,466	23,604	21,886	20,331	18,955	17,778	16,817
42	30,1410	25,961	24,053	22,292	20,697	19,288	18,083	17,103
44	30,7061	26,436	24,484	22,681	21,047	19,603	18,370	17,368
46	31,2478	26,894	24,899	23,055	21,384	19,906	18,645	17,621
48	31,7665	27,332	25,297	23,414	21,702	20,196	18,906	17,860
50	32,2625	27,753	25,680	23,762	22,020	20,481	19,268	18,106
52	32,7364	28,156	26,048	24,094	22,321	20,754	19,417	18,337
54	33,1883	28,542	26,400	24,414	22,610	21,015	19,656	18,559
56	33,6187	28,910	26,737	24,721	22,889	21,269	19,890	18,779
58	34,0279	29,263	27,059	25,014	23,155	21,511	20,112	18,985
60	34,4164	29,598	27,368	25,296	23,412	21,746	20,328	19,188
62	34,7845	29,918	27,662	25,565	23,659	21,972	20,538	19,385
64	35,1324	30,222	27,943	25,823	23,896	22,191	20,741	19,578
66	35,4606	30,510	28,210	26,070	24,122	22,400	20,935	19,761
68	35,7695	30,783	28,464	26,305	24,340	22,602	21,123	19,939
70	36,0594	31,041	28,705	26,529	24,548	22,796	21,305	20,111

Esta ecuación de segundo grado, permite el cálculo de la tasa de incremento anual r :

$$(25) \quad r = \frac{\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - 2\lambda_3(\lambda_1 - A_r)}}{\lambda_3}$$

El interés práctico de esta relación es de permitir la obtención de r conociendo solamente la edad media A_r (o sea, la estructura por edades) y los seminvariantes de la tabla de vida de la población estudiada o de una población que tendría un nivel sanitario muy parecido. Para este propósito podría utilizarse una de las 40 tablas de vida modelos establecidas por el Servicio de la Población de las Naciones Unidas *, en caso que no se pueda conseguir una tabla de vida.

Una propiedad de la edad media.

La edad media de una población estable se expresa de la manera siguiente, como ya lo hemos visto:

$$(17) \quad A_r = \frac{\int_0^w a e^{-ra} p(a) da}{\int_0^w e^{-ra} p(a) da}$$

Cuando la tasa de incremento r varía, esta edad media varía también, pero en el sentido contrario a r . Una población estable tiene una edad media tanto más alta cuanto más baja es la tasa de incremento. En efecto:

$$(26) \quad \frac{d A_r}{dr} = - \frac{\int_0^w (a - A_r)^2 p(a) e^{-ra} da}{\int_0^w p(a) e^{-ra} da}$$

que es necesariamente negativo.

* Schémas de variations de la mortalité selon l'age et le sexe. Tables types de mortalité pour les pays sous-développés. Naciones Unidas. N.York 1956 ST/ SOA/SER A/22

Se puede notar también que A_r es la edad para la cual la proporción del efectivo permanece constante cuando r varía. Si consideramos, en efecto, la repartición por edades:

$$(27) \quad c(a) = \frac{p(a) e^{-ra}}{\int_0^w p(a) e^{-ra} da}$$

Vemos que cuando r varía, la familia de curvas representativas admite una envolvente cuyo punto característico se obtiene derivando respecto a r , lo que da:

$$(28) \quad \frac{-a p(a) e^{-ra}}{\int_0^w p(a) e^{-ra} da} + \frac{\int_0^w a p(a) e^{-ra} da}{\left[\int_0^w p(a) e^{-ra} da \right]^2} p(a) e^{-ra} = 0$$

es decir $A_r = a$

Veremos más adelante que dos poblaciones que tienen la misma mortalidad, pero que difieren en fecundidad, y luego en tasa de incremento, tienen iguales proporciones de individuos a una edad próxima a la edad media de las dos poblaciones.

Otra relación entre la tasa de natalidad, la tasa de incremento y las tasas de supervivencia.

Hemos visto una relación entre la tasa de natalidad, la tasa de incremento y las tasas de supervivencia mediante la fórmula fundamental (11). El cálculo de b según esta fórmula puede hacerse evaluando el integral por uno de los métodos bien conocidos de integración de las funciones arbitrarias. Una simplificación puede resultar de una transformación de la fórmula de la edad media:

$$(17) \quad A_r = \frac{\int_0^w a e^{-ra} p(a) da}{\int_0^w e^{-ra} p(a) da}$$

En efecto, volvemos a la fórmula fundamental (11):

$$(11) \quad 1/b = \int_0^w e^{-ra} p(a) da$$

Si derivamos esta fórmula respecto a la variable r obtenemos:

$$\frac{d 1/b}{d r} = - \int_0^w a e^{-ra} p(a) da$$

de manera que la edad media A_r llega a ser:

$$(29) \quad A_r = \frac{1}{1/b} \frac{d 1/b}{d r}$$

$$A_r = \frac{d \text{Log}_e b}{dr}$$

Integrando las dos partes de esta ecuación obtenemos:

$$\text{Log}_e \frac{b}{b_{r=0}} = \int_0^r A_r dr$$

Pero, según (19):

$$(19) \quad A_r = \lambda_1 - \lambda_2 \frac{r}{1!} + \lambda_3 \frac{r^2}{2!} - \lambda_4 \frac{r^3}{3!} + \dots$$

De manera que:

$$\int_0^r A_r dr = \lambda_1 r - \frac{1}{2!} \lambda_2 r^2 + \frac{1}{3!} \lambda_3 r^3 - \dots$$

Siendo b_0 la tasa de natalidad en una población estable donde la tasa de incremento es nula, o sea, una población estacionaria cuyo valor es como lo hemos visto:

$$(16) \quad b_{r=0} = 1 \int_0^w p(a) da = \frac{1}{L_0}$$

Luego, la ecuación (29) se transforma en:

$$(30) \quad b = \frac{e^{\lambda_1 r - \frac{1}{2!} \lambda_2 r^2 + \frac{1}{3!} \lambda_3 r^3 - \frac{1}{4!} \lambda_4 r^4 + \dots}}{L_0}$$

Esta fórmula permite el cálculo de la tasa de natalidad en una población estable si solamente se conoce la tasa de incremento y la tabla de vida.

En el cuadro XV están indicados los valores de la tasa de natalidad encontrados mediante la fórmula (30) según diferentes valores de la tasa de incremento y diferentes esperanzas de vida al nacimiento. Previamente se ha calculado los valores de los momentos y de los seminvariantes de las diferentes tablas modelos de mortalidad utilizadas según el método que indicamos anteriormente. Las curvas de b en función de r , para un nivel dado de la esperanza de vida al nacimiento, son casi lineales; y fácilmente puede obtenerse un valor de b que corresponda a dos valores de r indicados en el cuadro por interpolación de primer grado.

Si tomamos, por ejemplo, el caso de Chile en 1952, para el cual tenemos $r = 0,0225$ y $L_0 = 52$, el cuadro XV nos indica una tasa de natalidad de 37,16 por mil. Esta cifra corresponde casi exactamente a la estimación que se hizo mediante otro método (a base de los censos y de las estadísticas de mortalidad. Véase los estudios de O. Cabello sobre la utilización de este método. *).

* Cabello O. Integralidad del registro de nacimientos y oportunidad de la inscripción en Chile, 1920-1953. Estadística, Junio 1956, XIV, No. 51, págs. 302-307.

Cuadro XV. Tasas de natalidad en poblaciones estables, según la esperanza de vida al nacimiento y la tasa de incremento (tasas por mil nacimientos).

Esperanza de vida al nacimiento	Tasa de incremento (en o/oo)												
	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00
32	40,83	43,40	46,05	48,75	51,51	54,33	57,19	60,10	63,06	66,05	69,07	72,12	75,21
34	38,66	41,16	43,72	46,34	49,02	51,76	54,54	57,38	60,25	63,15	66,11	69,07	72,10
36	36,73	39,16	41,65	44,20	46,81	49,48	52,20	54,97	57,77	60,62	63,51	66,42	69,37
38	35,00	37,36	39,79	42,28	44,80	47,43	50,08	52,79	55,54	58,32	61,15	64,00	66,89
40	33,44	35,76	38,10	40,53	43,02	45,57	48,16	50,80	53,49	56,20	58,99	61,79	64,62
42	32,02	34,26	36,57	38,94	41,38	43,87	46,41	49,01	51,64	54,32	57,04	59,79	62,57
44	30,72	32,91	35,16	37,49	39,87	42,32	44,80	47,34	49,93	52,56	55,23	57,93	60,66
46	29,53	31,67	33,87	36,15	38,48	40,87	43,32	45,81	48,35	50,94	53,56	56,21	58,89
48	28,43	30,52	32,68	34,90	37,19	39,54	41,93	44,38	46,88	49,42	51,99	54,60	57,25
50	27,41	29,46	31,58	33,76	35,99	38,30	40,66	43,07	45,52	48,02	50,55	53,13	55,72
52	26,48	28,50	30,55	32,69	34,89	37,16	39,47	41,84	44,25	46,71	49,20	51,73	54,29
54	25,60	27,56	29,59	31,69	33,85	36,07	38,35	40,67	43,05	45,46	47,92	50,41	52,93
56	24,77	26,69	28,68	30,73	32,86	35,04	37,27	39,55	41,88	44,26	46,67	49,17	51,60
58	24,00	25,88	27,83	29,85	31,92	34,06	36,25	38,51	40,79	43,12	45,49	47,90	50,34
60	23,28	25,12	27,03	29,01	31,04	33,14	35,29	37,50	39,75	42,04	44,37	46,74	49,14
62	22,59	24,40	26,27	28,21	30,21	32,27	34,38	36,55	38,78	41,02	43,31	45,64	48,00
64	21,95	23,72	25,56	27,46	29,42	31,44	33,52	35,65	37,83	40,04	42,30	44,59	46,92
66	21,36	23,10	24,90	26,77	28,71	30,70	32,75	34,85	36,99	39,18	41,41	43,67	45,97
68	20,80	22,50	24,28	26,12	28,03	29,99	32,01	34,08	36,20	38,36	40,56	42,79	45,06
70	20,28	21,97	23,72	25,54	27,42	29,36	31,36	33,41	35,50	37,64	39,82	42,04	44,28

ANEXO I

Estructura por edad en poblaciones estables.

A continuación están indicadas las estructuras por edad en poblaciones estables, obtenidas según la fórmula (10) para diferentes niveles de esperanza de vida al nacimiento (L_0) y diferentes niveles de la tasa de incremento r .

El detalle del cálculo es semejante al indicado en el cuadro.

Estructura por edades en poblaciones estables modelos según el nivel de la esperanza de vida al nacimiento y de la tasa de incremento.

$L_0 = 32$	$r=$ 0,00	$r=$ 0,01	$r=$ 0,02	$r=$ 0,03	$r=$ 0,04
0 - 14	3.075	3.734	4.401	5.044	5.645
15 - 49	5.211	5.064	4.764	4.391	3.980
50 - 64	1.190	891	641	448	306
65 y +	524	311	194	117	69
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
<hr/>					
$L_0 = 34$					
0 - 14	2.982	3.651	4.323	4.972	5.580
15 - 49	5.229	5.066	4.784	4.422	4.017
50 - 64	1.255	938	678	475	326
65 y +	534	345	215	131	77
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
<hr/>					
$L_0 = 36$					
0 - 14	2.896	3.567	4.243	4.899	5.514
15 - 49	5.201	5.065	4.802	4.452	4.054
50 - 64	1.310	984	714	503	345
65 y +	593	384	241	146	87
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
<hr/>					
$L_0 = 38$					
0 - 14	2.818	3.489	4.168	4.832	5.454
15 - 49	5.172	5.061	4.814	4.477	4.086
50 - 64	1.361	1.028	749	529	364
65 y +	649	422	269	162	96
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

continúa en la página siguiente

$L_0 = 40$	$r=0,00$	$r=0,01$	$r=0,02$	$r=0,03$	$r=0,04$
0 - 14	2.745	3.417	4.101	4.769	5.397
15 - 49	5.142	5.054	4.827	4.500	4.115
50 - 64	1.408	1.069	782	554	382
65 y +	705	460	290	177	106
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 42$					
0 - 14	2.676	3.349	4.036	4.708	5.343
15 - 49	5.109	5.045	4.835	4.520	4.141
50 - 64	1.452	1.107	813	578	400
65 y +	763	499	316	194	116
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 44$					
0 - 14	2.612	3.285	3.975	4.653	5.293
15 - 49	5.077	5.033	4.840	4.536	4.165
50 - 64	1.492	1.143	843	601	417
65 y +	819	539	342	210	125
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 46$					
0 - 14	2.553	3.225	3.918	4.600	5.244
15 - 49	5.045	5.021	4.844	4.552	4.182
50 - 64	1.527	1.176	870	622	432
65 y +	875	578	368	226	138
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 48$					
0 - 14	2.497	3.169	3.864	4.549	5.200
15 - 49	5.014	5.009	4.848	4.566	4.208
50 - 64	1.560	1.206	896	643	447
65 y +	929	616	392	242	145
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

continúa en la página siguiente

$L_0 = 60$	$r=$ 0,00	$r=$ 0,01	$r=$ 0,02	$r=$ 0,03	$r=$ 0,04
0 - 14	2.241	2.907	3.610	4.313	4.987
15 - 49	4.836	4.927	4.843	4.618	4.294
50 - 64	1.699	1.342	1.015	738	520
65 y +	1.224	824	532	331	199
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 62$					
0 - 14	2.208	2.874	3.577	4.284	4.959
15 - 49	4.811	4.914	4.841	4.626	4.305
50 - 64	1.716	1.359	1.030	751	529
65 y +	1.265	853	552	339	207
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 64$					
0 - 14	2.177	2.843	3.547	4.254	4.932
15 - 49	4.788	4.902	4.839	4.629	4.315
50 - 64	1.731	1.374	1.044	762	538
65 y +	1.304	881	570	355	215
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 66$					
0 - 14	2.144	2.807	3.511	4.221	4.902
15 - 49	4.760	4.887	4.836	4.634	4.326
50 - 64	1.746	1.391	1.060	775	548
65 y +	1.350	915	593	370	224
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

$L_0 = 68$					
0 - 14	2.111	2.772	3.477	4.188	4.873
15 - 49	4.733	4.875	4.833	4.639	4.336
50 - 64	1.761	1.407	1.074	788	558
65 y +	1.395	948	616	385	233
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

continúa en la página siguiente

$L_0 = 70$	$r=$ 0,00	$r=$ 0,01	$r=$ 0,02	$r=$ 0,03	$r=$ 0,04
0 - 14	2.075	2.734	3.441	4.154	4.842
15 - 49	4.698	4.854	4.826	4.643	4.346
50 - 64	1.775	1.424	1.090	801	568
65 y +	1.452	988	643	402	244
Total	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

ANEXO II

Uso de las poblaciones estables en algunos problemas de estimación.

Se encontrarán para diferentes tipos de poblaciones estables:

1. La estructura por grandes grupos de edad según diferentes niveles de esperanza de vida al nacimiento (L_0) y diferentes tasas de crecimiento (r) en el anexo I.
2. Las tasas de natalidad correspondientes a estas poblaciones modelos en el cuadro XV.
3. Las tasas de mortalidad resultan de las diferencias entre las tasas de incremento (Anexo I) y de las tasas de natalidad (cuadro XV).
4. Las tasas brutas de reproducción correspondientes a esas poblaciones en el cuadro XXI.
5. Las tasas netas de reproducción en el cuadro XX.
6. Una estimación del intervalo medio entre dos generaciones en el cuadro XIX.

Una utilidad que puede obtenerse del conjunto de estos cuadros es permitir, conociendo solamente dos de los ocho factores considerados (estructura por edad, r , L_0 , b , d , R_0 , R'_0 , T_r), reconstruir los seis factores restantes.

Por ejemplo conocemos, para una población estable, la tasa de incremento r , mediante los efectivos totales de la población en censos sucesivos, y la estructura por grandes grupos de edad. Se encuentra en el anexo I la esperanza de vida al nacimiento, en el cuadro XV la tasa de natalidad, en los cuadros XXI y XX las tasas brutas y netas de reproducción, en el cuadro XIX el intervalo medio entre dos generaciones. La tasa de mortalidad se estima en base al Anexo I que proporciona la tasa de incremento y del cuadro XV que proporciona la tasa de natalidad.

Interpolación del tipo lineal permite obtener estimaciones para poblaciones que tienen datos comprendidos entre dos cifras consecutivas de los cuadros anteriores.

Veremos más adelante otros métodos que exigen disponer de informaciones aún más reducidas para reconstruir el conjunto de los factores desconocidos. Estos métodos se basan en la comparación entre el dato conocido de la población (por ejemplo la tasa de natalidad) y el de una población teórica. La relación entre las 2 tasas de natalidad permiten estimar la relación entre las tasas netas de reproducción y de ahí, estimar los demás factores de la población considerada.

CAPITULO III

LA POBLACION LOGISTICA

Evolución numérica, tasa de natalidad, tasa de mortalidad, estructura por edad.

1. Evolución numérica.

Según Malthus la población crece en progresión geométrica por su fuerza de expansión interna; o sea, si $N(t)$ es la población al instante t , y h un parámetro, el crecimiento durante el intervalo de tiempo dt es $h N(t)dt$, si no interviene ningún freno que haga disminuir el ritmo de este crecimiento. En 1835 el estadístico belga Adolphe Quetelet* y en 1838, inspirado por éste, el matemático belga P.F. Verhulst ** formularon una hipótesis sobre la intensidad que debe tener el freno preventivo previsto por Malthus.

La función llamada "logística" encontrada por estos dos autores para representar la variación de densidad de la población fué reconsiderada al rededor de 1920 por R. Pearl y L. Reed *** que la aplicaron en biología y por Kuznetz **** que la aplicó en economía.

Según Quetelet el desarrollo de la población es frenado en razón de su cuadrado. Si k es un parámetro, la fórmula que representa el desarrollo de la población en el tiempo es:

$$(31) \quad d N(t) = h N(t) dt - k N^2(t) dt$$

o

$$(32) \quad \frac{d N(t)}{dt} = N(t) [h - k N(t)]$$

* Quetelet A. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou essai de physique sociale. Bruxelles, 1835, vol. I, p. 277-278.

** Verhulst F.P. Noticé sur la loi que la population suit dans son accroissement en "Correspondence mathématique et physique publié par A. Quetelet", tome XVIII, Bruxelles 1835, Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population en "Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Bruxelles", tome XX, Bruxelles, 1847.

*** Pearl R. y Reed L.J. On the mathematical theory of Population Growth Metron, vol. IV, 1923.

**** Kuznetz S. Secular Movements in Production and Prices (1930).

Supongamos $\frac{h}{k} > N(t)$, o sea, la población creciente.

Integrando (32) y escribiendo $K = \frac{h}{k}$, obtenemos:

$$(33) N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-ht}}$$

Efectivamente la ecuación (32) se escribe:

$$\frac{d N(t)}{dt} = h N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] = h N(t) \frac{K - N(t)}{K}$$

que da:

$$\frac{K d N(t)}{N(t) [K - N(t)]} = h dt$$

y luego, integrando ambas partes:

$$\int \frac{K d N(t)}{N(t) [K - N(t)]} = ht - a$$

que puede transformarse en:

$$\int \left[\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{K - N(t)} \right] d N(t) = \log N(t) - \log [K - N(t)] = - \log \frac{K - N(t)}{N(t)}$$

Por lo tanto:

$$\log \frac{K - N(t)}{N(t)} = - ht + a$$

de donde (poniendo $C = e^a$):

$$\frac{K - N(t)}{N(t)} = \frac{K}{N(t)} - 1 = e^{-ht} e^a = C e^{-ht}$$

y, finalmente:

$$(33) N(t) = \frac{K}{1 + e^{a-ht}} = \frac{K}{1 + C e^{-ht}}$$

La curva representativa de esta función está indicada en el gráfico,

Antes de **ver las propiedades** de la función logística, calcularemos las derivadas primera y segunda de $N(t)$.

Cálculo de la primera derivada de $N(t)$:

$$N'(t) = -\frac{h}{k} (1 + C e^{-ht})^{-2} C e^{-ht}(-h) = \frac{C h^2 e^{-ht}}{k} (1 + C e^{-ht})^{-2}$$

$$(34) \quad N'(t) = \frac{C h^2 e^{-ht}}{k(1 + C e^{-ht})^2} = \frac{C h^2}{k e^{ht} + 2 k C + k C^2 e^{-ht}}$$

La derivada segunda llega a ser:

$$\begin{aligned} N''(t) &= \frac{Ch^2}{k} \frac{[-he^{-ht} (1 + C e^{-ht})^2 - e^{-ht} 2(1 + C e^{-ht}) (-Ch e^{-ht})]}{(1 + C e^{-ht})^4} \\ &= \frac{Ch^2}{k} \frac{(1 + C e^{-ht}) [-h e^{-ht} (1 + C e^{-ht}) + e^{-ht} 2 C h e^{-ht}]}{(1 + C e^{-ht})^4} \\ &= \frac{Ch^2}{k} \frac{-h e^{-ht} - C h e^{-2ht} + 2 C h e^{-2ht}}{(1 + C e^{-ht})^3} \end{aligned}$$

$$(35) \quad N''(t) = \frac{Ch^3}{k} \frac{e^{-ht}(C e^{-ht} - 1)}{(1 + C e^{-ht})^3}$$

Propiedades de la función logística.

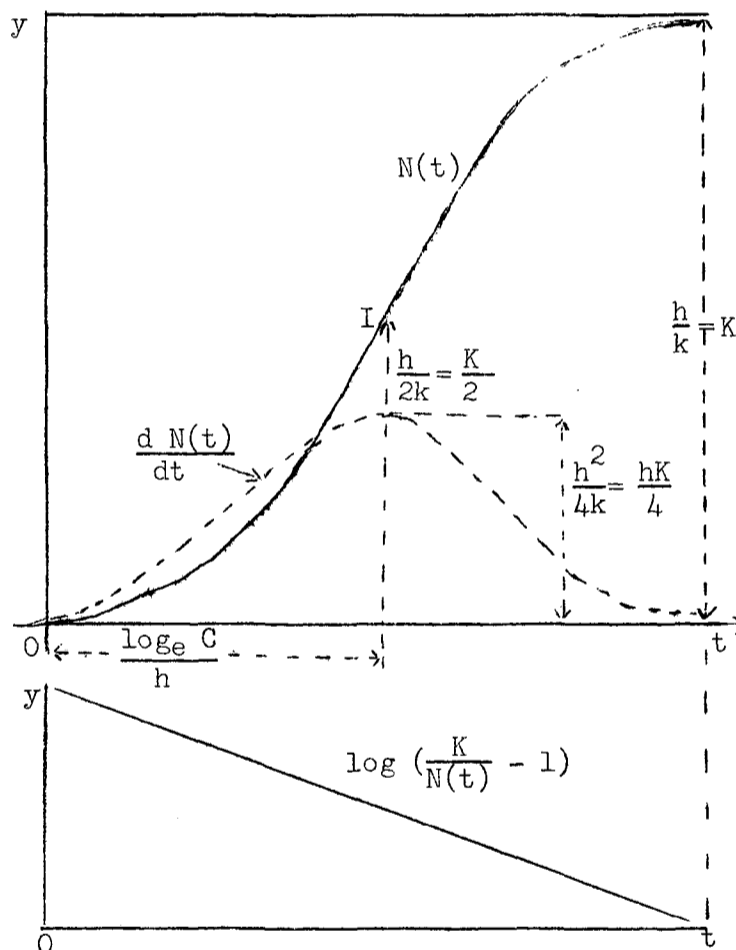
1. Supondremos que el intervalo de variación de t es finito. Cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$ e^{-ht} varía de $+\infty$ a 0. $N(t)$ es entonces siempre positivo y crece de 0, cuando $t = -\infty$, a $K = \frac{h}{k}$ cuando $t = +\infty$. El eje de las abscisas y la recta $K = \frac{h}{k}$ son dos asíntotas. Por ejemplo, la población que vive en un territorio dado tiene un efectivo comprendido entre 0 y K ; el límite mayor K depende del progreso técnico que permite obtener un provecho más o menos abundante del territorio.

2. La curva es simétrica respecto a un punto I. En el primer tramo, la curva es convexa y en el segundo tramo es cóncava. El punto I tiene por coordenadas (punto de inflexión):

$$t = \frac{1}{h} \log_e C \qquad y = \frac{K}{2}$$

En este punto la pendiente es máxima e igual a: $\frac{hK}{4}$

Gráfico No. 3



3. La derivada primera es:

$$N'(t) = \frac{C h^2}{k e^{ht} + 2 k C + k C^2 e^{-ht}}$$

si $t = +\infty$, el denominador tiende hacia el infinito y $N'(t)$ hacia 0. La curva de la derivada $N'(t)$ pasa por un máximo en el punto de las coordenadas:

$$t = \frac{1}{h} \log_e C \qquad y = \frac{h^2}{4k} = \frac{hK}{4}$$

4. El crecimiento absoluto

$$(36) \quad \frac{dN(t)}{dt} = k N(t) [K - N(t)]$$

es una función al principio creciente y luego decreciente cuando $N(t)$ varía desde su límite inferior hacia su límite superior.

El crecimiento es proporcional al producto del camino ya transcurrido por el camino que queda por transcurrir $[K - N(t)]$.

5. El crecimiento relativo $\frac{dN(t)}{N(t)dt}$ se escribe:

$$(37) \quad \frac{dN(t)}{N(t)dt} = h - k N(t)$$

Efectivamente:

$$N(t) = \frac{h : k}{1 + C e^{-ht}}$$

y, tomando en cuenta (34):

$$\frac{dN(t)}{N(t)dt} = \frac{h C e^{-ht}}{1 + C e^{-ht}}$$

que puede escribirse:

$$\frac{dN(t)}{N(t)dt} = \frac{h + h C e^{-ht} - h}{1 + C e^{-ht}} = \frac{h(1 + C e^{-ht}) - h}{1 + C e^{-ht}} = h - \frac{h}{1 + C e^{-ht}}$$

y, como $K = \frac{h}{k}$

$$\frac{dN(t)}{N(t)dt} = \frac{d \log N(t)}{dt} = h - k \frac{K}{1 + C e^{-ht}} = h - k N(t)$$

El crecimiento relativo es una función lineal, siempre decreciente (ver-se el gráfico), lo que es confirmado por la experiencia.

La logística normalizada y sus derivadas sucesivas.

La fórmula:

$$N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-ht}}$$

llega a ser, tomando la unidad para medir la población $N(t)$ en su punto máximo K :

$$(38) \quad N(t) = \frac{1}{1 + C e^{-ht}}$$

Si admitimos como origen del tiempo el punto de inflexión cuyas coordenadas son:

$$t = \frac{1}{h} \log_e C \qquad y = \frac{K}{2}$$

encontramos:

$$(39) \quad N(t) = \frac{1}{1 + e^{-ht}} = \frac{1}{2} (1 + \tanh \frac{ht}{2})$$

Tenemos:

$$(40) \quad N(t) = \frac{1}{1 + e^{-ht}} = \frac{e^{ht}}{1 + e^{ht}}$$

y

$$N(t) + N(-t) = 1$$

$$(41) \quad N'(t) = \frac{h e^{-ht}}{(1 + e^{-ht})^2} = h N(t) N(-t)$$

de modo que:

$$(42) \quad \frac{N'(t)}{N(t)} = h N(-t)$$

Las derivadas sucesivas son:

$$(43) \quad N(t) = \frac{1}{1 + e^{-ht}}$$

$$(43) \quad N'(t) = \frac{h e^{-ht}}{(1 + e^{-ht})^2}$$

$$(43) \quad N''(t) = \frac{-h^2 e^{-ht}(1 - e^{-ht})}{(1 + e^{-ht})^3}$$

$$(43) \quad N'''(t) = \frac{h^3 e^{-ht}(1 - 4e^{-ht} + e^{-2ht})}{(1 + e^{-ht})^4} \dots$$

Estas expresiones son útiles en el cálculo de los nacimientos, defunciones y de la estructura por edad de una población logística como lo veremos más adelante.

El ajustamiento mediante una función logística.

El ajuste de una serie logística a una serie observada suele hacerse por el método de los "selected points" de Yule: Se hace pasar la curva por tres puntos que parecen encontrarse sobre la línea de tendencia (estos puntos pueden resultar de un cálculo de término medio a base de diversas observaciones consecutivas. Sin embargo, siendo la curva no lineal se recomienda es este cálculo tomar puntos próximos. Se obtiene de esta manera tres ecuaciones que permiten determinar los tres parámetros de la curva logística.

La solución de este sistema puede simplificarse, tomando tres puntos de una abscisa equidistante, estando el origen del tiempo ubicado en uno de ellos, por ejemplo en el primero.

Los puntos son:

$$\begin{aligned} 0, & N(1) \\ t_2, & N(2) \\ 2t_2, & N(3) \end{aligned}$$

Escribamos la ecuación (33) bajo la forma:

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{a - ht}}$$

y, pasando a los logaritmos:

$$a - ht = \log \frac{K}{1 + e^{a - ht}}$$

Tenemos, entonces, el sistema:

$$(44) \begin{cases} a = \log \frac{K - N(1)}{N(1)} \\ a - h t_2 = \log \frac{K - N(2)}{N(2)} \\ a - 2 h t_2 = \log \frac{K - N(3)}{N(3)} \end{cases}$$

del cual comenzamos por sacar K:

$$(45) \quad K = \frac{2 N(1) N(2) N(3) - N^2(2) [N(1) + N(3)]}{N(1) N(3) - N^2(2)}$$

y luego el parámetro a, reemplazando el valor de K en la primera ecuación del sistema (44) y el parámetro h, reemplazando a y K en la segunda y en la tercera ecuación del sistema (44).

Ejemplo: Representación de la población de los Estados Unidos desde 1790 hasta 1940, mediante una función logística.

El cuadro XVI indica, en la columna -3- la evolución de la población de los Estados Unidos desde 1790 a 1940. Los tres puntos elegidos para el cálculo de los parámetros son:

$$\begin{aligned} 1800 : t_1 = 0 & \quad N(1) = \sqrt[3]{3,9 \cdot 5,3 \cdot 7,2} = 5,3 \\ 1860 : t_2 = 6 & \quad N(2) = \sqrt[3]{23,2 \cdot 31,4 \cdot 38,6} = 30,4 \\ 1920 : t_3 = 12 & \quad N(3) = \sqrt{92,0 \cdot 105,7 \cdot 122,8} = 106,1 \end{aligned}$$

Se han tomado medias geométricas para un primer ajuste de estos tres puntos.

Luego se encuentra el parámetro K mediante la fórmula (45)

$$K = 190,8$$

y los parámetros a y h:

$$a = \log \frac{K - N(1)}{N(1)} = 2,3026 \quad \text{Log}_{10} \frac{K - N(1)}{N(1)} = 3,55$$

$$h = \frac{1}{t_2} \text{Log} \frac{[K - N(1)] N(2)}{N(1) [K - N(2)]} = \frac{2,3026}{t_2} \text{Log}_{10} \frac{[K - N(1)] N(2)}{N(1) [K - N(2)]}$$

$$h = -0,315$$

De modo que la ecuación de ajustamiento toma la forma:

$$N(t) = \frac{190,8}{1 + e^{3,55 - 0,315 t}}$$

donde t es el tiempo, expresado en decenas de años y es igual a cero en 1800.

Para calcular los valores ajustados es conveniente escribir:

$$e^{a - ht} = \mu$$

y poniendo:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \mu}$$

se calcula μ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Log}_{10} \mu &= 0,4343 \text{Log}_e \mu \\ &= 0,4343 (a - ht) \end{aligned}$$

En el ejemplo tomado:

$$\text{Log}_{10} \mu = 0,4343 (3,55 - 0,315 t) = 1,542 - 0,137 t$$

Como puede comprobarse, comparando las cifras observadas (columna -3-) y las cifras teóricas (columna -6-) la función representa de manera bastante fidedigna la evolución de la población de los Estados Unidos entre 1790 y 1940, a pesar de las guerras, inmigración, desarrollo de la industria, etc. Sin embargo, la previsión de la población de los Estados Unidos, a base de la función encontrada, indica cifras demasiado bajas para 1950 y 1960. La estimación es de 157 millones para 1960, 179 para el año 2000 y el máximo es alcanzado en el año 2040 con 191 millones. La curva logística parece conveniente solamente si quiere obtenerse estimaciones aproximadas a largo plazo. Para estimaciones a corto o medio plazo, el método de las proyecciones de población parece ser preferible.

Cuadro XVI Ajustamiento de la población de los Estados Unidos por una función logística (1780-1950).

Año	t	Población observada (en millones)	Log $\mu = 1,542 - 0,137 t$	$1 + \mu$	$N(t) = \frac{190,8}{1 + \mu}$
-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-
1780	-2	1,815	66,4	2,88
1790	-1	3,9	1,679	48,7	3,92
1800	0	5,3	1,542	35,8	<u>5,33</u>
1810	1	7,2	1,405	26,4	7,22
1820	2	9,6	1,269	19,6	9,75
1830	3	12,9	1,132	14,6	13,11
1840	4	17,1	0,996	10,9	17,51
1850	5	23,2	0,859	8,2	23,20
1860	6	31,4	0,722	6,3	<u>30,41</u>
1870	7	38,6	0,586	4,9	39,33
1880	8	50,2	0,449	3,8	50,06
1890	9	62,9	0,312	3,1	62,51
1900	10	76,0	0,176	2,5	76,37
1910	11	92,0	0,139	2,1	91,12
1920	12	105,7	-0,097 = $\bar{1},903$	1,8	<u>106,08</u>
1930	13	122,8	-0,334 = $\bar{1},766$	1,6	120,53
1940	14	132,0	-0,370 = $\bar{1},630$	1,4	133,84
1950	15	-0,507 = $\bar{1},493$	1,3	145,57

Generalización de la curva logística.

En razón de su simetría la función logística no se adapta siempre a las observaciones. Puede introducirse las variantes siguientes:

1) Se supone que la forma logística empieza solamente después que la población ha alcanzado un cierto tamaño \bar{N} . La ecuación es:

$$(46) \quad N(t) = \bar{N} + \frac{K}{1 + C e^{-ht}}$$

La segunda asíntota es $\bar{N} + K$. Los cálculos difieren poco de lo que ya hemos visto.

2) Una generalización introducida por Pearl y Reed y aplicada por estos autores al campo de la biología consiste en utilizar la función:

$$(47) \quad N(t) = \frac{K}{1 + C e^{p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots + p_n t^n \dots}}$$

La forma de la curva depende entonces del grado n y de sus coeficientes p_n . La curva no es ya simétrica. En la práctica los cálculos llegan a ser muy complejos.

3) Puede suponerse que no es $N(t)$, sino el $\text{Log } N(t)$ el que sigue una ley logística, por ejemplo, con logaritmo de base 10:

$$(48) \quad U = \text{Log}_{10} N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-ht}}$$

Cuando U varía de 0 a K , $N(t)$ varía de 1 a 10^K , de aquí la disimetría de la curva representativa de la función $N(t)$.

4) Puede, finalmente, ajustarse a las cifras observadas una serie de arcos de logística. Este procedimiento puede justificarse solamente si pueden distinguirse desarrollos diferentes en ciertos períodos (guerra, inmigración discontinua) con respecto a otros.

II. Nacimientos, defunciones y estructura por edad en una población logística.

Los nacimientos en una población cualquiera.

Hasta ahora hemos considerado, en el análisis de la natalidad, solamente poblaciones estables. Supondremos en este capítulo, que la población tiene tasas de natalidad variables con el tiempo en lugar de suponerlas fijas. *

Recordamos la ecuación fundamental que enlaza el número de habitantes durante el año t con los nacimientos ocurridos durante los años anteriores:

$$(3) \quad N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) da$$

Imaginamos que $N(t)$ y $B(t)$ pueden ser representados de la manera siguiente:

$$(49) \quad N(t) = k_0 \phi(t) + k_1 \phi'(t) + \frac{k_2}{2!} \phi''(t) + \dots$$

$$(50) \quad B(t) = c_0 \phi(t) + c_1 \phi'(t) + \frac{c_2}{2!} \phi''(t) + \dots$$

donde $\phi'(t), \phi''(t) \dots$ son las derivadas sucesivas de $\phi(t)$.

Introducimos (50) en (49). Pero, antes, desarrollamos $B(t-a)$ en la serie de Taylor en la ecuación (3):

$$(51) \quad N(t) = \int_0^{\infty} \left[B(t) - a B'(t) + \frac{a^2}{2!} B''(t) + \dots \right] p(a) da$$

De (50) obtenemos para las derivadas sucesivas de $B(t)$:

$$(52) \quad B'(t) = c_0 \phi'(t) + c_1 \phi''(t) + \dots$$

$$(53) \quad B''(t) = c_0 \phi''(t) + \dots$$

De modo que (51) se escribe:

$$(54) \quad N(t) = c_0 L_0 \phi(t) - (c_0 L_1 - c_1 L_0) \phi'(t) + \frac{1}{2!} (c_0 L_2 - 2 c_1 L_1 + c_2 L_0) \phi''(t) - \dots$$

* Lotka A.J. The Structure of a growing population. Human Biology, Dic. 1931, III, vol. 4, 459 -493.

donde $L_n = \int_0^{\infty} a^n p(a) da$.

Comparando los términos del mismo orden de la ecuación (49) y de la (54), podemos encontrar $N(t)$, si $B(t)$ es conocido o, al contrario, encontrar $B(t)$ si $N(t)$ es conocido.

La identificación conduce a:

$$(55) \begin{cases} k_0 = c_0 L_0 \\ k_1 = c_1 L_0 - c_0 L_1 = (c_1 - \frac{L_1}{L_0} c_0) L_0 \\ k_2 = c_0 L_2 - 2 c_1 L_1 + c_2 L_0 = (c_0 \frac{L_2}{L_0} - 2 c_1 \frac{L_1}{L_0} + c_2) L_0 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

De modo general puede obtenerse la igualdad simbólica:

$$k_s = (c - \frac{L}{L_0})^s L_0 \quad \text{con } s > 0$$

substituyendo, convencionalmente, en el desarrollo del binomio, índices a las potencias.

Caso particular: $N(t) = k_0 \phi(t)$

En este caso las ecuaciones (55) llegan a ser:

$$(56) \begin{cases} c_0 = \frac{k_0}{L_0} \\ c_1 = \lambda_1 c_0 \\ c_2 = \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_0 \\ c_3 = \lambda_1 c_2 - 2\lambda_2 c_1 + \lambda_3 c_0 \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Estas fórmulas pueden simplificarse si hacemos el cambio de variable:

$$t' = t - \lambda_1$$

La ecuación (3) llega a ser entonces:

$$(57) \quad N(t) = \int_0^{\infty} [B(t - \lambda_1) - (a - \lambda_1)] p(a) da$$

Se desarrolla $B[(t - \lambda_1) - (a - \lambda_1)]$ en serie de Taylor de una misma manera que anteriormente en (51).

Pongamos:

$$(58) \quad B(t') = c_0' \phi(t) + c_1' \phi'(t) + c_2' \phi''(t) + \dots$$

Por lo tanto:

$$B'(t') = c_0' \phi'(t) + c_1' \phi''(t) + \dots$$

$$B''(t') = c_0' \phi''(t) + \dots$$

Se llega así a ecuaciones del tipo (55) donde hacemos:

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

lo que permite obtener:

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0' = \frac{k_0}{L_0} \\ c_1' = 0 \\ c_2' = -\lambda_2 c_0 \\ c_3' = \lambda_3 c_0 \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

De manera que la solución (50) de la ecuación (3) llega a ser:

$$(60) \quad B(t) = \frac{k_0}{L_0} \left[\phi(t') - \frac{\lambda_2}{2!} \phi''(t') + \frac{\lambda_3}{3!} \phi'''(t') - \dots \right]$$

Si despreciamos los términos que contienen derivadas de (t') a partir de la segunda derivada, podemos escribir:

$$(61) \quad B(t) = \frac{k_0}{L_0} \phi(t')$$

O sea, los nacimientos siguen la misma ley que la población, siendo solamente trasladados hacia la izquierda en una distancia $-\lambda_1$, que depende únicamente de la ley de mortalidad.

Número de defunciones.

En el mismo caso particular $N(t) = k_0 \phi(t)$ y haciendo el cambio de variable:

$$t' = t + (\lambda_1 - L_0)$$

se muestra que los números de defunciones siguen también la misma ley que $N(t)$, siendo solamente trasladados hacia la derecha en una distancia $L_0 - \lambda_1$ que depende solamente de la tabla de vida.

Tasa de natalidad, tasa de mortalidad y estructura por edad.

La tasa de natalidad se obtiene dividiendo $B(t)$ por $N(t)$:

$$(62) \quad b(t) = \frac{B(t)}{N(t)} = \frac{1}{L_0} \left[1 + \lambda_1 \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} + \frac{1}{2!} (\lambda_1^2 - \lambda_2) \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} + \dots \right]$$

La tasa de mortalidad se obtiene mediante la igualdad:

$$d(t) = b(t) - \frac{dN(t)}{N(t) dt}$$

La estructura por edad resulta de la relación:

$$c(a) = \frac{B(t-a)}{N(t)} p(a)$$

donde reemplazamos $B(t - a)$ y $N(t)$ por los valores encontrados en (61) y (49).

Caso de una población logística.

Utilizaremos la función logística normalizada, calculada en (39). Conocemos sus derivadas sucesivas. La ecuación (61) se escribe entonces:

$$(63) \quad B(t) = \frac{k_0}{L_0} \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{ht'}{2} \right)$$

La curva de los nacimientos es parecida a la de la población con las diferencias siguientes:

1. Es trasladada, respecto a la curva de la población hacia la izquierda, a una distancia $-\lambda_1$.
2. La amplitud de la curva, en lugar de ser k_0 es $\frac{k_0}{L_0}$.

La tasa de natalidad se obtiene mediante la ecuación (62) y recordando la propiedad (42):

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = h \phi(-t)$$

se obtiene así:

$$(64) \quad b(t) = \frac{1}{L_0} \left[1 + \lambda_1 h \phi(-t) \right] \dots$$

Las curvas de la población de los nacimientos de las defunciones y del crecimiento absoluto están representadas en el gráfico No. 4.

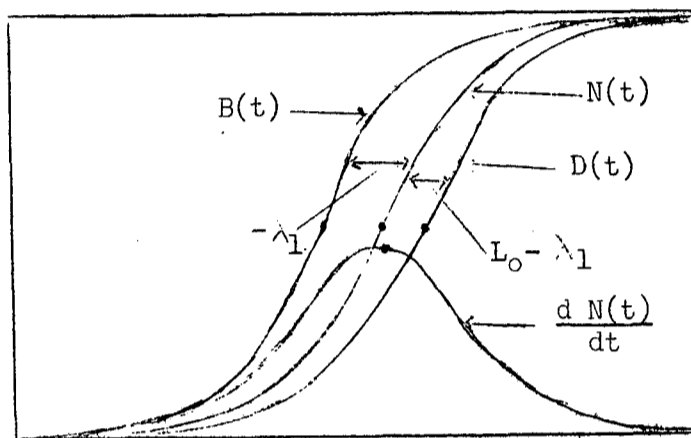


Gráfico No. 4. Curvas de $N(t)$, $B(t)$, $D(t)$ y $\frac{dN(t)}{dt}$ en una población logística con indicación de las posiciones relativas de sus centros.

CAPITULO IV

FECUNDIDAD - REPRODUCCION

Dificultad del estudio: el carácter "bigene" de la fecundidad.

El estudio de la fecundidad parece a menudo más difícil que el estudio de la mortalidad, debido al carácter "bigene" de la primera. Para demostrarlo esquemáticamente, descompondremos la población en el instante t , $N(t)$, en función de la edad:

$$N(t) = \sum_a N(a,t)$$

siendo $N(a,t)$ el número de individuos de edad a al instante t .

Tenemos, asimismo, para las defunciones:

$$D(t) = \sum_a D(a,t)$$

siendo $D(a,t)$ el número de defunciones de edad a al instante t .

Las tasas de defunciones por edad $\frac{D(a,t)}{N(a,t)}$ tendrán una tendencia a ser más estables que las tasas generales de defunciones $\frac{D(t)}{N(t)}$.

En efecto, las tasas $\frac{D(a,t)}{N(a,t)}$ son una especie de parámetros biológico-sociales inherentes a la población, pues cambian lentamente con las modificaciones de las condiciones económicas y sociales de vida y con el progreso de la ciencia médica, mientras que la tasa $\frac{D(t)}{N(t)}$ es un medio ponderado de estos parámetros:

$$(65) \quad \frac{D(t)}{N(t)} = \sum_a \frac{N(a,t)}{N(t)} \frac{D(a,t)}{N(a,t)} = \sum_a c(a,t) d(a,t)$$

donde $c(a,t)$ son las proporciones de individuos de edad a al instante t y $d(a,t)$ las tasas específicas de mortalidad al instante t .

Los coeficientes de ponderación $c(a,t)$ resultan de la evolución experimentada por la mortalidad y, sobre todo, por la fecundidad. Solamente en poblaciones estables se mantienen fijos; en todas las demás cambian de un año para el otro, lo que hace que las variaciones de $\frac{D(t)}{N(t)}$ sean más complejas que las de $\frac{D(a,t)}{N(a,t)}$.

Hemos descompuesto $D(t)$ en una suma. Puede pensarse en descomponer $B(t)$ de la misma manera. Pero aquí aparece una gran dificultad: las defunciones pueden

clasificarse según la edad al momento de la muerte, mientras que los nacimientos deben clasificarse según la edad de los dos padres al momento del parto. Sea, por ejemplo, $B(i,j,t)$ el número de nacimientos al instante t , cuyos padres son de edad i y cuyas madres son de edad j . Tenemos:

$$B(t) = \sum_{i,j} B(i,j,t)$$

Puede pensarse en una descomposición bajo la forma de un medio ponderado, como lo hemos hecho para la mortalidad, de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{N}(i,j,t)$ el número de parejas, cuyos esposos y esposas son de edad i y j , respectivamente, al instante t :

$$\frac{B(t)}{N(t)} = \sum_{i,j} \frac{\mathcal{N}(i,j,t)}{N(t)} \frac{B(i,j,t)}{\mathcal{N}(i,j,t)}$$

Si llamamos $m(i,j,t)$ las relaciones $\frac{B(i,j,t)}{\mathcal{N}(i,j,t)}$, o sea, las tasas de fecundidad de las parejas, tenemos:

$$(66) \quad \frac{B(t)}{N(t)} = \sum_{i,j} \frac{\mathcal{N}(i,j,t)}{N(t)} m(i,j,t)$$

Esta relación es de naturaleza diferente, bastante más compleja que la que se refiere a la mortalidad (65).

Tenemos, en efecto:

$$\sum_a N(a,t) = N(t)$$

$$\sum_{i,j} \mathcal{N}(i,j,t) \neq N(t)$$

Y, por otra parte, la variación de los $N(a,t)$ con el tiempo es bastante simple: $N(a,t)$ no puede disminuir de un año a otro y de una edad a otra, sino que por mortalidad, salvo $N(0,t)$; mientras que las variaciones de $\mathcal{N}(i,j,t)$ son mucho más complicadas, puesto que hay "nacimientos" de parejas (por nupcialidad) y "defunciones" de parejas (por defunción de uno de los contrayentes, divorcios), cuyas leyes de variación son más complejas que las de la mortalidad.

Para evitar estas dificultades, los demógrafos suelen estudiar el fenómeno de la fecundidad en una población únicamente femenina (relacionando los nacimientos de hijas con las madres, sin considerar los nacimientos de varones respecto a los padres). Bajo esta condición, la descomposición de $B(t)$ toma la siguiente forma:

$$B(t) = \sum_a B(a,t)$$

siendo $B(a,t)$ el número de nacimientos de hijas cuyas madres son de edad a al instante t . Tenemos, entonces:

$$(67) \quad \frac{B(t)}{N(t)} = \sum_a \frac{N(a,t)}{N(t)} \quad \frac{B(a,t)}{N(a,t)} = \sum_a c(a,t) m(a,t)$$

donde $N(a,t)$ es el número de madres de edad a al instante t y $m(a,t)$ la tasa de fecundidad femenina. Esta fórmula (67) llega a ser semejante a la fórmula (65)*.

Pero como lo veremos más adelante, ese procedimiento ha recibido muchas críticas de parte de algunos demógrafos (en particular Karmel, Hajnal, Hyrenius, Vincent) que han demostrado que el cálculo de tasas de reproducción a base de la fecundidad femenina o masculina conduce a tasas intrínsecas de incremento diferentes. Esta inconsistencia no puede mantenerse a largo plazo y es preciso reemplazar la tasa de reproducción por otro coeficiente que no conduzca a este inconveniente. Esta es una de las críticas (aquí, más bien, de carácter teórico) que suele hacerse en contra de las tasas clásicas de reproducción. Sin embargo, empezaremos a estudiar los métodos clásicos y veremos después las críticas y la manera de corregir los procedimientos usuales.

Las diferentes tasas de fecundidad general.

La tasa de natalidad general puede ser reemplazada con ventajas por la relación del número de nacimientos con el número de mujeres en edades de procreación, o sea, entre 14 y 49 años. Usar un denominador más estrecho presenta la ventaja de eliminar las diferencias de estructura en los tamaños relativos de la población en edad de fecundidad. Esta ventaja no es tan importante a corto plazo, ya que la estructura de la población de mujeres varía poco de un año a otro, contrariamente a lo que sucede a largo plazo o en caso de tratarse de com-

* Veremos más adelante que la tasa bruta de reproducción femenina supone en la fórmula (67) $c(a,t)$ igual para todas las edades y la tasa neta de reproducción $c(a,t) = p(a,t)$ en la misma fórmula (67).

parar países en los cuales las evoluciones demográficas anteriores difieren mucho.

Por razones prácticas se relaciona, de ordinario, el número de nacimientos con el de mujeres de 14 a 49 años. Los límites de edades varían poco de país en país y casi nunca se ha visto, en países que tienen buenas estadísticas, aún con alta fecundidad (por ejemplo Canadá hace 50 años) nacimientos después de 50 años; ya entre 45 y 49 años las frecuencias de nacimientos son muy bajas. En cambio el límite inferior varía bastante, por ejemplo, en Africa del Norte se encuentran nacimientos entre niñas de 12 años, lo que casi nunca ocurre en países europeos; en países latinoamericanos se han observado algunos casos de nacimientos entre niñas de 13 años; pero se trata de casos aislados y que no tienen mayor importancia desde un punto de vista estadístico:

Veamos ahora, las diferentes tasas de fecundidad:

- a) La tasa de fecundidad general total relaciona el número de nacidos vivos y de las defunciones fetales tardías (mortinatalidad) con el número total de mujeres de 14 a 49 años.
- b) La tasa de fecundidad legítima total relaciona el número de nacidos legítimos (vivos y defunciones fetales tardías) con el número total de mujeres casadas de 14 a 49 años.
- c) La tasa de fecundidad ilegítima total relaciona el número de nacidos ilegítimos (vivos y defunciones fetales tardías) con el número de mujeres no casadas (solteras, viudas, divorciadas) de 14 a 49 años.
- d) La tasa de fecundidad general efectiva relaciona el número de nacidos vivos con el número total de mujeres de 14 a 49 años.
- e) La tasa de fecundidad legítima efectiva relaciona el número de nacidos legítimos vivos con el número de mujeres casadas de 14 a 49 años.
- f) La tasa de fecundidad ilegítima efectiva relaciona el número de nacidos vivos ilegítimos con el número de mujeres no casadas de 14 a 49 años.

La tasa más importante para medir el incremento de la población es la tasa de fecundidad efectiva total. Es esta la tasa que usaremos a continuación en las fórmulas. En países latinoamericanos donde la ilegitimidad es bastante grande, hay que tomar también en cuenta la tasa de fecundidad ilegítima efectiva. Como veremos más adelante, más vale estudiar los dos índices separados,

cuando las estadísticas existentes permiten esta separación.

Además puede relacionarse:

- nacimientos de niñas con respecto a mujeres (fecundidad femenina)
- nacimientos de varones con respecto a hombres (fecundidad masculina)
- nacimientos de niñas y varones con respecto a mujeres. (En general suele usarse esta relación).

Damos a título de ejemplo ilustrativo, el cálculo de estas diferentes tasas para Chile, en 1952:

Número estimado de nacidos vivos *	236.636
Número estimado de nacidos vivos legítimos **	191.671
Número estimado de nacidos vivos ilegítimos **	44.965
Número estimado de defunciones fetales tardías (legítimas e ilegítimas) ***	7.423
Número estimado de defunciones fetales tardías legítimas ****	6.013
Número estimado de defunciones fetales tardías ilegítimas ****	1.410
Número total de mujeres de 15 a 49 años *****	1.508.007
Número de mujeres casadas de 15 a 49 años *****	724.857
Número de mujeres no casadas de 15 a 49 años *****	783.150

Las diferentes tasas son:

a) Tasa de fecundidad general total : $\frac{236.636 + 7.423}{1.508.007} = 161,8 \text{ o/oo}$

b) Tasa de fecundidad legítima total : $\frac{191.671 + 6.013}{724.857} = 272,7 \text{ o/oo}$

-
- * Los nacimientos fueron estimados en base de una tasa de natalidad redondeada de 38 o/oo y de una cifra de población estimada por el Servicio Nacional de Estadística de Chile en 6.227.273 al 30 de Junio de 1952.
 - ** Estimación hecha en base de que la subnumeración de los nacimientos guarda la misma proporción para los legítimos y los ilegítimos (81% de los nacimientos son legítimos). En realidad la subnumeración de los nacimientos es mayor para los ilegítimos que para los legítimos.
 - *** Demografía, 1952. Servicio Nacional de Estadística. Santiago 1955.
 - **** Estimación hecha en base de que la proporción de ilegitimidad es igual para los nacidos vivos y las defunciones fetales tardías. En realidad la proporción de ilegitimidad es mayor entre las defunciones fetales tardías que entre los nacidos vivos.
 - ***** Censo General de Población y de Vivienda de 1952. Tomo I. Servicio Nacional de Estadística y Censos. Santiago.

c) Tasa de fecundidad ilegítima total: $\frac{44.965 + 1.410}{783.150} = 59,2 \text{ o/oo}$

d) Tasa de fecundidad general efectiva: $\frac{236.636}{1.508.007} = 156,9 \text{ o/oo}$

e) Tasa de fecundidad legítima efectiva: $\frac{191.671}{724.857} = 264,4 \text{ o/oo}$

f) Tasa de fecundidad ilegítima efectiva: $\frac{44.965}{783.150} = 57,4 \text{ o/oo}$

Relación entre la tasa de natalidad y la tasa de fecundidad general.

Consideramos dos poblaciones llamadas 1 y 2, donde los efectivos al tiempo t son $N_1(t)$ y $N_2(t)$, los números de nacimientos $B_1(t)$ y $B_2(t)$, los números de mujeres en edad fértil $F_1(t)$ y $F_2(t)$.

¿Cuáles son las condiciones para que la relación entre las tasas de natalidad de las dos poblaciones sea igual a la relación entre las tasas de fecundidad general?

Es evidente que la condición para que:

$$\frac{B_1(t)}{N_1(t)} \Big/ \frac{B_2(t)}{N_2(t)} = \frac{B_1(t)}{F_1(t)} \Big/ \frac{B_2(t)}{F_2(t)}$$

es que:

$$\frac{F_1(t)}{N_1(t)} = \frac{F_2(t)}{N_2(t)}$$

La relación entre las tasas de natalidad de dos poblaciones es igual a la relación entre las tasas de fecundidad general cuando las proporciones de mujeres en edad fértil es igual en las dos poblaciones.

Veremos, en otro capítulo, otra relación del mismo tipo en poblaciones estables: la relación entre las tasas de natalidad de dos poblaciones es igual a la relación entre las tasas brutas de reproducción, cuando las proporciones de mujeres en edad fértil es igual en las dos poblaciones.

Tenemos además la ecuación:

$$(68) \quad b(t) = \frac{B(t)}{N(t)} = \frac{B(t)}{F(t)} \frac{F(t)}{N(t)} = m(t) \frac{F(t)}{N(t)}$$

siendo $m(t)$ la tasa general de fecundidad.

Vemos así que la tasa de natalidad es igual al producto de la tasa de fecundidad general por la proporción de mujeres en edad fértil.

En el cuadro XVII están indicadas las tasas de natalidad y de fecundidad observadas en los diferentes países del mundo, en un período reciente. Se ha tomado, en este cálculo, los datos siguientes:

1.- Para los países que poseen estadísticas de nacimientos seguras y suficientemente detalladas, las cifras oficiales de las tasas de natalidad y de fecundidad.

2.- Para los países donde la subnumeración de los nacimientos es importante o para los países que no llevan estadísticas anuales de nacimientos, las tasas de natalidad fueron estimadas a base de tablas modelos de poblaciones estables (conociendo, por ejemplo, una estimación de la esperanza de vida al nacimiento y una estimación de la tasa de incremento entre dos censos, o a partir de la estructura por edades y de una estimación de la esperanza de vida al nacimiento, o a partir de la estructura por edad y estimación de la tasa de incremento). En cuanto a la tasa general de fecundidad, fué estimada mediante la relación (68) a partir de una estructura por edad teórica que ha parecido adecuada. Estos cálculos se hicieron para todos los países latinoamericanos, para la India, Pakistán, Ceilán, Turquía, Tailandia y Birmania.

El detalle del cálculo del coeficiente de correlación lineal entre las tasas de fecundidad y las tasas de natalidad, así encontrados, está indicado en el mismo cuadro. El coeficiente de correlación es de 0,992, o sea, muy elevado. Los coeficientes de regresión son de 0,2985 y 3,2969. Estos indican que cuando la tasa de fecundidad aumenta de 1 o/oo, la tasa de natalidad aumenta, en promedio, de 0,2985 o/oo; asimismo, cuando la tasa de natalidad aumenta de 1 o/oo, la tasa de fecundidad aumenta, en promedio, de 3,2969 o/oo.

Aun cuando la correlación es muy elevada, un examen detallado permite obtener diferencias significativas. Por ejemplo, Japón y Francia tienen casi igual tasa de fecundidad (69,0 o/oo y 70,0 o/oo, respectivamente) y tasas de natalidad que difieren bastante (21,5 o/oo para Japón y 18,8 o/oo para Francia). La diferencia entre las tasas de natalidad es debida únicamente a diferencias en estructura por edad, siendo la población de Francia de estructura más vieja que la de Japón, en razón de una baja fecundidad en largos períodos anteriores,

Cuadro XVII. Correlación entre las tasas de natalidad y las tasas de fecundidad de los diferentes países del mundo (1947 - 1954).

País	Año	Tasas fec. (en o/oo) x	Tasas nat. (en o/oo) y	x ²	y ²	xy
-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-	-7-
Luxemburgo	1947	48,8	14,8	2.381,44	219,04	722,24
Alem. occid.	1953	49,7	15,5	2.470,09	240,25	770,35
Austria	1953	49,8	14,8	2.480,04	219,04	737,04
Inglat. y Gales	1953	55,3	15,5	3.058,09	240,25	857,15
Suecia	1952	55,6	15,5	3.091,36	240,25	861,80
Suiza	1953	59,0	17,0	3.481,00	289,00	1.003,00
Italia	1951	59,4	18,4	3.528,36	338,56	1.092,96
Alemania	1937	60,8	16,3	3.696,64	265,69	991,04
Bélgica	1953	60,8	16,6	3.696,64	275,56	1.009,28
Escocia	1953	61,0	17,8	3.721,00	316,84	1.085,80
Dinamarca	1954	61,5	17,3	3.782,25	299,29	1.063,95
Noruega	1953	67,7	18,7	4.583,29	349,69	1.265,99
Japón	1953	69,0	21,5	4.761,00	462,25	1.483,50
Francia	1953	70,0	18,8	4.900,00	353,44	1.316,00
Argelia (p.eur.)	1948	73,2	21,8	5.358,24	475,24	1.595,76
Portugal	1954	73,7	22,7	5.431,69	515,29	1.672,99
Finlandia	1953	74,0	21,9	5.476,00	479,61	1.620,60
Holanda	1953	76,8	21,8	5.898,24	475,24	1.674,24
Argentina	1950-52	80,0	25,0	6.400,00	625,00	2.000,00
Hungría	1953	81,8	21,6	6.691,24	466,56	1.766,88
Nueva Guinea	1954	82,3	19,1	6.773,29	364,81	1.571,93
Australia	1953	82,9	22,9	6.872,41	524,41	1.898,41
Unión Sudafr.	1950	84,4	25,1	7.123,36	630,01	2.118,44
EE. UU.	1953	85,7	24,6	7.344,49	605,16	2.108,22
Chipre	1954	89,3	27,0	7.974,49	729,00	2.411,10
Nueva Zelandia	1954	90,6	24,7	8.208,36	610,09	2.237,82
Yugoeslavia	1954	92,3	28,4	8.519,29	806,56	2.621,32
Africa Sudocc.	1946	94,9	28,0	9.006,01	784,00	2.657,20

Continúa en la próxima página

Continuación del Cuadro XVII.

País	Año	Tasas fec. (en o/oo) x	Tasas nat. (en o/oo) y	x ²	y ²	xy
-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-	-7-
Canadá	1953	98,8	28,2	9.761,44	795,24	2.786,16
Rodesia del Sur	1951	99,5	28,5	9.900,25	812,25	2.835,75
Islandia	1950	101,9	28,7	10.383,61	823,69	2.924,53
Israel	1953	102,5	32,1	10.506,25	1.030,41	3.290,25
Marruecos	1951	102,8	27,4	10.567,84	750,76	2.816,72
Cuba	1950-52	113,7	35,0	12.927,69	1.225,00	3.979,50
Ceilán	1950-52	143,0	40,0	20.449,00	1.600,00	5.720,00
Barloocuto	1952	123,4	38,5	15.227,56	1.482,25	4.750,90
Chile	1952	125,1	38,0	15.650,01	1.444,00	4.753,80
Jamaica	1950-52	126,8	40,0	16.078,24	1.600,00	5.072,00
Islas Vírgenes	1950	127,3	33,1	16.205,29	1.095,61	4.213,63
Puerto Rico	1950	135,0	39,0	18.225,00	1.521,00	5.265,00
India	1950-52	138,1	40,0	19.071,61	1.600,00	5.524,00
San Vicente	1953	139,5	42,5	19.460,25	1.806,25	5.928,75
Turquía	1950-52	142,9	40,0	20.420,41	1.600,00	5.716,00
Filipinas	1950-52	171,0	50,0	29.241,00	2.500,00	8.550,00
Pakistán	1950-52	181,0	50,0	32.761,00	2.500,00	9.050,00
Tailandia	1950-52	170,0	50,0	28.900,00	2.500,00	8.500,00
Brasil	1950-52	146,4	45,0	21.432,96	2.025,00	6.588,00
México	1950-52	147,7	45,0	21.815,29	2.025,00	6.646,50
Costa Rica	1950-52	149,0	45,0	22.201,00	2.025,00	6.705,00
Colombia	1950-52	150,0	45,0	22.500,00	2.025,00	6.750,00
Birmania	1950-52	150,9	45,0	22.770,81	2.025,00	6.790,50
Paraguay	1950-52	151,4	45,0	22.921,96	2.025,00	6.813,00
Bolivia	1950-52	151,8	45,0	23.043,24	2.025,00	6.831,00
Honduras	1950-52	153,2	45,0	23.470,24	2.025,00	6.894,00
Perú	1950-52	154,0	45,0	23.716,00	2.025,00	6.930,00
Ecuador	1950-52	154,1	45,0	23.746,81	2.025,00	6.934,50
Formosa	1954	155,5	44,5	24.180,25	1.980,25	6.919,75
Panamá	1950-52	156,0	45,0	24.336,00	2.025,00	7.020,00
Singapur	1947	161,4	45,9	26.049,96	2.106,81	7.408,26

Continúa en la próxima página

Continuación del Cuadro XVII.

País	Año	Tasas fec. (en o/oo) x	Tasas nat. (en o/oo) y	x ²	y ²	xy
-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-	-7-
El Salvador	1950-52	162,3	50,0	26.341,29	2.500,00	8.115,00
Nicaragua	1950-52	163,1	50,0	26.601,61	2.500,00	8.155,00
Guatemala	1950-52	167,6	50,0	28.089,76	2.500,00	8.380,00
Rep. Dominicana	1950-52	167,7	50,0	28.123,29	2.500,00	8.385,00
Venezuela	1950-52	171,4	50,0	29.377,96	2.500,00	8.570,00
Totales		7.146,1	2.089,5	903.163,19	77.748,65	264.727,51

$$\bar{x} = 111,65781$$

$$\bar{y} = 32,64843$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i}$$

$$= \frac{264.727,51 - 111,65781(2089,5)}{903.163,19 - 111,65781(7146,1)}$$

$$b = \frac{31.418,52}{105.245,31} = 0,298527$$

$$b' = \frac{\sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i}{\sum y_i^2 - \bar{y} \sum y_i}$$

$$= \frac{31.418,52}{77.748,65 - 32,64843(2089,5)}$$

$$b' = \frac{31.418,52}{9.529,76} = 3,29688$$

$$r = \sqrt{b b'} = \sqrt{0,98420918} = 0,99207$$

Ecuación de regresión

$$y = -0,68444 + 0,29853x$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 32,64843 - 0,298527(111,65781) = -0,68444$$

$$x' = 4,02068 + 3,29688y'$$

$$a' = \bar{x} - b'\bar{y} = 111,65781 - 3,296885(32,64813) = 4,02068$$

a diferencia del Japón que experimentó una baja reciente de la fecundidad, a raíz de la ley de "protección eugénica" promulgada en 1948.

Fecundidad por años de edad.

Detallando más el estudio de la fecundidad llegamos a las tasas específicas o tasas por edad,

Llamando:

$B(t-a,t)$ el número de nacimientos de ambos sexos en el año t y tenidos por mujeres nacidas en el año $t-a$; $F(t-a,t)$ el número de mujeres nacidas durante el año $t-a$ y sobrevivientes en el año t , la tasa específica de fecundidad general es:

$$(69) \quad m(t-a,t) = \frac{B(t-a,t)}{F(t-a,t)}$$

La población femenina que interviene en el cálculo de esta tasa general forma un grupo homogéneo sólo con respecto a la edad. Las otras características de la población, cuya fecundidad es estudiada (estado matrimonial, número de hijos ya nacidos, edad al matrimonio, etc) son enteramente diferentes en los distintos grupos de la población. Sin embargo, como lo veremos más adelante, pueden ser calculadas tasas relativas a grupos más homogéneos. En Sudamérica, donde la fecundidad ilegítima es muy importante, la descomposición de la fecundidad según la legitimidad parece necesaria, aún cuando los datos existentes no permiten en la mayoría de los casos hacer esta separación.

En lo que se refiere a la forma de la curva de la fecundidad por edad, se encuentra, en casi todos los países, una curva que se parece a la curva normal o más bien a una curva de Pearson tipo III, debido a una ligera asimetría (la edad media es más elevada que el modo); la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos varía desde 27,5 años en poblaciones donde el nivel de la fecundidad es bajo, hasta 33 años cuando es muy alto. Para Chile se encontró una edad media del orden de 28,5 años y para el estado de Sao Paulo, en Brasil, del orden de 29 años. En Francia de antes de la segunda guerra mundial, o sea, en la época de más baja fecundidad, la edad media de las madres fué de 27,5 años.

Notamos que en general las estadísticas de nacimientos se presentan por grupos de cinco años de edad de la madre. Si es necesario, puede obtenerse una transformación de una tabla de fecundidad por grupos de cinco años de edad en una tabla de fecundidad edad por edad. Existen muchos métodos de interpolación para este propósito. El más sencillo, y a veces el más satisfactorio, es el método gráfico. Entre los métodos mecánicos, uno de los más frecuentemente utilizados por los demógrafos se basa en la fórmula osculatoria de quinto grado de Sprague, cuyos coeficientes fueron calculados por Glover. Con este método se redistribuye, observando ciertas condiciones, el número total observado para cada grupo de cinco años de edad entre números estimados edad por edad. Siendo la cifra relativa a cada grupo quinquenal igual a la suma de las cifras ajustadas relativas a los efectivos edad por edad, deben ser previamente ajustados los excesos o las subnumeraciones si existen.

Podría verse un ejemplo de cálculo en: "Handbook of Statistical Methods for Demographers". United States Department of Commerce. Bureau of the Census. Washington 1951. p. 107.

Otra dificultad en el estudio de la fecundidad: la necesidad de una doble clasificación de los nacimientos.

Hemos visto la dificultad que tiene el carácter "bigene" de la fecundidad en la medida de este fenómeno. Otra dificultad que existe también para la mortalidad, resulta de la definición de la tasa específica de fecundidad.

En efecto para calcular la tasa específica, es preciso conocer:

1. La clasificación de mujeres empadronadas según la fecha de nacimiento.
2. La doble clasificación de nacimientos, para cada año, según la edad y según la fecha de nacimiento de la madre.

Clasificación de las mujeres.

Consideramos el grupo de madres de edad comprendida entre a y $a + 1$. Es fácil comprobar que ese grupo es inconsistente y no permanece idéntico a sí mismo; sus unidades se renuevan constantemente en el curso de un año. Además, la diferencia extrema entre dos miembros del grupo puede alcanzar dos años. Sea, por ejemplo, las mujeres de 20 a 21 años en 1953 (edad exacta). En el curso del año 1953 las nacidas en 1932 y que cumplirán 21 años los los 2 y 3 de

Enero pasarán en el grupo de 21 a 22 años. En cambio, el grupo se aumentará poco a poco con las personas nacidas en 1933 que cumplirán 20 años en 1953. De tal manera, que el 31 de Diciembre de 1953, el grupo, enteramente renovado, no comprenderá ninguna de las personas que figuraban el 1. de Enero.

Además, la diferencia extrema de edad logrará dos años entre las personas que cumplen 21 años el 1. de Enero de 1953 y las que cumplen 20 años el 31 de Diciembre de 1953. Esas dificultades desaparecen si tomamos el grupo de personas nacidas el mismo año, por ejemplo, las personas nacidas en 1933, la cohorte 1933, en lugar de las mujeres que tienen 20 a 21 años en 1953. Tendremos entonces, mujeres, que difieren a lo más en 1 año y se puede decir que la edad media de este grupo es de 20,5 años.

Clasificación de los nacimientos.

Parece natural tomar los niños nacidos de madre que tienen la misma edad. Pero, aquí también extrema de edad puede lograr dos años. Para un cálculo exacto es preciso relacionar los nacimientos de mujeres nacidas en 1933 con el número de madres nacidas en 1933. Se plantea entonces la necesidad de dividir en dos grupos los niños nacidos de madres de 20 a 21 años en 1933:

1. Los nacidos de madres que nacieron en 1932 antes de cumplir 21 años.
2. Los nacidos de madres que nacieron en 1933 después de cumplir 20 años.

Generalmente, disponemos de estadísticas de cohortes, en los censos, lo que nos satisface respecto al denominador de la tasa de fecundidad. En cambio, por los nacimientos tenemos sólo, en la mayoría de los países, la clasificación respecto a la edad de las madres y no a sus fechas de nacimiento. De manera que se puede calcular sólo tasas anuales de fecundidad que no son más que valores aproximados de los cocientes definidos más arriba. Sin embargo, en países subdesarrollados esa causa de aproximación es insignificante junto a otras causas de errores.

Las tasas brutas y netas de reproducción.

Hemos llegado a tasas de fecundidad por edad o grupo de edad, mejorando así la medición del fenómeno "fecundidad". Se plantean todavía las necesidades siguientes:

1. Eliminar las perturbaciones que traen diferencias entre estructuras

por edad dentro del grupo de las mujeres en edad fértil, o sea, de 14 a 49 años.

2. Disponer de un índice único para sintetizar la situación en un momento determinado en un país, en lugar de un conjunto de tasas que hace difícil formular un juicio sobre el nivel de la fecundidad.

Para lograr estos dos objetivos se usa un procedimiento análogo a la standardización, calculando tasas brutas y netas de reproducción, que no son otra cosa que tasas standardizadas de natalidad. El cálculo de la tasa bruta consiste en hacer una suma de las tasas específicas de fecundidad; la población modelo es entonces una población rectangular en donde el número de mujeres de cada edad es el mismo. El cálculo de la tasa neta consiste en la suma de los productos $m(a) p(a)$ de las tasas específicas de fecundidad por las tasas de supervivencia; la población modelo comprende entonces en cada edad el número de mujeres supervivientes encontrado en la tabla de vida.

La tasa bruta de reproducción femenina, llamada aquí, R'_0 se expresa por la fórmula:

$$(70) \quad R'_0 = k \sum_{14}^{49} m(a)$$

siendo k la relación entre el número de nacimientos femeninos respecto al número total de nacimientos.

La tasa neta de reproducción femenina, llamada aquí R_0 se expresa por la fórmula:

$$(71) \quad R_0 = k \sum_{14}^{49} m(a) p(a)$$

La tasa neta de reproducción fué empleada por primera vez por Boeckh en 1884 *, pero es Kuczynski ** quien, en 1907, tuvo el mérito de poner de relieve las ventajas de estas tasas y divulgarlas. Más tarde Lotka y Wicksell, independientemente, introdujeron la tasa en análisis matemático, con objeto de

* Boeckh R. Bulletin de l'Institut International de Statistique. Vol V., première section, p. 166.

** Kuczynski R. Bericht über den XIV. Internationalen Kongress für Hygiene und Demographie. Berlin, Sept. 1907, vol. III, p. 1472-1484.

medir la fecundidad y la reproducción en poblaciones modelos. Estos análisis se encuentran hoy del mayor interés en el estudio de países subdesarrollados, en particular para países latinoamericanos, ya que el carácter estable supuesto en los modelos es aún más adecuado para estas poblaciones que para aquellas en que pensaban Lotka y Wicksell hace unos treinta años. El detalle del cálculo de las tasas brutas y netas de reproducción se indica en el cuadro XVIII, tomando como ejemplo Chile en 1952.

La columna -1- indica las edades de las madres de 13 a 49 años, por grupos de cinco años de 15 en adelante. Recordamos que el cálculo correcto de un cociente de fecundidad necesita la doble clasificación de los nacimientos según la edad y según la fecha de nacimiento de las madres. De hecho, disponemos solamente de datos según la edad, sobre todo en países subdesarrollados donde una gran parte de la gente desconoce su fecha de nacimiento y ni siquiera sabe su edad de manera muy aproximada. Pero, como ya lo hemos visto, esta causa de error es muy débil en comparación con las otras que existen (subnumeración de nacimientos, distinción incierta de los mortinatos y de los nacidos vivos, etc.)

La columna -2- indica los números de mujeres en el censo de Abril de 1952 ajustados por irregularidades en ciertas edades (ajuste según el método de King-Karup) y por el incremento poblacional hasta el 30 de Junio de 1952. Estos números ajustados, edad por edad, fueron luego agrupados en cinco años desde los 15 a los 49 años.

La columna -3- indica los números de nacidos vivos, ambos sexos, según la edad de las madres, tal como resulta en el registro del estado civil.

La columna -4- indica los números de nacidos vivos, ambos sexos, según la edad de las madres ajustados de la manera siguiente: se supone que la tasa de natalidad en 1952 fué de 37 o/oo, dando así un número de nacimientos de 232.915, en lugar de los 189.226 nacimientos registrados con edades de madres conocidas. La repartición de estos 232.915 nacimientos según los grupos de edades de las madres, se hizo adoptando la misma repartición que para los 189.226 nacimientos registrados.

La columna -5- indica las tasas de fecundidad por mil mujeres, relacionando las cifras de las columnas -4- y -2-.

La columna -6- indica las edades pivotales dentro de cada grupo de edades.

La columna -7- indica las tasas de supervivencia de mujeres en las edades pivotales calculadas a partir de la tabla de vida de O. Cabello, obteniendo las

Cuadro XVIII. Ejemplo de cálculo de tasas específicas de fecundidad, de tasas brutas y netas de reproducción. Chile 1952.

Edad de la madre	Número de mujeres	Número de nacidos vivos registrados	Número estimado de nacidos vivos	Tasas de fecundidad o/oo m(a)	Edad pivotal	Tasa de supervivencia p(a)	$\varphi(a) = m(a)p(a)$
-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-	-7-	-8-
13-14	128.932	454	559	4,3	14,0	0,82523	3,548
15-19	316.191	19.223	23.661	74,8	17,5	0,81733	61,136
20-24	292.311	54.002	66.470	227,4	22,5	0,80294	182,589
25-29	342.102	46.861	57.680	238,2	27,5	0,78577	187,170
30-34	208.896	33.510	41.247	197,5	32,5	0,76813	151,706
35-39	196.119	23.468	28.886	147,3	37,5	0,74852	110,257
40-44	160.781	9.544	11.748	73,1	42,5	0,72590	53,063
45-49	136.600	2.164	2.664	19,5	47,5	0,69973	13,644
Total		189.226	232.915				

$$2 \sum_{13-14} m(a) + 5 \sum_{15-19}^{45-49} m(a) = 4,8976$$

$$2 \sum_{13-14} m(a) p(a) + 5 \sum_{15-19}^{45-49} m(a) p(a) = 3,8049$$

$$R'_0 = 0,48780 \cdot 4,8976 = 2,3890$$

$$R_0 = 0,48780 \cdot 3,8049 = 1,8560$$

edades intermedias que no figuran en la tabla con interpolación de Newton.

La columna -8- indica los productos de las tasas de fecundidad con las tasas de supervivencia -5- x -7-.

La tasa bruta de reproducción se obtiene haciendo:

- la multiplicación por dos de las tasas $m(a)$ relativas al grupo de edad 13-14 años;
 - la multiplicación por 5 de las tasas $m(a)$ relativas a los grupos de cinco años de edad, del grupo 15-19 años, en adelante;
 - el producto por el coeficiente 0,48780 de la suma total, siendo 0,48780 la proporción de nacimientos de niñas por 100 nacimientos de ambos sexos.
- El resultado final indica 2,3890.

Se supone así, que de la edad 13 a la edad 14, un grupo hipotético de 100 mujeres de cada edad experimenta 2 veces la tasa media del grupo real de mujeres de 13 a 14 años; de la misma manera se supone que de 15 a 19 años, un grupo hipotético de 100 mujeres de cada edad experimenta 5 veces la tasa media del grupo real de mujeres de 15 a 19 años, etc.

Esta aproximación trae pocas fuentes de errores en el cálculo: la tasa de reproducción calculada edad por edad difiere en un 1% de la tasa de reproducción calculada por grupos de cinco años de edad según la regla previa.

La cifra de la tasa bruta de reproducción, o sea, 2,3890, significa que 100 mujeres que tuviesen la misma ley de fecundidad que la experimentada en Chile durante el año 1952; pero que no estuviesen sometidas a ninguna causa de muerte desde el nacimiento hasta la edad de 49 años, darían nacimiento a 238,9 hijas.

La tasa neta de reproducción se obtiene haciendo:

- la multiplicación por 2 del producto $m(a) p(a)$ relativo al grupo de edad 13-14 años;
- la multiplicación por 5 de la suma de los productos $m(a) p(a)$ relativas a los grupos de cinco años de edad, del grupo 15-19 años en adelante;
- el producto por el coeficiente 0,48780 de la suma total.

El resultado final es 1,8560.

Aquí también puede comprobarse que la tasa neta obtenida a partir de grupos de edad difiere muy poco de la que se obtendría a base de tasas de fecundidad

y de supervivencia relativas a años de edad.

La cifra de la tasa neta de reproducción, o sea, 1,8560, significa que 100 mujeres que hubiesen experimentado las mismas leyes de fecundidad y de mortalidad que las mujeres de Chile durante el año 1952 darían a luz 185,6 hijas. Este resultado indica también, como lo veremos más adelante, que la población de Chile crecería en 85,6% en una generación, o sea, en 29 años, si las leyes de fecundidad y de mortalidad relativas al sexo femenino observadas durante el año 1952 permaneciesen constantes en el futuro.

Notaremos que también pueden calcularse tasas brutas y netas de reproducción masculina, siguiendo un procedimiento similar al que acabamos de ver para las tasas femeninas. Encontraríamos, en este caso, para la tasa neta, el número de varones que tuviesen 100 hombres si se supone que las tasas de fecundidad masculina y las tasas de supervivencia relativas a hombres se mantuvieran constantes. Los resultados difieren entre tasas relativas al sexo femenino y tasas relativas al sexo masculino y esto se entiende fácilmente, ya que el intervalo medio entre dos generaciones es mayor para hombres que para mujeres; en cambio la tasa de incremento no puede diferir, a largo plazo, entre población masculina y población femenina.

Interpretación de las tasas de reproducción.

La tasa neta de reproducción representa la razón de reemplazo de una generación por la próxima, en el supuesto de la permanencia de las leyes de fecundidad y de mortalidad. Cuando la tasa es igual a 1, la población está en equilibrio y cada generación asegura integralmente su reemplazo. La población es estacionaria (la tasa de incremento r es igual a 0). Si la tasa neta de reproducción es mayor que 1, la población crece en forma exponencial (la tasa de incremento r es positiva). Si la tasa neta de reproducción es menor que 1, la población decrece también en forma exponencial (la tasa de incremento es negativa). Daremos, en el capítulo siguiente, la justificación teórica de las evoluciones comparadas entre la curva de la tasa neta de reproducción y la curva de la tasa de incremento.

R_0 tiene una interpretación simple. Consideramos una mujer al momento de su nacimiento y que sean $m_0, m_1, m_2 \dots$ las probabilidades respectivas evaluadas al

nacimiento de esa mujer, para que tenga, durante su período fértil 0, 1, 2 ... hijos.

Sea:

$q_1(a_1) da_1$ la probabilidad, si esta mujer tiene una hija, que esta hija nazca cuando la madre tenga una edad comprendida entre a_1 y $a_1 + da_1$.

$q_2(a_1, a_2) da_1 da_2$ la probabilidad, si esta mujer tiene dos hijas, que estas dos hijas nazcan cuando la madre tenga una edad comprendida entre a_1 y $a_1 + da_1$ y entre a_2 y $a_2 + da_2$. ($a_1 < a_2$) etc.

La probabilidad para esta mujer de tener una hija cuando es de edad comprendida entre a y $a + da$ es entonces:

$$m(a) da = m_1 q_1(a) da + m_2 q_2(a, a_2) da da_2 + m_2 q_2(a_1, a) da_1 da + \dots$$

y sumando para todas las edades:

$$\int_0^{\infty} m(a) da = m_1 \int_0^{\infty} q_1(a) da + m_2 da \left[\int_0^{\infty} q_2(a, a_2) da_2 + \int_0^{\infty} q_2(a_1, a) da_1 \right] + \dots$$

$$(72) \quad R'_0 = \int_0^{\infty} m(a) da = m_1 + 2 m_2 + 3 m_3 + \dots$$

Aparece así que R_0 es el número medio de hijas que tendría una mujer durante su período fértil, número evaluado al nacimiento de esta mujer.

Veremos más adelante que puede lograrse esta misma fórmula (71) a partir de un raciocinio mediante probabilidades de tener 1, 2, ... hijos en función de los intervalos intergenésicos en lugar de calcularlas como aquí en función de la edad de la madre (método de L. Henry).

CAPITULO V

RELACION ENTRE LAS TASAS DE REPRODUCCION Y LA TASA INTRINSECA
DE INCREMENTO

La ecuación fundamental.

Seguiremos suponiendo la población cerrada (ausencia de emigraciones e inmigraciones).

Consideramos el número de nacimientos durante el intervalo de tiempo dt , $B(t) dt$, procedentes de madres de edad comprendida entre a y $a + da$, nacidas entonces entre los instantes $t - a$ y $t - a + da$. Entre estas madres, las que han sobrevivido en el intervalo dt son $B(t-a) p(a,t) dt = B(t-a) p(a,t) da$.

Supongamos que $m(a,t)$ y $p(a,t)$ son, por el momento, independientes del tiempo y escribiremos sólo $m(a)$ y $p(a)$.

Haremos también el supuesto, en todo este capítulo, que $m(a)$ es la tasa de fecundidad femenina y $p(a)$ la tasa de sobrevivencia de las mujeres de edad a .

El número de hijas nacidas de las $B(t-a) p(a) da$ mujeres es $B(t-a) p(a) m(a) da$ y la suma para todas las edades es:

$$(73) \quad B(t) = \int_{13}^{49} B(t-a) p(a) m(a) da$$

Esta ecuación fundamental enlaza los nacimientos de niñas ocurridos durante el año t con los nacimientos de niñas de la generación anterior.

Es evidente que la función $B(t)$, aunque casi seguramente continúa, no puede expresarse por la misma función de t en cada punto de su desarrollo. Una única función utilizada entre las edades extremas de la fertilidad no puede pretender más que una representación aproximada de $B(t)$. Sin embargo, esta hipótesis es muy cómoda y la adoptaremos, suponiendo que la misma función para $B(t)$ puede substituirse en ambos lados de la ecuación (73). Por esto escribimos que $B(t)$ puede expresarse por una serie de exponenciales:

$$(74) \quad B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots$$

de modo que la ecuación (73) se escribe:

$$(75) \quad B(t) = Q_1 e^{r_1 t} \int_0^{\infty} e^{-r_1 a} p(a) m(a) da + Q_2 e^{r_2 t} \int_0^{\infty} e^{-r_2 a} p(a) m(a) da + \dots$$

Identificando término a término los coeficientes de $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$, ... en los miembros derechos de las ecuaciones (74) y (75) llegamos a:

$$(76) \quad \int_0^{\infty} e^{-r_n a} p(a) m(a) da = 1$$

donde $n = 1, 2, \dots$

Verificando esta igualdad para r_1, r_2, \dots se llega a la conclusión que las constantes r_n son raíces de la ecuación:

$$(77) \quad \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da = 1$$

que admite solamente una raíz real, ya que se verifica para un cierto valor de r y que no se verifica para un valor real diferente. En efecto, sea P una raíz real, y tendremos:

$$\int_0^{\infty} e^{-Pa} p(a) m(a) da = 1$$

Para $P' > P$ $\int_0^{\infty} e^{-P'a} p(a) m(a) da < \int_0^{\infty} e^{-Pa} p(a) m(a) da = 1$, y entonces $\int_0^{\infty} e^{-P'a} m(a)$

$p(a) < 1$. Análogamente esta integral es mayor que 1 para $P' < P$.

En cuanto a los coeficientes Q_n , ellos dependen de las condiciones iniciales en las que se encuentra la población.

Propiedades de la raíz real de la ecuación fundamental.

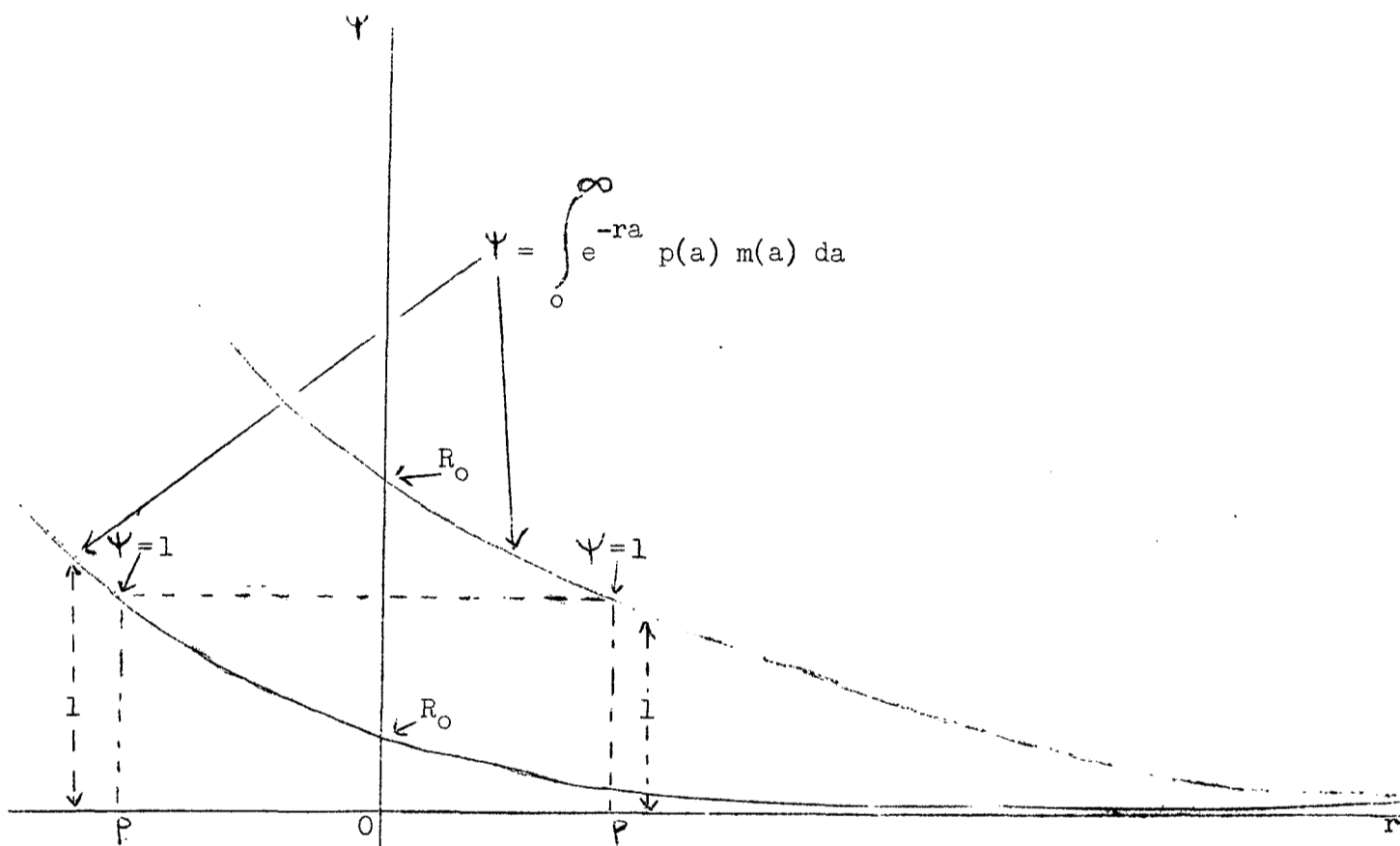


Gráfico No. 5. Posiciones relativas de la tasa neta de reproducción y de la tasa intrínseca de incremento.

De manera general, podemos escribir:

$$(78) \quad \Psi = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da$$

Derivamos Ψ con respecto a la variable r :

$$\frac{d\Psi}{dr} = - \int_0^{\infty} a e^{-ra} p(a) m(a) da$$

Este resultado es esencialmente negativo, ya que $p(a) m(a)$ (producto de una tasa de fecundidad por una probabilidad) es positivo. Ψ es entonces una función decreciente de r .

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 && \text{cuando } r = +\infty \\ \Psi &= +\infty && \text{cuando } r = -\infty \end{aligned}$$

La ecuación (77) admite entonces una raíz única en r (se trata de la raíz real como ya lo hemos visto).

Esta raíz es positiva si $R_0 > 1$, recordando que R_0 es el valor de Ψ para $r = 0$, y negativa si $R_0 < 1$. El gráfico indica la posición de R_0 con respecto a 1 cuando la raíz r de (77) es positiva o negativa.

Raíces complejas.

La ecuación (77) tiene un número infinito de raíces complejas, que toman la forma:

$$(79) \quad P_n = u_n + i v_n \quad \text{con } i = \sqrt{-1}$$

Escribiendo estas raíces bajo la forma trigonométrica, tenemos:

$$e^{P_n t} = e^{u_n t} (\cos v_n t + i \operatorname{sen} v_n t) *$$

* Se llega a esta forma, escribiendo:

$$e^{P_n t} = e^{(u_n + i v_n) t} = e^{u_n t} e^{i v_n t}$$

Se desarrolla $e^{i v_n t}$ en serie de Taylor, donde se hace:

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad \text{etc.}, \quad \text{y se llega a:}$$

$$e^{i v_n t} = \left(1 - \frac{v_n^2 t^2}{2!} + \frac{v_n^4 t^4}{4!} - \frac{v_n^6 t^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\frac{v_n t}{1!} - \frac{v_n^3 t^3}{3!} + \frac{v_n^5 t^5}{5!} - \dots \right)$$

En la serie del primer paréntesis se reconoce el desarrollo en serie de Taylor del $\cos v_n t$ y en la serie del segundo paréntesis el desarrollo del $\operatorname{sen} v_n t$.

La ecuación (75) llega a ser:

$$B(t) = Q_p e^{Pt} + \sum_{P_n \neq P} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t + i \sum_{P_n \neq P} Q_n e^{u_n t} \operatorname{sen} v_n t$$

Como $B(t)$ es necesariamente real tenemos:

$$\sum_{P_n \neq P} Q_n e^{u_n t} \operatorname{sen} v_n t = 0$$

y

$$(80) \quad B(t) = Q_p e^{Pt} + \sum_{P_n \neq P} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t$$

El límite de esta expresión, cuando t tiende hacia el infinito es:

$$(81) \quad B(t) = Q_p e^{Pt}$$

ya que u_n es casi siempre negativo en la práctica.

Así vemos que las raíces complejas introducen oscilaciones en la evolución del número anual de nacimientos; el término $\sum_{P_n \neq P} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t$, expresando esas oscilaciones que van amortiguándose alrededor de $Q e^{Pt}$, término aperiódico. Después de un cierto tiempo queda solamente $Q_p e^{Pt}$, demostrando así que desde este momento los nacimientos siguen una ley exponencial.

La tasa intrínseca de incremento.

La población total en el momento t es dada por la ecuación(3):

$$(3) \quad N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) da$$

Introduciendo en (3) la ecuación (81) obtenemos:

$$N(t) = Q_p e^{rt} \int_0^{\infty} e^{-pa} p(a) da$$

o

$$(82) N(t) = K e^{pt}$$

donde:

$$K = Q_p \int_0^{\infty} e^{-pa} p(a) da = \frac{Q_p}{b_p}$$

ya que, según la ecuación (11):

$$b_p = 1 / \int_0^{\infty} e^{-pa} p(a) da$$

Puede resumirse de la manera siguiente lo que sucede:

Siempre que la población quede cerrada y que la mortalidad y la fecundidad a cada edad permanezcan constantes, cualesquiera que sean la estructura por edad inicial y los niveles de la mortalidad y de la natalidad, la cifra de la población y la cifra de los nacimientos varían, luego de un cierto tiempo, según una ley exponencial. La tasa de incremento se acerca al valor asintótico ρ , llamado intrínseco, que mide la capacidad fundamental de multiplicación de una población liberada de la influencia de la estructura inicial.

Sin embargo, la tasa intrínseca no trae indicaciones sobre las fases intermedias por las cuales pasa la población. Estas fases intermedias son descritas por las raíces complejas de la ecuación (76).

La gran ventaja de la tasa intrínseca respecto a la tasa de incremento vegetativo (diferencia entre la tasa de natalidad y la de mortalidad) es de no depender de la repartición por edades, y por lo tanto de la evolución anterior. Relación entre la tasa intrínseca de incremento y la tasa de reproducción.

Recordamos la relación general (78):

$$\Psi = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da$$

Llamamos R_n el momento de orden n de la función $\varphi(a) = p(a) m(a)$:

$$(83) \quad R_n = \int_0^{\infty} a^n \varphi(a) da$$

El momento de orden cero, ya encontrado, $R_0 = \int_0^{\infty} \varphi(a) da$ es la tasa neta de reproducción.

La primera derivada de Ψ con respecto a r es:

$$(84) \quad \frac{d\Psi}{dr} = - \int_0^{\infty} a e^{-ra} \varphi(a) da$$

Llamamos M_r la edad media de las madres al nacimiento de sus hijas. Esta edad media se expresa por:

$$(85) \quad M_r = \frac{\int_0^{\infty} a e^{-ra} \varphi(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} \varphi(a) da}$$

En efecto:

- el número de mujeres de edad a es:

$$c(a) N(t) = b e^{-ra} p(a) N(t)$$

- el número de niñas tenidas por esas mujeres, que corresponde también al número de madres de edad a es:

$$c(a) m(a) N(t) = b e^{-ra} p(a) m(a) N(t)$$

- el número de años vividos por esas madres es:

$$a c(a) m(a) N(t) = a b e^{-ra} p(a) m(a) N(t)$$

De modo que la edad media de las madres al nacimiento de sus hijas es exactamente la expresión indicada en (85).

Combinando (85) y (84) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dr} &= - M_r \int_0^{\infty} e^{-ra} \varphi(a) da \\ &= - M_r \Psi \end{aligned}$$

que también puede escribirse:

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = -M_r dr$$

Integramos esta expresión:

$$\text{Log } \Psi = \text{Log } R_0 - \int_0^r M_r dr$$

$$(86) \quad \Psi = R_0 e^{-\int_0^r M_r dr}$$

Llamamos T_r el intervalo medio entre dos generaciones, o sea, el intervalo de tiempo dentro del cual tiene lugar un crecimiento de población igual a la relación entre dos generaciones sucesivas:

$$(87) \quad T_r = \frac{1}{r} \int_0^r M_r dr$$

de modo que:

$$(88) \quad \Psi = R_0 e^{-r T_r}$$

Podemos escribir M_r y T_r en función de los momentos y semivariantes de la función $\varphi(a)$ de la misma manera que hemos escrito la edad media de una población estable en el capítulo II en función de los momentos y semivariantes de $p(a)$. Por esto, desarrollando e^{-ra} en serie de Taylor en el numerador y en el denominador de M_r en la ecuación (85), obtenemos.

$$M_r = \frac{R_1 - \frac{r}{1!} R_2 + \frac{r^2}{2!} R_3 - \frac{r^3}{3!} R_4 + \dots}{R_0 - \frac{r}{1!} R_1 + \frac{r^2}{2!} R_2 - \frac{r^3}{3!} R_3 + \frac{r^4}{4!} R_4 - \dots}$$

$$(89) \quad M_r = \mu_1 - \mu_2 \frac{r}{1!} + \mu_3 \frac{r^2}{2!} - \mu_4 \frac{r^3}{3!} + \dots$$

con:

$$(90) \begin{cases} \mu_1 = \frac{R_1}{R_0} \\ \mu_2 = \frac{R_2}{R_0} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \\ \mu_3 = \frac{R_3}{R_0} - 3 \frac{R_2}{R_0} \frac{R_1}{R_0} + 2 \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^3 \\ \mu_4 = \frac{R_4}{R_0} - 4 \frac{R_3}{R_0} \frac{R_1}{R_0} - 3 \left(\frac{R_2}{R_0}\right)^2 + 12 \frac{R_2}{R_0} \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 - 6 \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 \end{cases}$$

etc.

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots$ son los seminvariantes de orden uno a cuatro de la función $\varphi(a)$.

Para obtener T_r a partir de M_r utilizamos (87):

$$(91) \quad T_r = \mu_1 - \mu_2 \frac{r}{2!} + \mu_3 \frac{r^2}{3!} - \mu_4 \frac{r^3}{4!} + \dots$$

Pero queremos encontrar la raíz real de la ecuación fundamental:

$$\Psi = \int_0^{\infty} e^{-ra} \varphi(a) da = 1$$

de modo que (88) se escribe:

$$(92) \quad R_0 = e^{r T_r}$$

Esta fórmula, muy importante, demuestra que dos poblaciones que tienen igual tasa de incremento e igual intervalo medio entre dos generaciones T_r , tienen igual tasa neta de reproducción R_0 . En la práctica T_r difiere poco de una población a otra (véase el cuadro XIX) y puede decirse que de modo general, a un nivel dado de r corresponde un solo valor R_0 , cualesquiera que sean los factores demográficos, y en especial cualquiera que sea el nivel de la mortalidad.

El cuadro XIX indica los diferentes niveles de T_r , valores redondeados, obtenidos mediante un cálculo aproximado, en poblaciones que tienen diferentes niveles de tasas de incremento r y diferentes niveles posibles de mortalidad caracterizados por las esperanzas de vida al nacimiento. En la construcción de este cuadro se tomó en cuenta diferentes ejemplos de poblaciones reales (Francia en 1938 y en 1950, EE.UU. en 1950, Chile en 1940 y en 1952, Brasil, estado de Sao Paulo en 1950, la curva de fecundidad máxima establecida por L. Henry y P. Vincent *).

Los diferentes valores posibles de la tasa neta de reproducción, calculados a base de la fórmula (92), y mediante los valores de T_r del cuadro XIX están indicados en el cuadro XX, según diferentes niveles de r y de T_r . Vemos que R_0 difiere poco para igual nivel de r y diferentes niveles posibles de esperanzas de vida al nacimiento. Las leves diferencias que aparecen son únicamente debidas a diferencias en intervalos medios entre dos generaciones.

Finalmente, los valores de las tasas brutas de reproducción R'_0 que corresponden a las tasas netas R_0 que acabamos de ver están indicados en el cuadro XXI. Se obtuvieron estas tasas brutas al dividir las tasas netas por la probabilidad de supervivencia de las mujeres en una edad que corresponda a la edad media de las madres. Veremos esta relación más adelante (fórmula 101).

Recordamos que al confrontar los cuadros XV, XX, XXI y el Anexo I podemos reconstruir ahora, para cada población estable modelo, los datos siguientes:

- Tasa de natalidad
- Tasa de incremento
- Tasa de mortalidad
- Esperanza de vida al nacimiento
- Estructura por edad
- Tasa bruta de reproducción
- Tasa neta de reproducción

Basta con conocer dos de estos datos (por ejemplo la tasa de incremento y la estructura por edad) para ubicar la población estable modelo de que se trata y entonces estimar todos los otros datos.

* Henry L. y Vincent P. Rythme maximum d'accroissement d'une population stable. Population. Paris, 1947, II, 663-680.

Cuadro XIX. Intervalo medio entre dos generaciones (valor aproximado) según el nivel de la esperanza de vida al nacimiento y de la tasa de incremento.

$\frac{r}{L_0}$	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0200	0,0225	0,0250	0,0275	0,0300	0,0325	0,0350	0,0375	0,0400
32	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5	32,0	32,0	32,5	32,5	33,0	33,5
34	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5	32,0	32,0	32,5	32,5	33,0
36	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5	32,0	32,0	32,5	32,5
38	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	31,0	31,0	31,5	31,5	32,0	32,0	32,5
40	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5	31,5	32,0	32,0
42	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5	31,5	32,0
44	29,0	29,0	29,5	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,5	31,5	32,0
46	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5	31,5
48	28,5	29,0	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5
50	28,5	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0	31,5
52	28,5	28,5	29,0	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0
54	28,5	28,5	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0	31,0
56	28,0	28,5	28,5	29,0	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0
58	28,0	28,5	28,5	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5	31,0
60	28,0	28,5	28,5	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5
62	28,0	28,0	28,5	28,5	29,0	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5	30,5
64	28,0	28,0	28,5	28,5	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,0	30,5
66	28,0	28,0	28,0	28,5	28,5	29,0	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5
68	28,0	28,0	28,0	28,5	28,5	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	30,0	30,0	30,5
70	28,0	28,0	28,0	28,5	28,5	28,5	29,0	29,0	29,5	29,5	29,5	30,0	30,0

Cuadro XX. Tasas netas de reproducción según el nivel de la esperanza de vida al nacimiento y de la tasa de incremento (los intervalos medios entre dos generaciones utilizados para el cálculo son indicados en el cuadro XIX).

r \ L	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0200	0,0225	0,0250	0,0275	0,0300	0,0325	0,0350	0,0375	0,0400
32	1,35	1,45	1,58	1,71	1,86	2,01	2,20	2,41	2,61	2,75	3,12	3,45	3,82
34	1,34	1,45	1,57	1,71	1,84	2,01	2,17	2,38	2,61	2,83	3,12	3,39	3,74
36	1,34	1,45	1,57	1,69	1,84	1,98	2,17	2,35	2,57	2,83	3,06	3,39	3,67
38	1,34	1,45	1,56	1,69	1,82	1,98	2,17	2,35	2,57	2,78	3,06	3,32	3,67
40	1,34	1,45	1,56	1,69	1,82	1,98	2,14	2,35	2,53	2,78	3,01	3,32	3,60
42	1,34	1,44	1,56	1,67	1,82	1,96	2,14	2,31	2,53	2,74	3,01	3,26	3,60
44	1,34	1,44	1,56	1,67	1,80	1,96	2,12	2,31	2,50	2,74	3,01	3,26	3,60
46	1,33	1,44	1,54	1,67	1,80	1,96	2,12	2,31	2,50	2,74	2,96	3,26	3,52
48	1,33	1,44	1,54	1,66	1,80	1,94	2,12	2,28	2,50	2,69	2,96	3,20	3,52
50	1,33	1,43	1,54	1,66	1,80	1,94	2,12	2,28	2,50	2,69	2,96	3,20	3,52
52	1,33	1,43	1,54	1,66	1,79	1,94	2,09	2,28	2,46	2,69	2,91	3,20	3,46
54	1,33	1,43	1,53	1,66	1,79	1,94	2,09	2,28	2,46	2,69	2,91	3,20	3,46
56	1,32	1,43	1,53	1,66	1,79	1,92	2,09	2,25	2,46	2,65	2,91	3,14	3,46
58	1,32	1,43	1,53	1,65	1,79	1,92	2,09	2,25	2,46	2,65	2,91	3,14	3,46
60	1,32	1,43	1,53	1,65	1,79	1,92	2,09	2,25	2,42	2,65	2,86	3,14	3,39
62	1,32	1,42	1,53	1,65	1,79	1,92	2,06	2,25	2,42	2,65	2,86	3,14	3,39
64	1,32	1,42	1,53	1,65	1,77	1,92	2,06	2,25	2,42	2,65	2,86	3,02	3,39
66	1,32	1,42	1,52	1,65	1,77	1,92	2,06	2,22	2,42	2,61	2,86	3,08	3,39
68	1,32	1,42	1,52	1,65	1,77	1,90	2,06	2,22	2,42	2,61	2,86	3,08	3,39
70	1,32	1,42	1,52	1,65	1,77	1,90	2,06	2,22	2,42	2,61	2,81	3,08	3,39

Cuadro XXI. Tasas brutas de reproducción según el nivel de la esperanza de vida al nacimiento y la tasa de incremento (los cálculos resultan de las tasas netas de reproducción indicados en el cuadro XX y de las tasas de sobrevivencia a la edad media de las madres).

L_0 \ r	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0200	0,0225	0,0250	0,0275	0,0300	0,0325	0,0350	0,0375	0,0400
32	2,69	2,90	3,16	3,41	3,74	4,06	4,46	4,93	5,34	5,66	6,43	7,16	7,98
34	2,51	2,74	2,95	3,23	3,49	3,84	4,14	4,57	5,05	5,47	6,08	6,58	7,34
36	2,40	2,58	2,81	3,03	3,32	3,58	3,94	4,26	4,70	5,20	5,64	6,26	6,79
38	2,27	2,47	2,66	2,90	3,14	3,42	3,77	4,07	4,49	4,86	5,38	5,83	6,47
40	2,18	2,37	2,55	2,78	3,00	3,28	3,55	3,90	4,21	4,65	5,03	5,57	6,04
42	2,09	2,25	2,45	2,64	2,88	3,10	3,41	3,67	4,04	4,37	4,83	5,23	5,79
44	2,02	2,17	2,36	2,54	2,74	2,99	3,22	3,54	3,82	4,21	4,64	4,03	5,57
46	1,93	2,10	2,25	2,45	2,64	2,89	3,11	3,41	3,68	4,06	4,38	4,85	5,24
48	1,88	2,03	2,18	2,34	2,55	2,75	3,01	3,24	3,56	3,84	4,23	4,57	5,06
50	1,81	1,95	2,11	2,27	2,47	2,66	2,91	3,14	3,45	3,72	5,00	4,42	4,89
52	1,76	1,89	2,05	2,20	2,37	2,58	2,78	3,04	3,28	3,60	3,89	4,29	4,64
54	1,71	1,84	1,97	2,14	2,30	2,51	2,70	2,95	3,19	3,50	3,78	4,16	4,50
56	1,65	1,78	1,92	2,08	2,23	2,41	2,62	2,82	3,09	3,33	3,67	3,95	4,36
58	1,60	1,74	1,92	2,00	2,17	2,34	2,55	2,75	3,00	3,24	3,56	3,84	4,24
60	1,56	1,69	1,82	1,95	2,12	2,28	2,48	2,67	2,88	3,15	3,40	3,74	4,04
62	2,67	1,63	1,77	1,90	2,06	2,22	2,38	2,60	2,80	3,07	3,31	3,64	3,93
64	2,61	1,59	1,72	1,85	1,99	2,16	2,32	2,64	2,73	2,99	3,23	3,48	3,83
66	1,45	1,56	1,67	1,81	1,94	2,11	2,27	2,44	2,67	2,87	3,15	3,40	3,74
68	1,42	1,52	1,63	1,77	1,90	2,04	2,22	2,39	2,61	2,81	3,08	3,32	3,65
70	1,38	1,48	1,59	1,72	1,85	1,98	2,16	2,32	2,55	2,53	2,95	3,25	3,58

La solución de Lotka.

Volvemos a la ecuación (92). Si tomamos en cuenta la fórmula del intervalo medio entre dos generaciones en función de los semivariantes μ_n obtenemos:

$$(93) \quad \text{Log}_e R_0 - \frac{r}{1!} \mu_1 + \frac{r^2}{2!} \mu_2 - \frac{r^3}{3!} \mu_3 + \frac{r^4}{4!} \mu_4 - \dots = 0$$

Primera aproximación.

Para valores de r pequeños (inferiores a 0,015) podemos despreciar los términos de grado 2 o mayores en la ecuación (93), de modo que obtenemos:

$$(94) \quad R_0 = e^{r\mu_1}$$

$$r = \frac{\text{Log } R_0}{\mu_1}$$

Cuando se piensa que R_0 debe ser poco diferente de 1, puede usarse además la aproximación:

$$\text{Log } R_0 = R_0 - 1$$

y encontramos:

$$r = \frac{R_0 - 1}{\mu_1}$$

Pero esta aproximación no puede casi nunca utilizarse para países latinoamericanos para los cuales la tasa de incremento está, en general, comprendida entre 1,5 % y 3,0 %. Parece ser solamente válida para países de tipo europeo donde la renovación de generaciones se logra a veces con dificultades.

Segunda aproximación.

Conservamos los términos de segundo grado en la ecuación (93), anulando los términos siguientes. Esto supone que la función $\psi(a)$ sigue una trayectoria normal de Laplace-Gauss. Hemos visto que la curva $\psi(a)$ no es normal, pero

no difiere suficientemente, por lo general, como para descartar esta hipótesis. Obtenemos entonces una ecuación de segundo grado en r cuyas raíces son:

$$(95) \quad r = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 2\mu_2 \text{Log } R_0}}{\mu_2}$$

Esta es la solución propuesta por Lotka.

Mayor aproximación.

Puede conservarse la ecuación (93) bajo la forma de una ecuación de tercer grado:

$$\frac{\mu_3}{6} r^3 - \frac{\mu_2}{2} r^2 + \mu_1 r - \text{Log}_e R_0 = 0$$

Para resolver esta ecuación puede darse a la variable r , por ejemplo, 5 valores entre dos de los cuales se encuentra el valor de r buscado (para un país latinoamericano se tomará 0,015; 0,020; 0,025; 0,030 y 0,035). Se substituye r , en la ecuación, por estos cinco valores y se encuentra así una suma que difiere de cero. Luego se hace una interpolación para conocer el valor de r que permita obtener cero para la ecuación. (Podría utilizarse el método de interpolación inversa lineal reiterada de Aitken.)

Pero es, en general, inútil conservar en el desarrollo de la fórmula (93) los términos que comprenden potencias de r mayores que dos, ya que r pasa raras veces del 3%, y r^3 llega a ser entonces muy pequeña.

Un ejemplo de cálculo de la tasa intrínseca r , mediante las fórmulas (94), (95) y un desarrollo de (93) hasta el grado tres es indicado en los cuadros Nos. XXII y XXIII para Chile en 1952. Notamos que una ecuación de tercer grado no mejora el resultado con respecto a una ecuación de segundo grado.

Nota.

Hemos escrito la edad media de las madres bajo la forma:

Cuadro XXII. Cálculo de los momentos de la función $P(a) = m(a) p(a)$ para Chile en 1952.

Edad de la madre	Edad pivotal a	Tasa de fecundidad o/co $m(a)$	Tasa de supervivencia $p(a)$	$P(a) = m(a)p(a)$	$a m(a) p(a)$	$a^2 m(a) p(a)$	$a^3 m(a) p(a)$
13-14	14	4,3	0,82523	3,548	49,6789	695,5040	9.737,0566
15-19	17,5	74,8	0,81733	61,136	1069,8849	18.722,9857	327.690,4608
20-24	22,5	227,4	0,80294	182,589	4108,2426	92.435,4585	2.079.866,2869
25-29	27,5	238,2	0,78577	187,170	5147,1863	141.547,6226	3.892.583,0168
30-34	32,5	197,5	0,76813	151,706	4930,4346	160.239,1245	5.207.904,2887
35-39	37,5	147,3	0,74852	110,257	4134,6262	155.048,9062	5.814.402,8950
40-44	42,5	73,1	0,72590	53,063	2255,1898	95.845,5676	4.073.456,5201
45-49	47,5	19,5	0,69973	13,644	648,1251	30.785,9446	1.462.334,0753

$$k = 0,48780$$

$$R_0 = 2 \sum_{13-14} k m(a) p(a) + 5 \sum_{15-19}^{45-49} k m(a) p(a) = 1,8560$$

$$R_1 = 2 \sum_{13-14} k a m(a) p(a) + 5 \sum_{15-19}^{45-49} k a m(a) p(a) = 54,4228$$

$$R_2 = 2 \sum_{13-14} k a^2 m(a) p(a) + 5 \sum_{15-19}^{45-49} k a^2 m(a) p(a) = 1.694,8704$$

$$R_3 = 2 \sum_{13-14} k a^3 m(a) p(a) + 5 \sum_{15-19}^{45-49} k a^3 m(a) p(a) = 55.760,7408$$

Cuadro XXIII. Cálculo de la tasa intrínseca de incremento para Chile en 1952.

$$\text{Resultados obtenidos en el cuadro XXII} \left\{ \begin{array}{l} R_0 = 1,8560 \\ R_1 = 54,4228 \\ R_2 = 1.694,8704 \end{array} \right.$$

$$\text{En base de las fórmulas (90)} \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 29,322 \\ \mu_2 = 53,346 \\ \mu_3 = 137,680 \end{array} \right.$$

$$\text{Log}_e R_0 = 0,61842 \quad \mu_1^2 = 859,8383$$

Primera aproximación:

$$\text{Fórmula (94)} : \quad r = \frac{\text{Log}_e R_0}{\mu_1} = 0,0211$$

Segunda aproximación:

$$\text{Fórmula (95)} : \quad r = \frac{\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 2\mu_2 \text{Log}_e R_0}}{\mu_2} = 0,0215$$

Tercera aproximación:

Resolviendo la ecuación de tercer grado:

$$\frac{\mu_3}{6} r^3 - \frac{\mu_2}{2} r^2 + \mu_1 r - \text{Log}_e R_0 = 0$$

encontramos para r el mismo valor de 0,0215 que cuando utilizamos una ecuación de segundo grado (se ha dado a r cinco valores: 0,015; 0,020; 0,020; 0,025; 0,030 y 0,035 y se interpoló mediante el método de interpolación inversa lineal reiterada de Aitken para encontrar el valor de r que satisfaga la ecuación).

$$M_r = \frac{\int_0^{\infty} a e^{-ra} p(a) m(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da}$$

Desarrollando el numerado y el denominador de esta expresión en serie de Taylor llegamos a la forma siguiente:

$$(89) \quad M_r = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2 \frac{r}{1!} + \mathcal{U}_3 \frac{r^2}{2!} - \mathcal{U}_4 \frac{r^3}{3!} + \dots$$

Podría preguntarse por qué es necesario desarrollar el numerador y el denominador de (85), ya que finalmente hacemos igualar el denominador a 1, de modo que M_r podría escribirse más sencillamente, sin necesidad de pasar por los semivariantes:

$$M_r = \int_0^{\infty} a e^{-ra} p(a) m(a) da$$

$$M_r = R_1 - \frac{r}{1!} R_2 + \frac{r^2}{2!} R_3 - \frac{r^3}{3!} R_4 + \dots$$

y (93) podría escribirse entonces:

$$(93') \quad \text{Log}_e R_0 = \frac{r}{1!} R_1 - \frac{r^2}{2!} R_2 + \frac{r^3}{3!} R_3 - \dots$$

En realidad si pasamos por los seminvariantes es solamente para hacer el cálculo con más comodidad, ya que la serie converge más rápidamente cuando la ecuación (93) se expresa en función de los seminvariantes que cuando se expresa en función de los momentos. El cálculo de r puede entonces hacerse resolviendo una ecuación de segundo grado, en lugar de resolver una ecuación de tercer o de cuarto grado como sería si nos conformásemos con los momentos. Pasar por los seminvariantes es una operación muy cómoda en la práctica. Demostremoslo, tomando como ejemplo Chile en 1952.

Los cuadros XXII y XXIII nos indican:

$$R_0 = 1,8560 \quad \mathcal{U}_1 = 29,3226$$

$$\begin{array}{ll} R_1 = 54,4228 & \mu_2 = 53,346 \\ R_2 = 1.694,8704 & \mu_3 = 137,680 \\ R_3 = 55.760,7408 & \text{Log}_e R_0 = 0,61842 \end{array}$$

Limitándonos a los términos de segundo grado en las fórmulas (93) y (93') encontramos para r:

$$\begin{array}{ll} \text{Fórmula (93)} & r = 0,0215 \\ \text{Fórmula (93')} & r = 0,0147 \end{array}$$

El valor exacto de r, a partir de un desarrollo de la fórmula (93) hasta el término de tercer grado, nos indica 0,0215, el mismo que cuando nos conformamos con una ecuación de segundo grado.

Utilizando la fórmula (93') necesitaríamos calcular los momentos hasta el quinto orden para lograr el valor exacto de r, mientras que el cálculo de los momentos hasta el segundo orden solamente es suficiente si pasamos por los seminvariantes.

La solución de Wicksell. Comparación con la de Lotka.

Una solución de la ecuación (77), diferente de la de Lotka fué propuesta por Wicksell en 1931, suponiendo que la función $\varphi(a)$ puede ser representada por una curva de frecuencia de Pearson, tipo III, en lugar de una curva de Laplace-Gauss. Usando los mismos símbolos que anteriormente, la función $\varphi(a)$ se escribe, en este caso:

$$\varphi(a) = R_0 \frac{\delta^\beta}{\Gamma(\beta)} a^{\beta-1} e^{-\delta a}$$

con

$$\delta = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\mu_1^2}{\mu_2}$$

Reemplazamos esta expresión de $\varphi(a)$ que es igual a $p(a) m(a)$ en la ecuación (77), integramos y llegamos a la solución:

$$(96) \quad r' = \delta \left[R_0^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right]$$

El valor de r de Lotka puede, a partir de la ecuación (95) escribirse en función de δ y de β :

$$(97) \quad r = \delta \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\beta} \text{Log } R_0} \right]$$

Para comparar estas dos soluciones desarrollamos r y r' en serie, obteniendo:

$$r = \frac{\delta}{\beta} \text{Log } R_0 + \frac{\delta}{2\beta^2} \text{Log}^2 R_0 + \frac{\delta}{2\beta^3} \text{Log}^3 R_0 + \frac{\delta}{2\beta^4} \text{Log}^4 R_0 + \dots$$

$$r' = \frac{\delta}{\beta} \text{Log } R_0 + \frac{\delta}{2\beta^2} \text{Log}^2 R_0 + \frac{\delta}{6\beta^3} \text{Log}^3 R_0 + \frac{\delta}{24\beta^4} \text{Log}^4 R_0 + \dots$$

La diferencia $r - r'$ es de tercer orden y se escribe:

$$r - r' = \frac{1}{3} \frac{\delta}{\beta^3} \text{Log}^3 R_0 + \dots$$

La diferencia relativa se escribe, si tomamos en el denominador la parte principal de r , o sea, $r = \frac{\delta}{\beta} \text{Log } R_0$:

$$\frac{r - r'}{r} = \frac{\text{Log}^2 R_0}{3\beta^2}$$

De hecho β no es nunca mayor que 15, entonces:

$$\frac{r - r'}{r} < \frac{\text{Log}^2 R_0}{600}$$

Esta diferencia relativa es muy pequeña, aún cuando R_0 es grande y muestra así que las dos soluciones son muy parecidas.

Efectivamente, cálculos hechos para Chile en 1952 y para Brasil, Estado de Sao Paulo, en 1950, han conducido exactamente al mismo resultado, empleando la fórmula de Lotka o la de Wicksell: 0,0215 para Chile y 0,0194 para Brasil. El detalle del cálculo relativo a Chile está indicado en el cuadro XXIV.

(Véase a continuación cuadro XXIV).

Cuadro XXIV. Comparación de las soluciones de Lotka y de Wicksell en el caso de Chile (1952).

$$\begin{array}{l} \text{Resultados obtenidos} \\ \text{en los cuadros XXII} \\ \text{y XXIII} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R_0 = 1,8560 \\ \mu_1 = 29,3226 \\ \mu_2 = 53,346 \\ \mu_1^2 = 859,8383 \end{array} \right.$$

$$\delta = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{29,3226}{53,346} = 0,549676$$

$$\beta = \frac{\mu_1^2}{\mu_2} = \frac{859,8383}{53,346} = 16,11814$$

$$\text{Log}_e R_0 = 0,61842$$

Solución de Lotka:

$$\begin{aligned} \text{Fórmula (97)} \quad r &= \delta \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\beta} \text{Log}_e R_0} \right] = \\ r &= 0,549676 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{16,11814} 0,61842} \right] = 0,0215 \end{aligned}$$

Solución de Wicksell:

$$\begin{aligned} \text{Fórmula (96)} \quad r' &= \delta \left(R_0^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right) \\ r' &= 0,549676 \left[(1,8560)^{\frac{1}{16,11814}} - 1 \right] \\ r' &= 0,549676 (1,039114 - 1) \\ r' &= 0,0215 \end{aligned}$$

Diferencia entre la edad media de las madres y el intervalo medio entre dos generaciones.

Recordamos las fórmulas de la edad media de las madres y del intervalo medio entre dos generaciones.

$$(89) \quad M_r = \mu_1 - \mu_2 \frac{r}{1!} + \mu_3 \frac{r^2}{2!} - \mu_4 \frac{r^3}{3!} + \dots$$

$$(91) \quad T_r = \mu_1 - \mu_2 \frac{r}{2!} + \mu_3 \frac{r^2}{3!} - \mu_4 \frac{r^3}{4!} + \dots$$

Haciendo la diferencia $M_r - T_r$ encontramos:

$$(98) \quad M_r - T_r = -\frac{r}{2} \mu_2 + \frac{r^2}{3} \mu_3 - \frac{3}{24} r^3 \mu_4 + \dots$$

La diferencia $M_r - T_r$ es siempre negativa cuando la tasa de incremento es positiva.

En la práctica μ_2 varía para mujeres entre 35 y 70 años, μ_3 entre 100 y 160; r pasa raras veces del 3% y muy a menudo está comprendida entre 2 y 3% en países latinoamericanos. De modo que $M_r - T_r$ parece tener un máximo de -1 año. Para Chile, en 1952, encontramos una diferencia de -0,552 años (véase el cuadro XXV).

Relación entre la tasa bruta y la tasa neta de reproducción.

Hemos llamado R'_0 y R_0 las tasas brutas y netas de reproducción. Las fórmulas de esas tasas, en un campo continuo son:

$$R'_0 = k \int_0^{\infty} m(a) da$$

$$R_0 = k \int_0^{\infty} m(a) p(a) da$$

Haremos el supuesto que la función de supervivencia es lineal entre las eda-

Cuadro XXV. Cálculo de la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos y del intervalo medio entre dos generaciones en Chile 1952.

Resultados obtenidos en los cuadros XXII y XXIII

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 = 1,8560 \\ R_1 = 54,4228 \\ R_2 = 1.694,8704 \\ R_3 = 55.760,7408 \\ \mu_1 = 29,3226 \\ \mu_2 = 53,346 \\ \mu_3 = 137,680 \\ r = 0,0215 \end{array} \right.$$

Fórmula (89) : $M_r = \mu_1 - \mu_2 r + \mu_3 \frac{r^2}{2} - \dots$

$$M_r = 29,3226 - 53,346 \cdot 0,0215 + 137,680 (0,0215)^2$$

$$M_r = 28,208$$

Fórmula (91) : $T_r = \mu_1 - \mu_2 \frac{r}{2} + \mu_3 \frac{r^2}{6}$

$$T_r = 29,3226 - 53,346 \frac{0,0215}{2} + 137,680 \frac{(0,0215)^2}{6}$$

$$T_r = 28,760$$

$$M_r - T_r = - 0,552$$

des límites de la reproducción, o sea, entre 13 y 49 años para las mujeres:

$$p(a) = p(a_0) [1 - \alpha(a - a_0)]$$

para $13 \leq a \leq 49$.

Esta hipótesis parece razonable para casi todas las tablas modelos de mortalidad establecidas por el Buró de la Población de las Naciones Unidas.

La tasa neta de reproducción llega entonces a escribirse:

$$R_0 = k \int_0^{\infty} p(a_0) [1 - \alpha(a - a_0)] m(a) da$$

$$(99) \quad R_0 = k \int_0^{\infty} p(a_0) m(a) da - k\alpha \int_0^{\infty} a p(a_0) m(a) da + k\alpha a_0 \int_0^{\infty} p(a_0) m(a) da$$

Llamamos:

$$(100) \quad \mathcal{J} = \frac{\int_0^{\infty} a m(a) da}{\int_0^{\infty} m(a) da}$$

\mathcal{J} es la relación entre el momento de orden 1 y el momento de orden 0 de la función $m(a)$. Indica la edad media de las madres en una población teórica que comprende igual número de mujeres en cada año de edad, durante el período fértil y donde la mortalidad es nula en esas edades. Esta edad \mathcal{J} difiere poco de una población a otra y casi siempre está comprendida entre la edad media de las madres M_r y el intervalo medio entre dos generaciones:

$$M_r < \mathcal{J} < T_r$$

Introduciendo \mathcal{J} en la ecuación (99) donde escribimos $a_0 = \mathcal{J}$, lo que puede hacerse muy bien, ya que a_0 es arbitrario, obtenemos:

$$(101) \quad R_0 = p(\mathcal{J}) R'_0$$

$$\text{Log } R_0 = \text{Log } p(a) + \text{Log } R'_0$$

Vemos así que con la aproximación hecha ($p(a)$ lineal durante el período fértil) la tasa neta de reproducción difiere de la tasa bruta de reproducción en una relación igual a la probabilidad de supervivencia a una edad próxima a la edad media de las madres.

Damos, en el cuadro XXVII una comprobación de esta importante relación para Francia desde el principio del siglo XIX, cuando la tasa bruta era aproximadamente de 2, hasta el año 1936, cuando la tasa bruta había caído a 1, bajando aún más en el período de la primera guerra mundial, llegando a 0,6. Vemos que el valor de la tasa neta de reproducción calculado por el método exacto difiere muy poco del valor calculado por el procedimiento abreviado indicado por la fórmula (101). El error es siempre menor que 1% y puede despreciarse.

La utilidad práctica de la relación (101) es triple:

1. Pasar de una tasa bruta de reproducción a una tasa neta conociendo únicamente la probabilidad de supervivencia de los 29 a 30 años, como acabamos de hacerlo para Francia.
2. Facilitar los cálculos cuando se desee encontrar una serie de tasas netas de reproducción mediante una misma tabla de fecundidad y diferentes niveles de mortalidad. De esta manera, podemos ver rápidamente el efecto de una modificación de la mortalidad sobre el nivel de la tasa neta de reproducción.

Un ejemplo de cálculo de este tipo está indicado en el cuadro XXVIII para Chile. Se ha tomado la tabla de fecundidad de Chile, en 1952 y se ha multiplicado la tasa bruta de reproducción ($R'_0 = 2,380$) por las probabilidades de supervivencia a los 30 años de las diferentes tablas modelos de mortalidad establecidas por el Buró de la Población de las Naciones Unidas. Este cálculo nos indica como tendrá que variar la tasa neta de reproducción de Chile en caso que la fecundidad se mantenga constante y que la mortalidad siga bajando. Obtenemos así un límite superior a la tasa neta de reproducción para Chile ya que es poco probable que la fecundidad aumente.

3. Otra utilidad de la relación (101) es de permitir la estimación de la tasa intrínseca de incremento sin la obligación de pasar por los largos cálculos de los momentos y de los seminvariantes de la función $\psi(a)=m(a)$ pa.

Cuadro XXVI. Comparación de valores de tasas netas de reproducción según la fórmula exacta y según la fórmula aproximada (fórmula 101). Francia 1806-1936.

Año	Tasa bruta de reproducción	Probabilidad de supervivencia a los 30 años	Tasa neta de reproducción exacta	Tasa neta de reproducción aproximada
1806	1,97	0,531	1,05	1,05
1816	2,07	0,580	1,19	1,20
1826	1,97	0,511	1,01	1,01
1836	1,84	0,608	1,11	1,12
1846	1,73	0,567	0,98	0,98
1856	1,66	0,586	0,98	0,97
1866	1,72	0,610	1,05	1,05
1876	1,74	0,636	1,11	1,11
1886	1,59	0,631	1,00	1,00
1896	1,45	0,698	1,01	1,01
1906	1,32	0,716	0,95	0,95
1916	0,59	0,767	0,45	0,45
1926	1,15	0,794	0,92	0,91
1936	1,01	0,862	0,88	0,87

Fuente: Reproduction nette en Europe depuis l'origine des statistiques de l'Etat civil. Statistique Générale de la France. Etudes Démographiques No. 1. Paris 1941. Imprimerie Nationale. 1 vol. 41.p.

Cuadro XXVII Efecto de una modificación de la mortalidad sobre la tasa neta de reproducción (la tabla de fecundidad utilizada es la de Chile en 1952; Las tablas de mortalidad, caracterizadas por las esperanzas de vida al nacimiento son las tablas modelos.)

L_0	R_0	L_0	R_0
32	1,215	52	1,794
34	1,280	54	1,847
36	1,341	56	1,901
38	1,402	58	1,954
40	1,461	60	2,007
42	1,519	62	2,060
44	1,576	64	2,114
46	1,632	66	2,163
48	1,687	68	2,213
50	1,741	70	2,275

Un método abreviado para el cálculo de la tasa intrínseca de incremento.

La fórmula (101):

$$R_0 = p(\mathcal{J}) R_0^!$$

permite estimar la tasa intrínseca de incremento r sin calcular los momentos y seminvariantes de la función $\mathcal{P}(a)$.

El procedimiento es el siguiente:

1. Se conoce R_0 y $R_0^!$, podemos, por lo tanto, estimar $p(\mathcal{J})$ mediante la fórmula (101).
2. Se busca en la tabla de mortalidad el valor de \mathcal{J} que corresponde al valor de $p(\mathcal{J})$ ya estimado.
3. Se determina r utilizando la relación (92):

$$R_0 = e^{rT_r}$$

donde consideramos $\mathcal{J} \approx T_r$. Esta última aproximación puede aceptarse ya que sabemos que:

$$M_r < \mathcal{J} < T_r$$

y que M_r no difiere mucho de T_r (a lo sumo un año, según hemos visto).

Probaremos este procedimiento abreviado en el caso de Chile, año 1952.

Tenemos:

$$R_0^! = 2,380$$

$$R_0 = 1,856$$

De modo que:

$$p(\mathcal{J}) = \frac{R_0}{R_0^!} = \frac{1,856}{2,380} = 0,77983$$

La tabla de mortalidad del período 1951-1953 indica:

$$p(29) = 0,78056$$

$$p(30) = 0,77218$$

Una interpolación lineal nos indica:

$$p(29,1) = 0,77983$$

$$T_r = 29,1$$

La estimación de r se hace mediante la fórmula:

$$r = \frac{\text{Log}_e R_0}{T_r} = \frac{0,617345}{29,1}$$

$$r = 0,0212$$

El valor exacto, encontrado con el método clásico, nos había dado:

$$r = 0,0215$$

El error es menor que 1,5% y puede despreciarse.

Relación entre la tasa intrínseca de natalidad, la tasa neta de reproducción y la esperanza de vida al nacimiento.

Conociendo la tasa intrínseca de incremento podemos calcular el valor de la tasa de natalidad que le corresponde.

Combinando las dos expresiones:

$$b = 1 / \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da$$

y

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da$$

obtenemos:

$$b = \frac{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$$

Desarrollamos en serie de Taylor e^{-ra} en el numerador y en el denominador de esta expresión. Llamamos R_n y L_n los momentos de la función $\varphi(a) = m(a) p(a)$ y de la función $p(a)$, respectivamente, y encontramos:

$$(102) \quad b = \frac{R_0 - \frac{r}{1!} R_1 + \frac{r^2}{2!} R_2 - \frac{r^3}{3!} R_3 + \dots}{L_0 - \frac{r}{1!} L_1 + \frac{r^2}{2!} L_2 - \frac{r^3}{3!} L_3 + \dots}$$

En primera aproximación, cuando r es pequeño, podemos escribir:

$$(103) \quad b = \frac{R_0}{L_0}$$

La tasa intrínseca de natalidad es igual, en primera aproximación a la relación entre la tasa neta de reproducción y la esperanza de vida al nacimiento. Esta regla fué encontrada por primera vez por Knibbs en 1911.

Para obtener las aproximaciones sucesivas siguientes se reservan en el numerador y en el denominador de la fórmula (102) dos, tres, etc. términos.

Cabe notar:

1. Las series que figuran en el numerador y en el denominador de la fórmula (102) no convergen rápidamente. Se necesita, entonces calcular hasta la cuarta o quinta aproximación para acercarse suficientemente del valor real, cuando la tasa de incremento alcanza niveles que sobrepasan el 2%, como es el caso general de los países latinoamericanos. Por ejemplo, para Chile, como puede verse en el cuadro XXVIII se obtiene los resultados siguientes:

Primera aproximación: 0,03569

Segunda aproximación: 0,05233

Tercera aproximación: 0,03223

Cuarta aproximación: 0,03953

Quinta aproximación: 0,03718

2. La convergencia no es mucho más rápida si se utilizan los seminvariantes en lugar de los momentos de las funciones $\varphi(a)$ y $p(a)$. Además las fórmulas se complican mucho. Tendremos, mediante los seminvariantes, para las cuatro primera aproximaciones:

Primera aproximación: $b = \frac{R_0}{L_0}$

Segunda aproximación: $b = \frac{R_0}{L_0} \frac{1 - r\lambda_1}{1 - r\lambda_1}$

$$\text{Tercera aproximación: } b = \frac{R_0}{L_0} \frac{1 - r\mu_1 + \frac{r^2}{2!} (\mu_2 - \mu_1^2)}{1 - r\lambda_1 + \frac{r^2}{2!} (\lambda_2 - \lambda_1^2)}$$

Cuarta aproximación:

$$b = \frac{R_0}{L_0} \frac{1 - r\mu_1 + \frac{r^2}{2!} (\mu_2 - \mu_1^2) - \frac{r^3}{3!} (\mu_3 + 3\mu_1\mu_2 - 3\mu_1^3)}{1 - r\lambda_1 + \frac{r^2}{2!} (\lambda_2 - \lambda_1^2) - \frac{r^3}{3!} (\lambda_3 + 3\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_1^3)}$$

3. La primera aproximación da, por lo general, un resultado más cerca del valor real que la segunda o la tercera aproximación.

Para lograr un resultado con bastante precisión se requieren cálculos largos de momentos de $\varphi(a)$ y de $p(a)$ hasta el orden cuatro o cinco, para países de tipo latinoamericano, y la fórmula (102) no es muy cómoda.

Veremos en otro capítulo que existe la siguiente relación sencilla entre las tasas de natalidad, las tasas brutas de reproducción y las estructuras por edades de dos poblaciones estables:

$$\frac{\int_{15}^{49} {}_1c(a) da}{\int_{15}^{49} {}_2c(a) da} = \frac{{}_1b}{{}_2b} \frac{{}_2R_0}{{}_1R_0}$$

y tomando en cuenta la relación (101):

$$\frac{\int_{15}^{49} {}_1c(a) da}{\int_{15}^{49} {}_2c(a) da} = \frac{{}_1b}{{}_2b} \frac{{}_2R_0}{{}_1R_0} \frac{{}_1p(\sigma_1)}{{}_2p(\sigma_2)}$$

donde los índices 1 y 2 designan las dos poblaciones. Si se toma para una de estas dos poblaciones una población estable cualquiera (por ejemplo, una población modelo) puede utilizarse más fácilmente estas relaciones que la fórmula (102) para estimar la tasa de natalidad cuando la tasa de reproducción es conocida, o viceversa cuando se conoce la tasa de natalidad.

Cuadro XXVIII Cálculo de la tasa intrínseca de natalidad. Chile, 1952.

Resultados obtenidos de la misma manera que en el cuadro XXII

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 = 1,8560 \\ R_1 = 54,4228 \\ R_2 = 1.694,8704 \\ R_3 = 55.760,741 \\ R_4 = 2.570.011,2 \end{array} \right.$$

Resultados obtenidos de la misma manera que en el cuadro XII del Cap. II

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 = 52,0 \\ L_1 = 1.805,2848 \\ L_2 = 88.168,5852 \\ L_3 = 5.150.654,184 \\ L_4 = 257.566.467,0 \end{array} \right.$$

$r = 0,0215$

Primera aproximación: $b = \frac{R_0}{L_0} = 0,03569$

Segunda aproximación: $b = \frac{R_0 - r R_1}{L_0 - r L_1} = 0,05233$

Tercera aproximación: $b = \frac{R_0 - r R_1 + \frac{r^2}{2} R_2}{L_0 - r L_1 + \frac{r^2}{2} L_2} = 0,03223$

Cuarta aproximación: $b = \frac{R_0 - r R_1 + \frac{r^2}{2} R_2 - \frac{r^3}{6} R_3}{L_0 - r L_1 + \frac{r^2}{2} L_2 - \frac{r^3}{6} L_3} = 0,03953$

Quinta aproximación: $b = \frac{R_0 - r R_1 + \frac{r^2}{2} R_2 - \frac{r^3}{6} R_3 + \frac{r^4}{24} R_4}{L_0 - r L_1 + \frac{r^2}{2} L_2 - \frac{r^3}{6} L_3 + \frac{r^4}{24} L_4} = 0,03718$

Relación entre la edad media de la población estacionaria y el intervalo medio entre dos generaciones.

Supongamos la función e^{-ra} lineal, lo que parece conveniente solamente para poblaciones que tienen una tasa de incremento relativamente baja (natalidad entre 40 y 45 por mil y mortalidad entre 15 y 20 por mil, por ejemplo, lo que es el caso de la India; natalidad del orden de 20 por mil y mortalidad del orden de 10 por mil, caso de varios países de Europa occidental).

Supongamos entonces:

$$e^{-ra} = e^{-r\alpha} + k(a - \alpha)$$

La ecuación (11) se escribe, en estas condiciones:

$$(11) \quad 1 = b \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da$$

$$1 = b e^{-r\alpha} \int_0^{\infty} p(a) da + k b \int_0^{\infty} a p(a) da - k b \alpha \int_0^{\infty} p(a) da$$

Si introducimos en esta última expresión la edad media de la población estacionaria λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^{\infty} a p(a) da}{\int_0^{\infty} p(a) da}$$

encontramos:

$$1 = b \left[e^{-r\alpha} + k (\lambda_1 - \alpha) \right] \int_0^{\infty} p(a) da$$

Siendo la edad α arbitraria podemos considerar:

$$\lambda_1 = \alpha$$

de modo que tenemos:

$$1 = b e^{-r\lambda} \int_0^{\infty} p(a) da$$

y como $\int_0^{\infty} p(a) da$ es la esperanza de vida al nacimiento L_0 :

$$b L_0 = e^{-r\lambda}$$

Pero, habíamos obtenido en (103), en primera aproximación:

$$b = \frac{R_0}{L_0}$$

De modo que:

$$(104) R_0 = e^{-r\lambda}$$

Fórmula que nos indica una relación entre la tasa neta de reproducción, la tasa de incremento y la edad media de la población estacionaria. Recordamos que habíamos obtenido otras relaciones del mismo tipo:

$$(92) R_0 = e^{rT_r} \quad (\text{Fórmula exacta})$$

$$(94) R_0 = e^{rM_r} \quad (\text{Fórmula aproximada})$$

De modo que:

$$(105) \lambda_1 \approx T_r \approx M_r$$

En una población donde la tasa de incremento es relativamente baja (menor de 1,5%) la edad media de la población estacionaria correspondiente a la tabla de vida es igual a la edad media de las madres o al intervalo medio entre dos generaciones *.

Comprobamos esta relación con un ejemplo tomado de una población estable teórica, donde la esperanza de vida al nacimiento es de 40 años, la tasa de natalidad de 36 o/oo, la tasa de incremento de 1,25%. La tasa neta de reproducción de esta población es de 1,45 como puede verse en el cuadro XX , el inter-

* Esta relación resulta de los análisis de J. Bourgeois-Pichat, en los primeros capítulos de su libro "Mesure de la Fécondité des populations". INED. Cahier No. 12. P.U.F. Paris, 1950. 1 vol. 150 p.

CAPITULO VI

CRITICA DEL CONCEPTO CLASICO DE LA FECUNDIDAD Y DE LA REPRODUCCION

Introducción

Se comprenderán mejor las críticas formuladas recientemente a las tasas de reproducción si volvemos a las razones que han guiado el establecimiento de estas tasas.

El primer progreso que se hizo en el mejoramiento de la tasa cruda de natalidad fué relacionar el número de nacimientos con el número de mujeres en edad fértil (o sea, entre 13 y 49 años) en lugar de tomar en el denominador la población total. Se obtuvo así la tasa de fecundidad general. Utilizar una base más estrecha presenta, en efecto, la ventaja de eliminar diferencias según las poblaciones en el tamaño del grupo en edad de tener hijos, sobre todo cuando se hacen comparaciones entre poblaciones que se encuentran en fases distintas del ciclo demográfico o estudios a largo plazo de la evolución de la fecundidad de un país.

Otro progreso fué la introducción del estado matrimonial de las mujeres, lo que en general puede hacerse fácilmente en el momento del censo, ya que casi todos los censos indican la distribución de las mujeres en solteras, casadas, viudas y divorciadas. Se calcularán así tasas de fecundidad legítimas y tasas de fecundidad ilegítima.

Otro paso en el mejoramiento de la medida de la fecundidad fué calcular tasas específicas de fecundidad por edades de las mujeres, de manera que se elimina la influencia de cambios en la distribución por edad dentro del grupo de las mujeres en edad fértil, permitiendo además estudiar la variación de la fecundidad en función de la edad de las mujeres. Aquí también puede introducirse el estado matrimonial de las mujeres.

El inconveniente de este proceso es la obligación de cotejar un gran número de tasas y entonces, no disponer de un índice único para sintetizar la situación. De aquí la idea de calcular una tasa estandarizada de fecundidad de la misma manera que se hace para la mortalidad. Para simplificar los cálculos, en lugar de tomar para la población modelo una población real o un grupo de poblaciones reales, se suele tomar una población teórica, donde el número de mujeres deberá ser igual en cada año de edad desde los 14 hasta los 49 años, obteniéndose de

esta manera una tasa estandarizada de fecundidad llamada "tasa bruta de reproducción" que hemos designado aquí R'_0 . El cálculo es muy sencillo: basta con sumar las tasas específicas por edad. Esta tasa bruta de reproducción indica el tamaño de una generación con respecto a la generación que la sigue, en una población sometida constantemente a la misma ley de fecundidad y donde la mortalidad es nula hasta el final del período fértil. La tasa se calcula corrientemente para el sexo femenino, pero puede calcularse también en base de padres e hijos.

Otro paso fué tomar en cuenta la mortalidad y luego adoptar como población modelo la población estacionaria indicada en las tablas de vida. Se obtuvo así "la tasa neta de reproducción" que hemos designado R_0 . Puede pasarse fácilmente, como lo hemos visto, de la tasa bruta de reproducción a la tasa neta, multiplicando R'_0 por la probabilidad de sobrevivencia de las mujeres a una edad próxima a la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos (en la práctica entre 28 y 31 años para casi todas las poblaciones).

La primera significación de la tasa neta de reproducción R_0 es la siguiente: una tasa de R_0 indica que si la "fecundidad" y la "mortalidad" permanecen en el futuro al nivel presente, la población crecerá en $100(R_0 - 1)$ por ciento por generación si $R_0 > 1$, o decrecerá en $100(1 - R_0)$ por ciento por generación, si $R_0 < 1$, cualquiera que sea la estructura por edad actual. Entendemos aquí por "fecundidad" y "mortalidad" las tasas específicas por edad.

De esto se podrá pasar a la tasa intrínseca de crecimiento anual mediante las fórmulas de Lotka o de Wiksell, como lo hemos visto. Un método aproximado permite hacerlo sin calcular los momentos de la función $\varphi(a) = m(a)p(a)$, producto de las tasas específicas de fecundidad por las tasas específicas de supervivencia [utilizando la fórmula (101)].

La ventaja de la tasa intrínseca de crecimiento sobre la tasa de crecimiento vegetativo (diferencia entre las tasas de natalidad y de mortalidad) es que la "fecundidad" y la "mortalidad" que se toman en cuenta en la tasa intrínseca expresan con mayor fidelidad las propiedades fundamentales de la población estudiada que las tasas brutas de natalidad y mortalidad.

Sin embargo, aún cuando las tasas netas de reproducción representan una ventaja evidente respecto a los índices más sencillos utilizados antiguamente, en los últimos 15 años pareció necesario mejorarlas, porque son aún insuficientes e impropias. La razón esencial es que se aplican a un conjunto heterogéneo de mu-

eres de comportamiento muy diferente, sobre todo en poblaciones malthusianas.
Veamos esto de manera más detallada. Pero parece conveniente analizar antes los factores del comportamiento de las parejas en poblaciones malthusianas y en poblaciones no malthusianas.

Factores del comportamiento de las parejas en poblaciones premalthusianas,

Denominamos premalthusiano al régimen en que no existe voluntad individual de no excederse en el número de hijos por pareja ya alcanzado y juzgado como el más deseable o como el máximo aceptable.

Los trabajos de L. Henry* han demostrado que la fecundidad en las poblaciones donde el control de los nacimientos no ha empezado a extenderse, depende de dos categorías de factores:

1) La edad de las mujeres, lo que permite clasificarlas en dos grupos: las que son aptas para procrear y las que no lo son. La aptitud para la procreación disminuye con la edad de la mujer; pero el descenso varía mucho de una población a otra. De manera general se ha observado que bajas condiciones de vida están asociadas a una esterilidad rápidamente creciente con la edad y entonces el factor edad de las mujeres parece un factor esencial de la fecundidad en estas poblaciones. Al contrario, si el nivel de vida es elevado puede prescindirse de la esterilidad hasta los 40 años. Alrededor de los 20 años la tasa de esterilidad de las mujeres casadas en casi todas las poblaciones es menor de 5%. La progresión de la esterilidad con la edad es difícil de evaluar, pero parecen existir diferencias importantes según L. Henry: la proporción de mujeres casadas estériles es de un 30% para campesinas japonesas de 35 años, 20% para las inglesas a mediados del siglo XIX y 10% para las canadienses del principio del siglo XVIII. Entre los huteritas, secta protestante anabaptista que vive en Dakota, Montana, y donde los métodos anticoncepcionales están prohibidos, gozando además de un alto nivel sanitario (la población aumentó de los 443 en 1880 a más de 8500 en 1950), las tasas de esterilidad encontradas por C. Tietze**

* HENRY L. - Fondements théoriques des mesures de la fécondité naturelle. Revue de l'Institut International de Statistique, 1953, III, 135-151.

- Análisis y medida de la fecundidad de las poblaciones poco desarrolladas. Documento de trabajo presentado en el "Seminario de problemas de población en Latinoamérica". Rio de Janeiro, 1953. 1 Ejemplar mimeografiado, 21 páginas.

- Caractéristiques démographiques des pays sous-développés. " Le Tiers Monde I.N.E.D. Travaux et documents. Cahier no. 27. Paris, 1956. 149-188.

** TIETZE C. - Reproductive Span and Rate of Reproduction among Hutterit Women, in "Fertility and Sterility". Vol. 8, no. 1, Enero-Febrero, 1957.

son las siguientes:

<u>Edad</u>	<u>Tasa de esterilidad por ciento</u>
25	3,5
29	7
34	11
39	33
44	87
49	100

La disminución de la fertilidad se debe sobre todo a las irregularidades de la ovulación a medida que crece la edad. Debe mencionarse también que la proporción de concepciones que acaban en nacimientos vivos disminuyen con la edad de las mujeres, pues la frecuencia de los abortos espontáneos y de la mortalidad aumenta sensiblemente con la edad de las mujeres. Pero, como ya lo hemos dicho, las condiciones de vida influyen mucho sobre estos fenómenos.

2) La fecundidad de las mujeres aptas para procrear, que depende a su vez de tres factores:

- a) La duración de períodos de esterilidad temporal por varias causas, en primer lugar el amamantamiento. Una gran fracción de las mujeres son estériles durante la lactancia. Esta esterilidad es mínima cuando el hijo muere al nacer y se observa efectivamente que el intervalo entre dos nacimientos es frecuentemente menor cuando el hijo precedente murió antes del año, que cuando pasó del año, y que lo es más cuando la defunción sobrevino más rápidamente después del nacimiento.

La esterilidad temporal puede ser consecuencia de una concepción precedente: la mujer embarazada no es fecundable y la duración de esta esterilidad depende de la duración del embarazo.

Existe también una esterilidad temporal de las mujeres muy jóvenes (esterilidad de las adolescentes) aún púberes. Es la razón por la cual la tasa de fecundidad de las mujeres casadas de menos de 20 años suele ser más débil que la de las mujeres casadas de 20-24 años.

- b) La fecundidad de las mujeres aptas para procrear fuera de los períodos de esterilidad temporal depende de varios factores fisiológicos aún poco conocidos.
- c) Numerosos factores sociológicos como las costumbres del casamiento, la

moral sexual, etc., de modo que todo estudio de la fecundidad de una población poco desarrollada debe ir acompañado de un estudio sociológico. Un ejemplo permite entender mejor este punto. En India, la tasa de natalidad es evaluada en un 45 por mil. Si en este país las tasas de fecundidad legítima hubieran sido igual a las de Noruega en la segunda mitad del siglo XVIII, tendríamos una tasa de natalidad de un 60 o/oo. La baja fecundidad legítima de India respecto a la antigua Europa se debe solamente a ciertas costumbres matrimoniales: prohibición de casamiento a las viudas, y sobre todo ciertas prohibiciones sexuales en el ciclo menstrual de las mujeres, etc.

Factores del comportamiento de las parejas en poblaciones malthusianas.

La actitud de una pareja respecto a la procreación en poblaciones donde existe la limitación de los nacimientos depende:

- a) del número de hijos ya nacidos;
- b) del intervalo entre el casamiento y el primer nacimiento, del intervalo intergenésico, o sea, del intervalo de tiempo entre dos nacimientos;
- c) de la edad de la mujer;
- d) de la edad al casamiento;
- f) de la duración del matrimonio;
- g) de la voluntad más o menos grande de tener niños en cada estado de la formación de la familia.

Una de las diferencias fundamentales entre la fecundidad de poblaciones premalthusianas y de poblaciones malthusianas, es que en las primeras, la edad de las mujeres juega el rol más importante de la fecundidad: a igual edad de la mujer, las diferencias de fecundidad según la edad del esposo, la edad al casarse, la duración del matrimonio, el intervalo intergenésico, son insignificantes; mientras que todos estos factores adquieren gran importancia cuando empieza la difusión de la limitación de nacimientos.

Las insuficiencias de las tasas clásicas de reproducción.

El cálculo clásico de las tasas de reproducción no toma en cuenta todos estos factores y estas lagunas son, evidentemente, aún más importantes para poblaciones que han entrado en el régimen de "transición" que para las que se encuentran todavía en el régimen premalthusiano.

Veamos ahora de manera un poco más detallada, estas lagunas que presentan las tasas básicas de reproducción.

1) La tasa clásica de reproducción parece insuficiente, porque mezcla varias generaciones de mujeres (37 en total, si las edades límites de fecundidad son 13 y 49 años), que tuvieron experiencias muy diferentes, si la fecundidad no se mantuvo constante.

El nivel de la tasa neta de reproducción depende del hecho que las tasas de fecundidad y de mortalidad utilizadas son experimentadas por diferentes cohortes de mujeres, o sea, por conjuntos de mujeres nacidas en diferentes años. Es obvio que la fecundidad observada a una edad por un grupo de mujeres es influenciada por las tasas de fecundidad anteriores.

Consideremos, por ejemplo, una población donde las tasas de fecundidad han descendido, pasando de un nivel I en el tiempo t , a otro nivel II en el tiempo $t+10$ (véase el gráfico No. 6). Si se supone, como se hace habitualmente para el cálculo de la tasa de reproducción, que para el tiempo $t+10$, las tasas representadas por la curva II quedarán constantes en el futuro, las mujeres que llegan a las distintas edades en el tiempo $t+10$ tendrán experiencias muy diferentes respecto a las otras, y sin embargo, se les aplica el mismo juego de tasas de fecundidad y de mortalidad.

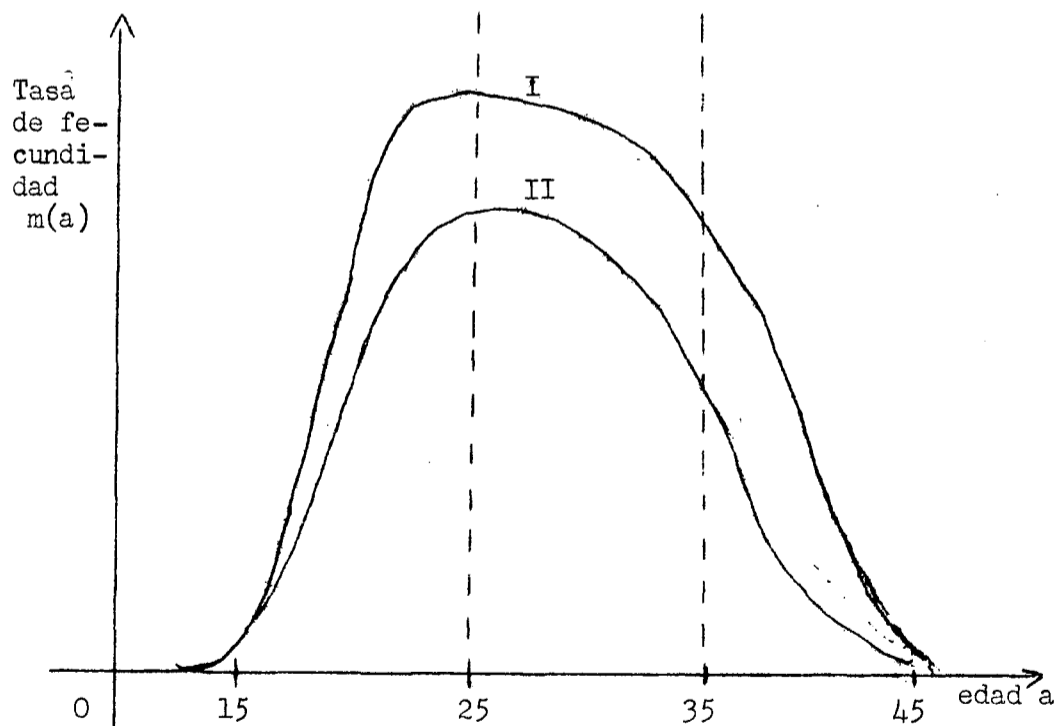


Gráfico No. 6 Esquema de un cambio de fecundidad.

Por ejemplo, las mujeres que llegan a los 35 años en el tiempo $t+10$ tuvieron 10 años atrás una fecundidad mucho más alta que las mujeres que llegan a los 25 años en este mismo año $t+10$; sin embargo, se aplica a esas mujeres de 35 años, en el año $t+10$, la tasa de fecundidad de las mujeres que tendrán 35 años en el año $t+20$, en el supuesto de la permanencia de las tasas de fecundidad desde el año $t+10$ en adelante. Es poco probable, y aún anormal, que no se observen del año $t+10$ al año $t+20$ nuevos cambios en la fecundidad, a medida que las diferentes generaciones pasan de una edad a otra. De allí la necesidad de calcular tasas de reproducción por generación, como lo hicieron por primera vez P. DEPOID* y luego T.J. WOOFER.** Más recientemente P.K. WHELPTON*** aplicó el "método de las cohortes" a Norteamérica. Veremos más adelante una descripción más detallada de estos métodos.

2) La tasa clásica de reproducción parece insuficiente porque no toma en cuenta la incidencia de variaciones posibles de la nupcialidad sobre la fecundidad.

Tomaremos otro ejemplo que muestre la necesidad de emplear grupos de mujeres en lo posible, de lo más homogéneos.

Supongamos un aumento de las tasas de nupcialidad a todas las edades. La proporción de las recién casadas aumenta, lo que parece posible solamente, porque la tasa de nupcialidad de las mujeres de más edad era menor en el pasado. Como las recién casadas tienen más alta fecundidad que las mujeres casadas desde varios años atrás, los cambios introducidos en la distribución de las mujeres casadas según la duración del matrimonio altera considerablemente la curva de la fecundidad y nos encontramos entonces con el mismo problema que acabamos de ver cuando hemos supuesto un aumento de la fecundidad.

Puede suceder también que la tasa general de nupcialidad no se modifique, o se modifique poco, pero que la estructura por edad de las recién casadas cambie en razón de una nupcialidad precoz. Estando ligada la fecundidad de manera evidente a la edad de las mujeres, al casamiento tendremos un aumento de la curva

* DEPOID P. "Reproduction nettes en Europe depuis l'origine de statistiques de l'état civil" Statistique Générale de la France. Etudes Démographiques No. 1 Paris, 1941. Imprimerie National. 42 p.

** WOOFER T.J. "Completed Generation Reproduction Rates" Human Biology, Vol. 19 No. 3, Sept. 1947.

*** WHELPTON P.K. "Cohort Fertility", Princeton University Press, Princeton 1954 1 vol., 492 p.

de fecundidad, sobre todo para las edades jóvenes de las mujeres.

La importancia del factor nupcialidad es grande no solamente en poblaciones malthusianas, sino también en régimen natural. Podemos mostrarlo de la manera siguiente, con un ejemplo dado por L. HENRY*.

Consideramos dos poblaciones donde no parece existir todavía la voluntad de restringir los nacimientos y con nupcialidades extremas: Noruega en el siglo XIX, como ejemplo de baja nupcialidad; y musulmanes de Argelia en 1948, como ejemplo de una población de nupcialidad alta y precoz. Las proporciones de mujeres casadas en estas dos poblaciones son las siguientes:

	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Noruega	2	20	48	66	71	75	73
Argelia (pob. musulmana)	31	72	83	85	83	76	66

Como puede verse, las tasas de nupcialidad son, hasta la edad de 44 años, mucho más altas en Argelia que en Noruega. Esta diferencia tiene por consecuencia que las tasas generales de fecundidad y de natalidad son mucho más altas en Argelia que en Noruega en la hipótesis que la curva de fecundidad por edad de las mujeres casadas es igual en las dos poblaciones y que se prescinde de la ilegitimidad.

En efecto, haremos las siguientes suposiciones:

- 1) La tasa de fecundidad estable de las mujeres no estériles es de 0,450.
- 2) Las proporciones de parejas estériles (por 1.000) son, en las dos poblaciones, iguales a las encontradas para poblaciones europeas de principios del siglo XVII, o sea:

15 años	5
20 "	30
25 "	65
30 "	115
35 "	190
40 "	325
45 "	605

- 3) Las tasas de nupcialidad de las dos poblaciones resultan de las proporciones de mujeres casadas en cada edad indicadas más arriba.

En estas hipótesis las tasas de fecundidad por edad llegan a ser:

* HENRY L. Fécondité et natalité en régime naturel. Bulletin de l'Institut International de Statistique. Rome 1954, Vol. 34, 3^e livraison, 11-16.

	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Noruega	0,009	0,090	0,197	0,253	0,239	0,189	0,051
Argelia (pob. musulmana)	0,133	0,308	0,340	0,325	0,280	0,192	0,046

Las tasas brutas de reproducción que resultan de estas tasas específicas de fecundidad son 2,5 para Noruega, y 4,0 para Argelia. Con estructuras por edad que parecen adecuadas a estas dos poblaciones, encontramos una tasa de natalidad de 35 por mil para Noruega y 60 por mil para Argelia. La causa de esta diferencia se debe solamente a diferencias en nupcialidad, ya que es el único factor que se supone distinto en estas dos poblaciones.

De allí la necesidad de calcular tasas de fecundidad y de reproducción según la duración del matrimonio (método de Gini, Karmel), según la edad de las mujeres al casarse, o según una combinación de estos dos factores (método de J. Bourgeois-Pichat) que llega también a incluir la edad de las madres al nacimiento de sus hijos, ya que tenemos la igualdad:

Edad de una mujer al casarse + duración del matrimonio al momento de un nacimiento = edad de la madre al nacimiento.

Algunos de estos cálculos necesitan estadísticas detalladas y establecidas desde largo tiempo; luego los índices que las utilizan pueden calcularse solamente para ciertos países europeos o norteamericanos. Son pocos los cálculos, entonces, que pueden aplicarse por el momento a países latinoamericanos.

3) La tasa clásica de reproducción no toma en cuenta la influencia del número de hijos ya nacidos.

La tasa neta de reproducción no indica, en caso de variación de la fecundidad, si esto se debe a mujeres que tuvieron pocos o, al contrario, muchos hijos. Es de suponer que, de manera general, cuando la fecundidad baja en un país, el descenso es más pronunciado entre las parejas que tienen muchos hijos que entre las que tienen uno, dos o tres hijos. De aquí la necesidad de tomar en cuenta el tamaño de la familia, o el orden de nacimiento o el número de hijos ya nacidos.

La técnica de la tasa de reproducción parece impropia a este propósito, como lo ha demostrado P.K. Whelpton*. Puede calcularse, según el procedimiento clásico, tasas de fecundidad por edad y luego tasas de reproducción para un orden de nacimiento determinado. Si sumamos tasas específicas de fecundidad

* Whelpton P.K. Reproduction rates adjusted for age, parity, fecundity, and marriage. Jour. Am. Stat. Ass., Dec. 1946, Vol. 41, 501-516.

relativas a los primogénitos, encontramos la tasa bruta de reproducción relativa a primogénitos, o sea, el número de primogénitos que tendrían 1000 mujeres (si las tasas son expresadas por 1000) en el supuesto que las tasas del año de observación permanecieran en el futuro. Haciendo este cálculo, y además tomando en cuenta la mortalidad, se encuentra a veces tasas que pasan de 1000 como puede verse en el cuadro XXIX, establecido por Whelpton para los EE.UU. en el año 1942, donde se obtuvo 1.084,10.

Este cálculo supone:

- a) que las tasas específicas de fecundidad por edad y por orden de nacimiento seguirán en el futuro con el mismo nivel que en 1942;
- b) que las tasas de supervivencia observadas durante el año 1942, permanecerán también fijas desde 1942 en adelante.

Tal resultado ($R_0 = 1.084,10$) es bastante ilógico, ya que 1000 mujeres no pueden tener más de 1000 primogénitos (o muy pocos más si se toma en cuenta las partes múltiples; en cambio la esterilidad fisiológica de las mujeres casadas de 20 años es por lo menos de 30 $\%$). Esto ha podido suceder porque antes del año de observación (1942) las mujeres de más edad no han tenido tantos primogénitos como podrían haber tenido si hubiesen experimentado, durante todo el período fértil, las tasas de fecundidad de las mujeres más jóvenes en la actualidad. En consecuencia, debe suponerse que para algunos años posteriores tienen que ocurrir descensos en las tasas relativas a primogénitos para las mujeres de más edad, compensados o no por aumentos en las tasas relativas a otros órdenes de nacimiento.

Debemos entonces separarnos de la hipótesis de la constancia de tasas específicas de fecundidad (de todo orden de nacimiento u órdenes determinados) y de mortalidad que caracteriza el cálculo de las tasas de reproducción.

En otros métodos parece necesario que se tome en cuenta el orden de nacimiento, ya que el número de hijos nacidos es un factor fundamental en el comportamiento de una pareja; según si este número sea o no inferior al número de hijos que se juzga deseable o al número máximo aceptable, la pareja no procurará o procurará ser infecunda en lo sucesivo. Hasta ahora existen métodos que toman en cuenta el número de hijos nacidos (el de Henry, combinación del orden de nacimiento con el intervalo de tiempo entre nacimiento; los de Whelpton y de Elizaga, combinación del orden de nacimiento y del año de nacimiento de las mujeres). De manera general, en estos métodos no se relaciona los nacidos de un orden j determinado, tenidos por mujeres de edad a con todas las mu-

eres de edad a, sino más bien, con mujeres de edad a y que ya tienen j - l hijos.

Cuadro XXIX.

Primogénitos por mil mujeres (blancos nativos) EE.UU. 1940-44.

Tasas centradas de primogénitos.

Edad	Año				
	1940	1941	1942	1943	1944
15-19	35,09	37,88	42,41	42,47	36,70
20-24	65,88	75,01	90,49	81,00	72,60
25-29	40,87	45,99	55,38	48,24	39,31
30-34	16,41	18,03	21,17	19,88	17,10
35-39	4,82	5,34	6,37	6,74	6,68
40-44	0,81	0,88	0,95	1,09	1,23
45-49	0,06	0,05	0,05	0,06	0,06
Total	163,94	183,18	216,82	199,48	173,68
Total	819,70	915,90	1.084,10	997,40	868,40

4) La tasa clásica de reproducción no toma en cuenta la posible influencia de la duración de tiempo que separa dos acontecimientos sucesivos: casamiento, nacimiento de varios órdenes.

Se ha observado que en poblaciones premalthusianas las familias completas de un tamaño dado, 10 hijos por ejemplo, tienen el mismo intervalo intergenésico, cualquiera que sea el rango de nacimiento. En cambio, es evidente que en poblaciones donde la fecundidad no es puramente fisiológica, los intervalos de tiempo que separan la fecha del casamiento con el primogénito, o el primogénito con el segundo hijo, etc., tienen una gran importancia. La intervención voluntaria se preocupa no sólo del número de hijos, sino también de los intervalos entre los nacimientos. Las parejas evitan, en poblaciones donde el planeamiento de los nacimientos es eficientemente aplicado, intervalos de tiempo demasiado cortos. Por otra parte, cuando por una razón u otra, el intervalo entre dos nacimientos se hizo muy largo, las parejas vacilan en cambiar sus maneras de vivir, o sea, en aceptar un nuevo nacimiento.

Estas consideraciones adquieren gran importancia en períodos perturbados guerra o crisis económica. De manera general, las parejas no recuperan enteramente el tiempo perdido. Mejor dicho, si han disminuido su fecundidad durante un período de tiempo a causa de una guerra o de condiciones económicas particularmente desfavorables, no aumentan el número de hijos después que han pasado estos acontecimientos como si nada hubiera sucedido.

De aquí el interés de tomar en cuenta el intervalo de tiempo entre casa-

miento y primogénito, entre primogénito y segundogénito, etc. El método de L. HENRY hace intervenir la acción de este factor, combinándolo con el número de hijos ya nacidos.

5) La tasa clásica de reproducción conduce a veces a resultados ilógicos, porque conduce a tasas intrínsecas diferentes según se calcule para el sexo femenino o para el sexo masculino.

Recordamos la ecuación fundamental de Lotka:

$$(73) B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) m(a) da$$

Distinguiendo los sexos por H (hombres) y M (mujeres) tenemos:

$$(73') B_H(t) = \int_0^{\infty} B_H(t-a) p_H(a) m_H(a) da$$

$$(73'') B_M(t) = \int_0^{\infty} B_M(t-a) p_M(a) m_M(a) da$$

de donde podemos derivar r_H y r_M .

Los números de nacimientos de sexos masculinos y femeninos están ligados por la tasa de masculinidad al nacimiento k :

$$(73''') B_H(t) = k B_M(t)$$

Las funciones $p_H(a)$, $m_H(a)$, $p_M(a)$, $m_M(a)$, y la constante k son las condiciones del sistema de ecuaciones (73'), (73'') y (73'''). Pero tenemos tres ecuaciones y dos incógnitas $B_H(t)$ y $B_M(t)$ de modo que el sistema es indeterminado. Si r_H y r_M son derivados de (73') y (73'') son en general diferentes y la constante k no puede tomar un valor determinado. Esto se denomina "male-female conflict".

Frente a este conflicto puede hacerse dos cosas: se hace desaparecer una de las tres ecuaciones, o las condiciones básicas del sistema se cambian. En general, la primera opción es la adoptada entre los demógrafos hasta ahora, haciendo los cálculos a base de la reproducción femenina, ya que no han podido solucionar la segunda opción, más rigurosa.

6) La tasa clásica de reproducción no toma en cuenta la ilegitimidad.

Por lo general, la tasa clásica de reproducción se refiere a todas las mujeres, o a las mujeres casadas solamente.

Sin embargo, la introducción del estado matrimonial en la medición de la fecundidad en América Latina tiene gran importancia, ya que una proporción con-

siderable de las parejas no son casadas y tienen una fecundidad menor que las de casadas. Como en algunos países se observa una tendencia al aumento de la nupcialidad, por casamiento de parejas que ya tienen varios niños, se plantea luego un problema muy complicado. Aún cuando dispusiéramos de números anuales de nacimientos según la duración del matrimonio, no tendríamos, por lo tanto grupos homogéneos en los grupos de matrimonios de igual duración, ya que ciertos matrimonios tenían niños antes de casarse. Es probable que en el futuro, en un país como Chile, la fecundidad de los matrimonios baje, aún cuando la tasa de natalidad siga a un nivel elevado en razón de un posible aumento de la nupcialidad. Esta es la razón por la cual parece siempre conveniente separar, por lo menos, la fecundidad legítima de la ilegítima, y estudiar las dos evoluciones separadamente en todos los países sudamericanos.

Las diferentes medidas posibles de la fecundidad y de la reproducción.

De manera general, puede decirse que parejas casadas, por ejemplo, que tienen el mismo número de niños, habiendo nacido el último en el mismo momento para todas las parejas, cuyas esposas son de la misma edad y casadas desde hace el mismo intervalo de tiempo, tienen una fecundidad que mide la voluntad más o menos fuerte de tener otro niño*. Si tomamos 100 parejas definidas de la manera que acabamos de ver, en dos poblaciones distintas, y si el número de niños en un intervalo de tiempo es el mismo para estos dos grupos, puede decirse que tienen el mismo comportamiento. Pero este cálculo sobrepasa las posibilidades estadísticas, aún en países europeos.

Notamos que no es necesario tomar en cuenta todos los factores, ya que muchos de ellos están en correlación.

Las primeras posibilidades de cálculo son:

- a) Tasas según el número de niños ya nacidos.
- b) Tasas según el intervalo entre el casamiento y el primer nacimiento, o según el intervalo intergenésico.
- c) Tasas según la edad de la madre.
- d) Tasas según la duración del matrimonio.
- e) Tasas según la edad al matrimonio.

* Sobre este tema ver: BOURGEOIS-PICHAT J. - La mesure de la fécondité des populations humaines. Congrès Mondial de la Population. Rome, 1954, Vol. IV, pp. 248-259.

Combinando dos factores las posibilidades son:

- | | |
|--|---|
| a') Tasas según la edad de la madre y la duración del matrimonio (y por lo tanto, según la edad de la mujer al matrimonio. | No se toma en cuenta el número de niños ya nacidos ni el intervalo intergenésico. |
| b') Tasas según la edad de la madre y el intervalo intergenésico. | No se toma en cuenta el número de niños ya nacidos, la duración del matrimonio ni, por lo tanto, la edad al matrimonio. |
| c') Tasas según la duración del matrimonio y el intervalo intergenésico. | No se toma en cuenta el número de niños ya nacidos, la edad de la madre ni, por lo tanto la edad al matrimonio. |
| d') Tasas según el número de niños ya nacidos y la edad de la madre. | No se toma en cuenta el intervalo intergenésico, la duración del matrimonio ni, por lo tanto, la edad al matrimonio. |
| e') Tasas según el número de niños ya nacidos y la duración del matrimonio. | No se toma en cuenta el intervalo intergenésico ni, por lo tanto, la edad al matrimonio. |
| f') Tasas según el número de niños ya nacidos y el intervalo intergenésico. | No se toma en cuenta la duración del matrimonio, la edad de la madre ni, por lo tanto, la edad al casamiento. |

Combinando tres factores las posibilidades son:

- | | |
|--|--|
| a") Tasas según el intervalo intergenésico, la edad de la madre, la duración del matrimonio, y por lo tanto, la edad al casamiento. | No se toma en cuenta el número de niños ya nacidos. |
| b") Tasas según el número de niños ya nacidos, la edad de la madre, la duración del matrimonio y por lo tanto la edad al casamiento. | No se toma en cuenta el intervalo intergenésico. |
| c") Tasas según el número de niños ya nacidos, la duración del matrimonio y el intervalo intergenésico. | No se toma en cuenta la edad de la madre ni, por lo tanto, la edad al casamiento. |
| d") Tasas según el número de niños ya nacidos, la edad de la madre y el intervalo intergenésico. | No se toma en cuenta la duración del matrimonio ni, por lo tanto, la edad de la madre al casamiento. |
| e") Tasas según el número de niños ya nacidos, el intervalo intergenésico y la edad de la madre al casamiento. | No se toma en cuenta la duración del matrimonio ni, por lo tanto, la edad de la madre. |

Además, debemos notar, para cada uno de los casos mencionados:

- 1) La posibilidad de efectuar los cálculos a base del sexo masculino o a base del sexo femenino.
- 2) La posibilidad de efectuar cálculos del momento (a base de las tasas observadas durante un año determinado) o por generación (para mujeres nacidas durante un año determinado) o por promoción (para mujeres casadas durante un año determinado).
- 3) Algunos métodos (THOMPSON, HENRY, MORTARA) son utilizables con datos censales.
- 4) Algunos métodos permiten la separación entre los nacimientos legítimos y los ilegítimos.

El problema de la medición de la fecundidad y de la reproducción se va complicando mucho. Los métodos van siendo siempre más exigentes en cuanto a

CAPITULO VII

LA MEDIDA DE LA FECUNDIDAD Y DE LA REPRODUCCION A BASE DE
DATOS CENSALES

Existen tres métodos que permiten obtener una medida de la fecundidad y de la reproducción sin utilizar los números anuales de nacimientos, como se suele hacer para encontrar las tasas clásicas de fecundidad y de reproducción. Estos tres métodos son:

- 1) El índice de reemplazo de Thompson que proporciona una estimación de la tasa neta de reproducción mediante la estructura por edades (en realidad se necesita conocer solamente la proporción de los niños y la proporción de las mujeres en edad fértil) y la tabla de vida. Luego, puede pasarse de este índice a la tasa bruta de reproducción y a la tasa de natalidad.
- 2) El método de Henry permite calcular las probabilidades de "agrandamiento" de las familias, o sea la probabilidad para una mujer que ha tenido j hijos, de tener $j+1$ hijos. A partir de una recombinación de esas probabilidades de "agrandamiento" puede obtenerse la tasa neta de reproducción.
- 3) El método de Mortara que permite reconstituir la curva de la fecundidad por edad en una población donde no ha habido cambios importantes en la fecundidad de los últimos 30 años.

1. Índice de reemplazo de Thompson

Relación entre los números de nacimientos y la tasa neta de reproducción.

Volvamos a la fórmula (73) que enlaza el número de nacimientos en el año t con los números de nacimientos de la generación anterior, pero reintroduciendo la variable t en las probabilidades de supervivencia y en las tasas de fecundidad:

$$(106) \quad B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a,t) m(a,t) da$$

Representamos por θ el intervalo de tiempo en el cual el número anual de

nacimientos crece en la misma relación que el número total de nacimientos de dos generaciones sucesivas. El intervalo ϑ es entonces determinado por la condición:

$$(107) \quad \frac{B(t)}{B(t-\vartheta)} = R_0(t)$$

y, ya que según la fórmula (92):

$$R_0(t) = e^{r T_r}$$

tenemos:

$$(108) \quad \frac{B(t)}{B(t-\vartheta)} = e^{r T_r}$$

Para la determinación de ϑ en los casos prácticos podemos hacer las dos siguientes suposiciones acerca de la evolución de $B(t)$ en el tiempo (llamando a_1 y a_2 los límites de edad del período fértil de las mujeres):

- $B(t)$ sigue una evolución lineal en el intervalo $t - a_1, t - a_2$.
- $B(t)$ sigue una evolución exponencial en el mismo intervalo $t - a_1, t - a_2$.

Primera hipótesis: $B(t)$ sigue una función lineal.

Esta hipótesis puede escribirse:

$$(109) \quad B(t - \vartheta) = h(t - a) + k \quad (a_1 < a < a_2)$$

Por otra parte, la ecuación (94) se escribe tomando en cuenta (93):

$$B(t - \vartheta) = \frac{1}{R_0(t)} \int_{a_1}^{a_2} B(t - a) p(a, t) m(a, t) da$$

y, con la hipótesis hecha sobre $B(t)$:

$$B(t - \vartheta) = \frac{1}{R_0(t)} \int_{a_1}^{a_2} h(t - a) p(a, t) m(a, t) da + \frac{1}{R_0(t)} \int_{a_1}^{a_2} k p(a, t) m(a, t) da$$

$$= ht - h \mu_1 + k$$

$$= h(t - \mu_1) + k$$

$$= B(t - \mu_1)$$

donde

$$\mu_1 = \frac{\int_{a_1}^{a_2} a p(a,t) m(a,t) da}{\int_{a_1}^{a_2} p(a,t) m(a,t) da}$$

de ahí:

$$\boxed{\vartheta = \mu_1}$$

De modo que la relación (108) llega a ser:

$$(110) \quad \frac{B(t)}{B(t - \mu_1)} = R_o(t) = e^{r \mu_1}$$

Segunda hipótesis: B(t) sigue una función exponencial.

Supongamos que la tasa de incremento del número de nacimientos sea r, la hipótesis se escribe:

$$B(t - \vartheta) = B(t) e^{-r \vartheta} \quad (a_1 < a < a_2)$$

ya que según (108)

$$\frac{B(t)}{B(t - \vartheta)} = e^{r \vartheta}$$

.. obtenemos en seguida:

$$\boxed{\vartheta = T_r}$$

Recordamos que el intervalo medio entre dos generaciones, en función de los seminvariantes de $\varphi(a)$ y de r se expresa por:

$$(91) \quad T_r = \mu_1 - \frac{r}{2!} \mu_2 + \frac{r^2}{3!} \mu_3 - \dots$$

T_r es entonces poco diferente de μ_1 cuando r no es muy grande.

La fórmula (108) llega a ser:

$$(111) \quad \frac{B(t)}{B \left[t - \left(\mu_1 - \frac{r}{2!} \mu_2 + \frac{r^2}{3!} \mu_3 - \dots \right) \right]} = R_0(t) = e^{r T_r}$$

Notamos que la relación (110) puede también obtenerse suponiendo que la tasa de incremento r no es muy elevada (menor que 2%) en lugar de suponer que el número de nacimientos varía de manera lineal.

En efecto, supongamos que e^{-ra} sea lineal entre 15 y 49 años, lo que parece verdadero cuando $|r| < 0,02$. Escribamos entonces:

$$e^{-ra} = e^{-r\alpha} + k(a - \alpha)$$

con $15 \leq a \leq 49$

La ecuación fundamental $\int_{15}^{49} e^{-ra} p(a) m(a) da = 1$ llega a ser:

$$e^{-r\alpha} \int_{15}^{49} p(a) m(a) da + k \int_{15}^{49} a e^{-ra} p(a) m(a) da - k \int_{15}^{49} e^{-ra} p(a) m(a) da = 1$$

$$e^{-r\alpha} R_0(t) + k(\mu_1 - \alpha) R_0(t) = 1$$

Si convertimos, en esta expresión $\mu_1 = \alpha$, obtenemos la relación (110).

Estos resultados son muy importantes y pueden resumirse de la manera siguiente:

En caso de que el número anual de nacimientos siga una forma lineal, o que la tasa de incremento sea menor que 2%, la tasa neta de reproducción se medirá por la relación entre el número de nacimientos ocurridos durante el año t y el número de nacimientos ocurridos durante el año t - μ_1 , siendo μ_1 el seminvariante del orden 1 de la función $\psi(a) = m(a) p(a)$. El valor de μ_1 difiere poco del de la edad media de las madres.

Si el número anual de nacimientos sigue una forma exponencial, o si la tasa de incremento es elevada μ_1 debe ser reemplazado, en la exposición previa, por T_r , intervalo medio entre dos generaciones.

El interés de esta proposición reside en que se puede prescindir de la permanencia de la mortalidad y de la fecundidad en el intervalo entre dos generaciones.

El Índice de Thompson.

Llamamos:

- q_1 la relación entre el número de niñas de edad comprendida entre v y w, en la época t, en la población considerada.
- q_2 la relación entre el número de mujeres de edad comprendida entre x y z, en la población estacionaria de la tabla de vida relativa a la población considerada en la misma época t.
- $n(a)$ el efectivo de edad a.

- p(a) la probabilidad de sobrevivir a la edad a.

El índice de reemplazo de Thompson es:

$$(112) \quad J(t) = \frac{q_1}{q_2} = \frac{\int_v^w n(a) da}{\int_x^z n(a) da} : \frac{\int_v^w p(a) da}{\int_x^z p(a) da}$$

Puede demostrarse que:

$$J(t) = R_0(t)$$

Efectivamente la expresión (112) se escribe también:

$$J(t) = \frac{\int_v^w B(t-a) p(a) da}{\int_v^w p(a) da} : \frac{\int_x^z B(t-a) p(a) da}{\int_x^z p(a) da}$$

Pongamos:

$$B(t - \alpha_1) = \frac{\int_v^w B(t-a) p(a) da}{\int_v^w p(a) da}$$

y

$$B(t - \alpha_2) = \frac{\int_x^z B(t-a) p(a) da}{\int_x^z p(a) da}$$

α_1 y α_2 son unas especies de medias ponderadas de la edad a, entre v y w y entre x y z, respectivamente. De modo que el índice J(t) se escribe:

$$J(t) = \frac{B(t - \alpha_1)}{B(t - \alpha_2)}$$
$$= \frac{B(t)}{B[t - (\alpha_2 - \alpha_1)]}$$

Si $\alpha_2 - \alpha_1 = T_r$ podemos escribir, como lo muestra la fórmula (108):

$$J(t) = R_o(t)$$

El índice de reemplazo de Thompson es una medida aproximada de la tasa neta de reproducción, establecida a base de la estructura por edad, sin referencia alguna a los números de nacimientos ocurridos.

Prácticamente el cálculo se hace de la manera siguiente:

- 1) Hacer la relación entre el número de niñas entre 0 y 4 años y el número de mujeres entre las edades x y z de tal manera que la diferencia entre la edad media de las mujeres y la edad media de las niñas de 0 a 4 años difiera poco del intervalo medio entre dos generaciones. Se ha indicado un valor aproximado del intervalo medio entre dos generaciones para diferentes tipos de poblaciones en el cuadro XIX.
- 2) Establecer la misma relación en la población estacionaria correspondiente a la tabla de vida de la población estudiada.
- 3) Dividir la primera relación por la segunda.

Damos un ejemplo de cálculo para Chile, en base al censo de 1952, en el cuadro

(Véase a continuación el cuadro XXX).

Cuadro XXX Ejemplo de cálculo del índice de reemplazo de Thompson para Chile,
año 1952.

	* Población censada	Población estacionaria
Número de niñas entre 0 y 4 años (q_1)	459.374	827.550
Número de mujeres entre 18 y 49 años (q_2)	1.390.940	4.561.410
Relación q_1/q_2	0,33026	0,18142

$$J = \frac{q_1}{q_2} = \frac{0,33026}{0,18142} = 1,820$$

Edad . media de las niñas de 0 a 4 años en el censo (α_1) : 1,92

Edad media de las mujeres de 18 a 49 años en el censo (α_2) : 30,09

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 29,17$$

* Población censada ajustada por:

- 1) Subnumeración de los niños
- 2) Irregularidades en ciertas edades (método de King-Karup)
- 3) Incremento hasta el 30 de Junio de 1952.

Aplicación: Estimación de la natalidad y del subregistro de los nacimientos por provincias en Chile, año 1952.

Se utilizó el índice de Thompson para el cálculo de las tasas de reproducción por provincias en Chile, y a partir de esas estimaciones se obtuvieron tasas corregidas de natalidad por provincias que fueron luego comparadas a las tasas oficiales. Los resultados se indican en el cuadro XXXI. Las diferentes etapas del cálculo fueron las siguientes:

1. Se eligió para cada provincia, y para el período 1947-1952, una tabla modelo de mortalidad, entre las establecidas por el Buró de la Población de las Naciones Unidas, en base a la correlación existente normalmente entre el nivel de la mortalidad infantil y el nivel de la esperanza de vida al nacimiento.
2. Se eligió los límites de edad de las niñas y de las mujeres en base a una población estable modelo que tiene características demográficas semejantes a las de Chile y se obtuvo así:

$$\begin{array}{l} v = 0 \qquad w = 4 \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = 29,17 \\ x = 18 \qquad z = 49 \end{array}$$

Se aplicó estos límites de edad a cada provincia.

3. Dada la subnumeración para las edades jóvenes en el censo, se estimó los números de niñas de 0 a 4 años en 1952 de la manera siguiente; en base a la tabla de mortalidad elegida para cada provincia se rejuveneció en cinco años la población de todas las mujeres y se obtuvo así la estructura por edad de las mujeres en el año 1947. Luego, se supuso que la proporción de las niñas de 0 a 4 años con respecto al total de las mujeres era igual en 1947 y en 1952 y se estimó los números de niñas de 0 a 4 años por provincias en 1952.

Notamos que este cálculo adyacente nos ha permitido obtener una aproximación de la subnumeración de las niñas de 0 a 4 años en el censo. El resultado de este cálculo está indicado en el cuadro XXXII.

4. Se calcularon las relaciones q_1 y q_2 , por provincia, y luego el índice de Thompson [fórmula (112)].
5. Se estimaron las tasas brutas de reproducción mediante la relación (101) donde se hizo $J=R_0$. Por esto se supuso que la edad \int estaba comprendida entre 29 y 30 años en cada provincia.

6. Se estimaron las tasas de natalidad mediante la relación (103). Notamos que las tasas de natalidad que se obtuvieron así, son aproximaciones mínimas de las tasas reales [véase el comentario hecho en el planteamiento de la fórmula (103)]. Estas estimaciones de las tasas de natalidad están indicadas en el cuadro XXXI donde se las compara con las tasas oficiales. Vemos que la subnumeración de los nacimientos es relativamente importante, pasando del 20%, en el grupo de las provincias rurales del Centro y del Sur del país, o sea: O'Higgins, Colchagua, Curicó, Talca, Ñuble, Arauco, Bío-Bío, Malleco, Cautín, Valdivia y Osorno.

También se hubiera podido pasar del índice de Thompson a la tasa de natalidad por otro camino: estimando la tasa de incremento en base de la relación $R_0 = e^{rTr}$, y luego calculando la tasa de natalidad al sumar la tasa de incremento y la tasa de mortalidad. Los resultados obtenidos por este método son muy parecidos a los indicados en el cuadro XXXI.

Notamos, para terminar, que existe una alta correlación entre:

- la subnumeración del registro de los nacimientos por provincia (cuadro XXXI);
- la subnumeración de las niñas de 0 a 4 años en el censo, por provincia (cuadro XXXII).

II. Método de L. Henry.

Cálculo de probabilidades de "agrandamiento" de la familia.

Llamaremos:

M_j el número de mujeres que han tenido j niños.

m_j la proporción de mujeres que han tenido j niños con respecto al número total de mujeres de 15 años y más.

m_{j+} la proporción de mujeres que han tenido j niños por lo menos.

a_j la probabilidad de "agrandamiento" de la familia para las mujeres que han tenido j niños, o sea, la probabilidad para una mujer que tuvo j niños de tener un hijo más.

Tenemos entonces las relaciones:

$$(113) \quad m_0 + m_1 + \dots + m_j + \dots + m_\omega = 1$$

siendo ω el número mayor de niños que puede tener una mujer.

Cuadro XXXI Tasas de reproducción y tasas de natalidad por provincias en Chile
(1949-1951). Estimación del subregistro de los nacimientos.

Provincias	L ₀ (1947-1952)	J=R ₀	R' ₀	Tasa de natalidad		% de nacimientos no registrados.
				oficial	estimada	
Tarapacá	56	1,753	2,194	29,8	31,3	4,8
Antofagasta	50	1,665	2,276	31,7	33,3	4,8
Atacama	52	2,164	2,871	38,0	41,6	8,6
Coquimbo	46	1,939	2,828	41,4	42,1	1,7
Aconcagua	54	2,150	2,770	34,6	39,8	13,1
Valparaíso	52	1,440	1,910	27,9	27,7	- 0,7
Santiago	52	1,431	1,784	28,3	27,5	- 0,3
O'Higgins	68	2,176	3,069	35,9	45,3	20,8
Colchagua	48	2,227	3,142	34,3	46,4	26,1
Curicó	46	2,074	3,025	34,2	45,1	24,2
Talca	46	2,015	2,939	34,3	43,8	21,7
Maule	50	2,007	2,744	35,4	40,1	11,7
Linares	44	2,162	3,267	34,2	49,1	30,3
Ñuble	42	1,978	3,099	37,4	47,1	20,6
Concepción	44	1,814	2,740	41,5	41,2	- 0,7
Arauco	42	2,196	3,441	38,8	52,3	25,8
Bío-Bío	42	2,168	3,397	38,0	51,6	26,4
Malleco	40	2,063	3,360	35,7	51,6	30,8
Cautín	42	1,949	3,054	33,0	46,4	28,9
Valdivia	40	1,994	3,247	33,7	49,4	34,5
Osorno	40	1,820	2,963	35,7	45,5	21,5
Llanquihue	40	1,987	3,236	40,4	49,7	18,5
Chiloé	40	1,614	2,628	37,3	40,3	0,7
Aysén	50	2,413	3,299	39,9	48,3	17,4
Magallanes	56	1,439	1,801	26,8	25,7	0,4

Cuadro XXXII Estimación de la subnumeración de las niñas de 0 a 4 años en el Censo de Chile de 1952, por provincias.

Provincias	Número de niñas de 0 a 4 años en el censo.	Número estimado de niñas de 0 a 4 años en el momento del censo	% de subnumeración de niñas.
Tarapacá	6.542	6.839	4,3
Antofagasta	11.696	12.403	5,7
Atacama	5.696	6.465	11,9
Coquimbo	18.433	21.883	15,8
Aconcagua	8.080	10.160	20,5
Valparaíso	28.825	32.682	11,8
Santiago	107.281	114.265	6,1
O'Higgins	15.617	18.552	15,8
Colchagua	9.489	11.374	16,6
Curicó	6.188	7.151	13,5
Talca	12.009	13.868	13,4
Maule	4.567	5.440	16,0
Linares	10.061	11.968	15,9
Ñuble	16.871	20.407	17,3
Concepción	28.685	31.862	10,0
Arauco	5.366	6.317	15,1
Bío-Bío	9.844	12.018	18,1
Malleco	11.065	13.920	20,5
Cautín	24.224	30.445	20,4
Valdivia	16.613	19.746	15,9
Osorno	8.470	9.764	13,0
Llanquihue	10.413	12.084	13,8
Chiloé	6.563	7.812	16,0
Aysén	2.031	2.275	10,7
Magallanes	2.793	3.211	13,0

$$(114) \quad m_j = m_{j+} - m_{j+1+}$$

La proporción de mujeres que han tenido j niños es igual a la diferencia entre la proporción de mujeres que han tenido por lo menos $j+1$ niños y la proporción de mujeres que han tenido por lo menos j niños.

$$(115) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = m_{1+} \\ a_1 = \frac{m_{2+}}{m_{1+}} \\ \dots \\ a_j = \frac{m_{j+1+}}{m_{j+}} \end{array} \right.$$

La probabilidad para una mujer que ha tenido j niños de tener otro niño más es la relación entre la proporción de mujeres que han tenido, por lo menos, $j+1$ niños con la proporción de mujeres que han tenido, por lo menos, j niños.

Las relaciones (115) pueden escribirse:

$$(116) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{1+} = a_0 \\ m_{2+} = a_0 a_1 \\ \dots \\ m_{j+1+} = a_0 a_1 \dots a_j \end{array} \right.$$

La proporción de mujeres que han tenido por lo menos $j+1$ niños es el producto de las probabilidades de agrandamiento hasta a_j .

Si tomamos en cuenta la relación (114), las relaciones (115) se transforman en:

$$(117) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_0 = 1 - a_0 \\ m_1 = a_0(1 - a_1) \\ m_2 = a_0 a_1(1 - a_2) \\ \dots \\ m_j = a_0 a_1 \dots a_{j-1}(1 - a_j) \end{array} \right.$$

Podemos, entonces, calcular las probabilidades de agrandamiento de las familias si conocemos solamente la distribución de las mujeres según el número de niños que han tenido. Este dato es relativamente fácil de conseguir en el momento del censo.

El cálculo es muy sencillo: se acumulan las cifras de mujeres relativas a cada número de niños que han tenido, a partir de las familias más grandes. Se consideran luego estos totales en el sentido contrario de sus obtenciones, o sea, en el orden creciente, y se hacen las relaciones de cada total con respecto al contrario.

Debe considerarse solamente familias completas, o sea familias en las cuales la mujer tiene entre 45 y 49 años.

Puede también aislarse "promociones", o sea conjunto de parejas casadas durante el mismo período, y distinguirse, para cada promoción según la edad al casarse de las mujeres.

Cálculo de la tasa de reproducción.

Puede resumirse la serie de las probabilidades de "agrandamiento" en un índice único, tomando una función de las probabilidades de "agrandamiento". Este índice es el término medio de hijos que han tenido las mujeres al llegar al final del período fértil; corresponde a la tasa bruta de reproducción R'_0 .

Efectivamente, sea R'_0 el término medio de hijos por cada mujer que ha terminado el período fértil. Tenemos:

$$R'_0 = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + jm_j + \dots + \omega m_\omega$$

$R'_0 = m_{1+} + m_{2+} + m_{3+} + \dots + m_{j+} + \dots + m_{\omega+}$
e, introduciendo las probabilidades de "agrandamiento":

$$(118) R'_0 = a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 a_2 + \dots + a_0 a_1 a_2 \dots a_\omega$$

Aplicación práctica.

Un ejemplo del método está indicado en el cuadro XXXIII para México, en base de los datos del censo de 1950. Se tomó el grupo de las mujeres que tenían, en el momento del censo, entre 45 y 49 años y se hicieron los ajustes siguientes:

1. La proporción de mujeres de edad entre 45 y 49 años que no han tenido hijos representan el 8% del número total de mujeres de 45 a 49 años, con referencia a países europeos del siglo pasado. Esta estimación se hizo en razón de un abultamiento evidente del número de mujeres que no habían declarado haber tenido hijos.
2. La distribución de mujeres según el número de hijos que han tenido (m_j) fué ajustada, en razón de algunas irregularidades de las cifras brutas.

Cuadro XXXIII Cálculo de las probabilidades de "agrandamiento" de las familias y de la tasa neta de reproducción en México, a base de los datos del Censo de 1950.

Número de hijos	Número de mujeres de 45 a 49 años.	Proporción de mujeres *	m_{j+}	Probabilidad de agrandamiento a_j
0	115.250	806	10.000	0,9194
1	35.175	770	9.194	0,9162
2	37.150	812	8.424	0,9036
3	38.050	819	7.612	0,8924
4	38.250	831	6.793	0,8777
5	40.250	828	5.962	0,8611
6	40.325	811	5.134	0,8420
7	35.725	770	4.323	0,8219
8	35.225	715	3.553	0,7988
9	31.125	641	2.838	0,7741
10	26.625	553	2.197	0,7483
11	18.225	458	1.644	0,7214
12	19.550	369	1.186	0,6889
13	9.750	279	817	0,6585
14	7.525	203	538	0,6227
15	11.300 **	142	335	0,5761
16		94	193	0,5130
17		56	99	0,4343
18		33	43	0,2326
19		8	10	0,2000
20		2	2	
Totales	539.500	10.000		

$$R_o = k(a_o + a_o a_1 + a_o a_1 a_2 + \dots) = 0,48780 \cdot 6,0895 = 2,970$$

* Cifras ajustadas (Véase el texto)

** La cifra 11.300 corresponde a las mujeres que han tenido por lo menos 15 hijos.

No se ha podido distinguir las promociones y las edades al casarse en las mujeres. Vemos que la probabilidad de "agrandamiento" pasa de 0,9 hasta a_2 , pasa luego del 0,8 hasta a_7 , y es aún mayor de 0,5 hasta a_{16} . En otras palabras, una mujer que ha tenido 16 hijos tiene, por lo menos, una probabilidad de un medio de tener otro hijo. Este conjunto de probabilidades es característica de una población muy poco malthusiana y corresponde, más o menos, a la de Inglaterra para mujeres casadas entre 20 y 24 años entre los años 1851-1860.

La tasa neta de reproducción, obtenida mediante recombinación de las probabilidades de "agrandamiento" es de 2,97.

Cuadro XXXIV. Tasas brutas de reproducción por provincias, en México (censo de 1950) mediante el método de Henry.

Aguascalientes	5,97	Nayarit	5,01
Baja California T.N.	4,89	Nuevo León	5,20
Baja California T.S.	6,02	Oaxaca	4,42
Campeche	4,66	Puebla	5,20
Coahuila	5,53	Querétaro	5,07
Colima	5,14	Quintana Roo	4,82
Chiapas	5,23	San Luis Potosí	5,37
Chihuahua	5,73	Sinaloa	5,35
Distrito Federal	4,46	Sonora	5,61
Durango	6,30	Tabasco	5,54
Guanajuato	5,79	Tamaulipas	5,01
Guerrero	4,52	Tlaxcala	5,82
Hidalgo	4,88	Veracruz	4,87
Jalisco	5,29	Yucatán	5,01
<u>México</u>	5,35	Zacatecas	6,16
Michoacán	5,45	Total del país	5,21
Morelos	4,97		

El resultado de un cálculo semejante para México, por provincias, está indicado en el cuadro XXXIV, para mujeres de 45 a 49 años, según los datos proporcionados por el censo de 1950. Se supuso que la esterilidad de las mujeres que han terminado el período de reproducción es de un 8%, en lugar de un 18% como aparece en la estadística oficial. Además se hizo un ajustamiento de los números de mujeres, según el número de niños que han tenido, por provincias, en razón de numerosas irregularidades en las declaraciones en el momento del censo. Se calcularon así las probabilidades de agrandamiento, y luego, mediante una recombinación de esas probabilidades, las tasas brutas de reproducción que están indicadas en el cuadro XXXIV.

III. Método de Mortara.

En varios censos se suministra información sobre el número de hijos nacidos vivos que tuvieron las mujeres censadas. La forma en que se ha hecho la pregunta es casi generalmente, la siguiente: "Número de hijos nacidos vivos que ha tenido esta mujer". Puede distinguirse, por lo general, el estado matrimonial de las mujeres (solteras, casadas, viudas, divorciadas, a veces se hace la siguiente indicación: mujeres no casadas que viven en unión consensual). En ciertos países como Estados Unidos en 1890, 1900 y 1910 fué posible preguntar por la duración del matrimonio, o por la edad al casarse (de la cual puede computarse la duración del matrimonio, al compararse con la edad actual), y otra pregunta sobre si el presente matrimonio es el primero de la mujer o uno posterior.

Es posible, tomando en cuenta ciertas limitaciones que veremos más adelante, calcular a partir de estos datos una tabla de fecundidad por edad de la madre.

Llamamos:

- $n(a)$ al número de hijos nacidos vivos tenidos por mujeres de edad a en el momento del censo;
- $M(a)$ al número de mujeres de edad a en el momento del censo.

La relación:

$$F(a) = \frac{n(a)}{M(a)}$$

expresa el número de hijos por mujer sobreviviente a la edad $a+1/2$ en el momento del censo. $F(a)$ es también una tasa acumulada de fecundidad hasta la edad $a+1/2$, o la tasa relativa a la generación de edad a .

De la misma manera podemos escribir:

$$F(a + 1) = \frac{n(a + 1)}{M(a + 1)}$$

La diferencia entre tasas acumuladas de dos tasas sucesivas expresa la tasa anual de fecundidad para el intervalo $a + 1/2$ y $a + 1 + 1/2$:

$$m(a + 1) = F(a + 1) - F(a)$$

Haciendo promedios entre dos valores sucesivos puede encontrarse tasas para edades exactas.

Para que este cálculo pueda aceptarse debemos mencionar los siguientes supuestos:

1. Las mujeres fallecidas antes de cumplir a años, tuvieron una misma fecundidad media que las que no fallecieron antes de la edad a . Esta hipótesis puede aceptarse sin error grave.
2. Existe una gran estabilidad en la fecundidad de las diferentes generaciones que participan en el cálculo de las tasas acumuladas relativas a un determinado año. Si hubo cambio en la fecundidad, por ejemplo un descenso, en el transcurso de los últimos 30 años, el error introducido en el cálculo de las tasas, es tanto más grande mientras más edad tengan las mujeres cuyas tasas se considere, ya que las generaciones más viejas fueron más fecundas en una época pasada que en los últimos años. Es bien sabido que cuando la fecundidad baja en un país, el descenso es más pronunciado a medida que se considera edades más elevadas de las madres (y, por lo tanto, familias de tamaño más grande). El inconveniente de este método es de tomar como tasas del momento tasas que corresponden en realidad a distintas generaciones de mujeres, con experiencias diferentes.
3. Las tasas encontradas para las mujeres de más edad deben considerarse como tasas subestimadas, ya que se refieren al número de niños nacidos en un período que se prolonga desde 30 o más años atrás, y aún, muchas veces, las mujeres no mencionan los niños que tuvieron cuando eran más jóvenes o niños que fallecieron.
4. Las migraciones cuando son importantes pueden traer muchas fuentes de erro-

res. Si los datos se tabulan solamente para mujeres nativas, se obtendrá tasas subestimadas en razón de las mujeres que tuvieron niños en el país y que luego emigraron.

Un ejemplo de cálculo según este método, está indicado en el cuadro XXXV para México, en base de los datos del censo de 1950. Las tasas de fecundidad obtenidas están indicadas en la columna -7- de este cuadro. Un análisis de estos resultados hacen pensar que las tasas encontradas son más bajas que en la realidad, debido al hecho que un número apreciable de mujeres no han indicado exactamente el número de hijos que tuvieron. La tasa bruta de reproducción que resulta de la curva de fecundidad es de 4,87, inferior a la que se obtuvo mediante el método de Henry, o sea, 5,21. (cuadro XXXIV).

Cuadro XXXV. Aplicación del método de Mortara al cálculo de las tasas de fecundidad en México, en base de los datos del censo de 1950.

Edad de las mujeres	Número de mujeres	Número de hijos nacidos vivos que han tenido	Tasas acumuladas de fecundidad en %	Tasas de fecundidad en % *	Edad pivot. corresp. a las tasas de la col.5	Tasas de fecund. relativas a las edades pivot. de la col. 8 en % **	Edad pivot.
-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-	-7-	-8-
14	290.600	1.025	0,35	3,74	16	0,04	14
15-19	1.391.175	265.150	19,06	20,38	20	9,98	17,5
20-24	1.241.400	1.501.575	120,96	25,87	25	23,12	22,5
25-29	1.035.400	2.591.675	250,31	20,37	30	23,12	27,5
30-34	728.375	2.565.150	352,17	18,66	35	19,52	32,5
35-39	797.550	3.553.000	445,49	6,81	40	12,74	37,5
40-44	618.650	2.966.800	479,56	5,47	45	6,14	42,5
45-49	539.500	2.734.750	506,90			2,70	47,5

* Tasas obtenidas por diferencias sucesivas de las tasas acumuladas divididas por 5.

** Tasas obtenidas por interpolación, en base de las tasas indicadas en la columna -5-.