
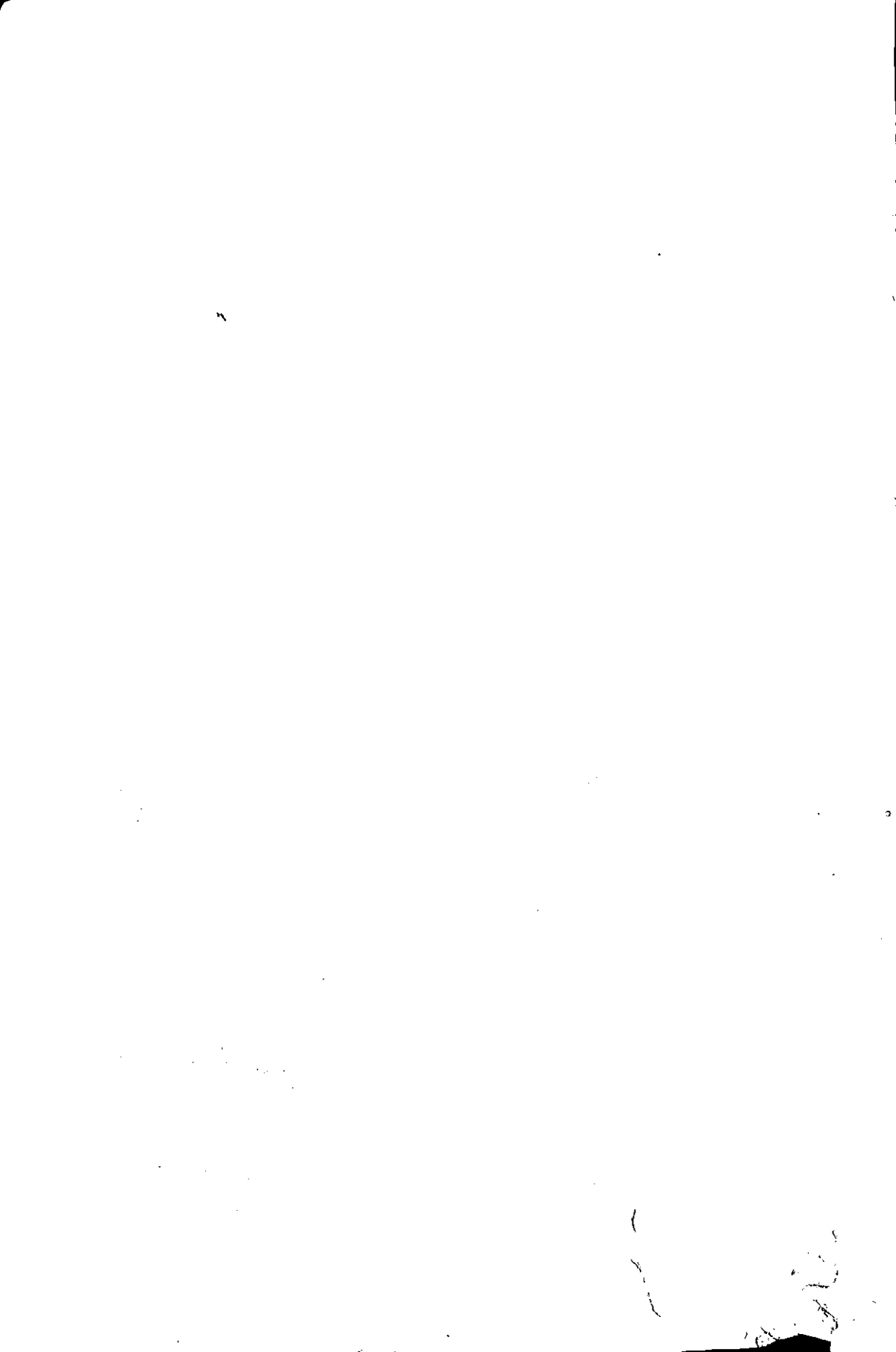


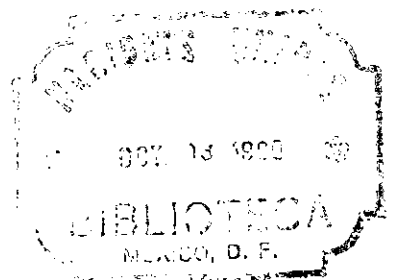
1977

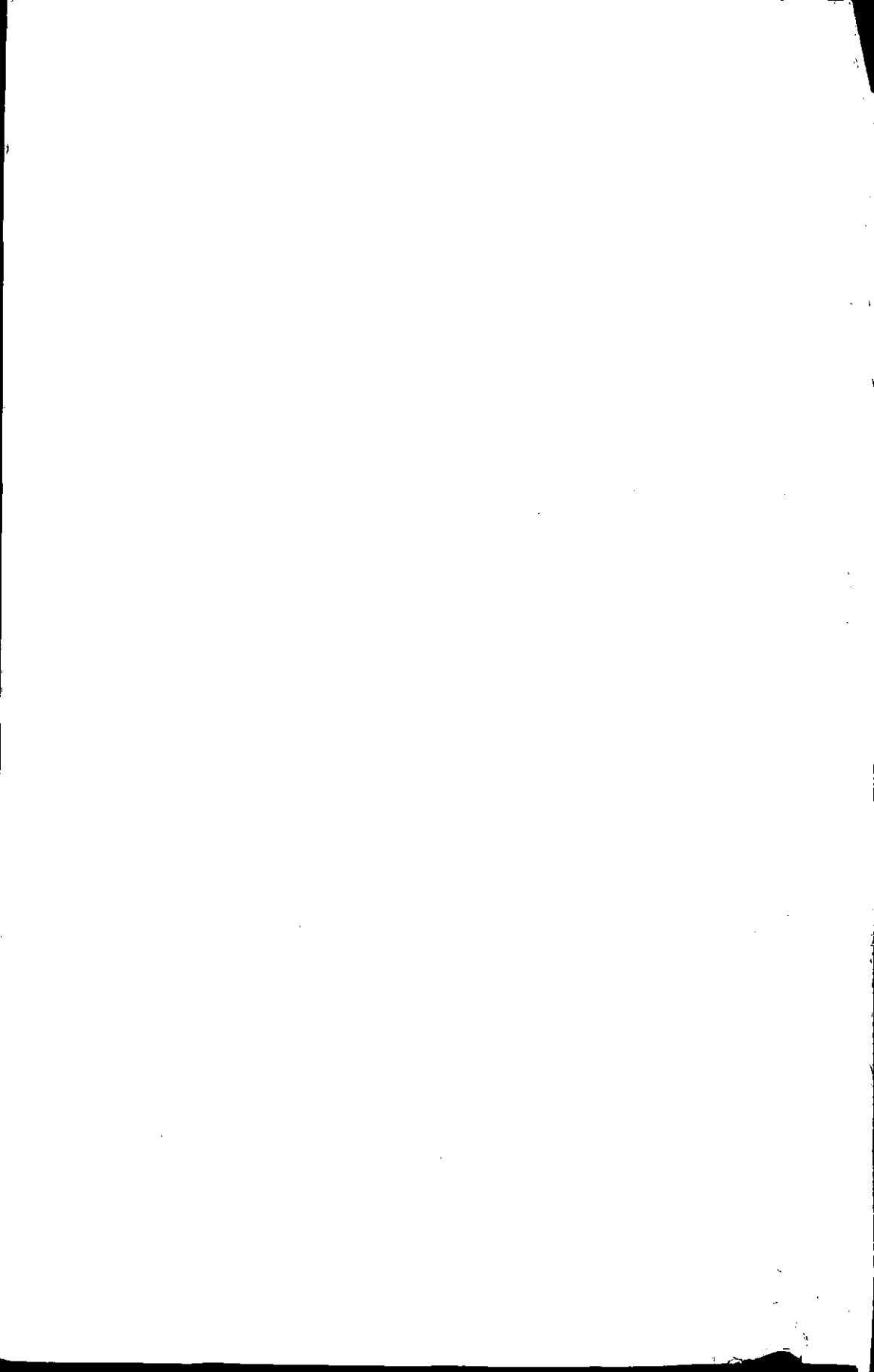


**INTRODUCCION**  
a las  
**MATEMATICAS**  
de  
**POBLACION**

© 1977 by the author. All rights reserved. Printed in Mexico.







# INTRODUCCION A LAS MATEMATICAS DE POBLACION

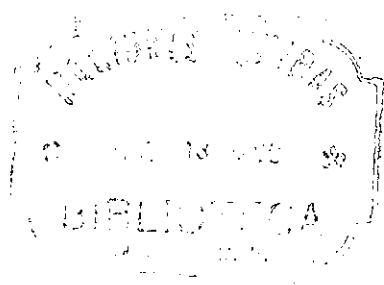


NATHAN KEYFITZ

INTRODUCCION  
A LAS MATEMATICAS  
DE POBLACION



Centro Latinoamericano de Demografía  
Santiago de Chile, 1979



CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA  
CELADE

Edificio Naciones Unidas  
Avenida Dag Hammarskjöld  
Casilla 91, Santiago, CHILE

Apartado Postal 5249  
San José, COSTA RICA

Traducción al español de la versión inglesa "Introduction to the Mathematics of Population", Nathan Keyfitz. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Nueva York, 1968.

Traducción de RICARDO PARDO  
Revisión de la traducción: JUAN C. LERDA

© CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA (CELADE)

Derechos cedidos por Addison-Wesley Publishing Company, Inc. para la traducción y edición en español.

Serie E, N° 18  
Santiago, Chile, 1979.



*A BEATRICE*



## PREFACIO

“En estadística, al igual que en física, la inexactitud de nuestros métodos de medición no hace más que oscurecer nuestra concepción de lo que medimos.”

R. A. FISHER, *The Genetical Theory of Natural Selection*

El reconocimiento público y académico de que la población es un problema práctico ha crecido en los años recientes como respuesta al aumento del número de seres humanos en nuestro planeta. Este reconocimiento no se ha visto hasta ahora expresado en una presentación unificada de las matemáticas para el estudio de la población. Sólo un breve libro de A. J. Lotka, escrito en francés y publicado en 1939,<sup>1</sup> sugiere lo que se debería y lo que no se debería incluir del material disponible hace treinta años.

El exceso anual de los nacimientos sobre las muertes en el mundo es actualmente del orden de los 70 millones, lo que significa, hablando numéricamente, que cada tres años surge a la existencia un nuevo Estados Unidos. El nuevo Estados Unidos no goza del nivel de vida del Estados Unidos existente, pero al cual aspira, y esta época de aspiración suprema puede ser también de retroceso a la miseria de los períodos más primitivos de la historia. Aunque se está haciendo mucho para limitar el crecimiento de la población, necesita hacerse mucho más para tomar el rumbo en la dirección del progreso.

Sin embargo, este libro se refiere a un aspecto totalmente diferente de la empresa del progreso humano: determinar la situación demográfica. Aun dentro de este campo del conocimiento, su finalidad es limitada. Su tema no son los hechos como tales, sino cómo manejarlos. Intenta reunir, y hasta donde sea posible sistematizar, las partes más relevantes de ese vasto cuerpo de teoría matemática que se refiere a los procesos de crecimiento de las poblaciones humanas y animales.

Aunque no se han escrito libros sobre ello, la riqueza del tema es evidente a juzgar por los cientos de artículos esparcidos a través de cincuenta o más revistas; por eso, para que este libro tuviera cierto grado de coherencia y fuera de una longitud razonable, fue necesario proceder a una selección. El camino elegido para la exposición comienza con la tabla de vida o modelo de población estacionaria, prosigue con el modelo más general para un sexo, con intervalos de edades discretos y luego continuos; en los capítulos 12 a 14 las poblaciones de un sexo entran en interacción entre sí. Todos estos temas están tratados de acuerdo con la forma determinística corriente en demografía, pero los capítulos 15 a 18 consideran variaciones aleatorias y deducen en algunos casos simples

<sup>1</sup> Publicado por CELADE en castellano con el título “Teoría analítica de las asociaciones biológicas”. (N. del E.)

las varianzas de las distribuciones de cuyos valores esperados tratan los capítulos precedentes.

El argumento es completo hasta donde lo permiten las limitaciones de espacio; para el lector cuya formación es más demográfica que matemática, se explican con algún detalle las matrices, ecuaciones diferenciales y la Transformada de Laplace, desarrollándose también ejemplos acerca de su uso. Yo no he supuesto un conocimiento de cadenas de Markov, por lo que introduce algunas de dichas ideas cuando se necesitaban.

Mi técnica pedagógica consistió en usar sólo una fracción del manuscrito con alguna clase. Para un curso trimestral (30 horas de exposición) con estudiantes interesados en resultados numéricos, he permanecido en el modelo discreto (principalmente los capítulos 1 al 4) incluyendo algo de programación Fortran del modelo matricial y seleccionando técnicas de los capítulos 10 y 11. Para estudiantes con mayor interés teórico, he trabajado la ecuación de renovación (capítulos 5, 6 y 8) y luego he ido a los capítulos 12 y 13. Para estudiantes más avanzados, he dictado un curso con énfasis en poblaciones con dos sexos y probabilidad, consistente en los capítulos 12 a 14 y 16 a 18. Por tanto, están contenidos en este libro, por lo menos, tres cursos considerablemente separados, cada uno de los cuales requiere un trimestre o un semestre.

Aunque se desarrolló en cursos y seminarios, el libro se diseñó principalmente para el lector que estudia por su cuenta. He tratado de desafiarlo mediante preguntas diseminadas a través de la exposición. Se ha tratado de que las demostraciones sean completas y autosuficientes en el sentido de que se puedan seguir sin conocimiento matemático extenso o referencia a otros libros. Pero se supone que el lector tiene lápiz y papel a mano y que él mismo debe llenar lo que va desde una fórmula a la siguiente. Los ejemplos numéricos se pueden verificar con una calculadora de escritorio. El lector interesado en desarrollar programas de computación encontrará datos y resultados de muestra, que le deberían permitir someter a prueba sus programas (y los míos). Los resultados que aparecen aquí fueron redondeados a ocho lugares decimales en forma separada de las computaciones.

La teoría se vuelve comprensible, tanto al autor como a los lectores, mediante su aplicación a datos. He hecho lo posible por ilustrar la teoría con datos reales concernientes a poblaciones humanas y he evitado los ejemplos hipotéticos. Cuando la fuente de cualquier conjunto de datos es una sola publicación, ésta es citada. Sin embargo, para la mayoría de las tablas entra una variedad de fuentes, y citarlas todas habría tomado mayor espacio que el que se podría permitir en un libro más interesado en la lógica que en resultados sustantivos. Para la obtención de datos básicos han sido importantes los *Demographic Yearbooks* de las Naciones Unidas desde 1948 a 1966; también lo han sido las publicaciones oficiales nacionales contenidas en la biblioteca de la Universidad de Chicago y la correspondencia con agencias estadísticas nacionales. Se hicieron dos conjuntos de estimaciones para los Estados Unidos: uno a partir de los registros de nacimientos tal como se publicaron, proviniendo el otro de los registros corregidos por la fuente oficial, el National Center for Health Statistics; este último se individualiza por una nota al pie de la página. Las fuentes detalladas de todos los datos están contenidas en los archivos del autor.

Una serie mucho más extensa de estimaciones, con la cual son consistentes las aquí contenidas, aparece en *World Population*, del presente autor y Wilhelm Flieger, publicado por University of Chicago Press en 1968.

En el *Novum Organum* Bacon dice: "La verdad emerge más fácilmente del error que de la confusión". No se en qué medida mi trabajo evita la confusión, pero indudablemente contiene errores. Quedaré muy agradecido si me informan de éstos.

Durante los cinco años en que este libro fue mi preocupación casi exclusiva, he recibido la ayuda de muchas personas. Fred Mosteller no sólo promovió todo el proyecto, sino que leyó la sucesión de borradores e hizo numerosos comentarios, todos los cuales contribuyeron a darle consistencia lógica y claridad. Los capítulos fueron reescritos muchas veces en un esfuerzo por ajustarlos a su patrón de exposición. Divakar Sharma verificó muchas de las demostraciones, e hizo preguntas que me llevaron a darme cuenta mejor acerca de qué suposiciones refuerzan mis argumentos. Otras personas a quienes estoy agradecido por sus sugerencias son Carl Bajema, R. N. Battacharya, Arthur A. Campbell, Norman Carrier, Chin Long Chiang, Ansley J. Coale, Wilhelm Flieger, Leo A. Goodman, Morris H. Hansen, P. Das Gupta, R. W. Hodge, Barbara Keyfitz, Leslie Kish, Evelyn Kitagawa, John S. Lew, R. C. Lewontin, Alvaro López, David McFarland, Paul Meier, Walter Mertens, Felix Moore, E. M. Murphy, Jay Palmore, Andrei Rogers, Norman Ryder, Mindel C. Sheps, Mortimer Spiegelman, Leon Tabah y William Taylor. En la última búsqueda de errores en la etapa de prueba, tuve la valiosa ayuda de Robert Retherford.

Estudiantes de Chicago, Duke y Berkeley proporcionaron resultados numéricos sobre datos reales y de ese modo evaluaron la corrección como asimismo la aplicabilidad de algunas partes de la teoría. Los que hicieron cantidades sustanciales de programación, cuyos resultados no siempre aparecen explícitamente, fueron Eduardo Arriaga, Roger Avery, Frank Bean, Beth Berkov, Linda Bourque, Chen-Tung Chang, Jere Cohen, William Cummings, Thomas G. Donnelly, Linda Drass, Jeffery Evans, Wilhelm Flieger, Prithwis Das Gupta, Barbara Hevns, Joginder Kumar, Ronald Lee, William Lindeman, George Masnick, Susan McDougall, Maurice Moore, Effat Moussa, James Mulherin, E. M. Murphy, Dhruva Nagnur, Pierre Nakache, Terry Nichols, Frank Oechsli, A. Okorafor, Jay Palmore, James Porter, Robert Retherford, Hardeo Sahai, Diego Salazar, R. S. S. Sarma, Susan Borker Schwarz, J. M. Sehgal, William J. Serow, S. N. Sinha, Peter Smith, Shannon Stokes. P. P. Talwar, William Taylor, Andrea Tyree, Eliezer Uche, Daniel Vandepoortaele y Nancy Wang. Aun en los casos en que el resultado de la programación sirvió meramente para convencerme de que no había en vista ninguna aplicación útil a los datos reales, de modo que retiré la teoría del volumen, estoy agradecido por resultados que ayudaron sustancialmente a mi pensamiento.

La National Science Foundation apoyó financieramente dicho trabajo de cálculo. Muchos gastos incidentales fueron cubiertos por una subvención del Population Council. Una subvención de la Fundación Ford me aligeró de la carga docente usual.

La deuda fundamental de cualquier autor es con los clásicos de su tema. Lotka, Volterra, Leslie, Feller, Kendall, Coale, Goodman y otros forjaron las materias expuestas en este libro. Ninguno de ellos, haya sido su ayuda por escrito u oral, es responsable por el uso que aquí se hace de su trabajo.

Aun cuando la mayor parte del libro expone un conjunto de materiales relativamente bien conocidos, se han llenado algunos vacíos y se ha desarrollado algo de teoría y técnicas nuevas. Aquellas partes de diversos capítulos que contienen lo que es original en el argumento, han sido presentadas en forma pre-

liminar en *Behavioral Science*, *Biometrics*, *Demography*, *Human Biology*, *The Journal of the American Statistical Association*, *The Journal of the Royal Statistical Society*, *Population*, *Population Studies*, y *The Review of the International Statistical Institute*. Vayan mis agradecimientos a los editores de estas revistas por sugerir puntos substantivos así como de exposición, y por permitir volver a usar el material.

La mayor parte del trabajo se realizó en la Universidad de Chicago. Yo no fui el primer recién llegado a dicha comunidad que sintió, bajo el estímulo de colegas y estudiantes, un descontento con lo que pensaba que ya sabía. De tal descontento se desarrolla en forma natural el impulso a investigar más profundamente, aun en individuos para quienes en otros medios el conocimiento nuevo no era de gran importancia. De todas mis deudas, la mayor es con la Universidad de Chicago.

N. K.

*Berkeley, California*  
*Febrero de 1968*

## RECONOCIMIENTOS

El capítulo 1, sección 1.2, págs. 23-28, es una versión drásticamente modificada de "A Life Table that Agrees with the Data", *Journal of the American Statistical Association* 61, Parte I, págs. 305-312, junio de 1966.

Los capítulos 2 y 3 tienen partes comunes con los siguientes artículos: "Matrix Multiplication as a Technique of Population Analysis", *The Milbank Memorial Fund Quarterly* 42, Nº 4, págs. 68-84, octubre de 1964; "The Population Projection as a Matrix Operator", *Demography* 1, Nº 1, págs. 57-73, 1964; "Estimating the Trayjectory of a Population", *Proceeding of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 4, págs. 81-113, 1966.

El capítulo 4, sección 4.4, págs. 94-96, contiene una técnica publicada por primera vez en "Criteria for Data Adjustment", Conferencia Mundial de las Naciones Unidas sobre Población, Belgrado, 1965, B.6/I/E/323 (con E. M. Murphy).

El capítulo 5 incluye algunos de los métodos de "The Intrinsic Rate or Natural Increase and the Dominant Root of the Projection Matrix", *Population Studies* 18, Nº 3, págs. 293-308, marzo de 1965.

Los capítulos 5 y 6 tienen partes comunes con "The Integral Equation of Population Analysis", *Review of the International Statistical Institute* 35, Nº 3, págs. 213-246, 1967.

El capítulo 7, sección 7.4, págs. 189-196, incluye material de "Changing Vital Rates and Age Distribution", *Population Studies* 22, Nº 1, julio de 1968; "On the Interpretation of Age Distributions", *Journal of the American Statistical Association* 62, págs. 862-874, septiembre de 1967 (con Dhruva Nagnur y Divakar Sharma).

Una versión preliminar del capítulo 8 apareció como "Reconciliation of Population Models: Matrix, Integral Equation, and Partial Fraction", *Journal of the Royal Statistical Society, Serie A (General)* 130, Parte 1, págs. 61-83, 1967.

El capítulo 10, secciones 10.1, 10.2 y 10.5 tienen partes comunes con "A Unified Approach to Interpolation and Graduation", *Demography* 3, Nº 2, págs. 528-536, 1966.

El capítulo 11 tiene partes en común con "Finite Aproximations in Demography", *Population Studies* 19, Nº 3, págs. 281-295, marzo de 1966.

Algunas partes del capítulo 12 se incluyeron en un artículo: "Volterra and Lotka up-dated: the Study of Multiple Populations", dado a conocer en reunión de la American Statistical Association de diciembre de 1967.

Una temprana y breve versión del capítulo 13 apareció como "On the Interaction of Populations", *Demography* 2, págs. 276-288, 1965.

El capítulo 14, sección 14.1, págs. 326-337, contiene material proveniente de "Matrix and Multiple Decrement in Population Analysis", *Biometrics* 23, N° 3, págs. 485-503, septiembre de 1967 (con E. M. Murphy); las págs. 338-340 fueron publicadas en "Matrix Models in Sociology" y otros, 1, N° 1, 3, 8-9, otoño de 1967.

Una temprana versión del capítulo 15 apareció como "Sampling Variance of Demographic Characteristics", *Human Biology* 38, N° 1, págs. 22-41, febrero de 1966.

El capítulo 18 fue publicado en parte en "Computerization of the Branching Process", *Behavioral Science* 12, págs. 329-336, 1967 (con Andrea Tyree).

Muchos de los cálculos de todos los capítulos aparecen en *World Population: An Analysis of Vital Data*, University of Chicago Press, 1968 (con Wilhelm Flieger).



I Parte

LA TABLA DE VIDA



## EL MODELO DE POBLACION ESTACIONARIA

## 1.1. UNA PRESENTACION DE LA TABLA DE VIDA

La tabla de vida es un esquema que permite expresar los hechos relativos a la mortalidad en términos probabilísticos. Es también un modelo poblacional, que cubre el caso más simple entre los que merecen discutirse: una cohorte o grupo de personas nacidas en el mismo momento, cerrado a la migración y seguido a través de las edades sucesivas hasta que mueren. Al igual que otros modelos satisfactorios, la tabla de vida ha dado su forma al mundo natural; somos incapaces de pensar en un movimiento de población y su mortalidad desde algún otro punto de vista. Su descripción incluye una parte considerable de la notación que usaremos en este libro.

## Tasas específicas por edades y probabilidades

Si durante un año ya transcurrido, en una *población cerrada* (aquella que no pierde ninguno de sus miembros por emigración ni recibe nuevos miembros por inmigración), había en promedio  $K$  miembros presentes o *expuestos*, y ocurrieron  $D$  defunciones, entonces, la proporción de defunciones es  $M = D/K$ . Para los Estados Unidos en 1964 la población residente a mitad de año fue oficialmente estimada en  $K = 191\,372\,000$  (*Statistical Abstract*, 1965,<sup>2</sup> pág. 5), y la cantidad de defunciones registradas fue  $D = 1\,798\,051$  (id., pág. 56). Por tanto

$$M = \frac{1,798,051}{191,372,000} = 0.00940 \quad \text{o} \quad 9.40 \text{ por mil.}$$

Esta es la *tasa bruta de mortalidad*, bruta debido a que combina la estructura de la mortalidad con la distribución por edades.

Los promedios estadísticos tienen más sentido cuando se refieren a grupos homogéneos. Un gran paso hacia la homogeneidad consiste en reducir el alcance de la relación de toda la población a un grupo de edad para un sexo dado. Supongamos que los hombres que tenían entre  $x$  y  $x + 1$  años de edad (o sea, el grupo que cumplió  $x$  años en su último aniversario) eran  $K_x$  a la mitad del año calendario y que las muertes entre ellos durante dicho año ascendieron a  $D_x$ ; entonces definimos la tasa específica de mortalidad para hombres de edad  $x$  como  $M_x = D_x/K_x$ . En los Estados Unidos se estimó que el 19 de julio de 1964 había 1 081 000 hombres con 32 años cumplidos en su último aniversario; en tanto

<sup>2</sup> U. S. Bureau of the Census, *Statistical Abstract of the United States*: 1965, 86ª Edición (Washington: Government Printing Office, 1965); en el libro lo mencionaremos como *Statistical Abstract*, con indicación del año.

que el número de hombres que murió a esta edad durante 1964 fue estimado en 2 317, dando una tasa de mortalidad por edad de

$$M_{32} = \frac{D_{32}}{K_{32}} = \frac{2317}{1,081,000} = 0.002143 \text{ o } 2.143 \text{ por mil habitantes.}$$

(Los datos del cuadro 1.3 están expresados en grupos quinquenales de edades, interpolados por años simples de edad mediante los multiplicadores de Greville, un procedimiento que discutiremos en la sección 10.4.)

La tabla de vida es un medio que permite presentar información sobre el volumen de población y muertes en algún período de tiempo pasado, edad por edad, de manera que se puedan obtener en forma conveniente las probabilidades futuras de mortalidad y supervivencia. El problema consiste en cómo ir desde  $M_x$ , las tasas específicas de mortalidad por edades observadas, hasta enunciados probabilísticos que consideren el futuro de los individuos. Estamos dispuestos a permitir, en forma provisional, la suposición de que la mortalidad futura será la misma que la mortalidad pasada. Cualquier grupo de personas que a mediados de año haya tenido un promedio de  $x + \frac{1}{2}$  años, deberá haber tenido una edad promedio de  $x$  años al comienzo del año. Si las muertes  $D_x$  se distribuyeran uniformemente a través del año de tiempo y edad, de modo que la mitad de ellas hubiera ocurrido en la primera mitad del año, entonces el número de personas al comienzo del año debe haber sido  $K_x + \frac{1}{2}D_x$ . Podemos ahora considerar el problema prospectivamente: entre un grupo que tiene inicialmente  $K_x + \frac{1}{2}D_x$  personas, por ejemplo al primero de enero,  $D_x$  mueren durante los siguientes doce meses. La probabilidad de que un individuo muera durante los doce meses siguientes a contar desde el primero de enero es por tanto

$$q_x = \frac{D_x}{K_x + \frac{1}{2}D_x} = \frac{M_x}{1 + \frac{1}{2}M_x},$$

habiéndose obtenido esta última expresión dividiendo, tanto el numerador como el denominador, por  $K_x$ . Para los hombres de los Estados Unidos que tenían 32 años en 1964, la probabilidad de morir durante los subsiguientes doce meses fue estimada en

$$q_{32} = \frac{2317}{1,081,000 + 1158} = 0.002141,$$

lo cual es levemente menor que  $M_{32}$ .

De las probabilidades de morir dentro de un año para cada edad,  $q_x$ , obtenemos los complementos,  $p_x = 1 - q_x$ , que son las probabilidades de vida a lo largo de cada año de edad. Estas  $p_x$  se pueden encadenar durante años sucesivos para determinar la probabilidad  ${}_n p_x$  de que un individuo de  $x$  años sobreviva durante los próximos  $n$  años,

$${}_n p_x = (p_x)(p_{x+1}) \cdots (p_{x+n-1}).$$

En particular, la probabilidad de sobrevivir por un año para un niño recién nacido es  $p_0$ , la probabilidad de sobrevivir los dos primeros años de vida para

un niño recién nacido es  $p_0p_1$ , de sobrevivir los primeros  $x$  años de vida es  ${}_x p_0 = p_0 p_1 \dots p_{x-1}$ .

Se acostumbra escribir el producto acumulativo de las probabilidades en la forma  $l_x = l_0 p_0 p_1 \dots p_{x-1}$ , donde  $l_0$ , llamada *raíz*, es una constante arbitraria, como por ejemplo 1 ó 100 000.

A este conjunto de  $l_x$  se le conoce como *la población estacionaria*, casi como si tuviera una existencia contemporánea real y se pudieran considerar  $(l_x + l_{x+1})/2$  personas de  $x$  años en su último aniversario. Las muertes entre  $x$  y  $x+1$  años son  $d_x = l_x - l_{x+1}$ ; entre  $x$  y  $x+n$ ,  ${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$ . En esta "población" así construida hay  $l_0$  muertes cada año. En vista de que el modelo estacionario se define como cerrado a la migración y puesto que hay tantos nacimientos como muertes, los nacimientos son también  $l_0$ .

La misma columna de las  $l_x$  se puede interpretar como sobrevivientes de un conjunto inicial de recién nacidos. Un grupo o cohorte de  $l_0$  niños recién nacidos, si está sujeto a la mortalidad de la población observada en las diversas edades, tendrá un número esperado de sobrevivientes a la edad 1 igual a  $l_0 p_0 = l_1$ ; a la edad 2 igual a  $l_0 p_0 p_1 = l_2$ , etc. A su debido tiempo, el último de la cohorte de  $l_0$  morirá, lo cual queda asegurado haciendo  $q_{\omega-1} = 1$ , o  $p_{\omega-1} = 0$ , siendo  $\omega$  alguna edad tal como 90 ó 100. Las observaciones sobre las cuales se basa comúnmente una tabla constituyen una sección transversal a través de todas las edades en un periodo de tiempo dado, por ejemplo el año calendario 1963, y la tabla de vida resultante trata entonces con trayectoria de cohortes sólo en un sentido metafórico. Tales cohortes se denominan cohortes *sintéticas*.

### Funciones continuas de la tabla de vida

Las funciones de variables continuas constituyen el medio principal para examinar más profundamente una serie de temas demográficos, como por ejemplo, la edad al morir. Siempre que queramos usar  $x$  como símbolo para una variable continua, lo indicaremos mediante la notación funcional  $l(x)$  en lugar de  $l_x$ . Definimos  $\mu(x)$ , llamada tasa instantánea de mortalidad, o *fuerza de la mortalidad*, como el valor límite de la tasa de mortalidad cuando el intervalo de edad se hace arbitrariamente pequeño. Puesto que en la tabla de mortalidad las muertes del intervalo de edad  $x$  a  $x + \Delta x$  son  $l(x) - l(x + \Delta x)$ , y la exposición es  $l(x) \Delta x$ , tenemos

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x + \Delta x)}{l(x) \Delta x} = -\frac{dl(x)}{l(x) dx} = -\frac{d \ln l(x)}{dx}, \quad (1.1.1)$$

donde  $\ln$  simboliza el logaritmo natural de la cantidad que lo sigue.

La tabla de vida puede ser construida conociendo  $\mu(x)$ , la fuerza de la mortalidad definida en (1.1.1). La ecuación diferencial  $\mu(x) dx = -d \ln l(x)$ , puede servir como definición de  $l(x)$ , ya que integrando da

$$l(x) = C \exp \left[ - \int_0^x \mu(t) dt \right]. \quad (1.1.2)$$

Haciendo  $x = 0$  se demuestra que la *raíz* (arbitraria) o valor inicial de la columna que da el número de sobrevivientes en la tabla de mortalidad, es  $C = l_0$ .

La probabilidad que tiene una persona de edad  $x$  de sobrevivir  $n$  años es  $l(x+n)/l(x)$ , la cual se puede obtener de (1.1.2) como sigue:

$$\frac{l(x+n)}{l(x)} = \exp \left[ - \int_x^{x+n} \mu(t) dt \right].$$

Cuando los  $l_0$  individuos son considerados como una cohorte sintética, ellos están sujetos a una disminución anual por muerte de acuerdo a la mortalidad observada en el año dado. El número de los que mueren entre  $x$  y  $x+dx$  años de edad es  $l(x)\mu(x) dx$  y esto, o su valor integrado a lo largo de un año,  $d_x = \int_0^1 l(x+t)\mu(x+t) dt$ , se conoce como *decremento*. Aunque este capítulo se refiere a una cohorte sujeta a una única causa de decremento, muerte, el concepto es aplicable también al ingreso en la fuerza de trabajo, nupcialidad, etc., y una variedad de tales decrementos se puede incorporar en una tabla (Jordan, 1952, págs. 251-269 y capítulo 14 de este libro).

Cuando pensamos en  $l(x)$  como una distribución por edades de los individuos vivos en un momento dado, el número de personas entre las edades  $x$  y  $x+dx$  en esta hipotética población estacionaria es  $l(x) dx$ , y entre  $x$  y  $x+n$  es

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t) dt.$$

Por otra parte, cuando la tabla de vida representa una cohorte, la integral  ${}_nL_x$  es el número de años-persona vividos por esa cohorte entre las edades  $x$  y  $x+n$ . El total de años-persona,  $T_x$ , en perspectiva para el grupo que habiendo alcanzado la edad  $x$  a partir de una raíz  $l_0$  se representa por  $l_x$ , será la misma integral hasta la edad máxima a la que alguien puede vivir, digamos  $\omega$ :

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l(x+t) dt.$$

Para cada uno de los  $l_x$  individuos la participación en este total será, en promedio

$$T_x/l_x = \dot{e}_x,$$

que se conoce como *esperanza de vida completa* a la edad  $x$ .

El lector puede querer deducir fórmulas para obtener las diversas columnas de la tabla de vida comenzando por cualquiera de las siguientes:  $l_x$ ,  ${}_nL_x$ ,  $T_x$ ,  $\dot{e}_x$ . Hay dos maneras posibles de efectuar la construcción, una en la versión continua, como teoría, la otra en la versión discreta para la computación.

Podemos mostrar que  $\dot{e}_x$ , tiempo de vida promedio para un individuo de  $x$  años, es también formalmente idéntica con la media o centroide usada en estadística y física:

$$\dot{e}_x = \frac{\int_0^{\omega-x} tl(x+t)\mu(x+t) dt}{\int_0^{\omega-x} l(x+t)\mu(x+t) dt}, \quad (1.1.3)$$

donde el numerador está diseñado para asignar a cada una de las  $l(x+t)\mu(x+t) dt$  personas que mueren a la edad  $x+t$  el número de años  $t$  que han vivido más allá de la edad  $x$ ; el cociente de las integrales en (1.1.3) es el promedio de  $t$ . Aplicando la definición de  $\mu(x+t)$  en (1.1.1), integrando por partes en el nu-

merador de (1.1.3) y usando el hecho de que todos mueren antes de cumplir  $\omega$  años, la razón (1.1.3) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \frac{-\int_{t=0}^{t=\omega-x} t dl(x+t)}{l_x} \\ &= \frac{-[tl(x+t)]_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} l(x+t) dt}{l_x} \\ &= \frac{T_x}{l_x}. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Esto prueba la equivalencia de las dos formas de  $\dot{e}_x$  dadas a la derecha de (1.1.3) y (1.1.4). El número total en la población estacionaria generado por  $l_0$  nacimientos por año es  $T_0 = \int_0^{\omega} l(t) dt$ , y su número anual de muertes es

$$l_0 = \int_0^{\omega} l(t)\mu(t) dt.$$

En consecuencia, su tasa de mortalidad es

$$l_0/T_0 = 1/\dot{e}_0.$$

### Comparación de la mortalidad mediante la tabla de vida y por tipificación

La esperanza  $\dot{e}_0$  se usa frecuentemente al comparar la mortalidad entre tiempos y lugares. Su valor para los Estados Unidos en 1964 fue 66,9 años para los hombres y 73,7 para las mujeres, lo que da una diferencia de 6,8 años a favor de estas últimas. En el trienio centrado en 1930, la esperanza de vida masculina fue de 57,3 años y la femenina 60,7, o sea una diferencia de 3,4 años. El aumento de la esperanza de vida ha sido de 2,8 años por década en promedio para los hombres y de 3,8 años por década para las mujeres. Las tablas más recientes muestran alguna atenuación: entre 1964 y 1965 para las mujeres el aumento fue de sólo 0,1 de año, y los hombres disminuyeron en 0,03. El examen de las tasas específicas por edades sugiere que el descenso de las muertes en edades bajo 70 años ha sido la causa principal de que la esperanza de vida aumentara en 3 ó 4 años por década. La probabilidad  ${}_5q_{25}$  para las mujeres americanas bajó desde 0,02142 en 1930 a 0,00439 en 1964, lo que significa una reducción del 80 por ciento. Por otra parte,  $\dot{e}_{70}$  para los hombres de los Estados Unidos fue de 9,2 en 1930 y de 10,5 en 1964, lo que da un aumento de un año y un tercio en un tercio de siglo. Como los fallecimientos en las edades jóvenes se aproximan a cero, una renovación de la tendencia creciente de  $\dot{e}_0$  requerirá avances médicos en un nuevo frente: las dolencias de la gente que tiene más de 70 años.

Una manera alternativa de comparar la mortalidad entre dos lugares, sexos o tiempos es la *tasa de mortalidad tipificada por el método directo* cuya forma continua es

$$(sd) = \frac{\int_0^{\omega} K'(x)M(x) dx}{\int_0^{\omega} K'(x) dx},$$

donde el conjunto de ponderadores  $K'(x)$  es la distribución por edades de la población típica, y las  $M(x)$  son las tasas de mortalidad por edades de la pobla-

**CUADRO 1.1**  
**TASA BRUTA DE MORTALIDAD EN LA POBLACION OBSERVADA,**  
**EN LA TABLA DE VIDA Y TIPIFICADA, POR MIL HABITANTES-HOMBRES\***

PAISES	Tasa bruta de mortalidad observada	Tasa bruta de mortalidad en la tabla de vida	Tasa bruta de mortalidad tipificada por el método indirecto		
			Inglaterra y Gales 1960-1962	Estados Unidos 1959-1961	México 1959-1961
CANADA 1940-42	10.64	16.06	14.43	12.48	9.76
1964	8.88	14.57	10.95	9.70	7.32
1965	8.87	14.54	10.99	9.74	7.40
INGLATERRA Y GALES 1960-62	12.46	14.68	12.46	11.07	9.53
1963	12.81	14.73	12.90	11.45	9.79
FRANCIA 1851	22.37	26.09	33.47	28.38	21.58
1959-63	11.91	14.82	12.34	11.02	9.30
MEXICO 1959-61	11.97	17.97	25.49	21.08	11.97
SUECIA 1783-87	28.57	29.78	50.12	41.40	27.49
1958-62	10.36	13.98	9.45	8.54	7.67
ESTADOS UNIDOS 1919-21	12.91	18.35	22.60	18.82	13.08
1939-41	11.87	16.36	16.23	13.96	11.15
1959-61	10.85	14.96	12.22	10.85	8.52
1963	11.08	14.99	12.47	11.10	8.80
1964	10.83	14.95	12.16	10.84	8.63
1965	10.88	14.95	12.22	10.91	8.74

\* Los datos sobre población y defunciones por edades provienen de *Demographic Yearbook* Wilhelm Flieger; las tablas de mortalidad fueron programadas por Wilhelm Flieger y William (Naciones Unidas), 1948-1966, y fuentes oficiales nacionales. La tipificación la programó Cummings, usando el método de la sección 1.2.



ción dada. La tasa de mortalidad tipificada por el método indirecto se puede definir como

$$(\text{isd}) = \left( \frac{\int_0^{\omega} K(x)M(x) dx}{\int_0^{\omega} K(x)M'(x) dx} \right) d'$$

donde el primero nuevamente distingue la población tipificada y  $d'$  es la tasa bruta de mortalidad de la población tipificada. El lector puede mostrar (sd) y (isd) en la forma discreta. Puede entonces demostrar que si se reemplazan las tasas de mortalidad por precios, y los números de la población por cantidades compradas, (sd)/ $d'$  es un índice agregativo de precios de base ponderada, y (isd)/ $d'$  es el correspondiente índice nominal (Duncan, Cuzzort y Duncan, 1961, pág. 177; Kitagawa, 1964).

El cuadro 1.1 muestra las tasas tipificadas por el método indirecto, para una serie de poblaciones masculinas, con base en tres poblaciones tipo, junto con las tasas brutas de mortalidad y las de las tablas de vida. Se invita al lector para que compare los resultados y haga comentarios acerca del efecto de ponderar mediante la distribución por edades estacionaria implícita en la tabla de vida, la que: 1) es diferente de la que prevalece en una población que crece rápidamente, y 2) en cualquier caso difiere de las poblaciones que están siendo comparadas. ¿Cuáles de las cinco columnas mostradas indica mejor el progreso en la mortalidad de los Estados Unidos? ¿En la mortalidad de Suecia? ¿Qué resulta de una comparación entre los Estados Unidos con Inglaterra y Gales en 1963? En una comparación estrecha muestre la ventaja de conocer a un mismo tiempo las tasas tipificadas por el método directo e indirecto. ¿Qué población tipo será mejor para comparar la mortalidad masculina con la femenina en un lugar y tiempo dados?

### El diagrama de Lexis

La tabla de vida, o más estrictamente, su columna de personas sobrevivientes, ha sido interpretada como:

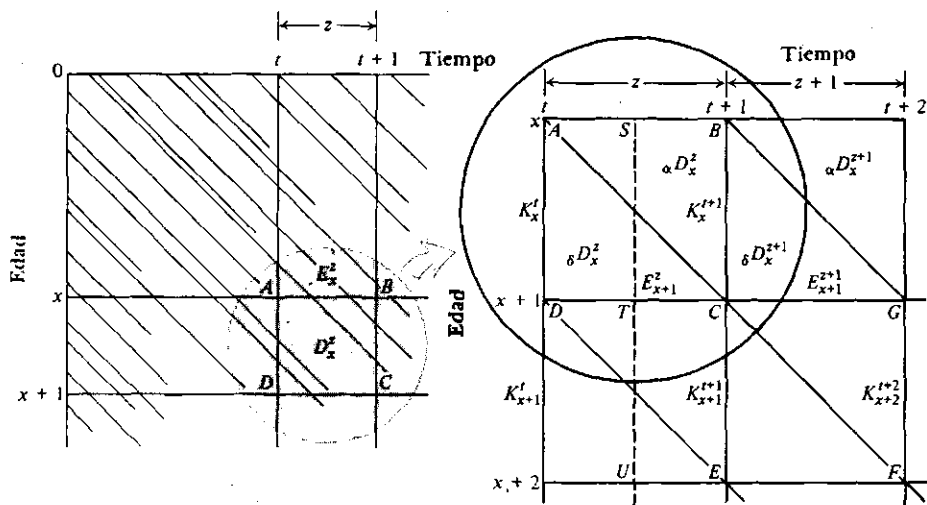
- un conjunto de probabilidades,  $l_{x+n}/l_x$ , de que un individuo de edad  $x$  sobreviva hasta  $x+n$ ;
- los sobrevivientes  $l_x$  de una cohorte de  $l_0$  niños nacidos al mismo tiempo y que pasan juntos por la vida;
- una población, estacionaria tanto en números totales como en distribución por edades, que incluye en cualquier momento  ${}_n l_x = \int_0^n l(x+t) dt$  personas entre las edades exactas  $x$  y  $x+n$ .

Una ayuda para la aplicación de estas interpretaciones, como también para el cálculo de la tabla de vida misma, se da mediante la presentación conocida como diagrama de Lexis (Lexis, 1875, pág. 302). El tiempo se representa en el eje horizontal, y las edades en el vertical. Cada elemento de la población se representa por una recta de  $45^\circ$  respecto a cada eje, comenzando en  $x=0$  y al momento del nacimiento en  $t$ , y terminando en un punto que corresponde a edad y momento en que murió. Cuando las líneas corresponden a una población, la densidad de sus puntos de partida a lo largo del eje  $t$  es proporcional a la frecuencia de los nacimientos en el tiempo. (Gráfico 1.1.)

Las estadísticas vitales proveen el número de fallecimientos,  $D_x^z$ , ocurridos en el año calendario  $z$  a personas que tenían  $x$  años de edad en su último aniversario. Estas muertes suceden en el cuadrado  $ABCD$ , y en forma estricta las relacionaremos al número de años-persona de exposición al riesgo en el mismo cuadrado —el número de personas dentro del alcance de nuestro sistema de registro durante el año calendario  $z$ —, donde cada una se cuenta como expuesta desde que cumplió su  $x$ ésimo aniversario hasta cuando pasó el  $(x + 1)$ ésimo, o cualquier parte de ese intervalo que estaba dentro del año. En la práctica, fuera de las compañías de seguros, no se guardan registros que permitan estadísticas de exposición en este sentido preciso; de allí que se usen distintas aproximaciones.

Tales aproximaciones se basan en un censo del número de personas, por ejemplo  $K_x^t$  que tenían edad  $x$  en el momento  $t$ , al comienzo del año calendario  $z$ , o  $K_x^{t+1}$  en el momento  $t + \frac{1}{2}$ , la mitad del año.  $K_x^t$  es el número de líneas de vida que cruzan  $AD$ ,  $K_x^{t+1}$  es el número de las que cruzan  $ST$ . Los censos que se tomen en otras fechas se pueden ajustar a éstos sin que se incurra en una pérdida de precisión apreciable.

GRAFICO 1.1  
DIAGRAMA DE LEXIS QUE MUESTRA LAS LINEAS DE VIDA EN EL PLANO EDAD-TIEMPO



Otro grupo que aparece en el diagrama es el número  $E_{x+1}^z$  de los individuos cuyas líneas de vida cruzan  $DC$ , esto es, aquellos que alcanzan su  $(x + 1)$ ésimo aniversario durante el año  $z$ .

En la literatura actuarial se discuten tres maneras de proceder para la obtención de las probabilidades de muerte en base a las observaciones (Wolfenden, 1954, págs. 100, 101). La primera consiste en tomar las muertes en el triángulo  $ABC$  más las del triángulo  $BCG$  y relacionar éstas a las líneas que atraviesan  $AB$ ; el cociente entre las muertes en el paralelogramo  $ABGC$  y las líneas que cruzan  $AB$  es igual a  $q_x$ , si la población está cerrada a la migración:

$$q_x = \frac{{}_aD_x^z + {}_dD_x^{z+1}}{E_x^z},$$

donde  ${}_aD_x^z$  es la parte de  $D_x^z$  en el triángulo superior  $ABC$ , y  ${}_dD_x^{z+1}$  es la parte de  $D_x^{z+1}$  en el triángulo inferior  $BCG$ . Aunque la fórmula es exacta para la edad  $x$  en el último aniversario, mezcla dos años calendario.

El segundo procedimiento se refiere a las muertes de un año calendario particular, pero mezcla muertes de dos años de edad. Es

$$q_x = 1 - \frac{K_{x+1}^{t+1}}{K_x^t} = \frac{{}_dD_x^z + {}_aD_{x+1}^z}{K_x^t},$$

siendo  $1 - q_x$  los sobrevivientes que cruzan  $CE$ , dividido por los que han cruzado  $AD$ .

La tercera proporción cae dentro del cuadrado  $ABCD$  y utiliza las muertes, claramente definidas según tiempo y edad, del año calendario  $z$  y edad  $x$  en el último aniversario. Esta consiste de dos triángulos: el superior  $ABC$  que contiene las  ${}_aD_x^z$  muertes de individuos que cumplieron su  $x$ ésimo aniversario en el año calendario dado, y  $ACD$ , que contiene las  ${}_dD_x^z$  muertes de los que pasaron su  $x$ ésimo aniversario en el calendario precedente. De estos,  $q_x$  se estima por

$$q_x = 1 - \left[ \frac{E_{z+1}^z}{K_x^t} \right] \left[ \frac{K_{z+1}^{t+1}}{E_x^z} \right] = 1 - \left[ 1 - \frac{{}_dD_x^z}{K_x^t} \right] \left[ 1 - \frac{{}_aD_x^z}{E_x^z} \right] \doteq \frac{{}_dD_x^z}{K_x^t} + \frac{{}_aD_x^z}{E_x^z},$$

donde  $\doteq$  significa aproximadamente igual. Este método preferido determina la probabilidad de que los individuos que entran en  $ABCD$  cruzando por  $AB$  o  $AD$  mueran dentro del cuadrado.

A lo largo de la mayor parte de la escala etaria, las muertes para una población grande están suficientemente dispersas a través del año de edad, de modo que basta considerar que la mitad de las de  $ABCD$  están en  $ACD$  y la otra mitad en  $ABC$ . Pero esto no es cierto para el comienzo de la tabla de vida, y las consideraciones diagramáticas anteriores son útiles para determinar cómo obtener las probabilidades de la tabla de vida a partir de las observaciones.

Cuando conocemos para cada mes el correspondiente mes de nacimiento de los que mueren con menos de un año de edad, entonces los triángulos  ${}_aD_x^z$  y  ${}_dD_x^z$  se pueden aproximar y es posible establecer el *factor de separación*

$$f_z^z = \frac{{}_dD_x^z}{{}_aD_x^z + {}_dD_x^z}, \quad (1.1.5)$$

(Wolfenden, 1954, pág. 97). El factor  $f_z^z$  es aquella proporción de las muertes de menores de un año de edad observadas en el año  $z$ , provenientes de nacimientos ocurridos el año precedente  $z-1$ . Cuando se carece de información sobre este punto, se puede adoptar el factor de separación de algún otro tiempo o lugar, aunque en la práctica dichos factores varían entre 0,15 y 0,30. El punto es de importancia en el grado en que ocurra un cambio pronunciado en el número de nacimientos de un año al siguiente. (Al final de la sección 1.2 aparece una aplicación.)

### Período y generación

Hasta aquí hemos pensado en los datos de mortalidad referentes a un período, típicamente de un año particular; nuestras cohortes han sido hipotéticas o *sintéticas*. La columna  $l(x)$  de la tabla de mortalidad para una *cohorte real* dada, es una distribución de densidad decreciente a lo largo de una recta de  $45^\circ$ , en el gráfico 1.1, desde la parte superior izquierda a la inferior derecha del sistema de coordenadas. Lo que se conoce como tabla de vida de una *generación* o de una cohorte, muestra la mortalidad a que está sucesivamente expuesto un individuo dado. Esto está en contraste directo con las tablas de vida *por períodos*, basadas en datos referentes a un año u otro intervalo calendario dado, las que nos han interesado hasta aquí.

La diferencia entre los resultados correspondientes a períodos y aquellos para generaciones queda ilustrada en el cuadro 1.2, el que contiene datos del siglo XIX para Suecia. Las medidas presentadas,  $e_0$  y  $l_{50}/l_0$ , son en total más favorables para la cohorte real nacida en un intervalo dado que para una sección transversal de la mortalidad en ese intervalo, como es de esperar cuando la mortalidad está sujeta a una tendencia secular de mejoramiento; el resultado de la cohorte se refiere a una etapa considerablemente más reciente.

Un poco más sorprendente es la relativa suavidad de las cohortes. Evidentemente, algunas de las causas de mortalidad —enfermedad, hambre, y guerra— afectan a todas las edades, o al menos a un amplio recorrido de edades, en cierto momento del tiempo; los resultados relativos a la cohorte promedian un número de períodos de tiempo, como ocurre con la experiencia del individuo.

**CUADRO 1.2**  
EXTRACTO DE LAS TABLAS DE VIDA PARA LAS MUJERES SUECAS.  
MOSTRANDO  $e_0$  y  $l_{50}/l_0$ , 1805-1840\*

Punto medio del período quinquenal y fecha en que la cohorte tenía de 0—4 años de edad	Esperanza de vida a la edad 0 = $e_0$		Probabilidad de alcanzar la edad 50 = $l_{50}/l_0$	
	Período	Cohorte real o generación	Período	Cohorte real o generación
1805	37.81	36.84	0.4384	0.4062
1810	28.99	34.78	0.2926	0.3852
1815	37.33	39.08	0.4279	0.4417
1820	37.42	40.76	0.4252	0.4674
1825	41.96	44.24	0.4832	0.5075
1830	36.77	42.11	0.4034	0.4830
1835	40.25	44.43	0.4531	0.5150
1840	39.97	44.20	0.4516	0.5133

\* Los datos sobre las poblaciones y muertes por edades han sido proporcionados por Erland von Hofsten; los datos de las cohortes fueron derivados de información referida a períodos según intervalos quinquenales de edad y tiempo. Programado por Wilhelm Flieger.

**Procedimientos de cálculo**

El total años-persona  ${}_nL_x$  vividos por la población estacionaria en el intervalo que va de la edad  $x$  a la edad  $x + n$ , se puede descomponer en los años vividos por los  $l_{x+n}$  que sobreviven ( $n$  años cada uno), y los años vividos por los  ${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$  que mueren en el intervalo. Supongamos que el número promedio de años vividos en el intervalo por aquellos que mueren en él es  ${}_n a_x$ . Entonces la descomposición de  ${}_n L_x$  es la identidad

$${}_n L_x = n l_{x+n} + {}_n d_x a_x,$$

de donde resulta

$${}_n a_x = \frac{{}_n L_x - n l_{x+n}}{{}_n d_x} \tag{1.1.6}$$

(La distribución uniforme de las muertes que hemos supuesto antes conduce a  ${}_n a_x = n/2$ , pero esto no es aceptable para un trabajo cuidadoso cuando el intervalo de edad  $n$  tiene una amplitud de cinco años.)

El resultado (1.1.6) se puede aplicar incidentalmente para comparar los aumentos en longevidad atribuibles a diferentes tramos de la escala de edades. La  $\dot{e}_1$  para los hombres de los Estados Unidos subió desde 60,7 años en los tres años alrededor de 1930 a 67,8 en 1964, lo que significa un aumento de 7,1 años. Esta ganancia consta de tres elementos:

- 1) El promedio de años vividos por los miembros de la cohorte sintética que mueren entre 1 y 70 años de edad en 1964 fue, como se deduce de (1.1.6),

$${}_{69} a_1 = \frac{{}_{69} L_1 - 69 l_{70}}{l_1 - l_{70}} = 54.4 \text{ años,}$$

lo que comparado con los 48,0 años en 1930, revela un mejoramiento de 6,4 años.

- 2) El progreso en  $\dot{e}_{70}$  (el número de años vividos por los hombres que mueren después de 70 años) fue de 1,3 años, ya que de 9,2 llegó a 10,5.
- 3) Finalmente, una mayor cantidad de hombres sobrevivieron hasta los 70 años;  $l_{70}/l_1$  fue 0,532 en 1964 y 0,421 en 1930.

El lector puede examinar en qué medida estos tres elementos explican la ganancia de 7,1 años en  $\dot{e}_1$ , usando la identidad

$$l_1 \dot{e}_1 = (l_1 - l_{70}) {}_{69} a_1 + l_{70} \dot{e}_{70} + 69 l_{70},$$

junto con el cuadro 1.3 y los siguientes valores de la tabla de vida de 1929-1931:

$$l_1 = 92,775; \quad l_{70} = 39,102; \quad T_1 = 5,632,457; \quad T_{70} = 359,405.$$

Alternativamente, podemos introducir  ${}_n a_x$  en términos del modelo continuo. El número de individuos en la población estacionaria que mueren entre las eda-

des  $x + t$  y  $x + t + dt$  ( $t \leq n$ ) es  $l(x + t)\mu(x + t) dt$ . Cada uno de ellos ha vivido  $t$  años en el intervalo  $x$  a  $x + n$ ; de allí que el número promedio de años vividos en el intervalo por los que mueren en él, es el cociente

$${}^n a_x = \frac{\int_0^n t l(x + t) \mu(x + t) dt}{\int_0^n l(x + t) \mu(x + t) dt}, \quad n > 0, \quad (1.1.7)$$

o sea, un valor medio, que es el mismo que la expresión para  $\bar{e}_x$  en (1.1.3), excepto que el límite superior de las integrales es ahora más general. El denominador de (1.1.7) es  ${}^n d_x$ . El numerador se puede integrar por partes como en (1.1.4) y se obtiene

$$\begin{aligned} - \int_{t=0}^{t=n} t dl(x + t) &= - [t l(x + t)]_{t=0}^n + \int_0^n l(x + t) dt \\ &= -n l_{x+n} + {}^n L_x. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Colocando la expresión del segundo miembro de (1.1.8) en lugar del numerador de (1.1.7) y  ${}^n d_x$  en lugar de su denominador, da (1.1.6) de nuevo.

El cociente de la tabla de vida correspondiente al  ${}^n M_x$  observado es  ${}^n d_x / {}^n L_x$ . Reconociendo el hecho de que la distribución dentro del grupo de edad no es la misma para la tabla de vida que para la población observada (especialmente en los casos en que la mortalidad está cambiando rápidamente de edad a edad y la población observada dista bastante de ser estacionaria), se hace una distinción notacional: se pone  ${}^n m_x$  para  ${}^n d_x / {}^n L_x$ , la tasa por edades en la tabla de vida, en tanto que usamos  ${}^n M_x$  para  ${}^n D_x / {}^n K_x$ , el correspondiente cociente obtenido de las observaciones. Una aproximación que se usa comúnmente, en especial cuando el intervalo de edad  $n$  es de 1 año o menos, consiste en suponer que  ${}^n m_x$  y  ${}^n M_x$  son iguales. En la sección 1.2 obtendremos un proceso iterativo para construir una tabla de vida que evite esta suposición. En la sección 10.4 la interpolación para intervalos de 0,2 de año hace que esta suposición sea inocua.

El promedio  ${}^n a_x$  sirve como un medio para ir de la tasa de mortalidad por edades de la tabla de vida  ${}^n m_x = {}^n d_x / {}^n L_x$ , o sea, el número de muertes dividido por el número de personas, a la probabilidad de morir durante los  $n$  años subsiguientes para una persona de edad  $x$ . Escribiendo  $l_{x+n} = l_x - {}^n d_x$  en (1.1.6), el lector puede establecer eso directamente como consecuencia de las definiciones (Chiang, 1960),

$${}^n q_x = \frac{n {}^n m_x}{1 + (n - {}^n a_x) {}^n m_x}. \quad (1.1.9)$$

Puesto que el valor de  ${}^n q_x$  no es muy sensible respecto de  ${}^n a_x$ , es posible tomar valores supuestos de los  $a$  (por ejemplo, haciendo  ${}^n a_x = n/2$ ) para hacer un primer bosquejo de la tabla de vida. Se puede obtener una mejor aproximación de  ${}^n a_x$  en base al bosquejo de  ${}^n d_x$ , utilizando una fórmula deducida de (1.1.7), pudiendo introducirse estos  $n$  en (1.1.9) para la obtención de un conjunto mejorado de  ${}^n q_x$ . Monroe Sirken (1964) ha sugerido que los  $a$  se pueden determinar de una tabla de vida de referencia, construida por años simples de edad.

A partir de los  ${}^n q_x$  calculados según (1.1.9) con los  ${}^n M_x$  observados en lugar de  ${}^n m_x$ , u otros medios, y un  $l_0$  arbitrario, generalmente 100 000, se construye

CUADRO 1.3

TABLA DE VIDA OBTENIDA POR UN METODO ITERATIVO, MEDIANTE AJUSTES SUCESIVOS DE  $nq_x$ , PARA LOS HOMBRES DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1964\*

Edad x	$nK_x$ 000's	$nD_x$	$nq_x$	$l_x$	$nd_x$	$L_x$ $n_x$
0	2,069	57,368	0.027146	100,000	2,715	97,902
1	8,486	8,881	0.004173	97,285	406	387,958
5	10,341	5,314	0.002561	96,879	248	483,777
10	9,371	4,926	0.002644	96,631	256	482,599
15	8,188	10,792	0.006623	96,376	638	480,414
20	6,279	11,614	0.009226	95,737	883	476,523
25	5,432	9,799	0.008984	94,854	852	472,167
30	5,434	11,754	0.010760	94,002	1,011	467,593
35	5,916	17,804	0.014942	92,991	1,389	461,709
40	6,007	28,027	0.023089	91,601	2,115	453,112
45	5,517	41,098	0.036681	89,486	3,282	439,839
50	5,084	61,328	0.058784	86,204	5,067	419,189
55	4,358	81,835	0.090098	81,136	7,310	388,369
60	3,653	102,084	0.131311	73,826	9,694	345,946
65	2,857	121,225	0.192694	64,132	12,358	290,536
70	2,289	135,642	0.258748	51,774	13,396	225,565
75	1,520	126,801	0.345253	38,378	13,250	158,449
80	791	97,707	0.473113	25,128	11,888	95,915
85	398	83,779	1.000000	13,239	13,239	62,468
TOT.	93,990	1,017,778				

Edad x	$n^m_x$	$n^a_x$	$T_x$	$n^r_x$	$e_x$	$\frac{M'_x = M_x}{n^D_x / n^K_x}$
0	0.027727	0.227	6,690,031	0.000	66.900	0.027727
1	0.001047	1.086	6,592,130	0.000	67.761	0.001047
5	0.000513	2.500	6,204,171	0.011	64.040	0.000514
10	0.000529	2.818	5,720,394	0.023	59.198	0.000526
15	0.001329	2.705	5,237,796	0.039	54.348	0.001318
20	0.001854	2.550	4,757,382	0.039	49.692	0.001850
25	0.001805	2.531	4,280,859	0.013	45.131	0.001804
30	0.002163	2.611	3,808,692	0.000	40.517	0.002163
35	0.003009	2.666	3,341,098	0.000	35.929	0.003009
40	0.004668	2.686	2,879,389	0.002	31.434	0.004666
45	0.007463	2.687	2,426,277	0.009	27.113	0.007449
50	0.012089	2.666	1,986,438	0.011	23.044	0.012063
55	0.018823	2.632	1,567,249	0.014	19.316	0.018778
60	0.028022	2.608	1,178,880	0.016	15.968	0.027945
65	0.042535	2.562	832,933	0.016	12.988	0.042431
70	0.059391	2.514	542,397	0.016	10.476	0.059258
75	0.083623	2.476	316,833	0.016	8.256	0.083422
80	0.123945	2.500	158,384	0.016	6.303	0.123523
85	0.211938	4.718	62,468	0.016	4.718	0.210500

\* Programado por Wilhelm Flieger basado en datos del National Center of Health Statistics.

la tabla de vida calculando la columna de las  $l$  y de las  $d$ , aplicando las ecuaciones de recurrencia

$${}_x d_x = l_x \cdot q_x, \quad l_{x+n} = l_x - {}_x d_x. \quad (1.1.10)$$

El procedimiento para ir desde las tasas específicas de mortalidad por edades observadas  ${}_x M_x$  a las  ${}_x m_x$  y  ${}_x q_x$  es la primera de dos partes en la construcción de una tabla de vida, en la que se debe hacer una elección entre un número de opciones. El segundo punto de elección está en la integración  $l(x)$  sobre el intervalo que va de  $x$  a  $x+n$  para determinar  ${}_x L_x$ :

$$\int_0^n l(x+t) dt = {}_x L_x.$$

Se dispone de una variedad de fórmulas, de las cuales la más popular se obtiene por integración de  $x$  a  $x+n$ , de una curva de tercer grado a través de cuatro valores,  $l_{x-n}$ ,  $l_x$ ,  $l_{x+n}$ ,  $l_{x+2n}$ :

$$\begin{aligned} {}_x L_x &= n/2 \cdot (l_x + l_{x+n}) + n/24 \cdot ({}_x d_{x+n} - {}_x d_{x-n}), \\ &= 13n/24 \cdot (l_x + l_{x+n}) - n/24 \cdot (l_{x-n} + l_{x+2n}), \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

lo cual es deducible por el método del capítulo 10, siendo (10.2.14) un caso especial.

El resto de la tabla de vida surge de las definiciones:

$$T_x = {}_x L_x + {}_x L_{x+n} + \dots; \quad \dot{e}_x = T_x/l_x; \quad {}_x p_x = 1 - {}_x q_x.$$

El cuadro 1.3 constituye una ilustración que muestra todas las columnas mencionadas, excepto  ${}_x p_x$ ; en la sección 1.2 se da una exposición más detallada del método de cálculo. A esta altura el lector puede tener deseos de verificar con una calculadora de escritorio que las relaciones (1.1.4), (1.1.6), (1.1.9), (1.1.10) y (1.1.11) rigen desde los 15 años de edad en adelante en el cuadro 1.3, y que  ${}_x d_x = l_x \cdot q_x$  y  ${}_x m_x = {}_x d_x / {}_x L_x$ . (La verificación está limitada por el redondeo, especialmente para  ${}_x d_x$  en las edades en que  ${}_x d_x$  es pequeño.)

### Aplicaciones

Si bien la tabla de vida no es la mejor manera de comparar la mortalidad de las poblaciones, ella sirve para calcular una variedad de probabilidades y esperanzas de vida individuales y de grupos. Para determinar, sobre la base de la mortalidad dada, la probabilidad de  $X$ , que tiene  $x$  años de edad, de estar aún vivo al cabo de  $m$  años, y de  $Y$ , que tiene  $y$  años de edad, de estar vivo al cabo de  $n$  años, sólo es necesario multiplicar  $l_{x+m}/l_x$  por  $l_{y+n}/l_y$ , siempre que las probabilidades para los dos individuos sean independientes, lo que no sería cierto si  $X$  e  $Y$  hacen un viaje en submarino juntos. No aparecen dificultades adicionales si  $X$  e  $Y$  pertenecen a grupos de mortalidad reconocidamente diferente, por ejemplo masculino y femenino, y  $l_{x+m}^*/l_x^*$  se toma de una tabla de mortalidad y  $l_{y+n}/l_y$  de otra. Un asterisco en la parte superior derecha distinguirá la supervivencia masculina. Entonces, para determinar la vida matrimonial conjunta esperada de una pareja en la cual el hombre tiene ahora  $x$  años de edad y ella



y años,  $x \geq y$ , observamos que la probabilidad de que la pareja siga viviendo entre  $t$  y  $t + dt$  años desde ahora es

$$\left[ \frac{l^*(x+t)}{l^*(x)} \right] \left[ \frac{l(y+t)}{l(y)} \right],$$

y en este tiempo ellos vivirán  $dt$  años juntos; el valor esperado de sus años juntos es, por lo tanto,

$$\int_0^{\omega-x} \frac{l^*(x+t)l(y+t)}{l^*(x)l(y)} dt,$$

despreciando la posibilidad de separación o divorcio.

Las probabilidades conjuntas pueden explicar un fenómeno demográfico tal como el gran exceso de viudas sobre viudos que se da en las poblaciones viejas. Supongamos que en el momento en que se estaban casando las personas que ahora tienen 65 años, el novio tenía 5 años más que su novia. La probabilidad de que una novia de 20 y un novio de 25 sobrevivan 40 años más tarde es

$$\left[ \frac{l_{60}}{l_{20}} \right] \left[ \frac{l_{65}^*}{l_{25}^*} \right],$$

donde el primer factor se ha tomado de una tabla para mujeres y el segundo de una tabla para hombres. Para los Estados Unidos, 1964, esto daba

$$\left[ \frac{84,572}{96,955} \right] \left[ \frac{64,132}{94,854} \right] = 0.5898.$$

La probabilidad de que la esposa sobreviva y el marido haya muerto es

$$\left[ \frac{l_{60}}{l_{20}} \right] \left[ 1 - \frac{l_{65}^*}{l_{25}^*} \right] = 0.2825,$$

y que el marido sobreviva y la esposa haya muerto,

$$\left[ 1 - \frac{l_{60}}{l_{20}} \right] \left[ \frac{l_{65}^*}{l_{25}^*} \right] = 0.0864.$$

Con estas suposiciones los porcentajes de parejas casadas, viudas y viudos serían de 62, 29 y 9 por ciento, respectivamente. En realidad, los números de las tres categorías en la población fueron, para marzo de 1964: 75, 21 y 4 por ciento (estimados aproximadamente para las edades 55-64 años, de los datos que aparecieron en *Statistical Abstract*, 1965, pág. 31). Parte de la diferencia se debe a que hemos tomado edades típicas en lugar de una distribución por edades, parte se debe al uso de la mortalidad del período 1964 en lugar de aquella de las cohortes pertinentes, otra parte se debe a la migración, pero probablemente el que muchos se casan más de una vez es lo que más cuenta. El lector puede examinar la relación de la orfandad con los factores demográficos y en particular con la tabla de vida por cohorte (Lotka, 1931c).

La tabla de vida constituye la base de la ciencia actuarial. Los actuarios deben incluir un factor  $v = 1/(1+i)$ , siendo  $i$  la tasa anual de interés y  $v$  el valor actual del pago de una unidad al cabo de un año a contar desde ahora, a una tasa de interés  $i$ . El valor actual de un dólar pagadero en  $t$  años es de  $v^t$  dólares. Si el valor de un dólar al cabo de un año es ahora de  $v$  dólares, entonces un dólar dentro de un año, referido a una persona que actualmente tiene la edad  $x$ , si aún continúa viva, tiene un valor esperado de  $v(l_{x+1}/l_x)$  dólares. El pago de un dólar, si fallece entre  $x+t$  y  $x+t+dt$  vale actualmente (Jordan, 1952, pág. 67).

$$\frac{1}{l_x} v^t l(x+t) \mu(x+t) dt \quad \text{dólares}$$

De allí que un seguro de vida simple para una persona de edad  $x$  vale

$$\bar{A}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega-x} v^t l(x+t) \mu(x+t) dt$$

dólares por cada dólar del seguro; una anualidad continua a la tasa de un dólar por año vale

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega-x} v^t l(x+t) dt \quad \text{dólares}$$

la prima actual para un seguro de  $K$  dólares cancelables a la muerte del asegurado debe ser  $K$  veces el primero de éstos dividido por el segundo, o sea

$$P_x = \frac{K \bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{K \int_0^{\omega-x} v^t l(x+t) \mu(x+t) dt}{\int_0^{\omega-x} v^t l(x+t) dt} \quad \text{dólares}$$

Se pueden responder preguntas bastante más complicadas con base en la tabla de vida. Una anualidad de  $K$  dólares por año cancelable a una pareja que tiene  $x$  e  $y$  años respectivamente, mientras ambos están vivos está avaluada en

$$\bar{a}_{xy} = \frac{K \int_0^{\omega-x} v^t l^*(x+t) l(y+t) dt}{l^*(x) l(y)}, \quad x \geq y.$$

Un seguro de vida de  $K$  dólares cancelable a una esposa que ahora tiene edad  $y$ , al morir su marido que ahora tiene edad  $x$ , tiene un valor actual

$$\frac{K \int_0^{\omega-x} v^t l^*(x+t) \mu^*(x+t) l(y+t) dt}{l^*(x) l(y)}, \quad x \geq y.$$

Si se fuera a cancelar sólo mientras su hijo, que ahora tiene edad  $z$ , sea menor de edad, el integrando tendría un factor adicional:  $l^*(z+t)/l^*(z)$ , y el límite superior de la integral no sería  $\omega-x$  sino  $21-z$ . Los textos sobre técnicas actuariales contienen muchos otros ejemplos (Spurgeon, 1932).

La aplicación demográfica más común de la tabla de vida es la *proyección de población*, que consiste en el cálculo del valor esperado del número de personas vivas en fechas futuras, dado el número de los que ahora están vivos y las tasas específicas de mortalidad por edades. El valor esperado del número de sobrevivientes al cabo de  $t$  años entre  $h(x) dx$  personas que están ahora vivas y que tienen edades entre  $x$  y  $x+dx$  es

$$k(x) \frac{l(x+t)}{l(x)} dx.$$

En la práctica nosotros no observamos  $k(x) dx$ , el número de personas que tienen edades entre  $x$  y  $x + dx$ , sino la cantidad finita

$${}_nK_x^{(0)} = \int_0^n k(x+v) dv,$$

que es el número de los que tienen edades entre  $x$  y  $x + n$ , y entre éstos,

$${}_nK_{x+t}^{(t)} = \int_0^n k(x+v) \frac{l(x+t+v)}{l(x+v)} dv \quad (1.1.12)$$

estarán vivos al cabo de  $t$  años. Una aproximación a (1.1.12) usada comúnmente es

$${}_nK_{x+t}^{(t)} = {}_nK_x^{(0)} \frac{{}_nL_{x+t}}{{}_nL_x}. \quad (1.1.13)$$

Una mejor aproximación al factor de supervivencias está dado por (1.1.15) a (1.1.18).

Para atender al hecho de que tales proyecciones se hacen comúnmente en intervalos de tiempo que son del mismo largo que los de edad, el valor proyectado, estimado o esperado de la población que tiene inicialmente de  $x$  a  $x + n$  años de edad al cabo de  $n$  años, es (1.1.13) con  $t$  reemplazado por  $n$ . La ecuación (1.1.13) volverá a aparecer con frecuencia desde el capítulo 2 en adelante. Para ponerlo de acuerdo al contexto en que se aplica,  $n$  se puede particularizar en el valor 5 y omitirse. La unidad de edad continuará siendo un año, pero la unidad de tiempo será 5 años, de modo que (1.1.13) será

$$K_{x+5}^{(1)} = K_x^{(0)} \cdot (L_{x+5}/L_x). \quad (1.1.14)$$

A pesar de que el lenguaje de este capítulo ha sido el de poblaciones humanas, no hay nada en la lógica de la tabla de vida que la restrinja a aquéllas. Pearl, Park y Miner (1941) hicieron observaciones de laboratorio para producir tablas de vida para el escarabajo de la harina, *tribolium confusum*, y Deevey (1947) aplicó la técnica a los datos obtenidos en la observación en terreno.

## 1.2. UNA TABLA DE VIDA QUE ITERA A LOS DATOS

Los conceptos presentados anteriormente facilitan el cálculo de una tabla de vida que itera a los datos, de modo que una vez completada, la tabla de vida reproduzca exactamente las tasas específicas de mortalidad por edades que le sirvieron de base. Esto no significa que las tasas específicas de mortalidad,  ${}_n d_x / {}_n L_x = {}_n m_x$ , de la tabla de vida serán las mismas que las  ${}_n D_x / {}_n K_x = {}_n M_x$  de la población; debe tenerse en cuenta la diferente distribución de la población y las muertes dentro de los grupos de edades, las que dependen de  $r$  (tasa de crecimiento de la población). Haremos una aproximación suponiendo que dentro de un grupo dado de edad, a la edad  $x$ , la población es proporcional a

$$k(x) = e^{-rx} l(x); \quad (1.2.1)$$

la justificación de esto aparecerá en el capítulo 3 y posteriormente en la discusión de la teoría de la población estable. Por el momento describimos una distribución de edades  $e^{-rx}l(x)$ , donde  $r$  puede ser diferente a un intervalo quinquenal de edades a otro, como *estable por secciones*.

Nuestra tarea consiste en obtener de la tabla de vida poblaciones estables por secciones y sus correspondientes muertes. Estas incorporarán un  $r$  dependiente de la edad, designado como  ${}_n r_x$ . En cada iteración de la tabla de vida obtendremos una  ${}_n M'_x$  comparable con la  ${}_n M_x$  observada, y usaremos la razón  ${}_n M_x / {}_n M'_x$  para ajustar la  ${}_n q_x$ . Del valor ajustado, por ejemplo  ${}_n q_x^*$ , se calculan las demás columnas, se desarrolla un nuevo  ${}_n M'_x$ , y  ${}_n q_x^*$  se ajusta a su vez.

Como  ${}_5 M'_x$  es la razón de las muertes  ${}_5 D'_x$  a la población  ${}_5 K'_x$  (ambos sobre la suposición de estabilidad seccional), necesitamos definir éstas de manera que sea calculable a partir de cualquier bosquejo de la tabla de vida. Si la población estable es  $h(x) dx = e^{-rx}l(x) dx$  entre las edades  $x$  y  $x + dx$ , entonces necesitamos la integral

$${}_5 K'_x = \int_0^5 k(x+t) dt = \int_0^5 e^{-r(x+t)} l(x+t) dt. \quad (1.2.2)$$

Para las muertes necesitamos una curva continua correspondiente a  $l(x)$ , que se podría representar como  $l(x)\mu(x)$ , tal que

$${}_5 d_x = \int_0^5 l(x+t)\mu(x+t) dt.$$

En realidad  $l(x)\mu(x)$  es simplemente  $-(dl(x)/dx)$  de (1.1.1). Para representar  ${}_5 D'_x$ , las muertes en una población que crece a una tasa  $r$ , escribimos

$${}_5 D'_x = \int_0^5 e^{-r(x+t)} l(x+t)\mu(x+t) dt = - \int_0^5 e^{-r(x+t)} dl(x+t).$$

Afortunadamente, esto último se puede integrar por partes para dar

$${}_5 D'_x = e^{-rx}l_x - e^{-r(x+5)}l_{x+5} - r \int_0^5 e^{-r(x+t)} l(x+t) dt, \quad (1.2.3)$$

donde la única integral que aparece es el mismo  ${}_5 K'_x$  de (1.2.2).

Siendo

$${}_5 M'_x = {}_5 D'_x / {}_5 K'_x,$$

nuestra tasa específica por edades desarrollada a partir de la tabla de vida para una población creciente, sustituimos  ${}_5 D'_x$  de (1.2.3) y  ${}_5 K'_x$  de (1.2.2) para encontrar el resultado básico

$${}_5 M'_x = \frac{{}_5 D'_x}{{}_5 K'_x} = \frac{e^{-rx}l_x - e^{-r(x+5)}l_{x+5}}{\int_0^5 e^{-r(x+t)} l(x+t) dt} - r. \quad (1.2.4)$$

Observe que no se requiere aproximación para arribar a (1.2.4) una vez que tenemos  $r$  y el  $l_x$  de la iteración previa. Por supuesto que se usará una aproximación para la integral  ${}_5 K'_x$  de (1.2.4). La concordancia de la tabla de vida con los datos sólo tropieza con el problema de saber cómo calcular esta

integral, ya que diferentes fórmulas para la integral producirían diferentes tablas de vida.

Se puede mostrar una forma explícita de (1.2.4), que no contiene el símbolo integral, para una cúbica que pasa a través de  $k_{x-5}$ ,  $k_x$ ,  $k_{x+5}$  y  $k_{x+10}$ . La integral aproximada (1.1.11) usada con  $e^{-rx}l_x$  en lugar de  $l_x$  y 5 en lugar de  $n$ , da  ${}_5K'_x$ . Para este caso especial (1.2.4) se convierte, después que se cancelan los  $e^{-rx}$ , en

$${}_5M'_x = \frac{l_x - e^{-5r}l_{x+5}}{\frac{5}{24}(l_x + e^{-5r}l_{x+5}) - \frac{5}{24}(e^{-10r}l_{x+10} + e^{5r}l_{x-5})} - r. \quad (1.2.5)$$

Nuestro objetivo ha consistido en construir con cada versión de la tabla de vida, un  ${}_nM'_x$  que sea directamente comparable con el  ${}_nM_x$  de los datos. Esto permite corregir los  ${}_nq_x$  de la tabla de vida, transformándolos en

$${}_nq_x^* = {}_nq_x ({}_nM_x / {}_nM'_x). \quad (1.2.6)$$

Las  ${}_nq_x^*$  corregidas resultan de reducir (aumentar) las  ${}_nq_x$  en forma proporcional, cuando las tasas de mortalidad  ${}_nM'_x$  del primer bosquejo han probado ser demasiado altas (bajas). Las iteraciones continúan hasta que las  ${}_nM'_x$  de la tabla sean las mismas que las  ${}_nM_x$  de los datos, hasta los seis lugares decimales usados; puesto que para edades más altas la convergencia es más lenta, basta examinar los resultados en el grupo de 75 a 79 años.

El resultado es invariante respecto de los valores iniciales. En un experimento se ensayaron los valores iniciales  ${}_5q_x = 5{}_5M_x$ , y 9 iteraciones dieron por resultado  ${}_5M'_{75} - {}_5M_{75} < 10^{-6}$ ; con el valor inicial  ${}_5q_x = 0,1$  para todo  $x$ , se requirieron 11 iteraciones para satisfacer el mismo criterio de convergencia. Evidentemente, no necesitamos saber cómo construir una tabla de mortalidad; basta saber cómo mejorar una.

Queda un punto por resolver: la tasa de crecimiento  $r$ , que se va a usar. Las opciones incluyen un solo valor; por ejemplo la tasa actual de crecimiento de la población como un todo, o tasas de crecimiento que difieren de una a otra sección de la tabla. Lo último está favorecido por la consideración de que una distribución por edades tal como la actualmente observada en los Estados Unidos, refleja tasas de natalidad muy diferentes en la cohorte que ahora tienen 30 años de edad y en las que tienen 10 ó 70. ¿Por qué no permitir entonces que en la distribución por edades, la cual es parte de los datos requeridos en cualquier caso, determinar el  $r$ , y determinarlo "localmente" para cada edad de la tabla? El cálculo se hace fácilmente mediante una extensión del supuesto de estabilidad que condujo a (1.2.2); si se supone un crecimiento estable a través de tres sucesivos grupos quinquenales de edad, si  ${}_5K_x$  es el número de personas que tiene de  $x$  a  $x+5$  años de edad, y  $A$  es una constante adecuada, entonces, aproximadamente

$${}_5K_{x-5} = Ae^{-(x-2,5)r}{}_5L_{x-5}, \quad {}_5K_{x+5} = Ae^{-(x+7,5)r}{}_5L_{x+5},$$

y por lo tanto, mediante división y la toma de logaritmos naturales, obtenemos

$${}_5r_x = (0.1) \ln \frac{{}_5K_{x-5}/{}_5L_{x-5}}{{}_5K_{x+5}/{}_5L_{x+5}}. \quad (1.2.7)$$

En la práctica, el  ${}_5r_x$  negativo se ha reemplazado por cero, y el  ${}_5r_x$  para las edades 60 y más se ha promediado. El  $e^{-10r}$  requerido para (1.2.5) es

$$e^{-10r} = \frac{{}_5K_{x+5}/{}_5L_{x+5}}{{}_5K_{x-5}/{}_5L_{x-5}};$$

$e^{-5r}$  es la raíz cuadrada de esto, y  $e^{5r}$  el recíproco de  $e^{-5r}$ .

Como un ejemplo del procedimiento considere el cálculo de  ${}_5M'_{25}$  en la iteración que aparece en el cuadro 1.3. De la columna de  ${}_5K_x$  y  ${}_5L_x$  para  $x = 20$  y  $x = 30$  establecemos

$$e^{-10r} = \frac{5434/467,593}{6279/476,523} = 0.881952;$$

la raíz cuadrada de esto es  $e^{-5r} = 0,939123$ ; el recíproco de lo último es  $e^{5r} = 1,064823$ . Una tabla de logaritmos<sup>3</sup> y cualquiera de los exponenciales de arriba da  $r = 0,0125617$ . Usando estos números en (1.2.5) junto con  $l_{20}$ ,  $l_{25}$ ,  $l_{30}$ ,  $l_{35}$  del cuadro 1.3 da  ${}_5M'_{25} = 0,0143656 - 0,0125617 = 0,0018039$ , contra  ${}_5M'_{25} = 0,001804$  en la tabla, lo que concuerda con  ${}_5M_{25} = {}_5D_{25}/{}_5K_{25}$ .

Una vez que se ha logrado la convergencia, se pueden calcular las columnas restantes; en nuestro ejemplo,  ${}_n m_x$ ,  $T_x$  y  $\dot{e}_x = T_x/l_x$ .

El cuadro 1.3 para los hombres de los Estados Unidos en 1964 comienza con la población observada y las muertes, no usándose más información que la dada en las primeras dos columnas. El  ${}_n M'_x$  al final de la tabla, obtenido del  ${}_n r_x$ ,  ${}_n d_x$  y  ${}_n L_x$  de la iteración final, concuerda hasta seis lugares decimales con el  ${}_n M_x$  obtenido al dividir  ${}_n D_x$  por  ${}_n K_x$ . Con la ayuda de una calculadora de escritorio el lector ha verificado que  ${}_5 d_x = l_x {}_5 q_x$ ;  ${}_5 m_x = {}_5 d_x / {}_5 L_x$ ;  $\dot{e}_x = T_x / l_x$ ; ahora él puede examinar numéricamente las relaciones (1.2.5) y (1.2.7). La tabla hacia la que converge el proceso iterativo es como un tejido sin costura: el complejo de relaciones discutidas en este capítulo rige simultáneamente. La iteración es indispensable; cualquier ciclo aislado de cálculo permitiría que una o más de las relaciones rigieran de manera sólo aproximada.

Variaciones menores, no discutidas en la exposición anterior, son posibles en la construcción iterativa de una tabla de vida. Para ver qué importancia tienen desde el punto de vista numérico, se les pidió a cuatro jóvenes demógrafos que construyeran, más o menos independientemente, una tabla de vida para los hombres de los Estados Unidos, 1963, sus valores para tres de las  $\dot{e}_x$  fueron:

	$\dot{e}_0$	$\dot{e}_{10}$	$\dot{e}_{30}$
Wilhelm Flieger	66.729	59.089	40.332
James Mulherin	66.767	59.098	40.339
Christina Olsen	66.753	59.094	40.338
Peter Uhlenberg	66.754	59.099	40.342

Para  $\dot{e}_0$  los valores están en un rango de 0,04; para  $\dot{e}_{10}$  y  $\dot{e}_{30}$  de 0,010.

<sup>3</sup> Los exponenciales suficientes para dar logaritmos con 6 decimales se dan en el apéndice; en el cuadro 5.3 aparece un ejemplo de su uso.

Dado un conjunto de tasas específicas de mortalidad por edades, la tabla descrita arriba concuerda con ellos; esta coincidencia está sujeta sólo a la elección del procedimiento de integración para  ${}_nL_x$  al valor de  $r$  tomado para aproximar el aumento de la población de cohorte a cohorte, y a los procedimientos especiales en las edades menores y mayores. Estas decisiones son aparentemente inevitables y la experiencia demuestra que dentro de un rango considerable tienen poca influencia.

Aun el usar  $r$  igual a cero en todas las iteraciones no altera grandemente el resultado. El lector interesado puede demostrar que el efecto sobre  ${}_5M'_x$  de un cambio  $\Delta r$  en  $r$ , es aproximadamente

$$\Delta {}_5M'_x = -\frac{{}_5m_x}{24} \left( \frac{{}_5d_{x+5} - {}_5d_{x-5}}{{}_5d_x} + \frac{{}_5L_{x-5} - {}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} \right) \Delta r.$$

Utilice este resultado con el cuadro 1.3 para demostrar que haciendo  $r = 0$  a la edad 45 en lugar del 0,009 realmente usado,  ${}_5M'_{45}$  se elevaría en 0,000015, y compare con la diferencia de los valores tabulados  ${}_5m_{45} - {}_5M'_{45} = 0,000014$ .

Más serio es el problema de saber con cuáles datos debe concordar la tabla de vida cuando se dispone de más de un conjunto. Para la mayoría de las edades en la mayoría de los países, los datos consisten exclusivamente de una población censada o estimada a mitad de año, y las muertes sobre un período anual, trienal o quinquenal centrado alrededor de dicho punto en el tiempo. Pero en las edades menores, las estadísticas de natalidad son una fuente alternativa sobre exposición. Si tenemos los nacimientos (ocurriendo, en parte, antes del período que cubren las muertes) con los cuales están relacionadas las muertes bajo un año de edad, entonces  $q_0$  se obtiene directamente mediante la división de las muertes por tales nacimientos. (Refiérase al paralelogramo *ABGC* en el gráfico 1.1). Si se conocen los nacimientos o son calculables con una mayor precisión que la población bajo un año de edad a mitad de período, la que generalmente se subestima en los censos, aquéllos se deberían tomar en cuenta. Las muertes de los hombres de los Estados Unidos bajo un año de edad en 1964 fueron 57 368, y en 1965 fueron 53 437; en 1964 los nacimientos registrados fueron 2 060 000. Si el factor de separación  $f_0^z$  es 0,2, de modo que 0,2 de las muertes bajo un año de edad provinieran de nacimientos ocurridos en el año precedente, entonces la probabilidad de morir en el primer año de vida para un niño nacido en 1964 es

$$q_0 = \frac{(57,368)(0.8) + (53,437)(0.2)}{2,060,000} = 0.02747,$$

o sea, 1,2 por ciento sobre el  $q_0$  del cuadro 1.3. Un cálculo alternativo, para el período de tiempo que corresponde a las muertes del año calendario 1964 usado en el cuadro 1.3, consiste en tomar los nacimientos de 1963 y 1964 para determinar

$$q_0 = \frac{57,368}{(2,102,000)(0.2) + (2,060,000)(0.8)} = 0.02774,$$

lo cual es 2,7 por ciento más alto que el  $q_0$  del cuadro 1.3. Si se puede tolerar la suposición  $f_0^z = 0$ , entonces

$$q_0 = \frac{57,368}{2,060,000} = 0,02785,$$

lo cual es una sobreestimación de la mortalidad en la medida en que los nacimientos estaban bajando en el período cubierto.

Aquellos que tienen un conocimiento detallado del censo y las estadísticas vitales de los Estados Unidos pueden ser capaces de decir cuál  $q_0$  está más cerca de la verdad, entre éstos y el  $q_0 = 0,027146$  del cuadro 1.3 (Véase la sección 10.4).

### 1.3. NIVELES DE DISCURSO

Este capítulo ha sido escrito desde un punto de vista demográfico, y como tal creo que aparece razonablemente homogéneo y consistente; sin embargo, desde un punto de vista estadístico, se mueve entre diversos niveles de discurso. En algunos lugares se refiere a los datos reales, en otros a modelos hipotéticos que pueden ser capaces de representar datos sólo con cierta aproximación. Argumenta en términos de probabilidades para los individuos, pero dondequiera que se exponga un número de individuos, cambia a los valores esperados. La mayor dificultad, desde un punto de vista estadístico, es que no hace distinción entre las muestras y las poblaciones de las que éstas se sacan, usando la palabra "población" para ambas mientras esté implicada una pluralidad de individuos. (La última ambigüedad causará una dificultad especial cuando nos refiramos a muestreo, en el capítulo 15.) Este libro tiene algunas de sus raíces en la ciencia actuarial, cuya teoría clásica de las contingencias de la vida se basaba en valores esperados. Hoy día, sin embargo, bajo el encabezamiento de la teoría del riesgo individual y colectivo, la probabilidad moderna está haciendo importantes avances en los círculos actuariales. Es todavía cierto que las claras dificultades matemáticas han hecho a los demógrafos, incluyendo a este autor, cerrar sus ojos a la confusión de niveles cuya existencia se reconoce aquí. En capítulos posteriores se harán algunos intentos por salvar estas dificultades; los últimos cuatro capítulos del libro se refieren específicamente a distribuciones de probabilidad.



II Parte

ANALISIS DISCRETO PARA UN SEXO



## EL CONJUNTO BASICO DE ECUACIONES DE RECURRENCIA

### 2.1. PROYECCION DE POBLACION

Una proyección de población, introducida en el capítulo 1, es el cálculo del número esperado de personas, edad por edad para cada sexo, en puntos del tiempo posteriores a un censo u otro momento de partida. El conjunto de tasas específicas de fecundidad y mortalidad usadas pueden ser el de algún período pasado, o una extrapolación desde el pasado; la extrapolación puede seguir un método especificado matemáticamente, o puede ser intuitiva. Este capítulo y el siguiente tratarán las proyecciones con las tasas observadas durante un período consideradas como fijas. Más que predecir el futuro se trata de comprender el pasado; aparentemente, una efectiva manera de entender el significado de un conjunto de tasas específicas de fecundidad y mortalidad observadas, es preguntarse qué habría sucedido de continuar así.

Un censo de los Estados Unidos levantado a mediados de 1964 habría mostrado alrededor de 5 614 000 mujeres ( $= {}_5K_{25}$ ) que tenían de 25 a 29 años en su último aniversario; la tabla de vida construida basándose en las muertes y la población para 1964 da la probabilidad de que una mujer de 25 a 29 años viva 5 años más:

$$\frac{{}_5L_{30}}{{}_5L_{25}} = \frac{479,486}{482,030} = 0.99472$$

(véase el cuadro 2.1). El producto de la probabilidad de sobrevivencia por el número de personas vivas en 1964, da el número esperado de mujeres de 30 a 34 años en 1969,

$$\begin{aligned} \frac{{}_5L_{30}}{{}_5L_{25}} {}_5K_{25}^{(0)} &= (0.99472)(5,614,000) \\ &= 5,584,000 \\ &= {}_5K_{30}^{(1)}, \end{aligned}$$

suponiendo que el territorio permanece igual y está cerrado a la migración, que la mortalidad no ha cambiado desde 1964, y haciendo uso de la aproximación (1.1.13) del capítulo 1. Aquí, como a lo largo del texto, un superíndice colocado a la derecha de un símbolo servirá para identificar el momento del tiempo al que se refiere; el límite inferior del intervalo de edades será escrito abajo a la derecha y la amplitud del intervalo de edades irá abajo a la izquierda. De este modo,  ${}_nK_x^{(t)}$  es la población en el momento  $t$  cuyas edades están entre  $x$  y  $x+n$ . En lo que sigue abajo,  $n=5$  y se omitirá. Entre los que están vivos en  $t=0$ , los sobrevivientes en  $t=1$  se calculan por medio de

$$\begin{aligned}
 \frac{L_5}{L_0} K_0^{(0)} &= K_5^{(1)}, \\
 \frac{L_{10}}{L_5} K_5^{(0)} &= K_{10}^{(1)}, \\
 &\vdots \\
 \frac{L_{85}}{L_{80}} K_{80}^{(0)} &= K_{85}^{(1)},
 \end{aligned}
 \tag{2.1.1}$$

usando un calendario cuyo punto de partida es el momento 0 (en lugar de 1964) y la unidad de tiempo es 5 años.

El intervalo típico de edad del conjunto (2.1.1) es desde  $x$  en el último cumpleaños hasta  $x + 4$ , donde  $x$  es un múltiplo de 5; la ecuación (2.1.1) se puede escribir

$$(L_{x+5}/L_x)K_x^{(0)} = K_{x+5}^{(1)}, \quad x = 0, 5, \dots, \omega - 5, \tag{2.1.2}$$

siendo  $\omega$  la máxima edad posible tomada como múltiplo de 5. Evidentemente, la misma operación consistente en multiplicar por una proporción esperada de sobrevivientes dará, basada en las mismas suposiciones, el número esperado de sobrevivientes 10 años después de la fecha de partida:

$$\frac{L_{x+10}}{L_{x+5}} K_{x+5}^{(1)} = \frac{L_{x+10}}{L_x} K_x^{(0)} = K_{x+10}^{(2)},$$

y de manera similar para fechas posteriores.

Esto proyecta la población ya viva en el tiempo cero, a la que se debe agregar una porción referida a los nacimientos subsiguientes a dicha fecha. Supondremos que las tasas específicas de fecundidad por edades  $F_x$  se obtienen observando el número de nacimientos en las madres que tenían de  $x$  a  $x + 4$  años de edad en su último cumpleaños, y dividiendo éstos por el número promedio de mujeres en el mismo grupo de edad durante el período de observación. Para los Estados Unidos en 1964, se registraron 1 007 362 nacimientos en mujeres de 25-29 años (véase el cuadro 2.1). Para seguir la población femenina se requiere el número de niñas recién nacidas, y para ello supondremos que la fracción de nacimientos femeninos es la misma para todas las edades de la madre, lo cual es una suposición incorrecta pero que no afecta grandemente los cálculos (véanse los cuadros 5.2 y 5.3). La proporción de nacimientos femeninos respecto al total de nacimientos fue, en 1964,

$$\frac{1,967,328}{4,027,490} = 0.488475,$$

y por tanto, los nacimientos femeninos a que dieron lugar las mujeres de 25-29 años se estiman en

$$1,007,362 \times 0.488475 = 492,071.$$

Tomando el número de mujeres de 25-29 años a la mitad de 1964 como 5 614 000 (igual como se mencionó arriba), resultó una tasa específica de fecundidad femenina por edad de

**CUADRO 2.1**  
**INFORMACION USADA AL CALCULAR LA MATRIZ DE PROYECCION M, PARTE**  
**SUPERIOR IZQUIERDA 10×10 DE L EN (2.1.9), PARA**  
**LAS MUJERES DE ESTADOS UNIDOS, 1964**

x	$5L_x$	$5K_x/1000$ Población	$5B_x$ Nacimientos
0	488,970	10,136	0
5	487,312	10,006	0
10	486,502	9,065	7,816
15	485,484	8,045	585,710
20	483,940	6,546	1,439,486
25	482,030	5,614	1,007,362
30	479,486	5,632	585,006
35	475,789	6,193	309,814
40	470,394	6,345	87,626
45	462,418	5,796	4,670
		Hombres	2,060,162
		Mujeres	1,967,328
		TOTAL	4,027,490
x	$F_x = \frac{5B_x}{5K_x} 0.488475$	$5\phi_x = \frac{5L_x F_x}{l_0}$	$\frac{5\phi_x + 5\phi_{x+5}}{2}$
5			0.00102
10	0.00042	0.00205	0.08735
15	0.03556	0.17265	0.34624
20	0.10742	0.51983	0.47117
25	0.08765	0.42250	0.33289
30	0.05074	0.24328	0.17978
35	0.02444	0.11627	0.07400
40	0.00675	0.03173	0.01678
45	0.00039	0.00182	0.00091
	TOTAL	1.51014 = $R_0$	1.51014

$$F_{25} = \frac{492,071}{5,614,000} = 0.08765.$$

La razón  $F_x$  debe multiplicarse (Barclay, 1958, pág. 235) por la media aritmética de la población inicial y final de edades  $x$  a  $x + 4$  tomada de (2.1.1),

$$\frac{K_x^{(0)} + K_x^{(1)}}{2} = \frac{1}{2} \left( K_x^{(0)} + \frac{L_x}{L_{x-5}} K_{x-5}^{(0)} \right), \quad (2.1.3)$$

y ya que este número está expuesto durante 5 años, multiplicamos también por 5. Las mujeres que tienen de  $x$  a  $x + 4$  años, junto con las de  $x + 5$  a  $x + 9$  años en su último cumpleaños, harán una contribución al número de nacimientos durante el período de tiempo de 5 años de 0 a 1 de

$$\frac{5}{2} \{K_x^{(0)} + K_x^{(1)}\} F_x + \frac{5}{2} \{K_{x+5}^{(0)} + K_{x+5}^{(1)}\} F_{x+5}. \quad (2.1.4)$$

Sumando a través de todas las edades y ordenando convenientemente da

$$\frac{5}{2} \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} \left( F_x + \frac{L_{x+5}}{L_x} F_{x+5} \right) K_x^{(0)}, \quad (2.1.5)$$

donde  $\alpha$  es la edad más temprana del período reproductivo y  $\beta$  la más tardía, suponiéndose que ambas son múltiplos de 5. Esto servirá para calcular los nacimientos en el intervalo de edad y tiempo de 5 años, sobre la suposición de tasas vitales fijas, mientras se deja pendiente una mejor aproximación para el capítulo 11.

El término entre paréntesis en (2.1.5) se puede interpretar como una imperfecta pero razonable aproximación al número esperado de nacimientos en un período de 5 años, por una mujer que tenía inicialmente de  $x$  a  $x + 4$  años en su último cumpleaños; se le asigna una exposición a la tasa  $F_x$  de su grupo de edad inicial para la primera mitad del período y si sobrevive cinco años se la toma como si hubiera estado expuesta durante la otra mitad del período a la tasa  $F_{x+5}$  correspondiente al grupo de edad inmediatamente superior.

Sin embargo, los nacimientos no es todo lo que queremos; la proyección requiere la población sobreviviente esperada al final del intervalo, para lo cual hay que multiplicar (2.1.5) por un factor de supervivencia. Si una niña nace en el momento  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), entonces, la probabilidad de que ella esté viva al final del intervalo, o sea, a la edad  $x = 5(1 - t)$ , es  $l(x)/l_0 = l(5 - 5t)/l_0$ . Sumando esto a través del intervalo quinquenal de tiempo y de edad como si los nacimientos se distribuyeran uniformemente dentro de los cinco años, se obtiene la proporción de sobrevivientes al final del período entre los niños nacidos a lo largo del intervalo:

$$\frac{\int_0^1 l(5 - 5t) dt}{l_0} = \frac{\int_0^5 l(x) dx}{5l_0} = \frac{{}_5L_0}{5l_0}. \quad (2.1.6)$$

Multiplicando (2.1.5) por (2.1.6) da  $K_0^{(1)}$  que era el término que necesitábamos para completar la proyección de población (2.1.1.)

### Las ecuaciones en diferencias y su presentación matricial

Las condiciones de nacimiento y muerte establecidas en los párrafos precedentes nos permiten mostrar la relación entre la población en el momento  $t + 1$  con la

del momento  $t$  (donde  $t$  está medido en unidades de 5 años) como un conjunto de ecuaciones en diferencias de tipo lineal, de primer orden, homogéneas y con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \frac{L_0}{2l_0} \{ \{K_{15}^{(t)} + K_{15}^{(t+1)}\} F_{15} + \{K_{20}^{(t)} + K_{20}^{(t+1)}\} F_{20} + \dots \\ + \{K_{40}^{(t)} + K_{40}^{(t+1)}\} F_{40} \} = K_0^{(t+1)}, \\ \left(\frac{L_5}{L_0}\right) K_0^{(t)} = K_5^{(t+1)}, \\ \vdots \\ \left(\frac{L_{85}}{L_0}\right) K_{80}^{(t)} = K_{85}^{(t+1)}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

donde con fines de ejemplificación tomamos el período de vida reproductivo como  $\alpha = 15$  hasta  $\beta = 45$ . [La modificación de (2.1.7) para un intervalo de edad diferente, ya sea de reproducción o de vida, no presenta dificultades.] En la primera ecuación de (2.1.7) las tasas específicas de fecundidad por edades  $F_{15}$ , etc. se aplican al número de años-mujeres de exposición durante el período,  $\frac{1}{2} \{K_{15}^{(t)} + K_{15}^{(t+1)}\}$ , etc.; el factor que tiene en cuenta la proporción en que los niños nacidos durante los 5 años sobreviven hasta el final del período es  $L_0/5l_0$ .

Podemos usar las ecuaciones de (2.1.7) que están debajo de la primera para determinar  $K_{15}^{(t+1)}$ , y así reemplazar  $K_{15}^{(t+1)}$ , etc. en el primer miembro de la primera ecuación. Todo el conjunto se puede ahora escribir de manera compacta con superíndice  $(t)$  en el primer miembro y  $(t+1)$  en el segundo miembro:

$$L\{\bar{\mathbf{K}}^{(t)}\} = \{\bar{\mathbf{K}}^{(t+1)}\}, \quad (2.1.8)$$

donde  $\{\mathbf{K}^{(t)}\}$  es el vector columna de la distribución de la población por grupos de edades en el tiempo  $t$ ,

$$\bar{\mathbf{K}}^{(t)} = \begin{Bmatrix} K_0^{(t)} \\ K_5^{(t)} \\ \vdots \\ K_{80}^{(t)} \end{Bmatrix},$$

y  $\mathbf{L}$  es la matriz de los coeficientes de  $K_x^{(t)}$  en (2.1.7) después que se eliminan los  $K_x^{(t+1)}$  del primer miembro

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L_0}{2l_0} \left( \frac{L_{15}}{L_{10}} F_{15} \right) & \frac{L_0}{2l_0} \left( F_{15} + \frac{L_{20}}{L_{15}} F_{20} \right) & \dots & 0 & 0 \\ \frac{L_5}{L_0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_{10}}{L_5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{L_{85}}{L_{80}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.9)$$

El paréntesis de llave,  $\{K\}$ , será usado para recordar que el vector en (2.1.8) es vertical, y la barra para indicar que se incluyen todas las edades hasta el final de la vida. Al decir que (2.1.8) es lo mismo que (2.1.7) no estamos suponiendo nada más que la regla fila-por-columna para la multiplicación de matrices.<sup>4</sup>

La proyección de población a que hemos llegado ha sido durante mucho tiempo un importante instrumento en el trabajo demográfico (Cannan, 1895; Bowley, 1924; Whelpton, 1936). El método de Cannan fue idéntico al nuestro en cuanto a supervivencia; en relación con nacimientos difirió sólo en que él usó una única proporción, la que aplicó a todas las personas de 20 a 40 años de edad. La forma matricial fue sugerida por Bernardelli (1941) y Lewis (1942), e investigada detenidamente por Leslie (1945, 1948a, 1948b), de cuyos resultados se tomó la mayor parte del capítulo 3. En el cuadro 2.2 se muestra un ejemplo de  $M$ , la parte superior izquierda  $10 \times 10$  de  $L$  basada en la estimación de la población femenina de los Estados Unidos en 1964, y de los nacimientos y muertes por edad para el año calendario 1964.

Dados los valores de la tabla de vida, la distribución de mujeres por edad, y la distribución por edad de las mujeres que fueron madres en 1964, como lo muestra el cuadro 2.1, el lector puede calcular los elementos correspondientes de la matriz de proyección  $M$  y puede también verificar la proyección del cuadro 2.3.

Consideremos la población femenina esperada (cuadro 2.3) con menos de 45 años de edad, en los Estados Unidos, si las tasas específicas de mortalidad y fecundidad por edades se mantuvieran constantes a los niveles de 1964. El grupo 20-24 crece en un 20 por ciento en el primer período de 5 años, el crecimiento se hace más lento hasta casi detenerse en la década de 1980, para luego acelerarse nuevamente en la década del 90. Ocurre lo mismo con el grupo de edad 30-34, excepto que no alcanza su más rápida tasa de crecimiento sino hasta fines de la década de 1970. Estas oscilaciones reflejan la caída de la tasa de natalidad en los años 30 y su posterior aumento en la década del 40. Ellas tienen consecuencias importantes para la matrícula escolar y la entrada al mercado de trabajo en las décadas del 60 y del 70. La manera en que los cambios históricos en los nacimientos se reflejan en las distribuciones por edad de periodos subsiguientes depende de la naturaleza de la matriz de proyección  $M$ , que se estudiará en el capítulo 3.

### Comparación de tres poblaciones

Antes de continuar la discusión acerca de las propiedades teóricas de la matriz, mostraremos  $M$  y  $\{K^{(i)}\}$  para tres poblaciones femeninas observadas durante el año 1963 (véase el cuadro 2.4). Las tres, Dinamarca, Nueva Zelandia y Costa Rica, han sido presentadas de acuerdo al orden creciente de sus tasas específicas de fecundidad, pero mucho más que esto se refleja en las primeras filas de sus matrices. Las tasas específicas de fecundidad de Nueva Zelandia exceden a las de Dinamarca en una proporción que es especialmente grande en las edades más altas y más bajas del período de vida reproductiva. Hasta los 25 años, la

<sup>4</sup> Si las primas indican la operación de trasponer, o sea, intercambio de filas y columnas, entonces podríamos haber usado el vector horizontal de edades  $\{K^{(i)}\}'$  y la traspuesta  $L'$  para expresar (2.1.8) en la forma  $\{K^{(i)}\}'L' = \{K^{(i+i)}\}'$ . Hay poca preferencia en una u otra dirección y nosotros nos quedaremos con (2.1.8) durante esta discusión.



**CUADRO 2.2**  
**MATRIZ DE PROYECCION M, PARTE SUPERIOR IZQUIERDA 10x10 DE L EN (2.1.9), MUJERES DE EE.UU., 1964**

0	0.00103	0.08779	0.34873	0.47607	0.33769	0.18333	0.07605	0.01744	0.00096
0.99661	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.99834	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.99791	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.99682	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.99605	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.99472	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.99229	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.98866	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.98304	0

Información para completar la matriz L para las mujeres de los Estados Unidos, 1964

x	$5L_{x+5}/5L_x$	x	$5L_{x+5}/5L_x$	x	$5L_{x+5}/5L_x$	x	$5L_{x+5}/5L_x$
45	0.97416	55	0.94430	65	0.86938	75	0.68817
50	0.96222	60	0.91410	70	0.80060	80	0.76848*

\*  $15L_{85}/5L_{80}$ .

CUADRO 2.3

BASANDOSE EN LAS TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD Y MORTALIDAD POR EDADES DE 1964 (en miles)  
POBLACION FEMENINA DE LOS EE.UU. PARA 1964, PROYECTADA SOBRE INTERVALOS DE 5 AÑOS HASTA 1999.

Edad x	1964 {K <sup>(0)</sup> }	1969 {K <sup>(1)</sup> }	1974 {K <sup>(2)</sup> }	1979 {K <sup>(3)</sup> }	1984 {K <sup>(4)</sup> }	1989 {K <sup>(5)</sup> }	1994 {K <sup>(6)</sup> }	1999 {K <sup>(7)</sup> }
0	10,136	10,244	11,623	13,075	14,227	15,047	16,003	17,397
5	10,006	10,102	10,209	11,584	13,030	14,178	14,996	15,949
10	9,065	9,989	10,085	10,192	11,564	13,009	14,155	14,971
15	8,045	9,046	9,968	10,064	10,170	11,540	12,981	14,125
20	6,546	8,019	9,017	9,937	10,032	10,138	11,504	12,940
25	5,614	6,520	7,988	8,982	9,898	9,992	10,098	11,458
30	5,632	5,584	6,486	7,946	8,934	9,845	9,939	10,045
35	6,193	5,589	5,541	6,436	7,884	8,865	9,769	9,863
40	6,345	6,123	5,525	5,478	6,363	7,795	8,765	9,659
45	5,796	6,237	6,019	5,432	5,386	6,255	7,663	8,616
50	5,336	5,646	6,076	5,863	5,291	5,246	6,093	7,465
55	4,642	5,134	5,433	5,847	5,642	5,091	5,048	5,863
60+	14,023	15,532	17,042	18,443	19,862	20,809	20,927	20,784
Todas las edades	97,379	103,765	111,013	119,277	128,284	137,812	147,942	159,137

fecundidad costarricense es, a su vez, cerca del 50 por ciento mayor que la de Nueva Zelandia, pero más allá de esa edad la proporción crece rápidamente.

En comparación con las diferencias sustanciales, tanto de niveles como de incidencia de la fecundidad por edades, que aparecen en las filas superiores de las matrices del cuadro 2.4, las diferencias en cuanto a supervivencia mostradas por las subdiagonales son insignificantes. La probabilidad de supervivencia desde 45-49 a 50-54 años, que es el décimo elemento de la undécima fila de  $\mathbf{M}$ , es 0,98051 para Dinamarca, 0,97687 para Nueva Zelandia, y 0,97276 para Costa Rica. Más importante para el aumento de población es el primer elemento subdiagonal  $m_{21}$ , la probabilidad de pasar de 0-4 a 5-9 años; la más baja de éstas es la de Costa Rica, con  $m_{21} = 0,97827$ , en tanto que la más alta es 0,99703, lo que muestra un pequeño rango de variación. Mortalidad adicional está encubierta en la fila superior, que da una especie de fecundidad neta: no los nacimientos, sino los sobrevivientes de los nacimientos al cabo de cinco años. Pero aun aquí el  $L_0$  más pequeño es el de Costa Rica con 457 546, contra 491 427 de Dinamarca (que no aparecen en el cuadro 2.4). La probabilidad de morir varía más en proporción de un país a otro que la probabilidad de supervivencia, pero lo que requiere una proyección es esta última.

Los vectores de distribuciones por edad para mujeres  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$  se muestran a la derecha en la tabla. La distribución de Dinamarca es aproximadamente plana, la de Nueva Zelandia cae desde 151 000 niñas de 0-4 años a 66 000 mujeres de 50-54 años; la de Costa Rica cae desde 123 000 niñas de 0-4 a 21 000 mujeres de 50-54 años. El contraste de las pendientes resulta de muy diferentes tasas de crecimiento a lo largo de la vida de los individuos registrados. La tasa de natalidad de Dinamarca estuvo bajando en los 15 años anteriores a 1963, y esto se refleja en que su  $K_0^{(0)}$  comienza por debajo de  $K_{15}^{(0)}$ , en contraposición a Nueva Zelandia, que mantuvo su nivel de nacimientos de postguerra y muestra una caída uniforme desde  $K_0^{(0)}$  a  $K_{25}^{(0)}$ .

### Métodos de solución

Son posibles dos enfoques a (2.1.8). El más obvio es tratarla como si fuera una ecuación en escalares, y resolver, sin hacer un análisis más profundo, por

$$\mathbf{L}\{\bar{\mathbf{K}}^{(0)}\} = \{\bar{\mathbf{K}}^{(1)}\}, \quad \mathbf{L}\{\bar{\mathbf{K}}^{(1)}\} = \{\bar{\mathbf{K}}^{(2)}\}, \dots \quad (2.1.10)$$

Esto fue lo que se hizo en el cuadro 2.3, donde se calculó la población en cada punto del tiempo con base en la del momento precedente. Con propósitos analíticos, se puede mejorar la solución escribiendo (2.1.10) como

$$\{\bar{\mathbf{K}}^{(1)}\} = \mathbf{L}'\{\bar{\mathbf{K}}^{(0)}\}, \quad (2.1.11)$$

que nos permite estudiar los efectos de la estructura de la fecundidad y mortalidad contenidos en  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{L}'$ , en forma separada de la distribución por edades  $\mathbf{K}^{(0)}$ .

El otro enfoque para la solución de (2.1.8) consiste en analizar la matriz de los coeficientes en función de sus raíces características. Esto es equivalente a lo que se hace en análisis factorial. En nuestro caso, resulta que las tres primeras raíces contienen casi toda la explicación; siendo esto así, se puede lograr alguna simplificación y por tanto una mayor comprensión, mediante una forma analítica de solución que permita la separación de los efectos de estas tres raíces principales.

**CUADRO 2.4**  
**MATRICES DE PROYECCION M Y DISTRIBUCIONES POR EDAD (K<sup>00</sup>)**  
**PARA DINAMARCA, NUEVA ZELANDIA Y COSTA RICA (Mujeres, 1963)**

EDAD	MATRIZ DE PROYECCION M		POBLACION OBSERVADA (EN MILES) {K <sup>00</sup> }/1.000
	SUBDIAGONAL <sup>a</sup>	PRIMERA FILA <sup>b</sup>	
	<b>DINAMARCA</b>		
0	0.99703	0	183
5	0.99876	0.0000	180
10	0.99848	0.0555	185
15	0.99791	0.2649	209
20	0.99746	0.4055	164
25	0.99595	0.3031	145
30	0.99362	0.1543	140
35	0.99081	0.0596	150
40	0.98669	0.0131	157
45	0.98051	0.0008	150
50		0.0000	153
55+			546
TOTAL			2361
	<b>NUEVA ZELANDIA</b>		
0	0.99634	0	151
5	0.99826	0.0013	136
10	0.99820	0.1034	123
15	0.99737	0.3628	106
20	0.99724	0.5554	86
25	0.99614	0.4688	73
30	0.99389	0.2612	75
35	0.99111	0.1133	78
40	0.98498	0.0279	77
45	0.97687	0.0017	71
50		0.0000	66
55+			224
TOTAL			1265
	<b>COSTA RICA</b>		
0	0.97827	0	123
5	0.99557	0.0009	108
10	0.99628	0.1388	85
15	0.99480	0.5288	66
20	0.99245	0.8101	53
25	0.99003	0.7609	44
30	0.98846	0.6022	39
35	0.98454	0.3760	34
40	0.97767	0.1351	27
45	0.97276	0.0194	23
50		0.0001	21
55+			48
TOTAL			670

<sup>a</sup>  $sL_{x+s}/sL_x$ .

<sup>b</sup>  $(L_0/2l_0)(F_x + F_{x+s} sL_{x+s}/sL_x)$ .

Es conveniente expresar el argumento en términos de una partición de  $L$ . En realidad  $L$  y sus potencias se pueden escribir como cuatro submatrices por medio de una división que corresponde a la edad más alta de reproducción  $\beta$ .

$$L = \begin{bmatrix} M & 0 \\ A & B \end{bmatrix}, \quad L^2 = \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ AM + BA & B^2 \end{bmatrix}, \quad L^t = \begin{bmatrix} M^t & 0 \\ A_t & B^t \end{bmatrix},$$

donde  $A_t$  es una función de  $A$ ,  $B$  y  $M$ , cuya forma explícita no se necesita. Lo importante de la partición es que la submatriz superior derecha es cero, y permanece cero para todas las potencias enteras positivas de  $L$ , como se puede verificar aplicando las reglas de la multiplicación matricial. Si ahora el vector de la distribución por edades  $\{K\}$  está también dividido a la misma edad más alta de reproducción, o sea en la forma

$$\{\bar{K}\} = \begin{Bmatrix} K \\ D \end{Bmatrix},$$

entonces  $\{K^{(t)}\}$  se convierte en

$$\begin{aligned} \{\bar{K}^{(t)}\} &= L^t \{\bar{K}^{(0)}\} = \begin{bmatrix} M^t & 0 \\ A_t & B^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K^{(0)} \\ D^{(0)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} M^t K^{(0)} \\ A_t K^{(0)} + B^t D^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K^{(t)} \\ D^{(t)} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

a partir de lo cual es evidente que las submatrices  $A$ ,  $B$  y  $D$ , se refieren a edades que están más allá de las de reproducción, o sea, sobre  $\beta$ , nunca afectan a las edades menores que  $\beta$ . Nuestro trabajo subsiguiente no se refiere a  $L^t$  y  $\{K^{(t)}\}$ , que representan a toda la escala de edades, sino que estudiaremos en forma amplia la matriz  $M^t$  y el vector  $\{K^{(t)}\}$ , que cubren sólo el intervalo que va desde el nacimiento hasta el fin de la vida reproductiva.

Como una introducción al análisis del siguiente capítulo crearemos un ejemplo numérico (en el cual los intervalos de edad tienen una amplitud de 15 años) cuya aritmética se puede efectuar con una calculadora de escritorio. Los resultados que siguen se obtuvieron por medio de un computador, y los números se redondearon a cuatro decimales cuando fueron copiados a partir de los resultados de aquél. Es conveniente suponer que no hay reproducción más allá del intervalo de edad 40-44; el pequeño número de nacimientos provenientes de mujeres de 45-49 se transfirieron al grupo 40-44. Por medio de las técnicas del capítulo 11 se puede demostrar que este procedimiento para una población que crece a una tasa  $r$ , eleva la tasa de crecimiento aparente del proceso de proyección en sólo  $re^{-45r} F_{45}$ , o sea, en menos de 0,000004 para la población femenina de los Estados Unidos discutida abajo.

## 2.2. CONDENSACION DE LA MATRIZ

Para obtener una matriz de  $3 \times 3$  utilizable, comenzamos con  $M$ , compilada en nueve grupos quinquenales hasta la edad 45, y la elevamos al cubo para obtener  $M^3$ . El cuadro 2.5 muestra  $M^3$  para las mujeres de los Estados Unidos,

CUADRO 2.5  
 MATRIZ M<sup>3</sup> JUNTO CON EL {K<sup>(0)</sup>} OBSERVADO Y EL PRIMER VECTOR ESTABLE  
 {K<sub>1</sub>}, PARA LAS MUJERES DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1965 \*

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0.0856 & 0.3208 & 0.4305 & : & 0.3082 & 0.1696 & 0.0712 & : & 0.0174 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0010 & 0.0856 & 0.3203 & : & 0.4299 & 0.3078 & 0.1692 & : & 0.0710 & 0.0173 & 0 \\ 0 & 0.0010 & 0.0856 & : & 0.3204 & 0.4306 & 0.3085 & : & 0.1698 & 0.0714 & 0.0175 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0.9930 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9932 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9909 & : & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & : & 0.9878 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0.9833 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0.9759 & : & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{observado } \{K^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} 10.13 \\ 10.22 \\ 9.44 \\ 8.51 \\ 6.88 \\ 5.77 \\ 5.64 \\ 6.17 \\ 6.46 \end{Bmatrix}$$

de 45 años y más, 30,76 por ciento

$$\text{estable } \{K_1\} = \begin{Bmatrix} 10.10 \\ 9.45 \\ 8.85 \\ \dots \\ 8.29 \\ 7.76 \\ 7.26 \\ \dots \\ 6.77 \\ 6.31 \\ 5.86 \end{Bmatrix}$$

de 45 años y más, 29,35 por ciento

\* Programado por D. Nagnur. Nacimientos ajustados.

año 1965, con una partición en nueve submatrices dibujadas con líneas punteadas. En forma paralela a la notación introducida anteriormente, en que

$$\mathbf{M}\{\mathbf{K}^{(0)}\} = \{\mathbf{K}^{(1)}\},$$

escribimos los mismos símbolos con una barra debajo cuando se refieren a la matriz  $3 \times 3$ , esto es, a la condensación en grupos de 15 años de edad e intervalos de 15 años de tiempo:

$$\underline{\mathbf{M}}\{\underline{\mathbf{K}}^{(0)}\} = \{\underline{\mathbf{K}}^{(1)}\}. \quad (2.2.1)$$

El elemento  $j$ -ésimo de la fila  $i$ -ésimo de  $\mathbf{M}$  es  $m_{ij}$ , y el  $i$ -ésimo elemento de  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$  es  $k_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ , de manera que la forma explícita de (2.2.1) es

$$\begin{bmatrix} \underline{m}_{11} & \underline{m}_{12} & \underline{m}_{13} \\ \underline{m}_{21} & \underline{m}_{22} & \underline{m}_{23} \\ \underline{m}_{31} & \underline{m}_{32} & \underline{m}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1^{(0)} \\ k_2^{(0)} \\ k_3^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \\ k_3^{(1)} \end{Bmatrix}.$$

Los  $m_{ij}$  correspondientes a  $\mathbf{M}^3$  que denominamos  $m_{ij}^{(3)}$  y los  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$ ,  $j = 1, 2, \dots, 9$ , deben satisfacer dos condiciones.

La primera consiste en que, tan aproximadamente como sea posible, el resultado de proyectar por 15 años la población de un grupo quinquenal con la matriz condensada  $\underline{\mathbf{M}}$ , sea igual a la suma de los correspondientes tres grupos quinquenales que resultan de proyectar tres veces (por 5 años cada una) con la matriz  $\mathbf{M}$ . Si  $\{\mathbf{K}^{(3)}\} = \mathbf{M}^3\{\mathbf{K}^{(0)}\}$  tiene que ser equivalente a  $\{\mathbf{K}^{(1)}\} = \underline{\mathbf{M}}\{\mathbf{K}^{(0)}\}$ , entonces

$$\underline{k}_i^{(1)} = k_1^{(3)} + k_2^{(3)} + k_3^{(3)},$$

ya que ambos miembros se refieren a la población bajo 15 años de edad, a 15 años calendario del punto cero. Similarmente para  $k_2^{(1)}$  y  $k_3^{(1)}$ .

La segunda condición es de carácter demográfico, implícita en el envejecimiento de una población cerrada, y consiste en que cada cohorte se traslada al siguiente grupo quinquenal de edades durante el periodo de 15 años de proyección según la matriz pequeña. Hacemos que cada elemento de la matriz pequeña  $\underline{\mathbf{M}}$  dependa sólo del cuadrado correspondiente en la partición de  $\mathbf{M}^3$ ;  $m_{11}$  dependerá sólo de la parte superior izquierda  $3 \times 3$  de  $\mathbf{M}^3$ , y de ninguna manera se verá afectado por los nacimientos y muertes fuera de esa matriz  $3 \times 3$ .

La ecuación que representa las dos condiciones para la parte superior izquierda de las nueve submatrices en que se ha dividido  $\mathbf{M}$  es

$$\begin{aligned} & m_{11}^{(3)}k_1 + m_{12}^{(3)}k_2 + m_{13}^{(3)}k_3 \\ & + m_{21}^{(3)}k_1 + m_{22}^{(3)}k_2 + m_{23}^{(3)}k_3 \\ & + m_{31}^{(3)}k_1 + m_{32}^{(3)}k_2 + m_{33}^{(3)}k_3 \\ & = \underline{m}_{11}(k_1 + k_2 + k_3), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

y resolviendo para  $m_{11}$  tenemos

$$m_{11} = \frac{k_1 \sum_{i=1}^3 m_{i1}^{(s)} + k_2 \sum_{i=1}^3 m_{i2}^{(s)} + k_3 \sum_{i=1}^3 m_{i3}^{(s)}}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (2.2.3)$$

Al resto de las  $m_{ij}$  se aplica un argumento similar,  $i = 1, 2, 3$ , y  $j = 1, 2, 3$ .

El cálculo de  $m_{ij}$  mediante fórmulas equivalentes a (2.2.3), y en consecuencia la construcción de la matriz de  $3 \times 3$   $M$ , requiere ahora sólo una decisión sobre los  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ . Una posibilidad obvia es el uso de  $k_1^{(0)}$ ,  $k_2^{(0)}$ ,  $k_3^{(0)}$ , los tres grupos quinquenales de edad tomados de la población inicial  $\{K^{(0)}\}$ . Sin embargo, esto no cumple con el objetivo de construir matrices de proyección que sólo dependan de la mortalidad y fecundidad, y no de las condiciones iniciales de la distribución por edades, la que se puede considerar como arbitraria o accidental en relación al análisis que estamos haciendo. De allí que hayamos elegido los  $k$  para (2.2.3) como aquella distribución por edades que se habría alcanzado mediante la operación continuada de la matriz  $M$ . Esta se conoce como la población estable (sección 3.1) en la cual los  $k$  sólo están disponibles como múltiplos de una constante, y se ve de la forma de (2.2.3) que nos basta conocerlos en tal forma. No dependen en absoluto de la distribución por edades inicial, aunque serán calculados como  $\{K_t\} = M^t\{K^{(0)}\}$  con  $t = 128$ .

En el cuadro 2.5 se incluye el vector estable  $\{K_1\}$  para los Estados Unidos, 1965, estando sus elementos expresados (arbitrariamente) como porcentajes de la población femenina con menos de 95 años de edad. Considerando estos números como los  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) de (2.2.3) y expresiones similares para los demás elementos de  $M$ , estamos en posición de calcular los elementos  $m_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) de  $M$ . Por ejemplo, el primer elemento de la segunda fila de  $M$  es a partir de (2.2.3) y del cuadro 2.5,

$$\frac{8.29(0.9930) + 7.76(0.9932) + 7.26(0.9909)}{8.29 + 7.76 + 7.26} = 0.9924,$$

como aparece en el cuadro 3.1 para las mujeres de los Estados Unidos, 1965.

En el capítulo 3 ejemplificaremos el análisis matricial con aritmética acerca de  $M^t$ , y luego se estudiará la descomposición de  $M^t$ , la matriz general de proyección sometida a sucesivas multiplicaciones por sí misma. En el capítulo 4 se dirá algo acerca de lo que sucede cuando la matriz no permanece constante de acuerdo a la mortalidad y fecundidad iniciales, sino que se altera (para reflejar el cambio en mortalidad y fecundidad supuesto) en cada premultiplicación sucesiva del vector de la distribución por edades. En los capítulos 5 y 6 los grupos de edades se hacen indefinidamente pequeños, y el sistema (2.1.7) se convierte en una ecuación integral que permite la deducción de algunos resultados no disponibles en la formulación matricial. El capítulo 8 sugiere una variante más en el análisis, la consolidación del conjunto de ecuaciones de primer orden obtenidas bajo la forma  $M\{K^{(t)}\} = \{K^{(t+1)}\}$  en (2.1.7) arriba, en una sola ecuación de orden superior en una variable; compara también éste y los tratamientos anteriores entre sí.



## ANALISIS GENERAL DE LA MATRIZ DE PROYECCION

Habiendo visto cómo la cambiante distribución por edades de una población sujeta a un régimen dado de mortalidad y fecundidad se puede formular mediante un conjunto de ecuaciones lineales de recurrencia, hemos representado ese conjunto como una ecuación matricial, y encontramos un método para condensar la matriz de  $9 \times 9$  en una matriz de  $3 \times 3$ . Este capítulo comienza con un ejemplo aritmético: una matriz de  $3 \times 3$  que se eleva a potencias sucesivas, incluyéndose una descomposición que será útil en un análisis posterior. La fundamentación de estos procedimientos deriva del álgebra matricial común, reseñada en la sección 3.2.

La población posterior a una fecha dada está determinada por: a) la distribución por edades en esa fecha; b) las tasas específicas de fecundidad y mortalidad por edades en esa fecha y c) los cambios posteriores en las tasas de natalidad y mortalidad. La estrategia del análisis consiste en separar estos tres efectos. La utilización de las matrices, especialmente para separar a) y b), se debe principalmente a P. H. Leslie (1945).

### 3.1. UN EJEMPLO NUMERICO PARA LA MATRIZ $3 \times 3$

En el cuadro 3.1 aparece la matriz  $\underline{M}$  que resulta de ecuaciones tales como (2.2.3) para las mujeres estadounidenses, 1965. La interpretación que se puede dar a los elementos es análoga a aquella que se dio para la matriz  $\underline{M}$  del cuadro 2.2:  $m_{11}$ , o sea 0,4271, es el número de niñas vivas al cabo de un periodo de 15 años, que se espera nazcan de una niña que ahora tiene 0-14 años de edad según su último aniversario;  $m_{21}$ , o sea 0,9924, es la probabilidad de supervivencia para los próximos 15 años de una niña de la población inicial de 0-14 años de edad.

La matriz  $\underline{M}$  es de tal naturaleza que al tomar sus potencias se estabiliza (omitimos ahora el subrayado puesto que el argumento que sigue trata sólo de la matriz  $3 \times 3$ ). La segunda potencia corresponde a la proyección a través de 30 años, la tercera a través de 45 años, etc. Podemos ver en forma concreta el significado de la estabilidad examinando el cuadrado de  $\underline{M}$ ,

$$\underline{M}^2 = \begin{bmatrix} 1.0257 & 0.4880 & 0.0544 \\ 0.4238 & 0.8434 & 0.1264 \\ 0.9751 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y el cuadrado de esto, que es  $\underline{M}^4$ :

$$\underline{M}^4 = \begin{bmatrix} 1.3120 & 0.9122 & 0.1175 \\ 0.9154 & 0.9181 & 0.1296 \\ 1.0002 & 0.4759 & 0.0530 \end{bmatrix}.$$

**CUADRO 3.1**  
**MATRIZ CONDENSADA M PARA LAS MUJERES ESTADOUNIDENSES Y OTRAS**  
**TRES POBLACIONES FEMENINAS. APARECEN TAMBIEN**  
**LAS RAICES CARACTERISTICAS\***

ESTADOS UNIDOS 1965*				
0.4271	0.8498	0.1273	$\lambda_1 = 1.2093$	$r_1 = 0.01267$
0.9924	0	0	$\lambda_2 = -0.6154$	$\lambda_3 = -0.1668$
0	0.9826	0		
INGLATERRA Y GALES 1960-62				
0.3391	0.8425	0.1308	$\lambda_1 = 1.1581$	$r_1 = 0.00978$
0.9942	0	0	$\lambda_2 = -0.6479$	$\lambda_3 = -0.1711$
0	0.9875	0		
HUNGRIA 1965				
0.2971	0.4922	0.0486	$\lambda_1 = 0.8993$	$r_1 = -0.00708$
0.9927	0	0	$\lambda_2 = -0.4954$	$\lambda_3 = -0.1067$
0.0	0.9855	0		

Lo anterior está en intervalos de 15 años de edad y tiempo. Usando un procedimiento similar, se calculó la siguiente matriz para proyectar en intervalos decenales:

TAIWAN 1965				
0.0201	0.6838	1.1245	0.3723	0.0371
0.9891	0	0	0	0
0	0.9892	0	0	0
0	0	0.9831	0	0
0	0	0	0.9725	0
$\lambda_1 = 1.3240$		$r_1 = 0.02807$		
$\lambda_2, \lambda_3 = -0.1935 \pm 0.0506i$		$\lambda_4, \lambda_5 = -0.4585 \pm 0.6672i$		

\* Programado por D. Nagnur y P. P. Talwar.

° Nacimientos ajustados.

Los lugares correspondientes a los ceros han sido llenados, y cada vez se da una mejor aproximación hacia la proporcionalidad entre columnas. Elevando de nuevo al cuadrado obtenemos  $M^8$ , y elevando al cuadrado  $M^8$  da  $M^{16}$ :

$$M^{16} = \begin{bmatrix} 12.1886 & 9.6072 & 1.2833 \\ 10.0021 & 7.8846 & 1.0533 \\ 8.1274 & 6.4054 & 0.8556 \end{bmatrix},$$

lo que basta a nuestra necesidad de obtener resultados correctos hasta tres o cuatro decimales.

La matriz  $M^{16}$  es aproximadamente estable, tanto en el sentido de que sus filas son proporcionales entre sí, lo mismo que sus columnas, como en el sentido de que cada potencia mayor es proporcional, elemento por elemento, a  $M^{16}$ . Así, el primer elemento de la primera fila de  $M^{17}$  se obtiene multiplicando la primera fila de  $M$  por la primera columna de  $M^{16}$ , en la forma del producto interno:

$$m_{11}^{(17)} = m_{11}m_{11}^{(16)} + m_{12}m_{21}^{(16)} + m_{13}m_{31}^{(16)},$$

que una vez efectuado da 14.740; la razón de esto al primer elemento de la primera fila de  $M^{16}$

$$m_{11}^{(17)}/m_{11}^{(16)} = 14.740/12.1886 = 1.2093.$$

Un cálculo similar para el primer elemento de la segunda fila da

$$m_{21}^{(17)}/m_{21}^{(16)} = 12.096/10.0021 = 1.2094,$$

o sea, casi lo mismo. Estos valores coincidirían en más lugares decimales si hubiéramos elevado al cuadrado una vez más para obtener  $M^{32}$  y luego hubiéramos tomado la razón  $m_{ij}^{(33)}/m_{ij}^{(32)}$ . Al valor común que toma esta razón en el límite la simbolizaremos por  $\lambda_1$ , y la denominaremos *raíz latente* o *característica principal* de  $M$ , que se conoce también como *valor propio*. El cubo de  $\lambda_1$  obtenido de manera similar directamente de la matriz  $9 \times 9$  para las mujeres estadounidenses en 1965, es 1,2093. La condensación preserva esta raíz, aunque no las demás que se van a determinar abajo.

Teniendo  $M^{16}$  y  $\lambda_1$ , podemos obtener una matriz constante, que no es función del tiempo, dividiendo  $M^{16}$  por  $\lambda_1^{16}$ :

$$Z_1 = \frac{M^{16}}{\lambda_1^{16}} = \begin{bmatrix} 0.5824 & 0.4591 & 0.0613 \\ 0.4779 & 0.3767 & 0.0503 \\ 0.3883 & 0.3061 & 0.0409 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1.2093.$$

Esta es la primera matriz estable, a menudo llamada un *componente espectral*. Se puede pensar en ella como de alguna manera conteniendo aquella parte de la matriz  $M$  asociada con la raíz  $\lambda_1$ , la que *domina* a las demás raíces en el sentido de que éstas son menores en valor absoluto, de modo que desaparecen cuando  $M$  se eleva a potencias sucesivas.

Ahora *deflatamos*  $M$  sacándole la parte asociada con la primera raíz  $\lambda_1$ , siendo  $M - \lambda_1 Z_1$  la matriz deflatada:

$$N = M - \lambda_1 Z_1 = \begin{bmatrix} -0.2772 & 0.2946 & 0.0532 \\ 0.4145 & -0.4556 & -0.0609 \\ -0.4696 & 0.6124 & -0.0494 \end{bmatrix}.$$

A diferencia de  $\mathbf{M}$ , la matriz deflatada  $\mathbf{N}$  contiene términos negativos y positivos, pero puede ser tratada de la misma manera. Al elevarse a potencias tiende a la estabilidad, y en realidad se estabiliza más rápidamente, de modo que sólo necesitamos llegar hasta  $\mathbf{N}^8$ . La segunda raíz característica se determina a partir de  $\mathbf{N}$  mediante la razón de cualquier elemento de la novena potencia al elemento correspondiente de la octava, resultando  $\lambda_2 = -0,6154$ . Usando esto para normalizar la octava potencia encontramos el segundo componente espectral

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{N}^8}{\lambda_2^8} = \begin{bmatrix} 0.4627 & -0.4860 & -0.0957 \\ -0.7461 & 0.7838 & 0.1544 \\ 1.1912 & -1.2513 & -0.2465 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -0.6154,$$

Eliminando de  $\mathbf{N}$  el efecto de esta segunda componente se obtiene la matriz dos veces deflatada  $\mathbf{N} - \lambda_2 \mathbf{Z}_2 = \mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{Z}_1 - \lambda_2 \mathbf{Z}_2$ . Esta resulta ser estable desde el principio, desde su primera potencia y  $\lambda_3$  se puede determinar por medio de la razón de cualquier elemento de su cuadrado al elemento correspondiente de la matriz dos veces deflatada  $\mathbf{N} - \lambda_2 \mathbf{Z}_2$ . Habiendo encontrado que  $\lambda_3 = -0,1668$ , tenemos la tercera y última componente espectral

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{N} - \lambda_2 \mathbf{Z}_2}{\lambda_3} = \begin{bmatrix} -0.0451 & 0.0270 & 0.0344 \\ 0.2682 & -0.1605 & -0.2047 \\ -1.5795 & 0.9452 & 1.2056 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = -0.1668.$$

Las tres componentes  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  y  $\mathbf{Z}_3$  agotan la matriz, no dejando nada en ella. En consecuencia se puede reconstruir cada elemento de  $\mathbf{M}$  sumando los elementos correspondientes de  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  y  $\mathbf{Z}_3$ , cada uno ponderado por su raíz  $\lambda$ ; aritméticamente se puede ver que  $\mathbf{M}$  satisface (sujeto a redondeo):

$$\lambda_1 \mathbf{Z}_1 + \lambda_2 \mathbf{Z}_2 + \lambda_3 \mathbf{Z}_3 = \mathbf{M}.$$

Con respecto a los primeros elementos de la primera fila, por ejemplo, los números son

$$(1.2093)(0.5824) + (-0.6154)(0.4627) + (-0.1668)(-0.0451) = 0.4271,$$

y esto es lo mismo que  $m_{11}$  de la primera matriz que aparece en el cuadro 3.1.

Además la suma de las  $\mathbf{Z}$  dan la matriz identidad:

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = \mathbf{I}.$$

Los primeros elementos de las primeras filas de las tres  $\mathbf{Z}$  suman uno:

$$0.5824 + 0.4627 - 0.0451 = 1.0000,$$

y similarmente para otros conjuntos de elementos diagonales. La suma de elementos que están fuera de la diagonal principal da cero; en el caso de los primeros elementos de las segundas filas, tenemos

$$0.4779 - 0.7461 + 0.2682 = 0.$$

Cuando multiplicamos cualquier par de matrices  $Z$  mediante las reglas de multiplicación matricial que hemos estado aplicando, el producto da cero. Por ejemplo, el producto (interno) de la primera fila de  $Z_1$  y la primera columna de  $Z_2$  es

$$(0.5824)(0.4627) + (0.4591)(-0.7461) + (0.0613)(1.1912) = 0.$$

Las  $Z$  son mutuamente *ortogonales* ya que  $Z_i Z_j = 0$ ,  $i \neq j = 1, 2, 3$ .

La próxima propiedad que nos interesará es que las  $Z$  no se alteran al ser elevadas a potencias. Para convencerse de que  $Z_1^2 = Z_1$ , considere por ejemplo el primer elemento de la primera fila del producto  $Z_1^2$ , obtenido como el producto interno de la primera fila por la primera columna de  $Z_1$ . O sea

$$(0.5824)(0.5824) + (0.4591)(0.4779) + (0.0613)(0.3883) = 0.5824,$$

que es igual al primer elemento de la primera fila de  $Z_1$ . Se dice que las  $Z$  son *idempotentes* debido a que son iguales a sus propias potencias.

El resultado de elevar al cuadrado ambos miembros de

$$M = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3$$

queda simplificado debido a las propiedades de ortogonalidad e idempotencia:

$$M^2 = \lambda_1^2 Z_1 + \lambda_2^2 Z_2 + \lambda_3^2 Z_3,$$

lo que se puede verificar aritméticamente para  $m_{11}^{(2)}$  como:

$$(1.4625)(0.5824) + (0.3788)(0.4627) + (0.0278)(-0.0451) = 1.0257,$$

lo cual concuerda con el elemento superior izquierdo de  $M^2$ . Se obtienen resultados similares para  $M^3$ ,  $M^4$ , etc.

La característica de las  $Z$  que autoriza más claramente para llamarlas estables es que  $MZ_i = \lambda_i Z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Por ejemplo, el primer elemento de la primera fila de  $MZ_1$  es

$$(0.4271)(0.5824) + (0.8498)(0.4779) + (0.1273)(0.3883) = 0.7043,$$

que es igual a  $\lambda_1$  veces 0,5824, el primer elemento de  $Z_1$ . Un aspecto numéricamente diferente (ya que las matrices no son simétricas) de la estabilidad está dado por  $Z_i M$ , que también resulta ser igual a  $\lambda_i Z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Esto ilustra numéricamente algunos aspectos en que las matrices difieren de los números comunes. Estos resultados no son meramente paradójicos, sino que son comprensibles en términos de una teoría matricial perfectamente consistente, cuya forma general es el tema de las últimas secciones del presente capítulo.

La primera de las componentes espectrales  $Z_1$  tiene un interés especial en demografía. Cada una de sus columnas es proporcional a la *población estable*, simbolizada por  $\{K_1\}$ , que es la distribución por edad hacia la que evolucionaría una población cerrada si continuaran indefinidamente sus tasas de fecundidad y mortalidad por edades. Aquellas poblaciones que han estado sujetas a tasas relativamente constantes en el pasado, actualmente tienen distribuciones por edades cercanas a sus  $\{K_1\}$ . La concordancia entre las distribuciones por edades estable y observada atestigüa la constancia del régimen precedente de

**CUADRO 3.2**  
**DISTRIBUCIONES POR EDADES OBSERVADA Y ESTABLE PARA TRES PAISES,**  
**MOSTRANDO EL INDICE DE DISIMILITUD  $\Delta$**

	Porcentaje observado	Porcentaje estable	Estable menos observado
<u>INGLATERRA Y GALES 1960-62</u>			
HOMBRES			
0-14	24.3	27.6	3.3
15-29	20.2	23.7	3.5
30-44	20.6	20.1	-0.5
45+	<u>34.8</u>	<u>28.6</u>	<u>-6.2</u>
TOTAL	100.0	100.0	<u>0.0</u>
			$\Delta = 6.8$
MUJERES			
0-14	21.7	26.3	4.6
15-29	18.5	22.6	4.1
30-44	19.5	19.3	-0.2
45+	<u>40.3</u>	<u>31.8</u>	<u>-8.5</u>
TOTAL	100.0	100.0	<u>0.0</u>
			$\Delta = 8.7$
<u>HONDURAS 1959-61, MUJERES</u>			
0-14	46.3	44.7	-1.6
15-29	25.8	26.3	0.5
30-44	15.2	15.2	0.0
45+	<u>12.6</u>	<u>13.8</u>	<u>1.2</u>
TOTAL	100.00	100.00	<u>0.0</u>
			$\Delta = 1.6$
<u>JAPON 1959-61, MUJERES</u>			
0-14	29.0	18.8	-10.2
15-29	27.2	19.3	-7.9
30-44	20.5	19.7	-0.8
45+	<u>23.3</u>	<u>42.2</u>	<u>18.9</u>
TOTAL	100.0	100.0	<u>0.0</u>
			$\Delta = 18.9$

fecundidad y mortalidad, y una diferencia entre las distribuciones por edades estable y observada demuestra que el régimen ha sido cambiante, o bien que ha habido migración. La población estable tiene significado como un conjunto de proporciones, no de números absolutos.

Las distribuciones porcentuales de las poblaciones estable y observada en los Estados Unidos, 1965, se mostraron en el cuadro 2.5, y el cuadro 3.2 contiene versiones condensadas de otras cuatro distribuciones por edad de poblaciones estables. En Japón, 1959-61, se observa una divergencia extrema respecto a la estabilidad, en tanto que para Honduras las distribuciones estable y observada son casi idénticas. Estas reflejan alteraciones anteriores en las tasas de fecundidad por edad, o ausencia de tales alteraciones. Una medida conveniente de la discrepancia entre las distribuciones estable y observada es  $\Delta$ , la suma de las diferencias positivas de los porcentajes, conocido como *índice de disimilitud*. Con ayuda de la matriz del cuadro 3.1, verifique para las mujeres de Inglaterra y Gales, 1960-62, que la población estable  $\{K_1\}$  del cuadro 3.2 es realmente la población estable puesto que satisface  $M\{K_1\} = \lambda_1\{K_1\}$ ; verifique también el índice de disimilitud mostrado.

### 3.2. ALGEBRA MATRICIAL DEL PROCESO DE PROYECCION

Habiendo trabajado un ejemplo aritmético simple, volvemos sobre nuestros pasos y examinaremos el argumento de un modo más sistemático. El punto de partida es un vector característico o estable, una recta de dirección fija en el espacio de la distribución por edades, definido por la propiedad de no alterarse cuando se lo premultiplica por el operador matricial  $M$ . Para determinarlo resolvemos las ecuaciones lineales  $M\{K\} = \lambda\{K\}$ , o escrito en forma más completa,

$$\begin{aligned} m_{11}k_1 + m_{12}k_2 + \cdots + m_{1n}k_n &= \lambda k_1, \\ m_{21}k_1 + m_{22}k_2 + \cdots + m_{2n}k_n &= \lambda k_2, \\ \vdots & \\ m_{n1}k_1 + m_{n2}k_2 + \cdots + m_{nn}k_n &= \lambda k_n, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde los  $m$  son los elementos de la matriz de proyección  $M$ , y  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son los números de personas en el primer grupo de edad, el segundo grupo de edades, etc., representado como un vector columna  $\{K\}$ . Es típico aplicar la teoría en intervalos quinquenales de edades, en un número  $n$ , extendiéndose desde cero hasta  $\beta = 5n$ , el final del período de reproducción.

Un conjunto de  $k$  que no sean todos ceros y que satisfagan las  $n$  ecuaciones lineales homogéneas de (3.2.1) en  $n$  variables, existe sólo si las diversas ecuaciones son consistentes; esta última condición se obtiene restando  $\lambda k_i$  de ambos miembros de la  $i$ ésima ecuación y escribiendo luego los coeficientes de los  $k$  como un determinante (Chrystal, 1961, Vol. I, pág. 375):

$$\begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.2)$$

Una expresión más compacta de la ecuación característica (3.2.2) es

$$f(\lambda) = |\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = 0,$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz  $n \times n$  con unos en la diagonal y ceros en las celdas restantes.

Debido a que los elementos no nulos de  $\mathbf{M}$  son típicamente  $m_{1j}$ ,  $j = 3, 4, \dots, n$ , y  $m_{i+1,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , podemos evaluar  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = 0$  como

$$\begin{aligned} \lambda^n - m_{21}m_{32}m_{13}\lambda^{n-3} - m_{21}m_{32}m_{43}m_{14}\lambda^{n-4} - \dots \\ - m_{21}m_{32} \dots m_{n,n-1}m_{1n} = 0, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

o explícitamente en términos de la supervivencia  $L_x$  y las tasas de fecundidad por edades  $F_x$ ,

$$f(\lambda) = l_0\lambda^n - \frac{1}{2}(L_{15}F_{15})\lambda^{n-3} - \frac{1}{2}(L_{15}F_{15} + L_{20}F_{20})\lambda^{n-4} - \dots - \frac{1}{2}(L_{6n-5}F_{6n-5}) = 0. \quad (3.2.4)$$

Nos referiremos a esto como Método A (capítulo 11).

La existencia de no más que una raíz positiva de (3.2.3) deriva de la regla de Descartes (Burnside y Panton, 1960, Vol. I, pág. 28) según la cual el número de raíces positivas de una ecuación polinómica no puede ser mayor que el número de cambios de signos en sus coeficientes. Muestre que la ecuación característica de cualquier matriz que tenga ceros en todas partes excepto en su fila superior y subdiagonal tiene sólo un cambio de signo, el que sigue inmediatamente al término que tiene la mayor potencia de  $\lambda$ , independientemente del tamaño de la matriz, si los términos no nulos son positivos.

Las ecuaciones polinómicas tal como (3.2.4) se pueden resolver mediante diversos procedimientos iterativos. Especialmente fácil de programar es el método de la secante (Ralston, 1965, pág. 323). De acuerdo a este método, si  $\lambda'$  y  $\lambda''$  son dos aproximaciones a una raíz de  $f(\lambda) = 0$ , entonces la recta que pasa por los puntos  $[\lambda', f(\lambda')]$  y  $[\lambda'', f(\lambda'')]$  se intersecta con la abscisa en que

$$\frac{0 - f(\lambda'')}{f(\lambda'') - f(\lambda')} = \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda'' - \lambda'}, \quad \text{o} \quad \lambda = \lambda'' - \frac{\lambda'' - \lambda'}{f(\lambda'') - f(\lambda')} f(\lambda''),$$

la cual constituye una mejor aproximación y se puede simbolizar  $\lambda'''$ . Basta con unas cinco iteraciones para evaluar  $\lambda_1$ , la raíz real dominante, la cual casi no depende del punto de que partan las aproximaciones iniciales.

La ecuación (3.2.3) para la primera matriz  $3 \times 3$  del cuadro 3.1 es

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 0.4271\lambda^2 - 0.8433\lambda - 0.1241 = 0.$$

Se puede verificar que  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  efectivamente satisfacen esta ecuación. La ecuación característica (3.2.4) para los datos de los Estados Unidos en 1964 (véase cuadro 2.1) es

$$\begin{aligned} \lambda^{10} - 0.00102\lambda^8 - 0.08735\lambda^7 - 0.34624\lambda^6 - \dots - 0.01678\lambda \\ - 0.00091 = 0, \end{aligned}$$



donde los coeficientes han sido sacados de la columna del cuadro designada por  $({}_5\phi_x + {}_5\phi_{x+5})/2$ . Usando el método de la secante y comenzando con los valores arbitrarios  $\lambda' = 1,05$  y  $\lambda'' = 1,10$ , obtenemos  $f(1,05) = -0,27363$  y  $f(1,10) = 0,21368$ . Entonces  $\lambda'''$  es 1,07808. Tres iteraciones más nos llevan a  $\lambda = 1,08184$ , que es correcto hasta los lugares decimales que aparecen. Para las raíces complejas se puede utilizar el mismo método, y se ha ideado un programa para investigar el plano de  $\lambda$ , el cual a su debido tiempo determina todas las raíces. Un problema consiste en encontrar puntos de partida para las iteraciones que converjan a las raíces sucesivas sistemáticamente, y que no caigan repetidamente en las raíces anteriores (Coale, 1967). Cada raíz, al ser descubierta, puede descartarse, y la siguiente raíz se puede entonces localizar mediante la ecuación reducida. Por supuesto, debemos evitar el error de redondeo, y para hacer esto se debería usar la ecuación original completa para la iteración final sobre cada raíz.

Se han aplicado también programas para los valores propios de una matriz general; sin embargo, estos programas efectúan extensos cálculos para llevar el determinante a la forma (3.2.3), lo cual es una operación muy simple en el caso de nuestra matriz  $M$  cuyos términos no nulos están en la fila superior y en la subdiagonal. En la sección 3.1 se usó otro enfoque iterativo para las  $\lambda$ , los vectores estables, y las matrices estables; en la sección 3.3 extendemos esto a raíces complejas, basados en la teoría que se desarrolla abajo. En la sección 5.3 se dan más métodos que también son aplicables aquí y uno recomendado especialmente es la iteración funcional de (5.3.5), para el cual un programa Fortran se muestra en el cuadro 5.10.

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$  las raíces para una matriz de proyección de  $9 \times 9$ . Las correspondientes a México y los Estados Unidos, en ambos casos para mujeres en 1960, se dan en el cuadro 3.3. La raíz dominante  $\lambda_1$  es la proporción en que la población crece cada cinco años, cuando el efecto de la distribución inicial por edades ha desaparecido; el  $\lambda_1$  de México corresponde a un crecimiento quinquenal dos tercios mayor que el de los Estados Unidos. Se mostrará (sección 3.4 y capítulos 5 y 6) que la segunda y tercera raíces dan una componente armónica amortiguada, cuyo período es el largo de una generación, 25 a 30 años. El gráfico 8.1 presenta una configuración típica de las raíces en el plano complejo.

### Vectores columna estables o vectores característicos

Cuando reemplazamos  $\lambda$  en el sistema (3.2.1) por una raíz específica, digamos  $\lambda_j$ , podemos encontrar una solución en los  $k$ , que tendría la forma

$$\{K_j\} = \begin{Bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{nj} \end{Bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

que está especificada, excepto en cuanto a la multiplicación por un factor arbitrario, y donde la  $j$  se incluye como el segundo subíndice para recordar que el vector pertenece a la  $j$ ésima raíz. Los elementos de  $\{K_j\}$  son proporcionales a los cofactores de cualquier raíz de  $M - \lambda_j I$  (Frazer, Duncan y Collar, 1963, pág. 65), pero este método general para determinar los cofactores no es necesario para la matriz particular  $M$  que estamos tratando.

**CUADRO 3.3**  
**ECUACIONES CARACTERISTICAS Y RAICES LATENTES  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ , PARA LA POBLACION FEMENINA, MEXICO Y ESTADOS UNIDOS, 1960**

ECUACIONES CARACTERISTICAS $ \underline{M} - \lambda \underline{I}  = 0$		
MEXICO, 1960:	$ \underline{M} - \lambda \underline{I}  = \lambda^9 - 0.0008\lambda^7 - 0.1085\lambda^6 - 0.4144\lambda^5 - 0.6230\lambda^4 - 0.5840\lambda^3 - 0.4604\lambda^2 - 0.2800\lambda - 0.0872 = 0,$	
U. S., 1960:	$ \underline{M} - \lambda \underline{I}  = \lambda^9 - 0.0010\lambda^7 - 0.1066\lambda^6 - 0.4115\lambda^5 - 0.5408\lambda^4 - 0.3685\lambda^3 - 0.1998\lambda^2 - 0.0842\lambda - 0.0202 = 0.$	
	R A I C E S	
	México <sup>a</sup>	Estados Unidos <sup>b</sup>
$\lambda_1$	1.18167	1.11183
$\lambda_2, \lambda_3$	$0.4412 \pm 0.7911i$	$0.3016 \pm 0.7974i$
$\lambda_4, \lambda_5$	$0.0037 \pm 0.7344i$	$0.0347 \pm 0.5379i$
$\lambda_6, \lambda_7$	$-0.4477 \pm 0.4925i$	$-0.4019 \pm 0.3899i$
$\lambda_8, \lambda_9$	$-0.5881 \pm 0.1747i$	$-0.4903 \pm 0.1845i$

Para reducir la matriz al tamaño  $9 \times 9$ , se asignó la fecundidad en las edades 45 y más, a las mujeres de 40-44 años. Observe las diferencias con las raíces de los Estados Unidos del primer caso del cuadro 8.2, que considera la fecundidad hasta los 49 años.

<sup>a</sup> Se han corregido las edades censales 0-4 años.

<sup>b</sup> Nacimientos ajustados.

Nuestros vectores estables se calculan fácilmente mediante relaciones de recurrencia deducidas a partir de  $\underline{M}$  y de los  $\lambda_j$ . Debido a que los elementos no nulos de  $\underline{M}$  que vienen al caso están en la subdiagonal, resulta para la  $j$ ésima raíz, de acuerdo a la multiplicación de fila por columna en la ecuación

$$\underline{M}\{K_j\} = \lambda_j\{K_j\},$$

que

$$m_{i+1,i}k_i = \lambda_j k_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

y dividiendo por  $\lambda_j$  tenemos

$$k_{i+1} = \frac{m_{i+1,i}k_i}{\lambda_j} = \frac{{}_5L_{5i}k_i}{\lambda_j {}_5L_{5i-5}}, \quad (3.2.5)$$

ya que los elementos subdiagonales  $m_{i+1,i}$  son las probabilidades de sobrevivir durante cinco años.

Si tomamos arbitrariamente  $k_1$  como  ${}_0L_0/\sqrt{\lambda_j}$ , y aplicamos (3.2.5) sucesivamente, entonces el vector estable correspondiente a  $\lambda_j$  es

$$\{\mathbf{K}_j\} = \left\{ \begin{array}{l} {}_0L_0 \lambda_j^{-1/2} \\ {}_0L_1 \lambda_j^{-3/2} \\ {}_0L_2 \lambda_j^{-5/2} \\ \vdots \\ {}_0L_{n-1} \lambda_j^{-(n-1/2)} \end{array} \right\}, \quad (3.2.6)$$

para la tabla de vida de raíz  $l_0$ . El primero de los  $n$  vectores  $\{\mathbf{K}_j\}$  es la población estable, determinado sólo dentro de una constante multiplicativa, de lo cual aparecen ejemplos abreviados en el cuadro 3.2.

Si se disponen los  $\{\mathbf{K}_j\}$  uno al lado del otro para constituir una matriz, tenemos

$$\mathbf{K} = [\{\mathbf{K}_1\} \quad \{\mathbf{K}_2\} \cdots \{\mathbf{K}_n\}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.2.7)$$

utilizando enseguida el hecho de que las columnas componentes de la matriz  $\mathbf{K}$  son  $\{\mathbf{K}_j\}$ , y que  $\mathbf{M}\{\mathbf{K}_j\} = \{\mathbf{K}_j\}\lambda_j$ ; el lector puede verificar que

$$\mathbf{MK} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (3.2.8)$$

o

$$\mathbf{MK} = \mathbf{KA},$$

donde  $\mathbf{A}$  representa la matriz diagonal formada por las raíces de la ecuación característica. Postmultiplicando por  $\mathbf{K}^{-1}$  obtenemos de (3.2.8):

$$\mathbf{M} = \mathbf{KAK}^{-1}. \quad (3.2.9)$$

En las aplicaciones demográficas, las raíces  $\lambda_i$  son siempre distintas. Esto es cierto, al menos empíricamente, aunque las condiciones bajo las cuales es cierto matemáticamente no son expresables en forma elemental. Del hecho de que las raíces sean distintas resulta la independencia de los vectores (Ralston, 1965, pág. 470). Para ilustrar supongamos que dos vectores  $\{\mathbf{K}_1\}$  y  $\{\mathbf{K}_2\}$  no son independientes, o sea, están en una relación lineal

$$a_1\{\mathbf{K}_1\} + a_2\{\mathbf{K}_2\} = \mathbf{0}, \quad (3.2.10)$$

en la cual  $a_1$  y  $a_2$  no son ambos cero. Premultiplicando por  $\mathbf{M}$  obtenemos

$$a_1\lambda_1\{\mathbf{K}_1\} + a_2\lambda_2\{\mathbf{K}_2\} = \mathbf{0}. \quad (3.2.11)$$

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , las ecuaciones (3.2.10) y (3.2.11) se pueden satisfacer simultáneamente sólo si  $a_1 = a_2 = 0$ ; esto prueba que (3.2.10) no puede regir para valores de  $a_1$

y  $a_2$  distintos de cero y en consecuencia, que  $\{K_1\}$  y  $\{K_2\}$  son linealmente independientes. Por inducción se puede extender la propiedad al conjunto de  $n$  vectores. Siendo las columnas de  $K$  linealmente independientes, su determinante no puede ser cero, y de allí que la matriz inversa  $K^{-1}$  siempre existe.

La factorización de  $M$  descrita por (3.2.9) conduce fácilmente a la factorización de cualquier potencia de  $M$ . Para

$$M^t = (KAK^{-1})(KAK^{-1}) = KA(K^{-1}K)AK^{-1} = KA^tK^{-1},$$

y repitiendo la multiplicación se prueba que

$$M^t = KA^tK^{-1} \quad (3.2.12)$$

si  $t > 0$  es un entero. Por eso, dados  $K$  y  $K^{-1}$ , lo único que necesitamos para elevar  $M$  a potencia es elevar  $A$ , cuyas potencias se calculan como

$$A^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix}.$$

Como veremos, esto nos ayudará en la teoría posterior. Su uso práctico en la computación manual está restringido por el hecho de que las columnas de  $K$ , excepto  $\{K_1\}$  son en general complejas, y también lo son las filas de  $K^{-1}$ , excepto la primera.

Todo lo anterior se puede también decir para la premultiplicación por un nuevo conjunto de vectores fila  $[H]$ . Correspondientemente a (3.2.1) tendríamos  $[H]M = \lambda[H]$ , y la condición de consistencia es la misma ecuación en  $\lambda$ ,  $|M - \lambda I| = 0$ , produciendo las mismas raíces latentes. Para cada raíz característica  $\lambda_i$  encontramos  $[H_i]$ , determinado excepto para un factor constante mediante el conjunto de ecuaciones lineales

$$[h_{i1} \ h_{i2} \ \dots \ h_{in}] \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} = \lambda_i [h_{i1} \ h_{i2} \ \dots \ h_{in}], \quad (3.2.13)$$

o más compactamente

$$[H_i]M = \lambda_i[H_i].$$

### Valor reproductivo

Las ecuaciones de recurrencia para los elementos sucesivos del vector fila estable se pueden obtener de manera similar que para el vector columna, aunque las ecuaciones son un poco más complicadas que (3.2.5). Tanto  $m_{1j}$  como  $m_{j+1,j}$  pueden ser distintos de cero, y el elemento típico del conjunto (3.2.13) para la  $i$ ésima raíz (omitiendo el subíndice  $i$ ) es

$$h_1 m_{1k} + h_{k+1} m_{k+1,k} = \lambda h_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Una de las  $h$  la podemos elegir nosotros, y  $h_1$  se puede hacer igual a la unidad para obtener

$$h_{k+1} = \frac{\lambda h_k - m_{1k}}{m_{k+1,k}} = \frac{{}_5L_{5k-5}}{{}_5L_{5k}} (\lambda h_k - m_{1k}).$$

Esta ecuación de recurrencia se ha usado para los cálculos.

Para estudiar el significado de los  $h_k$ , es más provechoso un arreglo alternativo que comienza en la mayor edad de reproducción y que usa el hecho de que  $h_{n+1} = 0$ . Haciendo que  $h_1$  sea arbitrariamente igual a  $5l_0\sqrt{\lambda}/{}_5L_0$ , tenemos de (3.2.13)

$$h_k = \left( \frac{{}_5L_{5k}}{{}_5L_{5k-5}} \right) \left( \frac{h_{k+1}}{\lambda} \right) + \frac{5l_0}{{}_5L_0\sqrt{\lambda}} m_{1k}. \quad (3.2.14)$$

Dicho con palabras:  $h_k$ , el valor reproductivo para las edades que van desde  $5k-5$  hasta  $5k$ , es igual a la probabilidad de sobrevivir 5 años, multiplicado por el valor reproductivo  $h_{k+1}$  para las edades que van desde  $5k$  hasta  $5k+5$ , descontado sobre 5 años dividiendo por  $\lambda$ ; el total agregado a los nacimientos esperados en el próximo intervalo de 5 años, descontado sobre 2.5 años dividiendo por  $\sqrt{\lambda}$ . Por ejemplo, podemos construir el valor reproductivo para 25-29 años mediante

$${}_5H_{25} = \left( \frac{{}_5L_{30}}{{}_5L_{25}} \right) \left( \frac{{}_5H_{30}}{\lambda} \right) + \frac{5l_0}{{}_5L_0\sqrt{\lambda}} m_{1,6},$$

donde  ${}_5H_{25}$  (análogo a  ${}_5L_{25}$  y  ${}_5K_{25}$ ) es lo mismo que  $h_6$ , y  $m_{1,6}$  es el sexto elemento de la primera fila de  $\mathbf{M}$ . Con los datos de los cuadros 2.1 y 2.2 para las mujeres de los Estados Unidos, 1964, cuyo  $\lambda$  es 1,0818, esto se convierte en

$${}_5H_{25} = (0.9947) \left( \frac{0.264}{1.0818} \right) + \frac{5(0.3377)}{(4.8897)(1.0401)} = 0.243 + 0.332 = 0.575,$$

como se muestra en el cuadro 3.4.

El vector característico real  $[\mathbf{H}_1]$  es la versión discreta del valor reproductivo de una mujer desarrollado por R. A. Fisher, 1930, pág. 29,  $v(x)$ , definido como

$$v(x) = \frac{1}{l_x} \int_x^\beta \lambda_1^{-(a-x)/5} l(a)m(a) da, \quad (3.2.15)$$

donde  $m(a)da$  es la probabilidad que tiene una mujer con edad entre  $a$  y  $a+da$  años, de tener un nacido vivo. Igual que antes, para una mujer de edad dada, el valor reproductivo es el número esperado total de niñas que nacerían, cuando rige la función de fecundidad neta  $p(a)m(a)$ , descontada a la tasa intrínseca de crecimiento natural  $r$ , donde  $e^{5r} = \lambda$ , o sea,  $r = (\ln \lambda)/5$ . Estudiamos la definición (3.2.15) en el contexto del tratamiento continuo en la sección 5.2. Demuestre que la parte de la columna para  $[\mathbf{H}_1]$  correspondiente a las edades menores que las de reproducción es proporcional al recíproco de la población estable  $\{K_1\}$ . Verifique  $[\mathbf{H}_1]$  para las mujeres de los Estados Unidos, 1964, con la matriz del cuadro 2.2, usando la ecuación  $[\mathbf{H}_1]\mathbf{M} = \lambda_1[\mathbf{H}_1]$ , con  $\lambda_1 = 1,08184$ .

**CUADRO 3.4**  
**VALOR REPRODUCTIVO  $[H_1]$  Y  $[H_1]\{K^{(0)}\}$  PARA CHILE, ALEMANIA OCCIDENTAL**  
**Y LOS ESTADOS UNIDOS, 1964**

	Chile, 1964 Mujeres	República Federal Alemana, 1964 Mujeres	Estados Unidos, 1964	
			Mujeres	Hombres
VALOR REPRODUCTIVO POR NIÑO RECIEN NACIDO				
0-4	1.186	1.040	1.063	1.075
5-9	1.347	1.076	1.154	1.178
10-14	1.503	1.111	1.250	1.289
15-19	1.581	1.121	1.261	1.391
20-24	1.406	0.975	0.997	1.276
25-29	1.029	0.638	0.575	0.884
30-34	0.633	0.305	0.264	0.487
35-39	0.297	0.108	0.091	0.230
40-44	0.088	0.025	0.018	0.094
45-49	0.014	0.002	0.001	0.035
50-54	0.002	0.000	0.000	0.010
VALOR REPRODUCTIVO AGREGADO (En miles)				
0-4	736	2,495	10,779	10,895
5-9	733	2,209	11,550	11,790
10-14	736	2,118	11,329	11,687
15-19	659	1,926	10,148	11,187
20-24	520	2,139	6,526	8,352
25-29	319	1,436	3,225	4,964
30-34	178	558	1,486	2,742
35-39	75	219	565	1,423
40-44	19	56	114	599
45-49	2	4	5	204
50-54	0	0	0	52
TOTAL = $\frac{V}{1000} = \frac{[H_1]\{K^{(0)}\}}{1000}$	3,976	13,160	55,728	63,896

El vector fila estable  $[H_1]$  junto con la distribución por edades nos informan acerca del potencial reproductivo de una población. Desde este punto de vista podríamos comparar dos distribuciones por edades observadas aplicándoles un  $[H_1]$  común (Vincent, 1945). El valor reproductivo agregado se obtiene multiplicando los valores unitarios por el número de mujeres, y se puede escribir  $V = [H_1]\{K^{(0)}\}$ . Utilice la distribución de la población  $\{K^{(0)}\}$  del cuadro 2.1 junto con los valores unitarios en el cuadro 3.4 para verificar que  $V = 55\,728\,000$  para las mujeres de los Estados Unidos, 1964.

El cuadro 3.4 permite un examen del valor reproductivo por edades para poblaciones con diferentes tasas de crecimiento. El valor por cada mujer se eleva a un máximo en los 15-19 años de edad en los tres países. La baja que se produce después que comienza la reproducción es más rápida para los Estados Unidos que para Chile; ¿a qué característica de la fecundidad de los Estados Unidos se debe esto? ¿Por qué la República Federal Alemana muestra un valor reproductivo femenino total mayor en el grupo 20-24 que en el de 15-19?

Al igual que para otros aspectos del modelo de un sexo, la matriz de proyección, y en consecuencia sus vectores estables, son tan apropiados para hombres como para mujeres. El cuadro 3.4 incluye  $[H_1]$  para los hombres de los Estados Unidos, 1964, tomando como unidad un niño recién nacido. Observe las diferencias entre las distribuciones para hombres y mujeres, notando el hecho de que los hombres alcanzan un máximo más alto y conservan el valor reproductivo hasta una edad mayor.

#### Factores de M y análisis de una distribución por edades observada

A cada uno de los  $\lambda_i$  corresponde un vector fila estable  $[H_i]$ , y si disponemos los  $[H_i]$  uno debajo del otro para formar

$$H = \begin{Bmatrix} [H_1] \\ [H_2] \\ \vdots \\ [H_n] \end{Bmatrix},$$

entonces

$$HM = \Delta H.$$

Premultiplicando por  $H^{-1}$  se obtiene

$$M = H^{-1}\Delta H, \quad (3.2.16)$$

siendo ésta la misma ecuación que (3.2.9), puesto que  $HK = I$ , como se demuestra abajo.

Los vectores estables los conocemos sólo dentro de una constante multiplicativa. Si tal como se calculó originalmente, el vector columna para la  $i$ ésima raíz es  $\{K_i\}$ , y el vector fila para la misma raíz es  $[H_i]$ , entonces puede ser conveniente normalizar por el divisor  $[H_i]\{K_i\}$  escribiendo

$$[\bar{H}_i] = \frac{[H_i]}{[H_i]\{K_i\}}. \quad (3.2.17)$$

Cuando  $[\bar{H}_i]$  se toma de (3.2.17), e  $i = j$ , el producto  $[\bar{H}_i]\{K_j\}$  es 1.

Los vectores estables poseen una propiedad de ortogonalidad por la cual si  $i \neq j$ , entonces  $[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{K}_j\} = 0$ . Pues

$$\mathbf{M}\{\mathbf{K}_j\} = \lambda_j\{\mathbf{K}_j\}, \quad (3.2.18)$$

por la definición del vector columna estable. Premultiplicando (3.2.18) por  $[\mathbf{H}_i]$  tenemos

$$[\mathbf{H}_i]\mathbf{M}\{\mathbf{K}_j\} = \lambda_j[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{K}_j\}. \quad (3.2.19)$$

Pero por la definición de vector fila estable es también cierto que

$$[\mathbf{H}_i]\mathbf{M} = \lambda_i[\mathbf{H}_i]. \quad (3.2.20)$$

Postmultiplicando (3.2.20) por  $\{\mathbf{K}_j\}$  obtenemos

$$[\mathbf{H}_i]\mathbf{M}\{\mathbf{K}_j\} = \lambda_i[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{K}_j\}. \quad (3.2.21)$$

Las ecuaciones (3.2.19) y (3.2.21) tienen el mismo primer miembro, y difieren en que en el segundo miembro aparecen los escalares  $\lambda_j$  y  $\lambda_i$  respectivamente, donde  $\lambda_j \neq \lambda_i$ . Restando (3.2.21) de (3.2.19) y dividiendo por  $\lambda_j - \lambda_i$  queda

$$[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{K}_j\} = 0, \quad i \neq j. \quad (3.2.22)$$

Este hecho nos permite expresar una distribución por edades observada, por ejemplo la columna de frecuencias  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$  obtenida de un censo, como suma de los vectores estables, multiplicado cada uno por una constante:

$$\{\mathbf{K}^{(0)}\} = c_1\{\mathbf{K}_1\} + c_2\{\mathbf{K}_2\} + \dots + c_n\{\mathbf{K}_n\}. \quad (3.2.23)$$

Para determinar  $c_i$  hay que premultiplicar (3.2.23) por el vector fila normalizado  $[\bar{\mathbf{H}}_i]$ ; el resultado es

$$[\bar{\mathbf{H}}_i]\{\mathbf{K}^{(0)}\} = c_i, \quad (3.2.24)$$

o en términos de los vectores no normalizados

$$c_i = \frac{[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{K}^{(0)}\}}{[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{K}_i\}}. \quad (3.2.25)$$

El desarrollo (3.2.23) es un medio para analizar los cambios que se producen en la distribución por edades bajo un régimen de fecundidad y mortalidad dado. Premultiplicando (3.2.23) por  $\mathbf{M}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\mathbf{K}^{(0)}\} &= c_1\mathbf{M}\{\mathbf{K}_1\} + c_2\mathbf{M}\{\mathbf{K}_2\} + \dots + c_n\mathbf{M}\{\mathbf{K}_n\} \\ &= \lambda_1c_1\{\mathbf{K}_1\} + \lambda_2c_2\{\mathbf{K}_2\} + \dots + \lambda_nc_n\{\mathbf{K}_n\}, \end{aligned}$$

puesto que  $\mathbf{M}\{\mathbf{K}_1\} = \lambda_1\{\mathbf{K}_1\}$ , etc., y repitiendo  $t$  veces la multiplicación,

$$\{\mathbf{K}^{(t)}\} = \mathbf{M}^t\{\mathbf{K}^{(0)}\} = \lambda_1^t c_1\{\mathbf{K}_1\} + \lambda_2^t c_2\{\mathbf{K}_2\} + \dots + \lambda_n^t c_n\{\mathbf{K}_n\}, \quad (3.2.26)$$

donde  $t > 0$  es entero.

La matriz  $3 \times 3$  de la sección 3.1 y sus  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  y  $\mathbf{Z}_3$  nos permite aplicar (3.2.23) para descomponer los grupos de edades observados de amplitud 15 años con una calculadora de escritorio. La población de los Estados Unidos en 1965 incluía 29 413 000 niñas menores de 15 años; 20 886 000 mujeres de 15-29 años;



18 040 000 mujeres de 30-44 años. Usando como el  $\{K_i\}$  estable,  $i = 1, 2, 3$ , la primera columna de  $Z_1$ , y como  $[H_i]$  la primera fila de  $Z_4$ , e introduciendo éstos en (3.2.25), da  $c_1 = 47\,776\,000$ ;  $c_2 = 3\,744\,000$ ;  $c_3 = 3\,149\,000$ . Por ejemplo

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{[H_1]\{K^{(0)}\}}{[H_1]\{K_1\}} \\ &= 1000 \frac{(0.5824)(29,413) + (0.4591)(20,886) + (0.0613)(18,040)}{(0.5824)(0.5824) + (0.4591)(0.4779) + (0.0613)(0.3883)} \\ &= 47,776,000. \end{aligned}$$

La ecuación (3.2.23) es entonces, en miles

$$\begin{pmatrix} 29,413 \\ 20,886 \\ 18,040 \end{pmatrix} = 47,776 \begin{pmatrix} 0.5824 \\ 0.4779 \\ 0.3883 \end{pmatrix} + 3744 \begin{pmatrix} 0.4627 \\ -0.7461 \\ 1.1912 \end{pmatrix} + 3149 \begin{pmatrix} -0.0451 \\ 0.2682 \\ -1.5795 \end{pmatrix},$$

sujeito a errores de redondeo. Muestre la descomposición (3.2.26) despues de 15 años, o sea, con  $t = 1$ .

Supongamos, como antes, que  $[H_1]$  ha sido multiplicado por un factor que transforma su primer elemento en  $(5l_0/5L_0)\sqrt{\lambda_1}$ ; entonces es consistente con una unidad de valor reproductivo igual a una niña recién nacida (o un niño recién nacido si el cálculo es para hombres). Supongamos, en forma arbitraria nuevamente, que  $\{K_1\}$  se ha multiplicado por un factor que lo hace en total igual a la unidad. Entonces, como en el cuadro 3.4, el valor reproductivo total es  $[H_1]\{K^{(0)}\}$ , y podemos definir el valor reproductivo por persona en la distribución estable por edades  $A = [H_1]\{K_1\}$ . El lector familiarizado con el argumento de la sección 5.2 puede demostrar para el caso continuo que  $A$  es el producto de la tasa de natalidad por la edad media de las madres, cuando ambos se toman de la población estable. Goodman (1967c) ha logrado la parte más difícil, como es la demostración de esto para el caso discreto del presente capítulo.

Con estas definiciones podemos decir que  $c_1$  de (3.2.25) es igual a  $V/A$ , y con la definición usada para  $\{K_1\}$  por la cual su total es igual a la unidad,  $c_1$ , a la luz de (3.2.26), se puede llamar población *estable equivalente*. Después que ha pasado un tiempo suficientemente largo (en la práctica 50 a 100 años), sólo cuenta el primer término de (3.2.26), el que se puede escribir con nuestros vectores

$$\{K^{(t)}\} = \lambda_1^t c_1 \{K_1\}.$$

El total de los elementos de  $\{K_1\}$  es la unidad y en consecuencia, la población de todas las edades en el momento  $t$  es  $c_1 \lambda_1^t$  basado en una proyección con tasas fijas. Se puede ver la exactitud de la aproximación para las mujeres de los Estados Unidos en 1964, en que  $c_1 \lambda_1^{20} = 91\,655(1.08184)^{20} = 442$  millones, en tanto que la proyección completa al cabo de 100 años,  $M^{20}\{K^{(0)}\}$ , totaliza 442,1 millones.

Esto justifica que nos refiramos a  $c_1$  como la población estable equivalente; es el total que, si se distribuye de acuerdo a la distribución estable por edades, aumentaría bajo el régimen de mortalidad y fecundidad dado, a la misma tasa que el  $\{K^{(0)}\}$  observado, proyectado según la matriz  $M$  como  $M^t\{K^{(0)}\}$ . La razón  $M^t\{K^{(0)}\}/\lambda_1^t c_1$  es asintóticamente igual al vector  $\{K_1\}$  cuyos elementos suman 1.

**CUADRO 3.5**  
**POBLACION K, VALOR REPRODUCTIVO TOTAL V, VALOR REPRODUCTIVO MEDIO**  
**EN LA POBLACION ESTABLE A, Y EQUIVALENTE ESTABLE  $c_1$**

	Población $K/1\ 000$	Valor reproductivo $V/1\ 000$	Valor medio estable $A = V/c_1$	Equivalente estable $c_1/1\ 000$
<b>MUJERES</b>				
Australia, 1965	5,632	3,186	0.56	5,659
Bulgaria, 1964	4,076	1,665	0.34	4,888
Canadá, 1965	9,479	5,995	0.61	9,839
Chile, 1964	4,280	3,976	0.89	4,452
Grecia, 1965	4,393	2,057	0.40	5,185
Honduras, 1965	1,148	1,353	1.15	1,174
Hungría, 1964	5,231	1,889	0.27	7,011
Mauricio, 1965	369	387	1.07	363
Portugal, 1965	4,805	2,942	0.60	4,890
Taiwán, 1965	6,049	5,888	0.94	6,294
Estados Unidos, 1964	97,379	55,728	0.61	91,655
<b>HOMBRES</b>				
Chile, 1964	4,111	4,805	1.18	4,088
Hungría, 1964	4,889	2,306	0.39	5,901
Estados Unidos, 1964	93,990	63,896	0.75	85,713

Las cantidades a que se hace referencia se muestran en el cuadro 3.5 para 14 poblaciones, 11 femeninas y 3 masculinas. El hecho de que  $c_1$  sea mayor que  $K$  para Bulgaria y Hungría se debe a sus recientes descensos en la fecundidad, lo que los deja con distribuciones por edades temporariamente favorables a la reproducción. Los Estados Unidos están en la posición opuesta; adolece de un vacío en las edades fértiles, lo cual se ve en el cuadro 3.5 tanto para hombres como para mujeres.

#### Matrices no negativas

La matriz  $M$  con que estamos tratando es del tipo que Frobenius (1912) llamaba *no negativa*, es decir, sus elementos son todos positivos o cero. Aquellas matrices no negativas que después de una permutación de filas y de las correspondientes columnas se pueden escribir en la forma

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  son matrices cuadradas, se llaman *reducibles*; todas las demás son *irreducibles*. La matriz  $\mathbf{L}$  de la proyección completa, introducida en el capítulo 2, es reducible;  $\mathbf{M}$ , en la cual el último elemento de la fila superior es positivo, es irreducible.

Se citarán aquí algunas propiedades de las matrices no negativas irreducibles que son de interés para la demografía. Para las demostraciones se recomienda al lector leer a Gantmacher (1959, Vol. II, capítulo 13). Primero, una matriz irreducible tiene siempre una raíz característica  $\lambda_1$  real positiva; los valores absolutos de las demás raíces son menores o iguales a  $\lambda_1$ , lo que equivale a decir que las demás raíces son, o bien complejas, o menores que  $\lambda_1$ . Segundo, a  $\lambda_1$  le corresponde un vector característico  $\{\mathbf{K}_1\}$  cuyos elementos son no negativos; no existe otro vector característico con elementos no negativos, salvo los múltiplos de  $\{\mathbf{K}_1\}$ .

La matriz  $\mathbf{M}$  que se usa en demografía cae en una subclase restringida de matrices no negativas irreducibles: aquellas que son *primitivas*, es decir, que no tienen ninguna otra raíz cuyo valor absoluto sea igual al de la única raíz positiva  $\lambda_1$ . Una matriz primitiva se puede reconocer mediante las potencias de  $\lambda$  en su ecuación característica  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ , que es de grado  $n$  si  $\mathbf{M}$  es  $n \times n$ . Si  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = 0$  contiene términos en  $\lambda^{n_1}$  y  $\lambda^{n_2}$ , con coeficientes distintos de cero, y tal que  $n - n_1$  y  $n - n_2$  no tengan factor común mayor que 1, entonces  $\mathbf{M}$  es una matriz primitiva. Nuestra matriz  $\mathbf{M}$  satisface esta condición, como se puede ver por inspección de (3.2.3), sólo a condición de que existan al menos dos edades de fecundidad no nula en las posiciones de la primera fila que son números primos relativos (Bernardelli, 1941). Una matriz primitiva elevada a una potencia suficientemente alta se convierte en matriz positiva, es decir, todos sus elementos son mayores que cero. (En la sección 4.5 bosquejaremos un método de demostración de esto, para nuestra matriz  $\mathbf{M}$ ).

Por lo tanto, algunas de las propiedades importantes de  $\mathbf{M}$  surgen debido a que es una matriz no negativa, irreducible y primitiva. En particular, la raíz real que llamamos dominante,  $\lambda_1$ , excede en valor absoluto a las demás raíces. (La regla de Descartes aplicada a (3.2.3) nos permitió afirmar que no existe otra raíz positiva fuera de  $\lambda_1$ .)

Debido a que  $\lambda_1$  es, en valor absoluto, mayor que cualquiera de las demás  $\lambda$ , el primer término del segundo miembro de (3.2.26) aumentará en magnitud relativa cuando crece  $t$ . La distribución por edades  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$  premultiplicada por  $\mathbf{M}^t$  se acercará más y más a  $c_1 \lambda_1^t \{\mathbf{K}_1\}$ , que se denomina población estable y no depende de la distribución por edades original  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$ . Esta es la propiedad *ergódica* en demografía, la tendencia de una población a olvidar su distribución por edades inicial. La demostración más elemental de Lotka para esta propiedad, en el caso continuo, se deduce de la ecuación (5.2.3) que aparece más adelante.

### Descomposición espectral

En virtud de la propiedad de ortogonalidad (3.2.22) de los vectores estables,  $\mathbf{H}\mathbf{K}$  es una matriz diagonal, y cuando los vectores están en su forma normal tenemos  $\mathbf{H}\mathbf{K} = \mathbf{I}$ , la matriz unidad  $n \times n$ . Esto surge del hecho de que la  $i$ ésima fila de  $\mathbf{H}$  es  $[\mathbf{H}_i]$ , y la  $j$ ésima columna de  $\mathbf{K}$  es  $\{\mathbf{K}_j\}$ ; el producto de éstos es uno cuando  $i = j$  y cero cuando  $i \neq j$ . La no singularidad de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{K}$  resulta del hecho de que las raíces son distintas.

La relación  $\mathbf{HK} = \mathbf{I}$  es conmutativa para cualquier  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{K}$  no singulares, o sea, es lo mismo que la relación  $\mathbf{KH} = \mathbf{I}$ . Porque premultiplicando  $\mathbf{HK} = \mathbf{I}$  por  $\mathbf{H}^{-1}$  y postmultiplicando por  $\mathbf{H}$  resulta

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{HKH} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H},$$

o

$$\mathbf{KH} = \mathbf{I}. \quad (3.2.27)$$

Si  $\mathbf{HK} = \mathbf{I}$ , entonces la postmultiplicación por  $\mathbf{K}^{-1}$  da  $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{H}$ , y recordando (3.2.9), que era

$$\mathbf{M} = \mathbf{KAK}^{-1},$$

tenemos, sustituyendo  $\mathbf{H}$  por  $\mathbf{K}^{-1}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{KAH}. \quad (3.2.28)$$

Las reglas de multiplicación matricial rigen tanto cuando los elementos son matrices como cuando son escalares (Frazer, Duncan y Collar, 1963, pág. 14). El lector puede demostrar que reemplazando en (3.2.28) el producto desarrollado de  $\mathbf{KA}$  nos queda

$$\mathbf{M} = [\lambda_1\{\mathbf{K}_1\} \quad \lambda_2\{\mathbf{K}_2\} \cdots \lambda_n\{\mathbf{K}_n\}]\mathbf{H},$$

y particionando  $\mathbf{H}$  en filas da

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \lambda_1\{\mathbf{K}_1\}[\mathbf{H}_1] + \lambda_2\{\mathbf{K}_2\}[\mathbf{H}_2] + \cdots + \lambda_n\{\mathbf{K}_n\}[\mathbf{H}_n] \\ &= \lambda_1\mathbf{Z}_1 + \lambda_2\mathbf{Z}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{Z}_n, \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

no apareciendo matrices a la derecha, excepto  $\mathbf{Z}_i = \{\mathbf{K}_i\}[\mathbf{H}_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , los operadores o componentes espectrales introducidos mediante un ejemplo aritmético en la sección 3.1 para las mujeres de los Estados Unidos, 1965.

El argumento que hemos usado aquí para descomponer  $\mathbf{M} = \mathbf{KAK}^{-1}$  se aplica también a  $\mathbf{M}^t = \mathbf{KA}^t\mathbf{K}^{-1}$  de (3.2.12). Sustituyendo  $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{H}$ , tenemos  $\mathbf{M}^t = \mathbf{KA}^t\mathbf{H}$ , y esto es

$$\mathbf{M}^t = \mathbf{KA}^t\mathbf{H} = \sum_i \lambda_i^t\{\mathbf{K}_i\}[\mathbf{H}_i] = \sum_i \lambda_i^t\mathbf{Z}_i, \quad (3.2.30)$$

que es un caso especial del teorema de Sylvester (Frazer, Duncan y Collar, 1963, pág. 78) para analizar una matriz en función de operadores espectrales.

La ecuación (3.2.30) se puede multiplicar por una constante escalar, por ejemplo  $a_t$ . Si un número de ecuaciones tal como (3.2.30) para las potencias  $t$ ,  $t-1, \dots, 1$ , se multiplica cada una por una constante arbitraria y luego se suman, tenemos

$$a_t\mathbf{M}^t + a_{t-1}\mathbf{M}^{t-1} + \cdots + a_0\mathbf{I} = \sum_i [(a_t\lambda_i^t + a_{t-1}\lambda_i^{t-1} + \cdots + a_0)\{\mathbf{K}_i\}[\mathbf{H}_i]],$$

lo que equivale a decir que  $f(\mathbf{M})$ , cualquier función polinómica de la matriz  $\mathbf{M}$ , se puede desarrollar en la forma

$$f(\mathbf{M}) = f(\lambda_1)\mathbf{Z}_1 + f(\lambda_2)\mathbf{Z}_2 + \cdots + f(\lambda_n)\mathbf{Z}_n. \quad (3.2.31)$$

Las funciones racionales o trascendentales de una matriz en la medida en que ellas pueden ser aproximadas a funciones polinómicas, se pueden similarmente desarrollar en términos de los componentes espectrales de  $Z$ .

Si  $f(\lambda)$  es la función característica  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}|$ , entonces

$$f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = \dots = f(\lambda_n) = 0,$$

y en consecuencia se deduce de (3.2.31)

$$f(\mathbf{M}) = 0.$$

Este es el importante teorema de Cayley-Hamilton, según el cual toda matriz satisface su propia ecuación característica, que hemos probado para el caso especial en que los  $\lambda_i$  son distintos. La ecuación característica de la matriz  $3 \times 3$  para las mujeres de los Estados Unidos, 1965, se mostró arriba como una ilustración de (3.2.3). De allí podemos escribir:

$$f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^3 - 0.4271\mathbf{M}^2 - 0.8433\mathbf{M} - 0.1241\mathbf{I} = 0.$$

Si  $f(\mathbf{M})$  se va a anular, entonces ello debe ocurrir cuando están presentes las celdas de la parte superior izquierda, por ejemplo, de  $\mathbf{M}^3$ ,  $\mathbf{M}^2$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{I}$  de la sección 3.1. Esto significa que

$$0.9224 - (0.4271)(1.0257) - (0.8433)(0.4271) - 0.1241$$

debe ser igual a cero, lo cual es cierto dentro de un margen de 0,0001. De manera similar se pueden formar otras ocho identidades aritméticas. Inversamente, uno puede elevar al cuadrado cualesquiera de las matrices  $3 \times 3$  del cuadro 3.1 y luego utilizar el teorema de Cayley-Hamilton para determinar su cubo.

Si  $\mathbf{M}$  es no singular, el hecho de que  $f(\mathbf{M}) = 0$  se puede usar para determinar el recíproco  $\mathbf{M}^{-1}$  mediante el conocimiento de  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{M}^2$ . Muestre la ecuación que nos permite esto y aplíquela a la matriz  $3 \times 3$  para Hungría 1965, dada en el cuadro 3.1. Infiera a continuación que el inverso de cualquier matriz de la forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}, \quad c, d, e \neq 0,$$

es

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/d & 0 \\ 0 & 0 & 1/e \\ 1/c & -a/cd & -b/ce \end{bmatrix},$$

y verifique el  $\mathbf{M}^{-1}$  obtenido por medio del teorema de Cayley-Hamilton, tanto en el caso general como para los datos de Hungría.

La matriz  $\mathbf{M}$  luce como si se pudiera usar para proyectar la población hacia el pasado, multiplicando sucesivamente por  $\mathbf{M}^{-1}$  y obteniendo (3.2.26) con  $t$  negativo. Escriba explícitamente los elementos de  $\mathbf{M}^{-1}$  para grupos quinquenales de edad. Analice lo que sucede si se intenta una proyección mediante  $\mathbf{M}^{-1}$ ,

usando los valores propios para juzgar el grado de inestabilidad. ¿Disminuye la inestabilidad usando grupos de edades más amplios y dejando de lado, de esta manera, los valores propios menores? Compare esta proyección retrospectiva con el resultado de seguir hacia atrás el recorrido de las cohortes y exprese en términos de sentido común cómo se hace la inferencia con cada uno; ¿en qué sentido el problema de explicar el origen de la distribución por edades es más difícil que el de decir hacia dónde va? (véase Goodman, 1968a.)

Los operadores espectrales son *idempotentes*: son iguales a sus propias potencias. Nuestros  $Z_i$  satisfacen esta condición, por que

$$Z_i^2 = (\{K_i\}[H_i])(\{K_i\}[H_i]) = \{K_i\}(\{H_i\}\{K_i\})[H_i] = \{K_i\}[H_i] = Z_i,$$

si hemos normalizado de acuerdo a (3.2.17) haciendo  $[H_i]\{K_i\} = 1$ . Repitiendo el argumento, obtenemos

$$Z_i^k = Z_i, \quad (3.2.32)$$

donde  $k$  es cualquier entero positivo. ¿Qué se puede decir cuando  $k$  es un entero negativo?

Los operadores espectrales son ortogonales. Las matrices  $Z_i$  y  $Z_j$  satisfacen también esta condición:

$$Z_i Z_j = \{K_i\}[H_i]\{K_j\}[H_j] = \{K_i\}(\{H_i\}\{K_j\})[H_j] = 0, \quad i \neq j,$$

puesto que la expresión  $[H_i]\{K_j\}$  entre paréntesis es cero debido a la propiedad de ortogonalidad (3.2.22) con  $i \neq j$ .

Finalmente, la suma de los operadores espectrales da la matriz unidad. El total de nuestros  $Z$ ,

$$\sum Z_i = \{K_1\}[H_1] + \{K_2\}[H_2] + \dots + \{K_n\}[H_n], \quad (3.2.33)$$

es igual a  $KH$ , como se puede ver particionando  $KH$  en los vectores que sirvieron para definir  $K$  y  $H$ , multiplicando entonces como si los vectores fueran elementos escalares:

$$KH = \left[ \begin{array}{ccc} \{K_1\} & \{K_2\} & \dots & \{K_n\} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} [H_1] \\ [H_2] \\ \vdots \\ [H_n] \end{array} \right\}. \quad (3.2.34)$$

La multiplicación expresada en el segundo miembro da

$$\{K_1\}[H_1] + \{K_2\}[H_2] + \dots + \{K_n\}[H_n] = \sum Z_i.$$

Pero habríamos probado antes que el producto que aparece en el primer miembro de (3.2.34) es  $KH = HK = I$ , y por lo tanto tenemos ahora que  $\sum Z_i = I$ . Esto completa la teoría que está detrás de la relación aritmética de los  $Z$  presentada en la sección 3.1. Continuamos ahora con la teoría para calcular los  $Z$ .

## 3.3. CALCULO ITERATIVO DE LOS COMPONENTES MATRICIALES

Puesto que  $\lambda_1$  es mayor en valor absoluto que las demás raíces,  $Z_1$  se calcula fácilmente dividiendo (3.2.30) por  $\lambda_1^t$  para obtener

$$\frac{M^t}{\lambda_1^t} = Z_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t Z_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^t Z_n,$$

de manera que si  $t$  es suficientemente grande,

$$Z_1 \doteq M^t / \lambda_1^t,$$

hecho que ya fue aprovechado en la sección 3.1. Para los datos de hombres en los Estados Unidos, 1964, que aparecen en el cuadro 3.6, determine  $\lambda_1$ , usando  $m_{11}^{(64)}$  y  $m_{21}^{(64)}$  junto con  $m_{21}$ ; verifique luego si se ha logrado estabilidad, examinando si  $m_{21}^{(64)}$ ,  $m_{31}^{(64)}$  y  $m_{32}$  producen el mismo  $\lambda_1$ . Verifique algunos valores de  $Z_1$ , que fueron determinados como  $M^{64} / \lambda_1^{64}$ .

De  $\lambda_1 = 1,09149$  y  $\lambda_2 = 0,3975 + 0,7891i$ , obtenemos  $|\lambda_2|/|\lambda_1| = 0,809$ , y podemos aplicar (3.2.30) para determinar un límite superior al error en  $Z_1$  cuando es calculado como  $M^{64} / \lambda_1^{64}$ . En realidad  $(0,809)^{64} = 1,3 \times 10^{-6}$ , y por tanto, los términos despreciados son del orden de un millonésimo de los incluidos.

A partir de  $\lambda_1$  y la subdiagonal de la matriz  $M$  reproduzca alguna de las razones entre los elementos columna sucesivos de  $Z_1$ . Dada la porción de  $M^{64}$  que se muestra en el cuadro 3.6; determine la distribución por edades estables, y verifique que el número de los que tenían de  $x$  a  $x + 4$  años en su último aniversario,  $x = 5, 10, 15, \dots$ , es proporcional a  $\lambda^{-(x+2,5)/5} {}_5L_x$ , donde  ${}_5L_x$  se toma del cuadro 1.3. Utilice cualquier fila de  $Z_1$  para verificar el valor reproductivo para los hombres de los Estados Unidos que aparece en el cuadro 3.4.

Puesto que  $Z_1 = \{K_1\}[H_1]$ , sus filas son proporcionales las unas a las otras; no puede tener determinantes de orden dos o superior que no se anulen, lo que equivale a decir que tiene rango uno. (Este es un caso especial de la regla que dice que el rango de un producto de matrices es menor o igual que el rango de cada uno de los factores.) El rango de una matriz no altera cuando multiplicamos todos sus elementos por una constante; en particular,  $M^t = \lambda_1^t Z_1$  debe ser del mismo rango que  $Z_1$  cuando  $t$  es suficientemente grande. Nuestro programa de computación para el cálculo de  $Z_1$  fue controlado mediante la magnitud del determinante de segundo orden de la parte superior izquierda de  $M^t$ , habiéndose evaluado este determinante para cada una de las sucesivas elevaciones al cuadrado de  $M$ . Cuando  $t$  fue tal que

$$\frac{\begin{vmatrix} m_{11}^{(t)} & m_{12}^{(t)} \\ m_{21}^{(t)} & m_{22}^{(t)} \end{vmatrix}}{m_{11}^{(t)} m_{12}^{(t)}} = \frac{m_{22}^{(t)}}{m_{12}^{(t)}} = \frac{m_{21}^{(t)}}{m_{11}^{(t)}}$$

se hizo menor que 0,000001, el programa dejó de elevar al cuadrado, calculó  $\lambda_1$  por medio de

$$\lambda_1 = m_{21}^{(t+1)} / m_{21}^{(t)},$$

y luego dividió todos los términos de  $M^t$  por  $\lambda_1^t$  para obtener  $Z_1$ . En este caso, podemos razonablemente tomar el riesgo de suponer que todos los determinantes dos-por-dos se anulan cuando uno lo hace.





Table 3.6 (continuación) <sup>a</sup>

$M^{64} =$	47.211	51.753	. . .	0.426	$M^{65} =$	51.531	56.488	. . .	0.466
	43.068	47.211	. . .	0.389		47.009	51.530	. . .	0.425
	39.362	43.149	. . .	0.356		42.963	47.096	. . .	0.388
	35.899	39.353	. . .	0.324		39.184	42.953	. . .	0.354
	32.624	35.762	. . .	0.295		35.609	39.034	. . .	0.322
	29.616	32.465	. . .	0.268		32.325	35.435	. . .	0.292
	26.870	29.455	. . .	0.243		29.329	32.150	. . .	0.265
	24.309	26.647	. . .	0.220		26.532	29.084	. . .	0.240
	21.856	23.959	. . .	0.197		23.855	26.150	. . .	0.216
	19.437	21.308	. . .	0.176		21.216	23.257	. . .	0.192
16.972	18.605	. . .	0.153	18.525	20.307	. . .	0.167		
$10^6 \tilde{N}^{64} =$	-45.464	...			$10^6 \tilde{N}^{65} =$	-123.348	...		
	111.237	...				-45.269	...		
	170.848	...				110.966	...		
	31.680	...				170.074	...		
	-184.107	...				31.424	...		
	-225.650	...				-182.424	...		
	3.871	...				-223.464	...		
	286.555	...				3.823	...		
281.562	...			281.218	...				
-71.380	...			273.314	...				
-402.962	...			-68.029	...				
$10^6 \tilde{N}^{66} =$					$10^6 \tilde{N}^{66} =$	-62.561	...		
						-122.819	...		
						-45.159	...		
						110.464	...		
						168.697	...		
						31.136	...		
				-180.656	...				
				-220.653	...				
				3.752	...				
				272.982	...				
				260.482	...				

<sup>a</sup> Programado por William Linderman y Belinda Bourque.

Para usar el análogo de  $Z_1 = M^t/\lambda_1^t$  que permita determinar el próximo par de componentes  $Z_2, Z_3$ , primero eliminaremos  $\lambda_1 Z_1$ , esto es, calculamos la matriz deflatada.

$$M - \lambda_1 Z_1 = \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 + \dots + \lambda_n Z_n =: N,$$

y elevamos  $N$  a una potencia alta. No necesitamos elevar hasta una potencia tan alta como para la primera raíz característica, debido a que la caída en valor absoluto desde la tercera a la cuarta raíz es mayor que de la primera a la segunda. La razón de la cuarta a la tercera para los hombres de los Estados Unidos, 1964, es  $|\lambda_4|/|\lambda_3| = 0,6$ , lo cual es menor que el cuadrado de  $|\lambda_2|/|\lambda_1| = 0,809$ , la razón de la segunda a la primera. En consecuencia, sería suficiente menos de la mitad de la potencia  $t$  usada para  $\lambda_1$ . Verifique esto con las raíces para las mujeres de México y Estados Unidos dadas en el cuadro 3.3, y compare con  $\lambda_2/\lambda_1$  y  $\lambda_3/\lambda_2$  en el ejemplo abreviado para los Estados Unidos, 1965, de la sección 3.1.

Debido a que  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son del mismo valor absoluto, no se pueden separar tomando una única potencia alta de  $N$ . Necesitamos en total tres potencias, por ejemplo  $N^t, N^{t+1}, N^{t+2}$ . Entonces si  $t$  es suficientemente grande como para que los demás términos se puedan despreciar, tenemos

$$\begin{aligned} N^t &= \lambda_2^t Z_2 + \lambda_3^t Z_3, \\ N^{t+1} &= \lambda_2^{t+1} Z_2 + \lambda_3^{t+1} Z_3, \\ N^{t+2} &= \lambda_2^{t+2} Z_2 + \lambda_3^{t+2} Z_3. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Las mismas ecuaciones se aplican a cualquier elemento, por ejemplo al elemento  $j$ ésimo de la  $i$ ésima fila. Eliminando el elemento correspondiente de  $Z$  da

$$\begin{vmatrix} n_{ij}^{(t)} & \lambda_2^t & \lambda_3^t \\ n_{ij}^{(t+1)} & \lambda_2^{t+1} & \lambda_3^{t+1} \\ n_{ij}^{(t+2)} & \lambda_2^{t+2} & \lambda_3^{t+2} \end{vmatrix} = 0.$$

Dividiendo por  $\lambda_2^t \lambda_3^t (\lambda_2 - \lambda_3)$  y evaluando el determinante resulta

$$n_{ij}^{(t+2)} - (\lambda_2 + \lambda_3)n_{ij}^{(t+1)} + (\lambda_2 \lambda_3)n_{ij}^{(t)} = 0. \quad (3.3.2)$$

Si  $i = 1, 2$ , y  $j = 1$ , tenemos el par

$$\begin{aligned} n_{11}^{(t+2)} - (\lambda_2 + \lambda_3)n_{11}^{(t+1)} + (\lambda_2 \lambda_3)n_{11}^{(t)} &\doteq 0, \\ n_{21}^{(t+2)} - (\lambda_2 + \lambda_3)n_{21}^{(t+1)} + (\lambda_2 \lambda_3)n_{21}^{(t)} &\doteq 0. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Una manera conveniente de resolver (3.3.3) para las incógnitas  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  surge al notar que  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son las raíces en  $x$  de  $(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) = 0$ , o sea,

$$x^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_2 \lambda_3 = 0. \quad (3.3.4)$$

Eliminando  $\lambda_2 + \lambda_3$  y  $\lambda_2 \lambda_3$  de (3.3.3) y (3.3.4) se llega a una ecuación cuadrática

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ n_{11}^{(t+2)} & n_{11}^{(t+1)} & n_{11}^{(t)} \\ n_{21}^{(t+2)} & n_{21}^{(t+1)} & n_{21}^{(t)} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.3.5)$$

cuyas raíces en  $x$  deben ser  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ . La ecuación (3.3.5) para los hombres de los Estados Unidos, 1964, resulta ser

$$x^2 - 0.7949x + 0.7807 = 0, \quad (3.3.6)$$

al usar una vez más el cuadro 3.6, con  $t = 64$ . Completando el cuadrado en (3.3.6) encontramos

$$x = -0.3975 \pm 0.7891i = \lambda_2, \lambda_3.$$

Forme ecuaciones cuadráticas similares a partir de otros elementos y resuélvalas, ilustrando así que  $\lambda_2, \lambda_3$  no dependen de los elementos elegidos.

Cuando la potencia requerida es baja, resulta económico comenzar con un vector arbitrario y multiplicarlo repetidamente por la matriz. Este método, escrito simbólicamente como  $M\{M[\dots(MK)]\dots\}$ , no permite el método abreviado que consiste en elevar sucesivamente al cuadrado y que se puede describir como  $M^{(2^n)}$ , pero cada multiplicación matricial requiere sólo  $1/n$  de las multiplicaciones escalares que se realizan para elevar al cuadrado una matriz  $n \times n$ . El lector puede demostrar que el punto de empate en cuanto al número de multiplicaciones escalares está en  $2^n n^2 = sn^3 + n^2$ , donde  $2^n$  es la potencia requerida. Construyendo una tabla de  $n = (2^s - 1)/s$ , se puede leer el valor de  $s$  para cada  $n$ . El método preferido depende de cuán alta sea la potencia que necesitamos: con una matriz  $n \times n = 9 \times 9$ , la elevación sucesiva al cuadrado es más económica para las potencias de orden 64 en adelante.

El método para determinar las raíces, reales y complejas, descrito en estas páginas es aplicable donde un vector arbitrario esté premultiplicado repetidamente por la matriz dada  $M$ . Si  $\{K^{(0)}\}$  es el vector arbitrario, y  $k_i^{(t)}$  es el elemento típico de  $M^t\{K^{(0)}\}$ , entonces  $\lambda_1 \doteq k_i^{(t+1)}/k_i^{(t)}$  para  $t$  grande; el lector puede tener el deseo de inventar una solución para  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  por este procedimiento alternativo.

El cálculo de la segunda y tercera componentes espectrales no es difícil una vez que se dispone de  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ . Cuando la matriz deflatada, de la cual se ha restado la primera componente espectral

$$N = M - \lambda_1 Z_1,$$

se eleva a la potencia  $(t + 1)$ , es

$$N^{t+1} \doteq \lambda_2^{t+1} Z_2 + \lambda_3^{t+1} Z_3;$$

a la potencia  $(t + 2)$ , es

$$N^{t+2} \doteq \lambda_2^{t+2} Z_2 + \lambda_3^{t+2} Z_3.$$

Restándole a la segunda de éstas, la primera multiplicada por  $\lambda_3$  da

$$N^{t+2} - \lambda_3 N^{t+1} = (\lambda_2^{t+2} - \lambda_3 \lambda_2^{t+1}) Z_2,$$

de modo que

$$Z_2 = \frac{N^{t+2} - \lambda_3 N^{t+1}}{\lambda_2^{t+2} - \lambda_3 \lambda_2^{t+1}}, \quad (3.3.7)$$

y  $Z_3$  se obtiene de esto intercambiando subíndices.

**CUADRO 3.7**  
**MATRIZ DE PROYECCION  $M$  Y SUS DOS PRIMERAS COMPONENTES ESPECTRALES**  
 $Z_1$  Y  $Z_2$ . MUJERES CANADIENSES, 1965

Edad	Matriz de proyección $M$		Primera componente espectral $Z_1$	
	Subdiagonal	Primera fila	Columna $\{K_1\}$	Fila $\{H_1\}'$
0	0.99651	0.00000	0.10618	1.059
5	0.99820	0.00024	0.09832	1.144
10	0.99802	0.05861	0.09119	1.233
15	0.99729	0.28608	0.08456	1.267
20	0.99694	0.44791	0.07836	1.064
25	0.99621	0.36399	0.07259	0.673
30	0.99460	0.22259	0.06719	0.340
35	0.99184	0.10457	0.06210	0.131
40	0.98700	0.02826	0.05723	0.030
45	0.97899	0.00240	0.05248	0.002
Edad	Segunda componente espectral $Z_2$			
	Columna $\{K_2\}$		Fila $\{H_2\}'$	
0	0.1642 + 0.0854i		0.1642 + 0.0854i	
5	0.1738 - 0.1300i		-0.0049 + 0.1577i	
10	-0.0490 - 0.2503i		-0.1228 + 0.0545i	
15	-0.2898 - 0.0757i		-0.0968 - 0.0791i	
20	-0.2276 + 0.2680i		-0.0222 - 0.1280i	
25	0.1674 + 0.3771i		0.0163 - 0.1028i	
30	0.4835 + 0.0150i		0.0250 - 0.0567i	
35	0.2614 - 0.5022i		0.0162 - 0.0209i	
40	-0.3958 - 0.5294i		0.0048 - 0.0043i	
45	-0.7535 + 0.1474i		0.0004 - 0.0003i	

Necesitaremos  $\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3$  para deflatar  $N$  y continuar el proceso. De (3.3.7) esto es

$$\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} \left( \frac{N^{t+2} - \lambda_3 N^{t+1}}{\lambda_2^t} - \frac{N^{t+2} - \lambda_2 N^{t+1}}{\lambda_3^t} \right). \quad (3.3.8)$$

Si  $\lambda_2 = e^{\alpha + iy}$  podemos expresar (3.3.8) en términos reales. Usando el hecho de que  $e^{\alpha + iy} = e^{\alpha} (\cos y + i \sin y)$ , y también que  $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ , llegamos finalmente a

$$\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 = \frac{N^{t+1} e^{-t\alpha} \sin(t+1)y - N^{t+2} e^{-(t+1)\alpha} \sin ty}{\sin y}. \quad (3.3.9)$$

(Verifique esto determinando su valor límite, si  $\lambda_4 = \lambda_5 = \dots = 0$  para  $t = 0$  y  $t = 1$ , y vea si se aplica a la raíz real haciendo tender  $y$  a cero. Recuerde que el límite de  $\sin ty / \sin y$  cuando  $y$  tiende a cero es  $t$ ). Este método se expone a serios errores de redondeo después de las primeras tres raíces.

### 3.4. INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS

Una aplicación numérica de los métodos de este capítulo está publicada en detalle para las mujeres de los Estados Unidos, 1963, (Keyfitz, 1967), y no se necesita repetirla aquí. En lugar de eso, mostraremos un resultado abreviado de descomposición para una población diferente: las mujeres canadienses, 1965. El cuadro 3.7 da la matriz original  $M$ , el vector columna  $\{K_1\}$  normalizado a uno, la población estable como una distribución porcentual, y el vector fila estable  $[H_1]'$  (o sea, transpuesto por conveniencia de impresión) con una niña recién nacida como unidad. Estos son proporcionales a las columnas y filas, respectivamente, de la primera matriz estable  $Z_1$ . Aparecen también los números correspondientes a la segunda matriz estable  $Z_2$ .

Ahora lo único que necesitamos son los números  $c_1$ , y  $c_2$ ,  $c_3$  de (3.2.25) para desarrollar la descomposición del  $\{K^{(0)}\}$  observado en el cuadro 3.8. Ellos son  $c_1 = 9\,838\,600$  y  $c_2, c_3 = 83\,669 \pm 252\,529i$ , y se puede verificar que, multiplicados por los vectores columnas del cuadro 3.7, éstos producen las dos componentes principales del cuadro 3.8.

La primera componente tiene en cuenta aquella parte de  $\{K^{(0)}\}$  que es estable. Las desviaciones de la estabilidad cuya periodicidad es la generación están cubiertas por las contribuciones de la segunda y tercera raíces. Debido a que los escasos nacimientos de fines de la década del 30 están separados aproximadamente por una generación, el período de la segunda raíz, desde la depresión del 60, la segunda componente pesa mucho en la descomposición de acuerdo a (3.2.23), que aparece en el cuadro 3.8. Verifique la segunda y tercera columna del cuadro 3.8 a partir de los  $c$  dados en la parte inferior del cuadro y los vectores estables del cuadro 3.7. Encontrará, por ejemplo, que para los 10 años de edad el elemento de la primera componente  $c_1 \{K_1\}$  es

$$(9,838,600)(0.09119) = 897,000,$$

CUADRO 3.8

DESCOMPOSICION DE LA DISTRIBUCION  $\{K^{(0)}\}$  OBSERVADA DE 42 AÑOS DE EDAD EN TRES COMPONENTES MEDIANTE (3.2.23), MUJERES DE CANADA, 1965. (En miles)

Edad	Población observada $\{K^{(0)}\}$	CONTRIBUCION DE		
		Término dominante que contiene raíz real $c_1\{K_1\}$	Segundo y tercer términos $c_2\{K_2\}+c_3\{K_3\}$	Cuarto a noveno términos $c_4\{K_4\} + \dots + c_9\{K_9\}$
0	1067	1045	-16	38
5	1051	967	95	-11
10	966	897	118	-49
15	847	832	-10	25
20	665	771	-173	67
25	581	714	-162	30
30	589	661	73	-145
35	621	611	297	-287
40	615	563	201	-149
45	528	516	-200	212
50	469	470	-470	469
55+	<u>1480</u>	<u>1791</u>		
TOTAL	9479	9838		

$$c_1 = 9,838,600,$$

$$c_2, c_3 = 83,669 \pm 252,529i.$$

y de la segunda y tercera componente es

$$(83,669 + 252,529i)(-0.0490 - 0.2503i) + (83,669 - 252,529i)(-0.0490 + 0.2503i) = 118,216,$$

una cantidad real redondeada en el cuadro 3.8 a 118 000.

El cuadro 3.9 muestra dos componentes de la proyección efectuada mediante (3.2.26). Es notable el descenso relativo y absoluto del efecto de las raíces posteriores a la primera. Determine la razón de los valores absolutos  $|\lambda_2|/|\lambda_1|$

CUADRO 3.9

PROYECCION DESDE 1965 A 2015 Y 2065 BASADA EN TASAS POR EDADES FIJAS, MOSTRANDO LOS EFECTOS DE LA RAIZ DOMINANTE Y LAS DEMAS RAICES DE ACUERDO A (3.2.26). MUJERES CANADIENSES.  
(Datos en miles)

Edad	2015		2065	
	Término dominante que contiene la raíz real	Otros términos	Término dominante que contiene la raíz real	Otros términos
	$c_1 \lambda_1^{10} \{K_1\}$	$\sum_{i=2}^9 c_i \lambda_i^{10} \{K_i\}$	$c_1 \lambda_1^{20} \{K_1\}$	$\sum_{i=2}^9 c_i \lambda_i^{20} \{K_i\}$
0	2170	29	4557	9
5	2010	36	4219	4
10	1864	1	3914	-2
15	1729	-23	3629	1
20	1602	-15	3363	6
25	1484	27	3115	9
30	1373	55	2884	1
35	1269	25	2665	-11
40	1170	-39	2456	-14
45	1073	-94	2252	-1
50	976	24	2049	14
55+	3722	-26	7814	-16

de las raíces para Canadá, 1965, del cuadro 3.10, y examine si las potencias de esta razón explican el descenso en la segunda columna del cuadro 3.9 desde 1965 a 2015 y desde 2015 a 2065.

Los logaritmos de los  $\lambda$  se interpretan con mayor facilidad que los  $\lambda$  mismos. Si  $\lambda_1$  es la razón de una población estable en un momento dado a la de cinco años atrás, entonces  $r_1 = 0,2 \ln \lambda_1$  es la tasa anual de crecimiento instantáneo. Para una raíz compleja, digamos  $\lambda = u + iv$ , supongamos que el correspondiente  $r = 0,2 \ln \lambda = 0,2 \ln (u + iv)$  es  $x + iy$ . Entonces tenemos según el teorema de De Moivre (Chrystal, 1961, Vol. I, pág. 235)

$$e^{\delta(x+iy)} = e^{\delta x}(\cos 5y + i \sin 5y) = u + iv,$$

de modo que el valor absoluto o *módulo* es

$$|\lambda| = \sqrt{u^2 + v^2} = e^{\delta x},$$

**CUADRO 3.10**  
**RAICES CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES  $r = 0.2 \ln \lambda$ .**  
**POBLACIONES FEMENINAS DE CANADA Y LOS ESTADOS UNIDOS\***

	$r_1 = 0.2 \ln \lambda_1$	$r_2, r_3 = 0.2 \ln (\lambda_2, \lambda_3)$ $x \pm iy$
<b>CANADA</b>		
1965	0.01469	-0.0326 ± 0.2244i
1964	0.01843	-0.0285 ± 0.2264i
1963	0.02002	-0.0275 ± 0.2274i
1960-62	0.02131	-0.0274 ± 0.2275i
1950-52	0.01698	-0.0293 ± 0.2179i
1940-42	0.00735	-0.0351 ± 0.2078i
1930-32	0.00904	-0.0317 ± 0.2029i
<b>UNITED STATES**</b>		
1965	0.01267	-0.0390 ± 0.2346i
1964	0.01613	-0.0346 ± 0.2370i
1963	0.01753	-0.0335 ± 0.2387i
1962	0.01929	-0.0323 ± 0.2405i
1959-61	0.02119	-0.0317 ± 0.2418i
1949-51	0.01440	-0.0406 ± 0.2330i
1939-41	0.00094	-0.0513 ± 0.2189i
1929-31	0.00251	-0.0499 ± 0.2096i

\* Programado por Wilhelm Flieger.

\*\* Nacimientos corregidos.

y el argumento es

$$\arg \lambda_2 = \arctan (v/u) = 5y.$$

Ahora (3.2.26) se convierte en

$$M^t\{\mathbf{K}^{(0)}\} = e^{\delta r_1 t} c_1\{\mathbf{K}_1\} + e^{\delta r_2 t} c_2\{\mathbf{K}_2\} + \dots + e^{\delta r_3 t} c_3\{\mathbf{K}_3\}, \quad (3.4.1)$$

$$= e^{\delta r_1 t} c_1\{\mathbf{K}_1\} + \sum_{i=2}^3 c_i e^{\delta r_2 t} (\cos 5y_i t + i \sin 5y_i t)\{\mathbf{K}_i\}. \quad (3.4.2)$$



Todos los elementos de cada término numerado como par son *complejos conjugados* del término siguiente, numerado como impar, esto es, los términos pares e impares sucesivos son de la forma  $a + ib$  y  $a - ib$  respectivamente, donde  $a$  y  $b$  son reales. Esto se demuestra mediante el método de (5.2.3) que se verá más adelante. Pruebe que la multiplicación y exponenciación de números complejos conjugados da como resultado números complejos conjugados, y por tanto el segundo miembro de (3.4.2) es necesariamente una suma de vectores reales.

Podemos por lo tanto ver qué sucede para cualquiera de las  $r$  con el crecimiento de  $t$ , expresando  $\lambda^t = e^{5rt}$  en términos de  $r = x + iy$ . La parte real  $x$  es negativa, y por lo tanto  $e^{5xt}$  es una curva exponencial descendente que determina la tasa de amortiguación para la amplitud de las oscilaciones. Cuando  $t$  ha crecido en  $2\pi/y$  las cantidades  $\cos yt$  y  $\sin yt$  de (3.4.2) están de nuevo en la misma fase. De ahí que la amplitud de oscilación sea  $2\pi/y$  e  $y$  su frecuencia.

En el cuadro 3.10 se presenta información para la población femenina de Canadá y los Estados Unidos desde 1930 hasta la década del 60. La raíz real  $r_1 = 0,2 \ln \lambda_1$  es la tasa, compuesta en forma continua, a la que crecería la población femenina si se mantuvieran las tasas de mortalidad y fecundidad por edades del año en cuestión durante un tiempo suficiente como para que desapareciera la influencia de la distribución por edades inicial. Entre los Estados Unidos y Canadá, el movimiento de  $r_1$  en los años recientes es muy similar, pero alrededor de 1930 Estados Unidos estaba considerablemente más "avanzado", lo que equivale a decir más bajo, en  $0,00904 - (0,00251)$ , o sea, aproximadamente  $2/3$  por ciento anual.

Para los Estados Unidos la parte real  $x$  de la primera raíz compleja  $r_2 = x + iy$  va desde  $-0,0513$  en 1939-1941 a  $-0,0317$  en 1959-1961; esto corresponde al estrechamiento del intervalo de edades dentro de las cuales tiene lugar la reproducción: mientras más reducido sea este intervalo de edades, menos rápida será la amortiguación de las oscilaciones que surgen de perturbaciones en la distribución por edades (sección 6.4).

Por el otro lado, se ha incrementado la parte imaginaria  $y$ ; de este modo, el período de las oscilaciones que se producen en las generaciones posteriores por una perturbación en la distribución por edades, que es igual a  $2\pi/y$  años, tiende a disminuir. La tendencia de  $y$  a crecer, como aparece en el cuadro 3.10, desde  $0,2189$  en 1939-1941 a  $0,2418$  en 1959-1961, corresponde a un descenso en la longitud de la onda desde  $2\pi/0,2189 = 28,70$  años a  $2\pi/0,2418 = 25,99$  años. Estos períodos se relacionan con la edad media de las mujeres al nacimiento de sus hijos, tema que se investigará en el capítulo 6. Los cambios son más consistentes en las cifras de los Estados Unidos que en las de Canadá.

## ESTUDIO DE UNA MATRIZ DE PROYECCION QUE CAMBIA A TRAVES DEL TIEMPO

### 4.1. EXPERIMENTOS ACERCA DE LOS EFECTOS DEL CAMBIO EN LAS TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD Y MORTALIDAD POR EDADES

Hasta el momento el análisis ha consistido en la premultiplicación de un vector dado de distribución por edades por las potencias de una matriz fija. Pero así como la proyección de población corriente puede incorporar cambiantes tasas específicas de fecundidad y mortalidad por edades, lo mismo se puede hacer para la formulación matricial de dicha proyección. La población proyectada después de dos ciclos no será  $M^2\{K^{(0)}\}$ , sino  $M^{(1)}M^{(0)}\{K^{(0)}\}$  donde  $M^{(0)}$  se construye en base al conjunto de tasas específicas de mortalidad y fecundidad por edades que se espera rijan durante el primer período, y  $M^{(1)}$  a partir del conjunto que se espera tenga vigencia durante el segundo período. Algunas veces será de interés suponer que la matriz que premultiplica va cambiando a través del tiempo de acuerdo con algún criterio sistemático.

Como un ejemplo, consideremos las tasas de natalidad de un país subdesarrollado y supongamos que en el futuro estas tasas declinan hasta un nivel adecuado a sus bajas tasas de mortalidad. La tasa bruta de natalidad de México, 1960, de 46,0 por mil, no es apropiada en relación a su tasa de mortalidad de 11,5, como lo demuestra el hecho de que la continuación de estas tasas multiplicaría la población por  $(1,0 + 0,0460 - 0,0115)^{100} = 29,7$  durante el curso de un siglo, llevándola a  $(34\ 923\ 000)(29,7) = 1\ 038\ 000\ 000$ , y al cabo de la segunda centuria a  $30,8 \times 10^9$ , o sea, nueve veces la población actual del planeta. Ante la certeza de que ocurrirá un cambio, preferentemente en la forma de una baja de las tasas específicas de fecundidad por edades, nos preguntamos cuánta diferencia representa respecto a la población final, ya sea que el cambio se realice lento o rápidamente, en 40 ó 15 años. Las páginas siguientes describen un programa de computación que debería ser adecuado para dos conjuntos cualesquiera de estructura de fecundidad y mortalidad, con el objeto de estudiar la cambiante distribución por edades, cuando una población dada inicialmente se mueve más o menos rápidamente de un conjunto de tasas al otro. Bastará investigar la población femenina de 0-44 años de edad, y por ello la discusión queda restringida a este grupo.

En las ilustraciones se han usado los datos de México, 1960, y de los Estados Unidos, 1940. El cuadro 4.1 muestra las dos matrices. Podemos considerar la matriz de México, 1960, como el punto medio de una *transición demográfica* (Notestein, y otros, 1944), en que la mortalidad ha bajado, pero la fecundidad se mantiene alta. Se puede considerar a los Estados Unidos, 1940, como el punto terminal de tal transición, en la cual los nacimientos han bajado hasta un punto

CUADRO 4.1

MATRICES  $M_0$  (MEXICO, 1960) Y  $M_1$  (ESTADOS UNIDOS, 1940) QUE REPRESENTAN LAS SUPUESTAS CONDICIONES INICIALES Y FINALES DE MORTALIDAD Y FECUNDIDAD PARA MUJERES, EN UNA TRANSICION DEMOGRAFICA HIPOTETICA

$M_0 =$	0	0	0.1145	0.4413	0.6689	0.6383	0.5132	0.3197	0.1025
	0.9650	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.9902	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.9923	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0.9888	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0.9811	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0.9805	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.9765	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0.9715	0
$M_1 =$	0	0	0.0633	0.2199	0.2987	0.2384	0.1498	0.0737	0.0203
	0.9909	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.9959	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.9942	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0.9909	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0.9886	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0.9864	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.9830	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0.9800	0

donde las muertes son escasamente reemplazadas. México, 1960, tenía una raíz dominante femenina,  $\lambda_1 = 1,182$ , correspondiente a un incremento anual de 33,9 por mil; en 1940, la población de Estados Unidos era aproximadamente estacionaria, es decir, con  $\lambda_1 = 1$ . La curva de cambio supuesta arbitrariamente para el futuro de México, implica una tasa de natalidad que primero desciende lentamente, luego lo hace rápidamente, y por último se estabiliza. Esta curva en forma de S, similar a la *logística* de la ecuación (9.2.4) y dibujada en el gráfico 9.1, ha sido aplicada en diversas ocasiones en demografía (Verhulst, 1838, Pearl y Reed, 1920).

Definiremos nuestra variante de la logística, considerando las formas inicial y final de la matriz de proyección, y mostrando una manera simple de establecer la transición de una a la otra. Si llamamos  $M_0$  a la matriz de proyección inicial aplicable a México en 1960, y  $M_1$  a la matriz final, derivada de los Estados Unidos, 1940, entonces supongamos que la diferencia  $M_0 - M_1$  está dividida en siete partes (no todas iguales). La proyección desde 1960 a 1964 se hará mediante  $M_0$  aquella entre 1965 y 1969 mediante  $M_0$  menos la primera de estas partes, la correspondiente a 1970-1974 por  $M_0$  menos la primera y segunda de estas partes, etc., y sobre el período 1995-1999 y subsiguientes, por  $M_0$  menos todas estas partes, o sea, por  $M_0 - (M_0 - M_1) = M_1$ . El cambio en la matriz pre-multiplicadora en cualquier período, está relacionada con la distancia desde el comienzo y también a la distancia respecto al fin de la transición. Para 1965-1969 la deducción practicada en  $M_0$  es proporcional a  $(1)(7) = 7$ ; para 1970-1974 la deducción adicional es proporcional a  $(2)(6) = 12$ ; para 1975-1979 a  $(3)(5) = 15$ , etc. La suma de

$$7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7 = 84$$

propvee el denominador para las fracciones acumulativas

$$\frac{0}{84}, \frac{7}{84}, \frac{19}{84}, \frac{34}{84}, \frac{50}{84}, \frac{65}{84}, \frac{77}{84}, \frac{84}{84}.$$

Así, las matrices usadas fueron

$$\begin{aligned} \text{para } 1960-64, \quad M_0 - \frac{0}{84}(M_0 - M_1) &= M_0 = M^{(0)}, \\ \text{para } 1965-69, \quad M_0 - \frac{7}{84}(M_0 - M_1) &= \frac{77}{84}M_0 + \frac{7}{84}M_1 = M^{(1)}, \\ \text{para } 1970-74, \quad M_0 - \frac{19}{84}(M_0 - M_1) &= \frac{65}{84}M_0 + \frac{19}{84}M_1 = M^{(2)}, \\ &\vdots \\ \text{para } 1990-94, \quad M_0 - \frac{77}{84}(M_0 - M_1) &= \frac{7}{84}M_0 + \frac{77}{84}M_1 = M^{(6)}, \\ \text{para } 1995-99, \quad M_0 - \frac{84}{84}(M_0 - M_1) &= M_1 = M^{(7)}. \end{aligned}$$

En general, cuando la transición se extiende no sobre 7 sino sobre  $s$  ciclos o  $5s$  años, la matriz que se debería usar para proyectar desde  $1960 + 5i$  a  $1960 + 5(i+1)$  sería

$$M_0 - \left[ \frac{(i)(i+1)(3s-2i+2)}{(s)(s+1)(s+2)} \right] (M_0 - M_1). \quad (4.1.1)$$

Esto usa el hecho de que

$$(1)(s) + (2)(s-1) + \dots + (s)(1) = (s)(s+1)(s+2)/6,$$

que el lector puede deducir igualando las dos formas del coeficiente de  $x^{s-1}$  en la identidad  $(1-x)^{-2}(1-x)^{-2} = (1-x)^{-4}$ .

Dado el siguiente vector de distribución por edades para las mujeres mexicanas

$$\{K^{(0)}\} = 1000 \begin{pmatrix} 2840 \\ 2611 \\ 2124 \\ 1796 \\ 1542 \\ 1309 \\ 1043 \\ 962 \\ 687 \end{pmatrix},$$

que da un total de 14 914 000 niñas y mujeres con menos de 45 años de edad en 1960, junto con la matriz  $M_0$   $M_1$  cuadro 4.1, verifique la primera fila común para 1965 del cuadro 4.2. Use para verificar las cifras para el año 2000 bajo la transición de 15 años.

Cuando la matriz se supone cambiante con el tiempo, la verificación requiere una media ponderada de  $M_0$  y  $M_1$ . Para el cambio desde 1975 a 1980 tenemos de (4.1.1) para  $i=3$  y  $s=5$ ;

$$M^{(3)} = \frac{13M_0 + 22M_1}{35}.$$

Para la proyección de 0-4 a 5-9 esto da

$$m_{12} = \frac{(13)(0.9650) + (22)(0.9909)}{35} = 0.9813,$$

y  $(4062)(0.9813)$  es 3986 para las edades 5-9 en 1980. Para las edades 0-4 en 1980, necesitamos la media ponderada de todos los elementos de la primera fila. Por ejemplo, el primer elemento no cero es

$$\frac{(13)(0.1145) + (22)(0.0633)}{35} = 0.08232.$$

Entonces, para el grupo 0-4 en 1980, para  $s=5$  tenemos

$$(0.08232)(3668) + (0.30213)(2697) + \dots + (0.05083)(1223) = 3808$$

Los tres ejemplos,  $s=3$ ,  $s=5$ ,  $s=7$ , del cuadro 4.2 terminan todos con las mismas tasas, pero la consecuencia de que el cambio se efectúe a través de 15 años da una población de 27 308 000 mujeres de 0-44 años de edad al final del siglo, en tanto que si se efectúa a través de 25 años resulta ser de 31 664 000, esto es, un 16 por ciento más.

CUADRO 4.2

PROYECCION DE LA POBLACION FEMENINA DE MEXICO, 1965-2000, SUPONIENDO QUE LA TRANSICION COMIENZA EN 1965 CON LA MORTALIDAD Y FECUNDIDAD DE MEXICO 1960, Y TERMINA CON LA MORTALIDAD Y FECUNDIDAD DE ESTADOS UNIDOS 1940, DURANTE 15, 25 Y 35 AÑOS. (En miles)

AÑO	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-34	35-44	0-44
TRANSICION EXTENDIDA A TRAVES DE 15 AÑOS: $s = 5$								
1965	3816	2740	2585	2108	1776	2796	1953	17,775
1970	3663	3712	2718	2567	2085	3232	2248	20,226
1975	3044	3601	3690	2701	2542	3776	2685	22,040
1980	2467	3016	3587	3669	2677	4542	3119	23,077
1985	2890	2445	3004	3566	3636	5125	3651	24,316
1990	3243	2864	2435	2986	3534	6204	4392	25,658
1995	3333	3214	2852	2421	2959	7039	4954	26,772
2000	3198	3303	3200	2836	2399	6372	6000	27,308
TRANSICION EXTENDIDA A TRAVES DE 25 AÑOS: $s = 5$								
1965	3816	2740	2585	2108	1776	2796	1953	17,775
1970	4080	3696	2716	2566	2085	3229	2245	20,617
1975	4062	3977	3668	2697	2540	3765	2676	23,384
1980	3808	3986	3952	3644	2670	4522	3101	25,683
1985	3510	3760	3966	3928	3610	5104	3628	27,506
1990	3371	3478	3744	3944	3893	6170	4369	28,968
1995	3726	3340	3464	3723	3908	7368	4934	30,463
2000	3887	3692	3327	3444	3689	7659	5967	31,664
TRANSICION EXTENDIDA A TRAVES DE 35 AÑOS: $s = 7$								
1965	3816	2740	2585	2108	1776	2796	1953	17,775
1970	4238	3690	2715	2566	2085	3227	2244	20,766
1975	4512	4115	3659	2695	2538	3761	2672	23,952
1980	4615	4401	4084	3634	2667	4511	3091	27,004
1985	4628	4525	4373	4057	3598	5087	3611	29,879
1990	4552	4559	4500	4346	4019	6141	4344	32,460
1995	4375	4501	4538	4474	4306	7471	4907	34,572
2000	4264	4335	4483	4512	4433	8173	5934	36,134

Damos a continuación una serie de totales para el año 2000 más extensa que la que aparece en el cuadro 4.2.

Descenso extendido sobre		Número de mujeres con menos de 45 años en el 2000 D.C.
Ciclos	Años	
$s = 3$	15	27,308,000
$s = 4$	20	29,504,000
$s = 5$	25	31,664,000
$s = 6$	30	33,850,000
$s = 7$	35	36,134,000
$s = 8$	40	38,572,000

Cada quinquenio adicional sobre el que se extiende el descenso, suponiendo que comienza inmediatamente después de 1965, da origen a 2,2 millones de mujeres más al final del siglo, aproximadamente. Esto se puede comparar con el efecto de postergar el comienzo del descenso, prosiguiendo luego a través de él a un ritmo dado: una postergación de 5 años agregaría un 18 por ciento a la población (o en general, la fracción  $\lambda_1 - 1$ ).

Las ondas inducidas por el descenso en la tasa de natalidad, que difícilmente aparecen en la transición de 35 años, son notables en la transición de 15 años. En esta última,  ${}_5K_0$ , el número de niñas con menos de cinco años desciende bruscamente desde 3 816 000 en 1965 a 2 467 000 en 1980, luego salta a 3 333 000 en 1995; la columna 15-19 se eleva a 3 669 000 en 1980, para descender a 2 421 000 en 1995; a esto sigue un alza de 3 271 000 en 2010 (no aparece en el cuadro).

Tales cálculos hipotéticos ocupan un lugar intermedio entre la investigación empírica y la teoría, sin ser estrictamente ninguno de ellos. Los dos resultados principales del ejemplo precedente son las oscilaciones inducidas cuando el cambio en las tasas ha ocurrido en un período corto, como por ejemplo, 15 años, y el grado en que una transición más lenta aumenta la población final. El arte en este tipo de trabajo demográfico está en la construcción de preguntas bien definidas, las que no son, sin embargo, lo suficientemente simples como para que se puedan responder prontamente desde el punto de vista teórico. Un trabajo importante en esta línea es la simulación debida a Orcutt y sus colegas (1961).

Frank Oechsli investigó lo que sucede a varias características de una población, si la fecundidad decae bruscamente en un período quinquenal, en tanto que la mortalidad permanece constante. El llevó la población promedio de Taiwán 1950-1959 hasta 1961, y luego la sometió a la fecundidad por edades de Japón 1963, proyectando ambos sexos en base a los nacimientos según edad de la madre. El lector puede comentar los resultados que he extraído del trabajo de Oechsli (cuadro 4.3). Puede hacer conjeturas para explicarse por qué la tasa bruta de crecimiento natural toma un total de 60 años en volverse negativa; por qué el porcentaje de la población menor de 15 años de edad cae rápidamente a su nivel final, pero el porcentaje sobre 65 sube lentamente y a un paso acelerado; por qué oscila la relación de dependencia; por qué la relación de masculinidad cambia de manera tan considerable. En la teoría de los capítulos

**CUADRO 4.3**  
**PROYECCION DE LA POBLACION DE CHINA (TAIWAN), 1956, SUPONIENDO MORTALIDAD CONSTANTE**  
**Y UNA FECUNDIDAD QUE DESCIENDE ENTRE 1961 Y 1966 AL NIVEL**  
**DE LAS TASAS ESPECIFICAS POR EDADES DE JAPON EN 1963<sup>a</sup>**

Año	Población (en miles)	Tasa bruta de natalidad	Tasa bruta de mortalidad	Tasa bruta de crecimiento natural	Porcentaje en las edades			Relación de depen- dencia <sup>b</sup>	Δ <sup>c</sup>	Número de hombres por cada 100 mujeres
					0-14	15-64	65 y más			
1961	11,095	40.1	6.7	33.4	46.2	50.8	3.0	0.969	3.2	103.5
1966	11,595	15.3	5.8	9.5	39.4	57.2	3.4	0.748	26.5	103.0
1971	12,150	16.7	6.4	10.3	30.0	66.2	3.9	0.511	23.4	102.5
1976	12,846	20.3	7.1	13.2	21.6	73.8	4.5	0.355	21.2	101.9
1981	13,762	23.4	7.8	15.6	24.3	70.6	5.0	0.416	20.4	101.3
1991	15,367	15.0	8.8	6.2	26.6	67.1	6.3	0.490	17.8	100.2
2001	15,925	13.6	10.3	3.3	20.4	71.3	8.3	0.403	13.7	99.1
2011	16,451	16.0	12.5	3.5	20.0	70.1	9.9	0.426	11.1	98.2
2021	16,542	13.1	14.7	-1.6	21.0	64.0	15.1	0.563	8.8	97.2
2031	16,016	13.4	16.7	-3.3	19.1	64.9	16.0	0.542	7.4	96.6
2041	15,598	14.5	16.9	-2.4	19.9	66.8	13.3	0.496	5.5	96.8
2051	15,252	13.4	15.0	-1.6	20.3	64.3	15.4	0.556	3.8	97.0
2061	14,851	13.7	16.6	-2.9	19.5	65.2	15.3	0.533	3.0	96.6
2111	13,106	13.7	16.1	-2.4	19.9	65.0	15.1	0.538	0.8	96.8
2161	11,554	13.8	16.2	-2.4	19.9	65.3	14.9	0.532	0.3	96.8

<sup>a</sup> Programado por Frank Oechsli.

<sup>b</sup> Porcentajes en las edades 0-14 y 65 y más, dividido por el porcentaje en 15-64.

<sup>c</sup> Desviación de la distribución por edades observada respecto de la distribución por edades estables, medida a través del índice de disimilitud Δ: suma de diferencias positivas en porcentajes.



7 y 13, como así también en otras secciones, se encontrará ayuda para responder a estas preguntas.

## 4.2. ANÁLISIS DE COLECCIONES DE TABLAS DE VIDA

Se pueden usar métodos de interpolación, aplicables a las tablas de vida o distribuciones de fecundidad, como así también a matrices, para determinar conjuntos intermedios o típicos. La discusión que sigue se hará en términos de las tablas de vida, por ser el caso más usual. En ausencia de los datos relativos a un país o territorio, sentimos la tentación de recurrir al uso de la tabla de mortalidad de otro país cuya población suponemos similar. Si uno tiene razones para creer que el país de interés tiene una cierta  $\dot{e}_0$ , por ejemplo, puede buscar una estructura de la mortalidad por edades derivada de las estadísticas vitales en otros países que tengan la misma  $\dot{e}_0$ . Las *tablas modelo de vida* constituyen una manera de sistematizar esta búsqueda.

Ellas también proveen una manera de estudiar cambios en la mortalidad a través del tiempo. Las tablas de vida de Suecia están disponibles para todo el siglo XIX. ¿Forman éstos un sistema uniparamétrico, o sea, las tablas intermedias caen en una recta de interpolación entre la primera y la última? Una manera simple de examinar esto consiste en usar dos tablas extremas para generar un conjunto intermedio. Si el índice que se va a usar es  $\dot{e}_{10}$ , podemos observar, por ejemplo, que los hombres suecos mostraron para los 5 años centrados en 1800 una  $\dot{e}_{10} = 45,86$ , y para los cinco años centrados en 1900 una  $\dot{e}_{10} = 52,93$ . Entonces mediante una interpolación lineal se puede construir un conjunto de tablas, por ejemplo, a intervalos de un año sobre  $\dot{e}_{10}$ .

La interpolación se puede poner simplemente en términos de una ponderación  $w$ . Ponderamos nuestra tabla de 1900 con  $w_i$  y a la de 1800 con  $1 - w_i$ , de modo que

$$52.93w_i + 45.86(1 - w_i) = i, \quad (4.2.1.)$$

donde  $i$  es la  $\dot{e}_{10}$  o índice de la tabla modelo. La resolución de (4.2.1) para  $w_i$  da

$$w_i = \frac{i - 45.86}{52.93 - 45.86},$$

o si  $\dot{e}_{10}$  y  $\dot{e}'_{10}$  son los dos esperanzas observadas e  $i$  es la  $\dot{e}_{10}$  del modelo deseado, tenemos

$$w_i = (i - \dot{e}'_{10}) / (\dot{e}_{10} - \dot{e}'_{10}). \quad (4.2.2)$$

Las ponderaciones  $w_i$  y  $1 - w_i$  se deberían luego aplicar a la columna  $q_x$  de las dos tablas observadas para determinar las  $q_x$  intermedias, y de estas últimas se calcularía el resto de la tabla modelo según la manera usual. [¿Reproduciría  $\dot{e}_{10}$  exactamente el valor intermedio así determinado? ¿Qué se puede decir sobre la linealidad del proceso de computación de la tabla de vida?]

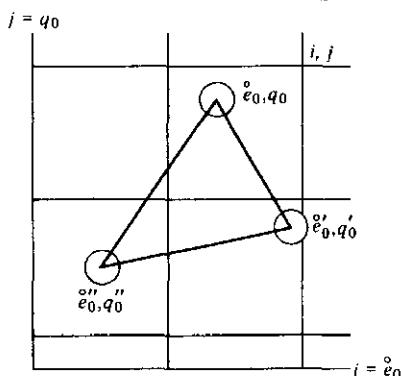
Para el valor interpolado  $\dot{e}_{10} = i = 49,00$  las ponderaciones son  $1 - w = 0,5559$  para el año 1800 y  $w = 0,4441$  para 1900. Estos se aplicaron a las  $q_x$  de las tablas observadas en 1800 y 1900:  $(0,5559)({}_8q_x) + (0,4441)({}_8q'_x)$  para obtener las  ${}_8q_x$  de la tabla interpolada que tendrá a  $\dot{e}_{10} = 49,00$ .

Surge la pregunta acerca de cuán buena es la aproximación de esta tabla ficticia respecto de la tabla observada en Suecia, cuya  $\dot{e}_{10}$  es aproximadamente

49,00. Esta muestra para 1858-1862 una  $\hat{e}_{10}$  de 48,99. Su  $\hat{e}_0$  es 43,07 (contra 42,16 de la tabla interpolada); su  $q_0 = 0,1481$  (contra 0,1747);  $q_{20} = 0,0348$  (contra 0,0376);  $q_{40} = 0,0578$  (contra 0,0593). Los cambios en la mortalidad de Suecia, a través del siglo XIX, no se produjeron finalmente para todas las edades. (Una manera alternativa de examinar esencialmente el mismo problema se presenta en los cuadros 7.6 a 7.8 y en la discusión de la sección 7.4.)

Las discrepancias respecto a la recta son a veces lo suficientemente grandes como para sugerir que se requeriría un conjunto biparamétrico a fin de representar los cambios durante un período. Tratamos ahora no con una recta, sino con tres puntos en un triángulo, a partir de los cuales podemos llenar el plano linealmente. Si ponemos índices sobre  $\hat{e}_{10}$  y  $q_0$  y observamos tablas con  $\hat{e}_{10}, q_0; \hat{e}'_{10}, q'_0; \hat{e}''_{10}, q''_0$ , entonces las ponderaciones apropiadas  $w, w', 1 - w - w'$ , se determinan para la tabla modelo con  $\hat{e}_{10} = i, q_0 = j$ , resolviendo

$$\begin{aligned} w\hat{e}_{10} + w'\hat{e}'_{10} + (1 - w - w')\hat{e}''_{10} &= i, \\ wq_0 + w'q'_0 + (1 - w - w')q''_0 &= j, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$



**GRAFICO 4.1**  
INTERPOLACION ENTRE LAS  
TRES TABLAS DE VIDA  
DADAS.

para las dos incógnitas,  $w$  y  $w'$  (gráfico 4. 1).

El anterior esquema de interpolación sirve para un estudio preliminar de la incidencia por edad del cambio en la mortalidad, pero no es utilizable, en la práctica, para construir tablas modelo por ser estadísticamente ineficiente (no existe manera fácil de incorporar en él una gran cantidad de tablas observadas).

La regresión constituye una manera de incorporar las observaciones pertinentes, y es la base de los dos conjuntos de tablas modelo disponibles actualmente: uno publicado por las Naciones Unidas (1955, 1956) y el otro por la Oficina de Investigaciones de Población de Princeton (Coale y Demeny, 1966). El conjunto de las Naciones Unidas tiene un solo parámetro; dada la tasa de mortalidad infantil, queda identificada una tabla única. El conjunto de Princeton es más flexible; dada la esperanza de vida a los diez años, se dispone de cuatro tablas, designadas como Norte, Sur, Este y Oeste, que representan estructuras por edades diferentes para una misma  $\hat{e}_{10}$ .

En el procedimiento de Princeton, se reunieron tablas confiables, las que fueron ordenadas en cuatro conjuntos homogéneos. Dentro de cada uno de los conjuntos se llevó a cabo la regresión de  $q_x$  sobre  $\hat{e}_{10}$ , según la forma  $q_x = A_x + B_x \hat{e}_{10}$ . Una vez obtenidos  $A_x$  y  $B_x$ , se pudo construir un conjunto de  $q_x$ , y por tanto, una tabla de vida para cada  $\hat{e}_{10}$ . Las poblaciones estables (o sea, el vector  $\{K_1\}$ ) fueron construidas asignando tasas intrínsecas de crecimiento. Se puede entrar al conjunto de tablas modelo mediante una serie de características, incluyendo las tasas brutas de natalidad y mortalidad o la tasa neta de reproducción.

La utilidad del estudio estadístico de grupos de tablas de vida, que representan una sucesión en el tiempo o una sección transversal, demostrada por el trabajo de Coale y Demeny (1966), ha estimulado a William Cummings y al

CUADRO 4.4

MEDIA Y DESVIACION TIPICA PARA TRES GRUPOS DE TABLAS DE VIDA MASCULINAS

- a) 50 tablas para Suecia y otros países europeos, de 1780 a 1910
- b) 40 tablas para países latinoamericanos, desde 1945.
- c) 83 tablas para países desarrollados, desde 1945 \*

	M E D I A			DESVIACION TIPICA		
	a) 50 tablas para Suecia y otros países europeos desde 1780 a 1910	b) 40 tablas para países latinoamerica- nos desde 1945	c) 83 tablas para países desarrollados desde 1945	a) 50 tablas para Suecia y otros países europeos desde 1780 a 1910	b) 40 tablas para países latinoamerica- nos desde 1945	c) 83 tablas para países desarrollados desde 1945
$\bar{x}_{10}$	48.92	57.54	60.18	3.82	2.84	1.88
$q_0$	0.1622	0.0743	0.0395	0.0438	0.0276	0.0201
$q_{10}$	0.0196	0.0066	0.0030	0.0087	0.0029	0.0010
$q_{20}$	0.0364	0.0160	0.0084	0.0096	0.0074	0.0028
$q_{30}$	0.0430	0.0225	0.0096	0.0130	0.0083	0.0030
$q_{40}$	0.0614	0.0341	0.0183	0.0177	0.0085	0.0044
$q_{50}$	0.0966	0.0616	0.0481	0.0243	0.0143	0.0093
$q_{60}$	0.1727	0.1271	0.1185	0.0336	0.0385	0.0193
$q_{70}$	0.3475	0.2452	0.2606	0.0480	0.0663	0.0309

\* Los cuadros 4.4, 4.5 y 4.6 fueron programados por William Cummings. El comenzó con la población y las muertes por edades reunidas a partir de fuentes nacionales por Wilhelm Flieger, construyó alrededor de 250 tablas de vida para hombres según el método de la sección 1.2, rechazó aquellas tablas que se alejaban de la recta de regresión de sus grupos respectivos, y con las tablas restantes calculó las constantes que se muestran aquí.

**CUADRO 4.5**  
**COEFICIENTES DE CORRELACION ENTRE  $q_x$  Y  $\hat{e}_{10}$  PARA LOS TRES GRUPOS DE TABLAS DE VIDA PARA HOMBRES**

$q_x$	a) 50 tablas para Suecia y otros países europeos desde 1780 hasta 1910	b) 40 tablas para países latinoamericanos desde 1945	c) 83 tablas para países desarrollados desde 1945
$q_0$	-0.8515	-0.1759	-0.5534
$q_{10}$	-0.8300	-0.1907	-0.5326
$q_{20}$	-0.8379	-0.3933	-0.6308
$q_{30}$	-0.9722	-0.5068	-0.7621
$q_{40}$	-0.9793	-0.7905	-0.8943
$q_{50}$	-0.9420	-0.8869	-0.9499
$q_{60}$	-0.8981	-0.6722	-0.8931
$q_{70}$	-0.8870	-0.6754	-0.8967

autor para hacer los cálculos en tres de tales grupos. El primero a) consiste de 50 tablas históricas para Suecia y otros países europeos, cubriendo un período que va desde 1780 a 1910. El segundo b) está compuesto de 40 tablas latinoamericanas contemporáneas, referentes a la mortalidad de las últimas dos décadas. El tercero c) es también contemporáneo, siendo 83 tablas de países desarrollados de Europa, más los Estados Unidos, Canadá y Australia. El método de cálculo para las tablas individuales es el de la sección 1.2.

La mortalidad disminuye del primero al segundo, y del segundo al tercero, como aparece en la parte del cuadro 4.4 que da las medias; la media de  $\hat{e}_{10}$  sube desde 48,92 para (a) las tablas históricas a 57,54 para (b) Latinoamérica, a 60,18 para (c) los países contemporáneos desarrollados. El mejoramiento se aprecia mayormente en las edades jóvenes: aparece una baja en  $q_{10}$  de dos tercios, del primero al segundo grupo, y de un medio del segundo al tercero; por el contrario, en las edades más avanzadas no aparecen diferencias tan espectaculares.

La varianza entre países parece disminuir con la mortalidad. La desviación típica de  $\hat{e}_{10}$  es 3,82 años para (a) las tablas históricas, 2,84 para (b) los países latinoamericanos, y 1,88 para (c) los países desarrollados (cuadro 4.4). Tal descenso en la varianza es de esperar puesto que la mortalidad está siendo empujada contra un límite inferior; mientras más se acerca, menos oportunidad para una variación debida al azar.

Los coeficientes de correlación, que miden el grado en que las diversas  $q_x$  se pueden predecir a partir de las  $\hat{e}_{10}$ , son decididamente mayores para las series históricas que para las otras dos (cuadro 4.5). Esto está relacionado con la mayor heterogeneidad de la mortalidad (mostrado por la mayor varianza) expresada en las series históricas; las tablas más homogéneas, combinadas juntas en las dos series contemporáneas ofrecen menos espacio para la correlación.

**CUADRO 4.6**  
**REGRESION DE  $q_x$  SOBRE  $e_{x0}$  PARA TRES GRUPOS DE TABLAS DE VIDA**  
**PARA HOMBRES**

a) 50 tablas de mortalidad para Suecia y otros países europeos desde 1780 a 1910	b) 40 tablas de mortalidad para países latinoamericanos desde 1945	c) 88 tablas de mortalidad de países desarrollados desde 1945
$q_0 = 0.6393 - 0.00975e_{10}$	$q_0 = 0.1726 - 0.00171e_{10}$	$q_0 = 0.3955 - 0.00592e_{10}$
$q_1 = 0.4382 - 0.00704e_{10}$	$q_1 = 0.2079 - 0.00289e_{10}$	$q_1 = 0.1014 - 0.00155e_{10}$
$q_5 = 0.1963 - 0.00332e_{10}$	$q_5 = 0.0532 - 0.00073e_{10}$	$q_5 = 0.0246 - 0.00035e_{10}$
$q_{10} = 0.1116 - 0.00188e_{10}$	$q_{10} = 0.0177 - 0.00019e_{10}$	$q_{10} = 0.0201 - 0.00028e_{10}$
$q_{15} = 0.0975 - 0.00148e_{10}$	$q_{15} = 0.0593 - 0.00085e_{10}$	$q_{15} = 0.0381 - 0.00054e_{10}$
$q_{20} = 0.1392 - 0.00210e_{10}$	$q_{20} = 0.0745 - 0.00102e_{10}$	$q_{20} = 0.0644 - 0.00093e_{10}$
$q_{25} = 0.1706 - 0.00270e_{10}$	$q_{25} = 0.1150 - 0.00167e_{10}$	$q_{25} = 0.0742 - 0.00109e_{10}$
$q_{30} = 0.2047 - 0.00331e_{10}$	$q_{30} = 0.1081 - 0.00149e_{10}$	$q_{30} = 0.0820 - 0.00120e_{10}$
$q_{35} = 0.2355 - 0.00379e_{10}$	$q_{35} = 0.1747 - 0.00256e_{10}$	$q_{35} = 0.1049 - 0.00154e_{10}$
$q_{40} = 0.2837 - 0.00454e_{10}$	$q_{40} = 0.1695 - 0.00235e_{10}$	$q_{40} = 0.1444 - 0.00210e_{10}$
$q_{45} = 0.3247 - 0.00510e_{10}$	$q_{45} = 0.2519 - 0.00361e_{10}$	$q_{45} = 0.2181 - 0.00314e_{10}$
$q_{50} = 0.3888 - 0.00597e_{10}$	$q_{50} = 0.3187 - 0.00447e_{10}$	$q_{50} = 0.3315 - 0.00471e_{10}$
$q_{55} = 0.4355 - 0.00632e_{10}$	$q_{55} = 0.3412 - 0.00453e_{10}$	$q_{55} = 0.4766 - 0.00664e_{10}$
$q_{60} = 0.5590 - 0.00790e_{10}$	$q_{60} = 0.6507 - 0.00910e_{10}$	$q_{60} = 0.6727 - 0.00921e_{10}$
$q_{65} = 0.7169 - 0.00965e_{10}$	$q_{65} = 0.9562 - 0.01372e_{10}$	$q_{65} = 0.8852 - 0.01179e_{10}$
$q_{70} = 0.8921 - 0.01113e_{10}$	$q_{70} = 1.1516 - 0.01575e_{10}$	$q_{70} = 1.1503 - 0.01478e_{10}$
$q_{75} = 1.0244 - 0.01109e_{10}$	$q_{75} = 1.6273 - 0.02284e_{10}$	$q_{75} = 1.4449 - 0.01768e_{10}$
$q_{80} = 1.1312 - 0.00994e_{10}$	$q_{80} = 1.4629 - 0.01753e_{10}$	$q_{80} = 1.6294 - 0.01809e_{10}$

Sin embargo, las correlaciones son en todos los casos suficientemente altas como para invitarnos a calcular las regresiones de las  $q_x$  sobre  $\hat{e}_{10}$  (cuadro 4.6). (Se puede verificar el cuadro 4.6 a partir de los cuadros 4.4 y 4.5, sujeto a errores de redondeo). En una primera impresión la variación entre los grupos a), b) y c) es desconcertante, tanto en la ordenada al origen de la regresión como en el coeficiente de  $\hat{e}_{10}$ . Sin embargo, esta variación es un poco engañosa; las tres rectas pueden tener diferente pendiente e intercepción y aun así concordar razonablemente bien en el limitado rango de  $\hat{e}_{10}$  que es de interés. Se pueden construir gráficos para juzgar la concordancia de las rectas.

El error de muestreo constituye una ayuda adicional para juzgarlas. Escribiendo el error típico al lado de cada coeficiente, tenemos para  $q_{30}$ :

a) 50 tablas históricas

$$q_{30} = 0.2047 \pm 0.0056 - (0.00331 \pm 0.00012)\hat{e}_{10},$$

b) 40 tablas para países latinoamericanos

$$q_{30} = 0.1081 \pm 0.0236 - (0.00149 \pm 0.00041)\hat{e}_{10},$$

c) 83 tablas de países desarrollados

$$q_{30} = 0.0820 \pm 0.0068 - (0.00120 \pm 0.00011)\hat{e}_{10}.$$

La mayor variación está en Latinoamérica, como corresponde a las bajas correlaciones del cuadro 4.4. En qué medida esto se debe a diferentes grados de integridad en los registros o variaciones genuinas, es una pregunta que no se puede responder sin información adicional. Las diferencias entre a), b) y c) no son todas explicables por la variabilidad del muestreo.

El método que se describió arriba equivale a estratificar los datos, esto es, las tablas de mortalidad representan las observaciones, y, dentro de los estratos, se trabaja con la regresión de  $q_x$  sobre  $\hat{e}_{10}$ . Una alternativa podría consistir en retener todos los datos en un solo estrato, y calcular la regresión múltiple de las  $q_x$  sobre dos indicadores, por ejemplo  $\hat{e}_{10}$  y  $q_0$ . Las propiedades estadísticas de esta alternativa están bajo estudio.

### 4.3. EXTRAPOLACION A POBLACIONES FUTURAS

Una exposición de las matemáticas de población no está más directamente relacionada con la predicción de cambios futuros que un libro de hidrodinámica con la predicción de las inundaciones. Lo más que uno puede esperar es que las formulaciones teóricas darán a los encargados de hacer las proyecciones, alguna ayuda al reflexionar sobre el problema. Su importancia está sugerida por la sesión especial que se dedicó al tema de las proyecciones en la Conferencia Mundial de Población de las Naciones Unidas, 1965. Los oradores se refirieron con entusiasmo a la creciente demanda pública relativa a proyecciones de población. Ellos también estuvieron de acuerdo en que la predicción sobre población es imposible (P. R. Cox, 1965). En conexión con esto citamos las palabras de un temprano predictor, Edwin Cannan (1895, pág. 505): "Es más fácil pronunciar advertencias contra las profecías que abstenerse de ellas."

Al hacer enunciados sobre la matriz  $\mathbf{M}$ , y al aseverar que  $\mathbf{M}^t\{\mathbf{K}^{(0)}\}$  da la distribución por edades de aquí a  $5t$  años, bajo el supuesto de un régimen

fijo de nacimientos y muertes, no se está proyectando, sino más bien analizando la naturaleza de las tasas (pasadas) incorporadas en  $M$ . Esto puede ser útil simplemente para decirnos que las tasas existentes no pueden continuar, tal como argüimos anteriormente para México. No se necesita ir a otro país para tales ilustraciones: la mantención de las tasas específicas femeninas por edades de los Estados Unidos en 1960, actuando sobre la población femenina de los Estados Unidos 1960, produciría 3,4 billones<sup>5</sup> de personas de ambos sexos en 150 años. (En realidad las tasas de 1960 no continuaron, y con las tasas de 1965 se llegaría a menos de 1,4 billones en 150 años).

Frecuentemente nos gustaría ver en detalle las consecuencias para la población futura de un curso supuesto de cambio en el régimen de mortalidad y fecundidad. Una manera de reunir la suposición consiste en extender hacia el futuro los cambios del pasado reciente, ajustando un polinomio. Si  $M^{(1)}$  es la matriz de proyección basada en la mortalidad y fecundidad de 1960-1964 y  $\{K^{(1)}\}$  es la distribución por edades del 1º de enero de 1960, entonces  $M^{(1)}\{K^{(1)}\}$  será la distribución por edades del día 1º de enero de 1965. Supongamos que  $M^{(0)}$  es la matriz de proyección basada en la fecundidad de 1955-1959. Si la diferencia entre  $M^{(0)}$  y  $M^{(1)}$  va a continuar en forma lineal, y  $\Delta M^{(0)} = M^{(1)} - M^{(0)}$  es la matriz de las diferencias, entonces la población de 1965 será proyectada hasta 1970 con

$$M^{(2)} = M^{(0)} + 2 \Delta M^{(0)} .$$

La población de 1955 + 5s basada en una extrapolación polinómica de la matriz, se escribiría simbólicamente

$$\{K^{(s+1)}\} = M^{(s)}\{K^{(s)}\} = (1 + \Delta)^s M^{(0)}\{K^{(s)}\} , \quad (4.3.1)$$

donde  $(1 + \Delta)^s M^{(0)}$  se debe interpretar como

$$(1 + \Delta)^s M^{(0)} \equiv M^{(0)} + s \Delta M^{(0)} + \frac{(s)(s-1)}{2} \Delta^2 M^{(0)} + \dots$$

El lector puede bosquejar un cálculo de las diferencias finitas para matrices en su aplicación a la demografía. Este cálculo sería idéntico, en cuanto a resultados, con la aplicación de la fórmula de extrapolación a cada elemento de la matriz de proyección individualmente.

Se ha diseñado un programa de computación que incorpora como argumentos la información corriente sobre distribución por edades, fecundidad, mortalidad y migración y los cambios esperados de acuerdo a la intuición del usuario. Este incorpora en una tabla su opinión sobre el porcentaje de cambio durante los cinco años subsiguientes a la última fecha, durante los cinco años que siguen a ésta, etc., en cuanto a nacimientos, muertes y migración neta; estos cambios porcentuales se pueden designar como  $\Delta b$ ,  $\Delta d$  y  $\Delta n$  respectivamente.

La matriz de proyección inicial  $M$ , que representa las últimas observaciones, se descompone en tres componentes: una matriz  $B$  para los nacimientos, con elementos distintos de cero sólo en su fila superior; una matriz  $s$  para las relaciones de supervivencia, cuyos únicos elementos no nulos están en la subdia-

<sup>5</sup> Hay que recordar que en Francia y Estados Unidos un billón significa un millar de millones. (N. del T.)

gonal, y  $N$ , también con ceros excepto en la subdiagonal, para tener en cuenta la migración neta. En símbolos

$$M = U - (U - S) + B + N,$$

siendo  $U$  una matriz con unos en la subdiagonal y ceros en las celdas restantes.

En cada ciclo, las matrices componentes que efectivamente se usan son las del ciclo precedente ajustadas por los porcentajes  $\Delta b$ ,  $\Delta d$  y  $\Delta n$ :

$$M^{(t+1)} = U - (U - S^{(t)}) \left(1 + \frac{\Delta d}{100}\right) + B^{(t)} \left(1 + \frac{\Delta b}{100}\right) + N^{(t)} \left(1 + \frac{\Delta n}{100}\right). \quad (4.3.2)$$

Siendo la proyección un asunto demasiado difícil para la demografía teórica, lo más que puede hacer una obra como ésta es presentar una variedad de modelos entre los que el encargado de prepararla puede seleccionar el que considere apropiado. Lamentablemente, los modelos de la literatura matemática sobre los que se basa esta obra, en su gran mayoría se refieren a secciones transversales de datos para un período dado de tiempo, por ejemplo, un año calendario. Sólo de vez en cuando se hace referencia al seguimiento de una cohorte a través de su vida reproductiva. Pero si la decisión sobre el número de hijos que ellos engendrarán se hace para cada pareja con respecto a su vida reproductiva completa, entonces las fluctuaciones de año a año en los periodos agregados tienen poca consecuencia (Ryder, 1964). Esto está implícito en las proyecciones de la Oficina de Censos de los Estados Unidos, las que suponen cierto número de nacimientos para el tamaño de la familia completa: de 3,35 a 2,45 por mujer al final del período de vida reproductiva (*Statistical Abstract of the United States*, 1966, pág. 6).

Una completa incorporación de este enfoque de cohortes es parte de la demografía matemática del futuro.

#### 4.4. AJUSTE DE DATOS

En una población en que los datos sobre nacimientos y muertes son incompletos o de exactitud dudosa, es posible completar su historia demográfica mediante el uso de los censos. Si se dispone de buenos censos periódicos y se conoce la migración, o se puede despreciar, entonces las inferencias acerca de los nacimientos y las muertes pueden ser relativamente precisas. En principio, las tasas específicas de mortalidad por edades se pueden calcular en base a un par de censos sucesivos, y también las tasas brutas de natalidad, pero no las tasas específicas de fecundidad por edades. Las últimas no son *identificables*: lo registrado en dos censos es consistente con una variedad de patrones de fecundidad por edades (Johnston, 1963, págs. 249 y siguientes, y otros libros sobre econometría discuten problemas de identificación. Véase también Blalock, 1964).

Si  $M^{(t)}$  de (4.3.2) se usa para predecir, no el futuro desconocido, sino un censo que se tomó realmente en el momento  $t + 1$ , las discrepancias entre el  $M^{(t)}\{K^{(t)}\}$  esperado y  $\{K^{(t+1)}\}$  (el censo en el momento  $t + 1$ ) ocurren en cada categoría de edad y dan información referente a las cantidades  $\Delta d$ ,  $\Delta b$  y  $\Delta n$  de



(4.3.2), lo cual en este contexto las consideramos como correcciones totales de los datos de natalidad, mortalidad y migración observados.

El problema consiste en cómo usar sistemáticamente la redundancia que está contenida en el conjunto de información (en la práctica, inconsistente) sobre población, nacimientos, muertes y migración, con el objeto de mejorar los datos. Que tal mejoramiento es posible está demostrado por Coale y Zelnick (1963) para los Estados Unidos; su éxito dependió de los supuestos que se hicieron, los que se confirmaron en otros trabajos, sobre qué era lo que más probablemente estaba sujeto a error y en qué dirección. Ellos sabían, por ejemplo, que las tasas de natalidad y las poblaciones censales con menos de cinco años de edad tienen más posibilidades de estar subenumeradas que lo contrario, y que de los sucesivos censos a través de los cuales pasa un individuo, tiene más posibilidades de ser captado a los 10 años que cuando tiene 20.

Supongamos que un investigador ha ideado un conjunto de reglas o supuestos que se pueden aplicar objetivamente para reemplazar los datos inconsistentes con un conjunto consistente, y llega a una colección de tablas de vida, totales de población, nacimientos y muertes tales que, comenzando con la población ajustada de cualquier fecha, restando las muertes corregidas y sumando los nacimientos ajustados y la inmigración neta, le lleva exactamente a la población corregida en la siguiente fecha censal, edad por edad y para cada sexo. Esta larga operación de ajuste es totalmente factible con el computador. Llamemos a este nuevo conjunto, el primer ajuste,  $A_1$ . Con supuestos diferentes uno podría llegar a otro valor corregido, por ejemplo  $A_2$ , de nuevo perfectamente consistente en sí mismo, pero diferente de los datos crudos y de  $A_1$ , en todas o prácticamente todas las cifras.

Será necesario un sistema de cuentas para elegir entre  $A_1$  y  $A_2$ . Tal sistema llevaría la cuenta de cada discrepancia entre la cifra original y la corregida mediante una cantidad igual a su cuadrado, por ejemplo con una ponderación de 10 si la cifra corregida fue más baja que el censo original u otro registro, y una ponderación de 1 si fue más alta que lo registrado originalmente; tal vez con una ponderación de 5 para las discrepancias en nacimientos y muertes, contra una de 1 para diferencias en migración y cantidad de población. Relativo al sistema de llevar estas cuentas, la comparación de los dos conjuntos de ajustes es perfectamente objetiva y es posible decir cuál de los sistemas de ajuste,  $A_1$  o  $A_2$ , es más adecuado en su conjunto, notando cuál tiene el puntaje más bajo. La elección se puede extender a otros sistemas de ajuste,  $A_3$ ,  $A_4$ , etcétera.

Hasta aquí hemos llegado sólo a una manera de corregir las inconsistencias. Si todos los datos fueran bajos (por ejemplo, por omisión de una región del país de todas las estadísticas censales, de natalidad y mortalidad), el procedimiento anterior no descubriría este hecho. Cualquier conocimiento de subenumeración o subregistro se debería aplicar como una corrección al principio, y el ajuste mencionado sería a las cifras corregidas más que a las originalmente observadas. Nuestro procedimiento formal queda como una manera de ajustar inconsistencias más que de eliminar errores.

#### 4.5. SOBRE ERGODICIDAD FUERTE Y DEBIL

Los ejercicios referentes a la proyección de corto plazo sugieren la pregunta acerca de qué sucedería si se continuara indefinidamente la proyección a las tasas específicas por edades observadas en un período dado. Esta pregunta ha

fascinado a los estudiosos del tema, y hay una gran cantidad de literatura que la trata (Sharpe y Lotka, 1911; Haldane, 1927; Leslie, 1945). Existen diferentes maneras de demostrar el teorema de Lotka según el que una población sujeta a constantes tasas específicas de mortalidad y fecundidad por edades se aproximará asintóticamente a una distribución por edades que sólo depende del régimen de mortalidad y fecundidad, una de las cuales se discute con la ayuda de las propiedades de las matrices no negativas en la sección 3.2, otra dedicada al caso continuo en la sección 5.2. La distribución por edades final es fija y no depende de la distribución por edades original ni aun de las tasas específicas de fecundidad por edades, excepto en la medida en que estas últimas se reflejan en la tasa intrínseca  $r_1$  (capítulo 5) o la raíz real  $\lambda_1$  (capítulo 3). Esta tendencia a olvidar la distribución por edades inicial, bajo la acción de un conjunto fijo de tasas vitales la podemos denominar *ergodicidad fuerte*, siguiendo a Hajnal (1958).

De un interés comparable es la *ergodicidad débil*, una propiedad de las distribuciones por edades sujetas a mortalidad y fecundidad cambiantes. Es posible una generalización sustancial del teorema de Lotka: si dos o más poblaciones están sujetas a patrones de mortalidad y fecundidad por edades que pueden cambiar en el tiempo pero que son los mismos para las dos poblaciones, entonces después de un período suficientemente largo sus distribuciones por edades vendrán a parecerse entre sí tanto como a uno le interese especificar. Esta proposición fue conjeturada por Coale y demostrada por López (1961). La propiedad de ergodicidad débil incluye la ergodicidad fuerte, pero mientras la distribución por edades final para esta última está compactamente especificada (como  $\{K_1\}$ , el vector columna estable para la raíz dominante), no ocurre lo mismo con la primera. Debido a su generalidad y a la luz que arroja respecto de la naturaleza de una proyección de población, vale la pena que sigamos el argumento de Coale-López con algún detalle.

Se da una sucesión de matrices  $M^{(t)}$  (en la cual el  $j$ ésimo elemento de la  $i$ ésima fila de la  $t$ ésima matriz es  $m_{ij}^{(t)}$ ); cada  $M^{(t)}$  tiene al menos dos elementos positivos consecutivos en la primera fila en posiciones fijas, sólo elementos positivos en la subdiagonal, y ceros en las demás. Pensaremos en una presentación anual, de modo que cada vez que  $M^{(t)}$  premultiplica al vector columna de la distribución por edades, lleva la población al siguiente año. La edad de las personas se toma en su último cumpleaños; ellas saltan un año cada 365 días. El rango de edades es finito; todos mueren a la edad  $\omega$  cuanto más.

Las dos diferentes distribuciones iniciales por edades sobre las que actuarán las matrices de la sucesión son  $\{G^{(0)}\}$  y  $\{K^{(0)}\}$ , cuyos elementos genéricos, representando el número de individuos que tienen  $a$  años de edad en su último cumpleaños, son  $g_a^{(0)}$  y  $k_a^{(0)}$ . Después de  $t$  premultiplicaciones los vectores serán  $\{G^{(t)}\}$  y  $\{K^{(t)}\}$ :

$$\begin{aligned} \{G^{(t)}\} &= M^{(t-1)}M^{(t-2)} \dots M^{(0)}\{G^{(0)}\}, \\ \{K^{(t)}\} &= M^{(t-1)}M^{(t-2)} \dots M^{(0)}\{K^{(0)}\}, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

con elementos típicos  $g_a^{(t)}$  y  $k_a^{(t)}$ . Se dice que los dos vectores representan la misma distribución por edades si para dos edades cualesquiera  $a$  y  $b$

$$\frac{g_a^{(t)}}{k_a^{(t)}} = \frac{g_b^{(t)}}{k_b^{(t)}}, \quad a = 0, 1, \dots, \omega - 1, \quad b = 0, 1, \dots, \omega - 1. \quad (4.5.2)$$

La propiedad de ergodicidad débil queda verificada si la diferencia

$$\frac{g_a^{(t)}}{k_a^{(t)}} - \frac{g_b^{(t)}}{k_b^{(t)}} \quad (4.5.3)$$

se hace arbitrariamente pequeña cuando  $t$  es suficientemente grande, para todo  $a$  y  $b$  hasta  $\omega - 1$  en su último cumpleaños. Los vectores  $\{G^{(t)}\}$  y  $\{K^{(t)}\}$  vendrían a tener la misma (generalmente cambiante) dirección aunque sus longitudes pueden diferir en alguna cantidad.

La prueba supondrá que existe un grupo de al menos dos edades consecutivas fijas, por ejemplo  $\beta - 1$  y  $\beta$ , en que la fecundidad es siempre mayor que algún número positivo  $\varepsilon$ . Esto elimina de consideración poblaciones hipotéticas tales como aquellas que tienen una sola edad de reproducción, para las cuales cualesquiera discrepancias iniciales respecto de la distribución por edades estable continuará indefinidamente (Bernardelli, 1941). La prueba alcanza solamente hasta la edad  $\beta$  que presenta un riesgo positivo de reproducción en todas las matrices, pero puede demostrarse que si dos poblaciones con la misma historia de fecundidad y de mortalidad tienen la misma distribución por edades hasta el final del conglomerado  $\beta - 1, \beta$ , tendrán entonces la misma distribución por edades más allá de éste (López, 1961, pág. 60). Las distribuciones por edades iniciales se supondrán positivas en todas las edades hasta el final del período reproductivo, de modo que todas las relaciones en (4.5.3) son números finitos, entre unos  $\varepsilon > 0$  y  $A < \infty$ ; la prueba puede extenderse a las distribuciones iniciales que contienen ceros.

La prueba comienza por reemplazar los pasos de un año de la proyección por un paso conglomerado que abarca  $r$  años. Nuestro primer objetivo consiste en demostrar que para algunas  $r$  el producto de las matrices

$$P^{(r)} = M^{(r)}M^{(r-1)} \dots M^{(1)} \quad (4.5.4)$$

cuando se expresa como matriz única es estrictamente positivo, es decir, no contiene elementos cero. ¿Es posible encontrar un número  $r = r_0$  por sobre el cual el producto (4.5.4) es una matriz que no contiene ceros?

La prueba de que existe un paso conglomerado al cual corresponde una matriz del producto semejante a (4.5.4) cuyos elementos son todos no cero comienza por considerar un elemento arbitrario de (4.5.4), digamos  $p_{ij}^{(r)}$ . Por la naturaleza de la multiplicación de matrices, éste debe estar constituido por la suma de todos los caminos posibles que comienzan en la hilera  $i$  éxima de  $M^{(r)}$  y que terminan en la columna  $j$  éxima de  $M^{(1)}$ .

Así

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{\nu} m_{i\nu}^{(2)} m_{\nu j}^{(1)}$$

para el producto de dos matrices, y

$$p_{ij}^{(r)} = \sum_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1}} m_{i\nu_1}^{(r)} m_{\nu_1 \nu_2}^{(r-1)} \dots m_{\nu_{r-1} j}^{(1)}, \quad (4.5.5)$$

para un producto de  $r$  matrices. El objetivo de la siguiente demostración es ver en qué circunstancias un camino como el de (4.5.5) puede evitar pasar a través de elementos cero.

Suponemos que los elementos no cero de cada matriz son al menos  $m_{1,\beta-1}$ ,  $m_{1,\beta}$  y  $m_{i,i-1}$ , donde  $\beta$  es la última edad en que la fecundidad es no cero en todas las matrices, e  $i$  recorre todos los valores 2, 3, ...,  $\beta$ . Queremos un producto de  $r$  matrices que darán un valor no cero para  $p_{ij}^{(r)}$ , el  $j$ ésimo elemento de la  $i$ ésima fila, y nos gustaría que éste fuera no cero para todos los órdenes  $r$  más allá de  $r_0$  del producto. El  $p_{ij}^{(r)}$  que buscamos se puede formar comenzando con  $m_{i,i-1}$  en el producto

$$m_{i,i-1}m_{i-1,i-2} \cdots m_{2,1}m_{1,\beta-1}, \quad (4.5.6)$$

que podría igualmente bien terminar con  $m_{1,\beta}$  y que de cualquier manera contiene  $i$  factores. [Si  $i = 1$ , tomaríamos  $m_{1,\beta-1}$  para (4.5.6)]. Continuaríamos con

$$m_{\beta-1,\beta-2}m_{\beta-2,\beta-3} \cdots m_{2,1}m_{1,\beta-1}, \quad (4.5.7)$$

que contiene  $\beta - 1$  factores, y se considera como escrito a la derecha de (4.5.6). Además, en algunos casos podríamos terminar con  $m_{1,\beta}$  en lugar de

$$m_{\beta-1,\beta-2}m_{\beta-2,\beta-3} \cdots m_{2,1}m_{1,\beta}, \quad (4.5.8)$$

que también contiene  $\beta - 1$  factores, pero estaría seguido por

$$m_{\beta,\beta-1}m_{\beta-1,\beta-2} \cdots m_{2,1}m_{1,\beta}, \quad (4.5.9)$$

que contiene  $\beta$  factores. Supongamos que (4.5.7) y (4.5.8) se aplican juntos  $p - 1$  veces, haciendo entre ambos  $(p - 1)(\beta - 1)$  factores, y que hay  $q$  conjuntos de (4.5.9) que contienen  $\beta$  factores cada uno. Supongamos finalmente que terminamos con

$$m_{\beta,\beta-1}m_{\beta-1,\beta-2} \cdots m_{j+1,j},$$

que contiene  $\beta - j$  factores, a menos que  $j = \beta$ , en cuyo caso este producto se omitiría. El producto combinado,  $P^{(r)}$ , que constituye una ruta tal que  $p_{ij}^{(r)}$  es no cero para todo  $i, j$ , contiene

$$\begin{aligned} r &= i + (p - 1)(\beta - 1) + q\beta + \beta - j \\ &= p(\beta - 1) + q\beta + i - j + 1 \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

factores.

La pregunta es ahora si todo  $r > r_0$  se puede descomponer en la expresión (4.5.10) para  $\beta$  dado, para cualquier  $i$  y  $j$ , mediante una selección adecuada de  $p$  y  $q$ . Esto es lo mismo que preguntar si  $r' = r - (i - j + 1)$  puede estar constituido por  $p(\beta - 1) + q\beta$  por mera elección de  $p$  y  $q$ .

Bastará demostrar que para algún número  $r'_0$  todos los enteros  $r'$  mayores que  $r'_0$  se pueden representar por  $p(\beta - 1) + q\beta$ ,  $p \geq 1$ ,  $q \geq 0$ . En efecto, dicha representación es posible para todo  $r' \geq (\beta - 1)^2$ . Para representar cualquier  $r' \geq (\beta - 1)^2$  divida  $r'$  por  $\beta - 1$ ; suponga que éste cabe  $u$  veces con un resto igual a  $v$ ,  $u \geq \beta - 1 > v \geq 0$ . En ese caso,  $r' = u(\beta - 1) + v = (u - v)(\beta - 1) + v\beta$ . Puesto que  $r' \geq (\beta - 1)^2$  sabemos que  $u - v$  es positivo; en consecuencia, es siempre posible representar  $r'$  mediante  $(u - v)(\beta - 1) + v\beta$  con  $u - v$  positivo y  $v$  no negativo. Este es el  $r' = p(\beta - 1) + q\beta$  que buscábamos, y que da

$$r = r'_0 + \max(i - j + 1) = (\beta - 1)^2 + \max(i - j + 1),$$

de modo que para todo  $r > r_0$  y para todo  $i$  y  $j$  tenemos  $p_{ij}^{(r)} > 0$ . El  $(i - j + 1)$  más grande posible es  $\beta$ , de modo que si  $r$  es mayor que la cantidad fija  $(\beta - 1)^2 + \beta$ , todo elemento de  $P^{(r)}$  es mayor que cero. Se aplicaría esencialmente la misma prueba si los dos elementos no cero de la primera fila no fueran el  $(\beta - 1)$ ésimo y  $\beta$ ésimo, sino el  $s$ ésimo y  $\beta$ ésimo, donde  $s$  y  $\beta$  no tienen factor común. La prueba dada se adapta fácilmente si dos elementos cualesquiera de la primera fila, en posiciones primas entre sí, son distintos de cero.

Nosotros hemos hablado sólo de la primera  $P^{(r)}$ , pero tal agrupamiento se puede hacer desde el principio hasta el fin; si  $r$  se elige suficientemente grande, la multiplicación de las primeras  $r$  matrices dará lugar a una matriz de elementos positivos, lo mismo para las segundas  $r$ , las terceras  $r$ , etc., en tanto que las otras matrices disímiles tengan elementos distintos de cero en los lugares especificados.

El lector puede usar esencialmente el mismo método para averiguar  $r$  basado en el supuesto más fuerte de que  $\beta > 2\alpha$  y de que las edades desde  $\alpha$  a  $\beta$  son todas de fecundidad distinta de cero, y demostrar que este  $r$  es más pequeño que el de los párrafos precedentes.

Habiendo establecido que se puede consolidar la proyección en intervalos agrupados para el régimen cambiante, tal que la matriz para el intervalo agregado consiste de elementos positivos en todas partes, López (1961, págs. 55-57) emprende la consideración de la multiplicación sucesiva de la distribución por edades original mediante las matrices agrupadas. Si la matriz para el intervalo agregado  $T$ ésimo es  $H^{(T)}$ , donde la unidad de tiempo no es un año sino intervalos de  $r$  años, entonces, en la proyección en esa etapa,  $g_a^{(T+1)}$  y  $k_a^{(T+1)}$ , los grupos de edad  $a$ ésimos de los dos vectores cuya convergencia estamos tratando de demostrar, serán

$$g_a^{(T+1)} = h_{a1}^{(T)} g_1^{(T)} + h_{a2}^{(T)} g_2^{(T)} + \dots + h_{a\beta}^{(T)} g_\beta^{(T)},$$

$$k_a^{(T+1)} = h_{a1}^{(T)} k_1^{(T)} + h_{a2}^{(T)} k_2^{(T)} + \dots + h_{a\beta}^{(T)} k_\beta^{(T)},$$

y los grupos de edad  $b$ ésimos serán expresiones similares con  $b$  reemplazando a  $a$ . Considere ahora las razones de los números en las dos poblaciones a las diversas edades,  $g_a^{(T)}/k_a^{(T)}$ , y tome la edad  $a$  en que la razón es más pequeña, y la edad  $b$  en que es más grande; denomine  $r_T$  y  $R_T$  respectivamente a estas dos razones. Entonces para cualquier edad  $i$ ,

$$r_T = \frac{g_a^{(T)}}{k_a^{(T)}} \leq \frac{g_i^{(T)}}{k_i^{(T)}} \leq \frac{g_b^{(T)}}{k_b^{(T)}} = R_T.$$

Cuando tenemos para  $i = 0, 1, 2, \dots, \beta$ , las razones  $g_i^{(T)}/k_i^{(T)}$  intermedias entre dos números  $r_T$  y  $R_T$ , y tomamos un total ponderado de los numeradores y lo dividimos por el correspondiente total ponderado de los denominadores, siendo todas las ponderaciones distintas de cero, tendremos una fracción que es de nuevo intermedia. Por cierto

$$r_T = \frac{g_a^{(T)}}{k_a^{(T)}} \leq \frac{g_i^{(T+1)}}{k_i^{(T+1)}} \leq \frac{g_b^{(T)}}{k_b^{(T)}} = R_T.$$

Se sigue que el mínimo  $r_T$  constituirá una sucesión en  $T$  monótonamente creciente (aunque los elementos sucesivos pueden ser iguales), y similarmente  $R_T$

será una sucesión en  $T$  monótonamente descendente. (Esta sucesión en intervalos de  $r$  años constituye una subsucesión de aquella en años simples). No estamos aún seguros de que la sucesión creciente,  $r_T$ , encuentre siempre a la que desciende,  $R_T$ . López (1961, págs. 55-57) concluye su demostración probando que las dos sucesiones convergen al mismo límite. Desde entonces (1967) él ha desarrollado un medio para demostrar la ergodicidad débil en el caso continuo, que es una generalización sustancial del próximo capítulo (capítulo 5).

El argumento anterior concerniente a la ergodicidad débil es por supuesto aplicable a la ergodicidad fuerte. Observe que la prueba depende de ideas elementales; en ningún punto entró en juego el aparato de los valores característicos y descomposición espectral. Puesto que los valores característicos surgen de consideraciones algebraicas que tienen poco que ver con la demografía, haberlos evitado aquí aparece como un mérito. Una técnica que nos fuerce a pensar específicamente acerca del problema demográfico como fuera expresado en nuestra matriz particular con elementos distintos de cero sólo en su primera fila y subdiagonal, parece preferible a uno que es más general. Kemeny y Snell (1960, pág. V) consideran justamente una ventaja que ellos pudieran desarrollar la teoría de las cadenas finitas de Markov sin valores característicos.

El teorema sobre ergodicidad débil de Coale y López nos capacita para comprender (sin valores característicos) por qué una migración no sostenida tiene sólo un efecto transitorio sobre la distribución por edades de una población, en tanto que los movimientos migratorios no afecten el patrón de fecundidad y mortalidad en boga. Permite también ver por qué la matriz  $M^t$  del capítulo 3 llega a tener columnas que son proporcionales entre sí cuando  $t$  se hace grande: lo que se aplica a los vectores sucesivamente premultiplicados de este capítulo, se aplicará a cada columna de la matriz del capítulo 3. Se sigue también del teorema de ergodicidad débil, que dos estructuras por edades inicialmente diferentes, influidas por el mismo régimen de mortalidad y fecundidad, llegarán finalmente a las mismas tasas (brutas) de natalidad y mortalidad.

III Parte

EL ANALISIS CONTINUO





## LA ECUACION DE RENOVACION: SOLUCION GENERAL

Hasta ahora nos hemos preocupado de la proyección de la población, o sea, de calcular el número de personas esperado en una población cerrada, de un sexo, con base en tasas específicas de mortalidad y fecundidad por edades. Nuestro análisis continuará bajo la mayoría de los supuestos usados hasta aquí, pero en lugar de intervalos finitos de edad, generalmente de cinco años, consideraremos intervalos muy pequeños. Esto proporcionará algunos resultados que no son accesibles a la teoría matricial.

### 5.1. PROYECCION DE POBLACION EN EL CASO CONTINUO

El vector de la población observada en los diversos grupos de edad,  $(\mathbf{K}^{(0)})$ , da ahora lugar a una función continua,  $k(x)$ ,  $0 \leq x \leq \omega$ , tal que el número de individuos entre  $x$  y  $x + dx$  es  $k(x) dx$ . La supervivencia está de acuerdo a la versión continua,  $l(x)$ , de la tabla de vida definida en el capítulo 1. El número esperado de sobrevivientes  $t$  años más tarde, de los que al comienzo tienen entre  $x$  y  $x + dx$ , es

$$k(x) \frac{l(x+t)}{l(x)} dx, \quad \text{o} \quad k(x) \frac{p(x+t)}{p(x)} dx,$$

donde  $p(x) = l(x)/l_0$  es la columna del número de sobrevivientes de la tabla de vida con raíz igual a la unidad. La probabilidad de que una mujer de  $x$  años de edad tenga un hijo en el intervalo  $x, x + dx$  será  $m(x) dx$ .

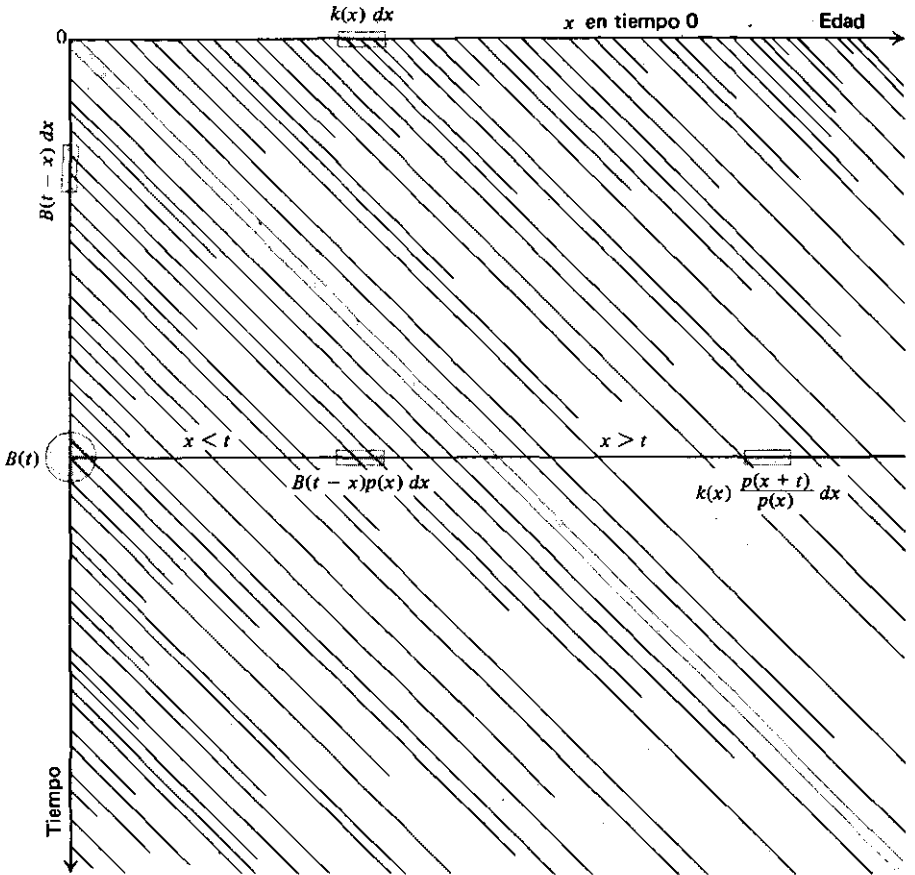
Con estas definiciones, la forma continua de la proyección se puede seguir en la adaptación del diagrama de Lexis dado en el gráfico 5.1. La población viva en el momento cero es una función de densidad a lo largo del eje  $x$ , y los  $k(x) dx$  individuos que tienen de  $x$  a  $x + dx$  años se van eliminando a través de la mortalidad; los sobrevivientes se reducen, cuando los seguimos por la diagonal hacia el extremo inferior derecho, al número

$$k(x) \frac{p(x+t)}{p(x)} dx,$$

que es el elemento de densidad a lo largo de la línea horizontal, para el momento  $t$ . El número anual de niños que nacerían a estos en el momento  $t$ , es su número multiplicado por  $m(x+t)$ . Los niños nacidos en el momento  $t$  para todos los padres que sobreviven desde el momento cero, que se obtienen sumando a lo largo de las edades iniciales  $x$ , representan una tasa anual de

$$G(t) = \int_{a-t}^{\beta-t} k(x) \frac{p(x+t)}{p(x)} m(x+t) dx,$$

**GRAFICO 5.1**  
**DIAGRAMA DE LEXIS PARA ENVEJECIMIENTO Y REPRODUCCION, CON FUNCIONES DE DENSIDAD PARA LA DISTRIBUCION POR EDADES Y LA NATALIDAD**



donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las edades de reproducción, menor y mayor, respectivamente; la integral no se ve afectada si usamos los límites 0 a  $\beta$  o a  $\infty$ .

La cantidad  $G(t)$  es el número de nacimientos en la población inicial, pero si  $t$  es mayor que  $\alpha$  representará también los nacimientos en el momento  $t$  de mujeres que nacieron después del momento cero. Determinemos esto por un argumento análogo. Si la densidad de los nacimientos está dada por  $B(t)$  a lo largo del eje del tiempo, a la izquierda del gráfico 5.1, entonces, el número de mujeres que tienen de  $x$  a  $x + dx$  años de edad en el momento  $t$ , nacidas después del momento cero, serán las sobrevivientes de niños nacidos hace  $x$  años:  $B(t-x)p(x) dx$ ,  $x \leq t$ . Estas mujeres tendrían en el momento  $t$  un número de hijos igual a

$$B(t-x)p(x)m(x) dx$$

por año.

Integrando  $B(t-x)p(x)m(x) dx$  a través de todos los  $x$ , y sumando la parte  $G(t)$  para los nacimientos provenientes de aquellos ya vivos en el momento cero, da la ecuación fundamental

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x)p(x)m(x) dx. \quad (5.1.1)$$

De los dos términos del segundo miembro, el primero,  $G(t)$ , corresponde a la parte del diagrama de Lexis que está arriba de la diagonal gruesa, y la integral se aplica a lo que está bajo dicha recta.

Durante éste y el capítulo siguiente nos ocuparemos de la discusión de (5.1.1). Se trata de una *ecuación integral*; la función desconocida  $B(t)$  aparece dentro y fuera de la integral. Las ecuaciones integrales son similares a las ecuaciones diferenciales, pudiéndose convertir las primeras en las segundas. Transformaremos (5.1.1) diferenciando ambos miembros respecto de  $t$ , aunque esto no nos pone más cerca de una solución para la desconocida trayectoria de los nacimientos  $B(t)$ .

### La ecuación homogénea

El término  $G(t)$  en (5.1.1) es embarazoso, pero afortunadamente

$$G(t) = 0 \quad \text{para} \quad t \geq \beta.$$

Nuestra estrategia inicial consistirá en considerar la ecuación (5.1.1) omitiendo  $G(t)$ :

$$B(t) = \int_0^t B(t-x)p(x)m(x) dx, \quad t \geq \beta; \quad (5.1.2)$$

cualquier solución que encontremos para (5.1.2) se aplica a (5.1.1) para todo  $t \geq \beta$ , esto es alejado suficientemente hacia abajo en el gráfico 5.1 para que no necesitemos considerar la posibilidad de que nazcan hijos a las mujeres situadas a la derecha de la diagonal gruesa. En general, la solución de (5.1.2) contendrá un número infinito de constantes arbitrarias que están a nuestra disposición. Las elegiremos de manera tal que además de satisfacer (5.1.2),  $B(t)$  satisfaga también (5.1.1).

La expresión (5.1.2) es conveniente porque se trata de una ecuación *homogénea*, lo cual implica que el producto de una solución por una constante sigue siendo solución: si  $B(t)$  es una solución, también lo es  $cB(t)$ . Además, las soluciones son *aditivas*: si  $B_1(t)$  y  $B_2(t)$  son soluciones, también lo es  $B_1(t) + B_2(t)$ . Estas dos propiedades, que se verifican fácilmente para (5.1.2) por las propiedades elementales de las integrales, se las denomina a veces en forma conjunta como propiedad de *linealidad*. Si se puede determinar un cierto número de funciones que satisfagan (5.1.2), entonces, a partir de estas soluciones particulares, se puede construir una solución más general. Para anticipar algo: si  $e^{rt}$  es una solución de (5.1.2) para  $r = r_1, r_2, \dots$ , entonces, sujeto a la condición de convergencia,

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots \quad (5.1.3)$$

será una solución de (5.1.2) para todos los valores de las constantes arbitrarias  $Q_1, Q_2, \dots$ ; se pueden entonces elegir las  $Q_i$  de modo que satisfagan (5.1.1) para la  $k(x)$  dada e implícitamente contenida en  $G(t)$ .

## 5.2. SOLUCION POR CALCULO ELEMENTAL

Para ensayar la función  $e^{rt}$ , la sustituimos por  $B(t)$  en (5.1.2); al reemplazar  $B(t)$  por  $e^{rt}$  y  $B(t-x)$  por  $e^{r(t-x)}$ , cancelando luego  $e^{rt}$  en ambos miembros, obtenemos de (5.1.2)

$$\int_0^t e^{-rs} p(x)m(x) dx = 1, \quad t \geq \beta, \quad (5.2.1)$$

o bien, puesto que  $m(x) = 0$  excepto para  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,

$$\psi(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rs} p(x)m(x) dx = 1, \quad (5.2.2)$$

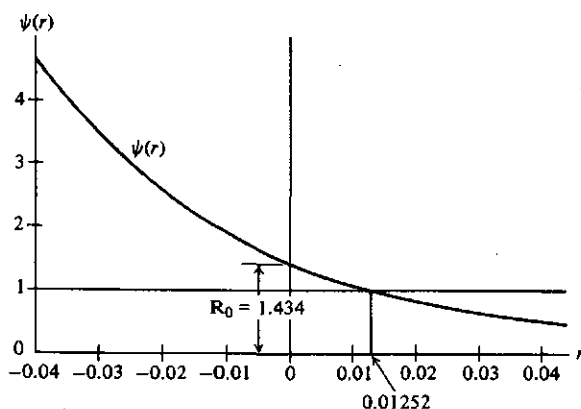
que tiene una estrecha relación con la ecuación característica de la matriz,  $|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0$  del capítulo 3, y que se discutirá en el capítulo 8. La variable ficticia para la edad, se escribirá frecuentemente  $a$  en vez de  $x$ , y  $p(x)m(x)$  se abreviará  $\phi(x)$ , conocida como *función de fecundidad neta*.

Siendo  $e^{rt}$  una forma apropiada para  $B(t)$ , nuestro problema se ha reducido de (5.1.2) a (5.2.2). Este es un avance considerable, ya que en (5.1.2) la incógnita es una función  $B(t)$ , en tanto que en (5.2.2) es una variable  $r$ . Se dará una serie de procedimientos para la solución numérica de (5.2.2), pero antes de discutirlos nos ocuparemos de algunas de sus propiedades generales.

La ecuación (5.2.2) puede tener sólo una raíz real. Esto resulta del hecho de que el integrando de  $\psi(r)$ , en el primer miembro de (5.2.2), está constituido por factores no-negativos; si la integral es igual a uno para  $r$ , no puede ser igual a uno para  $\rho > r$ , puesto que  $e^{-\rho a}$  es menor que  $e^{-ra}$  para todo  $a$ . De la misma manera, un número real menor que  $r$  no puede ser una raíz. Dado que  $\phi(a) = p(a)m(a)$  es positivo o cero para todo  $a$ , y que para cualquier  $a$  dado,  $e^{-ra}$  es una función decreciente de  $r$ , la integral  $\psi(r)$  debe ser una función decreciente de  $r$ . Es útil pensar en el gráfico de  $\psi(r)$  en el eje de ordenadas, contra  $r$  en el eje de abscisas (cuadro 5.1 y gráfico 5.2).

## GRAFICO 5.2

CURVA DE  $\psi(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a)m(a) da$  REPRESENTADA COMO FUNCION  $r$ , PARA LAS MUJERES DE HOLANDA, 1965



**CUADRO 5.1**  
**VALORES DE  $\psi(r)$  PARA LAS MUJERES DE HOLANDA, 1965°**

Valores desde $r = -0.20$ a $r = 0.10$		Detalle en el entorno de $r = 0$	
$r$	$\psi(r)$	$r$	$\psi(r)$
-0.20	1018.277	-0.010	1.91870
-0.18	491.867	-0.008	1.80951
-0.16	241.261	-0.006	1.70678
-0.14	120.220	-0.004	1.61012
-0.12	60.876	-0.002	1.51914
-0.10	31.330	0.000	1.43350
-0.08	16.387	0.002	1.35288
-0.06	8.710	0.004	1.27697
-0.04	4.702	0.006	1.20548
-0.02	2.577	0.008	1.13816
0.00	1.434	0.010	1.07474
0.02	0.809	0.012	1.01499
0.04	0.462	0.014	0.95870
0.06	0.267	0.016	0.90565
0.08	0.157	0.018	0.85565
0.10	0.093	0.020	0.80851

$$\begin{aligned}
 {}^a\psi(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a) m(a) da \doteq & 0.0001e^{-12.5r} + 0.0498e^{-17.5r} \\
 & + 0.3334e^{-22.5r} + 0.4912e^{-27.5r} + 0.3267e^{-32.5r} \\
 & + 0.1716e^{-37.5r} + 0.0559e^{-42.5r} + 0.0048e^{-47.5r} .
 \end{aligned}$$

El gráfico se podría usar para resolver  $\psi(r) = 1$ , pero encontraremos procedimientos más convenientes en la sección 5.3. Como aplicación de la ec. (10.2.5), aparece una solución por interpolación en el cuadro 5.1.

Para demostrar formalmente que  $\psi(r)$  es monótonamente decreciente, observamos que su derivada es

$$\psi'(r) = - \int_{\alpha}^{\beta} a e^{-ra} \phi(a) da ,$$

la cual es siempre negativa, puesto que los tres factores del integrando son no-negativos, y sobre un cierto recorrido son todos positivos. Una función estricta-

tamente decreciente puede cruzar la línea  $\psi(r) = 1$  sólo una vez, en la raíz real  $r_1$ . Puesto que

$$\psi''(r) = \int_{\alpha}^{\beta} a^2 e^{-ra} \phi(a) da$$

es positiva,  $\psi(r)$  debe ser cóncava hacia arriba en el entorno de cualquier punto.

Demuestre que  $-\psi'(r)/\psi(r)$  evaluada en  $r = 0$ , es  $\mu$ , la edad media de las madres al nacer sus hijos en la población estacionaria, y que  $-\psi'(r)$  evaluada en el punto donde  $\psi(r) = 1$  es  $A_r$ , la edad media de las madres al tener sus hijos en la población estable, que es la distribución por edades proporcional a  $e^{-rx}p(x)$ , el análogo continuo de (3.2.6). La cantidad  $\psi(0) = R_0$ , la integral de  $\phi(a) = p(a)m(a)$ , se llama *tasa neta de reproducción* (TNR); es el número de hijas que se espera nazcan a una niña recién nacida, sujeta a las tasas existentes de fecundidad y mortalidad por edades, o el análogo para hombres. Localice  $R_0$  en el cuadro 5.1 para las mujeres de Holanda, 1965, y utilice el cuadro para estimar las dos edades  $\mu$  y  $A_r$  con cualquier  $h$  pequeño. Una fórmula que viene al caso para la derivada de los valores tabulares, es

$$\psi'(r) \doteq \frac{\psi(r+h) - \psi(r-h)}{2h}.$$

Haciendo uso de las consideraciones geométricas del párrafo precedente demuestre que  $\mu > A_r$  si  $r > 0$ .

El examen de (5.2.2) muestra que si  $R_0 = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(a) da > 1$ , entonces, la raíz real  $r_1$  debe ser positiva. Existe sólo un valor positivo de  $r$  que hace  $e^{-ra}$  menor que uno, y si  $\int_{\alpha}^{\beta} \phi(a) da = R_0$  es mayor que uno, el otro factor bajo el integrando de (5.2.2),  $e^{-ra}$ , debe ser menor que uno. De manera similar, si  $R_0 < 1$ , entonces  $r_1$  debe ser negativo. La recíproca también vale. De allí podemos decir que si y sólo si

$$R_0 < 1, \text{ entonces } r_1 < 0,$$

$$R_0 = 1, \text{ entonces } r_1 = 0,$$

$$R_0 > 1, \text{ entonces } r_1 > 0.$$

Las raíces complejas deben venir en pares conjugados. Supongamos que  $u + iv$  sea una raíz. Por el teorema de De Moivre,

$$e^{ra} = e^{u+iva} = e^{ua} [\cos(va) + i \sin(va)],$$

y de allí que (5.2.2) sea

$$\phi(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ua} [\cos(va) - i \sin(va)] \phi(a) da = 1. \quad (5.2.3)$$

Puesto que en el tercer miembro no hay parte imaginaria, la que aparece en el segundo se debe anular,

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ua} \sin(va) \phi(a) da = 0,$$

de donde se deduce que  $u - iv$  debe ser también una raíz.

Además, el valor de  $u$  en la raíz compleja  $u + iv$  debe ser menor que  $r_1$ , la raíz real. Igualando las partes reales en ambos miembros de (5.2.3),

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ua} \cos(va) \phi(a) da = 1,$$

resulta la misma ecuación que (5.2.2), que se satisfacía para la raíz real, excepto que ahora tenemos un factor  $\cos(va)$ . Siendo el coseno siempre menor que uno, cualquiera sea el valor (distinto de los múltiplos de  $2\pi$ ) que tome su argumento,  $e^{-ua}$  debe ser mayor que el correspondiente factor en el integrando de (5.2.2); de allí se deriva que  $u$  debe ser menor que  $r_1$ . Si  $R_0 < 1$ , entonces la raíz real es negativa y todas las raíces complejas tienen elementos reales negativos; cuando  $R_0 > 1$ , y por lo tanto  $r_1 > 0$ , ellas podrían tener elementos positivos en la medida en que este argumento resulte, aunque esto no ocurre en la práctica. Entre 480 poblaciones para las que se hizo el cálculo, el  $u$  que estuvo más cerca de ser positivo correspondió a las mujeres de Taiwán, 1964, siendo  $u = -0,0059$ .

El argumento de Lotka de que la persistencia de un conjunto fijo de tasas específicas de fecundidad y mortalidad por edades dará por resultado una distribución por edades estable, se apoya en el hecho demostrado arriba de que la parte real de cualquier raíz compleja debe ser menor que la raíz real. Porque si la parte real  $u_s$  es menor que  $r_1$ , entonces el factor  $e^{u_s t}$  en (5.2.6) será menor que  $e^{r_1 t}$ , y en consecuencia, el término  $Q_s e^{r_1 t}$ , que involucra el factor  $e^{u_s t}$ , se hará infinitesimalmente pequeño en valor absoluto comparado con el término principal  $Q_1 e^{r_1 t}$ , cuando  $t$  crece. De allí que, más allá de un  $t$  conveniente, la serie (5.2.5) se puede aproximar mediante su primer término, y los nacimientos son una exponencial simple  $Q_1 e^{r_1 t}$ . Veremos más adelante (capítulo 7) que los nacimientos exponenciales conducen a una población creciente exponencialmente con distribución por edades estable. Se puede demostrar la misma propiedad ergódica a partir de las propiedades de las matrices no negativas irreducibles, como se sugirió en la sección 3.2.

La raíz real de la ecuación (5.2.2) no puede ser múltiple. Cualesquiera raíces múltiples cumplirían con (5.2.2) y con su derivada respecto a  $r$ ; deberían por tanto satisfacer

$$\int_{\alpha}^{\beta} a e^{-ra} \phi(a) da = 0. \quad (5.2.4)$$

Pero todos los factores del integrando son positivos o nulos en el recorrido admisible  $\alpha \leq a \leq \beta$ ; la integral de (5.2.4) no puede ser igual a cero a menos que  $\phi(a) = 0$  casi en todas partes de  $(\alpha, \beta)$ .

Sin duda que pueden existir raíces complejas múltiples. Empíricamente, no hemos encontrado ninguno de tales casos en nuestra observación, aunque la condición bajo la que podrían aparecer está teóricamente abierta (Hadwiger, 1939, pág. 7). En este sentido, John S. Lew ha sugerido diversas formas de la función de fecundidad neta que producirían raíces múltiples. El más simple de estos ejemplos es

$$\phi(a) = e^{-ka} \left( \frac{a^6}{60} + \frac{a^8}{2} \right),$$

el cual, mediante un cambio de variable en la conocida integral

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du = (n-1)!$$

que resuelta para  $n=6$  y  $n=4$  da  $\psi(r) = 1$ , y el resultado factorizado, produce

$$\phi(r) = \int_0^{\infty} e^{-ra} \phi(a) da = 1 + \left( \frac{2}{(r+k)^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{(r+k)^2} + 1 \right)^2.$$

En consecuencia, la ecuación  $\psi(r) = 1$  tiene las raíces  $-k \pm i$ , cada una repetida dos veces. Para (5.2.19) se requieren raíces distintas, lo que constituye un paso en la determinación de los  $Q$  de (5.1.3) mediante cálculo elemental.

Para una demostración basada en las propiedades de las funciones enteras, de que el número de raíces de (5.2.2) es infinito cuando  $\infty > \beta > \alpha$ , o sea, cuando el intervalo fértil es finito, puede consultarse Hadwiger (1939b, pág. 2) o López (1961, pág. 15).

La presencia de las constantes  $Q$  está permitida por la linealidad de (5.1.2), y habrá tantas  $Q$  como  $r$ . La solución general de (5.2.2) es

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots, \quad (5.2.5)$$

o, si  $r_s = u_s + i v_s$ ,

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + \sum_{s=2}^{\infty} Q_s e^{u_s t} [\cos(v_s t) + i \sin(v_s t)]. \quad (5.2.6)$$

Puesto que, como se argumentó a partir de (5.2.3), cada raíz compleja está acompañada por su conjugada, la cual está multiplicada por el coeficiente conjugado, los términos imaginarios de la serie se cancelarán, quedando una serie trigonométrica real. Esto es evidentemente necesario para nuestro propósito, puesto que la representación de los recuentos de una población real difícilmente incluirían términos imaginarios.

La próxima tarea consiste en evaluar los  $Q$  para ajustar un  $G(t)$  dado.

Para determinar  $Q_s$  por integración directa, comenzamos por reescribir (5.1.1) en la forma

$$G(t) = B(t) - \int_0^t B(t-a) \phi(a) da. \quad (5.2.7)$$

Siguiendo a Hertz (1908, pág. 84) y Lotka (1939c, pág. 86) introducimos la cantidad auxiliar

$$P_s = \int_0^{\beta} e^{-r_s t} G(t) dt, \quad (5.2.8)$$

y sustituyendo  $G(t)$  de (5.2.7) en (5.2.8), tenemos

$$P_s = \int_0^{\beta} e^{-r_s t} \left[ B(t) - \int_0^t B(t-a) \phi(a) da \right] dt. \quad (5.2.9)$$

Sustituyendo ahora  $B(t)$  en (5.2.9) la serie (5.2.5) queda,

$$B(t) = \sum_1^{\infty} Q_j e^{r_j t} = Q_0 e^{r_0 t} + \sum_{j=2}^{\infty} Q_j e^{r_j t},$$



y lo mismo para  $B(t-a)$ , tenemos

$$P_s = \int_0^\beta e^{-r_s t} \left[ Q_s e^{r_s t} - \int_0^t Q_s e^{r_s(t-a)} \phi(a) da \right] dt + R_s, \quad (5.2.10)$$

donde  $R_s$  es una suma del mismo tipo de integral doble que la que le precede en el segundo miembro de (5.2.10), que contiene términos en  $Q_u e^{r_u t}$ ,  $u \neq s$ . (Se demostrará posteriormente que  $R_s = 0$ .) De (5.2.10),

$$\begin{aligned} P_s &= Q_s \int_0^\beta \left[ 1 - \int_0^t e^{-r_s a} \phi(a) da \right] dt + R_s \\ &= Q_s \int_0^\beta \left[ \int_0^\beta e^{-r_s a} \phi(a) da - \int_0^t e^{-r_s a} \phi(a) da \right] dt + R_s, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

donde usamos el hecho de que  $\int_0^\beta e^{-r_s a} \phi(a) da = 1$  esto es así si  $r_s$  es una de las raíces de (5.2.2). La diferencia entre las dos integrales interiores de (5.2.11) es

$$\int_t^\beta e^{-r_s a} \phi(a) da,$$

y reemplazando esto en (5.2.11) da

$$P_s = Q_s \int_0^\beta \int_t^\beta e^{-r_s a} \phi(a) da dt + R_s. \quad (5.2.12)$$

La integral doble de (5.2.12) se toma sobre un triángulo rectángulo en el plano  $ta$ . Integrando la misma función sobre la misma área, esto es, determinando el volumen del mismo cilindro triangular, pero cambiando el orden de las variables (gráfico 5.3), debemos dejar inalterada la integral en (5.2.12). De allí que

$$P_s = Q_s \int_0^\beta \int_0^a e^{-r_s a} \phi(a) dt da + R_s. \quad (5.2.13)$$

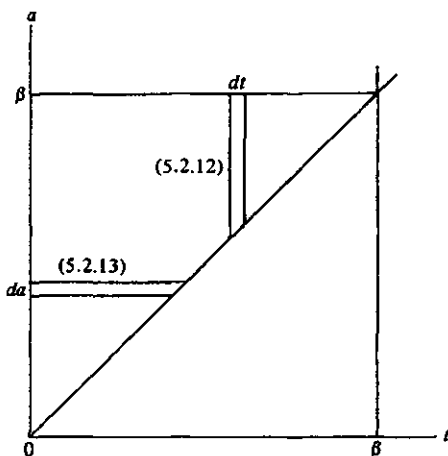
La integración con respecto a  $t$  es ahora sólo  $\int_0^a dt = a$ , y en consecuencia

$$P_s = Q_s \int_0^\beta a e^{-r_s a} \phi(a) da + R_s. \quad (5.2.14)$$

Resta sólo demostrar que  $R_s = 0$ . De (5.2.9) y (5.2.10) vemos que  $R_s$  está constituida por términos tales como

$$R_{s,u} = Q_u \int_0^\beta e^{-r_s t} \left[ e^{r_u t} - \int_0^t e^{r_u(t-a)} \phi(a) da \right] dt, \quad (5.2.15)$$

**GRAFICO 5.3**  
FRANJAS ELEMENTALES PARA LA INTEGRAL DOBLE USADA EN LA DETERMINACION DE  $Q_s$



donde  $u \neq s$ . Por lo tanto,

$$R_{s,u} = Q_u \int_0^\beta \left[ e^{(r_u - r_s)t} - \int_0^t e^{(r_u - r_s)t} e^{-r_u a} \phi(a) da \right] dt. \quad (5.2.16)$$

Igual que antes, reemplazamos 1 por  $\int_0^\beta e^{-r_u a} \phi(a) da$  después del primer signo integral en (5.2.16):

$$\begin{aligned} R_{s,u} &= Q_u \int_0^\beta e^{(r_u - r_s)t} \left[ \int_0^\beta e^{-r_u a} \phi(a) da - \int_0^t e^{-r_u a} \phi(a) da \right] dt \\ &= Q_u \int_0^\beta e^{(r_u - r_s)t} \left[ \int_t^\beta e^{-r_u a} \phi(a) da \right] dt. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Cambiando el orden de integración como antes, obtenemos

$$R_{s,u} = Q_u \int_0^\beta e^{-r_u a} \phi(a) \int_0^a e^{(r_u - r_s)t} dt da \quad (5.2.18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_u}{r_u - r_s} \int_0^\beta e^{-r_u a} \phi(a) (e^{(r_u - r_s)a} - 1) da \\ &= \frac{Q_u}{r_u - r_s} \left[ \int_0^\beta e^{-r_s a} \phi(a) da - \int_0^\beta e^{-r_u a} \phi(a) da \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

puesto que cada integral en (5.2.19) es igual a uno a la vez que  $r_u$  y  $r_s$  son dos raíces distintas. El mismo argumento se aplica a todos los  $R_{s,u}$  para  $u \neq s$ , y por tanto a  $R_s$ , ya que

$$R_s = \sum_{u \neq s} R_{s,u}.$$

Volviendo a (5.2.14), ahora con  $R_s = 0$ , tenemos

$$Q_s = \frac{P_s}{\int_0^\beta a e^{-r_s a} \phi(a) da}, \quad (5.2.20)$$

e incorporando la definición de  $P_s$  en (5.2.8), finalmente se llega a que

$$Q_s = \frac{\int_0^\beta e^{-r_s t} G(t) dt}{\int_0^\beta a e^{-r_s a} \phi(a) da}. \quad (5.2.21)$$

Si conocemos  $G(t)$ , los nacimientos provenientes de aquella porción de la población nacida antes o en  $t = 0$ , y las supuestas fijas tasas específicas de supervivencia y fecundidad por edades, entonces (5.2.21) basta para calcular  $Q_s$ . Como un caso especial, consideremos las hijas de  $B_0$  nacimientos ocurridos en  $t = 0$ . Estas hijas tendrán fechas de nacimientos distribuidas como  $B_0 p(t) m(t) = B_0 \phi(t)$ . Insertando esto en (5.2.21), tenemos

$$Q_s = \frac{B_0 \int_0^\beta e^{-r_s t} \phi(t) dt}{\int_0^\beta a e^{-r_s a} \phi(a) da} = \frac{B_0}{\int_0^\beta a e^{-r_s a} \phi(a) da} = \frac{B_0}{-\phi'(r_s)}. \quad (5.2.22)$$

Si  $r_s$  es la raíz real  $r_1$ , (5.2.22) multiplicada por  $e^{r_s t}$  nos dará el número de nacimientos en la población en el momento  $t$ , después que el efecto de las raíces

complejas se ha hecho insignificante. Para tal momento  $t$ ,

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} = B_0 e^{r_1 t} / (-\psi'(r_1)), \quad (5.2.23)$$

donde el denominador es la edad media de las madres al tener sus hijos en la población estable, designada por  $A_r = -\psi'(r_1)$ .

### Descomposición espectral para el modelo de población continuo

El análisis que hicimos en el capítulo 3, usando matrices e intervalos quinquenales de edad, incluyó la descomposición de una distribución por edades arbitraria, en la forma de una suma ponderada de vectores estables. Todo esto tiene un análogo en la versión continua. A cualquier  $r_i$  para la cual  $\phi(r_i) = 1$  corresponde un  $\lambda_i = e^{r_i}$  que satisface aproximadamente

$$|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0.$$

(La demostración de que  $\lambda_i$  converge a  $e^{r_i}$  cuando el intervalo de tiempo se hace pequeño se da en el capítulo 8, y el error de aproximación en cualquier intervalo de amplitud finita, en el capítulo 11). A cada vector columna estable  $\{\mathbf{K}_i\}$  tal que  $\mathbf{M}\{\mathbf{K}_i\} = \lambda_i\{\mathbf{K}_i\}$ , en la notación de capítulo 3, corresponde una distribución estable continua por edades  $c_i(x) = b_i e^{-r_i x} p(x)$ , donde  $b_i$  se define como

$$b_i = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-r_i a} p(a) da};$$

y a cada vector fila estable  $[\mathbf{H}_i]$  que satisface  $[\mathbf{H}_i]\mathbf{M} = \lambda_i[\mathbf{H}_i]$  corresponde una función  $v_i(x)$ , generalizada a partir del valor reproductivo de una mujer de Fisher, definido en (3.2.15):

$$v_i(x) = \frac{1}{e^{-r_i x} p(x)} \int_x^{\beta} e^{-r_i a} p(a) m(a) da \quad (5.2.24)$$

La propiedad de ortogonalidad  $[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{K}_j\} = 0$ ,  $i \neq j$ , tiene su análogo en

$$\int_0^{\beta} v_i(x) c_j(x) dx = 0, \quad i \neq j,$$

lo que el lector puede demostrar, usando las definiciones de  $v_i(x)$  y  $c_j(x)$ , cambiando el orden de integración entre  $a$  y  $x$ , y usando el hecho de que

$$\phi(r_i) = \phi(r_j) = 1.$$

El puede similarmente evaluar  $\int_0^{\beta} v_i(x) c_i(x) dx$  y determinar que es igual a  $-b_i \psi'(r_i)$ . Para la raíz real  $r_1$ , esto último es el producto de la tasa intrínseca de natalidad y la edad media de las madres al tener sus hijos en la población estable (Goodman, 1967c).

Ahora, la distribución por edades arbitraria  $k(x)$  se puede desarrollar en función de los  $c_i(x)$  estables,  $i = 1, 2, \dots$ :

$$k(x) = Q_1 c_1(x) + Q_2 c_2(x) + \dots \quad (5.2.25)$$

Para determinar la constante  $Q_i$ , multiplicamos por  $v_i(x)$ , integramos con respecto a  $x$  desde 0 hasta  $\beta$ , notamos que por la propiedad de ortogonalidad todos los términos del segundo miembro, menos el  $i$ ésimo, se anulan y obtenemos

$$\int_0^\beta k(x)v_i(x) dx = Q_i \int_0^\beta c_i(x)v_i(x) dx,$$

de modo que con  $\int_0^\beta c_i(x)v_i(x) dx = -b_i\psi'(r_i)$ , el resultado es

$$Q_i = \int_0^\beta k(x)v_i(x) dx / (-b_i\psi'(r_i)). \quad (5.2.26)$$

¿En qué se convierte  $Q_i$  para el  $k(x)$  arbitrario igual a un nacimiento?

Si escribimos  $k(x, t) dx$  para el número absoluto entre las edades  $x$  y  $x + dx$  en el momento  $t$ , entonces, con mortalidad y fecundidad por edades constante se obtendría un desarrollo de la forma

$$k(x, t) = Q_1 c_1(x) e^{r_1 t} + Q_2 c_2(x) e^{r_2 t} + \dots \quad (5.2.27)$$

El lector puede redondear la demostración de (5.2.27), mostrando en qué circunstancias los  $Q_i$  son los mismos que los de (5.2.25) dados por (5.2.26).

### 5.3. SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION CARACTERISTICA

Para determinar las raíces de (5.2.2) a partir de las observaciones que proporcionan una tabla de vida y las tasas específicas de fecundidad femenina por edades, se acostumbra aproximar  $l_0\phi(r)$  mediante

$$l_0\phi(r) = \sum_x^{\beta-5} e^{-r(x+2.5)} {}_5L_x F_x, \quad (5.3.1)$$

siendo  $F_x$  la tasa específica de fecundidad en mujeres que tienen de  $x$  a  $x + 5$  años, donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números tales como 10 y 50, y el sumatorio se toma sobre las edades  $x$  que son múltiplos de 5. Entonces la ec. (5.2.2) se aproxima por

$$l_0\phi(r) = e^{-12.5r} {}_5L_{10} F_{10} + e^{-17.5r} {}_5L_{15} F_{15} + \dots + e^{-47.5r} {}_5L_{45} F_{45} = l_0, \quad (5.3.2)$$

donde la integral

$$\int_0^5 e^{-r(x+t)} p(x+t)m(x+t) dt, \quad x = 10, 15, \dots, 45, \quad (5.3.3)$$

se reemplaza por el producto de

1. un valor medio:  $e^{-r(x+2.5)}$ ,
2. una integral:  $\int_0^5 \frac{l(x+t) dt}{l_0} = \frac{{}_5L_x}{l_0}$ ,
3. una razón de dos integrales:  $\frac{\int_0^5 k(x+t)m(x+t) dt}{\int_0^5 k(x+t) dt} = F_x$ ,

siendo  $k(x)$  la distribución por edades observada.

Las reglas del cálculo integral no permiten tal descomposición de una integral sobre un intervalo finito. Sin embargo, sucede que los errores se compensan en

**CUADRO 5.2**  
**INDICE DE MASCULINIDAD AL NACIMIENTO SEGUN EDAD DE LA MADRE.**  
**PARA CUATRO PAISES\***

Edad	Inglaterra y Gales 1964	Italia 1963	Japón 1963	Estados Unidos 1964
15-19	1.068	1.045	1.031	1.056
20-24	1.060	1.054	1.057	1.050
25-29	1.065	1.059	1.054	1.047
30-34	1.059	1.052	1.063	1.039
35-39	1.059	1.050	1.055	1.039
40-44	1.041	1.050	1.067	1.029

FUENTE \*: *Demographic Yearbook* (Naciones Unidas), 1965, cuadro 13.

algún grado, y como se demostrará en el capítulo 11, (5.3.2) (denominado allí método B) no es una aproximación a (5.2.2) tan mala como parece a primera vista.

Seguimos aquí la práctica convencional en el trabajo demográfico de tomar la razón de los nacimientos femeninos al total de nacimientos para todas las edades de la madre y aplicamos esto a los nacimientos en cada edad. Para verificar la suposición de que la masculinidad de los nacimientos es la misma para todas las edades de la madre, presentamos el cuadro 5.2. El índice de masculinidad (número de hombres dividido por el número de mujeres) disminuye, al menos en algunos casos, con la edad de la madre. Para los Estados Unidos, 1964, la tendencia es clara; para Inglaterra y Gales, 1964, lo es menos; y para Japón, 1963 e Italia 1963, es difícilmente discernible. [¿Hasta qué punto se podría explicar una mayor relación de masculinidad al nacimiento después de una guerra por un número mayor de nacimientos en nuevas desposadas?]

En cuanto el método usual subestima levemente la edad promedio  $\mu$ , de las madres al tener sus hijas, también sobrestima la tasa intrínseca femenina, puesto que  $r \doteq (\ln R_0)/\mu$ , dejando de lado  $r^2$  en (6.2.6). (Para una discusión de  $\mu$  y otros momentos, vea la sección 5.6 y capítulo 6).

Para los Estados Unidos, 1964, la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos por el método convencional fue demasiado baja, alrededor de una parte en 1700. Pero, por otra parte, el valor de  $\ln R_0$  mediante el método convencional fue también demasiado bajo, alrededor de una parte en 1900. El resultado neto de estos errores altamente compensantes, fue hacer el  $r$  convencional demasiado alto: aproximadamente una parte en 15.000, lo cual es evidentemente un error sin consecuencias. El cuadro 5.3 muestra los detalles y constituye una justificación del método convencional.

Para encontrar el  $\ln 1,51014$  requerido en un cálculo del cuadro 5.3, busque en el cuerpo de la tabla de  $e^x$ , dada en el apéndice, para el valor de entrada más grande que sea menor que 1,51014 y determine  $1,491825 = e^{0.4}$ . Divida 1,51014 por 1,491825 para obtener 1,012277. Ahora busque el mayor valor de entrada

**CUADRO 5.3**  
**COMPARACION DEL METODO CONVENCIONAL Y DEL CORRECTO,**  
**PARA CALCULAR LA TASA INTRINSECA  $r$ . MUJERES DE**  
**ESTADOS UNIDOS, 1964\***

Características de las edades reproductivas en la población estacionaria	CONVENCIONAL	CORRECTO
	Nacimientos de niñas obtenidos mediante aplicación de la relación de masculinidad promedio a todos los nacimientos según edad de la madre	Nacimientos de niñas observados según edad de la madre
$R_0$	1.51014	1.51047
$\ln R_0$	0.41220	0.41242
$\mu$ = Edad media	26.530	26.546
$\sigma^2$ = Varianza	<u>36.339<sup>†</sup></u>	<u>36.390<sup>†</sup></u>
1000 $r_L$ de (6.2.7)	15.706	15.705
1000 $r$ de (5.3.5)	15.703	15.702

DATOS: Función de fecundidad neta corregida como sigue:

x	$s \phi x$	x	$s \phi x$	x	$s \phi x$
10	0.00207	25	0.42262	40	0.03201
15	0.17190	30	0.24429	45	0.00181
20	0.51905	35	0.11672	TOTAL	1.51047

\* Programado por Shannon Stokes y James Porter.

† No corregido para agrupamiento (véase capítulo 11).

que sea menor que éste y determine  $1,012072 = e^{0,012}$ . Divida 1,012277 por 1,012072 para obtener 1,000203. Este último es aproximadamente  $e^{0,000203}$ , puesto que  $e^x = 1 + x$  para  $x$  pequeño. Entonces el número 1,51014 dado es igual a

$$(e^{0,4})(e^{-0,012})(e^{0,000203}) = (e^{0,412203}),$$

de modo que su logaritmo natural es 0,412203, como aparece, con cinco decimales, en la segunda fila del cuadro 5.3.

Ansley Coale (1957) fue el primero que propuso el moderno enfoque iterativo a la solución de (5.3.2). Aparecen distintas rutas de iteración:

a) *La regla*

Si  $\psi(r^*)$  es mayor que 1, haga  $r^{**}$  igual a  $r^* + 0,5|r^* - r|$ ;

Si  $\psi(r^*)$  es menor que 1, haga  $r^{**}$  igual a  $r^* - 0,5|r^* - r|$ , siendo  $r$ ,  $r^*$  y  $r^{**}$ , valores sucesivos de la iteración.

Esto requiere programar sólo  $\psi(r)$ , y da un dígito binario por iteración, comenzando por ejemplo desde  $r = 0,0$  y  $r^* = 0,025$ . En la práctica, de 15 a 20 iteraciones dan una precisión de hasta el sexto decimal. [¿Por qué esto es así? Establezca los límites permisibles sobre el par arbitrario de valores iniciales.]

b) *El método de Newton-Raphson*

$$r^* = r - \frac{\psi(r) - 1}{\psi'(r)}, \quad (5.3.4)$$

que requiere el cálculo de la derivada  $\psi'(r)$  como asimismo de  $\psi(r)$ , y converge cuando se han cumplido alrededor de cinco ciclos. [Deduzca (5.3.4) del desarrollo de Taylor, y exprese  $r^*$  explícitamente en términos de la  $\psi(r)$  de (5.3.2).]

c) *El método de la secante* [dado en la sección 3.2]

d) *Iteración funcional*: multiplicando la ecuación característica (5.3.2) por  $e^{27,5r}$  y trasponiendo, obtenemos la forma alternativa

$$e^{27,5r^*} = e^{15r} \left( \frac{5L_{10}}{l_0} \right) F_{10} + e^{10r} \left( \frac{5L_{15}}{l_0} \right) F_{15} + e^{5r} \left( \frac{5L_{20}}{l_0} \right) F_{20} \\ + \left( \frac{5L_{25}}{l_0} \right) F_{25} + e^{-5r} \left( \frac{5L_{30}}{l_0} \right) F_{30} + \dots + e^{-20r} \left( \frac{5L_{45}}{l_0} \right) F_{45}. \quad (5.3.5)$$

Comenzamos eligiendo algún valor arbitrario de  $r$ , evaluamos la expresión del segundo miembro de (5.3.5), luego tomamos  $1/27,5$  del logaritmo para obtener el  $r^*$  mejorado, sustituimos  $r^*$  por  $r$ , y continuamos. El criterio para la convergencia podría ser que  $r^*$  difiera de  $r$  en menos de 0,000001. En la práctica, generalmente son necesarios sólo cuatro ciclos para obtener una precisión hasta el sexto decimal.

Verifique que 1.000  $r = 15,703$  como aparece en el cuadro 5.3, usando los datos del cuadro 2.1 en (5.3.5) y el valor inicial arbitrario  $r = 0,015$ , dado que  $e^{5(0,015)} = e^{0,075} = 1,077884$ . La primera iteración da  $r^* = 0,015664$ . Puesto que  $e^{5r^*} = e^{0,078320} = 1,081469$ , pruebe nuevamente y determine  $r^{**} = 0,015701$ , que está 2 puntos abajo en el último lugar decimal. Con (6.2.8) como punto de partida para la primera iteración,

$$r \doteq \frac{\ln R_0}{\mu} = \frac{0.4122}{26.53} = 0.01554,$$

basta para muchos propósitos, una sola aplicación de (5.3.5). Invente una forma iterativa análoga a (5.3.5) para la ecuación característica matricial (3.2.4), y muestre en una sola aplicación de ella, comenzando con  $r = 0,015703$ , que  $r = 0,2 \ln \lambda$  resulta dar 0,015733. En el capítulo 11 se considerarán las diferencias entre tales resultados; (5.3.5), método B, da un  $r$  menor que (3.2.4), método A.

La sucesión iterativa de (5.3.5) combina la facilidad de programación con la economía de tiempo de computador. Si formamos el proceso iterativo multiplicando (5.3.2) por  $e^{37,5r}$ , y comenzamos con  $r = 0,02$ , son necesarios algo así como 20 ciclos para las mujeres de los Estados Unidos, 1964. Aparecen oscilaciones de amplitud lentamente decreciente en las iteraciones sucesivas. Cuando multiplicamos (5.3.2) por  $e^{32,5r}$ , la convergencia a seis lugares decimales requiere siete iteraciones; multiplicando por  $e^{17,5r}$  se requieren 12 iteraciones. Traduzca

estos hechos en términos de la forma de las curvas  $e^{27.5r} \psi(r)$ , etc., considerando en especial sus pendientes. Verifique sus observaciones numéricamente con la ayuda de los datos del cuadro 5.1. Demuestre que la potencia óptima de  $e^r$  por la cual hay que multiplicar, es la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable, si uno la conoce. Scarborough (1962, pág. 206) y Ralston (1965, pág. 320) proveen teoría sobre la convergencia en la iteración funcional. Ellos muestran que, en la notación de (5.3.5), el requerimiento es de que  $\partial r^*/\partial r < 1$  en el rango apropiado, y que mientras menor sea  $\partial r^*/\partial r$  más rápida es la convergencia.

e) *Una solución que prescinde de la ecuación característica.* El método de Daniel Bernouilli (Hildebrand, 1956, pág. 458; Ralston, 1965, pág. 346) convierte una ecuación polinómica en una ecuación de recurrencia con el objeto de resolver la primera. En demografía comenzamos con la ecuación de recurrencia (5.1.1). En lugar de convertirla en la ecuación polinómica (5.3.2), podríamos usar el método de Bernouilli directamente.

Buscamos entonces una solución directa para (5.1.1) expresado en forma finita como

$$B(t) = B(t - 12\frac{1}{2}) \frac{e^{L_{10}}}{l_0} F_{10} + B(t - 17\frac{1}{2}) \frac{e^{L_{15}}}{l_0} F_{15} + \dots \\ + B(t - 47\frac{1}{2}) \frac{e^{L_{45}}}{l_0} F_{45}, \quad (5.3.6)$$

con  $G(t) = 0$ . El  $B(t)$  para valores del argumento menores que 0, se puede hacer igual a 1 para comenzar el proceso. Entonces, el primer  $B(t)$  calculado a partir de (5.3.6) será  $B(0) = R_0$ , la tasa neta de reproducción. [¿Por qué?] Nos desplazamos ahora en la trayectoria, sumando 2,5 a los argumentos de  $B$  en todos los términos de (5.3.6), y hallamos de nuevo que  $B(2,5) = R_0$ . Enseguida agregamos otro 2,5 y así hallamos  $B(5)$ . El proceso de incrementar el argumento de  $B(t)$  y evaluar el segundo miembro de (5.3.6) continúa paso a paso, hasta que se logra la estabilidad, que se puede verificar, por ejemplo, mediante

$$\left| \frac{B(t + 2\frac{1}{2})}{B(t)} - \frac{B(t)}{B(t - 2\frac{1}{2})} \right| < 10^{-7}.$$

El valor de  $r$  se puede obtener entonces como

$$r = \frac{2}{5} (\ln B(t + 2\frac{1}{2}) - \ln B(t)),$$

puesto que en la estabilidad  $B(t + 2\frac{1}{2}) = e^{5r/2} B(t)$ .

El método converge, pero en forma demasiado lenta como para usarlo. Se generan en  $B(t)$  grandes oscilaciones de amplitud gradualmente decreciente, y típicamente se requieren alrededor de 250 iteraciones para la convergencia, lo que corresponde a una proyección de más de 500 años. La principal razón que hemos tenido para presentar esto aquí ha sido mostrar que la ecuación característica es útil. ¿A qué fórmula de integración funcional bajo (d) corresponde este método?

f) *Iteración simultánea para  $r$  y otras constantes de la población estable.* Esto es útil cuando se requieren tanto las tasas intrínsecas de natalidad y mor-



CUADRO 5.4

TASA DE CRECIMIENTO BRUTA, ESTANDARIZADA E INTRINSECA POR MIL HABITANTES. MUJERES DE ESTADOS UNIDOS, 1919-1965<sup>a</sup>

	Bruta	Estandarizada directamente sobre EE. UU. 1960	Intrínseca 1 000r
1919-21	15.05	4.17	10.23
1924-26	13.68	2.53	9.04
1929-31	10.02	1.10	2.51
1934-36	8.28	0.05	-1.16
1939-41	9.64	2.26	0.94
1944-46	12.55	5.80	6.88
1949-51	15.41	10.42	14.37
1954-56	16.35	14.06	19.88
1959-61	15.03	15.03	21.13
1962	13.71	13.94	19.24
1963	12.84	12.92	17.50
1964	12.41	12.43	16.10
1965	10.78	10.75	12.65

<sup>a</sup> Nacimientos ajustados por subregistro. Programado por Wilhelm Flieger.

talidad como  $r$ ; converge en cuatro o cinco iteraciones y produce un número de cantidades relativas a la situación estable (sección 7.2).

El lector puede examinar bajo qué circunstancias los seis métodos dan respuestas numéricamente idénticas. ¿Cuán adecuado es cada uno de ellos para determinar las raíces complejas?

Para ilustrar la raíz real  $r_1$ , considerada como la medida de la tasa intrínseca de crecimiento natural de una población, el cuadro 5.4 da para las mujeres de los Estados Unidos, 1919-1965, las tasas brutas, estandarizadas e intrínsecas por mil habitantes, basadas sobre registros ajustados oficialmente. (Observe la diferencia entre el  $r$  para 1964 del cuadro 5.3 y el del cuadro 5.4, debido al ajuste de los datos en la última.) La tasa bruta consiste meramente en los nacimientos menos las muertes de un período, dividido por la población media de este último (sección 1.1). La tasa estandarizada para 1960 es el resultado de aplicar las tasas específicas de mortalidad y fecundidad por edades a la población femenina de los Estados Unidos en 1960.

En la década de 1930, el considerable número de madres que restaban de la época precedente de alta fecundidad, mantuvo una tasa bruta de crecimiento positiva a pesar de una tasa intrínseca negativa. Desde mediados de 1940 hasta

mediados de 1950 la tasa intrínseca se triplicó, en tanto que la tasa bruta sólo aumentó en 25 por ciento. Durante la década del 60 la tasa intrínseca ha bajado más que la tasa bruta.

El argumento dado por Lotka y reproducido en la sección 5.2 es imperfecto en varias direcciones, como lo demostrara Feller (1941). Es indirecto resolver primero la esencialmente irrelevante ecuación homogénea (5.1.2), y luego intentar ajustar la respuesta a (5.1.1). Nosotros hemos usado el supuesto de que las raíces son distintas; aun cuando en la práctica son distintas, sería preferible un método que no supusiera esto. Para que la solución (5.1.3) se pueda ajustar a los nacimientos provenientes de una distribución por edades inicial arbitraria se requiere, entre otras cosas, que el número de raíces en  $r$  de (5.2.2) sea infinito, y esto no necesita ser así con un rango infinito de la función de fecundidad neta. Finalmente, dos funciones de fecundidad neta diferentes podrían producir el mismo conjunto de raíces en  $r$ , tal como lo muestra Feller con un ejemplo (1941, pág. 262). Ninguna de estas dificultades tiene consecuencias prácticas, y todavía escapar de ellas, al mismo tiempo que simplificando el argumento, parece que vale la pena. Con la transformada de Laplace, una gran parte de la sección 5.2 se reemplaza por las pocas líneas que van desde (5.5.4) a (5.5.8). Con el objeto de hacer el presente resumen autosuficiente, en la sección 5.4 se establece la definición de la transformada y las pocas propiedades que se necesitarán.

#### 5.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dada una función  $h(t)$ , definimos su transformada de Laplace unilateral como

$$h^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} h(t) dt \quad (5.4.1)$$

si existe la integral impropia del segundo miembro. Es común referirse a  $h(t)$  como la función *original* y a la transformada  $h^*(r)$  como la imagen. Dada la transformada, se dice que la original es su *inversa*. La transformación se puede considerar como una traducción desde la variable  $t$  a  $r$ , desde un  $t$ -lenguaje a un  $r$ -lenguaje, mediante (5.4.1); la importancia de esto radica en que existen problemas, incluyendo aquel expresado en la ecuación de renovación (5.1.1), que pasan a ser muy simples cuando se los traducen de dicho modo (Doetsch, 1958, pág. 29).

Nosotros necesitaremos la integración de (5.4.1) para ciertas funciones, a fin de constituir el diccionario que permita el cambio de lenguaje. Si  $h(t)$  es una constante  $k$ , entonces su transformada es

$$h_k^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} k dt = k/r \quad (5.4.2)$$

si  $R(r)$ , la parte real de  $r$ , es positiva. Si  $h(t)$  es  $t$ , entonces

$$h_t^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} t dt = 1/r^2, \quad R(r) > 0,$$

mediante integración por partes. La repetida integración por partes da la transformada de  $t^n$ , con  $n$  entero:

$$h_{t^n}^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} t^n dt = n!/r^{n+1}, \quad R(r) > 0, \quad (5.4.3)$$

y un cambio de variable da

$$h_{t^n}^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-r'(rt)} d(rt) = \frac{\Gamma(n+1)}{r^{n+1}}, \quad R(r) > 0, \quad (5.4.4)$$

como la transformada de  $t^n$  cuando  $n$  es real. Especialmente importante para nuestro trabajo será la transformada de  $h(t) = e^{r_s t}$ , donde  $r_s$  es una constante especial, la raíz (real o compleja)  $s$ ésima de la ecuación característica,  $\psi(r) = 1$ , de (5.2.2):

$$h^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} e^{r_s t} dt = \int_0^{\infty} e^{t(r_s - r)} dt = \frac{1}{r - r_s}, \quad (5.4.5)$$

válido para todo (complejo)  $r$  tal que  $R(r)$ , la parte real de  $r$ , sea mayor que  $R(r_s)$ . Usaremos (5.4.5) en la otra dirección: la inversa de  $1/(r - r_s)$  es  $e^{r_s t}$ .

Se puede decir que unas pocas reglas generales constituyen la gramática para la traducción hacia la cual nos dirigimos. Si se sabe que la transformada de  $h(t)$  es  $h^*(r)$ , entonces la de  $Kh(t)$ , donde  $K$  es cualquier constante, es  $Kh^*(r)$ , como surge de la definición (5.4.1). Si las transformadas de  $h(t)$  y  $k(t)$  son  $h^*(r)$  y  $k^*(r)$  respectivamente, entonces, la transformada de  $h(t) + k(t)$  es

$$\begin{aligned} [h(t) + k(t)]^* &= \int_0^{\infty} e^{-rt} [h(t) + k(t)] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-rt} h(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-rt} k(t) dt \\ &= h^*(r) + k^*(r). \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Dicho brevemente, la transformada es un operador lineal.

Se necesitará otra regla. La integral que aparece en nuestra ecuación (5.1.1) se conoce como una *convolución* de las funciones  $B$  y  $\phi$ ; ella contiene sólo  $B(t-x)$  y  $\phi(x)$ , la suma de cuyos argumentos es  $t$ , el que es fijo en relación a la variable de integración. Para determinar la transformada de la convolución  $\int_0^t B(t-a)\phi(a) da$  tenemos

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t B(t-a)\phi(a) da \right)^* &= \int_0^{\infty} e^{-rt} \int_0^t B(t-a)\phi(a) da dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-rt} B(t-a)\phi(a) da dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-r(t-a)} B(t-a) e^{-ra} \phi(a) da dt; \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

y si las dos integraciones se pueden separar, esto se convierte, para  $t \geq \beta$ , en

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-r(t-a)} B(t-a) dt \right) \left( \int_0^{\infty} e^{-ra} \phi(a) da \right) = B^*(r)\phi^*(r). \quad (5.4.8)$$

En palabras: la transformada de la convolución de dos funciones es igual al producto de las transformadas de las dos funciones. En Van der Pol (1964, págs. 39-41) se puede hallar una prueba más cuidadosa. El argumento requiere que ambas funciones  $[B(t)$  y  $\phi(a)]$ , sean acotadas en algún rango finito de valores positivos; requiere también que ambas integrales en (5.4.8) sean absolutamente convergentes (Doetsch, 1958, pág. 55).

Si  $r$  es un número complejo, como ocurrirá frecuentemente en nuestra aplicación, entonces para  $r = x + iy$ , donde  $x$  e  $y$  son reales,

$$h^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} h(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(x+iy)t} h(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} e^{-iyt} h(t) dt.$$

La convergencia de la integral para un  $h(t)$  dado depende de  $x = R(r)$ , la parte real de  $r$ . Si hay algún valor de  $x_0$  de  $x$ , para el que la integral converge, entonces, ésta converge para todos los valores de  $x$  mayores que éste, puesto que  $e^{-xt} < e^{-x_0 t}$  si  $x > x_0$ ; su región de convergencia es al menos el semiplano a la derecha de  $x_0$ . Dentro de la región de convergencia, la transformada es única, y la inversa de una transformada es también única excepto para una posible función nula que no concierne a nuestras aplicaciones. La unicidad, esencial para el argumento de la sección 5.5, está discutida en Van der Pol (1964, págs. 117-120) y probada en Widder (1946, pág. 63).

## 5.5. SOLUCION GENERAL VIA LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Si las tres funciones que aparecen en la ecuación integral (5.1.1) tienen transformada de Laplace, éstas se pueden designar

$$B^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} B(t) dt, \quad (5.5.1)$$

$$G^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} G(t) dt, \quad (5.5.2)$$

$$\phi^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} \phi(t) dt, \quad (5.5.3)$$

y debido a que la transformada de una convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de las dos funciones, y a que la adición se transforma en adición, la ec. (5.1.1) se transforma en

$$B^*(r) = G^*(r) + B^*(r)\phi^*(r). \quad (5.5.4)$$

Resolviendo (5.5.4) para  $B^*(r)$ , tenemos

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1 - \phi^*(r)}. \quad (5.5.5)$$

Cuando se puede invertir el segundo miembro de (5.5.5), entonces  $B(t)$ , la inversa de  $B^*(r)$ , es la solución a la ecuación integral (5.1.1). Feller demostró que esta

solución es única, bajo la condición de que  $B^*(r)$  se pueda expresar en fracciones parciales:

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1 - \phi^*(r)} = \frac{Q_1}{r - r_1} + \frac{Q_2}{r - r_2} + \dots + \frac{Q_k}{r - r_k} + \dots, \quad (5.5.6)$$

y de que  $\sum Q_k$  sea absolutamente convergente, siendo  $r_k$  las raíces (finitas o infinitas en número) de  $\phi^*(r) = 1$ , que es idéntica a la ecuación característica  $\phi(r) = 1$  de (5.2.2).

Servirá aquí el procedimiento corriente para determinar los coeficientes de las fracciones parciales: haciendo  $r = r_k + \varepsilon$  en (5.5.6) y procediendo hasta el límite  $\varepsilon = 0$ , tenemos, puesto que  $\phi^*(r_k) = \phi(r_k) = 1$ ,

$$Q_k = \lim_{r \rightarrow r_k} \left\{ \frac{(r - r_k)G^*(r)}{1 - \phi^*(r)} \right\} = \frac{G^*(r)}{-d(\phi^*(r))/dr} \Big|_{r=r_k}. \quad (5.5.7)$$

La ecuación (5.5.7) es idéntica con (5.2.21).

Los términos del desarrollo (5.5.6) se invierten con facilidad. Puesto que la transformada de  $Q_k e^{r_k t}$  es

$$\int_0^\infty e^{-rt} Q_k e^{r_k t} dt = Q_k \int_0^\infty e^{-(r-r_k)t} dt = \frac{Q_k}{r - r_k}, \quad (5.5.8)$$

al menos para  $R(r) > R(r_k)$ , la inversa de  $Q_k/(r - r_k)$  es  $Q_k e^{r_k t}$ . Debido a que la transformada de Laplace es única en el semiplano de convergencia, esto completa la solución de la ecuación integral (5.1.1).

## 5.6. LA SUCESION DE GENERACIONES

Una manera alternativa de aplicar la transformada de Laplace a la ecuación integral, es calculando la descendencia generación por generación. Los nacimientos de la generación cero ésimas son  $G(t)$ , de la primera generación  $B_1(t) = \int_0^t G(t-a)\phi(a) da$ , de la  $n$  ésimas  $B_n = \int_0^t B_{n-1}(t-a)\phi(a) da$ , por una extensión del argumento basado en el gráfico 5.1. Puesto que los  $B_n(t)$  son convoluciones, ellos se transforman en productos. La transformada de los nacimientos de la

$$\begin{aligned} \text{cero ésimas generación} &= G^*(r), \\ \text{primera generación} &= B_1^*(r) = G^*(r)\phi^*(r), \\ \text{segunda generación} &= B_2^*(r) = B_1^*(r)\phi^*(r) = G^*(r)[\phi^*(r)]^2, \\ &\vdots \\ \text{n ésimas generación} &= B_n^*(r) = B_{n-1}^*(r)\phi^*(r) = G^*(r)[\phi^*(r)]^n, \text{ etc. } (5.6.1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

El número de nacimientos en todas las generaciones en el momento  $t$  es

$$B(t) = B_0(t) + B_1(t) + B_2(t) + \dots,$$

y su transformada es, por la regla de adición (5.4.6), extendida a una serie:

$$\begin{aligned} B^*(r) &= B_0^*(r) + B_1^*(r) + B_2^*(r) + \dots \\ &= G^*(r) + G^*(r)\phi^*(r) + G^*(r)[\phi^*(r)]^2 + \dots \\ &= \frac{G^*(r)}{1 - \phi^*(r)} \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

sumando la progresión geométrica, siempre que exista algún área en el plano  $r$  para el cual  $|\phi^*(r)| < 1$ . La ecuación (5.6.2) concuerda con (5.5.5).

Estos resultados que conectan los nacimientos de las generaciones sucesivas, se pueden expresar como relaciones simples entre las constantes conocidas como *cumulantes*. Puesto que los *cumulantes* se necesitarán en el capítulo 6 y en otras partes, presentamos a continuación su definición y significado demográfico.

### Momentos y cumulantes

Nosotros ya hemos hecho uso de los momentos. Para la función de fecundidad neta  $\phi(a) = p(a)m(a)$  los momentos en torno a cero se definieron como

$$\frac{R_n}{R_0} = \frac{\int_a^\beta a^n p(a)m(a) da}{\int_a^\beta p(a)m(a) da}, \quad n = 1, 2, \dots$$

El lector puede mostrar que la función  $\psi(r)$  de (5.2.2), al ser dividida por  $\psi(0)$  y con el signo de  $r$  cambiando, genera estos momentos, en el sentido de que la  $n$ ésima derivada con respecto a  $r$ ,  $\psi^{(n)}(-r)/\psi(0)$ , cuando  $r$  se hace igual a cero, es igual a  $R_n/R_0$ , y  $\psi(-r)/\psi(0)$  es una serie infinita en la cual  $R_n/(n! R_0)$  es el coeficiente de  $r^n$ .

Para el presente y muchos otros propósitos, se hace conveniente un conjunto adicional de constantes,  $k_1, k_2, \dots$ , obtenidas de los momentos mediante la definición formal:

$$\kappa_1 r + \kappa_2 \frac{r^2}{2!} + \kappa_3 \frac{r^3}{3!} + \dots = \ln \left( \frac{\psi(-r)}{\psi(0)} \right). \quad (5.6.3)$$

Las  $k$  se denominan *cumulantes* (Kendall y Stuart, Vol. I, págs. 67-74). Si el logaritmo natural del segundo miembro de (5.6.3),

$$\ln \left( \frac{\psi(-r)}{\psi(0)} \right) = \ln \left( 1 + \frac{R_1 r}{R_0} + \frac{R_2 r^2}{R_0 2!} + \dots \right),$$

se desarrolla por el teorema de Taylor y se igualan las potencias de  $r$ , la definición (5.6.3) da

$$\kappa_1 = \frac{R_1}{R_0}, \quad \kappa_2 = \frac{R_2}{R_0} - \left( \frac{R_1}{R_0} \right)^2, \dots$$

Evidentemente los dos primeros *cumulantes* son lo mismo que la media y la varianza, medidas de la posición central y dispersión, respectivamente, de la distribución.

Los cumulantes que vienen después del primero se expresan más simplemente en términos de los momentos alrededor de la media,

$$\mu_n = \frac{\int_a^b (a - R_1/R_0)^n p(a)m(a) da}{R_0}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

esto es,

$$\kappa_2 = \mu_2, \quad \kappa_3 = \mu_3, \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \dots$$

El tercer cumulante, idéntico al tercer momento alrededor de la media, está relacionado con la asimetría, y el cuarto cumulante a lo puntiagudo o aplastado de la distribución.

El cuadro 5.5 incluye cifras para las mujeres de Suecia, 1778-82, 1868-72 y 1958-62. Mientras más joven sea la edad al casarse, más estrecho es el rango de las edades de reproducción y mayores asimetrías positivas, todo lo cual aparece en el patrón reciente. Usted notará que en toda la tabla, la tendencia para poblaciones con una alta  $R_0$  es de tener una  $\mu$  y  $\sigma^2$ , también elevada.

### Momentos y cumulantes en las generaciones sucesivas

Las ecuaciones (5.6.1) conducen a una prueba simple de la proposición (Lotka, 1939c, pág. 79) de que los cumulantes de la distribución de los tiempos de nacimiento en la  $n$  ésima generación, son iguales a los cumulantes de los tiempos de nacimiento (es decir, edades) para una niña recién nacida, multiplicado por  $n$ . Esto, porque la función generatriz de momentos de los nacimientos a tal niña es  $\phi^*(r)$ , de (5.5.3), con el signo de  $r$  cambiado; los momentos de la distribución de las mujeres al nacimiento de sus hijos están generados por (Karmel, 1948, pág. 253)

$$\psi(-r) = \phi^*(-r) = \int_0^\infty e^{rt}\phi(t) dt, \quad \text{si} \quad R_0 = \int_0^\infty \phi(t) dt = 1,$$

y de las fechas de los nacimientos en la  $n$  ésima generación por

$$B_n^*(-r) = \int_0^\infty e^{rt}B_n(t) dt,$$

cuyo valor en términos de  $G^*(-r)$  y  $\phi^*(-r)$  se puede obtener de (5.6.1). Puesto que además el logaritmo de la función generatriz de momentos genera los cumulantes, podemos tomar logaritmos en ambos miembros del  $n$  ésimo elemento de (5.6.1) con el argumento  $-r$ , para obtener

$$\ln B_n^*(-r) = \ln G^*(-r) + n \ln \phi^*(-r). \quad (5.6.4)$$

El término  $\ln G^*(-r)$  genera los cumulantes de la distribución de los tiempos en que han nacido los niños a mujeres ya vivas en el momento cero. Si éstos se dejan de lado, entonces

$$\ln B_n^*(-r) = n \ln \phi^*(-r). \quad (5.6.5)$$

**CUADRO 5.5**  
**TASA NETA DE REPRODUCCION  $R_0$  Y PRIMER A CUARTO CUMULANTES**  
**DE FECUNDIDAD FEMENINA (O MASCULINA) NETA**

	$R_0$	$\kappa_1 = \mu = \frac{R_1}{R_0}$	$\kappa_2 = \sigma^2 = \frac{R_2}{R_0} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2$	$\kappa_3$	$\kappa_4$
<b>MUJERES</b>					
AUSTRALIA 1965	1.397	27.39	33.31	102.2	-161
CANADA 1965	1.496	27.75	37.09	119.0	-398
CHILE 1964	1.824	29.08	48.62	112.0	-1290
COSTA RICA 1963	3.226	29.23	48.80	105.0	-1654
<b>INGLATERRA Y</b>					
GALES 1963	1.343	27.36	31.64	99.8	-99
EUROPA 1961 <sup>a</sup>	1.197	28.07	35.77	114.4	-301
<b>REPUBLICA FEDERAL</b>					
ALEMANA 1965	1.170	28.47	32.89	89.7	-110
HONDURAS 1965	2.613	29.12	53.77	106.4	-2208
HUNGRIA 1965	0.833	25.65	28.13	123.3	417
MAURICIO 1964	2.600	28.63	43.86	112.5	-1058
PORTUGAL 1965	1.333	29.61	43.05	100.2	-1253
PUERTO RICO 1964	1.813	27.14	46.33	208.3	-623
<b>SUECIA 1778-82</b>					
	1.209	32.24	43.29	26.8	-1152
1868-72	1.327	32.96	39.15	6.8	-1128
1958-62	1.052	27.45	33.87	102.4	-195
<b>ESTADOS UNIDOS 1964</b>					
	1.510	26.53	34.26	122.4	-133
1964 <sup>b</sup>	1.526	26.53	34.39	123.1	-137
1965 <sup>b</sup>	1.395	26.52	35.12	123.9	-191
<b>HOMBRES</b>					
CHILE 1964	2.167	33.66	70.58	321.4	-2316
ESTADOS UNIDOS 1964	1.666	29.62	45.02	266.3	1225

<sup>a</sup>  $\kappa_2$  corregido para agrupamiento por sustracción de  $5^2/12 = 2,08$  de la varianza bruta.

<sup>b</sup> Omitiendo Albania, Irlanda del Norte y Unión Soviética; incluida una población de 425,4 millones.

<sup>c</sup> Nacimientos ajustados.



La no consideración  $\ln G^*(-r)$  es apropiada si la población inicial, que estamos denominando generación cero éxima, es una niña recién nacida. (Una prueba formal de esto se puede basar en (5.7.1). Sus hijos se distribuirán según  $B_1(t)$  que es lo mismo que  $\phi(t)$ , sus nietos según  $B_2(t) = \int_0^t \phi(t-a)\phi(a) da$ , etc., y los logaritmos de las transformadas de éstas con argumento negativo son  $B_1^*(-r) = \phi^*(-r)$  y  $B_2^*(-r) = 2 \ln \phi^*(-r)$ , etc. Cada cumulante para la  $n$  éxima generación es  $n$  veces el cumulante correspondiente de  $\phi(a)$ , la distribución en la primera generación. Si los cumulantes de  $G(t)$  no son cero, se tendrán que agregar a  $n$  veces los cumulantes de  $\phi(a)$  para obtener los de  $B_n(t)$ .

Como ejemplo numérico, consideremos la población canadiense de 1965. Siendo la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estacionaria igual a 27,8 años, la fecha media al nacimiento de los nietos (a través de la línea femenina) en una niña dada recién nacida sería 55,5 años después de 1965, de los bisnietos 83,3 años, etc., suponiendo siempre el régimen de mortalidad y fecundidad de 1965. Siendo la varianza de las fechas de nacimiento en la población estacionaria igual a 37,1, la varianza de las fechas de nacimiento de los nietos sería 74,2; de los bisnietos 111,3, etc. Suponiendo distribuciones normales (esto es, que los cumulantes superiores al segundo son todos nulos), ¿cuántos bisnietos nacerían en la línea femenina entre 2.063 d.c. y 2.100 d.c.?

El argumento se puede extender al momento cero-ésimo, el que en relación a los hijos de una mujer es el total esperado o tasa neta de reproducción

$$R_0 = \int_a^b p(a)m(a) da .$$

El total esperado de nietos ascendería a la cantidad  $R_0^2$ ; de bisnietos  $R_0^3 \dots$ . Para las mujeres canadienses en 1965,  $R_0$  fue 1,496,  $R_0^2$  2,238, ...

En la actualidad, el cálculo de los valores correspondientes a sucesivas generaciones, discutido por Lotka (1929a), se programa fácilmente en la formulación matricial. Con el objeto de colocar las descendencias de las diferentes generaciones en arreglos de almacenamiento separados (y subsecuentemente imprimirlas en columnas separadas), tenemos que separar la matriz de proyección en una componente para la supervivencia y una para fecundidad. Si  $\mathbf{B}$  es la matriz de fecundidad compuesta de términos distintos de cero en su primera fila,  $\mathbf{S}$  la matriz de supervivencia cuyos términos distintos de cero están en su subdiagonal, y  $\{\mathbf{K}_n^{(t)}\}$  el vector de distribución por edades de la  $n$  éxima generación en el momento  $t$ , entonces tenemos una simple ecuación matricial de recurrencia en base a la cual se pueden calcular todas las generaciones en todos los períodos:

$$\{\mathbf{K}_n^{(t)}\} = \mathbf{S}\{\mathbf{K}_n^{(t-1)}\} + \mathbf{B}\{\mathbf{K}_{n-1}^{(t-1)}\} .$$

Si  $\mathbf{B} + \mathbf{S} = \mathbf{M}$ , muestre que la suma de los  $\{\mathbf{K}_n^{(t)}\}$  para todas las generaciones es  $\mathbf{M}^t\{\mathbf{K}_0^{(0)}\}$ .

Ronald Lee desarrolló un programa que evalúa esto en la CDC 6400, y en el cuadro 5.6 se muestra un ejemplar de sus resultados, con la mortalidad y fecundidad de las mujeres de los Estados Unidos, 1964, aplicadas a 1 000 niños con menos de cinco años de edad como condición inicial (cuadro 5.6). En  $t = 50$  la primera generación se parece a la fila superior de la matriz de proyección con las supervivencias aplicadas.

CUADRO 5.6

PROYECCION DE 1000 NIÑAS MENORES DE CINCO AÑOS DE EDAD, SEGUN LAS TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD Y MORTALIDAD POR EDADES DE LAS MUJERES DE LOS ESTADOS UNIDOS 1964, MOSTRANDO LA DISTRIBUCION SEGUN EDAD Y GENERACION DESPUES DE 50, 100 y 250 AÑOS\*

Edad	Tiempo = 0	Tiempo = 50 años				Tiempo = 100 años					
	Generación	Generación				Generación					
	0	0	1	2	3	1	2	3	4	5	6
0-4	1000	0	1	484	9	0	0	124	743	71	0
5-9	0	0	17	384	1	0	0	229	598	23	0
10-14	0	0	74	202	0	0	0	365	403	6	0
15-19	0	0	178	61	0	0	3	501	222	1	0
20-24	0	0	329	8	0	0	12	586	96	0	0
25-29	0	0	464	0	0	0	38	574	31	0	0
30-34	0	0	339	0	0	0	96	459	7	0	0
35-39	0	0	85	0	0	0	196	286	1	0	0
40-44	0	0	1	0	0	0	322	131	0	0	0
45-49	0	0	0	0	0	0	427	41	0	0	0
50-54	0	921	0	0	0	1	446	8	0	0	0
55-59	0	0	0	0	0	15	341	1	0	0	0
60-64	0	0	0	0	0	62	170	0	0	0	0
65-69	0	0	0	0	0	138	47	0	0	0	0
70-74	0	0	0	0	0	222	6	0	0	0	0
75-79	0	0	0	0	0	252	0	0	0	0	0
80-84	0	0	0	0	0	127	0	0	0	0	0
TOTAL	1000	921	1489	1139	10	816	2103	3305	2101	101	0

Table 5.6 (conclusión)

Edad	Tiempo = 250 años									
	Generación									
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0-4	0	0	0	4	384	3,388	4,727	1,281	74	1
5-9	0	0	0	10	612	3,833	3,855	747	30	0
10-14	0	0	0	23	920	4,084	2,940	403	11	0
15-19	0	0	0	48	1,303	4,087	2,090	200	4	0
20-24	0	0	0	94	1,733	3,827	1,377	91	1	0
25-29	0	0	1	173	2,164	3,345	837	38	0	0
30-34	0	0	2	298	2,529	2,718	468	14	0	0
35-39	0	0	6	479	2,758	2,044	239	5	0	0
40-44	0	0	15	718	2,797	1,414	110	1	0	0
45-49	0	0	32	999	2,622	894	46	0	0	0
50-54	0	0	65	1,283	2,258	512	17	0	0	0
55-59	0	0	121	1,516	1,773	263	6	0	0	0
60-64	0	1	203	1,632	1,254	120	2	0	0	0
65-69	0	3	305	1,575	785	47	0	0	0	0
70-74	0	6	405	1,332	425	16	0	0	0	0
75-79	0	12	458	953	191	4	0	0	0	0
80-84	0	19	410	535	66	1	0	0	0	0
TOTAL	0	41	2,024	11,674	24,574	30,598	16,713	2,780	120	1

° Programado por Ronald Lee.

Cualquiera de estos valores se puede calcular de los cuadros 2.1 y 2.2. Por ejemplo, la población de 15 a 19 años en la primera generación en  $t = 50$ , se obtiene considerando los sobrevivientes desde el momento 0 hasta 30, 1 000 ( ${}_5L_{30}/{}_5L_0$ ), multiplicando por el elemento superior de  $\mathbf{M}$  que corresponde a las edades 30-34, que es 0,18333, multiplicando enseguida por  ${}_5L_{15}/{}_5L_0$ . El producto es

$$(479,486/488,970)(0.18333)(485,484/488,970) = 178.49,$$

redondeado a 178 en la tabla. Para verificar las cifras para 100 años, en base a aquellas para 50 años, considere las 131 mujeres que tienen 40-44 años en la tercera generación, en el momento 100. Se obtienen de los sobrevivientes de la segunda generación a través de cinco años, cuyos hijos son

$$(484)(0.99661)(0.00103) + \dots + 8(0.99605)(0.33769) \\ = 0.496 + 33.655 + 70.289 + 28.948 + 2.691 = 136.079.$$

Los sobrevivientes de estas hijas a través de otros 40 años son

$$136.079 \times 0.96201 = 130.9,$$

redondeado a 131 en la tabla.

La proyección da la tasa intrínseca  $r$ . Al cabo de 500 años el número total de niñas de 0-4 es 502 910; al cabo de 600 años 2 424 290, una razón de crecimiento de 4,8205. La estimación de  $r$  es  $(\ln 4,8205)/100 = 0,01573$ , que es levemente mayor que la raíz de (5.3.2) para las mujeres de Estados Unidos, 1964, lo cual es 0,01570. La vigésima raíz de 4,8205 es 1,0818, lo mismo que la solución en  $\lambda$  de  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}|$  de (3.2.4). La diferencia entre  $\psi(r)$  de (5.3.2) y  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}|$  de (3.2.4) se estudiará en los capítulos 8 y 11. Dada la información anterior y la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable,  $-\psi'(r) = 25,974$  (o 5,195 en la unidad quinquenal requerida aquí), aplique el primer término de (5.2.23) para verificar en forma aproximada los totales de las columnas del cuadro 5.7. Usted encontrará, por ejemplo, en  $t = 100$  que  $(1\ 000/5,95)(4,8205) = 928$ , contra el 938 mostrado.

### Intervalo de tiempo entre las generaciones

La tasa neta de reproducción  $R_0$  es el número de hijas por las cuales se espera, bajo el régimen vigente de mortalidad y fecundidad, que una niña recién nacida sea reemplazada. Una definición razonable de  $T$ , el intervalo medio entre dos generaciones, dice que es el tiempo en el cual ocurre dicho reemplazo. Si  $T$  satisface

$$\frac{B(t)}{B(t-T)} = R_0,$$

es el intervalo de tiempo durante el cual los nacimientos aumentan en la proporción  $R_0$ , la tasa neta de reproducción (Lotka, 1937c, pág. 92). Si  $B(t)$  es una función exponencial de  $t$ , del tipo  $Qe^{rt}$ , entonces  $B(t)/B(t-T)$  se reduce a  $e^{rT}$ , y  $T$  se puede determinar a partir de  $e^{rT} = R_0$ , de modo que  $T = (\ln R_0)/r$ . En el cuadro 6.3 aparecen los valores de  $T$  para un cierto número de países.

En términos de  $r$ ,  $T$  es la media aritmética de  $\mu$  y  $A_r$ , la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estacionaria, y en la población

## CUADRO 5.7

PROYECCION DE UN GRUPO INICIAL DE 1000 NIÑAS MENORES DE 5 AÑOS DE EDAD USANDO TASAS CORRESPONDIENTES A LAS MUJERES DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1964, MOSTRANDO LA DISTRIBUCION DE LAS NIÑAS DE 0-4 AÑOS DE EDAD ENTRE LAS GENERACIONES EN EL MOMENTO  $t$ \*

Generación	Tiempo $t$ en años					
	0	100	200	300	400	500
0	1,000					
1						
2						
3		124				
4		743				
5		71				
6			71			
7			1,393			
8			2,451			
9			556	46		
10			18	1,450		
11				7,766		
12				9,299	32	
13				2,841	1,288	
14				236	12,757	
15				6	37,730	20
16					37,385	1,070
17					13,285	15,800
18					1,763	83,580
19					90	175,290
20					2	155,170
21						60,440
22						10,650
23						860
24						30
TOTAL	1,000	938	4,489	21,644	104,332	502,910
TOTAL en $t = 600$ :						2,424,290

\* Programado por Ronald Lee.

estable respectivamente. Lo que sigue es un bosquejo de la prueba de este enunciado.

De la definición de  $T$  tenemos

$$T = \frac{\ln R_0}{r} = -\frac{1}{r} \ln \left[ \frac{\phi(r)}{R_0} \right], \quad (5.6.6)$$

puesto que  $r$  es una raíz de  $\phi(r) = 1$ . Pero  $\ln [\phi(r)/R_0]$  se puede (como arriba) interpretar como una función generatriz de momentos con el signo de  $r$  cambiado, de modo que (5.6.6) se convierte en

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{r} \left( -\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2!} - \frac{\mu_3 r^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \mu - \frac{\sigma^2 r}{2} + \frac{\mu_3 r^2}{6} - \dots, \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

donde  $\mu, \sigma^2, \mu_3 = \kappa_3$  son los sucesivos cumulantes de la distribución de las mujeres según las edades a la que nacen sus hijos en la población estacionaria.

Por definición, la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable es

$$A_r = \frac{\int_a^\beta x e^{-rx} p(x) m(x) dx}{\int_a^\beta e^{-rx} p(x) m(x) dx}, \quad (5.6.8)$$

o

$$A_r = \frac{-\phi'(r)}{\phi(r)} = -\frac{d(\ln \phi(r)/R_0)}{dr}, \quad (5.6.9)$$

es decir, la derivada (con signo cambiado) de la función generatriz de cumulantes con argumento  $-r$ . Desarrollando  $\ln \phi(r)$  de (5.6.9) y tomando la derivada, obtenemos

$$A_r = \mu - \sigma^2 r + \frac{\mu_3 r^2}{2} - \dots. \quad (5.6.10)$$

Promediando  $A_r$  y  $\mu$  da

$$\frac{A_r + \mu}{2} = \mu - \frac{\sigma^2 r}{2} + \frac{\mu_3 r^2}{4} - \dots, \quad (5.6.11)$$

siendo mayor que el  $T$  de (5.6.7) en aproximadamente  $\mu_3 r^2/12$ . Esto completa la prueba.

Para las mujeres canadienses en 1965,  $\mu$  fue 27,753 y  $A_r$  fue 27,192, siendo su media aritmética 27,472. El valor de  $T = \ln R_0/r$  para esta población fue 27,470. La diferencia entre estos últimos dos números, 0,002, se puede comparar con la diferencia entre los términos en  $r^2$  de (5.6.7) y (5.6.11), esto es,  $\mu_3 r^2/12 = (119)(0,01467)^2/12 = 0,0021$ . Para todos los propósitos prácticos,  $T$  se puede tomar como la media de  $\mu$  y  $A_r$ . (El cuadro 6.3 ilustra esto entre otras relaciones.)

### 5.7. DISTRIBUCIONES PUNTUAL Y RECTANGULAR DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA

La transformada de Laplace no sólo permite un tratamiento simple de la función de fecundidad neta presentada como una función analítica o continua, sino que también nos permite manejar formas no ajustadas, por ejemplo aquellas que aparecen gráficamente como histogramas (L. C. Cole, 1954). Con el objeto de proseguir esta aplicación necesitamos reglas para las transformadas de ciertas funciones discontinuas. (Rainville, 1963, pág. 24.)

REGLA 1). Si

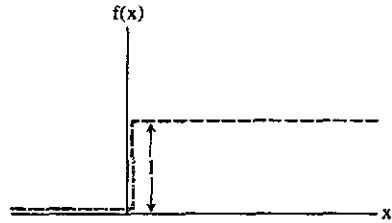
$$f(x) = 0, \quad x < 0,$$

$$f(x) = 1, \quad x \geq 0,$$

entonces la transformada  $f^*(x)$  es

$$f^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rx} dx = \frac{1}{r},$$

$$R(r) > 0.$$



REGLA 2). Si

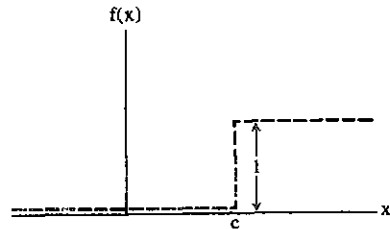
$$f(x) = 0, \quad x < c,$$

$$f(x) = 1, \quad x \geq c,$$

entonces

$$f^*(r) = \int_c^{\infty} e^{-rx} dx = \frac{e^{-rc}}{r},$$

$$R(r) > 0.$$



REGLA 3). Si

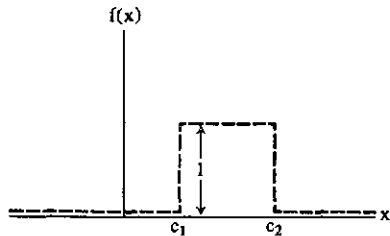
$$f(x) = 0, \quad x < c_1,$$

$$f(x) = 1, \quad c_1 < x \leq c_2,$$

$$f(x) = 0, \quad x > c_2,$$

entonces

$$f^*(r) = \int_{c_1}^{c_2} e^{-rx} dx = \frac{e^{-rc_1} - e^{-rc_2}}{r}.$$



REGLA 4). En cualquiera de los casos de arriba, la ordenada podría ser  $k$  en lugar de 1, en cuyo caso la transformada se multiplicaría por  $k$ .

Supongamos en la Regla 3 que  $c_2$  se acerca a  $c_1$ , y que la ordenada se desplaza hacia arriba de modo que el área es siempre uno. Entonces la transformada es

$$f^*(r) = \lim_{\substack{c_2 \rightarrow c_1 \\ c_2 - c_1}} \frac{1}{c_2 - c_1} \left( \frac{e^{-rc_1} - e^{-rc_2}}{r} \right) = e^{-rc_1}.$$

La transformada de una concentración de densidad igual a la cantidad finita  $k$  en el punto  $c$  es por tanto

$$f^*(r) = ke^{-rc}. \quad (5.7.1)$$

Supongamos (Cole, 1954, pág. 117) que la función de fecundidad neta está concentrada en los puntos medios de los intervalos quinquenales, lo que equivale a decir en las edades 12,5, 17,5, 22,5, ..., 47,5, y que en estos puntos la ponderación es  $5_5\phi_{10}$ ,  $5_5\phi_{15}$ , ...,  $5_5\phi_{45}$ , respectivamente, donde  $5_5\phi_{10} = 5L_{10}F_{10}/5l_0$  es la función de fecundidad neta para las edades 10-14, etc. Entonces, por aplicación de (5.7.1), la transformada de la ecuación integral,

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1 - \phi^*(r)}, \quad (5.7.2)$$

se puede escribir como

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1 - 5_5\phi_{10}e^{-12.5r} - 5_5\phi_{15}e^{-17.5r} - \dots - 5_5\phi_{45}e^{-47.5r}}. \quad (5.7.3)$$

Expresando el segundo miembro de (5.7.3) en fracciones parciales, como antes, encontramos, correspondiente a la raíz real  $r_1$  de  $\phi^*(r) = 1$ , una fracción  $Q_1/(r - r_1)$ , que tiene como inversa a  $Q_1e^{r_1t}$ . El valor de  $Q_1$  viene dado por las reglas de la descomposición en fracciones parciales, como antes:

$$Q_1 = \lim_{r \rightarrow r_1} \frac{(r - r_1)G^*(r)}{1 - \phi^*(r)} = \frac{G^*(r_1)}{-\psi'(r_1)},$$

donde  $\psi'(r_1)$  es la derivada de  $\psi(r) = \phi^*(r)$  definido en (5.2.2). El argumento aplicado a la  $s$ ésima raíz resulta en (5.2.21). Esto no sólo tiene la misma forma general que la solución precedente, sino que el análisis de (5.7.3) en fracciones parciales envuelve la misma ecuación característica (5.3.2) en grupos quinquenales de edad y en consecuencia, la misma aproximación (método B de capítulo 11) a las raíces.

Alternativamente, dado que las raíces más allá de la primera son complejas y en pares conjugados, a cada par del desarrollo en fracciones parciales de (5.7.3) le corresponderá un término de la forma

$$\frac{a'r + b'}{r^2 + c'r + d'},$$

donde  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  y  $d'$  son reales. Completando el cuadrado en el denominador y cambiando el origen de  $\tau$ , encontramos que esto se convierte en

$$\frac{ar + b}{r^2 + c^2},$$

cuya inversa es

$$a \cos ct + \frac{b}{c} \sin ct, \quad \text{if } R(r) > 0, \quad (5.7.4)$$

como se puede verificar evaluando

$$a \int_0^\infty e^{-rt} \cos ct \, dt + \frac{b}{c} \int_0^\infty e^{-rt} \sin ct \, dt,$$

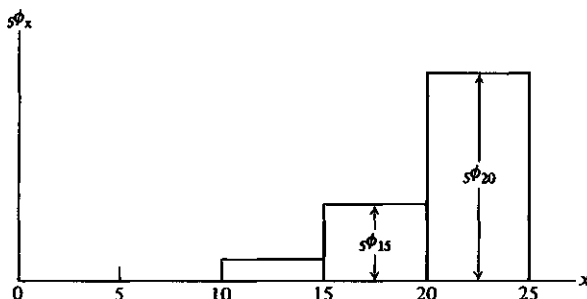


o consultando Chemical Rubber Publishing Co. (1963, pág. 328). Esta es una manera de llegar a la serie trigonométrica (5.2.6).

La transformada es exacta. No requiere un paso intuitivo no examinado como el que se produjo con (5.3.2) a manera de aproximación práctica al (5.2.2) deducido teóricamente. El hecho de que ahora hayamos encontrado (5.3.2) en el denominador de (5.7.3) muestra qué fue lo que (5.3.2) suponía realmente: que la densidad de la función de fecundidad neta está completamente concentrada en los puntos medios de los intervalos.

GRAFICO 5.4

NOTACION PARA EL HISTOGRAMA DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA



Una modificación del argumento precedente trata con una función de fecundidad neta en la forma de un histograma (gráfico 5.4). Mediante la aplicación de la tercera de las reglas del primer párrafo de esta sección

$$\begin{aligned} \phi^*(r) = & \frac{s\phi_{10}}{r} (e^{-10r} - e^{-15r}) + \frac{s\phi_{15}}{r} (e^{-15r} - e^{-20r}) + \dots \\ & + \frac{s\phi_{20}}{r} (e^{-20r} - e^{-25r}), \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

lo que al ser igualado a uno daría una aproximación diferente a (5.2.2). El  $\phi^*(r)$  de (5.7.5) es lo mismo que el  $\psi_G(r)$  del cuadro 11.3, que compara valores numéricos según diversas aproximaciones.

Podríamos haber obtenido (5.7.5) sin la transformada de Laplace, meramente integrando  $e^{-rt}$  veces la forma histogramática de la función de fecundidad neta. Una u otra forma del argumento muestra que en la derivación de (5.7.5) no interviene ningún tipo de aproximación; dada la información sobre mortalidad y fecundidad en los grupos quinquenales de edad, ella es exacta. Sin embargo, si el histograma se ve en sí mismo como una aproximación a una curva suave, entonces se requiere una corrección por agrupamiento, y ésta, que aparece en (11.1.23), nos lleva de regreso a (5.3.2). Sin duda, el histograma es "dato", pero acostumbramos considerarlo como una aproximación a una curva suave. ¿Podemos decir que la solución *exacta* para los datos histogramáticos dados no es la solución *correcta*?

### 5.8. FORMULACION A TRAVES DE LAS FUNCIONES GENERATRICES Y LAS FRACCIONES PARCIALES

La ecuación de renovación se puede enfocar a través de las funciones generatrices, cuyo uso en relación a las probabilidades de eventos recurrentes está descrito por Feller (1957, capítulo 13). La aplicación de esto a las matemáticas de población se debe a Thompson (1931), Dobbernack y Tietz (1940, pág. 239), Lotka (1948, pág. 192) y Lamont Cole (1954, pág. 112). El resultado es una forma discreta de la ecuación de renovación (5.1.1), pero hay tres razones que justifican por qué introducimos el presente argumento alternativo:

1) Es instructivo ver la consecuencia de restablecer en la forma aquí requerida, la probabilidad de que ocurra un nacimiento en una fecha en términos de los nacimientos en las fechas precedentes.

2) El resultado no es numéricamente idéntico con el de los métodos discutidos antes, pero provee una diferente aproximación finita a la tasa intrínseca y a las demás raíces de la ecuación característica, lo cual en ciertas circunstancias podría ser más satisfactorio, aunque este punto no está investigado.

3) Se necesita menos respaldo matemático que para los métodos anteriores.

Para ejemplificar con una población muy simple (Cole, 1954, pág. 110), considere un par de conejos que producen otro par al cabo del primer mes, luego un segundo par en el segundo mes, y a partir de entonces permanece vivo pero no produce más descendientes. Sus descendientes siguen la misma ley de reproducción y están también sujetos a mortalidad cero. El lector puede demostrar que los conejos aumentan de acuerdo a los números de una sucesión de *Fibonacci*  $u_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots,$$

donde el  $n$ ésimo elemento es igual a la suma del  $(n - 1)$ ésimo y el  $(n - 2)$ ésimo:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

El ciclo reproductivo individual se puede representar por  $1 - s - s^2$ . Podemos desarrollar la división  $1/(1 - s - s^2)$  y observar que el resultado es

$$1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + 8s^5 + \dots, \quad \text{en} \quad 1 + \sum u_n s^n.$$

En este sentido  $1/(1 - s - s^2)$  genera los  $u_n$ . Podemos también desarrollar  $1/(1 - s - s^2)$  en fracciones parciales y en consecuencia analizar los números de Fibonacci en una suma de dos series geométricas. Una de las dos series dominará y constituye la aproximación asintótica,

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = \frac{(1.618)^{n+1}}{2.236}.$$

Este resultado es sorprendentemente bueno aun para pequeños valores de  $n$ . En  $n = 4$ , la aproximación es 4,96 contra 5, y en  $n = 7$ , es 21,007 contra 21. Todo esto es con una supuesta población inicial de un par de conejos en el primer grupo de edades. ¿Cómo se modifica el resultado para una población

inicial compuesta por siete pares de conejos en el primer grupo de edades y tres pares en el segundo?

Retornando ahora a la reproducción humana y tomando como población inicial a una niña recién nacida, durante su vida, el número esperado de hijas en las edades sucesivas 0, 5, 10, 15, . . . , 45, bajo el régimen dado de fecundidad y supervivencia se puede expresar como la sucesión finita

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \frac{5I_{15}}{I_0} F_{12.5}, \dots, \quad f_6 = \frac{5I_{45}}{I_0} F_{42.5}. \quad (5.8.1)$$

En el elemento general,  $F_{x-2.5}$  es la probabilidad promedio por año de edad de tener un hijo en el intervalo de edad  $x - 2.5$  a  $x + 2.5$  centrado en  $x$ , siendo  $x$  un múltiplo de 5; es la tasa específica de fecundidad por edades para el intervalo  $x - 2.5$  a  $x + 2.5$ . Puesto que las tasas específicas de fecundidad por edades observadas son generalmente  $F_{x-5}$  para las edades  $x - 5$  a  $x$ , y  $F_x$  para las edades  $x$  a  $x + 5$ , tendremos finalmente que expresar  $F_{x-2.5}$  en términos de  $F_{x-5}$  y  $F_x$ . La cantidad  $f_{x/5}$  es la probabilidad de que una niña recién nacida sobreviva hasta la mitad del intervalo de edades  $x - 2.5$  a  $x + 2.5$  y tenga entonces una hija.

Si  $u_t$  representa los nacimientos en el momento  $t$  ocurridos a esta niña o sus descendientes femeninos, incluyendo como  $u_0$  su propio nacimiento, entonces

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, & u_1 &= 0, & u_2 &= 0, \\ u_3 &= u_0 f_3 + u_1 f_2 + u_2 f_1 + u_3 f_0 = u_0 f_3, \\ u_4 &= u_0 f_4 + u_1 f_3 + u_2 f_2 + u_3 f_1 + u_4 f_0 = u_0 f_4 + u_1 f_3, \end{aligned} \quad (5.8.2)$$

etc., mientras persista el régimen de fecundidad y mortalidad. Si multiplicamos ahora los miembros de (5.8.2) por 1,  $s$ ,  $s^2$ ,  $s^3$ , etc., y sumamos el conjunto así multiplicado, tenemos

$$u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \dots = 1 + (u_0 f_1 + u_1 f_0) s + (u_0 f_2 + u_1 f_1 + u_2 f_0) s^2 + \dots,$$

ecuación que se puede representar en la forma

$$U(s) = 1 + U(s)F(s), \quad (5.8.3)$$

siendo  $U(s)$  la función generatriz de las  $u$ ,

$$U(s) = u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \dots + u_p s^p + \dots,$$

y  $F(s)$  las de las  $f$ ,

$$F(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots + f_p s^p.$$

La solución de (5.8.3) para  $U(s)$  es

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)}. \quad (5.8.4)$$

Con el objeto de basar los cálculos en (5.8.4), podemos desarrollarlo en fracciones parciales. Si  $s_1, s_2, \dots, s_p$  son las raíces de la ecuación polinómica de

noveno grado  $F(s) = 1$ , entonces el desarrollo de (5.8.4) es

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)} = \frac{d_1}{s - s_1} + \frac{d_2}{s - s_2} + \dots + \frac{d_9}{s - s_9}. \quad (5.8.5)$$

Para determinar  $d_1$ , multiplicamos ambos miembros de (5.8.5) por  $s - s_1$  y enseguida tomamos límite para  $s = s_1$ . El límite izquierdo existe:  $\lim_{s \rightarrow s_1} \{[s - s_1]/[1 - F(s)]\}$ , siendo igual a  $1/[-F'(s_1)]$ , por una aplicación de cálculo. A la derecha, todos los términos excepto  $d_1$  se anulan si las raíces son distintas. Usando esto y el hecho de que cada fracción parcial se puede escribir como una progresión geométrica, tenemos

$$\frac{d_1}{s - s_1} = \frac{-d_1}{(s_1 1 - s/s_1)} = \frac{1}{F'(s_1)} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{s}{s_1^2} + \frac{s^2}{s_1^3} + \dots + \frac{s^t}{s_1^{t+1}} + \dots \right),$$

que converge en el círculo  $|s| < |s_1|$ . Se pueden encontrar expresiones similares para los términos restantes de (5.8.5). Considerando todas las raíces juntas, tenemos para  $u_t$ , el coeficiente de  $s^t$  en  $U(s)$ .

$$u_t = \frac{1}{s_1^{t+1} F'(s_1)} + \frac{1}{s_2^{t+1} F'(s_2)} + \dots + \frac{1}{s_9^{t+1} F'(s_9)}. \quad (5.8.6)$$

Examinemos la naturaleza de las raíces  $s_1, s_2, \dots, s_9$ . La ecuación de la que son solución se establece a partir de (5.8.1) como

$$\begin{aligned} F(s) - 1 &= f_0 + f_1 s + \dots - 1 \\ &= \frac{5l_{15} F_{12.5}}{l_0} s^3 + \frac{5l_{20} F_{17.5}}{l_0} s^4 + \dots + \frac{5l_{45} F_{42.5}}{l_0} s^9 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

Si se escribe  $1/\lambda$  en lugar de  $s$  y se multiplica (5.8.7) por  $-\lambda^9$ , obtenemos

$$\lambda^9 \left( 1 - F\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = \lambda^9 - \frac{5l_{15} F_{12.5}}{l_0} \lambda^6 - \frac{5l_{20} F_{17.5}}{l_0} \lambda^5 - \dots - \frac{5l_{45} F_{42.5}}{l_0} = 0, \quad (5.8.8)$$

que se puede comparar con  $|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ , del capítulo 3. En consecuencia, las raíces  $s$  son aproximadamente los recíprocos de los valores característicos de la matriz  $\mathbf{M}$  del capítulo 3. En el cuadro 5.9 aparece un ejemplo donde, provisionalmente, se toma  $F_{x-2.5}$  como  $(\frac{1}{2})(F_{x-5} + F_x)$ . Este es el método D, en el capítulo 11.

Se le pide al lector que trace el paralelo, punto por punto, entre esta demostración de la solución por fracciones parciales del problema de renovación y el argumento de la transformada de Laplace que le precede. ¿Cómo se relacionan las funciones generatrices con la transformada? ¿Cuál es la ventaja de la transformada?

### Resumen y ejemplo numérico

Hemos resuelto la ecuación general (5.1.1) por medio de (1) el argumento de Hertz-Lotka que conduce a (5.3.2), y (2) la transformada de Laplace que dio (5.7.5). Se tiene una aproximación diferente por medio de (3) la matriz elabo-

## CUADRO 5.8

CONSTANTES PARA LA TRAYECTORIA POBLACIONAL MEDIANTE LA ECUACION (5.1.3) Y POR FRACCIONES PARCIALES (5.8.6), CON BASE EN LA FECUNDIDAD Y MORTALIDAD DE LAS MUJERES DE ESTADOS UNIDOS, 1964, COMENZANDO CON 1 000 NIÑAS<sup>a</sup>

Raíces	Coefficientes
Ecuación Integral	
$r_1 = 0.01570$	$Q_1 = 38.50$
$r_2 = -0.0287 + 0.2422i$	$Q_2 = 39.76 + 16.98i$
$r_4 = -0.1115 + 0.5160i$	$Q_4 = 29.06 + 30.54i$
Fracciones Parciales	
$-0.2 \ln s_1 = 0.01591$	$\frac{1}{s_1 F'(s_1)} = 38.49$
$-0.2 \ln s_2 = -0.0286 + 0.2422i$	$\frac{1}{s_2 F'(s_2)} = 39.77 + 17.02i$
$-0.2 \ln s_4 = -0.1112 + 0.5157i$	$\frac{1}{s_4 F'(s_4)} = 28.79 + 30.47i$

La raíz  $r_2$  es el complejo conjugado de  $r_4$ ;  $Q_2$  de  $Q_4$ , etc.; similarmente para la solución por fracciones parciales.

Cálculo de  $Q_1$  verificable en base a los datos del cuadro 2.1 como sigue:

x	${}_5\phi_x$ (1)	$(x + 2.5) {}_5\phi_x$ (2)	$e^{-r(x+2.5)}$ (3)	(2) × (3) (4)
10	0.00205	0.0256	0.82178	
15	0.17265	3.0214	0.75972	
20	0.51983	11.6962	0.70235	
25	0.42250	11.6188	0.64932	
30	0.24328	7.9066	0.60029	
35	0.11627	4.3601	0.55496	
40	0.03173	1.3485	0.51305	
45	0.00182	0.0865	0.47431	
TOTAL	1.51014	40.0637		25.9744

Edad media en la población estable =  $-\psi'(r) = 25,9744$ . En consecuencia  $Q_1 = 1000 / -\psi'(r) = 1000 / 25,9744 = 38,499$  edad media en la población estacionaria =  $40,0637 / 1,51014 = 26,5299$ .

<sup>a</sup> Programado por Pierre Nakache.

rada en el capítulo 3, que corresponde a la proyección usual de población y dio por resultado (3.2.4). Finalmente, (4), se ha dado en la presente sección una formulación que conduce a las fracciones parciales, obteniéndose (5.8.7). Los cuatro enfoques dan origen a cuatro diferentes aproximaciones finitas para la ecuación continua  $\psi(r) = 1$  de (5.2.2). Al ser arregladas en el orden anterior de (1) a (4), las raíces reales  $r_1$  resultan estar en una sucesión creciente. Ellos son estudiados como los métodos B, C, A y D, respectivamente, en el capítulo 11. Damos aquí un ejemplo numérico de (1) y (4).

El cuadro 5.8 muestra cinco raíces de la ecuación característica (5.3.2) para la ecuación integral y (5.8.7) para las fracciones parciales. Las raíces de la formulación por fracciones parciales han sido convertidas en el equivalente a  $r$ , mediante  $r = -0.2 \ln s$ , por razones de conveniencia en la comparación. En la misma tabla se dan los coeficientes  $Q$  que van a multiplicar las potencias  $t$  ésimas de  $e^r$  y  $1/s^{1/5}$ , para la condición inicial de 1 000 nacimientos. De acuerdo a (5.2.23),  $Q_1$  debe ser  $1\ 000 / -\psi'(r_1)$ , o sea, 1 000 dividido por la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable. Esta edad media  $A_r$  se puede calcular como

$$\begin{aligned} -\psi'(r) &= \int_{\alpha}^{\beta} ae^{-ra} p(a) m(a) da \\ &\doteq 12.5e^{-12.5r} {}_5L_{10} F_{10} + 17.5e^{-17.5r} {}_5L_{15} F_{15} + \dots \\ &\quad + 47.5e^{-47.5r} {}_5L_{45} F_{45}. \end{aligned}$$

De los datos del cuadro 2.1 y  $r = 0.01570$ , verifique que  $-\psi'(r) = 25,974$ , y en consecuencia, que  $Q_1 = 38,50$ . (El ajuste de una distribución por edades observada más bien que de los 1 000 hipotéticos nacimientos iniciales, requiere que se aproxime una integral doble para los  $Q$ , método que se hallará en el capítulo 11.) Las soluciones para las funciones  $B(t)$  de (5.1.3) y  $u_t$  de (5.8.6) aparecen expuestas en el cuadro 5.9 para uno, tres y cinco términos.

El ordenamiento de las raíces complejas no es único, y ellas mismas sugieren dos principios. Las raíces representadas como  $r = x + iy$  se pueden arreglar de acuerdo a valores decrecientes de  $x$ , de modo que la sucesión estaría en orden de valor absoluto decreciente de la exponencial  $e^r$ . Las cinco raíces del cuadro 5.8 son las más grandes en valor absoluto.

Una alternativa lógica consiste en tomar las raíces de acuerdo a los valores crecientes de  $y$ . Esto significa que los armónicos sucesivos se arreglarán en orden de frecuencia creciente o longitud de oscilación decreciente. Esta disposición se halla en el cuadro 8.2.

Todas las poblaciones muestran el mismo orden, mediante ambos principios, para las tres primeras raíces. Sin embargo, el segundo par de raíces complejas de acuerdo a  $x$  es frecuentemente el tercer par de acuerdo a  $y$ , y esto se confirma para los Estados Unidos 1964. El cuadro 5.8 toma las raíces de acuerdo al orden de  $x$ , de modo que en el cuadro 5.9 tratamos con las cinco raíces de valor absoluto principal. Se omite en el cuadro 5.8 un armónico de período 20 años aproximadamente debido a que el armónico de período 12 años ( $= 2\pi/0.5160$ ) resulta tener un  $x$  más grande. Consulte el gráfico 8.1 y verifique esto visualmente. ¿Qué sucesión se ha adoptado para numerar en el gráfico 8.1?

En el cuadro 5.9 se pueden comparar las soluciones a la ecuación integral (5.1.3) y la formulación por fracciones parciales con la proyección matricial del

CUADRO 5.9

SOLUCION DE LA ECUACION DE RENOVACION POR MEDIO DE LA ECUACION INTEGRAL Y POR FRACCIONES PARCIALES, USANDO UNO, TRES Y CINCO TERMINOS, CON BASE EN LA FECUNDIDAD Y MORTALIDAD DE LAS MUJERES DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1964, COMENZANDO CON 1000 NACIMIENTOS FEMENINOS, COMPARACION CON LA PROYECCION MATRICIAL SOBRE 200 AÑOS\*

t	Proyección matricial	H(t) en la ecuación integral (5.1.3)			u, en las fracciones parciales (5.8.6) ( $\tau = t/5$ )		
		$Q_i e^{x_{it}}$	$\sum_1^3 Q_i e^{x_{it}}$	$\sum_1^5 Q_i e^{x_{it}}$	$\frac{1}{s_1 + 1F'(s_1)}$	$\sum_1^3 \frac{1}{s_i + 1F'(s_i)}$	$\sum_1^5 \frac{1}{s_i + 1F'(s_i)}$
0	1000.0	38.5	118.0	176.1	38.5	117.9	175.5
5	0	41.6	38.4	-8.5	41.7	38.3	-8.2
10	0.2	45.0	-16.6	9.7	45.1	-16.7	9.5
15	17.5	48.7	13.6	3.4	48.9	13.6	3.5
20	69.2	52.7	77.5	78.8	52.9	77.9	79.1
25	94.3	57.0	98.5	100.7	57.3	99.0	101.2
30	68.2	61.7	68.3	65.9	62.0	68.8	66.3
35	48.2	66.7	39.6	41.3	67.2	39.9	41.6
40	55.4	72.1	50.6	49.8	72.7	51.0	50.2
45	80.5	78.0	85.2	85.5	78.8	86.0	86.2
50	98.7	84.4	104.9	105.0	85.3	106.0	106.1
60	94.1	98.7	87.7	87.8	100.0	88.8	88.9
70	114.6	115.5	116.5	116.5	117.3	118.2	118.2
80	140.2	135.2	140.4	140.4	137.5	142.8	142.8
90	155.7	158.1	151.8	151.8	161.2	154.7	154.7
100	187.7	185.0	189.3	189.3	189.0	193.4	193.4
150	408.9	405.6	406.3	406.3	418.9	419.6	419.6
200	897.9	889.2	889.3	889.3	928.3	928.3	928.3

\* Programado por Pierre Nakache.

capítulo 3. La teoría sugiere que para la solución mediante la ecuación integral o por fracciones parciales, la aproximación hasta el quinto término debiera ser la más cercana para los tres o cuatro primeros ciclos de proyección, después de lo cual las aproximaciones con tres y cinco términos deberían estar indiferentemente cercanas; después de unos 10 ó 15 ciclos, es decir, 50 ó 75 años, usar uno, tres o cinco términos debería arrojar casi el mismo resultado. Los resultados que se muestran son consistentes con esto, si se toma en cuenta el hecho de que la proyección mediante la matriz tiene un leve sesgo hacia arriba; éste implica un  $r$  de 0,01573 contra el  $r$  de la ecuación integral de 0,01570. Esta es la razón que explica por qué la solución mediante la ecuación integral se acerca a la matricial y luego se aparta de ella nuevamente. (En  $t = 1\ 000$  años la proyección matricial sería aproximadamente un 3 por ciento mayor que la trayectoria de la ecuación integral). Tal como la hemos usado aquí, la aproximación por fracciones parciales en  $r = 0,01591$  es mayor que la matricial; al cabo de 1 000 años su trayectoria sería aproximadamente un 20 por ciento más alta.

Un recuento explícito de los ciclos representados por las raíces complejas se obtiene, como en la sección 3.4, escribiendo (5.1.3) en la forma

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{(\alpha_2 + i\beta_2)t} + Q_3 e^{(\alpha_2 - i\beta_2)t} + \dots,$$

donde  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  son las partes real e imaginaria, respectivamente de  $r_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ . Entonces

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + e^{\alpha_2 t} [(Q_2 + Q_3) \cos(\beta_2 t) + i(Q_2 - Q_3) \sin(\beta_2 t)] + \dots, \quad (5.8.9)$$

donde  $Q_2 + Q_3$ ,  $Q_4 + Q_5$ , ... son reales, y  $Q_2 - Q_3$ ,  $Q_4 - Q_5$ , ... imaginarios puros (sección 5.2), de modo que la expresión para la trayectoria  $B(t)$  es real.

Esta forma muestra que  $B(t)$  consta de curvas sinusoidales superpuestas a una exponencial; la curva sinusoidal principal está amortiguada por  $e^{\alpha_2 t}$  (puesto que  $\alpha_2$  es negativo) y es de periodicidad  $2\pi/\beta_2$ . En términos de los parámetros de la ecuación integral del cuadro 5.8, para las mujeres de los Estados Unidos, 1964,

$$\begin{aligned} B(t) = & 38.50 e^{0.01570t} \\ & + e^{-0.0287t} (79.52 \cos 0.2422t - 33.96 \sin 0.2422t) \\ & + e^{-0.1116t} (58.12 \cos 0.5160t - 61.08 \sin 0.5160t) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (5.8.10)$$

Esto, junto con su análogo  $u_t$  de la formulación en fracciones parciales son el tema del cuadro 5.9.

Sustituyendo  $t = 10$  en (5.8.10) encontramos

$$\begin{aligned} B(10) = & 38.50 e^{0.1570} \\ & + e^{-0.287} (79.52 \cos 2.422 - 33.96 \sin 2.422) \\ & + e^{-1.116} (58.12 \cos 5.160 - 61.08 \sin 5.160) \\ = & (38.50)(1.1700) + (0.7505)[79.52(-0.7518) - 33.96(0.6594)] \\ & + (0.3279)[58.12(0.4330) + 61.08(0.9014)] \\ = & 45.0 - 61.7 + 26.3. \end{aligned}$$



Esto da 45,0 para el primer término,  $45 - 61,7 = -16,7$  para los primeros tres términos, y 9,6 para los primeros cinco términos. Estos están tan cerca de la fila para  $t = 10$  del resultado computado, que aparece en el cuadro 5.9 en las tres columnas bajo "Ecuación integral", como uno podría esperar alcanzar mediante un cálculo manual con cuatro cifras significativas.

Puesto que se usó la misma matriz, que aparece en el cuadro 2.2, para la proyección en la primera columna del cuadro 5.9 y en los cuadros 5.6 y 5.7, los resultados deberían ser los mismos, y en realidad lo son si tomamos en cuenta los diferentes puntos de partida. La proporción de la población menor de cinco años en relación a los nacimientos está determinada por una tabla dada de vida que se supone constante, y por lo tanto  $B(t)/B(0)$  debería ser lo mismo que la razón del primer elemento de  $\{K^{(t)}\}$  al primer elemento de  $\{K^{(0)}\}$ .

Sin embargo, los nacimientos  $B(t)$  están dados sobre una base anual, en tanto que la población menor de cinco años en un momento dado corresponde a los nacimientos de cinco años. Para traducir el flujo anual de nacimientos  $B(t)$  en cifras de población bajo el régimen fijo supuesto, multiplicamos por cinco. En  $t = 100$  años tenemos

$$5B(100) = (5)(187.7) = 938.5$$

usando el cuadro 5.9. Y en los cuadros 5.6 y 5.7 tenemos 938 niños menores de 5 años, distribuidos entre tres generaciones, en el año 100. Similarmemente, en el año 200 la proyección del cuadro 5.9 da  $5B(200) = 4489,5$ , contra 4489 niños menores de 5 años en  $t = 200$  años del cuadro 5.7.

Recientemente Ansley Coale (1967) ha emprendido un estudio completo de la ecuación característica. El encontró 266 pares de raíces complejas, lo que equivale a decir que tomó la solución (5.2.5) hasta 533 términos. Disponiendo estas raíces en orden de frecuencia, encontró que el primer par siempre corresponde a oscilaciones de periodo cercano a los 25 años; el segundo para a oscilaciones de 20 años; el tercero a oscilaciones de 13 años. Muestra en qué grado las raíces complejas dependen de la representación de la función de fecundidad neta como un histograma, y cómo los valores de las partes real y compleja de las raíces sucesivas se ven afectadas por asimetría y kurtosis en la función de fecundidad neta.

El esquema para el análisis de las edades que está implícito en el presente capítulo toma en cuenta dos componentes importantes. El primero es la distribución por edades estable, representada por el término real  $Q_1 e^{r_1 t}$ . Cuando la población inicial entre las edades  $x$  y  $x + dx$  es el  $e^{-r_1 x} p(x) dx$  estable, todos los  $Q$  que están después del primero serán iguales a cero. (Esto se puede probar fácilmente mediante la propiedad de ortogonalidad de los vectores estables, usando el argumento de la sección 5.2 en la versión continua o de la sección 3.2 en la forma discreta.) La distribución por edades será constante a través del tiempo, y el aumento en cada edad será exactamente la tasa  $r_1$  compuesta en cada momento.

La segunda componente de análisis es cualquier perturbación o desviación de la estabilidad en la distribución por edades inicial. Esto puede ser la caída en los nacimientos de los Estados Unidos en la década del 30 y el alza subsiguiente, el "boom" de nacimientos que se dio en Europa en la postguerra, la

**CUADRO 5.10**  
PROGRAMA FORTRAN: CALCULO ITERATIVO DE LA TASA INTRINSECA  
EN BASE A (5.3.5)

C C	<p>Los datos son el ordenamiento A de la función neta de maternidad en intervalos de cinco años desde 10-14 hasta 55-59.</p> <pre> DIMENSION A(10) 1 READ (1,2) ( A(I), I = 1,10 ) 2 FORMAT (10F8.6) R = 0. 3 SUM = 0. WRITE (3,4)R 4 FORMAT (' R =', F10.6 ) DO 5 I = 1,10 5 SUM = SUM + A(I) / EXP(R) ** ( 5*I-20 ) RSTAR = ALOG(SUM) / 27.5 IF (ABS(RSTAR-R) - .000001) 1,6,6 6 R = RSTAR GO TO 3 END </pre>
--------	---

**CUADRO 5.11**  
PROGRAMA FORTRAN: CALCULO DE  $\psi(r)$  DE (5.2.2) DESDE  $r = -0.200$  a  $r = 0.200$   
MEDIANTE INTERVALOS DE 0,002

C	<p>Los datos son los mismos del cuadro 5.10</p> <pre> DIMENSION A(10) 5 READ (1,6) (A(I), I = 1,10) 6 FORMAT (10F8.6) R = -.2 7 PSI = 0. DO 8 I = 1,11 X = I 8 PSI = PSI + A(I)/EXP(R*(5.*X + 7.5)) WRITE (3,9)PSI 9 FORMAT (F20.6) R = R + .002 IF (R - .2) 7,7,5 END </pre>
---	---

alta mortalidad infantil sueca de la guerra Napoleónica, o cualquier otra depresión o salto en la sucesión de cohortes. La perturbación avanzará a través del tiempo de la misma manera que los 1000 nacimientos hipotéticos que hemos señalado arriba, y seguirán las mismas ondas después de ella, teniendo la armónica una longitud de oscilación igual a la generación. Las ondas amortiguadas, en ausencia de cambios en la mortalidad y fecundidad, estarán dadas por los

términos  $Q_2 e^{r_2 t} + Q_3 e^{r_3 t}$ , discutidos arriba. En términos de este argumento, muestre por qué la segunda y tercera raíces de la matriz  $3 \times 3$  en la sección 3.1 pueden ser reales y negativas, en tanto que las de la representación  $9 \times 9$  son inevitablemente complejas.

La noción de una componente estable sobre la que las perturbaciones se superponen de tanto en tanto (donde cada perturbación está seguida por una senda de ondas amortiguadas), no toma en cuenta todas las posibilidades; no puede, por ejemplo, manejar la situación en que las tasas de natalidad están cambiando gradualmente. Un intento para enfrentar esta situación está descrito en Coale y Zelnik (1963, págs. 82-89) y Keyfitz, Nagnur y Sharma (1967).

Los ejemplos de este libro no se podrían haber obtenido sin computación por máquina. No podemos tomar el espacio necesario como para mostrar los programas para cada tabla, pero el cuadro 5.10 esboza un programa para la tasa intrínseca  $r$  mediante la fórmula iterativa (5.3.5), y el cuadro 5.11 para el cálculo de  $\psi(r)$  en el cuadro 5.1. Estos y sus elaboraciones (por ejemplo, de cuadro 5.10 a las raíces complejas) proporcionaron muchos de los resultados de este capítulo.

## PARAMETRIZACION DEL PROCESO DE RENOVACION

### 6.1. AJUSTE DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA

El capítulo anterior contenía una justificación de la ecuación integral

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x)p(x)m(x) dx \quad (6.1.1)$$

como una representación del proceso de renovación de la población, y encontramos tres maneras de resolverla, dando cada una, una aproximación finita diferente. Aunque la ecuación está expresada en funciones continuas, nuestras soluciones estaban expresadas en términos de los intervalos quinquenales de edad, que es la presentación usual en cuanto a observaciones relativas a nacimientos y muertes. Se toma en cuenta sólo un sexo, el femenino típicamente.

Pero 8 tasas específicas de fecundidad  ${}_5F_x$  para las edades pertinentes, más 8 valores de  ${}_5L_x$ , el número de sobrevivientes de la tabla de vida, como se usó en los cálculos del capítulo 5, pueden difícilmente constituir 16 observaciones *independientes*. Las poblaciones humanas a las que se aplica la teoría caen dentro de los modelos, y no necesitan 16 dimensiones para su clasificación. En este capítulo veremos hasta qué punto tres parámetros pueden incorporar los factores relevantes.

Los tres parámetros serán los momentos de orden cero, uno y dos de la función de fecundidad neta. En la ecuación fundamental (6.1.1) juntaremos en primer lugar  $p(x)$ , el número de sobrevivientes de la tabla de vida con raíz igual a la unidad, y  $m(x)$ , las tasas específicas de fecundidad por edades y nos restringiremos a su producto  $\phi(x) = p(x)m(x)$ . Ajustamos a  $\phi(x)$  una curva de tres constantes mediante el método de los momentos. Entonces las tres constantes para describir  $\phi(x)$  serán expresables en términos de  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , definidas como

$$R_i = \int_a^{\beta} x^i \phi(x) dx, \quad i = 0, 1, 2. \quad (6.1.2)$$

En términos de las características comprensibles,  $R_0$  es la tasa neta de reproducción, el número esperado de niñas por las que será reemplazada una niña recién nacida bajo el régimen de mortalidad y fecundidad observado;  $R_1/R_0 = \mu$  es la edad media de las madres al nacimiento de sus hijas en la población estacionaria;  $R_2/R_0 - (R_1/R_0)^2 = \sigma^2$  es la varianza de la edad media de las madres al tener sus hijos en la población estacionaria.

El capítulo presente mostrará tres fórmulas de ajuste debidas a Lotka (1939c, pág. 70), Wicksell (1931), y Hadwiger (1940) respectivamente. En cada caso

la sustitución de la forma ajustada de  $\phi(x)$  en (6.1.1) conduce a una versión especial de la ecuación característica (5.2.2); resolviéndola para  $\tau$  obtenemos un conjunto especial de raíces  $r_i$  y a cada una de estas raíces le está asociado un  $Q_i$ .

$$Q_i = \frac{\int_0^{\beta} e^{-r_i t} G(t) dt}{-\phi'(r_i)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

para constituir la solución (5.2.5).

La ventaja del ajuste reside en que podemos alcanzar valores de  $\tau$  y  $Q$  que están dados explícitamente en términos de las funciones simples  $R_0$ ,  $\mu$  y  $\sigma^2$  de las observaciones. Aunque estos resultados son por supuesto aproximados, con un error dependiente de la calidad del ajuste a la función de fecundidad neta  $\phi(x)$ , la simplificación nos permite responder con suficiente precisión algunas preguntas referentes a las propiedades de las raíces que serían difíciles de enfocar en la forma general. En cada una de las 3 secciones siguientes, se han hecho algunas deducciones a modo de ejemplo para mostrar el funcionamiento de los métodos. En el cuadro 6.1 aparece un conjunto completo de resultados para los tres ajustes.

## 6.2. AJUSTE DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA POR MEDIO DE LA DISTRIBUCION NORMAL (LOTKA)

En primer lugar reemplazamos  $p(x)m(x)$  en (5.2.2) por la normal o curva de Gauss,

$$\phi(x) = p(x)m(x) = \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2\sigma^2)(x-\mu)^2}, \quad (6.2.1)$$

cuyas tres constantes se pueden obtener fácilmente a partir de las observaciones, mediante integración. Sabemos que las distribuciones observada y ajustada tendrán los mismos totales si (aplicando la integral elemental  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ )

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)m(x) dx = R_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2\sigma^2)(x-\mu)^2} dx = K.$$

Esta es la correspondencia para los momentos de orden cero. Igualando los primeros momentos da

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x p(x)m(x) dx}{R_0} = \frac{R_1}{R_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2\sigma^2)(x-\mu)^2} dx = \mu; \quad (6.2.2)$$

o sea, la edad media de la curva ajustada se hace igual a la edad media de las observaciones. La varianza de las observaciones es

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \mu)^2 \frac{p(x)m(x) dx}{R_0} = \frac{R_2}{R_0} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2, \quad (6.2.3)$$

que igualamos a la varianza de la curva ajustada:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2\sigma^2)(x-\mu)^2} dx = \sigma^2.$$

La estadística (Wilks, 1962, pág. 157; Kendall y Stuart, 1958, Vol. I, pág. 135) nos proporciona la función generatriz de momentos de la normal, dada por

$$\mathcal{E}(e^{rx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2\sigma^2)(x-\mu)^2} dx = e^{r\mu + (1/2)\sigma^2 r^2}. \quad (6.2.4)$$

Esto nos permite integrar  $\psi(r)$  de la ecuación característica (5.2.2). Reemplazando  $r$  por  $-r$  en (6.2.4) da para (5.2.2) con  $\phi(x)$  normal

$$\mathcal{E}(e^{-rx}) = \frac{\psi(r)}{R_0} = e^{-r\mu + (1/2)\sigma^2 r^2} = \frac{1}{R_0}, \quad (6.2.5)$$

o tomando logaritmos naturales, tenemos

$$\frac{\sigma^2 r^2}{2} - r\mu + \ln R_0 = 0, \quad (6.2.6)$$

cuya solución para una aproximación a la raíz real es

$$r_L = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 \ln R_0}}{\sigma^2}, \quad (6.2.7)$$

obtenida a partir de la ecuación (6.2.6).

Lotka (1939c, pág. 71) recomendaba (6.2.7) para determinar  $r$ . Aun si se usa el ajuste por la normal, es un poco más fácil comenzar con un  $r$  arbitrario, por ejemplo  $r = 0$ , y obtener el valor mejorado

$$r^* = \frac{\ln R_0}{\mu - r\sigma^2/2}$$

reescribiendo (6.2.6) para una solución iterativa. Usando esto o (6.2.7), y los datos del cuadro 5.5, muestre  $r_L = 0,01609$  para las mujeres de los Estados Unidos, 1964, con nacimientos ajustados. (Observe que el  $r_L$ , basado sobre nacimientos no ajustados del cuadro 5.3 es aproximadamente menor en un 2 por ciento.) Compruebe que el error de la fórmula iterativa en cualquier ciclo, en la práctica, no puede ser mayor que  $r\sigma^2/2\mu$  o a lo más 0,05 del error en el ciclo precedente, y por tanto las dos iteraciones darán toda la precisión necesaria. El lector que tenga interés puede desarrollar las propiedades del proceso en términos de fracciones continuas.

En un nivel más práctico, haciendo  $\sigma^2 = 0$  en (6.2.6) se obtiene (Lotka, 1939c, pág. 70)

$$r = \frac{\ln R_0}{\mu}. \quad (6.2.8)$$

Esto corresponde a un ajuste de la función de fecundidad neta por medio de una distribución puntual concentrada en  $\mu$ , la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos. A pesar de lo irrealista del modelo, el valor de  $r$  obtenido mediante (6.2.8) tendrá raramente un error de un 5 por ciento o más.

Los que no han leído a Lotka (1939c, pág. 69) pueden reconstruir este argumento, y de este modo deducir los resultados anteriores por un camino diferente.

El procede a desarrollar la exponencial en la ecuación característica (5.2.2) como una serie de Taylor, integrando término a término para obtener los momentos, enseguida dividiendo simplemente ambos lados por  $R_0$ , y tomando logaritmos. El resultado es una serie de potencias en  $r$  en la cual los coeficientes son los cumulantes; abandonando los términos después de  $r^2$ , se obtiene una cuadrática en  $r$  idéntica a (6.2.6). Esto demuestra que truncar después de  $r^2$  es equivalente a reemplazar la función de fecundidad neta observada por la normal ajustada.

Bürgdorfer (1932) intentó resolver la ecuación característica de la ecuación integral desarrollando la exponencial bajo la integral en (5.2.2) hasta el término en  $r^2$ , obteniendo momentos y por tanto una ecuación cuadrática, sin tomar logaritmos. Lotka (1932a) señaló que la solución en términos de los cumulantes es superior a la de los momentos respecto de cero, ya que hace menores los términos despreciados. Determine una expresión para el error que surge de despreciar los momentos respecto de cero más allá del segundo; demuestre que es del orden de  $\mu r^2/2$ . ¿Qué resultados da el "método" de Bürgdorfer para las mujeres de Estados Unidos en 1965, cuyos momentos se encuentran en el cuadro 5.5?

Las raíces complejas al igual que las raíces reales se determinan admitiendo los múltiples valores del logaritmo en el plano complejo; al sustituir  $\ln R_0 \pm 2\pi mi$  por  $\ln R_0$ , se puede escribir (6.2.6) en la forma

$$\sigma^2 r^2 - 2r\mu + 2 \ln R_0 \pm 4\pi mi = 0.$$

Puesto que para  $r = u + iv$ ,  $u$  y  $v$  son reales, esto se convierte en

$$\sigma^2(u^2 + 2iuv - v^2) - 2(u + iv)\mu + 2 \ln R_0 \pm 4\pi mi = 0, \quad (6.2.9)$$

lo cual, después de separar las partes real e imaginaria da

$$\sigma^2(u^2 - v^2) - 2u\mu + 2 \ln R_0 = 0, \quad (6.2.10)$$

y

$$\sigma^2 uv - v\mu \pm 2\pi m = 0. \quad (6.2.11)$$

Cambiando el origen de  $u$ , haciendo  $u = U + \mu/\sigma^2$  da

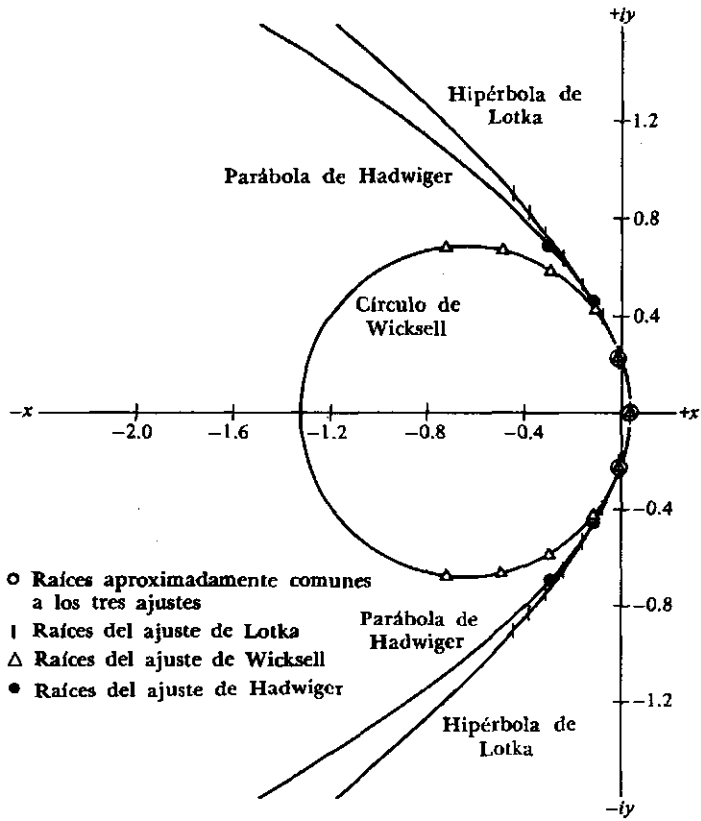
$$U^2 - v^2 = \mu^2/\sigma^4 - 2 \ln R_0/\sigma^2 \quad (6.2.12)$$

y

$$Uv = \pm 2\pi m/\sigma^2. \quad (6.2.13)$$

La ecuación (6.2.13) describe un conjunto de hipérbolas en el plano complejo, una para cada valor de  $m$ . La intersección de éstas con la curva (6.2.12), que también es una hipérbola, determina las raíces complejas que surgen en el ajuste normal de la función de fecundidad (Lotka, 1939c, pág. 75, y gráfico 6.1). Las hipérbolas son arbitrarias; el conjunto de raíces puede ser representado de muchas maneras como intersecciones de otras curvas. Denominando  $a$  a la cons-

**GRAFICO 6.1**  
**CURVAS EN LAS QUE LAS RAICES  $r_1, r_2, \dots$  SE DESPRENDEN EN TRES AJUSTES. MUJERES MEXICANAS, 1960**



tante del lado derecho de (6.2.12) y  $b$  a la constante del lado izquierdo de (6.2.13), podemos convertir las intersecciones de los conjuntos de hipérbolas

$$U^2 - v^2 = a, \quad Uv = b \tag{6.2.14}$$

en intersecciones de círculos y rectas (véase Lotka, 1945, págs. 355-385). Las ecuaciones (6.2.14) son equivalentes al par

$$U^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + 4b^2}, \quad U + v = \sqrt{\sqrt{a^2 + 4b^2} + 2b},$$

donde  $b$  puede tomar los valores del lado derecho de (6.2.13), esto es,  $0, \pm 2\pi/\sigma^2, \pm 4\pi/\sigma^2, \pm 6\pi/\sigma^2$ , etcétera.

Donde existe alguna desviación respecto de la condición de estabilidad en la distribución por edades inicial, uno espera oscilaciones a través del tiempo, tanto en lo que se refiere a la población total como a la población por edades. Si  $\sigma^2 = 0$ , la ecuación cuadrática, (6.2.9) se reduce a

$$-2r\mu + 2 \ln R_0 = \mp 4\pi i$$



para  $m = \pm 1$ . Entonces

$$r = \frac{\ln R_0 \pm 2\pi i}{\mu},$$

y las raíces complejas principales tienden a una parte real,  $(\ln R_0)/\mu$ , y a una parte imaginaria,  $\pm 2\pi i/\mu$ . Los términos correspondientes en la solución para  $B(t)$  son

$$Q_1 \exp[(\ln R_0 + 2\pi i)t/\mu] + Q_2 \exp[(\ln R_0 - 2\pi i)t/\mu].$$

Cuando  $R_0$  sea mayor que uno,  $\ln R_0$  será positivo, y no existirá suavizamiento de las oscilaciones; en lugar de eso, en virtud del factor

$$\exp[(\ln R_0)t/\mu] = R_0^{t/\mu},$$

una vez que se presentan las oscilaciones, sus amplitudes irán siempre en aumento. Este modelo se aplica exactamente en el caso de que todas las mujeres tengan todos sus hijos a la misma edad.

Para mostrar suavizamiento, el modelo debe incluir  $\sigma^2$  de al menos cierto valor, vale decir, debe existir una variación mínima en las edades de las mujeres al tener sus hijos. El  $\sigma^2$  mínimo que asegura suavizamiento es aquel que hace que las raíces complejas principales tengan partes reales negativas. De (6.2.12), sustituyendo  $u = \bar{U} + \mu/\sigma^2$ , tenemos

$$u = \mu/\sigma^2 - \sqrt{v^2 + (\mu^2/\sigma^4) - (2 \ln R_0/\sigma^2)}. \quad (6.2.15)$$

Evidentemente  $u$  será negativa si

$$v^2 - 2 \ln R_0/\sigma^2 > 0,$$

o

$$\sigma > \sqrt{2 \ln R_0}/v. \quad (6.2.16)$$

Para una población creciente  $\ln R_0 > 0$ , y mientras la desviación típica de la edad al tener los hijos sea mayor que la cantidad de la derecha de (6.2.16) (4,1 años en el caso de los Países Bajos, 1964, cuyo  $R_0 = 1,49$ ,  $v = 0,2166$ ), se aplicará suavizamiento. Si una población tiene un  $R_0$  que puede llegar hasta un valor  $e = 2,72$ , y  $v$  tan pequeño como 0,2, el suavizamiento requerirá  $\sigma > \sqrt{2 \ln e}/v$ , o,  $\sigma^2 > 2/v^2$ . Puesto que  $v$  está invariablemente próximo a 0,2, esto requiere que  $\sigma^2 > 50$ , lo cual es un valor alto. Sin embargo, la condición (6.2.16) parece encontrarse siempre en las poblaciones humanas.

El resultado (6.2.16) es exacto si los cumulantes del tercero en adelante son cero. Se puede idear una corrección que tenga en cuenta la asimetría y curtosis.

Para  $R_0$  y  $\mu$  dados, la varianza en las edades al nacimiento de los hijos aumenta la raíz real o tasa intrínseca de crecimiento natural  $r$ . Diferenciando (6.2.6) con respecto a  $\sigma$  se tiene

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{\sigma r^2}{\mu - \sigma^2 r}, \quad (6.2.17)$$

que es positivo, aunque muy pequeño para los valores de  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $r$  que se encuentran en la práctica. El lector puede evaluar e interpretar (6.2.17) para las mujeres australianas, 1965, usando los datos del cuadro 5.5.

El valor de  $Q$  para la condición inicial de  $B_0$  nacimientos es (usando la ecuación 5.2.22)  $B_0$  dividido por la derivada con respecto a  $r$  del primer miembro de (5.2.2) con el signo cambiado:  $B_0 / -\psi'(r)$ . La ecuación (6.2.5) nos permite reemplazar  $\psi(r) = 1$  de (5.2.2) por

$$\psi(r) = R_0 e^{-r\mu + \sigma^2 r^2 / 2} = 1,$$

y la derivada de  $\psi(r)$  con respecto a  $r$  es ahora

$$\psi'(r) = -R_0(\mu - \sigma^2 r) e^{-r\mu + \sigma^2 r^2 / 2} = -(\mu - \sigma^2 r), \quad (6.2.18)$$

donde  $r$  es cualquier raíz de  $\psi(r) = 1$ . De allí que

$$Q_s = \frac{B_0}{-\psi'(r_s)} = \frac{B_0}{\mu - \sigma^2 r_s}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (6.2.19)$$

La edad promedio al nacimiento de los hijos en la población estable se puede calcular de (5.6.9) como la misma derivada  $-\psi'(r)$  evaluada en la raíz real:

$$A_r = \frac{-\psi'(r)}{\psi(r)} = \frac{-d \ln \psi(r)}{dr} = \mu - r\sigma^2 \quad (6.2.20)$$

#### CUADRO 6.1

EDAD MEDIA DE LAS MADRES AL NACIMIENTO DE SUS HIJOS  
EN LA POBLACION ESTABLE, CALCULADA EN BASE AL AJUSTE NORMAL  
Y EN BASE A LA FORMA DEL HISTOGRAMA DE LA FUNCION  
DE FECUNDIDAD NETA

	1000r	$\mu$	$\sigma^2$	$A_r$ calculada en base al ajuste normal como $\mu - r\sigma^2$	$A_r$ en base al histograma
Australia 1965	12.29	27.39	33.31	26.98	26.96
Colombia 1964	28.35	29.60	50.90	28.16	28.17
República Dominicana 1960	26.50	29.64	49.65	28.32	28.31
Finlandia 1964	6.47	28.05	37.74	27.81	27.80
México 1959-1961	32.95	29.06	46.26	27.54	27.52
Estados Unidos 1963	17.10	26.47	34.13	25.89	25.87
1964	15.70	26.53	34.26	25.99	25.97

La varianza  $\sigma^2$  que aparece ha sido corregida por agrupamiento mediante la sustracción de  $25/12 = 2.08$ .

basado en el ajuste normal para una población de  $R_0$ ,  $\mu$  y  $\sigma^2$  dados. De allí que para una población creciente,  $A_r < \mu$ . El resultado  $A_r = \mu - r\sigma^2$  es exacto, dado el ajuste normal, pero es una aproximación para las observaciones originales en grupos quinquenales de edad. En el cuadro 6.1 aparece información relevante relativa a seis países de tasas de crecimiento bastante diferentes. Comente sobre la aptitud de (6.2.20) para las cuatro poblaciones y estime el orden de magnitud de la discrepancia para Australia mediante  $r^2\kappa_3/2$ , el término siguiente en (6.2.20) cuando la función de fecundidad neta no puede suponerse normal, usando el  $\kappa_3$  del cuadro 5.5.

La cantidad  $T$  —el intervalo medio entre dos generaciones definido por  $e^{rT} = R_0$ —, se expresa fácilmente en términos de  $\mu$  y  $A_r$ . De (6.2.5)

$$R_0 = e^{r\mu - \sigma^2 r^2/2}.$$

Igualando lo anterior a  $e^{rT}$ , tomando logaritmos de ambos miembros y dividiendo por  $r$ , tenemos

$$T = \mu - \sigma^2 r/2. \quad (6.2.21)$$

La comparación con (6.2.20) nos muestra que

$$T = (A_r + \mu)/2$$

sin aproximación, una vez que se supone el ajuste normal de la función de fecundidad neta. Relacione esto con (5.6.11), que demostró que en general  $(A_r + \mu)/2$  es mayor que  $T$  en  $K_3 r^2/12$  aproximadamente.

### 6.3. AJUSTE MEDIANTE LA FUNCION GAMMA INCOMPLETA (WICKSELL)

Comentando sobre el trabajo de Lotka resumido en la sección precedente, Wicksell (1931, págs. 156-157) señaló la superioridad de la curva de Pearson de Tipo III que toma en cuenta la asimetría casi universal de la función de fecundidad neta, y mencionó la ventaja de este ajuste para obtener las raíces complejas. En la ecuación característica (5.2.2), él reemplaza  $p(x)m(x) dx$  por

$$K \frac{c^k x^{k-1} e^{-cx}}{\Gamma(k)} dx, \quad (6.3.1)$$

donde las 3 constantes  $K$ ,  $c$ , y  $k$  se elegirán una vez más por el método de los momentos, y  $\Gamma(k) \doteq \sqrt{2\pi} k^{k-1/2} \exp(-k + 1/12k)$ .

Igualando los momentos 0ésimo, primero y segundo de la fórmula a los momentos correspondientes de las observaciones se tienen las tres ecuaciones

$$\int_0^\infty \frac{Kc^k x^{k-1} e^{-cx}}{\Gamma(k)} dx = \int_a^\beta p(x)m(x) dx, \quad (6.3.2)$$

$$\int_0^\infty \frac{Kxc^k x^{k-1} e^{-cx}}{\Gamma(k)} dx = \int_a^\beta xp(x)m(x) dx, \quad (6.3.3)$$

$$\int_0^\infty \frac{Kx^2 c^k x^{k-1} e^{-cx}}{\Gamma(k)} dx = \int_a^\beta x^2 p(x)m(x) dx. \quad (6.3.4)$$

Evaluando las integrales en (6.3.2) tenemos

$$K = R_0, \quad (6.3.5)$$

que es la tasa neta de reproducción. El primer miembro de (6.3.3) es

$$R_0 \int_0^{\infty} \frac{c^k x^k e^{-cx}}{\Gamma(k)} dx = \frac{R_0 c^k}{c^{k+1}} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} \frac{c^{k+1} x^k e^{-cx}}{\Gamma(k+1)} dx = \frac{R_0 k}{c},$$

y las observaciones representadas por el segundo miembro de (6.3.3) son

$$\int_a^{\beta} x p(x) m(x) dx = R_1;$$

igualando éstas obtenemos

$$\frac{k}{c} = \frac{R_1}{R_0} = \mu. \quad (6.3.6)$$

El primer miembro de (6.3.4) es

$$R_0 \int_0^{\infty} \frac{c^k x^{k+1} e^{-cx}}{\Gamma(k)} dx = \frac{R_0 \Gamma(k+2)}{\Gamma(k)} \frac{c^k}{c^{k+2}} \int_0^{\infty} \frac{c^{k+2} x^{k+1} e^{-cx}}{\Gamma(k+2)} dx = \frac{R_0 (k+1)k}{c^2},$$

e igualando esto al  $R_2 = R_0(\sigma^2 + \mu^2)$  observado a la derecha de (6.3.4) da

$$\frac{R_0 (k+1)k}{c^2} = R_0(\sigma^2 + \mu^2). \quad (6.3.7)$$

Combinando (6.3.6) y (6.3.7), tenemos

$$c = \frac{\mu}{\sigma^2} = \frac{R_1}{R_2 - R_1^2/R_0} \quad (6.3.8)$$

y

$$k = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{R_1^2}{R_2 R_0 - R_1^2}. \quad (6.3.9)$$

Las ecuaciones (6.3.5), (6.3.8) y (6.3.9) constituyen el ajuste debido a Wicksell. En términos de la curva de Tipo III la ecuación característica (5.2.2) es

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_0^{\infty} e^{-rx} \frac{Kc^k x^{k-1} e^{-cx}}{\Gamma(k)} dx \\ &= \frac{Kc^k}{(r+c)^k} \int_0^{\infty} \frac{(r+c)^k x^{k-1} e^{-(r+c)x}}{\Gamma(k)} dx = 1, \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

o sea,

$$\phi(r) = Kc^k / (r+c)^k = 1, \quad (6.3.11)$$

ya que la segunda integral en (6.3.10) es uno por la definición de  $\Gamma(k)$ . Resolviendo la muy simplificada ecuación característica (6.3.11):

$$r = c(K^{1/k} - 1),$$

y sustituyendo los momentos para las constantes de (6.3.5), (6.3.8) y (6.3.9) da

$$r = \frac{\mu}{\sigma^2} (R_0^{\sigma^2/\mu^2} - 1). \quad (6.3.12)$$

Para las raíces complejas  $R_0$  se reemplaza por  $R_0 e^{2\pi mi}$  siendo  $m$  entero. Demuestre que para el ajuste Tipo III todas las raíces caen en un círculo de centro  $-\mu/\sigma^2$  sobre el eje real y radio  $r_1 + \mu/\sigma^2$  (gráfico 6.1).

El coeficiente  $Q$  en la solución de la ecuación integral con  $B_0$  nacimientos como condición inicial se determina fácilmente. Necesitamos la derivada de  $\psi(r)$ , que por (6.3.11) resulta ser

$$\begin{aligned} \psi'(r) &= - \int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) m(x) dx = - \frac{Kc^k k}{(c+r)^{k+1}} \\ &= - \left\{ \frac{Kc^k}{(r+c)^k} \right\} \left\{ \frac{k}{(c+r)} \right\} = - \frac{k}{(c+r)}, \end{aligned}$$

para todas las raíces  $r$  que satisfagan (6.3.11). De allí que de (6.3.8) y (6.3.9),

$$Q_s = - \frac{1}{\psi'(r_s)} = \frac{B_0}{\mu} + \frac{B_0 \sigma^2 r_s}{\mu^2},$$

siendo el segundo término de la derecha  $(100\sigma^2/\mu)r_1$  por ciento del primero para la raíz real o a lo más 5 por ciento. El lector puede determinar la solución

$$B(t) \doteq \sum_{s=1}^3 Q_s e^{r_s t}$$

para las mujeres portuguesas en 1965 a partir de los datos proporcionados por el cuadro 5.5.

#### 6.4. AJUSTE MEDIANTE UNA DISTRIBUCION QUE RELACIONA GENERACIONES SUCESIVAS (HADWIGER)

Hemos visto dos formas analíticas de la función de fecundidad neta, correspondientes al ajuste por una curva normal y por una Pearson Tipo III, y evidentemente que hay muchas más disponibles que proveerían algún tipo de ajuste a los datos reales. Cada una de éstas daría lugar a diversas configuraciones geométricas al llevar sus raíces a una representación en el plano complejo. Entre estas funciones hay una que tiene un interés especial para nosotros. Hadwiger (1940) demuestra que si la probabilidad de que una niña recién nacida tenga una hija a la edad  $x$  a  $x + dx$  está representada (en nuestra notación) por  $n = 1$  en

$$\phi_n(x) dx = \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \exp \left[ nac - \left( \frac{n^2 a^2}{x} + bx \right) \right] dx, \quad (6.4.1)$$

entonces la probabilidad de tener una nieta en la línea femenina cuando la niña original tiene (o tendría si viviera)  $x$  a  $x + dx$  está representada por  $n = 2$  en la misma expresión, y de tener una bisnieta por  $n = 3$ , etc. Observe que la edad de cada descendiente está medida no desde su propia fecha de nacimiento sino desde la de su ancestro original.

**CUADRO 6.2**  
**FUNCION EXPONENCIAL DE HADWIGER  $\phi_n(x)$  DE (6.4.4) PARA  $R_0 = 1$**   
**Y DIVERSOS VALORES DE  $\mu$  Y  $\sigma^2$**

$\sigma^2$	$\mu$	$x = 15$	$x = 25$	$x = 35$	$x = 45$
25	25	0.00612	0.07979	0.01154	0.00039
	27	0.00108	0.08214	0.02014	0.00076
	29	0.00011	0.06877	0.03314	0.00152
	31	0.00001	0.04512	0.05009	0.00306
35	25	0.01342	0.06743	0.01467	0.00117
	27	0.00401	0.07116	0.02257	0.00195
	29	0.00081	0.06643	0.03321	0.00330
	31	0.00010	0.04921	0.04591	0.00560
45	25	0.02008	0.05947	0.01623	0.00208
	27	0.00806	0.06362	0.02328	0.00319
	29	0.00237	0.06045	0.03220	0.00492
	31	0.00049	0.05001	0.04235	0.00759

<sup>a</sup> Programado por Robert D. Retherford.

El lector puede usar el principio de la sección 5.6 para deducir un resultado análogo basado en la distribución de las generaciones sucesivas para los ajustes de Lotka y Wicksell, aunque éstos serán funciones de  $n$  menos convenientes que (6.4.1). Puesto que la función de Hadwiger (6.4.1) no es muy conocida, mostramos una pequeña tabla (cuadro 6.2).

La integral definida estándar

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2\theta^2 + (\beta^2/\theta^2))} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-2\alpha\beta},$$

(Abramowitz y Stegun, 1965, pág. 304; Chemical Rubber Publishing Co., 1963, pág. 314) se puede evaluar escribiendo  $u = \alpha\theta - \beta/\theta$  y haciendo la sustitución, lo que transforma el problema en el de encontrar la integral de  $e^{-u^2}$ . Para aplicar la integral estándar a (6.4.1), ponga  $\theta = 1/\sqrt{x}$ ,  $\alpha = na$ ,  $\beta = \sqrt{b-r}$ . Uno puede demostrar que la función generatriz cumulante de  $\phi_n(x)$  es

$$\ln \int_0^{\infty} e^{rx} \phi_n(x) dx = \ln \phi_n(-r) = na(c - 2\sqrt{b-r}). \quad (6.4.2)$$

Mediante diferenciaciones sucesivas de  $\ln \psi_n(-r)$ , y haciendo  $r = 0$ , se pueden determinar los cumulantes cero ésimo, primero y segundo. Siguiendo esto el lector puede aparear los momentos para obtener

$$a = \frac{\mu^{3/2}}{\sigma\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\mu}{2\sigma^2}, \quad c = \frac{\sqrt{2}\mu}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}\sigma \ln R_0}{\mu^{3/2}} \quad (6.4.3)$$

Para  $n = 1$ , (6.4.1) se convierte en

$$\phi_1(x) = \frac{R_0}{\sigma} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{\mu}{2\sigma^2} \left(\sqrt{x} - \frac{\mu}{\sqrt{x}}\right)^2\right]. \quad (6.4.4)$$

Investigaremos ahora la ecuación característica de  $\phi_1(x)$ ,

$$\phi(r) = \int_0^\infty e^{-rz} \frac{a}{\sqrt{\pi x^3}} e^{ae-(a^2/z+bz)} dx = 1,$$

que se reduce a

$$e^{a(c-2\sqrt{b+r})} = 1. \quad (6.4.5)$$

Sustituyendo (6.4.3) en (6.4.5) da, directamente en término de los momentos,

$$\phi(r) = R_0 \exp\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{\mu^{3/2}}{\sigma} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma^2} + 2r}\right) = 1.$$

Las raíces se obtendrán tomando logaritmos,

$$\ln \phi(r) = a(c - 2\sqrt{b+r}) = \pm 2\pi mi,$$

y son

$$r = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - b = \frac{\ln R_0}{\mu} + \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(\frac{\ln R_0}{\mu}\right)^2 \quad (6.4.6)$$

para la raíz real, y

$$r = \left(\frac{c}{2} \pm \frac{\pi mi}{a}\right)^2 - b, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6.4.7)$$

para las raíces complejas. De (6.4.7) podemos establecer ecuaciones para la curva sobre la que deben quedar las raíces haciendo  $r = x + iy$  e igualando las partes real e imaginaria, para obtener

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c^2}{4} - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - b, \\ y &= \frac{\pm \pi mc}{a}, \end{aligned} \right\} m = 0, 1, 2, \dots,$$

en términos del parámetro  $m$ . Eliminando  $m$  se tiene

$$y^2 = c^2(c^2/4 - b - x),$$

es decir, una parábola cuyo eje principal es el eje de abscisas, que la atraviesa en  $x = (c^2/4) - b$ , la raíz real. El lector con inclinación por la geometría puede demostrar que el foco de la parábola está a una distancia  $\mu/2\sigma^2$  a la izquierda del eje imaginario  $x = 0$  (gráfico 6.1). El intervalo medio entre dos generaciones  $T$  se obtiene al reemplazar el valor de  $r$  de (6.4.6) en la definición de  $T$ :

$$T = \frac{\ln R_0}{r} = \frac{\mu}{1 + (\sigma^2 \ln R_0)/2\mu^2} \doteq \mu - \frac{\sigma^2 r}{2}. \quad (6.4.8)$$

El desnivel en el plano de generaciones y edad (o tiempo desde el ancestro inicial) que fue retratado numéricamente en el cuadro 5.6 se puede estudiar a la luz de este ajuste, considerando ahora  $n$  como variable continua en lugar de discreta. Para un  $x$  dado, la generación máxima se determina resolviendo  $d\phi_n(x)/dn = 0$  como

$$n \doteq \frac{x}{\mu} + \frac{x\sigma^2 \ln R_0}{\mu^2},$$

que en una población creciente está levemente sobre  $x/\mu$ . Escribimos (6.4.1) en la forma

$$\phi_n(x) = \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \exp [na(c - 2\sqrt{b}) - (na/\sqrt{x} - \sqrt{bx})^2],$$

y se pueden desarrollar otras propiedades geométricas de la superficie  $\phi_n(x)$  sobre el plano  $(n, x)$ . Lotka (1939c, páginas 82-84) discute estos temas en términos del ajuste normal de la función de fecundidad neta.

En los capítulos 3 y 5 se aseveró sin prueba que el suavizamiento de las oscilaciones en una trayectoria poblacional depende de la dispersión de las edades en que las madres tienen sus hijos, una dispersión que se puede medir mediante la desviación típica  $\sigma$  de la función de fecundidad neta. En la discusión del ajuste de Lotka en el presente capítulo, encontramos en (6.2.16) el rango de variación mínimo requerido para suavizamiento. El ajuste de Hadwiger proporciona un enunciado muy simple de la relación entre la parte real de la primera raíz compleja (que determina la tasa de suavizamiento) y el rango de variación de las edades en que las madres tienen sus hijos.

En (6.4.7) y muestra 6.1 la parte real  $x$  es

$$x = \frac{c^2}{4} - b - \frac{\pi^2 m^2}{a^2}.$$

Las cosas se facilitan considerando la relación entre  $x$  y la varianza  $\sigma^2$  así como entre poblaciones de *tasa intrínseca de crecimiento*  $r_1$  (puesto que  $r_1$  no se ve muy afectado por  $\sigma^2$ , esto no quita interés al resultado). Entonces podemos reemplazar  $(c^2/4) - b$  por  $r_1$  considerado como una constante y tenemos

$$x = r_1 - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} = r_1 - \frac{2\sigma^2 \pi^2}{\mu^2}, \quad (6.4.9)$$



con  $m = \pm 1$  para el primer par de raíces complejas. Probamos en sección 5.2 que  $\kappa$  es menor que  $r_1$ ; ahora (6.4.9) estima en qué cantidad es menor:  $2\sigma^2\pi^2/\mu^2$ . Para las mujeres de los Países Bajos, 1964,  $r_1 = 0,01375$ ,  $\mu = 29,21$ . De allí que para que ocurra suavizamiento, el segundo miembro de (6.4.9) debe ser negativo, o sea,  $\sigma^2 > r_1\mu^3/2\pi^2$ , que da  $\sigma^2 > 17,36$  y  $\sigma > 4,2$  años. Basándonos en el ajuste de Lotka dedujimos (6.2.16) y determinamos para las Países Bajos  $\sigma = 4,1$  años como la dispersión mínima de la edad de las madres al tener sus hijas para suavizamiento. Demuestre que la diferencia entre los mínimos sobre (6.4.9) y sobre (6.2.16) es del orden de  $r^2$  o menos.

Al final del capítulo 3 se aseveró también que la parte imaginaria de la primera raíz compleja  $r_2$  explica los ciclos de la trayectoria de la población inducida por una divergencia inicial respecto de la condición de estabilidad, y que la extensión de las oscilaciones de los ciclos es aproximadamente igual a la duración de la generación. Esto se aprecia convenientemente en términos del ajuste de Hadwiger. Porque en este ajuste las raíces  $\tau$  de  $\psi(\tau) = 1$  tienen partes imaginarias  $y = nmc/a$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Haciendo  $|m| = 1$ ,  $y = \pi c/a$ , y reemplazando  $c$  y  $a$  en términos de los momentos, tenemos

$$y = \frac{2\pi}{\mu} \left( 1 + \frac{\sigma^2 \ln R_0}{\mu^2} \right),$$

o sea una extensión de oscilaciones de

$$\frac{2\pi}{y} = \frac{\mu}{1 + (\sigma^2 \ln R_0/\mu^2)} \doteq \mu - \frac{\sigma^2 \ln R_0}{\mu}. \quad (6.4.10)$$

Usando (6.4.8) y (6.4.10) el lector puede demostrar que  $\mu > T > 2\pi/y$  si  $R_0 > 1$ , y

$$\mu - T = T - \frac{2\pi}{y} \doteq \left( \frac{\sigma^2 \ln R_0}{2\mu} \right).$$

Puede también demostrarse que basándose en este ajuste  $2\pi/y$  es exactamente igual a  $A_r$ , la edad media de las madres al nacimiento de los hijos en la población estable.

Puesto que  $\ln R_0$  es comúnmente menor que uno en las poblaciones humanas (¿qué tasa de crecimiento anual la haría igual a uno?), y  $\sigma^2$  es un poco mayor que  $\mu$  pero del mismo orden de magnitud, el segundo término en el denominador de (6.4.10) es comúnmente menor que 0,05; (6.4.10) nos dice que la extensión de la repetición de cualquiera perturbación en la población será menor que  $\mu$  y hasta 5 por ciento de su valor para una población creciente.

El cuadro 6.3 muestra las cantidades  $\mu$ ,  $T$  y  $2\pi/y$ , junto con  $A_r$ , la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable. Se ve que la diferencia  $\mu - T$  es igual a  $T - A_r$ , como se probó para términos en  $r$  mediante el argumento que condujo a (5.6.11), y si el ajuste de Hadwiger es apropiado,  $2\pi/y$  debe ser igual a  $A_r$ . Las diferencias en el cuadro 6.3 sugieren que  $2\pi/y$  es muy sensible a las desviaciones de la función de fecundidad neta  $\phi(x)$  del ajuste de Hadwiger. La medida de asimetría  $\beta_1$  de Pearson (muestra 6.1) es  $9\sigma^2/\mu^2$  (cuadro 6.5) para un ajuste Hadwiger, y donde  $\beta_1\mu^2/\sigma^2$  se aparta considerablemente de 9, también lo hace  $2\pi/y$  respecto de  $A_r$ . Determine la relación entre  $2\pi/y - A_r$  por un lado y  $\beta_1$  por otro mediante un diagrama de puntos.

CUADRO 6.3

COMPARACION DE  $\mu$ , LA EDAD MEDIA DE LAS MADRES AL NACIMIENTO DE SUS HIJOS EN LA POBLACION ESTACIONARIA;  $T$ , EL INTERVALO MEDIO ENTRE DOS GENERACIONES;  $A_r$ , LA EDAD MEDIA DE LAS MADRES AL NACIMIENTO DE SUS HIJOS EN LA POBLACION ESTABLE;  $2\pi/y$ , LA EXTENSION DE LAS OSCILACIONES DE LA PRIMERA COMPONENTE COMPLEJA DE LA DISTRIBUCION POR EDADES;  $\beta_1\mu^2/\sigma^2$ , EL CRITERIO PARA LA CONCORDANCIA DE  $A_r$  Y  $2\pi/y$

	$\mu$	$T$	$A_r$	$2\pi/y$	CRITERIO $\beta_1\mu^2/\sigma^2$
<b>MUJERES</b>					
Austria 1965	27.28	27.12	26.95	27.51	5
Canadá 1965	27.75	27.47	27.19	27.46	6
Checoslovaquia 1962	25.87	25.87	25.75	25.07	19
Inglaterra y Gales 1960-1962	27.42	27.25	27.09	27.14	8
Finlandia 1964	28.05	27.92	27.80	27.96	7
Grecia 1965	28.09	28.07	28.05	28.43	5
México 1959-1961	29.06	28.28	27.52	29.18	1
Escocia 1963	27.63	27.42	27.22	27.31	7
Estados Unidos 1963	26.47	26.17	25.87	25.76	8
1964	26.53	26.25	25.97	25.94	8
<b>HOMBRES</b>					
Inglaterra y Gales 1960-1962	30.52	30.31	30.11	29.65	14
Estados Unidos 1964	29.62	29.22	28.84	28.04	15

Las raíces más allá de  $r_3$  representan extensiones de oscilación menores y se suavizan más rápidamente. Para este ajuste, la extensión de la oscilación es casi inversamente proporcional a  $m$ , puesto que  $y$  en (6.4.10) toma un factor  $m$  para las raíces  $2m$  ésima y  $(2m + 1)$  ésima. Estas oscilaciones más cortas, de período un medio, un tercio, etc., del largo de la generación, deberían superponerse al conjunto principal contenido en  $r_2$  y  $r_3$ . Compárelas con las oscilaciones de mayor frecuencia de la función no ajustada  $\phi(x)$  del capítulo 5.

En el gráfico 6.1 aparecen la hipérbola sobre la que deslizan las raíces de  $\psi(r) = 0$  para el ajuste de Lotka, el círculo para Wicksell, y la parábola para

Hadwiger. Para cualquiera de estos ajustes existe una única ordenación de las raíces de modo que la sucesión en frecuencias ascendentes será la misma que la sucesión en valores absolutos descendentes, excepto más allá de un cierto punto en el círculo de Wicksell.

### 6.5. COMPATIBILIDAD DE LOS DIVERSOS AJUSTES DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA

La muestra 6.1 reúne los resultados de los tres ajustes para propósitos de referencia, en tanto que el gráfico 6.1 muestra las raíces. Las tres curvas usadas son las más conocidas de aquellas ajustadas a la función de fecundidad neta. Pretorius (1930) y Lotka (1933a) han ajustado el Tipo I, pero la teoría para esto es más complicada.

Para averiguar la calidad de ajuste podemos utilizar diversas dójimas. Podemos sacar histogramas para un cierto número de poblaciones y examinar en qué grado cada curva se ajusta al histograma. Un segundo método consiste en comparar los momentos de tercer y cuarto orden de las curvas ajustadas con los momentos de tercero y cuarto orden observados. Podemos comparar la función  $\psi(r)$  basada en el ajuste con la función  $\psi(r)$  no ajustada, y comparar las raíces reales y complejas de  $\psi(r) = 1$  para las formas ajustadas y no ajustadas de la función de fecundidad neta. Estas cuatro dójimas se aplicarán en forma somera.

#### Curva ajustada e histograma de observaciones

Para comparar las diversas curvas con el histograma de las observaciones, debemos traducir las ordenadas en áreas en base a intervalos quinquenales. Las ordenadas de la  $\phi_1(x)$  de (6.4.4) en las cuatro edades para el  $R_0$ ,  $\mu$ , y  $\sigma^2$  de las mujeres canadienses, 1965 son

$$\phi_1(20) = 0.0520 ,$$

$$\phi_1(25) = 0.1023 ,$$

$$\phi_1(30) = 0.0819 ,$$

$$\phi_1(35) = 0.0395 .$$

Estas se pueden integrar aproximadamente mediante una cúbica, esto es, aplicando (1.1.11) con el resultado para el intervalo de edades 25-29 de

$$\int_{25}^{30} \phi_1(x) dx = 0.4798 .$$

Se calcula un resultado más preciso con menos esfuerzo trabajando con intervalos de un año, y aplicando una fórmula de Gauss con cinco ordenadas a los años individuales de edad dada en el capítulo 10 como (10.4.6). El cuadro 6.4 muestra las áreas bajo las curvas obtenidas por estos procedimientos para cuatro poblaciones. La curva que está más cerca en cada edad está subrayada. Existe bastante variación entre los países, de manera que al no disponer de una muestra mayor, parecía no valer la pena aplicar una dójima estadísticamente más elaborada.

## MUESTRA 6.1

RESUMEN DE PROPIEDADES DE LA ECUACION INTEGRAL CUANDO LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA ESTA AJUSTADA MEDIANTE LAS CURVAS NORMAL (LOTKA), TIPO III (WICKSELL) Y EXPONENCIAL (HADWIGER)

	Normal (Lotka)	Tipo III (Wicksell)	Exponencial (Hadwiger)
Función de ajuste para $p(x)m(x)$	$\frac{R_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[x-\mu]^2/2\sigma^2}$	$R_0 \frac{c^k x^{k-1} e^{-cx}}{\Gamma(k)}$	$\frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} e^{na - [(n^2 x^2/a) + bx]}$ , $n=1$ para la primera generación
Función generatriz de cumalantes $\ln \psi(-r)$ $= \ln \int_{\alpha}^{\beta} e^{rx} p(x)m(x) dx$	$r\mu + \frac{r^2 \sigma^2}{2} + \ln R_0$	$-k \ln(c-r) + \ln R_0 + k \ln c$	$a(c - 2\sqrt{b-r})$
Constantes en términos de los momentos observados	$\mu = R_1/R_0$ $\sigma = \sqrt{\frac{R_2}{R_0} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2}$	$k = \mu^2/\sigma^2$ $c = \mu/\sigma^2$	$a = \frac{\mu^{3/2}}{\sigma\sqrt{2}}$ , $b = \frac{\mu}{2\sigma^2}$ , $c = \frac{\sqrt{2}\mu}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}\sigma \ln R_0}{\mu^{3/2}}$
Ecuación característica $\phi(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} p(x)m(x) dx = 1$	$R_0 e^{[r^2 \sigma^2 / 2] - r\mu} = 1$	$\frac{R_0 c^k}{(r+c)^k} = 1$	$e^{a(c-2\sqrt{b+r})} = 1$
$\ln \phi(r)$	$\ln R_0 - r\mu + \frac{\sigma^2 r^2}{2}$	$\ln R_0 - k \ln(r+c)$ $= \ln R_0 - \mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2} - \frac{\sigma^4 r^3}{3\mu}$ $+ \dots$	$\ln R_0 - \mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2} - \frac{\sigma^4 r^3}{2\mu}$ $+ \dots$
Solución para una raíz real	$r_L = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 \ln R_0}}{\sigma^2}$	$r_W = c(R_0^{1/k} - 1)$	$r_H = \frac{c^2}{4} - b$ $= \frac{\ln R_0}{u} + \frac{\sigma^2 (\ln R_0)^2}{2u^2}$

Solución para raíces complejas

Ecuaciones paramétricas de la curva a la que pertenecen las raíces (los valores enteros de  $m$  dan las raíces)

Forma de la curva

Intervalo medio entre dos generaciones

$T_L, T_W, T_H$

$Q_s$ , el coeficiente de  $e^{r_s t}$ , para  $B_0$  nacimientos como condición inicial

$Q_s = B_0 / -\phi'(r_s)$

Medidas de Pearson

Asimetría  $\beta_1 = \frac{\kappa_3}{\sigma^3}$

Curtosis  $\beta_2 = \frac{\kappa_4}{\sigma^4} + 3$

$$\kappa = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

$$r = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2(\ln R_0 \pm 2\pi m i)}}{\sigma}$$

$$\left(x - \frac{\mu}{\sigma^3}\right)y = \pm \frac{2\pi m}{\sigma^3}$$

$$\left(x - \frac{\mu}{\sigma^3}\right)^2 - y^2 = \frac{\mu^2}{\sigma^4} - \frac{2 \ln R_0}{\sigma^2}$$

Hipérbola

$$\mu - \frac{\sigma^2 r}{2}$$

$$Q_{sL} = \frac{B_0}{\mu - \sigma^2 r_s}$$

0

3

0

$$r = c(R_0^{1/k} e^{2\pi m i/k} - 1)$$

$$\cos\left(\frac{2m\pi}{k}\right) = \frac{x + c}{r_w + c}$$

$$\sin\left(\frac{2m\pi}{k}\right) = \frac{y}{r_w + c}$$

Círculo

$$\mu - \frac{\sigma^2 r}{2} + \frac{\sigma^4 r^2}{3\mu} + \dots$$

$$Q_{sW} = \frac{B_0(\mu + \sigma^2 r_s)}{\mu^2}$$

$$4(\sigma/\mu)^2$$

$$6(\sigma/\mu)^2 + 3$$

$\infty$

$$r = \left(\frac{c}{2} \pm \frac{\pi m i}{a}\right)^2 - b$$

$$x = r_H - \frac{\pi^2 m^2}{a^2}$$

$$y = \pm \frac{\pi m c}{a}$$

Parábola

$$\mu - \frac{\sigma^2 r}{2} + \frac{\sigma^4 r^2}{2\mu} + \dots$$

$$Q_{sH} = \frac{B_0}{\mu} \sqrt{1 + \frac{2r_s \sigma^2}{\mu}}$$

$$9\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2$$

$$15\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 + 3$$

$$\frac{(3(2 + 5(\sigma/\mu)^2))^2}{4(4 + 11(\sigma/\mu)^2)}$$

**CUADRO 6.4**  
**FUNCION DE FECUNDIDAD NETA DE ACUERDO A LOS TRES AJUSTES**  
**Y A LO OBSERVADO. LAS FRECUENCIAS APARECEN PARA**  
**INTERVALOS QUINQUENALES DE EDAD PARA MUJERES\***

Edad	Normal (Lotka) (6.2.1)	Tipo III (Wicksell) (6.3.1)	Exponencial (Hadwiger) (6.4.1)	Histograma observado
CANADA, 1965 <sup>b</sup> : $R_0 = 1.496$ ; $\mu = 27.753$ ; $\sigma^2 = 37.086$				
0-4	0.000140	0.000002		
5-9	0.002519	0.000072	<u>0.000002</u>	
10-14	0.024452	0.010113	<u>0.004354</u>	0.000480
15-19	0.124711	0.124468	<u>0.116386</u>	0.116108
20-24	0.335275	0.384074	<u>0.411065</u>	0.451853
25-29	<u>0.476198</u>	0.479394	0.484340	0.434967
30-34	0.357631	0.317326	<u>0.300126</u>	0.283489
35-39	<u>0.141919</u>	0.131866	0.125134	0.154216
40-44	0.029695	0.038446	<u>0.040341</u>	0.050293
45-49	<u>0.003266</u>	0.008489	0.010921	0.004523
50-54	<u>0.000188</u>	0.001499	0.002613	0.000071
55-59	<u>0.000006</u>	0.000220	0.000572	
60-64	<u>0.000000</u>	0.000028	0.000117	
65+	<u>0.000000</u>	0.000003	0.000029	

FRANCIA, 1959-63:  $R_0 = 1.321$ ;  $\mu = 28.104$ ;  $\sigma^2 = 33.509$

5-9	0.0011	<u>0.0000</u>	<u>0.0000</u>	
10-14	0.0144	0.0047	<u>0.0017</u>	0.0000
15-19	0.0911	0.0848	<u>0.0757</u>	0.0571
20-24	0.2842	0.3236	<u>0.3445</u>	0.4013
25-29	<u>0.4392</u>	0.4472	0.4540	0.4249
30-34	0.3367	0.3017	<u>0.2866</u>	0.2571
35-39	<u>0.1279</u>	0.1199	0.1144	0.1290
40-44	0.0240	0.0318	<u>0.0339</u>	0.0488
45-49	<u>0.0022</u>	0.0062	0.0082	0.0030
50-54	<u>0.0001</u>	0.0009	0.0017	0.0001
55+	<u>0.0000</u>	0.0001	0.0004	

\* Programado por William Cummings y Wilhelm Flieger.

<sup>b</sup> La distribución para Canadá 1965, aparece con seis lugares decimales para permitir una verificación del cuadro 6.6.

CUADRO 6.4 (Continuación)

Edad	Normal (Lotka) (6.2.1)	Tipo III (Wicksell) (6.3.1)	Exponencial (Hadwiger) (6.4.1)	Histograma observado
SUECIA, 1793-97: $R_0 = 1.275$ ; $\mu = 32.186$ ; $\sigma^2 = 41.786$				
5-9	0.0004	<u>0.0000</u>	<u>0.0000</u>	
10-14	0.0046	0.0006	<u>0.0001</u>	0.0001
15-19	0.0329	<u>0.0208</u>	0.0134	0.0238
20-24	0.1319	0.1410	<u>0.1412</u>	0.1616
25-29	<u>0.2990</u>	0.3351	0.3557	0.3110
30-34	0.3834	<u>0.3795</u>	0.3797	0.3455
35-39	<u>0.2783</u>	0.2484	0.2354	0.2679
40-44	<u>0.1143</u>	0.1069	0.1020	0.1369
45-49	<u>0.0265</u>	0.0331	0.0345	0.0281
50-54	<u>0.0035</u>	0.0078	0.0098	0.0000
55+	<u>0.0003</u>	0.0017	0.0031	
VENEZUELA, 1963: $R_0 = 2.753$ ; $\mu = 28.502$ ; $\sigma^2 = 49.112$				
5-9	0.0103	0.0005	<u>0.0000</u>	
10-14	0.0630	0.0311	<u>0.0146</u>	0.0037
15-19	0.2354	<u>0.2462</u>	0.2344	0.2803
20-24	0.5399	0.6316	<u>0.6833</u>	0.7124
25-29	<u>0.7598</u>	0.7830	0.8015	0.6893
30-34	0.6565	0.5864	<u>0.5581</u>	0.5107
35-39	<u>0.3482</u>	0.3041	0.2828	0.3866
40-44	0.1133	<u>0.1194</u>	0.1168	0.1346
45-49	0.0226	<u>0.0377</u>	0.0420	0.0315
50-54	<u>0.0028</u>	0.0100	0.0137	0.0044
55+	<u>0.0002</u>	0.0029	0.0057	

**Concordancia de los momentos de tercer y cuarto orden**

Las tres curvas de que nos hemos ocupado hasta ahora requieren datos solamente para los momentos cero ésimo, primero y segundo. De allí que para cada una de ellas podemos calcular el tercer y cuarto momentos —o mejor, cumulantes— en términos del primero y el segundo. La muestra 6.1 señala la función generatriz de cumulantes; mediante diferenciación sucesiva y haciendo luego  $r = 0$ , encontramos el tercer y cuarto cumulantes como asimismo  $\beta_1$  y  $\beta_2$  de Pearson en términos de los dos primeros. Para la curva normal,  $K_3 = K_4 = 0$ . Para la curva Tipo III,

$$\kappa_3 = \frac{2\sigma^3}{\mu}, \quad \kappa_4 = \frac{6\sigma^4}{\mu^2};$$

para la exponencial de Hadwiger,

$$\kappa_3 = \frac{3\sigma^3}{\mu}, \quad \kappa_4 = \frac{15\sigma^4}{\mu^2}.$$

A partir de éstos se obtienen fácilmente los  $\beta_1$  y  $\beta_2$  que aparecen en los encajamientos del cuadro 6.5. En el cuerpo de la tabla el ajuste que más se aproxima de lo observado está subrayado en cada caso. La curva de Hadwiger es preferible para  $\beta_1$  y la de Lotka para  $\beta_2$ .

El gráfico 6.2 muestra  $\beta_1$  y  $\beta_2$  para la función de fecundidad neta de algunos países; todos ellos caen en el área de la Tipo I general, para la cual el  $K$  de Pearson es negativa. La recta empírica  $\beta_2 = 2 + 2\beta_1$  pasaría cerca de todos los puntos para las diez poblaciones, y vale la pena examinar cómo algunos otros países, por ejemplo los del cuadro 5.5, aparecen en el gráfico 6.2 en relación a esta recta empírica.

A cada par  $\beta_1, \beta_2$  observado corresponde un par  $\beta_1, \beta_2$  para cada uno de los tres ajustes tal como se dan en el cuadro 6.5. El lector puede localizar éstos sobre el plano  $\beta_1, \beta_2$ .

**Comparación de  $\psi(r)$** 

Otra manera de presentar la comparación es mediante el cálculo de la función  $\psi(r)$  de (5.2.2) para el histograma de  $\phi(a) = p(a)m(a)$ ,

$$\psi(r) = e^{-17.5r} \frac{L_{15}}{l_0} F_{15} + e^{-22.5r} \frac{L_{20}}{l_0} F_{20} + \dots,$$

y comparar los ajustes debidos a Lotka, Wicksell y Hadwiger con esto. En el cuadro 6.6 aparecen las cifras para las mujeres canadienses 1965, calculadas de las correspondientes columnas del cuadro 6.4. La función de Wicksell está más cerca del histograma para  $r \leq -0,02$  y parece en conjunto ser la mejor para esta población. Todas las curvas concuerdan para  $r > -0,02$  y alrededor del intervalo que va desde  $r = 0$  hasta la raíz real  $r = r_1$  están especialmente cerca. El lector puede notar que  $\psi(0) = R_0$  para los tres ajustes. Puede también explicar las diferencias entre los  $\psi(r)$  en  $r = -0,10$ , dados los datos del cuadro 5.5, y expresar la ecuación característica (5.2.2) en la forma

$$\ln \psi(r) = \ln R_0 - \mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2!} - \frac{\kappa_3 r^3}{3!} + \frac{\kappa_4 r^4}{4!} - \dots = 0$$



Si las tres aproximaciones a  $\psi(r)$  se designan como  $\psi_L(r)$ ,  $\psi_W(r)$  y  $\psi_H(r)$ , demuestre en base a la muestra 6.1 que hasta los términos en  $r^3$

$$\ln \psi_W(r) = \ln \psi_L(r) - \sigma^4 r^3 / 3\mu,$$

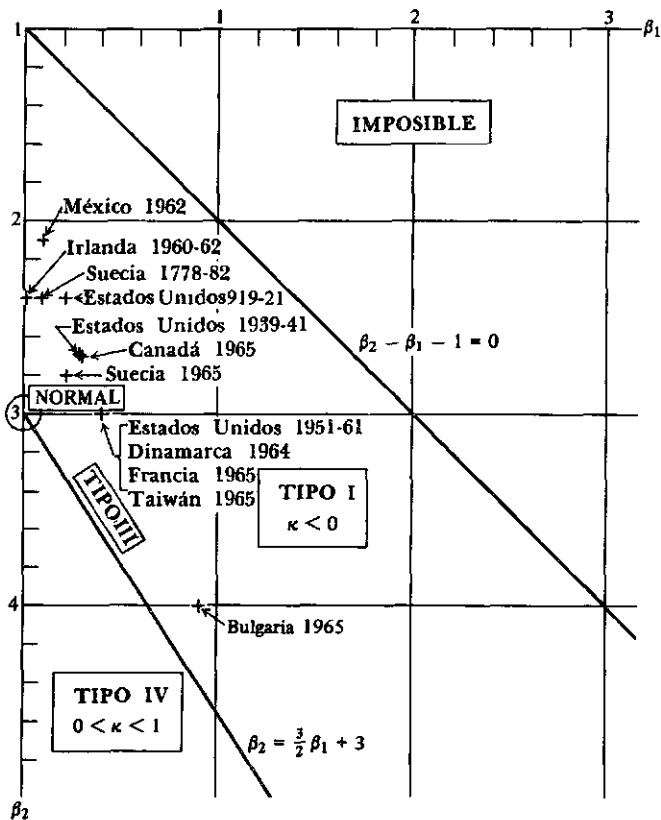
$$\ln \psi_H(r) = \ln \psi_L(r) - \sigma^4 r^3 / 2\mu,$$

en tanto que

$$\ln \phi(r) = \ln \psi_L(r) - \kappa r^3 / 6.$$

La relación de  $K_3$  a  $\sigma^4/\mu$  determinará generalmente cuál de los  $\psi_L(r)$ ,  $\psi_W(r)$  y  $\psi_H(r)$  está más cerca del  $\psi(r)$  obtenido directamente en grupos quinquenales de edad. La excepción se produce cuando  $K_4 r/4$  sobrepondera  $K_3$  lo cual sólo es probable que suceda cuando  $\psi(r)$  está evaluada para  $r = -0,1$  o menos, lo cual ocurre en una parte de la curva que no es pertinente para poblaciones humanas. ¿Podría la función  $\psi(r)$  tal como aparece en el cuadro 5.1 o 6.6 usarse inversamente para averiguar los cumulantes? ¿Con qué precisión?

**GRAFICO 6.2**  
LOCALIZACION DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA  
SOBRE EL PLANO  $\beta_1, \beta_2$



**CUADRO 6.5**  
**COMPARACION DE  $\beta_1$  Y  $\beta_2$  OBSERVADOS CON  $\beta_1$  Y  $\beta_2$  ESPERADOS DE ACUERDO**  
**A LOS TRES AJUSTES DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD**  
**FEMENINA (O MASCULINA) NETA**

	Observado	Calculado para los ajustes en base a		
		Normal (Lotka)	Tipo III (Wicksell)	Exponencial (Hadwiger)
	$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\sigma^2}$	$\beta_1 = ,0$	$\beta_1 = 4\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2$	$\beta_1 = 9\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2$
<b>MUJERES</b>				
Bulgaria 1965	0.891	0	0.181	<u>0.407</u>
Canadá 1965*	0.277	0	<u>0.193</u>	0.433
Dinamarca 1964	0.364	0	0.174	<u>0.391</u>
Francia 1959-1963	0.388	0	0.169	<u>0.380</u>
Mauricio 1965	0.137	0	<u>0.215</u>	0.484
México 1959-1961	0.051	<u>0</u>	0.219	0.493
Suecia 1788-1792	0.008	<u>0</u>	0.164	0.370
Taiwán 1965	0.408	0	0.171	<u>0.384</u>
Togo 1961	0.222	0	<u>0.273</u>	0.615
Estados Unidos				
1962	0.417	0	0.196	<u>0.441</u>
1963	0.394	0	0.195	<u>0.438</u>
1964*	0.373	0	0.195	<u>0.438</u>
<b>HOMBRES</b>				
Noruega 1963	0.486	0	0.184	<u>0.414</u>
Estados Unidos				
1964*	0.777	0	0.205	<u>0.462</u>

\* Verificable en base a la media y varianza que aparece en el cuadro 5.5.

CUADRO 6.5 (Continuación)

	Observado	Calculado para los ajustes en base a		
	$\beta_2 = \frac{\mu_h}{\sigma^2}$	Normal (Lotka) $\beta_2 = 3$	Tipo III (Wicksell) $\beta_2 = 3 + 6 \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2$	Exponencial (Hadwiger) $\beta_2 = 3 + 15 \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2$
<b>MUJERES</b>				
Bulgaria 1965	3.999	3.000	3.271	<u>3.679</u>
Canadá 1965 <sup>a</sup>	2.710	<u>3.000</u>	3.289	3.722
Dinamarca 1964	2.988	<u>3.000</u>	3.260	3.651
Francia 1959-1963	2.849	<u>3.000</u>	3.253	3.633
Mauricio 1965	2.396	<u>3.000</u>	3.323	3.806
México 1959-1961	2.116	<u>3.000</u>	3.329	3.822
Suecia 1788-1792	2.402	<u>3.000</u>	3.247	3.616
Taiwán 1965	3.003	<u>3.000</u>	3.256	3.639
Togo 1961	2.433	<u>3.000</u>	3.410	4.025
Estados Unidos 1962	2.943	<u>3.000</u>	3.294	3.735
1963	2.918	<u>3.000</u>	3.292	3.731
1964 <sup>a</sup>	2.886	<u>3.000</u>	3.292	3.730
<b>HOMBRES</b>				
Noruega 1963	3.138	3.000	<u>3.275</u>	3.690
Estados Unidos 1964 <sup>a</sup>	3.605	3.000	3.308	<u>3.770</u>

<sup>a</sup> Verificable en base a la media y varianza que aparece en el cuadro 5.5.

CUADRO 6.6

COMPARACION DE  $\psi(r) = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da$ , PARA CUATRO APROXIMACIONES DE LOS DATOS DEL CUADRO 6.4. MUJERES DE CANADA 1965\*

$r$	Normal (Lotka)	Tipo III (Wicksell)	Exponencial (Hadwiger)	Histograma observado
-0.100	29.193	29.734	30.076	29.692
-0.080	15.617	15.762	15.848	15.759
-0.060	8.487	8.519	8.537	8.520
-0.040	4.684	4.690	4.692	4.690
-0.020	2.627	2.627	2.627	2.627
0.000	1.496	1.496	1.496	1.496
0.002	1.41533	1.41533	1.41533	1.41533
0.004	1.33923	1.33923	1.33922	1.33923
0.006	1.26741	1.26741	1.26741	1.26741
0.008	1.19964	1.19963	1.19962	1.19963
0.010	1.13566	1.13565	1.13564	1.13564
0.012	1.07527	1.07524	1.07523	1.07524
0.014	1.01825	1.01821	1.01818	1.01820
0.016	0.96441	0.96434	0.96431	0.96433
0.018	0.91355	0.91346	0.91342	0.91344
0.020	0.86551	0.86540	0.86535	0.86537
0.040	0.50685	0.50813	0.50789	0.50799
0.060	0.30364	0.30263	0.30217	0.30231
0.080	0.18413	0.18269	0.18208	0.18221
0.100	0.11341	0.11173	0.11103	0.11112
0.200	0.01271	0.01139	0.01095	0.01086
$R_0$	1.496	1.496	1.496	1.496
$\mu$	27.753	27.753	27.753	27.753
$\sigma^2$	37.086	37.086	37.087	37.086
$\kappa_3$	0.032	99.073	148.594	118.951
$\kappa_4$	-0.869	396.637	987.898	-403.623
$\beta_1$	0.000	0.192	0.433	0.277
$\beta_2$	3.000	3.288	3.718	2.707

\* Función  $\psi(r)$  y momentos calculados de las integrales quinquenales de la función de fecundidad neta que aparece en el cuadro 6.4. Se pueden comprobar con  $\psi(r)$  de la muestra 6.1 con  $\sigma^2 = 39,169$  no corregida, lo cual da para los 3 ajustes en  $-0,100$ .

$$\psi_L(-0.100) = 29.193$$

$$\psi_W(-0.100) = 29.802$$

$$\psi_H(-0.100) = 30.195$$

Note las diferencias del cuadro 6.5 en  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

**Comparación de las raíces características**

Para ver las diferencias numéricas entre las aproximaciones a la raíz real el lector puede reescribir las ecuaciones características de la muestra 6.1 como  $\ln \psi(r) = 0$ , o

$$\begin{aligned} r_L &= \frac{\ln R_0}{\mu} + \frac{r^2 \sigma^2}{2\mu} && \text{(Lotka),} \\ r_W &= \frac{\ln R_0}{\mu} + \frac{r^2 \sigma^2}{2\mu} - \frac{r^3 \sigma^4}{3\mu^2} + \dots && \text{(Wicksell),} \\ r_H &= \frac{\ln R_0}{\mu} + \frac{r^2 \sigma^2}{2\mu} - \frac{r^3 \sigma^4}{2\mu^2} + \dots && \text{(Hadwiger),} \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

respectivamente, que serviría para una solución iterativa. Si pensamos en los  $r$  del segundo miembro de (6.5.1) como la solución exacta de (5.2.2), entonces se sigue que las raíces reales están en el orden

$$r_H < r_W < r_L$$

para  $r > 0$ , y sea o no  $r > 0$ ,

$$2(r_W - r_H) = r_L - r_W = r^3 \sigma^4 / 3\mu^2, \quad (6.5.2)$$

hasta los términos en  $r^3$ . Demuestre que las  $T$  de la muestra 6.1 son consistentes con los  $r$  de (6.5.1), en el sentido de que satisfacen (5.6.6); esto es, hasta los términos en  $r^2$ ,

$$r_L T_L = r_W T_W = r_H T_H = \ln R_0,$$

donde  $T_L$ ,  $T_W$  y  $T_H$  son los intervalos medios entre dos generaciones para los tres ajustes.

Se buscó una verificación aritmética de estas aproximaciones para las mujeres de los Estados Unidos, 1963. Por cálculo directo en las fórmulas de la muestra 6.1, con  $\ln R_0 = 0,447305$ ,  $\mu = 26,4732$ ,  $\sigma^2 = 34,13$ , encontramos

$$1000r_L = 17.0847, \quad 1000r_W = 17.0819, \quad 1000r_H = 17.0806,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} 2(1000r_W - 1000r_H) &= 0.0027, \\ 1000r_L - 1000r_W &= 0.0028, \\ 1000(r^3 \sigma^4 / 3\mu^2) &= 1000(0.01708)^3(0.555) = 0.0028. \end{aligned}$$

Se han dado aquí los decimales superfluos con el mero fin de comprobar aritméticamente la relación (6.5.2), que está por tanto confirmada. ¿Cuáles son los  $T_L$ ,  $T_W$  y  $T_H$  para las mujeres de los Estados Unidos, 1963?

Comparando cada una de las ecuaciones de (6.5.1) con la correspondiente forma re-escrita del logaritmo de la ecuación característica (5.2.2) hasta los términos en  $r^3$ ,

$$r = \frac{\ln R_0}{\mu} + \frac{r^2 \sigma^2}{2\mu} - \frac{\kappa_3 r^3}{6\mu}, \quad (6.5.3)$$

entonces si  $r_0$  es la solución de la forma histográfica (5.2.2) aproximada por (6.5.3), tenemos, introduciendo  $r_L$  para los dos primeros términos del segundo miembro de (6.5.3) y enseguida trasponiendo,

$$r_L \doteq r_0 + \kappa_3 r_0^3 / 6\mu, \quad (6.5.4)$$

donde se han despreciado los cumulantes de cuarto orden en adelante. De allí que  $r_L$  es alto cuando la asimetría es positiva, y dependiendo de la cantidad de asimetría,  $r_W$  y  $r_H$  será alta o baja. Vemos sin una solución explícita para  $r$  que si

$K_3\mu/\sigma^4$  está muy cerca de 0, la forma de Lotka es la mejor,

$K_3\mu/\sigma^4$  está muy cerca de 2, la forma de Wicksell es la mejor,

$K_3\mu/\sigma^4$  está muy cerca de 3, la forma de Hadwiger es la mejor.

La cantidad  $K_3\mu/\sigma^4$  cae en el intervalo 1 a 5 para 17 países (cuadro 6.7). Basado en este criterio la fórmula de Wicksell tiene una leve ventaja, siendo la más cercana para 7 países, pero nuestra muestra es pequeña. Note la relación de lo que estamos haciendo aquí con la comparación para  $\beta_1$  en el cuadro 6.5. Demuestre que si  $K_4$  es del mismo orden de magnitud que  $K_3$ , que es frecuentemente el caso (cuadro 5.5), el error  $r_L - r_0$  calculado mediante (6.5.4) sólo se podría modificar en aproximadamente un 1 por ciento. Desarrolle la cantidad efectiva de error en  $r_L$ ,  $r_W$ ,  $r_H$ , para Costa Rica, 1963, y Mauricio, 1964, usando los datos de los cuadros 5.5 y 6.7.

Los ajustes dan raíces reales que se apartan de la solución de la ecuación integral completa en cantidades menores que 0,05 por mil personas. Tal como lo señaló Lotka (1939c, pág. 74), el caso es diferente para las raíces complejas. Para los Estados Unidos las principales raíces complejas  $r_2$ ,  $r_3$  se obtienen de la ecuación completa (5.3.2) como

$$1962: \quad -0.0259 \pm 0.2458i,$$

$$1963: \quad -0.0273 \pm 0.2439i,$$

$$1964: \quad -0.0287 \pm 0.2422i.$$

Los  $r_2$ ,  $r_3$  para los tres ajustes basados en las mismas poblaciones, nacimientos y muertes aparecen en el cuadro 6.8. La variación entre los ajustes es mayor que entre los años, lo cual constituye una situación poco satisfactoria.

El lector puede verificar las constantes reales  $Q_L$ ,  $Q_W$  y  $Q_H$  de la muestra 6.1 correspondientes a las raíces  $r_L$ ,  $r_W$  y  $r_H$ , donde en cada caso

$$Q = -B_0/\psi'(r).$$

La cantidad en el denominador de  $Q$  es la edad media de las madres al nacimiento de los hijos en la población estable. Para las mujeres de los Estados Unidos, 1964, ésta es 25,974 años en base a los datos completos por grupos quinquenales de edad; el lector puede desarrollar  $Q_L$ ,  $Q_W$ ,  $Q_H$  a partir de la información del cuadro 5.5. Puede también usar (6.5.1) para determinar relaciones entre las principales raíces complejas análogas a (6.5.4). Observe que la igualdad (6.5.2) se aplica separadamente a las partes real e imaginaria de las raíces complejas dadas en el cuadro 6.8.

CUADRO 6.7

TERCER CUMULANTE DE LA FUNCION DE FECUNDIDAD NETA Y CRITERIO SEGUN EL CUAL EL AJUSTE DA LA MEJOR ESTIMACION DE LA RAIZ REAL

	Tercer cumulante $\kappa_3$	Criterio $\frac{\beta_1 \mu^2}{\sigma^2} = \left( \frac{\kappa_3 \mu}{\sigma^4} \right)^2$	Raíz real dada con mejor aproximación por
<b>MUJERES</b>			
Costa Rica 1963	105.0	2	$r_W$
Alemania (Oriental) 1964	126.2	10	$r_H$
Islandia 1962	131.7	4	$r_W$
Irlanda 1960-1962	32.9	1	$r_L$
Martinica 1965	50.4	1	$r_L$
Mauricio 1964	112.5	3	$r_W$
Ohio 1959-1961	128.9	9	$r_H$
Polonia 1962	156.4	11	$r_H$
Reunión 1961	72.8	1	$r_L$
Rumania 1965	160.7	12	$r_H$
Singapur 1962	98.5	3	$r_W$
Sud Africa (de color) 1960	179.6	4	$r_W$
<b>HOMBRES (Función de fecundidad masculina neta)</b>			
Chile 1964	321.4	5	$r_W$
Hungría 1964	252.4	25	$r_H$
Noruega 1963	213.8	11	$r_H$
Trinidad y Tobago 1956-1958	263.9	5	$r_W$
Estados Unidos 1964	266.3	15	$r_H$

Las diversas pruebas aplicadas arriba dependen todas sustancialmente del tercer momento, lo cual se puede expresar en la forma de nuestro criterio  $(K_3 \mu / \sigma^4)^2 = \beta_1 \mu^2 / \sigma^2$ . Los cuadros 6.3, 6.5 y 6.7 parecen favorecer a Hadwiger en tantos casos como a Wicksell y Lotka juntos. Pero la selección fue arbitraria, y algunos países fueron usados para diversas fechas.

**CUADRO 6.8**  
**RAICES COMPLEJAS PRINCIPALES  $r_2, r_3$  EN BASE A TRES AJUSTES.**  
**MUJERES DE ESTADOS UNIDOS, 1962, 1963 y 1964**

	Normal (Lotka)	Tipo III (Wicksell)	Exponencial (Hadwiger)
1962	$-0.0182 \pm 0.2321i$	$-0.0207 \pm 0.2397i$	$-0.0219 \pm 0.2435i$
1963	$-0.0194 \pm 0.2312i$	$-0.0220 \pm 0.2386i$	$-0.0233 \pm 0.2423i$
1964	$-0.0205 \pm 0.2304i$	$-0.0232 \pm 0.2376i$	$-0.0245 \pm 0.2413i$

En un estudio completo de los 56 países diferentes para los que se pueden obtener datos recientes sobre mortalidad y fecundidad femenina, el criterio del tercer momento favoreció al procedimiento de ajuste de Lotka en 9, al de Wicksell en 26 y al de Hadwiger en 21. Los países de fecundidad alta tienden a estar bajo en el criterio, y a ser bien ajustados por la curva normal; aquellos de baja fecundidad tienden a estar altos con el criterio. En el curso del tiempo el criterio ha aumentado, por ejemplo para las series históricas de Inglaterra y Suecia. El criterio es más alto para los hombres que para las mujeres: de entre 7 poblaciones masculinas 5 son ajustadas por la curva de Hadwiger, 2 por la de Wicksell.

### Conclusiones

Las comprobaciones de los tres ajustes ofrecen poco lugar para la satisfacción. En tanto que parece como si para algunos criterios un ajuste es especialmente malo, y para otros ocurre lo mismo con otro ajuste, generalmente el tercer acumulante es decisivo para todas nuestras cuatro comprobaciones.

Los demógrafos no han ofrecido curvas de ajuste mejores que éstas que sean igualmente fáciles de manejar. Tampoco no siempre son serias las consecuencias de un ajuste pobre; la raíz real  $r$  está dada perfectamente bien para los tres ajustes, y la mayoría de las inferencias generales obtenidas de los ajustes son válidas.

Frecuentemente se necesita el ajuste. De inmediata importancia para la presente exposición, los ajustes nos permiten examinar relaciones, como la de la varianza  $\sigma^2$  y la parte real  $x$  de la raíz compleja principal en (6.2.6), que sería difícil de estudiar de otra manera. Son también útiles cuando la trayectoria  $B(t)$  se va a calcular a mano.

Un interés más contemporáneo es la clasificación de modelos de fecundidad con el propósito de llenar lagunas de datos. Para un país subdesarrollado donde se dispone de información sobre la tasa neta de reproducción  $R_0$ , y donde uno puede adivinar  $\mu$ , y  $\sigma^2$  (el promedio y la varianza de las edades de las madres al tener sus hijas), y donde se puede suponer una tabla de vida modelo, uno busca las tasas específicas de fecundidad por edades  $F_x$ . Una manera de proceder consiste en determinar los valores de la función de fecundidad neta mediante integración por intervalos quinquenales de edad de una de las curvas de este



capítulo, por ejemplo la Pearson Tipo III propuesta por Wicksell. Las integrales se identifican con  ${}_sL_x F_x$ . Entonces el valor de  $F_x$  se estima mediante

$$F_x = \frac{\int_0^s l(x+t)m(x+t) dt}{{}_sL_x},$$

donde el numerador proviene de las integrales quinquenales de la curva supuesta sobre la base de  $R_0, \mu, \sigma^2$ . Mientras mejor sea el ajuste, más satisfactoria será la imputación.

Nos volvemos ahora a las aplicaciones de la teoría que llena la laguna de datos de un tipo diferente. Estas proceden principalmente a partir del análisis de la población estable y hacen inferencias sobre la tasa intrínseca de crecimiento natural, por ejemplo, trabajando sólo en base a una distribución por edades observada en un censo y una tabla de vida hipotética.

## INTERRELACIONES ENTRE LAS VARIABLES DEMOGRAFICAS EN LAS POBLACIONES ESTABLES

En el capítulo 1 se discutieron las relaciones entre las diversas columnas de la tabla de vida, y los resultados se pueden considerar como propiedades de la población estacionaria, definida por la igualdad de los nacimientos y muertes totales y la constancia de las tasas específicas de mortalidad por edades. En este capítulo queremos generalizar para las relaciones que existen en los modelos estables menos artificiales, aún dedicados a un solo sexo y considerando las tasas específicas de mortalidad y fecundidad por edades como fijas pero ahora sin exigir que los nacimientos totales sean iguales a las muertes totales. Los elementos para esto se introdujeron en los capítulos 3 y 5. La exploración del supuesto de estabilidad es el tema de las secciones 7.2 y 7.3. Se introduce en la sección 7.1, que contiene las escasas observaciones que se pueden hacer sobre las poblaciones cerradas cuyos nacimientos y muertes varían sin restricción.

### 7.1. RELACIONES EN CUALQUIER POBLACION CERRADA

Consideremos una población cerrada de  $K$  individuos de un sexo, que tienen  $B$  nacimientos y  $D$  muertes en un período corto dado, para la cual se calculan la tasa bruta de natalidad  $b = B/K$ , la tasa bruta de mortalidad  $d = D/K$ , y la tasa de crecimiento natural  $r = (B - D)/K$ . Las tres tasas no son independientes, porque  $r = b - d$ . Esto es un ejemplo de una relación que se aplica a los datos reales como así mismo a los casos hipotéticos, como por ejemplo las poblaciones estables, en tanto que la migración se pueda suponer igual a cero; tales relaciones no producen sorpresa y surgen debido a que hemos introducido una variable que es redundante.

Si los nacimientos y las muertes para todas las edades juntas son funciones del tiempo,  $B(t)$  y  $D(t)$ , y los números poblacionales son  $K(t)$ , entonces el crecimiento de la población por unidad de tiempo es

$$R(t) = B(t) - D(t) = \frac{dK(t)}{dt}.$$

donde la unidad de tiempo es pequeña. Las tasas correspondientes, expresadas como razones respecto a la población, son

$$b(t) = \frac{B(t)}{K(t)}, \quad d(t) = \frac{D(t)}{K(t)}, \quad r(t) = b(t) - d(t) = \frac{B(t) - D(t)}{K(t)},$$

o alternativamente

$$r(t) = \frac{1}{K(t)} \left( \frac{dK(t)}{dt} \right). \quad (7.1.1)$$

Supongamos que conocemos las tasas de mortalidad y natalidad por un período de tiempo, o meramente la diferencia  $r(t)$  entre ellas, junto con la población de partida. Entonces la población crece desde un valor inicial  $K(0)$  a

$$K(0)(1 + r(0)h) \doteq K(0)e^{r(0)h}$$

al cabo del intervalo  $h$ , supuesto suficientemente pequeño como para que los términos que contienen las potencias de  $h$  de orden 2 o superior se puedan despreciar. Al cabo de una sucesión de tales intervalos se tendría en el límite cuando  $h$  tiende a cero,

$$K(t) = K(0) \exp \left[ \int_0^t r(\tau) d\tau \right] = K(0) \exp \left[ \int_0^t (b(\tau) - d(\tau)) d\tau \right].$$

Esta es la solución de la ecuación diferencial (7.1.1). Como un ejemplo de su aplicación consideremos un gráfico que muestre la tasa bruta de natalidad observada  $b(t)$  y la tasa bruta de mortalidad observada  $d(t)$  de una población cerrada, entre  $t = t_0$  y  $t = t_1$ . El área entre las dos curvas desde  $t_0$  hasta  $t_1$  [o sea, el área de la superficie acotada por  $b(t)$ ,  $d(t)$ , y las verticales en  $t_0$  y  $t_1$ ] es  $A$ . Demuestre que la razón de la población en el momento  $t_1$  a la población en el momento  $t_0$  es  $e^A$ .

La teoría de la ecuación (7.1.1) es más simple si  $r(t) = r$ , constante; la solución se convierte en

$$K(t) = K(0)e^{rt}.$$

Lo mismo se aplica a los nacimientos: a una tasa constante de crecimiento igual a  $r$ , el número de nacimientos en el momento  $t$  es

$$B(t) = B(0)e^{rt}.$$

Esta curva se puede integrar para determinar el número total de personas que vivieron durante un intervalo. Si en  $t_0$  el número de nacimientos por año es  $B_0$ , y en  $t_1$  los nacimientos son  $B_1$ , y se puede suponer que los nacimientos amentan en proporción geométrica, demuestre que el número total de nacimientos durante el intervalo es

$$\frac{(B_1 - B_0)(t_1 - t_0)}{\ln B_1 - \ln B_0}.$$

Aplice esto para estimar la población que ha vivido en el mundo hasta ahora, suponiendo que hace un millón de años los nacimientos eran 1 por año, y que ahora son 100 millones por año. ¿Por qué el resultado,  $5\,429 \times 10^9$  es una estimación burda? Demuestre que puede ser mejorado a  $68,3 \times 10^9$  suponiendo también que los nacimientos hace 7 000 años eran 200 000, que hace 2 000 años eran 10 000 000, y que hace 300 años eran 20 000 000, suponiendo aun crecimiento geométrico en todos los intervalos.

La descomposición por edades produce una variedad de resultados adicionales. Definimos anteriormente  $m(a)$  como el número de niñas nacidas de mujeres de edades  $a$  y  $a + da$  años dividido por el número de mujeres que tienen edades entre  $a$  y  $a + da$  años en la población, cuando  $da$  es pequeño. De manera similar para las muertes,  $\mu(a)$  (capítulo 1) es la tasa de mortalidad entre las mujeres que tienen entre  $a$  a  $a + da$  años de edad.

La probabilidad de sobrevivir en el intervalo que va de  $a$  a  $a + da$  es  $1 - \mu(a) da$ , lo cual es igual a  $e^{-\mu(a) da}$  si se puede despreciar  $(da)^2$ . La probabilidad de sobrevivir a través de intervalos pequeños,  $(a_0, a_1)$ ,  $(a_1, a_2)$ , ...,  $(a_{n-1}, a_n)$ , es aproximadamente

$$\begin{aligned} & \exp[-\mu(a_0)(a_1 - a_0)] \exp[-\mu(a_1)(a_2 - a_1)] \cdots \exp[-\mu(a_{n-1})(a_n - a_{n-1})] \\ & = \exp[-\mu(a_0)(a_1 - a_0) - \mu(a_1)(a_2 - a_1) - \cdots - \mu(a_{n-1})(a_n - a_{n-1})]. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Puesto que los intervalos son pequeños, es permisible reemplazar la suma en el exponente de (7.1.2) por la integral, de modo que la probabilidad de sobrevivir desde la edad  $a_0$  hasta la edad  $a_n$  es

$$\exp\left[-\int_{a_0}^{a_n} \mu(a) da\right] = \frac{\exp\left[-\int_0^{a_n} \mu(a) da\right]}{\exp\left[-\int_0^{a_0} \mu(a) da\right]}.$$

Podemos entonces definir  $l(x)$  como

$$l(x) = l_0 \exp\left[-\int_0^x \mu(a) da\right]. \quad (7.1.3)$$

Esto proporciona un punto de partida alternativo para desarrollar las fórmulas de la tabla de vida que aparecen en el capítulo 1.

Al igual que en el capítulo 5, el número de personas en la población observada que tienen entre  $a$  y  $a + da$  años de edad se llama  $k(a) da$ , lo que corresponde a  $l(a) da$ , que es el número de las que tienen entre  $a$  y  $a + da$  en la población estacionaria. La proporción de la población que tiene entre  $a$  y  $a + da$  años de edad es  $c(a) da$ , donde

$$c(a) da = \frac{k(a) da}{\int_0^{\infty} k(a) da}.$$

Basado en la definición de la fuerza de la mortalidad  $\mu(a)$ , el número de muertes entre  $a$  y  $a + da$  es  $k(a)\mu(a) da$  en la población observada, y el número total de muertes  $D$  es

$$D = \int_0^{\infty} k(a)\mu(a) da, \quad (7.1.4)$$

de manera que la tasa bruta de mortalidad es

$$d = \frac{D}{K} = \frac{\int_0^{\infty} k(a)\mu(a) da}{\int_0^{\infty} k(a) da} = \frac{\int_0^{\infty} c(a)\mu(a) da}{\int_0^{\infty} c(a) da} \quad (7.1.5)$$

Puesto que la integral de  $c(a)$  para toda la vida es uno, la tasa bruta de mortalidad se puede expresar como

$$d = \int_0^{\infty} c(a)\mu(a) da = -\int_0^{\infty} c(a) d(\ln l(a)). \quad (7.1.6)$$

[Deduzca (7.1.6) a partir de (7.1.3)]. La tasa específica de mortalidad por edades en el intervalo de edades que va de  $x$  a  $x+n$  es

$${}_nM_x = \frac{\int_x^{x+n} k(a)\mu(a) da}{\int_x^{x+n} k(a) da} = \frac{\int_x^{x+n} c(a)\mu(a) da}{\int_x^{x+n} c(a) da} \quad (7.1.7)$$

Se pueden hacer observaciones similares respecto de  $m(a)$ , la probabilidad de que una mujer dé a luz a la edad  $a$ , o más estrictamente la razón de los nacimientos a mujeres que tienen entre  $a$  y  $a+da$  años de edad. La tasa bruta de natalidad es igual a

$$b = \frac{\int_a^\beta k(a)m(a) da}{\int_a^\beta k(a) da} = \int_a^\beta c(a)m(a) da, \quad (7.1.8)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  representan el comienzo y el fin del período reproductivo. Escriba una expresión para  ${}_nF_x$ , la tasa específica de fecundidad por edades, análoga a (7.1.7).

Otras relaciones muestran la conexión entre la distribución por edades (posiblemente cambiando en el tiempo) con los nacimientos precedentes. Dado que las personas que tenían  $a$  años en el momento  $t$  nacieron en el momento  $t-a$ , podemos tratar la densidad de las personas de edad  $a$  en el momento  $t$ ,  $k(a, t)$ , como el valor esperado

$$k(a, t) = B(t-a)p(a), \quad (7.1.9)$$

donde  $p(a) = l(a)/l_0$ . La población total es  $K(t) = \int_0^\infty B(t-a)p(a) da$ . De allí que la proporción de la población que tiene  $a$  años en el momento  $t$  tiene por densidad

$$c(a, t) = \frac{k(a, t)}{K(t)} = \frac{B(t-a)p(a)}{\int_0^\infty B(t-a)p(a) da} \quad (7.1.10)$$

Poniendo  $a=0$  en (7.1.10) obtenemos  $c(0, t) = B(t)/K(t) = b(t)$ ; esto significa que si conocemos la distribución por edades  $c(a)$ , entonces conocemos  $c(0) = b$ , o sea, la tasa de natalidad. Como una expresión alternativa a esto o a (7.1.8), siendo  $m(a)$  el número de nacimientos de mujeres de  $a$  años, la tasa de natalidad es

$$b(t) = \frac{B(t)}{K(t)} = \int_a^\beta c(a, t)m(a) da = \frac{\int_a^\beta B(t-a)p(a)m(a) da}{\int_0^\infty B(t-a)p(a) da} \quad (7.1.11)$$

Si los nacimientos están creciendo geoméricamente a una tasa  $r$ , de manera que  $B(t) = B(0)e^{rt}$ , entonces se deduce de (7.1.10),

$$c(a, t) = \frac{e^{-ra}p(a)}{\int_0^\infty e^{-ra}p(a) da}, \quad (7.1.12)$$

que constituye una expresión para  $c(a, t)$  que no contiene  $t$ . Con crecimiento geométrico, el tiempo  $t$  está también ausente de la expresión para  $b(t) = c(0, t)$ , que se obtiene poniendo  $a=0$  en el numerador de (7.1.12):

$$b(t) = c(0, t) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-ra}p(a) da}.$$

**CUADRO 7.1**  
**DISTRIBUCION PORCENTUAL DE LAS POBLACIONES ESTABLES OBSERVADA**  
**E HIPOTETICAS BASADAS EN LAS TABLAS DE VIDA DE LAS MUJERES**  
**DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1964\***

Edad	$r =$ 0.01	$r = 0.0157$ Observado	$r =$ 0.02	$r =$ 0.03	$r =$ 0.04
0-4	9.3	11.0	12.4	15.8	19.3
5-9	8.8	10.2	11.2	13.6	15.8
10-14	8.4	9.4	10.1	11.6	12.9
15-19	8.0	8.7	9.1	10.0	10.5
20-24	7.5	8.0	8.2	8.6	8.6
25-29	7.2	7.4	7.4	7.4	7.0
30-34	6.8	6.8	6.7	6.3	5.7
35-39	6.4	6.2	6.0	5.4	4.6
40-44	6.0	5.7	5.4	4.6	3.8
45-49	5.6	5.1	4.8	3.9	3.0
50-54	5.2	4.6	4.2	3.2	2.4
55+	<u>20.8</u>	<u>17.0</u>	<u>14.4</u>	<u>9.6</u>	<u>6.3</u>
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

\* Programado por Roger Avery y Ronald Lee.

El cuadro 7.1 ilustra la manera en que se determinan las diferentes distribuciones por edades estables  $c(a)$  para diferentes tasas intrínsecas  $r$  con una ley de mortalidad dada  $p(a)$ .

La condición referente a nacimientos exponencialmente crecientes fue considerado por Euler (1760, pág. 156), quien llegó a (7.1.12). [Euler usó  $\langle a \rangle$  para nuestro  $p(a)$ , y su  $1/n$  es nuestro  $e^{-r}$ ]. Esta es una manera de abordar la teoría de la población estable, que es el tema de la próxima sección.

## 7.2. RELACIONES BAJO LA CONDICION DE ESTABILIDAD

Una población cerrada se describe mediante sus tasas de natalidad, mortalidad y crecimiento natural,  $b$ ,  $d$  y  $r$ , tomadas sin consideración de edades, junto con las tasas específicas de fecundidad y mortalidad por edad  $m(a)$  y  $\mu(a)$ , y  $c(a)$  da, la proporción de la población que tiene entre  $a$  y  $a + da$  años de edad. ¿Cuántas de estas seis cantidades o conjuntos tienen que fijarse y darse como conocidas para que se puedan calcular las restantes cantidades? Una sola de tales cantidades no nos bastará para deducir de ella las demás, pero dos sí nos bas-

tarán en ciertas combinaciones. En realidad, de las quince maneras de seleccionar 2 objetos entre 6, resulta que las siguientes 4 combinaciones

- 1)  $p(a), m(a)$ ;    2)  $p(a), r$ ;  
 3)  $p(a), b$ ;        4)  $p(a), d$ ;

determinan cada una a las demás cantidades [excepto  $m(a)$ ] finalmente, después que han desaparecido los efectos de la distribución por edades inicial; hay 3,

- 5)  $c(a), p(a)$ ;    6)  $c(a), r$ ;  
 7)  $c(a), d$ ,

tales que cada una determina la población en el momento presente, en el caso en que se suponga estabilidad actual. La discusión aparece hecha en términos continuos, aunque se requerirá la traducción a grupos quinquenales de edad en el momento en que se emprendan las aplicaciones numéricas. El argumento se aplica tanto a hombres como a mujeres. Estoy agradecido a León Tabah por sus sugerencias para la composición de esta sección (véase Tabah, 1965).

### Tasas fijas en el futuro

1) *Dados*  $p(a)$  y  $m(a)$ . Comenzamos con un conjunto completo dado de tasas de supervivencia,  $p(a)$ , y tasas específicas de fecundidad para las diversas edades de la madre,  $m(a)$ , y aplicamos la ecuación homogénea

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)p(a)m(a) da, \quad (7.2.1)$$

sabiendo por el capítulo 5 que se puede resolver en la forma

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots \quad (7.2.2)$$

Si las tasas específicas de fecundidad y mortalidad por edades son fijas, entonces finalmente la tasa de crecimiento será  $r = r_1$ , la raíz real dominante de la ecuación característica

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a)m(a) da = 1, \quad (7.2.3)$$

y  $B(t)$  será igual a  $Q_1 e^{r_1 t}$  donde, como vimos en el capítulo 5,  $Q_1$  depende de las condiciones iniciales no especificadas por (7.2.1). La estabilidad se logrará a una tasa  $r_1$  independientemente de la distribución por edades inicial, pero  $Q_1$ , que determina el nivel de la curva de la población final, sólo se puede calcular si se conoce la distribución por edades inicial. Una vez que se dispone de  $B(t)$ , entonces el supuesto de  $p(a)$  constante permite el cálculo del número esperado en cualquier edad y en cualquier momento subsiguiente mediante (7.1.9).

Supongamos que en el momento  $t_0$  los términos de (7.2.2) más allá del primero son despreciables, de modo que

$$B(t - t_0) = B(t_0)e^{r(t-t_0)}, \quad t > t_0.$$

Tomemos en lo que se sigue el distante tiempo futuro  $t_0$  como el origen, y escribamos  $t$  en lugar de  $t - t_0$ . Siendo  $k(a, t) da$  el número de mujeres que tiene entre  $a$  y  $a + da$  años de edad, donde

$$k(a, t) = B(t-a)p(a) = B(0)e^{r(t-a)}p(a), \quad (7.2.4.)$$

la integración da para la población total en el momento  $t$

$$K(t) = \int_0^{\infty} k(a, t) da = B(0)e^{rt} \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da. \quad (7.2.5)$$

Puesto que  $B(0)e^{rt} = B(t)$ , podemos escribir, basados en (7.2.5), la tasa de natalidad como

$$\frac{B(t)}{K(t)} = b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}. \quad (7.2.6)$$

[Deduzca esto directamente de (7.1.11), recordando que  $r$  satisface (7.2.3)]. El hecho de que la expresión en segundo miembro de (7.2.6) no contenga  $t$  demuestra nuevamente que la tasa bruta de natalidad es finalmente constante para  $t$  grande, siendo la tasa de crecimiento  $r$  constante y tasas específicas de mortalidad por edades fijas.

Teniendo  $r$  de (7.2.3) y  $b$  de (7.2.6), determinamos  $d = b - r$ . Finalmente (7.2.4) da, mediante división por  $K(t)$ ,

$$c(a, t) = \frac{k(a, t)}{K(t)} = \frac{B(0)e^{r(t-a)}p(a)}{\int_0^{\infty} B(0)e^{r(t-a)}p(a) da}, \quad (7.2.7)$$

y aplicando (7.2.6) obtenemos

$$c(a, t) = \frac{e^{-ra}p(a)}{\int_0^{\infty} e^{-ra}p(a) da} = be^{-ra}p(a), \quad (7.2.8)$$

que es también independiente del tiempo. Esta es la expresión continua para la distribución por edades estable (Lotka, 1907 y sección 5.2 de este libro), cuya forma discreta hemos presentado como  $\{K_j\}$ ,  $j = 1$ , en (3.2.6).

Por tanto, dados  $p(a)$  y  $m(a)$  se puede calcular  $r$ ,  $b$ ,  $d$  y  $c(a)$ , válidos éstos no inmediatamente, sino después de que la constancia de la tabla de vida y del conjunto de tasas de fecundidad han estado operando por un tiempo suficiente. Se dice que la población es *asintóticamente estable*.

Las relaciones precedentes se pueden transformar en la base de un método iterativo para estimar simultáneamente  $r$ ,  $b$ ,  $d$  y  $c(a)$ . Los pasos son

- Con  $r$  y  $b$  arbitrarios y dada la tabla de vida  $p(a)$  construya  $c(a) = be^{-ra}p(a)$  para las diversas edades;
- Con el  $c(a)$  y el  $m(a)$  dado, determine  $b^*$  mejorado de (7.1.8);
- Con  $c(a)$  y  $\mu(a)$  dado, determine  $d^*$  mejorado de (7.1.5);
- Mejore  $r$  mediante  $r^* = b^* - d^*$ , y repita.

Abajo se da la sucesión de cantidades calculadas para las mujeres nicaragüenses, 1962 (programado por S. K. Sinha, en grupos quinquenales de edad):

1000b	1000d	1000r
50.000	—	20.000
40.219	8.737	31.482
39.834	7.523	32.312
39.733	7.467	32.266
39.738	7.470	32.268



**CUADRO 7.2**  
**TASAS INTRINSECAS DE NATALIDAD FEMENINA  $b$ , MORTALIDAD  $d$**   
**Y DE CRECIMIENTO NATURAL  $r$**

	Natalidad 1 000 $b$	Mortalidad 1 000 $d$	Crecimiento natural 1 000 $r$
Australia 1965	20.94	8.64	12.29
Inglaterra y Gales 1861	31.73	21.53	10.20
1891	29.71	19.70	10.01
1921	18.46	15.60	2.86
1941	10.32	20.51	-10.19
1950-1952	14.10	13.88	0.22
1960-1962	19.28	9.51	9.77
China (Taiwán) 1965	34.13	6.15	27.98
Dinamarca 1964	17.73	10.12	7.61
República Federal Alemana 1965	16.74	11.21	5.54
Honduras 1965	42.49	8.43	34.06
Hungría	10.51	17.59	-7.08
Japón 1963	12.38	15.15	-2.77
Mauricio 1965	39.22	8.07	31.15
Nueva Zelanda 1965	25.77	6.69	19.08
Portugal 1965	20.64	10.86	9.77
Puerto Rico 1965	28.99	6.60	22.40
Rumania 1965	11.96	16.24	-4.28
Suiza 1964	17.81	10.10	7.71
Venezuela 1963	43.54	6.84	36.70

Cuatro ciclos dan cinco dígitos en  $r$ . Esto converge casi tan rápidamente como la iteración funcional (5.3.5), el mejor de los métodos precedentes, y da más información. El cuadro 7.2 presenta los resultados para 15 países; en el cuadro 13.1 se dan otros para ambos hombres y mujeres.

2) *Dados  $p(a)$  y  $r$ .* Para continuar con el siguiente de los siete pares de variables que permiten elaborar inferencias, supongamos que  $p(a)$  y  $r$  son constantes y conocidos. Entonces podemos inferir la tasa de natalidad de (7.2.6), y de esto  $d = b - r$ . De (7.2.8) proviene la proporción a la edad  $a$ ,  $c(a) = be^{-ra}p(a)$ . Esto proporciona todas las variables bajo consideración, con una excepción:  $m(a)$ .

Los datos  $p(a)$  y  $r$  no permiten inferencias de las tasas específicas de fecundidad por edades; éstas pueden variar considerablemente y aun ser consistentes con el  $r$  y  $p(a)$  dados. El lector puede mostrar el tipo de variación posible en las tasas específicas de fecundidad por edades que no alteran el  $r$  y  $p(a)$ , refiriéndose a la solución que Lotka, Hadwiger, o Wicksell dan a (7.2.3) en términos de los momentos cero ésimo, primero y segundo (capítulo 6). Hemos observado previamente (sección 4.4) que las tasas específicas de fecundidad por edades no son identificables en un conjunto de ecuaciones basado en censos sucesivos como observaciones. (Son identificables si la distribución por edades se aparta suficientemente de la distribución estable, pero esto no ayuda a hacer inferencias a partir de  $p(a)$  y  $r$ ).

3) *Dados  $p(a)$  y  $b$ .* Para  $p(a)$  y  $b$  se aplica un argumento similar al dado antes para  $p(a)$  y  $r$ . La única diferencia consiste en que la ec. (7.2.6) se debe usar ahora en la otra dirección: para inferir  $r$ . El lector puede demostrar a partir de (7.2.6) que  $r$  está determinado, y que debe existir siempre un único valor real de  $r$ , aplicando el método mediante el cual se demostró la misma propiedad para (5.2.2). Puede también adaptar los procesos iterativos que se usaron para (5.2.2) a la solución numérica de (7.2.6) para  $r$ .

Con la definición

$$\bar{L}_i = \int_0^m a^i p(a) da, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (7.2.9)$$

dividiendo (7.2.6) por  $L_0$ , desarrollando bajo la integral y tomando logaritmos, Lotka (1939b) encuentra

$$\ln b = -\ln \bar{L}_0 + \frac{r\bar{L}_1}{\bar{L}_0} - \frac{r^2}{2!} \left[ \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_0} - \left( \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0} \right)^2 \right] + \dots \quad (7.2.10)$$

que se puede resolver tanto para  $b$  en términos de  $r$  como para  $r$  en términos de  $b$ .

Los coeficientes de  $r$  en (7.2.10) son cumulantes de la tabla de vida mostrada para cuatro países en el cuadro 7.3 y que se aplicarán en el capítulo 9. El lector puede usar (7.2.10) para dibujar una curva que muestre la manera en que varía  $b$  con respecto a  $r$ , dados los momentos para la tabla de vida femenina de Austria 1965 del cuadro 7.3. En el mismo gráfico él puede representar las observaciones de  $b$  y  $r$  para los 20 países que aparecen en el cuadro 7.2. En la medida en que la mortalidad de los diversos países sea similar, los valores de  $\ln b$  caerán sobre la parábola (7.2.10).

Los cumulantes de la tabla de vida se pueden escribir  $\bar{\kappa}_i, i = 1, 2, \dots$ , y (7.2.10) es entonces

$$\ln b = -\ln \bar{L}_0 + \bar{\kappa}_1 r - \bar{\kappa}_2 r^2 / 2! + \dots \quad (7.2.11)$$

Los de la función de fecundidad neta se escriben sin barra en la forma

$$\kappa_1 = \frac{R_1}{R_0}; \quad \kappa_2 = \frac{R_2}{R_0} - \left( \frac{R_1}{R_0} \right)^2; \quad \dots$$

**CUADRO 7.3**  
**CUMULANTES DE LAS TABLAS DE VIDA PARA CUATRO PAISES, 1965**

	Austria	Canadá	Honduras	Portugal
$\bar{L}_0 = \hat{e}_0$				
Hombres	66.58	68.75	59.13	63.12
Mujeres	72.99	75.00	61.53	68.95
$\bar{\kappa}_1 = \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0}$				
Hombres	36.12	37.10	35.12	36.40
Mujeres	38.77	39.63	35.86	38.69
$\bar{\kappa}_2 = \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_0} - \left(\frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0}\right)^2$				
Hombres	484.9	513.3	484.6	495.4
Mujeres	541.0	566.4	497.1	540.7
$\bar{\kappa}_3$				
Hombres	2,315	2,567	2,748	2,370
Mujeres	1,969	2,116	2,675	1,928
$\bar{\kappa}_4$				
Hombres	-227,010	-254,744	-229,641	-240,960
Mujeres	-305,593	-337,408	-242,490	-308,282

Desarrollando la integral de  $\psi(r)$  de (5.2.2) y tomando su logaritmo, obtenemos una ecuación que se parece a (7.2.11):

$$0 = -\ln R_0 + \kappa_1 r - \kappa_2 r^2/2! + \dots \quad (7.2.12)$$

Comente acerca de la rapidez de convergencia de (7.2.11) y (7.2.12) y su conveniencia para estimar  $r$  y  $b$ , usando los datos de los cuadros 5.5 y 7.3.

4) *Dados  $p(a)$  y  $d$ .* En este caso ambos ítems de la información se refieren a la mortalidad, pero la relación entre  $d$  y  $p(a)$  puede, sin embargo, decirnos cuán rápido está creciendo la población. Poniendo  $b = d + r$  en (7.2.6) resulta la ecuación en  $r$

$$d + r = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-ra} p(a) da}, \quad (7.2.13)$$

que también se puede resolver por iteración. De allí que  $b = d + r$  y  $c(a) = be^{-ra}p(a)$ .

Roger Avery no sólo sugirió la ecuación anterior, sino que también programó su solución, usando el método de iteración de la secante. Los resultados que él infirió de  $p(a)$  y  $d$  para dos países, son los siguientes, junto con los 1 000*b* y 1 000*r* observados:

	Inglaterra y Gales, 1961		Tailandia, 1959	
	Inferido	Observado	Inferido	Observado
1000 <i>b</i>	19.28	19.27	36.79	36.94
1000 <i>r</i>	9.74	9.74	27.05	26.77

Lo inferido está más cerca de lo observado para Inglaterra y Gales que para Tailandia, pero ambos están bastante cerca. La aplicación del procedimiento se limitará a los casos en que conocemos  $d$  y  $p(a)$ , pero no las demás cantidades, lo cual puede no ser frecuente.

Además de las tasas brutas de natalidad y mortalidad, la edad media de la población  $\bar{A}_r$  y la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos [ $A_r$  de (5.6.8)], varían con la tasa intrínseca. Se podrá ver en el cuadro 7.4, calculado por Ronald Lee y Roger Avery, en qué medida aumenta  $b_r$  y disminuye  $d_r$  cuando crece  $r$ , siendo constante la tabla de vida en el nivel dado por las mujeres de los Estados Unidos, 1964. La tasa de mortalidad global  $d_r$  baja desde 9,5 por mil, si la población estuviera creciendo a una tasa  $r = 0,01$  a 3,7 por mil si el crecimiento fuera a una tasa  $r = 0,04$ . Los resultados dados en la tabla están representados en el gráfico 7.1. La recta vertical en el gráfico representa  $r$ ,  $b$ ,  $d$  y  $A_r$  efectivos de las mujeres de los Estados Unidos 1964, para las cuales  $1\ 000r = 15,70$ .

CUADRO 7.4

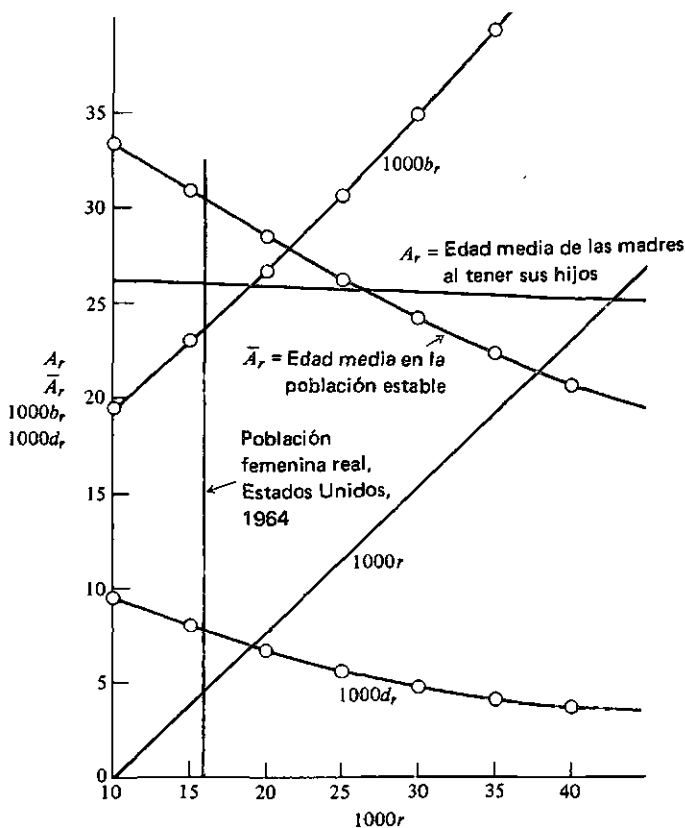
TASA INTRINSECA DE NATALIDAD  $b$  Y MORTALIDAD  $d$ , JUNTO CON LA EDAD MEDIA DE LAS MADRES AL NACIMIENTO DE SUS HIJOS  $A_r$ , COMO FUNCIONES DE LOS VALORES HIPOTETICOS DE  $r$ , BASADAS EN LA TABLA DE VIDA PARA LAS MUJERES DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1964\*

1000 <i>r</i>	1000 <i>b</i> <sub><i>r</i></sub>	1000 <i>d</i> <sub><i>r</i></sub>	$\bar{A}_r$	$A_r$
10	19.5	9.5	33.3	26.2
15	23.0	8.0	30.8	26.0
20	26.7	6.7	28.4	25.9
25	30.7	5.7	26.2	25.7
30	34.8	4.8	24.1	25.5
35	39.2	4.2	22.3	25.3
40	43.7	3.7	20.6	25.2

\* Programado por Roger Avery y Ronald Lee.

GRAFICO 7.1

TASAS DE NATALIDAD Y MORTALIDAD Y EDAD PROMEDIO COMO FUNCIONES DE  $r$ , TOMANDO LA TABLA DE VIDA PARA LAS MUJERES DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1964, COMO CONSTANTES



Cuando  $r$  crece, la tasa de mortalidad  $d$  disminuye hasta cierto punto, después del cual crece nuevamente. Trasponiendo  $r$  en (7.2.13), enseguida diferenciando con respecto a  $r$  e igualando la derivada de  $d$  a cero, obtenemos para el mínimo la ecuación,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da} - r \right) = 0,$$

que se reduce a

$$b\bar{A}_r - 1 = 0,$$

donde  $\bar{A}_r$  es la edad media en la población estable. En consecuencia, para una tabla de vida dada, la tasa bruta de mortalidad alcanza un mínimo cuando la tasa de natalidad es el recíproco de la edad media en la población estable, de modo que  $d = 1/\bar{A}_r - r$  (Lotka, 1939c, pág. 40). En general  $1/\bar{A}_r$  será una tasa

de natalidad mayor de la que prevalece en la realidad; uno puede convencerse de esto estudiando el cuadro 7.4.

El gráfico 7.1. ilustra acerca de la manera en que podemos averiguar la población estable con una tabla de vida dada conociendo alguna de las cantidades  $r$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $\bar{A}_r$ , pero no  $A_r$ , la edad media de las madres al tener sus hijos. La sensibilidad de cada una de estas cinco maneras de entrar en el gráfico es proporcional a la inclinación de la pendiente de su curva. De allí que esperaríamos que una recta horizontal trazada desde un  $b$  dado determinase el punto correcto sobre la curva de  $b_r$  y en consecuencia infiriese  $r$  con precisión; de manera similar está  $\bar{A}_r$ , que tiene una pendiente suficiente que nos permita localizar  $r$  fácilmente. Esto es seguido a una distancia considerable, en lo que a precisión se refiere, por  $d$ , y  $A_r$  es casi horizontal. ¿Concuerdan estas conclusiones con nuestra lectura del gráfico?, ¿parecen razonables intuitivamente? Calcule las derivadas de las curvas, y exprese cuantitativamente la precisión relativa de su uso para inferir  $r$ .

Esto cubre los cuatro casos que son calculables asintóticamente, lo que equivale a decir, después de un lapso suficiente de tiempo desde la fecha en que se estableció el régimen dado. Pasamos ahora a los otros tres casos, que Lotka denomina como *Malthusianos* (1939c, pág. 17).

#### Tasas constantes en el pasado

En los casos (5) a (7) la distribución por edades estable  $c(a)$  se supone que es ya existente.

5) *Dados*  $c(a)$  y  $p(a)$ . Si  $c(a)$  y  $p(a)$  son constantes y conocidos, entonces  $c(0) = b$ , y  $d = -\int_0^\infty c(a) d[\ln p(a)]$ . En consecuencia

$$r = b - d = b + \int_0^\infty c(a) d(\ln p(a)) .$$

Alternativamente, se puede determinar  $r$  y  $b$  simultáneamente puesto que la relación  $c(a) = be^{-ra}p(a)$  se aplica a cualquier edad. En la práctica, uno debería prestar atención a los asuntos de estimación ante el error y desviación de los datos respecto de la condición de estabilidad; uno no debería usar un solo par de edades para inferir  $r$  y  $b$  de  $c(a)$  y  $p(a)$ , sino un conjunto mayor de edades. (El procedimiento está ejemplificado en la sección 7.3.). Nuevamente no es posible inferir  $m(a)$ . Excepto para  $m(a)$ , los hechos relativos a la población están determinados, no asintóticamente como antes, sino inmediatamente.

6) *Dados*  $c(a)$  y  $r$ . Este y el caso restante, acerca de los cuales se pueden discutir algunos puntos de interés, se tratan igual que (5). De  $c(a)$  y  $r$  tenemos  $b = c(0)$ ,  $d = b - r$ , de (7.2.8) se tiene  $p(a) = c(a)e^{ra}/b$ , lo que proporciona una manera de obtener una tabla de vida en base a un censo (Arriaga, 1966).

7) *Dados*  $c(a)$  y  $d$ . De  $c(a)$  y  $d$  determinamos  $b = c(0)$ ,  $r = b - d$ ,  $p(a) = c(a)e^{ra}/b$ . Todas las variables excepto  $m(a)$  son constantes y conocidas inmediatamente que se establecen las dos dadas, nuevamente se emplea el supuesto de estabilidad.

Las siete situaciones hipotéticas y las inferencias posibles en cada caso aparecen resumidas en la muestra 7.1.

MUESTRA 7.1

SEIS VARIABLES DEMOGRAFICAS IMPORTANTES TOMADAS EN PARES. MOSTRANDO QUE COMBINACIONES DETERMINAN LAS DEMAS

Dado con	Por edades		Tasas intrínsecas		
	$p(a)$	$m(a)$	$r$	$d$	$b$
$c(a)$	$b = c(0)$ $d = - \int c(a) d[\ln p(a)]$ $r = b - d$ Alternativamente $\ln \frac{c(a)}{p(a)} = \ln b - ra$ $d = b - r$ $I$		$b = c(0)$ $d = b - r$ $p(a) = \frac{c(a)e^{ra}}{b}$ $I$	$b = c(0)$ $r = b - d$ $p(a) = \frac{c(a)e^{ra}}{b}$ $I$	
$p(a)$		$1 = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da$ da r. $b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$ $d = b - r$ $c(a) = be^{-ra} p(a)$ $A$	$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$ da r. $d = b - r$ $c(a) = be^{-ra} p(a)$ $A$	$d + r = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$ da r. $b = r + d$ $c(a) = be^{-ra} p(a)$ $A$	$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$ da r. $d = b - r$ $c(a) = be^{-ra} p(a)$ $A$
$m(a)$					
$r$	$I \equiv$ inmediatamente estable y calculable por edades cuando las variables especificadas son constantes y dadas $A \equiv$ asintóticamente estable y calculable por edades a partir de las variables dadas, después que han desaparecido los efectos de la distribución por edades inicial.			$b = r + d$ $N(t) = N(0)e^{rt}$ $T$	$d = b - r$ $N(t) = N(0)e^{rt}$ $T$
$d$					$r = b - d$ $N(t) = N(0)e^{rt}$ $T$

### 7.3. UNA APLICACION DE LA TEORIA DE LA POBLACION ESTABLE

La expresión (7.1.12) para la proporción en la población estable entre las edades  $a$  y  $a + da$ , que se reduce a  $c(a) da = be^{-ra} p(a) da$ , produce al dividirla por  $p(a) da$

$$\frac{c(a)}{p(a)} = be^{-ra}, \quad (7.3.1)$$

y esto ha sido usado (Bourgeois-Pichat, 1957) para inferir la tasa de natalidad y la tasa intrínseca de crecimiento usando como datos sólo una distribución por edades confiable de un censo y una tabla de vida más o menos apropiada. Tomando logaritmos naturales de (7.3.1), Bourgeois-Pichat obtiene

$$\ln \frac{c(a)}{p(a)} = \ln be^{-ra} = \ln b - ra. \quad (7.3.2)$$

Considerando a  $a$  como la abscisa  $x$  y a  $\ln [c(a)/p(a)]$  como la ordenada, sólo necesitamos hacer pasar una recta a través de los puntos observados  $y = \ln [c(a)/p(a)]$ ; esta recta puede ser  $y = \alpha + \beta a$ , y podemos entonces identificar los dos parámetros de la recta con los de  $\ln b - ra$  de modo que  $\alpha$  sería  $\ln b$  y  $\beta$  sería  $-r$ . El cuadro 7.5 muestra los datos para las mujeres nicaragüenses, 1962, que tienen 30-64 años de edad, donde hemos aproximado suponiendo  $c(a)$  y  $p(a)$  constantes dentro del grupo quinquenal de edades. Usamos primeramente las muertes y la población para construir una tabla de vida, y luego aproximamos  $c(a)/p(a)$  por  $l_0 {}_5C_{a-2.5}/{}_5L_{a-2.5}$ , donde  ${}_5C_x$  es la proporción observada de mujeres entre  $x$  y  $x + 4$  años de edad en su último aniversario. No necesitamos todo el tramo de edades; en realidad, en un tramo más corto hay una mejor oportunidad de que las tasas básicas hayan permanecido constantes durante el período pertinente. Las ecuaciones para el ajuste mínimo cuadrático de (7.3.2) son

$$\begin{aligned} \sum \ln \frac{c(a)}{p(a)} &= n \ln b - r \sum a, \\ \sum a \ln \frac{c(a)}{p(a)} &= \ln b \sum a - r \sum a^2, \end{aligned}$$

donde se usan  $n$  grupos de edades. Nuestros números dan  $\alpha = -3.05$ ,  $\beta = -0.0347$ , y la recta es  $y = -3.05 - 0.0347x$ .

Comparando esta recta con  $\ln b - ra$ , tenemos  $\ln b = -3.05$  y  $r = 0.0347$ . El antilogaritmo de  $-3.05$ , o sea  $e^{-3.05}$ , es 0.0474. De allí que inferimos una tasa de crecimiento natural de 35 por mil, y una tasa intrínseca de natalidad de 47 por mil, que está al menos tan cerca de la verdad como el 42 por mil registrado. Sin embargo, al usar una tabla de vida basada en datos de 1962 hemos indudablemente subestimado las muertes de períodos anteriores y en consecuencia ha resultado una tasa de crecimiento natural exagerada. Las estimaciones independientes para 1942 (*Demographic Yearbook* de las Naciones Unidas, 1962, pág. 132 y 1963, pág. 186) muestran 863 000 personas, y para 1962 muestran 1 579 000, vale decir un aumento de 83 por ciento en los 20 años, lo que implica un crecimiento de 31 por mil por año, confirmando que nuestro  $1000r = 35$  es alto, aunque nuestro  $1000b = 47$  podría muy bien ser



**CUADRO 7.5**  
**ESTIMACION DE LOS NACIMIENTOS Y CRECIMIENTO NATURAL**  
**EN BASE A LA DISTRIBUCION POR EDADES Y LA TABLA DE VIDA.**  
**MUJERES NICARAGUENSES, 1962 \***

Edad = a - 2.5 (1)	${}_5C_{a-2.5}$ Proporción de la población en el grupo de edades $\doteq$ ${}_5c(a)$ (2)	${}_5L_{a-2.5}/\ell_0$ $\doteq$ ${}_5p(a)$ (3)	(2)/(3) $\doteq$ $\frac{c(a)}{p(a)}$ (4)	$\ln \frac{c(a)}{p(a)}$ (5)
30	0.0674	4.35	0.01550	-4.167
35	0.0579	4.27	0.01356	-4.301
40	0.0420	4.17	0.01007	-4.598
45	0.0367	4.05	0.00906	-4.704
50	0.0327	3.92	0.00834	-4.787
55	0.0210	3.78	0.00556	-5.192
60	0.0210	3.54	0.00593	-5.128

\* Fuente para la distribución por edades y las muertes: *Demographic Yearbook, 1963*, de las Naciones Unidas, págs. 186 y 566. La tabla de vida fue calculada de acuerdo al método de la sección 1.2. De lo anterior, las ecuaciones normales son

$$-32.877 = 7\alpha + 332.5\beta,$$

$$-1585.92 = 332.5\alpha + 16493.75\beta,$$

y en consecuencia

$$\alpha = -3.05,$$

$$\beta = -0.0347.$$

correcto. [Elabore un gráfico para el cuadro 7.5, comente acerca de la fidelidad del ajuste, y estime  $r$  y  $\ln b$  en base al gráfico. Mi ajuste gráfico dio  $r = 0,036$  y  $\ln b = -3,1$ ].

Otras maneras para inferir las tasas de natalidad en base a las distribuciones por edades usando suposiciones más débiles que la del ejemplo anterior han sido dadas por Keyfitz, Nagnur y Sharma (1967).

#### 7.4. ALGUNOS EFECTOS SOBRE LA DISTRIBUCION POR EDADES DE CAMBIOS EN LA FECUNDIDAD Y LA MORTALIDAD

##### Tasa intrínseca y edad media

Hemos visto que en la población estable la distribución por edades depende de la tabla de vida y de la tasa intrínseca de crecimiento, con la tasa de natalidad  $b$  como un factor común a todas las edades;

$$c(a) = be^{-ra}p(a) = \frac{e^{-ra}p(a)}{\int_0^{\omega} e^{-ra}p(a) da} \quad (7.4.1)$$

Con el objeto de estudiar lo que sucede cuando cambia  $r$ , considere la proporción  $c(a)$  en cualquier edad particular  $a$  como una función de  $r$ , y calcule la derivada de su logaritmo (que es más conveniente que calcular su derivada directamente). De (7.4.1), usando  $d \ln u / dr = (1/u)(du/dr)$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{d(\ln c(a))}{dr} &= \frac{d(-ra + \ln p(a) - \ln \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da)}{dr} \\ &= -a + \frac{\int_0^{\infty} a e^{-ra} p(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}, \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

puesto que  $p(a)$  no es función de  $r$ . Siendo  $A_r$  la razón de las integrales en (7.4.2), el primer momento o edad media de la población estable, tenemos (Lotka, 1939c, pág. 24, 1938), si cambian los nacimientos pero no las muertes:

$$\frac{d(\ln c(a))}{dr} = \bar{A}_r - a. \quad (7.4.3)$$

La media  $\bar{A}_r$  es una función de  $r$ . Para la "joven" población de Nicaragua, es 23,3 años de edad; para la "vieja población" de Inglaterra y Gales, 33,7 años.

La derivada (7.4.3) del logaritmo natural de  $c(a)$  con respecto a  $r$  muestra en qué dirección se mueve  $c(a)$  con un cambio en  $r$ . Para  $a$  menor que  $A_r$ , la derivada es positiva; es decir, la proporción  $c(a)$  crece con  $r$ . Para  $a$  mayor que  $A_r$ , la derivada es negativa, de modo que  $c(a)$  decrece cuando  $r$  crece. En consecuencia, con un incremento en  $r$  la curva de  $c(a)$  oscila en torno a un pequeño intervalo en su punto medio, subiéndolo el extremo izquierdo y bajándolo el derecho. En realidad,  $A_r$  no es perfectamente un punto fijo, y cuando  $r$  se desplaza desde un valor bajo a uno alto, el pivote alrededor del cual gira la recta,  $[A_r, c(A_r)]$ , se mueve gradualmente a lo largo de un intervalo que va desde los 35 años hasta los 20, aproximadamente (gráfico 7.1).

La edad media  $A_r$  se puede expresar en términos de las constantes de la tabla de vida (Lotka, 1939c, pág. 22). De la definición de  $A_r$ , resulta que

$$\begin{aligned} \bar{A}_r &= \frac{\int_0^{\infty} a e^{-ra} p(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da} \\ &= \frac{\bar{L}_1 - r\bar{L}_2 + (r^2/2!)\bar{L}_3 - \dots}{\bar{L}_0 - r\bar{L}_1 + (r^2/2!)\bar{L}_2 - \dots}, \end{aligned}$$

donde  $\bar{L}_i = \int_0^{\infty} a^i p(a) da$ . Entonces por división,

$$\bar{A}_r = \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0} - \left[ \left( \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_0} \right) - \left( \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0} \right)^2 \right] r + \dots \quad (7.4.4)$$

[Deduzca este resultado de una manera tal que demuestre que el coeficiente de  $r^i$  es  $(-1)^i/i!$  veces el  $(i+1)$ ésimo cumulante  $K_{i+1}$  de la población estacionaria]. Los primeros dos o tres términos del segundo miembro de (7.4.4) dan una aproximación lineal o cuadrática a la curva de  $A_r$ , en el gráfico 7.1. Observe el parecido de las expresiones para  $A_r$  en (7.4.4) y para  $A_r$ , la edad media de las madres al tener sus hijas, en (5.6.10).

Si (7.4.4) se aplica a dos puntos del tiempo separadamente, podemos determinar una ecuación para el cambio entre los dos momentos por sustracción. En el caso de que las mismas tablas de vida se aplicaran a las dos fechas, tendríamos

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}_r &= -\bar{k}_2 \Delta r + \bar{k}_3 \frac{\Delta r^2}{2!} - \bar{k}_4 \frac{\Delta r^3}{3!} + \dots \\ &= -\bar{k}_2 \Delta r + \bar{k}_3 r \Delta r - \bar{k}_4 \frac{r^2 \Delta r}{2} + \dots \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Entre 1959-61 y 1965 el cambio de la mortalidad en los Estados Unidos fue muy pequeño, y la baja en la fecundidad fue grande. Los cumulantes de la tabla de mortalidad femenina 1959-61 incluyen  $K_2 = 557$ ,  $K_3 = 2\,330$ ,  $K_4 = -320\,384$ ; la tasa intrínseca  $r$  fue 0,02113 en 1959-61 y 0,01265 en 1965, dando un promedio de 0,01689 (todos con nacimientos ajustados). Entonces de (7.4.5)  $\Delta \bar{A}_r$  debe ser aproximadamente

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}_r &\doteq -(557)(-0.00848) + (2330)(0.01689)(-0.00848) \\ &\quad - (-320,384/2)(0.01689)^2(-0.00848) \\ &= 4.723 - 0.334 - 0.388 \\ &= 4.001, \end{aligned}$$

contra el crecimiento observado  $\Delta A_r = 4,152$  (cuadro 7.6). Los cumulantes de mayor orden de la tabla de vida no son despreciables en el desarrollo (7.4.5). Pero la forma simple  $\Delta A_r = -K_2 \Delta r$  generalmente nos indica la dirección y de manera aproximada la magnitud del cambio en la edad media debida a la fecundidad, cuando la mortalidad no varía mucho.

### Cambio neutral en la mortalidad

Se discute con frecuencia el efecto que tiene sobre el incremento de la población una baja uniforme en la mortalidad. ¿Cómo afecta a la tasa intrínseca una baja en la tasa instantánea de mortalidad, por ejemplo desde  $\mu(x)$  hasta  $\mu(x) - k = \bar{\mu}(x)$ , siendo  $k$  constante respecto a la edad? Veremos que la baja tiene el efecto de elevar la tasa intrínseca en exactamente  $k$ . Porque si la tasa es  $r$  antes de la baja, entonces  $r$  satisface

$$\int_a^{\beta} e^{-rx} p(x) m(x) dx = 1, \quad (7.4.6)$$

donde

$$p(x) = \exp \left[ - \int_0^x \mu(a) da \right].$$

Denominemos  $\bar{p}(x)$  a la nueva supervivencia; entonces

$$\bar{p}(x) = \exp \left[ - \int_0^x \bar{\mu}(a) da \right] = \exp \left[ - \int_0^x (\mu(a) - k) da \right] = \exp(kx) p(x).$$

La nueva  $r$  debe satisfacer

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\bar{r}x} \bar{p}(x) m(x) dx = 1, \quad \text{o} \quad \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\bar{r}x} e^{kx} p(x) m(x) dx = 1,$$

o

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(\bar{r}-k)x} p(x) m(x) dx = 1.$$

Confrontando este último con (7.4.6) y recordando que la raíz real de (7.4.6) es única, se prueba que

$$r = \bar{r} - k,$$

de modo que

$$\bar{r} = r + k. \quad (7.4.7)$$

Por tanto el descenso uniforme en  $\mu(x)$  da por resultado un incremento de  $r$  en la misma cantidad.

¿Tiene esto un efecto sobre la distribución por edades? No, puesto que el número de personas entre las edades  $a$  y  $a + da$  en la nueva distribución por edades estable es proporcional a

$$e^{-\bar{r}a} \bar{p}(a) da = e^{-(r+k)a} e^{ka} p(a) da = e^{-ra} p(a) da,$$

que es idéntico a la distribución estable por edades original.

El argumento anterior sugiere que un cambio *neutral* en la mortalidad se defina como aquel que es constante en todas las edades, o que sin serlo, tiene una incidencia tal que la distribución por edades de la población, o al menos la edad media, no se ve afectada. Si la incidencia de la ganancia en la mortalidad está balanceada en favor de las edades más jóvenes, entonces la distribución por edades se hace más joven y viceversa. Nuestro problema al señalar los cambios observados en la mortalidad consistirá en encontrar un índice, o conjunto de ponderaciones, que nos diga si el cambio es neutral, y si no, en qué caso cae sobre el lado más joven o más viejo de la neutralidad.

Una baja en las tasas de fecundidad no puede ser neutral, sino que debe hacer más vieja a la población, y un aumento de la fecundidad la hace más joven. Investiguemos una nueva función de fecundidad  $\bar{m}(x)$ ,

$$\bar{m}(x) = e^{kx} m(x).$$

Entonces la nueva ecuación característica es

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\bar{r}x} p(x) \bar{m}(x) dx = 1, \quad \text{o} \quad \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(\bar{r}-k)x} p(x) m(x) dx = 1,$$

de modo que  $\bar{r} - k = r$ , y  $\bar{r} = k + r$ , como antes. Pero ahora, con la misma tabla de mortalidad, la distribución por edades estable es

$$\bar{c}(a) da = \bar{b} e^{-\bar{r}a} p(a) da = \bar{b} e^{-ka} e^{-ra} p(a) da.$$

El lector puede completar la demostración de que con  $k > 0$  la población es más joven, con  $k < 0$ , más vieja.

### Descomposición de los cambios observados

Puesto que en la práctica ni la mortalidad ni la fecundidad cambian de una manera uniforme en todas las edades, nos gustaría obtener una medida del efecto que tienen sobre  $r$  los cambios que ocurren efectivamente. Se pueden ejemplificar los efectos separados sobre la tasa intrínseca en una comparación para Australia hecha por Beth Berkov. Para 1957,  $1000r$  fue 16,947; si las tasas de mortalidad se mantienen constantes, y se introducen las tasas de fecundidad de 1962,  $1000r$  sube a 17,505, lo que da un aumento de 0,558. Por otra parte, la fecundidad mantenida en el nivel de 1957, pero la mortalidad transformada a tasas de 1962 lleva  $1000r$  a 17,075, lo que da un aumento sobre 1957 de 0,128. El  $1000r$  observado en 1962 fue 17,533, lo que da un aumento de 0,686 sobre 1957.

Sucede en este caso que el crecimiento global es igual a la suma del crecimiento debido a fecundidad y el debido a mortalidad, 0,558 más 0,128. Esto justifica el enunciado de que el aumento en la tasa intrínseca fue  $0,558/0,686 = 81$  por ciento debido al cambio en la fecundidad y 19 por ciento debido a mortalidad. Cuando los efectos separados del cambio en la fecundidad y mortalidad sumados dan el cambio combinado, decimos que la interacción es cero: el efecto de cambiar desde la mortalidad de 1957 a la de 1962 es el mismo en presencia de la fecundidad de 1957 que en la de la fecundidad de 1962. Una baja interacción hace que la interpretación de los resultados sea relativamente clara.

El mismo análisis realizado para  $A_r$ , la edad media en la población estable, demostrará si el cambio debido sólo a la mortalidad es neutral, dejando inalterada la edad media, o si en la situación de equilibrio es en su mayor parte una ganancia en las edades mayores o en las edades más jóvenes.

El procedimiento para efectuar este análisis comienza con  $A_r$ , la edad media estable, por ejemplo para las mujeres de Estados Unidos en 1960 y luego para 1965, calculados ambos de la manera normal. Entonces las computaciones recientes se hacen usando la tabla de vida de 1960 y las tasas de fecundidad de 1965, así como la tabla de vida de 1965 y las tasas de fecundidad de 1960. Suponga que nos referimos a éstas, en el orden mencionado, como  $\bar{A}(\bar{p}, \bar{m})$ ,  $\bar{A}(\bar{p}, m)$ ,  $A(\bar{p}, \bar{m})$  y  $A(p, m)$ , donde, igual que antes, usamos  $p$  para la tabla de vida y  $m$  para la fecundidad, la barra designa 1965, y con su ausencia nos referimos a 1960. Entonces la diferencia debida

sólo a mortalidad es  $\bar{A}(\bar{p}, m) - \bar{A}(p, m)$ ,

sólo a fecundidad es  $\bar{A}(p, \bar{m}) - \bar{A}(p, m)$ ,

a la interacción es  $\{\bar{A}(\bar{p}, \bar{m}) - \bar{A}(p, \bar{m})\} - \{\bar{A}(\bar{p}, m) - \bar{A}(p, m)\}$ .

El componente de la mortalidad en la descomposición de  $A_r$  constituirá el índice de la incidencia de la edad en el mejoramiento en la mortalidad. Si  $\bar{A}(\bar{p}, \bar{m}) - (\bar{A}(\bar{p}, m))$  es positivo, diremos que el mejoramiento en la mortalidad es mayor en las edades mayores, si es negativo lo será en las edades más jóvenes, y si es cero, el mejoramiento en la mortalidad es neutral. Al tratar la edad media en la población estable estamos discutiendo tendencias tal como se revelan en el modelo estable, y no los hechos que muestra la distribución por edades censal. El interés del análisis depende de la tendencia que tenga la población efectiva a seguir la estable.

**CUADRO 7.6**  
**DESCOMPOSICION DEL CAMBIO EN LA EDAD MEDIA**  
**DE LA POBLACION ESTABLE FEMENINA EN LOS EFECTOS DE LA**  
**MORTALIDAD Y FECUNDIDAD. ESTADOS UNIDOS, 1920-1965\***

Intervalo trienal centrado en	e <sub>0</sub>	Incremento de la edad media		
		Debido a cambio de mortalidad	Debido a cambio de fecundidad	Total incluyendo interacción
1920	56.41	-0.336	1.216	0.855
1925	59.01	0.142	3.309	3.519
1930	60.67	0.154	2.161	2.331
1935	62.58	0.216	-0.520	-0.314
1940	65.58	0.234	-2.590	-2.401
1945	68.11	0.344	-3.293	-3.035
1950	70.86	0.254	-2.401	-2.191
1955	72.61	0.085	-0.504	-0.423
1960	73.40	0.010	4.122	4.152
1965 <sup>†</sup>	73.83			

\* Nacimientos ajustados por subregistro; programado por Wilhelm Flieger.

† Sólo un año.

En todos los intervalos quinquenales desde 1925 el efecto del cambio de la mortalidad consistió en el incremento de la edad media  $A_t$  para las mujeres de los Estados Unidos, en un promedio de aproximadamente 0,2 años por periodo quinquenal (cuadro 7.6). El efecto alcanzó un máximo de 0,344 años en 1945-50, en un momento en que la mortalidad estaba bajando rápidamente, como lo indicaba la esperanza a la edad cero. Este resultado está de acuerdo con los hallazgos de Coale (1956, pág. 114) y Hermalin (1966). Hasta las edades reproductivas la mortalidad había alcanzado bajos niveles en la época en que comienza la tabla; no nos sorprende que los progresos tiendan a estar en las edades mayores. Aparecen resultados similares (no citados acá) para Canadá y Australia en la última generación.

Inglaterra y Gales desde 1861 muestran un efecto muy diferente del cambio de la mortalidad sobre la distribución por edades (cuadro 7.7). Ocurren fluctuaciones tanto en el nivel general de la mortalidad como en su incidencia por edad. Aparentemente ocurren fases de la transición demográfica, en las que el progreso de la mortalidad afecta a las edades mayores, luego a las edades más

**CUADRO 7.7**  
**DESCOMPOSICION DEL CAMBIO EN LA EDAD MEDIA**  
**DE LA POBLACION ESTABLE FEMENINA EN LOS EFECTOS DE MORTALIDAD**  
**Y FECUNDIDAD, INGLATERRA Y GALES, 1861-1961, Y PARA**  
**CUATRO PAISES DE ALTA FECUNDIDAD (PERIODOS RECIENTES)**

Intervalo centrado en	$\bar{e}_0$	Incremento de la edad media		
		Debido a cambio de mortalidad	Debido a cambio de fecundidad	Total incluyendo interacción
<b>INGLATERRA Y GALES</b>				
1861	43.03	-0.223	-0.499	-0.714
1871	42.43	-0.799	0.370	-0.439
1881	47.38	-0.233	1.477	1.179
1891	45.64	0.609	2.257	2.995
1901	49.39	0.085	2.560	2.695
1911	53.33	-0.504	1.262	0.754
1921	59.94	-0.482	6.176	5.610
1931	62.34	0.723	-4.447	-3.959
1946	68.94	-0.411	2.112	1.668
1951	71.50	0.373	-1.500	-1.160
1956	73.29	0.115	-3.238	-3.144
1961	73.97			
<b>CHILE</b>				
1960	59.19			
1964	61.29	-0.107	0.678	0.573
<b>HONDURAS</b>				
1957	60.08			
1965	61.53	-0.790	-0.787	-1.520
<b>MARTINICA</b>				
1961	68.21			
1963	67.89	-0.511	1.207	0.643
<b>MAURICIO</b>				
1955	56.58			
1964	63.72	-0.097	-0.338	-0.439

jóvenes, luego a las mayores de nuevo (W. Flieger, 1967). Podemos decir en resumen (de resultados que no aparecen todos aquí) que con la excepción de la década 1891-1901 en Inglaterra y Gales y por un período similar en Suecia, la población tendía a hacerse más joven debido a la baja de la mortalidad para los países ya avanzados en la mayoría de los intervalos de tiempo hasta la

**CUADRO 7.8**  
**TASAS ESPECIFICAS DE MORTALIDAD POR EDADES „M<sub>x</sub> PARA MUJERES**  
**DE INGLATERRA Y GALES, EN PERIODOS TRIENALES**  
**EN TORNO A LOS PUNTOS DE CAMBIO DE INCIDENCIA**  
**DE LA MORTALIDAD POR EDADES REVELADA EN EL CUADRO 7.7,**  
**CON CAMBIOS PORCENTUALES ENTRE FECHAS DADAS**

x	1 000 „M <sub>x</sub> para el período trienal centrado en						
	1861	Cambio porcentual	1891	Cambio porcentual	1911	Cambio porcentual	1931
0	157.0	-1	154.9	-15	131.2	-54	59.7
1	35.0	-25	26.1	-33	17.4	-59	7.1
5	6.8	-31	4.7	-28	3.4	-41	2.0
10	4.4	-34	2.9	-28	2.1	-29	1.5
15	7.0	-39	4.3	-37	2.7	-11	2.4
20	8.1	-36	5.2	-38	3.2	-9	2.9
25	8.9	-30	6.2	-40	3.7	-14	3.2
30	10.1	-21	8.0	-42	4.6	-26	3.4
35	11.1	-11	9.9	-40	5.9	-32	4.0
40	11.7	+5	12.3	-40	7.4	-31	5.1
45	13.4	+13	15.1	-35	9.8	-30	6.9
50	16.2	+20	19.4	-32	13.2	-27	9.7
55	24.4	+20	29.3	-35	19.0	-25	14.2
60	29.6	+28	38.0	-27	27.6	-21	21.9
65	50.0	+24	61.8	-36	39.4	-12	34.7
70	66.8	+24	82.5	-19	66.6	-14	57.4
75	109.3	+12	123.3	-20	99.0	-3	96.6
80	173.8	+15	200.7	-25	150.8	+2	154.3
85	274.4	+8	300.7	-23	231.9	+11	257.7

Segunda Guerra Mundial, y subsiguientemente se ha hecho más vieja. Los cuatro países subdesarrollados del cuadro 7.7 demuestran una tendencia en los años recientes a disminuir la edad media con la baja en la mortalidad.

¿Cómo se puede estar seguro de que el cambio en la edad media  $A_x$ , debido a la mortalidad (las segundas columnas de los cuadros 7.6 y 7.7), realmente constituye un índice de cambio de incidencia de la mortalidad por edades? El cuadro 7.8 intenta ayudar a la formulación de un juicio sobre este asunto mostrando las tasas específicas por edades sobre un período de 70 años en Inglaterra y Gales. Puesto que el efecto del progreso de la mortalidad consistió en dismi-



nuir la edad media en las décadas de 1861 a 1891, a elevarla de 1891 a 1911, y luego a bajarla de nuevo de 1911 a 1931, todo de acuerdo a la segunda columna del cuadro 7.7, las tasas específicas de mortalidad por edades deben mostrar una estructura en el primer y tercer período diferente que en el segundo. El cuadro 7.8 concuerda ampliamente con esto: el progreso fue relativamente mayor en las edades inferiores a 40 de 1861 a 1891, en las edades mayores de 1891 a 1911, y de nuevo en las edades más jóvenes de 1911 a 1931. Para apreciar en forma definitiva esta técnica se requeriría una comparación más extensa.

Otras variables distintas de  $A_r$  pueden estar sujetas a una descomposición similar. La tasa neta de reproducción de los Estados Unidos disminuyó en 0,338 desde 1959-61 a 1965. Esto representó una caída total de 0,342 debido a la baja de la fecundidad, con una pequeña alza compensatoria de 0,004 debida al progreso de la mortalidad. De manera bastante sorprendente, la tasa intrínseca de mortalidad  $d$ , que subió en 2,126 por mil, estuvo más afectada por el cambio en la fecundidad (+ 2,257) que por el cambio en la mortalidad (— 0,133). Los efectos de la mortalidad y fecundidad sobre la población en edad escolar, la razón de dependencia, el valor reproductivo total, y otras funciones de la edad se pueden también particionar.

### Consecuencias de la mortalidad cero

¿Qué diferencia se produciría si se eliminara completamente la mortalidad residual y la gente viviera para siempre? Ello afectaría grandemente a los individuos, elevando su  $\dot{e}_0$  a infinito, pero a una población rápidamente creciente la afectaría sorprendentemente poco. Supongamos que  $p(a)$  fuera uno, y la primera tasa específica de fecundidad por edades  $m(a)$  se viera reducida a  $m(a)p(a)$ . La ecuación característica (5.2.2) permanecería inalterada. Para las mujeres de Honduras, 1965, el  $R_0$  es 2,613, y la tasa bruta de reproducción,  $\int_a^{\beta} m(a) da$ , es 3,036. La extensión infinita de la vida individual estaría compensada en cuanto a crecimiento de la población por una reducción de 14 por ciento de los nacimientos. Supongamos que ocurren estos dos cambios contrarrestantes: que las familias se privan de un hijo de entre siete y que la mortalidad se va a cero. La tasa intrínseca de natalidad caería de 42,49 por mil a 34,06, y sería igual a la tasa de crecimiento natural.

Puesto que la tasa de crecimiento natural para Honduras continuaría siendo 34,06 por mil, la distribución por edades de la población estable femenina sería

$$c(a) da = \frac{e^{-ra} da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} da} = re^{-ra} da, \quad (7.4.8)$$

evaluada para  $r = 0,03406$ . Esto resulta en una proporción de 15,7 por ciento de menores de 5 años de edad, lo cual no constituye una gran reducción respecto del 19,9 por ciento observado o el 18,6 por ciento en la población estable con tasas de mortalidad observadas. La edad media subiría un poco por el hecho de que la gente viviera eternamente: subiría desde  $\bar{A}_r = 21,6$  años a  $\bar{A}_r = 1/r = 29,4$  años, como lo puede verificar el lector mediante integración en

$$\bar{A}_r = \frac{\int_0^{\infty} ae^{-ra} da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} da} = \frac{1}{r}$$

con  $r = 0,03406$ .

Los resultados parecen asombrosos, especialmente lo moderado de la baja en el porcentaje de niños y del alza en la edad media. Pero un crecimiento de 3,4 por ciento por año es asombroso, muera o no la gente.

### Interpretación de las distribuciones por edades

Las consideraciones de este capítulo dan lugar a un número de maneras para estimar las tasas de natalidad en base a una distribución por edades observada y una tabla de vida. Una de éstas se desarrolla en la sección 7.3, con un método debido a Bourgeois-Pichat. Se ha ideado una generalización que no supone estabilidad, pero averigua los componentes lineales y cuadráticos del cambio en la tasa de natalidad en base a las edades observadas. Un principio completamente diferente, conocido como índice de Thompson (Thompson y Whelpton, 1933, pág. 262), convierte razones de niños a mujeres en  $R_0$  o tasas intrínsecas. Una exposición de la matemática que esto supone se encuentra en Keyfitz, Nagnur y Sharma (1967) y no se repetirá aquí.

De la aplicación retornaremos ahora a la teoría y compararemos las diversas versiones del análisis de la edad para un solo sexo que se han propuesto en los capítulos 2 al 6, con el objeto de determinar en qué aspectos son los mismos y en cuáles difieren uno de otro.

## RECONCILIACION DE LA ECUACION MATRICIAL E INTEGRAL

El punto de partida para nuestro análisis de población para un sexo ha sido o bien una ecuación integral para el caso continuo (capítulo 5) o un conjunto de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden para la forma discreta (capítulo 2). La solución de la ecuación integral puede conducir (sea mediante cálculo elemental o por uso de la transformada de Laplace) a una suma de exponenciales ponderadas por constantes (capítulo 5). El conjunto discreto de ecuaciones diferenciales de primer orden se puede expresar y resolver en términos matriciales (capítulo 3) o se puede hacer que dependa de una ecuación lineal en diferencias de un orden superior al primero, que es lo que mostraremos enseguida. Los determinantes constituyen una manera conveniente de escribir la solución de cualquiera de estas formulaciones discretas y en este capítulo se ilustrará con algunos ejemplos. Este capítulo está dedicado a comparar los diversos modelos para un sexo.

### 8.1. UNA ECUACION EN DIFERENCIAS DE ORDEN SUPERIOR

A partir de los primeros nueve miembros del conjunto de relaciones de primer orden (2.1.7), se puede deducir una ecuación en diferencias de noveno orden que relaciona

$$K_0^{(t)}, K_0^{(t-1)}, \dots, K_0^{(t-9)},$$

Se ejemplificará nuevamente el argumento con grupos quinquenales de edad y un período reproductivo que termina en  $\beta = 45$ . Sustituyendo en la primera ecuación de (2.1.7) las variables  $K_x^{(t)}$  de las últimas ecuaciones, las variables que corresponden a todas las edades, excepto el intervalo 0-4, se pueden eliminar, y entonces, la ecuación de noveno orden queda sólo en términos de  $K_0^{(t)}$ . Por ejemplo, mediante sucesivas sustituciones  $K_{15}^{(t)}$  se convierte en

$$K_{15}^{(t)} = K_{10}^{(t-1)}(L_{15}/L_{10}) = \dots = K_0^{(t-9)}(L_{15}/L_0). \quad (8.1.1)$$

Después de sustituir  $K_x^{(t)}$ ,  $x = 15, 20, \dots, 40$ , en expresiones similares a (8.1.1) en la primera ecuación de (2.1.7), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{K_0^{(t-2)} + K_0^{(t-3)}\}L_{15}F_{15} + \frac{1}{2}\{K_0^{(t-3)} + K_0^{(t-4)}\}L_{20}F_{20} + \dots \\ + \frac{1}{2}\{K_0^{(t-7)} + K_0^{(t-8)}\}L_{40}F_{40} = I_0K_0^{(t+1)}. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Volviendo a arreglar los paréntesis de modo de reunir los términos en  $K_0^{(t-3)}$ , etc., da

$$\frac{1}{2}L_{15}F_{15}K_0^{(t-2)} + \frac{1}{2}\{L_{15}F_{15} + L_{20}F_{20}\}K_0^{(t-3)} + \dots + \frac{1}{2}\{L_{40}F_{40}\}K_0^{(t-8)} = I_0K_0^{(t+1)}. \quad (8.1.3)$$

Esta es una ecuación en diferencias homogéneas de noveno orden en la variable  $K_0^{(t)}$ . Para resolverla intentamos con  $K_0^{(t)} = C\lambda^t$ , y encontramos una ecuación característica de noveno grado en  $\lambda$ ,

$$f(\lambda) = 2I_0\lambda^9 - L_{15}F_{15}\lambda^8 - (L_{15}F_{15} + L_{20}F_{20})\lambda^7 - \dots - L_{40}F_{40} = 0, \quad (8.1.4)$$

la que, cuando  $n = 9$ , es idéntica a la ecuación característica  $f(\lambda) = |M - \lambda I| = 0$  dada como (3.2.4), y por tanto debe tener las mismas raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ . Dado que la ecuación (8.1.3) es lineal, sus diversas soluciones se pueden sumar, y suponiendo raíces distintas, tenemos

$$K_0^{(t)} = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t + \dots + C_9\lambda_9^t. \quad (8.1.5)$$

Los  $C$  pueden ajustarse a las condiciones iniciales. Si conocemos la población en el momento cero,  $K_0^{(0)}, K_5^{(0)}, \dots$ , podemos inferir (hipotéticamente) los  $K_0^{(-1)}, K_0^{(-2)}, \dots, K_0^{(-8)}$  anteriores. Basado en el supuesto de mortalidad constante, la población precedente sería

$$K_0^{(-1)} = K_5^{(0)} \frac{L_0}{L_5}, K_0^{(-2)} = K_{10}^{(0)} \frac{L_0}{L_{10}}, \dots, K_0^{(-8)} = K_{40}^{(0)} \frac{L_0}{L_{40}}, \quad (8.1.6)$$

mediante una suerte de supervivencia inversa. Poniendo éstos en el primer miembro de (8.1.5) y sustituyendo  $t = 0, -1, \dots, -8$  en el segundo miembro, se obtienen las nueve ecuaciones

$$\begin{aligned} K_0^{(0)} &= K_0^{(0)} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_9, \\ K_0^{(-1)} &= K_5^{(0)} \frac{L_0}{L_5} = C_1\lambda_1^{-1} + C_2\lambda_2^{-1} + C_3\lambda_3^{-1} + \dots + C_9\lambda_9^{-1}, \\ K_0^{(-2)} &= K_{10}^{(0)} \frac{L_0}{L_{10}} = C_1\lambda_1^{-2} + C_2\lambda_2^{-2} + C_3\lambda_3^{-2} + \dots + C_9\lambda_9^{-2}, \\ &\vdots \\ K_0^{(-8)} &= K_{40}^{(0)} \frac{L_0}{L_{40}} = C_1\lambda_1^{-8} + C_2\lambda_2^{-8} + C_3\lambda_3^{-8} + \dots + C_9\lambda_9^{-8}. \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

Tomando (8.1.5) con el conjunto (8.1.7) y eliminando los  $C$ , obtenemos la condición para la consistencia de (8.1.5) y (8.1.7).

$$\begin{vmatrix} K_0^{(t)}/L_0 & \lambda_1^t & \lambda_2^t & \dots & \lambda_9^t \\ K_0^{(0)}/L_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ K_5^{(0)}/L_5 & \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \dots & \lambda_9^{-1} \\ K_{10}^{(0)}/L_{10} & \lambda_1^{-2} & \lambda_2^{-2} & \dots & \lambda_9^{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{40}^{(0)}/L_{40} & \lambda_1^{-8} & \lambda_2^{-8} & \dots & \lambda_9^{-8} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.1.8)$$

El primer miembro de esta última ecuación, al ser desarrollado por su fila superior, provee una expresión para  $K_0^{(t)}$  en términos de  $\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_9^t$ . En realidad (8.1.8) es solamente una manera de escribir la regla de Cramer para la solución de un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas. Si el determinante obtenido a partir de (8.1.8) suprimiendo la primera columna y la primera fila, se llamara  $|\mathbf{B}|$ , y el determinante obtenido de  $|\mathbf{B}|$  eliminando su fila  $i$ ésima y su columna  $j$ ésima, multiplicando por  $(-1)^{i+j}$ , se escribiera  $|\mathbf{B}_{ij}|$ , entonces (8.1.8) es

$$K_0^{(t)} = L_0 \sum_{i=1}^9 \left[ \frac{K_0^{(0)} |\mathbf{B}_{1i}|}{L_0 |\mathbf{B}|} + \frac{K_8^{(0)} |\mathbf{B}_{2i}|}{L_8 |\mathbf{B}|} + \dots + \frac{K_{40}^{(0)} |\mathbf{B}_{9i}|}{L_{40} |\mathbf{B}|} \right] \lambda_i^t. \quad (8.1.9)$$

La ecuación (8.1.9) expresa la trayectoria de una población con distribución por edades inicial y régimen de fecundidad y supervivencia dados. La estructura de fecundidad y mortalidad ha sido traducida en el conjunto de valores característicos.

### Reconciliación de una ecuación de orden superior con un conjunto de primer orden

En el análisis matricial del capítulo 3, el primer paso consistió en la determinación de los valores característicos de  $\mathbf{M}$ , vale decir, las raíces (nueve en nuestro caso) de la ecuación polinómica  $|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ ; entonces, para cada  $\lambda_i$  resolvemos el conjunto de ecuaciones lineales homogéneas

$$\mathbf{M}\{\mathbf{K}_i\} = \lambda_i \{\mathbf{K}_i\} \quad \text{y} \quad [\mathbf{H}_i] \mathbf{M} = \lambda_i [\mathbf{H}_i].$$

El desarrollo del vector arbitrario  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$ , proyectado al momento  $t$  como  $\mathbf{M}^t \{\mathbf{K}^{(0)}\}$ , es

$$\{\mathbf{K}^{(t)}\} = c_1 \lambda_1^t \{\mathbf{K}_1\} + c_2 \lambda_2^t \{\mathbf{K}_2\} + \dots + c_9 \lambda_9^t \{\mathbf{K}_9\}, \quad (8.1.10)$$

donde  $c_i$  es  $[\mathbf{H}_i] \{\mathbf{K}^{(0)}\}$ , obtenido multiplicando (8.1.10) para  $t = 0$  en el primer miembro por  $[\mathbf{H}_i]$ , puesto que siempre podemos hacer  $[\mathbf{H}_i] \{\mathbf{K}_i\}$  igual a la unidad.

Para nuestro propósito será conveniente considerar los  $c_i = [\mathbf{H}_i] \{\mathbf{K}^{(0)}\}$  como los elementos de un vector columna

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{H}_1] \\ [\mathbf{H}_2] \\ [\mathbf{H}_3] \\ \vdots \\ [\mathbf{H}_9] \end{pmatrix} \{\mathbf{K}^{(0)}\} = \mathbf{H} \{\mathbf{K}^{(0)}\}, \quad (8.1.11)$$

donde  $\mathbf{H}$  se define como el conjunto de vectores estables. El conjunto correspondiente de vectores columna es

$$\mathbf{K} = [\{\mathbf{K}_1\} \{\mathbf{K}_2\} \dots \{\mathbf{K}_9\}]. \quad (8.1.12)$$

De la ortogonalidad de los vectores, o sea,  $[\mathbf{H}_i] \{\mathbf{K}_j\} = 0$ ,  $i \neq j$ , demostrada en el capítulo 3, resulta que  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{K}$  son recíprocos, suponiendo que hemos normalizado los vectores para hacer  $[\mathbf{H}_i] \{\mathbf{K}_i\} = 1$ . Puesto que  $\mathbf{H} = \mathbf{K}^{-1}$ , podemos

reemplazar  $\mathbf{H}$  por  $\mathbf{K}^{-1}$  en (8.1.11). Esto es conveniente porque  $\mathbf{K}$  no es otra cosa que los vectores columna estables  $\{\mathbf{K}_i\}$  puestos uno al lado del otro, y cada uno de los  $\{\mathbf{K}_i\}$  se puede expresar en la forma [diferenciando de (3.2.6), la población estable de raíz  $l_0$ , sólo en un multiplicador constante,  $\sqrt{\lambda_i}$ ]:

$$\{\mathbf{K}_i\} = \begin{Bmatrix} L_0 \\ L_0/\lambda_i \\ \vdots \\ L_{40}/\lambda_i^8 \end{Bmatrix},$$

donde el elemento superior se ha tomado ahora arbitrariamente como  $L_0$ . En consecuencia podemos escribir  $\mathbf{K}$  como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} L_0 & L_0 & L_0 & \dots & L_0 \\ L_5\lambda_1^{-1} & L_5\lambda_2^{-1} & L_5\lambda_3^{-1} & \dots & L_5\lambda_9^{-1} \\ L_{10}\lambda_1^{-2} & L_{10}\lambda_2^{-2} & L_{10}\lambda_3^{-2} & \dots & L_{10}\lambda_9^{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{40}\lambda_1^{-8} & L_{40}\lambda_2^{-8} & L_{40}\lambda_3^{-8} & \dots & L_{40}\lambda_9^{-8} \end{bmatrix}. \tag{8.1.13}$$

Factorizando el segundo miembro de (8.1.13), obtenemos

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_{10} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \lambda_3^{-1} & \dots & \lambda_9^{-1} \\ \lambda_1^{-2} & \lambda_2^{-2} & \lambda_3^{-2} & \dots & \lambda_9^{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{-8} & \lambda_2^{-8} & \lambda_3^{-8} & \dots & \lambda_9^{-8} \end{bmatrix} = \mathbf{AB}, \tag{8.1.14}$$

De los dos factores que conforman  $\mathbf{K}$ , el primero,  $\mathbf{A}$ , se obtiene completamente de la tabla de vida y no depende en manera alguna de la fecundidad, en tanto que el segundo,  $\mathbf{B}$ , se construye de una manera simple con los recíprocos de las raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ .

Se deduce que  $\mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ , y sustituyendo esto en (8.1.11) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\{\mathbf{K}^{(0)}\} &= \mathbf{K}^{-1}\{\mathbf{K}^{(0)}\} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\{\mathbf{K}^{(0)}\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \dots & \lambda_9^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{-8} & \lambda_2^{-8} & \dots & \lambda_9^{-8} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_{40} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} K_0^{(0)} \\ K_5^{(0)} \\ \vdots \\ K_{40}^{(0)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \dots & \lambda_9^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{-8} & \lambda_2^{-8} & \dots & \lambda_9^{-8} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} K_0^{(0)}/L_0 \\ K_5^{(0)}/L_5 \\ \vdots \\ K_{40}^{(0)}/L_{40} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{Bmatrix} K_0^{(0)}/L_0 \\ K_5^{(0)}/L_5 \\ \vdots \\ K_{40}^{(0)}/L_{40} \end{Bmatrix}, \tag{8.1.15} \end{aligned}$$

ya que el recíproco de una matriz diagonal es la matriz diagonal de los recíprocos de sus elementos.

Recordamos que el vector producto (8.1.15) es idéntico a (8.1.11), el que fue el punto de partida de la presente serie de manipulaciones. En consecuencia, el elemento superior de (8.1.15), considerado como un vector columna, debe ser lo mismo que el elemento superior de (8.1.11), esto es,  $[\mathbf{H}_1]\{\mathbf{K}^{(0)}\} = c_1$ . Restringiéndonos a este elemento superior, necesitamos sólo la fila superior de  $\mathbf{B}^{-1}$ , lo que equivale a decir,  $1/|\mathbf{B}|$  veces el conjunto de cofactores de la primera columna de  $\mathbf{B}$ . El cofactor del primer elemento de la primera columna de  $\mathbf{B}$  es

$$|\mathbf{B}_{11}| = \begin{vmatrix} \lambda_2^{-1} & \lambda_3^{-1} & \dots & \lambda_9^{-1} \\ \lambda_2^{-2} & \lambda_3^{-2} & \dots & \lambda_9^{-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_2^{-8} & \lambda_3^{-8} & \dots & \lambda_9^{-8} \end{vmatrix}, \quad (8.1.16)$$

que omite la primera fila y la primera columna de  $|\mathbf{B}|$ , y similarmente,  $|\mathbf{B}_{i1}|$  omite la  $i$ ésima fila y primera columna de  $|\mathbf{B}|$ . Siendo el valor de  $c_1$  el primer elemento del vector columna constituido por el producto al fin de (8.1.15), tenemos

$$c_1 = \frac{|\mathbf{B}_{11}|}{|\mathbf{B}|} \left( \frac{K_0^{(0)}}{L_0} \right) + \frac{|\mathbf{B}_{21}|}{|\mathbf{B}|} \left( \frac{K_5^{(0)}}{L_5} \right) + \dots + \frac{|\mathbf{B}_{91}|}{|\mathbf{B}|} \left( \frac{K_{40}^{(0)}}{L_{40}} \right). \quad (8.1.17)$$

El lector puede comparar esto con (8.1.9) y completar la demostración para otro  $c_i$ ,  $i=2, 3, \dots, 9$ . Puede usar el hecho de que el segundo miembro de (8.1.17), al reunirse en un solo determinante, es

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} K_0^{(0)}/L_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ K_5^{(0)}/L_5 & \lambda_2^{-1} & \lambda_3^{-1} & \dots & \lambda_9^{-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{40}^{(0)}/L_{40} & \lambda_2^{-8} & \lambda_3^{-8} & \dots & \lambda_9^{-8} \end{vmatrix}}{|\mathbf{B}|}, \quad (8.1.18)$$

que es lo mismo que el coeficiente de  $\lambda_1^i$  en el desarrollo de (8.1.8) por su primera fila, excepto que el  $c_1$  de (8.1.18) es  $1/L_0$  del coeficiente de  $\lambda_1^i$  en (8.1.9). Esto se debe al hecho de que los elementos superiores de los  $\{K_i\}$  en (8.1.13) se tomaron arbitrariamente como  $L_0$ , creando así la situación de simetría observable en las ecuaciones subsiguientes; si las hubiéramos tomado como 1, entonces el  $c_1$  habría resultado  $L_0$  veces más grande.

El argumento demuestra que la trayectoria de una población sujeta a un régimen constante de mortalidad y fecundidad, es la misma, ya sea desarrollada mediante una sola ecuación en diferencias (8.1.3) de noveno orden conducente a (8.1.8), o mediante premultiplicaciones sucesivas por una matriz, después de la adaptación de la proyección de población usual que conduce a (8.1.18). Aun cuando el hecho de que éstas resulten ser exactamente las mismas no sorprenda al estudiante de ecuaciones en diferencias, la ecuación de noveno orden (que no se usa a menudo en estudios demográficos) nos da el resultado común a las dos de manera mucho más natural. Esta fue la razón para introducirla.

Hasta aquí la prueba se aplica sólo al primer grupo de edades. Se puede extender a cualquier otro grupo de edades, como ser el  $(i+1)$ ésimo,  $K_{5i}^{(i)}$  no-

tando que  $K_{54}^{(t)} = K_0^{(t-1)} L_{54} / L_0$ , como se ejemplificó en (8.1.1). Escribiendo (8.1.8) con  $t = i$  en lugar de  $t$  y luego sustituyendo  $K_0^{(t-1)}$  por su equivalente  $K_{54}^{(t)} L_0 / L_{54}$ , da

$$\begin{vmatrix} K_{54}^{(i)} / L_{54} & \lambda_1^{i-1} & \lambda_2^{i-1} & \dots & \lambda_9^{i-1} \\ K_0^{(0)} / L_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ K_8^{(0)} / L_8 & \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \dots & \lambda_9^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{40}^{(0)} / L_{40} & \lambda_1^{-8} & \lambda_2^{-8} & \dots & \lambda_9^{-8} \end{vmatrix} = 0, \quad (8.1.19)$$

de lo cual obtenemos  $K_{54}^{(i)} / L_{54}$  como un cociente entre dos determinantes, uno de orden diez con ceros en la parte superior izquierda, dividido por otro de orden nueve que hemos llamado  $|B|$ . Esto da la extensión requerida de (8.1.8) y (8.1.9).

## 8.2. ECUACIONES MATRICIAL E INTEGRAL

La trayectoria de los nacimientos basada en un modelo continuo fue establecida en el capítulo 5 mediante la ecuación integral

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x)p(x)m(x) dx, \quad (8.2.1)$$

cuya solución es

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots, \quad (8.2.2)$$

donde los  $r$  son los ceros de la ecuación característica

$$\phi(r) - 1 = \int_0^\beta e^{-rx} p(x)m(x) dx - 1 = 0, \quad (8.2.3)$$

y las  $Q$  son constantes que, para la particular distribución inicial por edades de  $B_0$  niños de edad 0, toma la forma

$$Q_i = \frac{B_0}{\int_0^\beta x e^{-r_i x} p(x)m(x) dx} = \frac{B_0}{-\phi'(r_i)}. \quad (8.2.4)$$

Una aproximación a (8.2.3) fue dada como (5.3.2). Si escribimos  $\lambda = e^{r}$  y multiplicamos por  $\lambda^9$ , suponiendo que la edad límite superior para la fecundidad positiva es de 45 años, (5.3.2) se convierte en

$$l_0 \lambda^9 - L_{10} F_{10} \lambda^{8.5} - L_{15} F_{15} \lambda^{8.0} - L_{20} F_{20} \lambda^{7.5} - \dots - L_{40} F_{40} \lambda^{0.5} = 0. \quad (8.2.5)$$

La ecuación (8.2.5) no es idéntica a (8.1.4), pero se demostrará que converge a la misma integral, cuando la amplitud del intervalo para edades y tiempo se hace arbitrariamente pequeña.

### Equivalencia asintótica de las raíces características

Para probar que la ecuación característica,  $|M - \lambda I| = 0$ , de la matriz de proyección se hace equivalente a (8.2.5), cuando el intervalo de tiempo y de edad disminuye, podemos pensar en hacer la proyección cuando el intervalo es  $s$ , una



fracción de año. Entonces, la matriz de proyección  $M_s$  será un arreglo cuadrado que contiene  $45/s \times 45/s$  elementos. Su subdiagonal contendría  $(45/s) - 1$  elementos, siendo cada uno de ellos un cociente de la forma  ${}_sL_{x+s}/{}_sL_x$ , donde  $x$  es un múltiplo de  $s$ , y

$${}_sL_x = \int_0^s l(x+t) dt.$$

Su fila superior consistiría de expresiones tales como

$$\frac{{}_sL_0}{2l_0} \left( {}_sF_x + \frac{{}_sL_{x+s}}{{}_sL_x} {}_sF_{x+s} \right).$$

Cuando se desarrolla la ecuación característica  $|M_s - \lambda I| = 0$ , se obtiene [por analogía con (8.1.4) y sin el prefijo  $s$  que se aplica aquí a todos los  $L$  y  $F$ ]:

$$l_0 \lambda^{45/s} - \left( \frac{{}_sL_{15} F_{15}}{2} \right) \lambda^{30/s} - \left( \frac{{}_sL_{15} F_{15} + {}_sL_{15+s} F_{15+s}}{2} \right) \lambda^{(30-s)/s} - \dots \\ - \left( \frac{{}_sL_{x-s} F_{x-s} + {}_sL_x F_x}{2} \right) \lambda^{(46-s)/s} - \dots = 0, \quad (8.2.6)$$

siendo 15 y 45 múltiplos de  $s$ . Si  $s$  es 1/10 de año, entonces, el grado de (8.2.6) sería  $45/s = 450$ .

Dividiendo (8.2.6) por  $\lambda^{45/s}$ , y reemplazando a continuación  $\lambda$  por su equivalente  $e^{rs}$ , se obtienen los típicos términos consecutivos

$$\frac{1}{2} (L_{x-s} F_{x-s} + L_x F_x) e^{-rx} + \frac{1}{2} (L_x F_x + L_{x+s} F_{x+s}) e^{-r(x+s)}.$$

Reagrupamos poniendo juntos los dos elementos que contienen  $L_x F_x$ , con lo que obtenemos para (8.2.6)

$$\sum_{15}^{45-s} L_x F_x (e^{-r(x+s/2)}) \left( \frac{e^{rs/2} + e^{-rs/2}}{2} \right) = l_0,$$

o

$$\left( 1 + \frac{r^2 s^2}{2! 4} + \dots \right) \sum_{15}^{45-s} L_x F_x e^{-r(x+s/2)} = l_0.$$

Cuando  $s$  tiende a cero, el término entre paréntesis (que es el coseno hiperbólico de  $rs/2$ ) tiende a 1. La sumatoria contiene  $L_x F_x$ , el número de niñas nacidas en la población estacionaria de mujeres que tienen entre  $x$  y  $x+s$  años de edad, y un factor de descuento,  $e^{-r(x+s/2)}$ , desde el punto medio del intervalo  $(x, x+s)$  hasta el nacimiento. Si cuando  $s$  disminuye,  $L_x F_x$  tiende a  $l(x)m(x) dx$ , entonces, la ecuación característica (8.2.6) se convierte en

$$\int_{15}^{45} e^{-rx} l(x)m(x) dx = l_0,$$

que es lo mismo que fue para la ecuación integral, o sea, (8.2.3), con  $l(x)/l_0$  en lugar de  $p(x)$ . De la equivalencia entre las ecuaciones características  $|M - \lambda I| = 0$  de capítulo 3, y  $\psi(r) = 1$  de capítulo 5, se sigue que las raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , del

primero, cuando son transformadas en la forma  $(\ln \lambda_1)/s, (\ln \lambda_2)/s, \dots$ , convergen en número y valor a las raíces  $r_1, r_2, \dots$ , del último, cuando  $s$  tiende a cero. Veremos ahora qué sucede a la estructura de las  $\lambda$  correspondientes a  $s = 5$ , intervalos quinquenales de edad, cuando éstas son transformadas en  $r = (\ln \lambda)/5$ .

### Representación de las raíces $\lambda$ y $r$

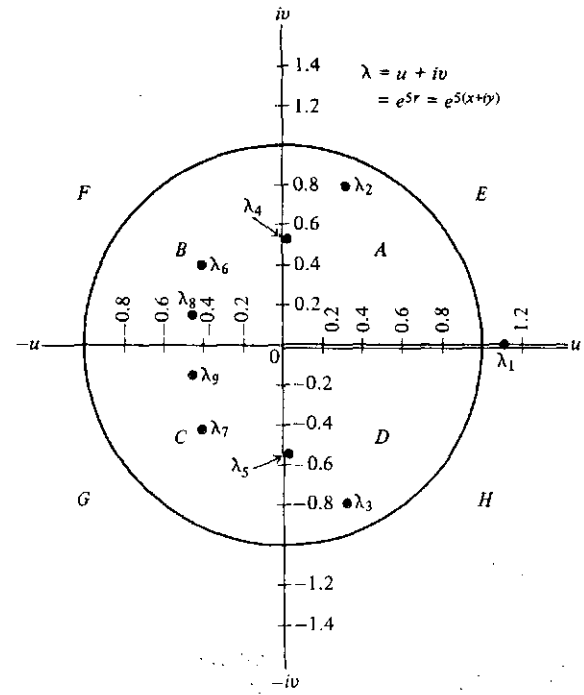
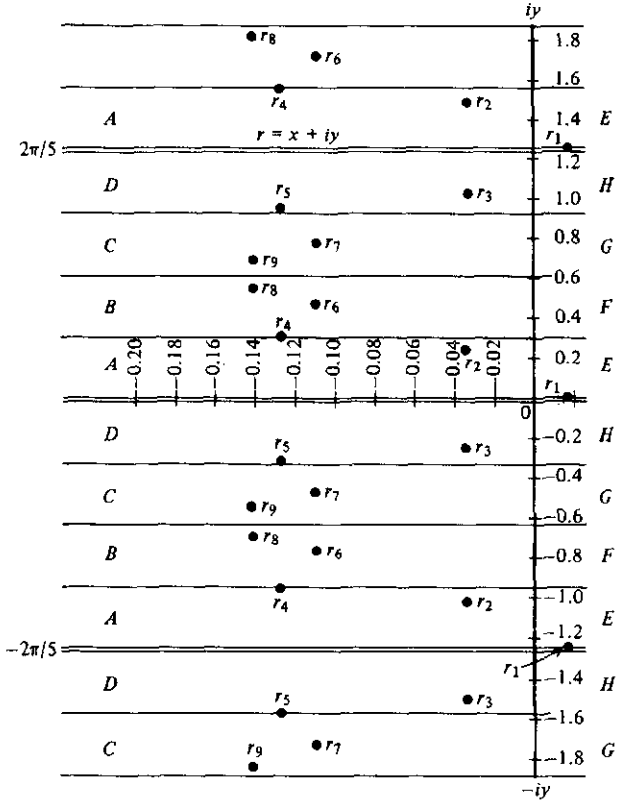
La representación de  $\lambda$  respecto a  $r$  gira sólo en torno a la relación  $\lambda = e^{5r}$ , sobre la cual se pueden hacer algunas observaciones generales (Kober, 1952, págs. 85-86; Pierpont, 1959, págs. 102-111). Escribiremos  $\lambda = u + iv$  y  $r = x + iy$ , donde  $u, v, x$  e  $y$  son reales.

El plano  $\lambda$  aparece en el gráfico 8.1 dividido en dos partes por el círculo unitario, y la representación lleva los puntos  $\lambda$  de  $|\lambda| > 1$ , esto es, fuera del círculo unitario, a  $x > 0$ , o sea, al semiplano ubicado a la derecha de la ordenada  $x = 0$  en  $r$ . Los puntos que están dentro del círculo unitario ( $|\lambda| < 1$ ) se representan en la parte izquierda del plano  $r$  ( $x < 0$ ). Además, todo el plano  $\lambda$  se representa en una franja horizontal sobre el plano  $r$  de amplitud  $2\pi/5$ , desde  $y = 0$  hasta  $y = 0.4$ . La franja se repite desde  $y = 0.4(m+1)\pi$  hasta  $y = 0.4(m+2)\pi$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y por lo tanto, cada punto del plano  $\lambda$  se representa un número infinito de veces en el plano  $r$ . Se puede asegurar la unicidad en la representación en ambas direcciones cortando a lo largo del eje positivo real de  $\lambda$  y nunca cruzando el lugar por donde se cortó. En la representación de la matriz  $9 \times 9$ , habrá 9 raíces en el plano  $\lambda$  y 9 raíces indefinidamente repetidas en sucesivas franjas del plano  $r$ . Cualquier conjunto de éstas en una banda de amplitud  $2\pi/5$  constituye una solución de la ecuación característica (Goodman, 1968a). Las localizaciones de las diversas raíces se pueden aparear entre el plano  $\lambda$  y el plano  $r$  dividiendo este último en subfranjas horizontales, representando cada una de ellas el cuadrante del círculo marcado con la letra correspondiente.

Vemos en el gráfico 8.1 las raíces características para la población femenina de los Estados Unidos, basadas en datos de 1963. Las raíces  $\lambda$  están en el lado derecho, donde las tres de mayor importancia han sido identificadas como  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ ; correspondientes a éstas son  $r_1, r_2$  y  $r_3$ . Para una población creciente,  $\lambda_1$  está fuera del círculo unitario y  $r_1$  está a la derecha del eje  $y$ . Las seis raíces que vienen después de  $r_1, r_2$  y  $r_3$  están considerablemente a la izquierda del eje  $y$  en el plano  $r$  y corresponden a raíces dentro de un círculo que mide alrededor de  $|\lambda| = \frac{1}{2}$  en el plano  $\lambda$ . Observe la notable diferencia entre la presente estructura de  $r_1, r_2$  y aquella bajo cualquiera de los tres ajustes del gráfico 6.1. La sensibilidad de las raíces más altas a la representación de la función de fecundidad corre pareja con su menor significación demográfica (Coale, 1967).

Cuando se sigue la trayectoria de la población bajo el supuesto régimen de fecundidad y mortalidad constante, las diversas raíces de  $\lambda$  son elevadas a potencias, y esto significa que todas, menos  $\lambda_1$ , siguen espirales que bajan progresivamente hacia el centro del círculo. Para una  $\lambda$  compleja,  $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ , tenemos  $\lambda^t = |\lambda|^t(\cos t\theta + i \sin t\theta)$ . Por sí mismo,  $\cos t\theta + i \sin t\theta$ , simplemente trazaría un círculo permanentemente repetido: con un multiplicador cada vez menor, el círculo se convierte en una espiral de radio decreciente. El movimiento correspondiente en el plano  $r$  será externo hacia la izquierda. ¿Cómo se representarían las tres curvas del gráfico 6.1 sobre el plano  $\lambda$ , y cómo cambiaría su configuración con el crecimiento de  $t$ ?

**GRAFICO 8.1**  
**REPRESENTACION DEL PLANO  $\lambda$  RESPECTO AL PLANO  $r$**



## Satisfacción de una condición inicial en la ecuación integral y la matriz

La reconciliación de  $Q_i$  de (8.2.2) y  $c_i$  de (8.1.17), donde una distribución por edades arbitraria  $\{K^{(0)}\}$  es el punto de partida de la trayectoria, está de alguna manera involucrada; nuestro argumento se restringirá a una población inicial de  $K_0^{(0)}$  niños de 0.4 años de edad, digamos, de sexo femenino. Entonces escribiendo  $K_5^{(0)} = K_{10}^{(0)} = \dots = K_{40}^{(0)} = 0$  en (8.1.9), encontramos que los coeficientes de  $\lambda_1^t$  aparecen como

$$c_1 = K_0^{(0)} |\mathbf{B}_{11}| / |\mathbf{B}|, \quad (8.2.7)$$

donde  $\mathbf{B}$  es la matriz de las raíces características dadas en (8.1.14). Es evidente que  $|\mathbf{B}|$  se anula cuando  $\lambda_i^{-1} = \lambda_j^{-1}$ ,  $1 \leq i \neq j \leq 9$ , y por tanto  $\lambda_i^{-1} - \lambda_j^{-1}$  debe ser un factor. Similarmente,  $|\mathbf{B}_{11}|$  se anula para  $\lambda_i^{-1} = \lambda_j^{-1}$ ,  $2 \leq i \neq j \leq 9$ , y por tanto  $\lambda_i^{-1} - \lambda_j^{-1}$ ,  $i, j \neq 1$ , debe ser un factor;  $|\mathbf{B}_{11}|$  tiene también los factores  $\lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_9^{-1}$ . La comparación de cualquier término  $|\mathbf{B}|$  con el correspondiente término en el producto

$$|\mathbf{B}| = C(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})(\lambda_1^{-1} - \lambda_3^{-1}) \dots (\lambda_8^{-1} - \lambda_9^{-1})$$

nos dirá qué es la constante  $C$ . La diagonal principal de  $|\mathbf{B}|$ , la cual es  $\lambda_2^{-1} \lambda_3^{-2} \dots \lambda_9^{-8}$ ; corresponde al producto de todos los términos a la derecha en los diversos factores de

$$(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})(\lambda_1^{-1} - \lambda_3^{-1}) \dots (\lambda_8^{-1} - \lambda_9^{-1}),$$

o

$$(-\lambda_2)^{-1} (-\lambda_3)^{-2} \dots (-\lambda_9)^{-8}.$$

Demuestre que este producto es positivo y en consecuencia, que  $C = 1$ . Este argumento aprovecha las propiedades de los determinantes de *Vandermonde* o *simples alternantes* (Muir, 1960, pág. 327; Householder, 1953, pág. 91) de los cuales,  $|\mathbf{B}|$  es un caso típico.

Se puede aplicar un argumento similar al cofactor  $|\mathbf{B}_{11}|$  con el resultado:

$$|\mathbf{B}_{11}| = \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-1} \dots \lambda_9^{-1} (\lambda_2^{-1} - \lambda_3^{-1})(\lambda_2^{-1} - \lambda_4^{-1}) \dots (\lambda_8^{-1} - \lambda_9^{-1}). \quad (8.2.8)$$

Después que se sacan de (8.2.7), los factores comunes al numerador y denominador, sólo queda

$$c_1 = \frac{K_0^{(0)} \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-1} \dots \lambda_9^{-1}}{(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})(\lambda_1^{-1} - \lambda_3^{-1}) \dots (\lambda_1^{-1} - \lambda_9^{-1})}, \quad (8.2.9)$$

y multiplicando el numerador y denominador de (8.2.9) por  $\lambda_1^8 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_9$ ; tenemos

$$c_1 = \frac{K_0^{(0)} \lambda_1^8}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_9)}. \quad (8.2.10)$$

El denominador del segundo miembro de (8.2.10) es equivalente a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_9)}{\lambda - \lambda_1}, \quad (8.2.11)$$

donde ahora el numerador, en el límite, debe ser el polinomio  $f(\lambda)$  de la ecuación característica  $f(\lambda) = |\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ , presentada antes como (8.1.4). El límite en (8.2.11) es

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_1)}{\lambda - \lambda_1} = f'(\lambda_1), \quad (8.2.12)$$

puesto que  $f(\lambda_1) = 0$ , y (8.2.12) es  $f'(\lambda_1)$  por la definición corriente de derivada.

Sustituyendo (8.2.12) por el denominador de (8.2.10), se obtiene el coeficiente de  $\lambda_1^i$  en el desarrollo (8.1.5) como  $c_1$ :

$$c_1 = K_0^{(0)} \lambda_1^8 / f'(\lambda_1). \quad (8.2.13)$$

Esto se comparará con  $Q_i$ ,  $i = 1$ , de (8.2.4). Demostrando la equivalencia, para un factor de 5, de los segundos miembros de (8.2.13) y (8.2.4), la prueba quedará completa.

Hemos mostrado el parecido de  $\psi(r) - 1 = 0$  y  $f(\lambda) = |\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ , las ecuaciones características de la ecuación integral y de la matriz, respectivamente; ellas no son idénticas para ningún intervalo de amplitud finita, pero ambas son aproximaciones a la misma expresión límite siempre que el intervalo de tiempo y edad tiende a cero, cuando  $e^{5r}$  en  $\psi(r) - 1$  se traduce como  $\lambda$  y multiplicamos por  $-\lambda^9$ . Si  $e^{5r} = \lambda$ , entonces  $r = 0.2 \ln \lambda$ . Si

$$f(\lambda) = -\lambda^9(\psi(r) - 1), \quad (8.2.14)$$

entonces, diferenciando con respecto a  $\lambda$ ,

$$f'(\lambda) = -\lambda^9(\psi'(r)) \frac{dr}{d\lambda} - 9\lambda^8(\psi(r) - 1) = -\lambda^9(\psi'(r)) \frac{dr}{d\lambda}$$

en los puntos que son raíces de la ecuación característica  $\psi(r) = 1$ . Finalmente, puesto que

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{d(0.2 \ln \lambda)}{d\lambda} = \frac{0.2}{\lambda},$$

la expresión de arriba para  $f'(\lambda)$  se convierte en

$$f'(\lambda) = -0.2\lambda^8\psi'(r) \quad (8.2.15)$$

para cualquier raíz  $\lambda_i = e^{5r_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$ .

Reemplazando  $f'(\lambda_1)$  en (8.2.13) por su equivalente en (8.2.15) da

$$c_1 = \frac{K_0^{(0)} \lambda_1^8}{f'(\lambda_1)} = -\frac{K_0^{(0)} \lambda_1^8}{0.2\lambda_1^8\psi'(r_1)} = -\frac{5K_0^{(0)}}{\psi'(r_1)}, \quad (8.2.16)$$

que es cinco veces el  $Q_1$  de (8.2.4), excepto que el punto de partida de (8.2.4), la ecuación integral, es  $B_0$  nacimientos y que en la presente representación matricial se trata de  $K_0^{(0)}$  niños menores de cinco años de edad. Puesto que la mortalidad bajo cinco años es constante, no necesitamos preocuparnos aquí de la diferencia. Los  $c$  son coeficientes para aplicar a los  $\lambda_i^t$  con el objeto de producir la población menor de cinco años de edad en el momento  $t$ , como lo demuestra una inspección de (8.1.5), y es por lo tanto necesario que el  $K_0^{(0)}$  (arbitrario) entre de algún modo en cada  $c$ . Por otra parte, los  $Q$  en (8.2.2) son coeficientes que se aplicarán a los  $e^{r_1 t}$  para producir  $B(t)$  nacimientos en el mo-

mento  $t$ , y cada  $Q$  debe por tanto contener los  $B_0$  (arbitrarios) nacimientos iniciales.

El 5 del último miembro de (8.2.16) entra porque la unidad para contar el tiempo en la matriz es de cinco años, como puede verse recorriendo en sentido inverso el razonamiento que va desde (8.2.15) hasta la expresión  $e^{5r} = \lambda$  que precede inmediatamente a (8.2.14). Si hubiéramos usado para la proyección una matriz (algo más incómoda) de  $45 \times 45$ , en cuya ecuación característica  $\lambda$  representara la proporción de crecimiento para un año, y  $e^r$  fuera igual a  $\lambda$ , entonces, nada habría sido cambiado excepto que el 0,2 no habría aparecido en (8.2.15), ni el 5 en (8.2.16). Un factor igual a cinco se aplicó por esta misma razón a  $B(t)$ ,  $t > 0$ , en la primera columna del cuadro 5.9 cuando fue comparada con los cuadros 5.6 y 5.7.

Esta demostración de la equivalencia asintótica de los coeficientes reales  $Q_i$  y  $c_i$  se pueden extender a los coeficientes complejos  $Q_i$  y  $c_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, 9$ .

### 8.3. RESUMEN DE SOLUCIONES

La proyección de población se puede analizar aun por otros medios distintos de las ecuaciones en diferencias de primer orden (capítulo 2), la ecuación de noveno orden (8.1.3) y la ecuación integral (8.2.1). El argumento de la sección 5.6 condujo a una solución en fracciones parciales y dio lugar a una aproximación finita adicional a las raíces características. El lector que esté interesado puede realizar manipulaciones algebraicas similares a la de la sección 8.2 y demostrar que el método de las fracciones parciales es equivalente a los otros tres, cuando el intervalo de tiempo y edad se hace pequeño. La demostración, como antes, tratará separadamente a) las raíces características y b) los coeficientes que permiten que el resultado esté en conformidad con las condiciones iniciales dadas.

Una manera de compendiar los métodos que aparecen en la literatura, cuya presentación y reconciliación ha sido el tema de este capítulo y los precedentes, es en la forma de un árbol (cuadro 8.1) cuyas dos ramas principales son las formulaciones discreta y continua.

La exposición comenzó en el capítulo 2 con la proyección de población en los puntos  $b$  y  $d$  en el árbol del cuadro 8.1. En el capítulo 8 dedujimos una ecuación en diferencias de noveno orden  $f$  y mostramos su solución en la forma de un determinante  $j$ . Esta solución por determinantes parece diferente del análisis matricial de Leslie  $e$  del capítulo 3, pero se ha demostrado la concordancia de ambas.

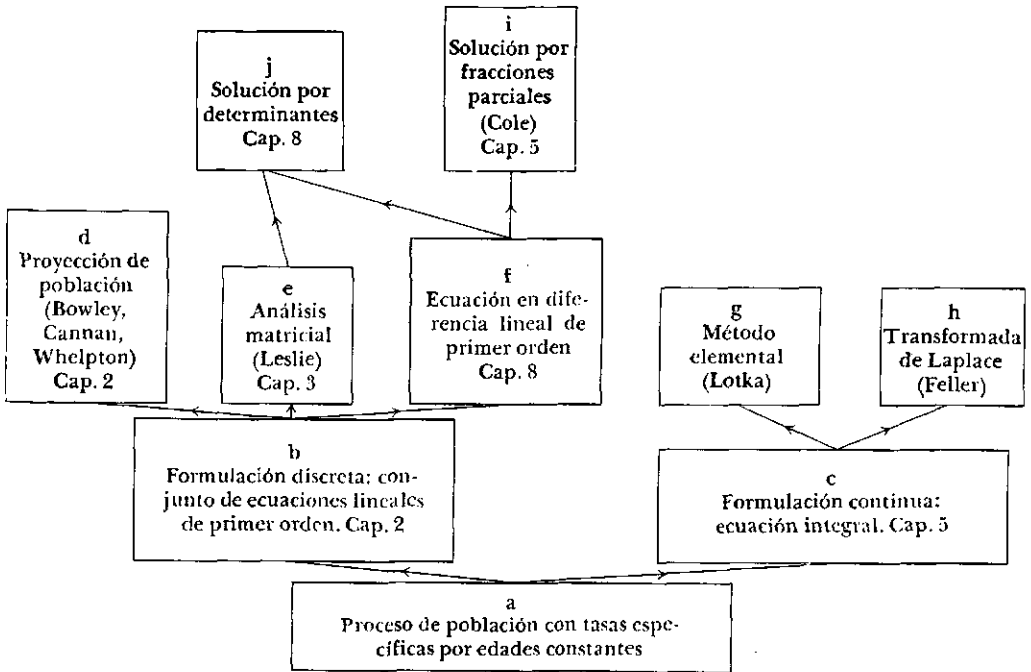
En el capítulo 5 se prestó atención a las dos formas del análisis continuo,  $g$  y  $h$ , cuyo resultado idéntico fue citado de Lotka (1939c) y Feller (1941). El argumento del capítulo 8 se concentró en la comparación de  $j$  y  $e$  por una parte, con  $g$  y  $h$  por la otra, primero con respecto a los valores característicos, y luego, en relación a las constantes usadas para satisfacer una condición inicial consistente en un cierto número de nacimientos que ocurren en un momento dado.

#### Matrices de proyección alternativas

Esto es suficiente en cuanto a la concordancia asintótica de los diversos procedimientos para pequeños intervalos de edad y tiempo. Desde el punto de vista

CUADRO 8.1

MODELOS PARA EL ANÁLISIS DETERMINISTA DE UNA POBLACION DE UN SEXO  
CON TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD Y MORTALIDAD  
POR EDADES CONSTANTES



de los cálculos, es de interés conocer cómo difieren las diversas fórmulas al ser aplicadas a los datos en intervalos quinquenales de edad y tiempo. Cada uno de los enfoques aquí desarrollados se podrían llevar a cabo a través de toda la esfera del análisis demográfico. Por ejemplo, podríamos utilizar la aproximación usual a la ecuación integral, o la solución de las fracciones parciales a la ecuación de recurrencia, para proyectar la población. Para cualquier ecuación de la forma (8.1.4) existe una matriz correspondiente que servirá para hacer la proyección. En lugar de ir de  $M$  a  $f(\lambda) = |M - \lambda I| = 0$ , podríamos elegir primero  $f(\lambda) = 0$ , y a continuación determinar  $M$  a partir de aquél. La matriz que corresponde a una ecuación característica no es única en principio, pero es virtualmente así en la práctica cuando insistimos también en que la matriz tenga elementos de fecundidad en su fila superior, sobrevivientes en su subdiagonal, y ceros en toda otra parte.

Una ecuación característica general se puede escribir como

$$f(\lambda) = \lambda^9 - u_0\lambda^8 - u_1\lambda^7 - u_2\lambda^6 - u_3\lambda^5 - \dots - u_8 = 0, \quad (8.3.1)$$

donde, para poblaciones humanas,  $u_0$  y  $u_1$  son cero o despreciables. Entonces, la fila superior de una matriz  $M$  correspondiente a ella es

$$u_0 \quad \frac{L_0}{L_5} u_1 \quad \frac{L_0}{L_{10}} u_2 \quad \frac{L_0}{L_{15}} u_3 \quad \frac{L_0}{L_{20}} u_4 \quad \dots \quad \frac{L_0}{L_{40}} u_8,$$

## CUADRO 8.2

MATRIZ (2.1.9) Y LA MATRIZ CUYA PRIMERA FILA ES (8.3.5).  
ESTADOS UNIDOS, MUJERES, 1960, APARECE TAMBIEN  
 $r = 0.2 \ln \lambda$  PARA CADA RAIZ\*

	MATRIZ DE PROYECCION (8.2.4)	MATRIZ CUYA PRIMERA FILA ES (8.3.4)
ECUACIONES CARACTERISTICAS	$ M - \lambda I  = 0:$	
MATRIZ DE PROYECCION(3.2.4):	$ \tilde{M} - \tilde{\lambda} I  = \lambda^{10} - 0.0010\lambda^9$	
	$- 0.1066\lambda^7 - 0.4115\lambda^6 - 0.5408\lambda^5 - 0.3685\lambda^4 - 0.1998\lambda^3$	
	$- 0.0842\lambda^2 - 0.0191\lambda - 0.0011 = 0,$	
MATRIZ CUYA PRIMERA FILA ES	(8.3.4): $ \tilde{M} - \tilde{\lambda} I  = \lambda^{10}$	
	$- 0.0020\lambda^7 - 0.2228\lambda^6 - 0.6449\lambda^5 - 0.4954\lambda^4 - 0.2817\lambda^3$	
	$- 0.1396\lambda^2 - 0.0379\lambda - 0.0023 = 0.$	
$\lambda_1$	1.11182	1.11151
$\lambda_2, \lambda_3$	$0.3018 \pm 0.7984i$	$0.4033 \pm 0.8497i$
$\lambda_4, \lambda_5$	$0.0246 \pm 0.5285i$	$0.0363 \pm 0.5302i$
$\lambda_6, \lambda_7$	$-0.4314 \pm 0.3645i$	$-0.5314 \pm 0.4705i$
$\lambda_8, \lambda_9$	$-0.4096 \pm 0.1283i$	$-0.4231 \pm 0.1484i$
$\lambda_{10}$	-0.0825	-0.0818
$r_1$	0.02120	0.02114
$r_2, r_3$	$-0.0317 \pm 0.2420i$	$-0.0123 \pm 0.2255i$
$r_4, r_5$	$-0.1273 \pm 0.3049i$	$-0.1264 \pm 0.3005i$
$r_6, r_7$	$-0.1143 \pm 0.4880i$	$-0.0686 \pm 0.4834i$
$r_8, r_9$	$-0.1691 \pm 0.5676i$	$-0.1604 \pm 0.5608i$
$r_{10}$	-0.4989	-0.5007

Los valores de  $r$  obtenidos como  $0.2 \ln \lambda$  están sujetos a una adición arbitraria de  $(0.2)(2\pi n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Los conjuntos completos de los  $r$ , que bastan para dar todos los  $\lambda$ , se pueden seleccionar de diferentes maneras; la selección aquí es de aquellos cuyo término imaginario está en una sucesión creciente desde cero a  $\pi/5 = 0.628$ , y sus conjugados.

\* Nacimientos ajustados.



teniendo como  $(i + 1)$  ésimo elemento de la fila superior

$$\frac{L_0}{L_{6i}} u_i, \quad i = 0, 1, \dots, 8, \quad (8.3.2)$$

y la subdiagonal

$$m_{i+1,i} = \frac{L_{6i}}{L_{6(i-1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (8.3.3)$$

como se puede demostrar evaluando  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}|$  para esta matriz y demostrando que su  $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}|$  es lo mismo que  $f(\lambda)$  de (8.3.1).

Por ejemplo, podemos comenzar con la ecuación característica (5.3.2) u (8.2.5) y establecer una matriz de proyección que sea equivalente a ella. Comparando (8.2.5) con (8.3.1) se ve que  $u_i$  es

$$u_i = \frac{L_{6i} F_{6i}}{l_0} \lambda^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, 8, \quad (8.3.4)$$

y que en lugar de  $\lambda^{1/2}$  se puede poner a  $\lambda_1^{1/2}$ , la raíz cuadrada del valor característico positivo. En consecuencia, la fila superior de una matriz cuya proyección sea asintóticamente idéntica con la solución de la ecuación integral  $Q_1 e^{r_1 t}$  en la aproximación (8.2.5) para  $r = 0,2 \ln \sqrt{\lambda}$  es

$$0 \quad 0 \quad F_{10} \frac{L_0}{l_0} \sqrt{\lambda_1} \quad F_{15} \frac{L_0}{l_0} \sqrt{\lambda_1} \quad F_{20} \frac{L_0}{l_0} \sqrt{\lambda_1} \quad \dots, \quad (8.3.5)$$

y la subdiagonal de (8.3.3) quedaría inalterada. Esta forma de la matriz de proyección me fue sugerida por Norman Caquier.

Las raíces de las dos formas aparecen en el cuadro 8.2, arregladas en orden creciente de frecuencias y. Las partes complejas y de  $r = 0,2 \ln \lambda$  corresponden a ondas de período 26,0 [ $=2\pi/0,2420$ ], 20,6, 12,9 y 11,1 años en la versión de la matriz de proyección, y a 27,8, 20,9, 13,0 y 11,0 años en la matriz con (8.3.5), las cuales no tienen una diferencia apreciable. Las partes reales para la primera y tercera raíces complejas son, sin embargo, muy diferentes entre las dos aproximaciones. Para  $r_2, r_3$ , algo de esto se puede derivar del valor de la varianza en la función de fecundidad neta involucrada en (3.2.4), la cual es diferente de aquella implícita en (8.3.5). Para ver cuánto se debe a esto, uno puede usar la expresión para la parte real  $x$  del ajuste de Hadwiger dado en (6.4.9).

Como una alternativa a las dos matrices de (3.2.4) y (8.3.5), cuyas raíces aparecen en el cuadro 8.2, podríamos usar (8.3.1) y el argumento que le sigue, para construir matrices de proyección correspondientes a la forma de las fracciones parciales (5.8.7) y el método de la transformada de Laplace incorporado en (5.7.5).

Las tres versiones continuas de la función de fecundidad neta discutidas en el capítulo 6, se podrían también convertir en matrices de proyección, como puede ser demostrado por el lector. Estas, junto con las cuatro formas que usan los datos en grupos quinquenales de edad, constituyen siete métodos en total. Aún hay otros potencialmente disponibles, pero el presente volumen no irá más allá con el modelo de un sexo por edades.

## SERIES DE TIEMPO DEMOGRAFICAS

Los capítulos precedentes desarrollaron las consecuencias del supuesto de tasas específicas de mortalidad y fecundidad por edades constantes. Hasta aquí no se ha dicho nada sobre el ajuste de curvas analíticas particulares a las cambiantes cifras demográficas. En el capítulo presente investigaremos la curva de los nacimientos precedentes,  $B(t)$ , implícita en un conjunto dado de cambios en las cifras sobre número de personas,  $N(t)$ , y no prestaremos atención a la distribución por edades. Lotka (1939b) desarrolló algo de esta teoría prosiguiendo en su interés por la curva logística, que se da en (9.2.4); él demostró en particular que cuando  $N(t)$  sigue una curva logística, lo mismo ocurre con  $B(t)$  de manera bastante aproximada. Desde la época de Lotka, la curva logística ha venido a parecer menos útil en el análisis demográfico, y en nuestro estudio se usa como un medio de ejemplificar algunos procedimientos generales más que por su interés mismo.

### 9.1. NACIMIENTOS CORRESPONDIENTES A NUMEROS TOTALES DADOS

Cuando los nacimientos de una comunidad cerrada han recorrido cierta trayectoria, descrita por  $B(t)$ , y una tabla de vida constante de raíz igual a la unidad, proporciona el número de los sobrevivientes a la edad  $a$ ,  $p(a)$ , entonces el número de personas en cada edad  $a$  en el momento  $t$  queda determinado y es igual a  $B(t-a)p(a)$ , y mediante integración, la población total en el momento  $t$  debe ser

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a)p(a) da, \quad (9.1.1)$$

como vimos en el capítulo 7 y en otras partes. La ecuación (9.1.1) es diferente de la ecuación integral (5.1.2) que tenía  $B(t)$  en lugar de  $N(t)$  en el primer miembro, y correspondientemente, un factor adicional de  $m(a)$ , la tasa específica de fecundidad, en el integrando. En primer lugar, consideraremos brevemente a  $N(t)$  como la incógnita, y la averiguaremos partiendo de un  $B(t)$  dado, y enseguida trataremos el problema inverso de determinar el  $B(t)$ , correspondiente a un  $N(t)$  dado.

Si nos dijeran que el número de nacimientos va subiendo en progresión aritmética, pongamos  $B(t) = B(0) + ht$ , entonces el número de personas en la población en el momento  $t$  debe ser

$$\begin{aligned} N(t) &= \int_0^{\infty} [B(0) + h(t-a)]p(a) da \\ &= [B(0) + ht] \int_0^{\infty} p(a) da - h \int_0^{\infty} ap(a) da. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Suponga que conocemos la constante  $h$  del crecimiento aritmético de los nacimientos, como asimismo la cero ésima y primera sumas acumuladas de la columna de sobrevivientes de la tabla de vida, que podemos escribir

$$\bar{L}_0 = \int_0^{\omega} p(a) da = \dot{e}_0 \quad \text{y} \quad \bar{L}_1 = \int_0^{\omega} ap(a) da,$$

siendo  $\bar{L}_1/\bar{L}_0$  el primer momento de  $p(a)/\dot{e}_0$ . Entonces de (9.1.2) los totales de la población en las etapas subsiguientes deben ser

$$N(t) = (B(0) + ht)\bar{L}_0 - h\bar{L}_1 = (B(0)\bar{L}_0 - h\bar{L}_1) + h\bar{L}_0 t. \quad (9.1.3)$$

Aparentemente  $N(t)$  es una recta, y su pendiente es la pendiente de nacimientos  $h$  multiplicada por  $\bar{L}_0 = \dot{e}_0$ , la esperanza de vida al nacimiento. Para las mujeres canadienses en 1965, cuyos momentos de la tabla de vida incluyendo  $\bar{L}_0 = \dot{e}_0 = 75,00$  se pueden hallar en el cuadro 7.3, podemos decir que si los nacimientos estuvieran creciendo uniformemente a razón de 5 000 por año sobre un período largo de tiempo, la población crecería en  $(5\,000)(75,00) = 375\,000$  por año.

Si los nacimientos están en progresión geométrica o sea  $B(t) = B(0)e^{ht}$ , entonces de acuerdo a (9.1.1) la población será

$$N(t) = \int_0^{\omega} B(0)e^{h(t-a)} p(a) da = B(0)e^{ht} \int_0^{\omega} e^{-ha} p(a) da = B(t) \int_0^{\omega} e^{-ha} p(a) da. \quad (9.1.4)$$

Esto demuestra que los nacimientos exponenciales implican cifras totales que crecen exponencialmente. El número  $N(t)$  en un momento dado es  $\int_0^{\omega} e^{-ha} p(a) da$  veces los nacimientos  $B(t)$ ; si  $h$  es  $r$ , la tasa intrínseca de crecimiento, esta integral es el recíproco de  $b$ , la tasa intrínseca de natalidad, como debe ser según se desprende de (7.2.6).

La inferencia en la otra dirección —determinar la trayectoria de los nacimientos cuando la trayectoria del número total de la población es conocida— requiere que en lugar de considerar (9.1.1) como una integral simple, la consideremos como una ecuación integral cuya incógnita es la función  $B(t)$  (Lotka, 1939b, págs. 144-161; Lotka, 1939c, págs. 44-48; Tabah, 1964, págs. 6-9). Su solución requerirá una técnica algo diferente de la solución de (5.1.2) y será nuestra próxima tarea.

Aun omitiendo las consideraciones acerca de la edad, supongamos que  $B(t)$  se puede expresar en términos de  $N(t)$  y sus derivadas, o sea en la forma

$$B(t) = c_0 N(t) - c_1 N'(t) + \frac{c_2 N''(t)}{2!} - \dots \quad (9.1.5)$$

Supongamos ahora que también  $B(t-a)$  se puede desarrollar como una serie de Taylor en torno a  $t$ ,

$$B(t-a) = B(t) - aB'(t) + \frac{a^2}{2!} B''(t) - \dots \quad (9.1.6)$$

Las  $c$  resultarán ser expresables como funciones de los momentos de la tabla de vida.

Cada uno de los términos del segundo miembro de (9.1.6) se puede representar mediante una serie en  $N(t)$  y sus derivadas obtenidas diferenciando (9.1.5):

$$\begin{aligned}
 B'(t) &= c_0 N'(t) - c_1 N''(t) + c_2 \frac{N'''(t)}{2!} - \dots, \\
 B''(t) &= c_0 N''(t) - c_1 N'''(t) + \dots, \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{9.1.7}$$

si (9.1.5) es diferenciable. Sustituyendo (9.1.5) y (9.1.7) en (9.1.6) se obtiene

$$\begin{aligned}
 B(t-a) &= c_0 N(t) - c_1 N'(t) + c_2 \frac{N''(t)}{2!} - c_3 \frac{N'''(t)}{3!} + \dots \\
 &\quad - a \left( c_0 N'(t) - c_1 N''(t) + c_2 \frac{N'''(t)}{2!} - \dots \right) \\
 &\quad + \frac{a^2}{2!} (c_0 N''(t) - c_1 N'''(t) + \dots) \\
 &\quad - \frac{a^3}{3!} (c_0 N'''(t) - \dots) \\
 &\quad + \dots \\
 &= c_0 N(t) - (c_1 + ac_0) N'(t) + \left( \frac{c_2}{2} + ac_1 + \frac{c_0 a^2}{2} \right) N''(t) \\
 &\quad - \left( \frac{c_3}{6} + \frac{ac_2}{2} + \frac{a^2 c_1}{2} + \frac{a^3 c_0}{6} \right) N'''(t) + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{9.1.8}$$

e ingresando este valor de  $B(t-a)$  en la ecuación integral (9.1.4) con el objeto de resolver para las  $c$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 N(t) &= \int_0^{\omega} \left[ c_0 N(t) - (c_1 + ac_0) N'(t) + (c_2 + 2ac_1 + a^2 c_0) \frac{N''(t)}{2} + \dots \right] p(a) da \\
 &= N(t) c_0 \bar{L}_0 - N'(t) (c_1 \bar{L}_0 + c_0 \bar{L}_1) + \frac{N''(t)}{2} (c_2 \bar{L}_0 + 2c_1 \bar{L}_1 + c_0 \bar{L}_2) \\
 &\quad - \frac{N'''(t)}{6} (c_3 \bar{L}_0 + 3c_2 \bar{L}_1 + 3c_1 \bar{L}_2 + c_0 \bar{L}_3) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{9.1.9}$$

Si (9.1.9) es una identidad, entonces el coeficiente de  $N(t)$  del segundo miembro debe ser uno, y el coeficiente de cada derivada de  $N(t)$  debe ser cero. [Demuestre que esto es verdadero, al menos si  $N(t)$  es un polinomio.] Estas condiciones nos permiten extraer de (9.1.9) un conjunto de ecuaciones en las  $c$  y en las  $\bar{L}$ :

$$\begin{aligned}
 c_0 \bar{L}_0 &= 1, \\
 c_1 \bar{L}_0 + c_0 \bar{L}_1 &= 0, \\
 c_2 \bar{L}_0 + 2c_1 \bar{L}_1 + c_0 \bar{L}_2 &= 0, \\
 c_3 \bar{L}_0 + 3c_2 \bar{L}_1 + 3c_1 \bar{L}_2 + c_0 \bar{L}_3 &= 0, \\
 c_4 \bar{L}_0 + 4c_3 \bar{L}_1 + 6c_2 \bar{L}_2 + 4c_1 \bar{L}_3 + c_0 \bar{L}_4 &= 0, \\
 c_5 \bar{L}_0 + 5c_4 \bar{L}_1 + 10c_3 \bar{L}_2 + 10c_2 \bar{L}_3 + 5c_1 \bar{L}_4 + c_0 \bar{L}_5 &= 0, \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{9.1.10}$$

de lo cual se pueden obtener sucesivamente las  $c$  en términos de las  $\bar{L}$ :

$$c_0 = 1/\bar{L}_0, \quad c_1 = -(\bar{L}_1/\bar{L}_0^2), \quad c_2 = -(\bar{L}_2/\bar{L}_0^3) + 2\bar{L}_1^2/\bar{L}_0^4, \dots \quad (9.1.11)$$

Sustituyendo los valores de  $c$  de (9.1.11) en (9.1.5) obtenemos la solución para  $B(t)$ :

$$B(t) = \frac{N(t)}{\bar{L}_0} + \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0^2} N'(t) + \left( \frac{2\bar{L}_1^2}{\bar{L}_0^3} - \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_0^2} \right) \frac{N''(t)}{2} + \dots \quad (9.1.12)$$

La ecuación (9.1.12) se puede simplificar trasladando el origen al punto  $-(\bar{L}_1/\bar{L}_0)$ . Escribiendo  $t = \theta - \bar{L}_1/\bar{L}_0$  y aplicando un desarrollo de Taylor en torno a  $\theta$  en cada término del segundo miembro de (9.1.12) resulta

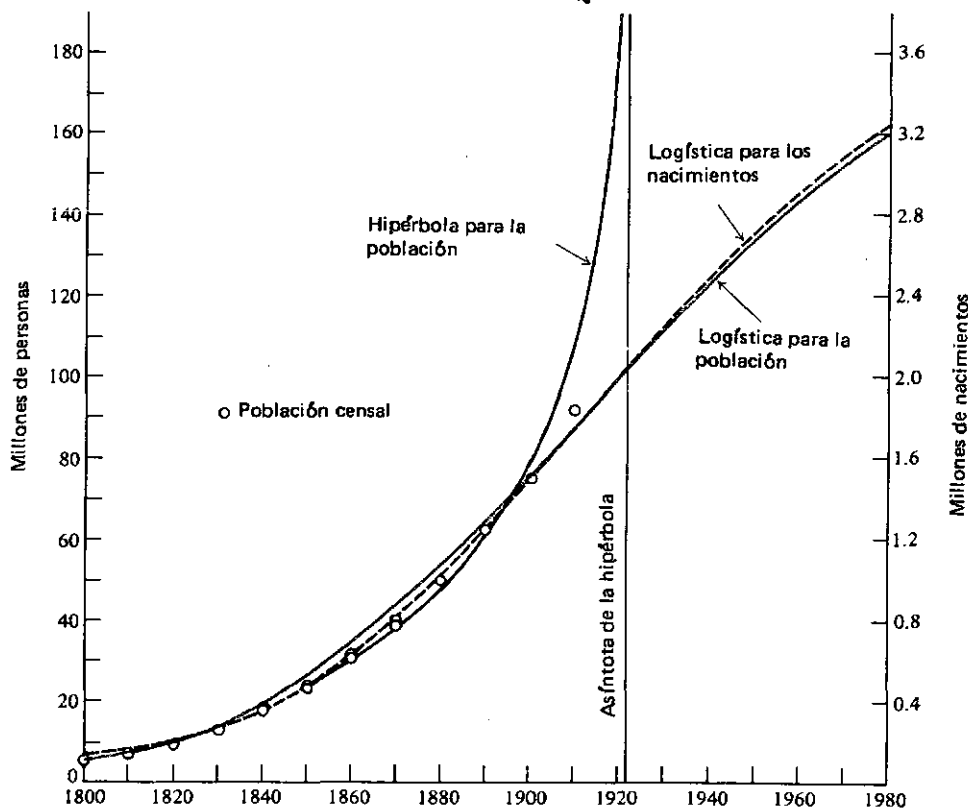
$$B\left(\theta - \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0}\right) = \frac{N(\theta)}{\bar{L}_0} - \frac{1}{2\bar{L}_0} \left[ \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_0} - \left(\frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0}\right)^2 \right] N''(\theta) + \dots, \quad (9.1.13)$$

y regresando a la escala de tiempo original  $t$ , tenemos

$$\dot{\epsilon}_0 B(t) = N(t + \bar{\mu}) - \frac{1}{2}\sigma^2 N''(t + \bar{\mu}) + \dots, \quad (9.1.14)$$

**GRAFICO 9.1**

**MODELOS LOGISTICOS Y DE EXPLOSION (HIPERBOLA) AJUSTADOS A LA SERIE DE CENSOS DE LOS ESTADOS UNIDOS QUE FINALIZA EN 1910**



donde  $\bar{\mu}$  es la media y  $\bar{\sigma}^2$  la varianza del número de sobrevivientes de la tabla de vida, y  $\bar{e}_0 = \bar{L}_0$  es el número total de sobrevivientes en una población estacionaria de raíz  $l_0 = 1$ . Para las mujeres canadienses, 1965, (9.1.13) es en miles,

$$B(1965 - 39.63) = 0.01333N(1965) - 3.776N''(1965) + \dots,$$

en la que nuevamente nos referimos al cuadro 7.3 para los momentos necesarios. Ya el primer término solo daría  $(0,01333)(9\ 479) = 126$  miles, que está levemente por encima de los nacimientos observados de 1925. Observe que  $B(t)$  no es muy sensible a las constantes de la tabla de vida, al menos en el rango de variación del cuadro 7.3, y se podrían aplicar los momentos de tablas modelo. Por otra parte no puede hacer frente a cambios repentinos en la fecundidad.

Se demuestra mediante (9.1.13) que la primera aproximación a los nacimientos es el total de la población en la fecha dada dividido por la esperanza de vida al nacimiento; la parte correspondiente a la varianza del segundo término de (9.1.13) es una resta si la curva de los números totales es cóncava hacia arriba, de otra manera es una suma (gráfico 9.1). Observe que se supone una población en la que todas las muertes tienen lugar a una misma edad, lo que está implícito al usarse sólo el primer término del segundo miembro de (9.1.14), a la vez que el segundo término da lugar a una varianza positiva para las edades al morir.

La aplicación de (9.1.14) depende de una estimación de la segunda derivada. Tales estimaciones se hacen ajustando una curva analítica a la serie de observaciones de  $N(t)$  y diferenciando luego la curva. Este es nuestro próximo tópico.

## 9.2. AJUSTE MEDIANTE UNA CURVA EN LA CUAL LAS CONSTANTES PARTICIPAN DE MANERA NO-LINEAL

Si se va a ajustar una curva  $y = f(x)$  mediante mínimos cuadrados a un conjunto de datos, y si el ajuste consiste en determinar las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  que entran de manera lineal, como en la función  $y = a + bx + cx^2$ , el conjunto de ecuaciones normales obtenidas diferenciando  $\sum(y - a - bx - cx^2)^2 = 0$  con respecto a  $a$ ,  $b$  y  $c$  proporciona el resultado completo. Si las constantes no entran linealmente, como en la logística  $y = a/(1 + be^{-cx})$ , se requiere otro procedimiento.

Sea  $s(a, b, c)$  la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores ajustados respecto de los valores observados, y  $a_0$ ,  $b_0$  y  $c_0$  las aproximaciones a  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; entonces por un desarrollo en serie de Taylor para tres variables independientes:

$$\begin{aligned} s(a, b, c) &= s(a_0, b_0, c_0) + (a - a_0) \left. \frac{\partial s(a, b, c)}{\partial a} \right|_{\substack{a=a_0 \\ b=b_0 \\ c=c_0}} + \dots + \dots \\ &+ \frac{(a - a_0)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 s(a, b, c)}{\partial a^2} \right|_{\substack{a=a_0 \\ b=b_0 \\ c=c_0}} + \dots + \dots \\ &+ (a - a_0)(b - b_0) \left. \frac{\partial^2 s(a, b, c)}{\partial a \partial b} \right|_{\substack{a=a_0 \\ b=b_0 \\ c=c_0}} + \dots + \dots, \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

hasta los términos cuadráticos. Para ser breves, escribiremos las derivadas evaluadas en  $a_0$ ,  $b_0$  y  $c_0$  como  $\partial s/\partial a_0$ ,  $\partial s/\partial b_0$  y  $\partial s/\partial c_0$ . Para hacer mínima  $s(a, b, c)$ , diferenciamos con respecto a  $a$ ,  $b$  y  $c$  e igualamos a cero cada derivada, obte-

niendo por tanto tres ecuaciones lineales, que se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 s}{\partial a_0^2} & \frac{\partial^2 s}{\partial a_0 \partial b_0} & \frac{\partial^2 s}{\partial a_0 \partial c_0} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial a_0 \partial b_0} & \frac{\partial^2 s}{\partial b_0^2} & \frac{\partial^2 s}{\partial b_0 \partial c_0} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial a_0 \partial c_0} & \frac{\partial^2 s}{\partial b_0 \partial c_0} & \frac{\partial^2 s}{\partial c_0^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - a_0 \\ b - b_0 \\ c - c_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial a_0} \\ \frac{\partial s}{\partial b_0} \\ \frac{\partial s}{\partial c_0} \end{bmatrix} \quad (9.2.2)$$

o, más compactamente, como

$$\mathbf{HA} = -\mathbf{E},$$

donde **H** es el arreglo de las segundas derivadas de  $s(a, b, c)$ ; **A**, la desviación de  $a$  respecto de  $a_0$ ,  $b$  respecto de  $b_0$  y  $c$  respecto de  $c_0$ , se puede denominar vector de ajuste o vector de predicción; **E** es el vector de las primeras derivadas de  $s(a, b, c)$ . Multiplicando (9.2.2) a la izquierda por  $\mathbf{H}^{-1}$  se tiene la solución aproximada para el vector de ajuste:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{E}. \quad (9.2.3)$$

El proceso se puede repetir con el nuevo  $a$  tomado como  $a_0$ ,  $b$  como  $b_0$ , y  $c$  como  $c_0$ , hasta que se logre convergencia. En Ralston (1965, pág. 348) y Householder (1953, pág. 132) se encuentran formas más sofisticadas del origen de este método. El lector puede comparar (9.2.3) y las generalizaciones de ella con el procedimiento de Newton-Raphson de (5.3.4), pero con la advertencia de que mientras mayor sea el número de constantes, más serios son los problemas de convergencia.

A la población de los Estados Unidos se ajustará la curva conocida como la *logística*

$$N(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, \quad (9.2.4)$$

como un ejemplo del procedimiento anterior. Se puede verificar que la ecuación (9.2.4) es la solución de la ecuación diferencial

$$N'(t) = \frac{c}{a} \{N(t)[a - N(t)]\},$$

que especifica que el crecimiento de  $N(t)$  es proporcional a la población ya alcanzada,  $N(t)$ , y también proporcional a la diferencia entre  $N(t)$  y  $a$ , el límite superior asintótico de  $N(t)$ . Nuestro ajuste de (9.2.4) se referirá a los cómputos de los censos desde 1800 hasta 1910, reproducidos en el cuadro 9.1. Comenzamos con valores iniciales (en base a conjeturas) de ensayo:

$$a = 210 \text{ millones}, \quad b = 40, \quad c = 0,03.$$

Lo primero que nos dice el programa es que la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto de la curva definida por los valores de ensayo es 176,56 (en millones cuando la población está en miles). El ajuste de  $a$  para la primera

**CUADRO 9.1**  
**CENSO Y POBLACION AJUSTADA DE LOS ESTADOS UNIDOS (EN MILES)**

Constantes para 1800-1910:  $a = 197.30$ ;  $b = 35.60$ ;  $c = 0.031186$

Año	Valor censal <sup>a</sup>	Valor ajustado de la logística mínima cuadrática <sup>b</sup>	Diferencia
1800	5,308	5,390	82
1810	7,240	7,290	50
1820	9,638	9,825	187
1830	12,866	13,180	314
1840	17,069	17,574	505
1850	23,912	23,248	-664
1860	31,443	30,443	-1000
1870	38,558	39,362	804
1880	50,156	50,109	-47
1890	62,948	62,626	-322
1900	75,995	76,642	647
1910	91,972	91,661	-311

VALORES OBTENIDOS AL AJUSTAR A 1800-1960 <sup>c</sup>

Constantes para 1800-1960:  $a = 256.41$ ;  $b = 36.30$ ;  $c = 0.02689$

1800	6,874	1860	31,157	1920	105,092
1810	8,922	1870	39,298	1930	122,081
1820	11,551	1880	49,102	1940	139,288
1830	14,908	1890	60,669	1950	156,102
1840	19,164	1900	73,988	1960	171,966
1850	24,512	1910	88,902		

<sup>a</sup> Fuente: *Statistical Abstract of United States*, 1966, pág. 5. excepto 1850 y 1870.

<sup>b</sup> Programa obtenido por cortesía de Paul Meier, Universidad de Chicago, usando el método del descenso más acentuado, que converge más rápidamente que (9.2.3). El resultado idéntico lo obtuvo P. P. Talwar, quien programó directamente (9.2.3).

<sup>c</sup> Programado por P. P. Talwar.

vuelta fue  $-18.77$ , para  $b$  fue  $-5.83$ , para  $c$  fue  $0.001265$ . De allí que el segundo ciclo comenzó con

$$a_0 = 210 - 18.77 = 191.23,$$

$$b_0 = 40.00 - 5.83 = 34.17,$$

y

$$c_0 = 0.030000 + 0.001265 = 0.031265.$$

Los sucesivos ajustes o predicciones y los valores resultantes de los parámetros aparecen en el cuadro 9.2. La suma de los cuadrados de las desviaciones de los



**CUADRO 9.2**  
**APROXIMACIONES SUCESIVAS A LOS PARAMETROS DE LA LOGISTICA**  
**AJUSTADA A LA POBLACION CENSADA (EN MILES)**  
**DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1800-1910**

Valores iniciales arbitrarios de los parámetros:

$$a_0 = 210.0; b_0 = 40.0; c_0 = 0.03$$

$$\text{Suma inicial de cuadrados (ss) de las desviaciones} = 176,56 \times 10^6$$

Método descendente para mínimos cuadrados, obtenido por cortesía de Paul Meier

Iteración	0	1	2	3
a	210.0	191.23	197.02	197.30
b	40.0	34.17	35.55	35.60
c	0.03	0.031265	0.031190	0.031186
ss $\times 10^{-6}$	176.56	35.67	3.11	3.11

Programación independiente para mínimos cuadrados por P. P. Talwar, usando (9.2.3)

Iteración	0	1	2	3
a	210.0	219.27	217.63	238.23
b	40.0	41.96	37.91	39.79
c	0.03	0.03136	0.03030	0.02925
ss $\times 10^{-6}$	176.56	12.8032	4.1227	6.2244
	4	5	6	
a	225.32	205.61	203.24	
b	38.34	36.29	36.17	
c	0.02978	0.03062	0.03086	
ss $\times 10^{-6}$	4.4300	3.8717	3.1779	
	7	8	9	
a	196.99	197.26	197.30	
b	35.56	35.60	35.60	
c	0.03119	0.03119	0.03119	
ss $\times 10^{-6}$	3.1171	3.1067	3.1067	

valores ajustados (al final de la etapa o ciclo) respecto de los datos decrece en la sucesión 176,56, 35,67, 3,11, 3,11, de nuevo expresado en millones si los datos están en miles de personas. El ajuste de notable calidad de la logística a la población de los Estados Unidos para 1800 a 1910 aparece en el cuadro 9.1, siendo la mayor discrepancia de sólo un 3 por ciento. Esto ha sido señalado antes por Pearl y Reed (1920) y Lotka (1931a y 1939b), cuyo ajuste fue mediante puntos seleccionados y no por mínimos cuadrados, pero quien, sin embargo, llegó a constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  muy similares a las de (9.3.1).

El primer ajuste del cuadro 9.2. es mediante un método desde el origen e inespecificado y evidentemente muy eficiente; el segundo mediante (9.2.3) tomó nueve iteraciones, pero está basado sobre teoría más simple. Los resultados son idénticos.

Podemos continuar la curva en el computador mediante la serie de Taylor

$$N(t + h) = N(t) + hN'(t) + \frac{h^2}{2!} N''(t) + \dots,$$

procediendo paso por paso con  $h = 0,1$  y  $N'(t)$  y  $N''(t)$  tal como se da en (9.3.2) y (9.3.3) más abajo, una técnica que será valiosa para las ecuaciones diferenciales del capítulo 13. Aquí encontramos, comenzando en 1900 y aplicando el teorema de Taylor 700 veces, que en 1970  $N(t)$  tiene el valor 167 570 miles. Esto es verificado directamente mediante el cálculo directo de (9.3.1) con  $t = 170$ , lo cual da 167 571 miles. (Programación hecha por Barbara Heyns, A. Okorafor y K. L. Kohli.)

La concordancia en relación al mundo real después de 1910 ha sido menos satisfactoria. En 1967 la población de los Estados Unidos ya pasaba la marca de los 200 millones, que está por encima de la predicción asintótica mediante la logística.

Demuestre que el punto de inflexión de la logística (9.2.4) ocurre en el momento  $t = (\ln b)/c$ , haciendo uso de (9.3.3), y que en nuestro caso éste está en 1914,5, verificando por consiguiente que la fecha en que la segunda derivada en los resultados impresos por el computador (no reproducido aquí) cambia de signo positivo a negativo. Si se mide el tiempo  $t$  desde este punto, la curva se describe por  $a/(1 + e^{-ct})$ , donde  $a$  y  $c$  tienen valores idénticos a los de (9.2.4).

### 9.3. LA FORMA CASI-LOGISTICA DE LOS NACIMIENTOS EN UNA POBLACION QUE CRECE LOGISTICAMENTE

Cuando en la sección 9.2 ajustábamos mediante mínimos cuadrados la logística a cifras de población de los totales censales de los Estados Unidos desde 1800 a 1910, el resultado era

$$N(t) = \frac{197.30}{1 + 35.60e^{-0.031186t}} \text{ millones} \quad (9.3.1)$$

millones de personas, donde  $t$  está medido en años contados desde 1800. Para aplicar ahora la teoría de (9.1.4) que relaciona  $B(t)$  con  $N(t)$ , supongamos que

las secciones de  $N(t)$  son representables por polinomios. Necesitaremos las derivadas:

$$N'(t) = cN(t) \left[ 1 - \frac{N(t)}{a} \right], \quad (9.3.2)$$

$$N''(t) = c^2 N(t) \left[ 1 - \frac{N(t)}{a} \right] \left[ 1 - \frac{2N(t)}{a} \right]. \quad (9.3.3)$$

Como un ejemplo considere 1900 cuando  $N(t)$  era 76,642 millones (cuadro 9.1). Reemplazando esto junto con  $c = 0,031186$  y  $a = 197,30$  en (9.3.3) se obtiene  $N''(t) = 0,01017$ . Si conjeturamos para los Estados Unidos, en el período anterior a 1900,  $\bar{e}_0 = \bar{L}_0 = 50$  años,  $\bar{\mu} = \bar{L}_1/\bar{L}_0 = 35$ , y  $\bar{\sigma}^2 = \bar{L}_2/\bar{L}_0 - (\bar{L}_1/\bar{L}_0)^2 = 450$ , entonces según (9.1.13), los nacimientos de  $\bar{\mu} = 35$  años antes (1865) habían sido

$$\begin{aligned} B(1865) &= \frac{N(1900)}{50} - \frac{450}{(2)(50)} N''(1900) \\ &= 1.533 - 0.046 = 1.487 \text{ millones.} \end{aligned}$$

El primer término,  $N(1900)/50$  es la componente logística. En este punto los nacimientos eran sólo 0,046 millones, o sea, 3 por ciento bajo una curva logística con el mismo parámetro que  $N(t)$  excepto que  $a = 197,30/50$ , o sea, 3,95 millones. Una vez que se ha pasado el punto medio de la logística, en el cual,  $N(t) = a/2$ , es decir, cerca del año 1914,5 en nuestro ajuste para los Estados Unidos, los nacimientos estarán un poco sobre la logística (Lotka, 1933c, pág. 52) (gráfico 9.1). Demuestre que la mayor discrepancia está donde  $N(t) = (\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/12})a$ .

#### 9.4. LA EXPLOSION DEMOGRAFICA

La extrapolación mediante ajuste indiscriminado de curvas no constituye ni un medio confiable de predicción ni una ayuda para el conocimiento científico. Lo que se desea es un tipo de curva que represente el mecanismo que efectivamente opera, o alguna simplificación de él. Durante un tiempo se pensó que la logística describía tal mecanismo, pero los estudiantes de hoy son escépticos. El modelo de la mosca de la fruta que crece en un jarro ha dado lugar al modelo de una explosión. Simplificando algo lo hecho por von Foerster, Mora y Amiot (1960), ajustamos la hipérbola

$$N(t) = \frac{a}{t_e - t}, \quad t < t_e, \quad (9.4.1)$$

a las cifras de la población mundial (Durand, 1967b, pág. 137),

$$N(1900) = 1\,650 \text{ millones,} \quad N(1950) = 2\,515 \text{ millones,}$$

y determinamos  $t_e$ , la fecha de la explosión demográfica, el año 2045 D.C. (Deduzca una fórmula para hacer con facilidad el cálculo:

$$t_e = \frac{n_2 t_2 - n_1 t_1}{n_2 - n_1},$$

si la población es  $n_1$  en el momento  $t_1$  y  $n_2$  en el momento  $t_2$ ). Dudando, en una materia tan importante, en confiar en un solo cálculo, intentamos nuevamente con una proyección de un alcance mayor:

$$N(1750) = 791 \text{ millones}, \quad N(1950) = 2\,515 \text{ millones}.$$

Esta vez  $t_e = 2\,042$ . El valor de  $t_e$  no se ve afectado mayormente por los años en los que se hace el ajuste. La conclusión mínima que se saca es que la población mundial se alejará de su presente tendencia durante los próximos 75 años si realmente la tendencia es la hipérbola (9.4.1).

El grado en que una proyección depende de la curva seleccionada está sugerido en el gráfico 9.1, basado en los totales de los censos de Estados Unidos hasta 1910 en el cuadro 9.1. La logística mínima cuadrática se desplaza hacia una asíntota de 197 millones, en tanto que la hipérbola que pasa por 1850 y 1900 se va a infinito en 1923. Podríamos difícilmente esperar que alguna sirviera como una predicción concreta, debido a que ninguna tiene una forma que tome cuenta adecuada de los mecanismos que están en juego. La predicción es más difícil que el ajuste de una curva, y, como lo dijimos en el capítulo 4, implica elementos de conducta humana y cambio social que están más allá del alcance de este libro.

El propósito principal al introducir la hipérbola es demostrar que, al igual que para el ajuste logístico, los nacimientos seguirán aproximadamente la curva si la población lo hace. Reemplazando (9.4.1) en (9.1.14) se obtiene la trayectoria de los nacimientos

$$B(t) \doteq \frac{1}{\bar{L}_0} \left( \frac{a}{t_e - \bar{\mu} - t} \right) \left[ 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{(t_e - \bar{\mu} - t)^2} \right], \quad (9.4.2)$$

donde nuevamente  $\bar{\mu}$  y  $\bar{\sigma}^2$  son la media y la varianza del número de sobrevivientes de la tabla de vida. La expresión para  $B(t)$  no tiene significado para  $t \geq t_e - \bar{\mu}$ . En épocas considerablemente anteriores a  $t_e - \bar{\mu}$ , el segundo término en los corchetes de (9.4.2) es pequeño y positivo, y  $B(t)$  es menor que  $[1/\bar{L}_0][a/(t_e - \bar{\mu} - t)]$  en una cantidad que aumenta hasta  $t = t_e - \bar{\mu} - \bar{\sigma}\sqrt{3}$ . Demuestre que con  $\bar{\mu} = 35$  y  $\bar{\sigma}^2 = 400$ , para  $t < t_e - 3\bar{\mu}$  la curva de los nacimientos estará en menos de 10 por ciento por debajo de la hipérbola

$$\frac{1}{\bar{L}_0} \left( \frac{a}{t_e - \bar{\mu} - t} \right) = \frac{N(t - \bar{\mu})}{\dot{e}_0}.$$

Demuestre para el modelo (9.4.1) que con  $t > t_e - 20$  el crecimiento de la población excede el 5 por ciento por año a que la especie humana está limitada fisiológicamente.

Resumiendo los resultados para curvas particulares: encontrábamos que el crecimiento demográfico lineal o exponencial implica una curva de los nacimientos de idéntica forma; una logística o una hipérbola para una población implica una forma similar para los nacimientos excepto cerca de las partes donde la hipérbola se aleja hacia infinito.

Utilice (9.1.14) para decir cuál es la función de crecimiento más general para la que los nacimientos tendrán una forma similar a la población.

IV Parte

TECNICAS NUMERICAS



## INTERPOLACION Y AJUSTE

La interpolación y los demás métodos numéricos a que ella conduce son necesarios muy a menudo en el trabajo demográfico, y la literatura sobre el particular es extensa e intrincada (Wolfenden, 1954; págs. 134-166). Este capítulo es un intento de condensación, tanto como sea posible, en un solo procedimiento general expresado mediante determinantes. Una vez que se ha ideado un programa para evaluar determinantes, no se requiere programación adicional para la interpolación, ajuste y la diferenciación e integración numéricas usadas en demografía. Se puede encontrar una completa discusión sobre el tema en Nörlund (1924), cuyo enfoque seguiremos aquí.

## 10.1. INTERPOLACION LINEAL

Un caso simple nos permite presentar el procedimiento que se aplicará en lo que sigue. Al leer una tabla de logaritmos uno aplica intuitivamente el método de la llamada regla de posición falsa; corresponde a dibujar en un gráfico una recta entre los dos puntos conocidos. Suponga que conocemos los valores  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = f(x_2)$  para  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente, y quisiéramos tener el valor de la función interpolatriz  $f(x)$  para algún punto  $x$  intermedio o adyacente. Entonces, si es apropiada una recta del tipo  $y = f(x) = Ax + B$ , las condiciones sobre el punto arbitrario  $[x, f(x)]$  y los puntos dados  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son

$$Ax + B - f(x) = 0, \quad Ax_1 + B - y_1 = 0, \quad Ax_2 + B - y_2 = 0. \quad (10.1.1)$$

Las tres ecuaciones serán consistentes entre sí en caso de que

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -f(x) \\ x_1 & 1 & -y_1 \\ x_2 & 1 & -y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (10.1.2)$$

donde todas las cantidades en la segunda y tercera fila son conocidas y  $A$  y  $B$  han sido eliminadas (Muir, 1960, pág. 13). Resolviendo (10.1.2) obtenemos el valor de  $f(x)$  correspondiente a un  $x$  arbitrario:

$$f(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & -y_1 \\ x_2 & 1 & -y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}} = \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}. \quad (10.1.3)$$

Para llevar (10.1.2) o (10.1.3) a la forma de diferencias divididas, conveniente cuando se usa una calculadora de escritorio, cambie signos en la última columna, reste la segunda fila de la tercera,

$$\begin{vmatrix} x & 1 & f(x) \\ x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 - x_1 & 0 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

y divida la nueva tercera fila por  $x_2 - x_1$ :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & f(x) \\ x_1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{vmatrix} = 0.$$

El elemento en la parte inferior derecha es

$$[y_1, y_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

una diferencia dividida que se puede calcular fácilmente a partir de las observaciones o de otros valores tabulares. Desarrollando el determinante por la tercera columna obtenemos

$$f(x) = y_1 + (x - x_1)[y_1, y_2]. \quad (10.1.4)$$

Se pide al lector no familiarizado con diferencias divididas que use (10.1.4) para interpolar  $l_{40}$  en base a  $l_{35} = 92\,991$  y  $l_{50} = 86\,204$ . Puede verificar su respuesta escribiendo y evaluando un determinante de la forma de (10.1.2). La tabla de vida da  $l_{40} = 91\,601$ . ¿Por qué la interpolación es imprecisa y en dirección a subestimar? (Datos para los hombres de los Estados Unidos, 1964, dados en el cuadro 1.3.)

## 10.2. EXPRESIONES PARA INTERPOLACION POLINOMICA MEDIANTE DETERMINANTES

La ventaja de los determinantes se hace evidente en las diversas direcciones de generalización de la regla de la recta. Si tenemos tres puntos, no necesariamente equiespaciados, y deseamos interpolar con una cuadrática, por ejemplo:  $Ax^2 + Bx + C$ , entonces, la condición bajo la cual las cuatro ecuaciones lineales en las constantes,

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C - f(x) &= 0, \\ Ax_1^2 + Bx_1 + C - y_1 &= 0, \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C - y_2 &= 0, \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C - y_3 &= 0, \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

son consistentes, es

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & f(x) \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.2.2)$$



de lo cual

$$f(x) = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & 0 \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \quad (10.2.3)$$

Verificamos que (10.2.2) y (10.2.3) pasan por  $(x_1, y_1)$  haciendo  $x = x_1$  y desarrollando el determinante por la cuarta columna, nada queda de (10.2.3) excepto  $f(x_1) = y_1$ . De la misma manera se verifica que se cumplen las demás condiciones. La extensión a  $n$  valores dados toma la forma de un determinante  $(n+1) \times (n+1)$  ajustando una curva de grado  $n-1$ .

Para estar seguros de que la ecuación en determinantes (10.2.2) es lo mismo que la fórmula de la diferencia dividida de Newton, primero restamos la tercera fila de la cuarta y dividimos la nueva cuarta fila por  $x_3 - x_2$ ; a continuación restamos la segunda fila de la tercera y dividimos la nueva tercera fila por  $x_2 - x_1$ . Finalmente, restamos la tercera, tal como está, de la cuarta y dividimos por  $x_3 - x_1$ , escribiendo

$$[y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_2, y_3] - [y_1, y_2]}{x_3 - x_1}.$$

El resultado es

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & f(x) \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_1 + x_2 & 1 & 0 & [y_1, y_2] \\ 1 & 0 & 0 & [y_1, y_2, y_3] \end{vmatrix} = 0, \quad (10.2.4)$$

el cual, al ser desarrollado por su última columna es

$$f(x) = y_1 + (x - x_1)[y_1, y_2] + (x - x_1)(x - x_2)[y_1, y_2, y_3].$$

La fórmula de Waring-Lagrange para un polinomio que pasa por  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  es

$$f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3. \quad (10.2.5)$$

Demuestre que esto es idéntico a (10.2.3), factorizando el determinante de Vandermonde de (10.2.3) tal como se hizo con un propósito bastante diferente en (8.2.8) para (8.1.16). El resultado se puede extender a la interpolación polinómica entre  $n$  puntos (Hildebrand, 1956, pág. 60).

Se puede mostrar la precisión de la interpolación cuadrática, determinando  $r$  para las mujeres holandesas, 1965, usando los valores calculados para  $\psi(r)$  en el cuadro 5.1. Se podría usar como  $y$  de (10.2.5) la función  $\psi(r)$ , y  $x$  sería

entonces  $r$ , pero esto requeriría que se resolviera una cuadrática para  $\psi(r) = 1$ . Se evita la cuadrática usando  $r$  por el  $y$  de (10.2.5) y  $\psi(r)$  por  $x$ . Si  $y_1 = 0,010$ ,  $y_2 = 0,012$ ,  $y_3 = 0,014$ , y  $x_1 = \psi(0,010)$ ,  $x_2 = \psi(0,012)$ ,  $x_3 = \psi(0,014)$ , entonces, las cantidades requeridas se obtienen del cuadro 5.1 en la forma

$$\begin{aligned}x - x_1 &= 1.00000 - 1.07474 = -0.07474, \\x - x_2 &= 1.00000 - 1.01499 = -0.01499, \\x - x_3 &= 1.00000 - 0.95870 = 0.04130, \\x_1 - x_2 &= 1.07474 - 1.01499 = 0.05975, \\x_2 - x_3 &= 1.01499 - 0.95870 = 0.05629, \\x_3 - x_1 &= 0.95870 - 1.07474 = -0.11604,\end{aligned}$$

y (10.2.5) es

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{(-0.01499)(0.04130)}{(0.05975)(0.11604)}(0.010) + \frac{(0.04130)(-0.07474)}{(0.05629)(-0.05975)}(0.012) \\&\quad + \frac{(-0.07474)(-0.01499)}{(-0.11604)(-0.05629)}(0.014) \\&= (-0.089290)(0.010) + (0.917770)(0.012) + (0.171520)(0.014) \\&= 0.0125216,\end{aligned}$$

lo cual concuerda con la raíz dominante calculada mediante la solución algebraica de  $\psi(r) = 1$ , con exactitud hasta el séptimo lugar. (Los decimales que en otras circunstancias serían superfluos, ayudan a evaluar la precisión de la interpolación.) La función lineal (10.1.3) expresada bajo la forma de Lagrange es

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}\right)y_2 + \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right)y_3 \\&= \left(\frac{0.04130}{0.05629}\right)0.012 + \left(\frac{-0.01499}{-0.05629}\right)0.014 \\&= 0.0125325,\end{aligned}$$

que es correcta sólo hasta cuatro lugares decimales.

### Aplicación a la diferenciación

Si no estamos interesados en evaluar una función para algún punto intermedio entre valores tabulados, sino en determinar su derivada, sólo necesitamos diferenciar la fila superior, elemento por elemento, en un determinante tal como el de (10.2.2). El resultado es

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & f'(x) \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (10.2.6)$$

que se puede resolver fácilmente para  $f'(x)$ , reduciendo la solución a

$$f'(x) = [y_1, y_2] + (2x - x_1 - x_2)[y_1, y_2, y_3], \quad (10.2.7)$$

en términos de diferencias divididas. Verifique esto mediante diferenciación de (10.2.4).

Con los datos del cuadro 5.1 para las mujeres de Holanda, 1965, la derivada según (10.2.7) en  $\psi(r) = 1$  (esto es, para la raíz real  $r = 0,01252$ ) es  $-28,54$ , lo que concuerda dentro de uno en el segundo lugar decimal, con el negativo de la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estacionaria cuando se la calcula directamente. La igualdad de  $-\psi'(r)$  y  $A_r$  fue observada en conexión con (5.2.23) y (5.6.8).

La diferenciación numérica se necesita para averiguar  $\mu_x$ , la tasa instantánea de mortalidad a la edad  $x$ , definida como

$$\mu_x = -\frac{1}{l(x)} \left( \frac{dl(x)}{dx} \right).$$

Si nos dan sucesivos valores quinquenales de  $l(x)$ , como ser  $l_{a-5}$ ,  $l_a$ ,  $l_{a+5}$ , entonces, sustituyendo éstos en (10.2.6) y multiplicando por  $1/l_x$  tenemos, después de una reducción,

$$\mu_x = \frac{1}{l_x} \left[ \frac{{}_5d_{a-5}}{5} + \frac{2(x-a)+5}{50} ({}_5d_a - {}_5d_{a-5}) \right], \quad (10.2.8)$$

la cual, para el caso restringido en que  $a = x$ , se reduce a

$$\mu_a = \frac{0.1}{l_a} ({}_5d_{a-5} + {}_5d_a).$$

En este caso, cuatro puntos dan

$$\mu_a = \frac{1}{5l_a} \left( \frac{l_{a-5}}{3} + \frac{l_a}{2} - l_{a+5} + \frac{l_{a+10}}{6} \right). \quad (10.2.9)$$

Con los datos del cuadro 1.3 verifique que  $\mu_{50}$  es 0,009685, basado en (10.2.8) y 0,009510 basado en (10.2.9). Intuitivamente,  $\mu_{50}$  debiera estar cerca del promedio de las tasas centrales de mortalidad en 45-49 y 50-54, y esto es  $\mu_{50} = 0,5(m_{45} + m_{50}) = 0,009776$ , o sea aproximadamente un 3 por ciento sobre (10.2.9), que es el método preferido.

Las derivadas de orden superior no implican una nueva técnica. Si se ajusta un polinomio de grado  $n$  a  $n+1$  puntos, entonces, la derivada  $n$ ésima, que será una constante, se estima mediante la  $n$ ésima diferencia dividida  $f^{(n)}(x) = n! [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}]$ , que es lo mismo que

$$f^{(n)}(x) = n! [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}] = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & 1 & y_1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n-2} & \dots & 1 & y_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}}. \quad (10.2.10)$$

Para ver que la  $n$ ésima derivada está dada por (10.2.10), consideremos la curva  $f(x)$  de grado  $n$  que pasa por  $n + 1$  puntos, definida por

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \dots & 1 & f(x) \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & 1 & y_{n+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (10.2.11)$$

Diferencie (10.2.11)  $n$  veces, y a continuación resuelva para  $f^{(n)}(x)$ . El resultado (10.2.10) aparece inmediatamente.

### Integración

La integración de una parte de la función que pasa por el conjunto de puntos dados, sigue el mismo principio. La integración del determinante (10.2.2) sólo requiere que su fila superior sea reemplazada por integrales. Esto es igualmente cierto tanto para integrales indefinidas como para definidas. En este último caso, la integral de la función que interpola entre  $a$  y  $b$ ,  $\int_a^b f(x) dx$ , está dada por la ecuación

$$\begin{vmatrix} \frac{b^3 - a^3}{3} & \frac{b^2 - a^2}{2} & b - a & \int_a^b f(x) dx \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (10.2.12)$$

de la cual,  $\int_a^b f(x) dx$  emerge como la razón de los determinantes. Si hacemos  $a = x_1 = 0$ ,  $x_2 = h$ ,  $b = x_3 = 2h$ , entonces (10.2.12), después de simplificar, se convierte en

$$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_1 + 4y_2 + y_3], \quad (10.2.13)$$

que es la regla de Simpson.

Para completar los valores del cuadro 6.4 se requirieron integrales. Por ejemplo, para Canadá, 1965, se puede obtener la integral del ajuste de una curva exponencial de Hadwiger para el intervalo de edades 25-29 mediante la aplicación de (10.2.13) en subintervalos de 1 año, lo que requiere 11 valores de la ordenada para cada intervalo quinquenal de edad. Para las edades 25-29 en el último cumpleaños, el cálculo en términos de  $\phi_1(x)$  de (6.4.1) es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}[\phi_1(25) + 4\phi_1(25.5) + 2\phi_1(26) + 4\phi_1(26.5) + \dots + \phi_1(30)] \\ &= \frac{1}{8}[0.10233 + 4(0.10328) + 2(0.10340) + 4(0.10273) \\ & \quad + 2(0.10133) + 4(0.09927) + 2(0.09663) \\ & \quad + 4(0.09348) + 2(0.08992) + 4(0.08603) \\ & \quad + 0.08188] = 0.4843, \end{aligned}$$

verificando los primeros cuatro lugares decimales impresos para este grupo de edad en la tercera columna del cuadro 6.4. En realidad, el cuadro 6.4 se calculó mediante la fórmula Gaussiana (10.4.6), que es más precisa.

Otro ejemplo es la obtención de  ${}_5L_x = \int_0^5 l(x+t) dt$  en base a cuatro valores de  $l_x$  separados por intervalos quinquenales de edad. El lector puede escribir la ecuación en determinantes y demostrar que se reduce a

$${}_5L_x = \frac{5}{2}(l_x + l_{x+5}) + \frac{5}{24}({}_5d_{x+5} - {}_5d_{x-5}), \quad (10.2.14)$$

ya usado para estimar  ${}_5L_x$  en el cuadro 1.3. Para  ${}_5L_{60}$ , el primer término de (10.2.14) es  $\frac{5}{2}(l_{60} + l_{65}) = 344\,895$ , y el segundo término  $\frac{5}{24}({}_5d_{65} - {}_5d_{55}) = 1\,052$ , que sumados sólo difiere en uno del  ${}_5L_{60}$  mostrado.

### Funciones trascendentes

Los determinantes expresan de manera igualmente satisfactoria el ajuste de expresiones que son combinaciones lineales de términos trascendentes. Las exponenciales y demás funciones que no pueden tomar valores negativos son frecuentemente preferibles a los polinomios. Suponga que deseamos ajustar la función de interpolación  $y = Ae^x + Bx^2 + C = f(x)$  a tres puntos. Entonces, eliminando las constantes como lo hicimos antes, obtenemos la ecuación para  $f(x)$ ,

$$\begin{vmatrix} e^x & x^2 & 1 & f(x) \\ e^{x_1} & x_1^2 & 1 & y_1 \\ e^{x_2} & x_2^2 & 1 & y_2 \\ e^{x_3} & x_3^2 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.2.15)$$

La única condición es que no se anule el determinante que multiplica a  $f(x)$  en el desarrollo de (10.2.15).

### Datos dados como áreas y no como puntos

Hasta aquí la discusión se ha referido a la interpolación entre puntos. Los datos típicos en demografía no son puntos sino áreas bajo una curva: la población sobre 45 y bajo 50 años de edad, por ejemplo. Tales datos se pueden transformar de modo que representen puntos mediante la acumulación de ellos, lo que equivale a decir, tratar con  $F(x_1) = \int_0^{x_1} f(x) dx$ , donde  $F(x_1)$  es el total de la frecuencia hasta  $x_1$ . Después que mediante interpolación o ajuste se haya determinado  $F(x)$ , podemos diferenciar ésta para obtener  $f(x) = F'(x)$ . Si, como es más probable, necesitamos el total de la distribución ubicado entre  $x$  y  $x+1$ ,  $\int_x^{x+1} f(a) da$ , la obtenemos por sustracción, como

$$\int_x^{x+1} f(a) da = F(x+1) - F(x). \quad (10.2.16)$$

### Funciones de dos variables independientes

Lo que se ha expuesto hasta aquí puede extenderse a funciones de más de una variable, lo que es útil en el trabajo demográfico sobre nacimientos por edad y

paridez (sección 13.5), o la superficie del número de sobrevivientes según tiempo y edad, del diagrama de Lexis (gráfico 5.1). Para determinar  $z = f(x, y)$ , donde sabemos que  $z_1 = f(x_1, y_1)$ ,  $z_2 = f(x_2, y_2)$ ,  $z_3 = f(x_3, y_3)$  y asumiendo linealidad, hacemos  $z = Ay + Bx + C$ , y tenemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= Ay + Bx + C, \\ z_1 &= Ay_1 + Bx_1 + C, \\ z_2 &= Ay_2 + Bx_2 + C, \\ z_3 &= Ay_3 + Bx_3 + C, \end{aligned}$$

de modo que la ecuación para  $f(x, y)$  es

$$\begin{vmatrix} f(x, y) & y & x & 1 \\ z_1 & y_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & y_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se puede tratar en forma similar a las funciones lineales de  $x$  e  $y$ , siempre que, como antes, sean lineales en las constantes a ser determinadas o eliminadas.

### Interpolación osculatoria

Se llaman fórmulas osculatorias aquellas que implican condiciones sobre las derivadas de una función como también sobre sus valores. El ajuste osculatorio usual no es una única expresión que se aplique a toda la distribución, sino lo que le seguiría en calidad: un conjunto de arcos que se encuentran entre sí y que son continuos debido a que tienen tangentes comunes en sus puntos de contacto. Se recomiendan los tratamientos de Miller (1949) y Greville (1944b) para un enfoque sistemático del tema.

Al aplicar determinantes para la construcción de fórmulas osculatorias, algunas filas representarán derivadas. Suponga que deseamos la interpolatriz

$$y = f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

tome los valores dados  $y_2 = f(x_2)$  e  $y_3 = f(x_3)$ , y tenga la misma derivada en  $x_2$  que la ecuación de segundo grado que pasa por  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ . Las cuatro constantes satisfarán las cuatro condiciones si se verifican simultáneamente las siguientes cinco ecuaciones

$$\begin{aligned} f(x) &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \\ y_2 &= f(x_2) = A + Bx_2 + Cx_2^2 + Dx_2^3, \\ y_3 &= f(x_3) = A + Bx_3 + Cx_3^2 + Dx_3^3, \\ y'_2 &= f'(x_2) = B + 2Cx_2 + 3Dx_2^2, \\ y'_3 &= f'(x_3) = B + 2Cx_3 + 3Dx_3^2, \end{aligned} \tag{10.2.17}$$

donde  $y'_2$  es la derivada en  $x_2$  de la ecuación de segundo grado que pasa por  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , y similarmente para  $y'_3$ . Si la función interpolatriz  $f_1(x)$ , cuadrá-

tica pasa por  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , entonces

$$f(x) = f_1(x_1) + (x - x_1)[y_1, y_2] + (x - x_1)(x - x_2)[y_1, y_2, y_3],$$

y ya sea a partir de esto o de (10.2.7),

$$f_1(x_2) = [y_1, y_2] + (x_2 - x_1)[y_1, y_2, y_3],$$

que se usa para reemplazar  $f(x_2)$  en (10.2.17). De manera similar, la curva que pasa por  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$  da  $f(x_3)$ . La condición para que el sistema (10.2.17) tenga solución se puede por tanto escribir

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ [y_1, y_2] + (x_2 - x_1)[y_1, y_2, y_3] & 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \\ [y_2, y_3] + (x_3 - x_2)[y_2, y_3, y_4] & 0 & 1 & 2x_3 & 3x_3^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (10.2.18)$$

que da  $f(x)$  como la razón de dos determinantes.

Si se da el valor de una función y los de sus primeras tres derivadas en un punto  $(x_1, y_1)$ , entonces podemos asegurar que la curva

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

las reproduce, escribiendo un conjunto de ecuaciones análogo a (10.2.17). La condición de consistencia de estas ecuaciones es

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & f'(x_1) \\ 0 & 0 & 1 & 3x_1 & \frac{f''(x_1)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{f'''(x_1)}{3!} \end{vmatrix} = 0, \quad (10.2.19)$$

que, al ser desarrollada por la última columna, es

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2!}f''(x_1) + \frac{(x - x_1)^3}{3!}f'''(x_1). \quad (10.2.20)$$

Esto se debe a que el determinante  $1 \times 1$  del extremo superior izquierdo de (10.2.19) es 1, el de  $2 \times 2$  es  $-(x - x_1)$ , el de  $3 \times 3$  es  $(x - x_1)^2$ , el de  $4 \times 4$  es  $-(x - x_1)^3$ , y éstos son los coeficientes en el desarrollo por la última columna. La ecuación (10.2.20) es idéntica a los primeros cuatro términos de la serie de Taylor,

Sin embargo, el procedimiento es más general que la forma corriente de la serie de Taylor, al ser fácilmente extendible para incluir como dados también otros puntos y derivadas. Si se dispone de dos puntos, para cada uno de los cuales se conoce el valor de la función y su primera derivada, y en uno de ellos

se conoce también la segunda, entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 & f'(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & f(x_2) \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 & f'(x_2) \\ 0 & 0 & 1 & 3x_2 & 6x_2^2 & \frac{f''(x_2)}{2!} \end{vmatrix} = 0. \quad (10.2.21)$$

La extensión para una mayor cantidad de puntos y derivadas de orden superior es inmediata. Ni siquiera es necesario que se den las derivadas en forma explícita. Si, como es común, ellas se deben inferir de las observaciones, entonces, todo lo que necesitamos es sustituir una expresión para las derivadas en términos de las observaciones. Una tal expresión para  $f'(x_1)$  está incorporada en (10.2.18), y de manera similar,  $f'(x_2)$ , etc., se pueden sustituir en (10.2.19) o (10.2.21). Los determinantes dentro de determinantes no ofrecen mayor dificultad de computación.

Una manera más directa para deducir resultados, tal como (10.2.21), consiste en comenzar con puntos arbitrarios distintos  $(x_i, y_i)$ , como antes, y a continuación suponer que algunos de éstos coinciden. Una ecuación  $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$  se ajusta a distintos puntos  $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, 5$ , resolviendo respecto a  $f(x)$  en

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & y_1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & y_3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & y_2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 & y_4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 & y_5 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.2.22)$$

El valor límite de (10.2.22) dividido por  $x_3 - x_1$ , cuando  $x_3$  tiende a  $x_1$ , y luego dividido por  $(x_5 - x_4)(x_5 - x_2)(x_4 - x_2)$  cuando  $x_4$  y  $x_5$  tienden a  $x_2$ , se encontrará que es igual a (10.2.21)

### 10.3. EXPRESIONES MATRICIALES PARA LA INTERPOLACION POLINOMIAL

La ecuación (10.2.22), o cualquiera de las demás fórmulas de interpolación de este capítulo, se puede desarrollar por los elementos de su última columna en la forma

$$\Delta_{1n} f(x) - \Delta_{2n} y_1 + \Delta_{3n} y_2 - \dots + (-1)^{n-1} \Delta_{nn} y_{n-1} = 0,$$

o

$$f(x) = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{1n}} y_1 - \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_{1n}} y_2 + \dots + \frac{(-1)^n \Delta_{nn}}{\Delta_{1n}} y_{n-1},$$

donde  $\Delta_{1n}$  es el determinante menor  $(n-1) \times (n-1)$  de (10.2.22), obtenido al suprimir en éste, la primera fila y  $n$ ésima columna y análogamente para los demás  $\Delta_{in}$ . Los  $\Delta$  dependen sólo de  $x$  y  $x_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ . Si éstos son



**CUADRO 10.1**  
**MULTIPLICADORES CENTRALES DE SPRAGUE, GREVILLE Y BEERS**  
**EN FORMA DE UNA MATRIZ A, MOSTRANDO  $A_5 V_{20} = 1 V_{20}$**

SPRAGUE

$$\begin{bmatrix} -0.0128 & +0.0848 & +0.1504 & -0.0240 & +0.0016 \\ -0.0016 & +0.0144 & +0.2224 & -0.0416 & +0.0064 \\ +0.0064 & -0.0336 & +0.2544 & -0.0336 & +0.0064 \\ +0.0064 & -0.0416 & +0.2224 & +0.0144 & -0.0016 \\ +0.0016 & -0.0240 & +0.1504 & +0.0848 & -0.0128 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 5K_{20} \\ 5K_{25} \\ 5K_{30} \\ 5K_{35} \\ 5K_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1K_{30} \\ 1K_{31} \\ 1K_{32} \\ 1K_{33} \\ 1K_{34} \end{Bmatrix}$$

GREVILLE

$$\begin{bmatrix} -0.0117 & +0.0804 & +0.1570 & -0.0284 & +0.0027 \\ -0.0019 & +0.0156 & +0.2206 & -0.0404 & +0.0061 \\ +0.0048 & -0.0272 & +0.2448 & -0.0272 & +0.0048 \\ +0.0061 & -0.0404 & +0.2206 & +0.0156 & -0.0019 \\ +0.0027 & -0.0284 & +0.1570 & +0.0804 & -0.0117 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 5K_{20} \\ 5K_{25} \\ 5K_{30} \\ 5K_{35} \\ 5K_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1K_{30} \\ 1K_{31} \\ 1K_{32} \\ 1K_{33} \\ 1K_{34} \end{Bmatrix}$$

BEERS

$$\begin{bmatrix} -0.0117 & +0.0804 & +0.1570 & -0.0284 & +0.0027 \\ -0.0020 & +0.0160 & +0.2200 & -0.0400 & +0.0060 \\ +0.0050 & -0.0280 & +0.2460 & -0.0280 & +0.0050 \\ +0.0060 & -0.0400 & +0.2200 & +0.0160 & -0.0020 \\ +0.0027 & -0.0284 & +0.1570 & +0.0804 & -0.0117 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 5K_{20} \\ 5K_{25} \\ 5K_{30} \\ 5K_{35} \\ 5K_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1K_{30} \\ 1K_{31} \\ 1K_{32} \\ 1K_{33} \\ 1K_{34} \end{Bmatrix}$$

equidistantes, los mismos reaparecerán en diferentes problemas, por lo que vale la pena emprender su tabulación de una vez por todas. Tales razones,  $\Delta_{1n}/\Delta_{1n}$ , tomadas con el signo apropiado, se denominan *multiplicadores*. En su aplicación más común no se referirán a puntos sino a áreas, y se usarán sobre  $F(x+5) - F(x)$  para producir el  $F(x+1) - F(x)$  de (10.2.16). Los ejemplos del cuadro 10.1 son los multiplicadores que llevan el nombre de los actuarios Sprague, Greville y Beers, que satisfacen variantes de las condiciones incorporadas en (10.2.21) y considerados, cada uno, como un arreglo **A**.

La premultiplicación del vector de cinco grupos quinquenales de edad consecutivos, por ejemplo  $\{{}_5V_{20}\}$ , por **A**, da cinco años simples de edad consecutivos, por ejemplo  $\{{}_1V_{30}\}$ . Basado en la definición de los vectores de 5 elementos,

$$\{{}_5V_{20}\} = \begin{Bmatrix} {}_5K_{20} \\ {}_5K_{25} \\ {}_5K_{30} \\ {}_5K_{35} \\ {}_5K_{40} \end{Bmatrix}, \quad \{{}_1V_{30}\} = \begin{Bmatrix} {}_1K_{30} \\ {}_1K_{31} \\ {}_1K_{32} \\ {}_1K_{33} \\ {}_1K_{34} \end{Bmatrix}, \quad \{{}_{0.2}V_{32}\} = \begin{Bmatrix} {}_{0.2}K_{32.0} \\ {}_{0.2}K_{32.2} \\ {}_{0.2}K_{32.4} \\ {}_{0.2}K_{32.6} \\ {}_{0.2}K_{32.8} \end{Bmatrix}, \dots \quad (10.3.1)$$

la aplicación reiterada de **A** da

$$A\{{}_5V_{20}\} = \{{}_1V_{30}\}, \quad A^2\{{}_5V_{20}\} = \{{}_{0.2}V_{32}\}, \quad A^3\{{}_5V_{20}\} = \{{}_{0.04}V_{32.4}\}, \quad \text{etc.};$$

$A^3\{V\}$  da resultados en intervalos de  $1/25$  avo de año.

El cuadro 10.2 muestra la operación de los tres conjuntos de multiplicadores sobre la población masculina de edades 10-14, 15-19, ..., 30-34, a fin de estimar la población por años simples de edad para el grupo 20-24 y también por quintos de un año de edad. El lector puede verificar algunos de los valores en una calculadora de escritorio, dadas las siguientes estimaciones para los hombres de los Estados Unidos, 1963, omitiendo a las fuerzas armadas fuera del país:

$${}_5K_{10} = 9170, \quad {}_5K_{15} = 7892, \\ {}_5K_{20} = 6331, \quad {}_5K_{25} = 5453, \quad {}_5K_{30} = 5625.$$

Este enfoque para el uso de los multiplicadores matriciales para interpolación aplica sucesivamente un número limitado de fórmulas muy conocidas. Usando una técnica conocida como graduación bayesiana, Kimeldorf y Jones (1967) proporcionan formas de obtención de la matriz de graduación que satisfarán conjuntos más extensos de condiciones.

## 10.4. TOPICOS EN LA CONSTRUCCION DE LA TABLA DE VIDA

### Aplicación reiterada de la matriz

Para construir una tabla de vida, los multiplicadores se pueden aplicar una, dos, o tres veces, en sucesión. Se recomienda dos veces, a fin de obtener intervalos de un quinto de año para  $K_x$  y  $D_x$ . Se puede suponer que  ${}_{0.2}m_x$  es lo mismo que  ${}_{0.2}M_x = {}_{0.2}D_x / {}_{0.2}K_x$ ; entonces

$$\begin{aligned} {}_{0.2}q_x &= \frac{{}_{0.2}m_x}{5 + \frac{1}{2}({}_{0.2}m_x)}, & {}_{0.2}d_x &= (l_x)({}_{0.2}q_x); \\ l_{x+0.2} &= l_x - {}_{0.2}d_x, & {}_{0.2}L_x &= 0.1(l_x + l_{x+0.2}); \\ T_x &= T_{x+0.2} + {}_{0.2}L_x, & \dot{e}_x &= T_x/l_x. \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

**CUADRO 10.2**  
**INTERPOLACION POR AÑOS SIMPLES Y QUINTOS DE AÑOS. POBLACION**  
**MASCULINA ESTIMADA PARA LOS ESTADOS UNIDOS, 1963\***

Edad	Multiplicadores de Sprague		Multiplicadores de Greville		Multiplicadores de Beers		Beers-Sprague	Beers-Greville
	Un año	½ año	Un año	½ año	Un año	½ año		
20	1,382,176		1,381,517		1,381,517		-659	0
		281,811		281,804		281,803		
		279,138		279,008		279,005		
		276,456		276,253		276,250		
		273,743		273,551		273,552		
21	1,316,142	271,028	1,316,322	270,902	1,316,382	270,907	240	60
		268,360		268,294		268,307		
		265,737		265,727		265,745		
		263,166		263,210		263,228		
		260,660		260,748		260,759		
22	1,256,902	258,220	1,257,861	258,343	1,257,741	258,343	839	-120
		255,834		255,994		255,978		
		253,501		253,707		253,679		
		251,268		251,494		251,461		
		249,155		249,361		249,333		
23	1,207,918	247,145	1,208,098	247,306	1,208,158	247,290	240	60
		245,190		245,303		245,302		
		243,288		243,362		243,374		
		241,482		241,520		241,537		
		239,785		239,781		239,800		
24	1,167,861	238,173	1,167,202	238,131	1,167,202	238,144	-659	0
		236,607		236,550		236,557		
		235,094		235,002		235,003		
		233,586		233,452		233,451		
		232,055		231,886		231,882		
	230,519	230,313	230,309					

\* Programado por Nancy Wang.

**CUADRO 10.3**  
**COMPARACION DE 1000<sub>5</sub>q<sub>x</sub> EN TRES TABLAS DE VIDA INTERPOLADAS**  
**Y UNA TABLA DE VIDA ITERATIVA. MUJERES AUSTRALIANAS, 1963**

	Interpolación a quintos de un año			Tabla de vida iterativa del capítulo 1
	Sprague	Greville	Beers	
1000 <sub>5</sub> q <sub>0</sub>	31.61	31.85	31.79	32.15
1000 <sub>5</sub> q <sub>20</sub>	3.01	2.99	2.99	2.99
1000 <sub>5</sub> q <sub>40</sub>	11.05	11.04	11.04	11.04
1000 <sub>5</sub> q <sub>60</sub>	65.78	65.80	65.80	65.96
1000 <sub>5</sub> q <sub>80</sub>	488.36	487.33	487.49	485.45

La consolidación retroactiva en grupos quinquenales de edad significa *agregar* 25 valores para las columnas  ${}_5d_x$  y  ${}_5L_x$ , etc., *seleccionar* los valores requeridos para las columnas  $l_x$ ,  $T_x$ ,  $e_x$ , y *recalcular* a partir de estos valores agrupados

$${}_5q_x = {}_5d_x/l_x; \quad m_x = {}_5d_x/{}_5L_x.$$

La variación resultante de diferentes conjuntos de multiplicadores (como en los de Sprague, Greville y Beers) se puede determinar sin más cambio en el programa que la sustitución de las matrices alternativas. Se ve en el cuadro 10.3, donde aparecen cuatro variantes de 1000<sub>5</sub>q<sub>x</sub> para las mujeres australianas, 1963, que las diferencias son insignificantes. Los multiplicadores de Sprague dan resultados que están un poco más lejos de la tabla de vida iterativa que los de Greville y Beers. Sin embargo, todas las interpolaciones producen graves errores en la asignación de las muertes entre las edades 0 y 1-4. En el capítulo 1 se usó una hipérbola que lo hace mucho mejor y que se discute abajo.

Para las mismas mujeres australianas, 1963, los valores de  $e_0$  según una interpolación doble a quintos de un año y aplicación de (10.4.1) fueron

Sprague 72,775,      Greville 72,699,      Beers 72,721

lo que podemos comparar con  $e_0 = 72,677$  para la tabla de mortalidad iterativa de la sección 1.2. Observe nuevamente que la estimación mediante los multiplicadores de Sprague permanece algo lejos de las demás graduaciones y de la tabla de vida iterativa.

#### Edades menores de cinco años

Hasta aquí hemos restringido nuestro estudio al ajuste polinómico o exponencial. Para las edades más jóvenes esto no sirve, puesto que en las vecindades de la edad cero la tasa de mortalidad es muy alta y desciende rápidamente. El ajuste de un cociente de polinomios, por ejemplo  $y = (A_1 + A_2x + A_3x^2)/(A_4 + A_5x)$ , puede ser conveniente en esta circunstancia, digamos, para cuatro

puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$ . Multiplicando por  $A_4 + A_5x$  tenemos las cinco ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 + A_2x + A_3x^2 &= A_4y + A_5xy, \\ A_1 + A_2x_1 + A_3x_1^2 &= A_4y_1 + A_5x_1y_1, \\ A_1 + A_2x_2 + A_3x_2^2 &= A_4y_2 + A_5x_2y_2, \\ A_1 + A_2x_3 + A_3x_3^2 &= A_4y_3 + A_5x_3y_3, \\ A_1 + A_2x_4 + A_3x_4^2 &= A_4y_4 + A_5x_4y_4, \end{aligned}$$

y la condición de consistencia es

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y & xy \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Denominemos  $C_1, C_2, C_3, -C_4, -C_5$  a los cofactores de los elementos de la primera fila del determinante, siendo  $(-1)^{j-1} \Delta_{1j}$  el cofactor del  $j$ ésimo elemento si  $\Delta_{1j}$  es el correspondiente menor. En términos de estos cofactores, la ecuación en determinantes es

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 = C_4y + C_5xy,$$

y dividido por  $C_4 + C_5x$ , tenemos

$$y = \frac{C_1 + C_2x + C_3x^2}{C_4 + C_5x}, \quad (10.4.2)$$

que es el ajuste requerido, siendo los  $C$  las  $A$  vistas arriba, una de las cuales puede ser elegida arbitrariamente. La tabla de vida del capítulo I usa esta curva sin el término en  $x^2$ , y ahora probaremos el procedimiento.

Considere la tabla de vida para los Estados Unidos, ambos sexos, para 1962 (como aparece en *Vital Statistics for the United States*, 1962, Vol. II, Sección 5, pág. 8), de la cual se tomaron las cifras que siguen y se expresaron sobre una raíz de 1,00000:

$$\begin{aligned} l_0 &= 1.00000, & {}_1L_0 &= 0.98006, \\ l_1 &= 0.97772, & {}_4L_1 &= 3.90292, \\ l_5 &= 0.97439, & {}_5L_5 &= 4.86645. \\ l_{10} &= 0.97233, \end{aligned}$$

Estos cálculos oficiales están basados sobre datos detallados por edad, y veremos hasta qué punto se ven bien representados por distintas curvas. Una recta entre  $l_0$  y  $l_1$  da una integral para  ${}_1L_0$  que es demasiado alta: 0,98886. Una parábola que pase por  $l_0, l_1$  y  $l_5$  no lo hace mejor: 0,98814. La parábola, además queda bastante lejos de  $l_{10}$ : 1,1632; no sólo carece de insuficiente curvatura entre cero y uno, sino que enseguida se vuelve hacia arriba de una manera tal que no tiene posibilidad de representar conjunto alguno de probabilidades.

El problema consiste en determinar una función cuyas características sean similares a las de la curva de la tabla de vida en esas edades. Una versión de (10.4.2) es

$$l(x) = \frac{ax + b}{x + b}, \quad (10.4.3)$$

cuya integral indefinida es

$$\int l(x) dx = ax + (b - ab) \ln(x + b) + C. \quad (10.4.4)$$

Ajustando mediante la igualación de los valores de la curva y los de la tabla de vida en las edades 1 y 5, se obtienen las constantes

$$b = \frac{5(l_1 - l_5)}{4_+ l_5 - 5l_1}, \quad y \quad a = l_1(1 + b) - b.$$

Para el  $l_1$  y  $l_5$  de los Estados Unidos 1962,  $b = 0,19408$  y  $a = 0,97340$ . La integral desde 0 a 1 por (10.4.4) es  ${}_1L_0 = 0,98277$  (contra el 0,98006 publicado) y de 1 a 4 es  ${}_4L_1 = 3,90118$  (contra 3,90292). El valor de  $l_{10}$  originado por la curva (10.4.3) es 0,97391 (contra 0,97233). Estos resultados son de un orden de magnitud correcto, pero no tan próximos como para desalentar nuevas investigaciones.

Esto permite la verificación de los resultados del cuadro 1.3 para los Estados Unidos, 1964. A partir de  $l_1 = 97\ 285$  y  $l_5 = 96\ 879$  de la última iteración mostrada, determinamos las constantes de (10.4.3)  $a = 0,967578$  y  $b = 0,194184$ . Luego, de (10.4.4), la integral requerida es

$$\begin{aligned} {}_1L_0 &= a + b(1 - a) \ln[(1 + b)/b] \\ &= 0.967578 + (0.194184)(0.032422)(1.8164) \\ &= 0.97901. \end{aligned}$$

En forma similar,  ${}_4L_1$  es 3,87956. Las desviaciones respecto de los valores de  ${}_1L_0$  y  ${}_4L_1$  que aparecen en el cuadro 1.3 se deben a que comenzamos aquí con  $l_1$  y  $l_5$  con cinco cifras significativas, en tanto que el computador usó ocho.

Para determinar la población estable del primer año de vida necesitamos la integral

$$\int_0^1 e^{-rx} l(x) dx = \int_0^1 e^{-rx} \left( \frac{ax + b}{x + b} \right) dx, \quad (10.4.5)$$

y de manera similar para las edades de uno a cuatro. Puesto que  $rx$  es pequeño en este recorrido, podríamos desarrollar  $e^{-rx}$ , por ejemplo hasta  $(rx)^3$ , y obtener una función racional que se pueda integrar sin aproximación. En la práctica, es más simple aplicar la cuadratura Gaussiana (Hildebrand, 1956, pág. 319) directamente a (10.4.5), usando por ejemplo

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.32607(f_{0.33001} + f_{0.66999}) + 0.17393(f_{0.06943} + f_{0.93057}), \quad (10.4.6)$$

o, si el computador es bastante rápido, aprovechar la mayor facilidad de programación de la regla de Simpson (10.2.13), aplicada en intervalos de amplitud igual a 0,1 de año.

En la construcción de la tabla de vida masculina para Singapur con datos de 1962, aparecieron los valores  $l_1 = 96\,907$ ,  $l_5 = 95\,953$ ,  $r = 0,0093$ , en la última iteración. Aplicando (10.4.6) o la regla de Simpson, con un número conveniente de ordenadas en la integral de (1.2.4), demuestre que  ${}_1M'_0 = 0,031832$  y  ${}_4M'_1 = 0,002497$ .

### Ajuste de Makeham

En el trabajo actuarial, a veces se ajustan algunas secciones de la columna  $l(x)$  de la tabla de vida mediante la curva de Makeham:

$$l(x) = l_0 s^x g^{(c^x-1)}, \quad (10.4.7)$$

o el caso especial en que  $s = 1$  debido a Gompertz (Morton D. Miller, 1949, pág. 43; Wolfenden, 1954, pág. 165). Con el advenimiento de los computadores y los métodos derivados, un ajuste mínimo-cuadrático tal como el de capítulo 9 es totalmente factible. Yo no intenté esto, sino que meramente calculé (10.4.7) para un número grande de valores de  $s$ ,  $g$  y  $c$ , y observé que con  $s = 0,998$ ,  $g = 1,001$  y  $c = 1,08$ , el resultado está próximo al  $l_x$  de Inglaterra y Gales, 1960-62, para edades que van desde 20 a 35, en el cuadro 10.4. Tal "ajuste" a cualquier tabla es posible si uno está dispuesto a manejar un volumen suficiente de material impreso por el computador y a inventar medios para encontrar el camino a través de aquél. En esta tabla, el "ajuste" se obtuvo por inspección. Se puede determinar una curva de Makeham de la forma

$$l(x+t) = l_x s^t g^{c^t-1},$$

que pase por  $l_x$ ,  $l_{x+5}$ ,  $l_{x+10}$ ,  $l_{x+15}$ , tomando logaritmos y diferenciando dos veces. La constante  $c$  es

$$c = \left( \frac{\Delta^2 \ln l_{x+5}}{\Delta^2 \ln l_x} \right)^{1/5};$$

desarrolle expresiones para los otros dos parámetros y someta a prueba sus fórmulas infiriendo retroactivamente las constantes de la mencionada curva de Makeham para los valores dados en 20, 25, 30 y 35 en la columna (2) del cuadro 10.4 (Spurgeon, 1932).

CUADRO 10.4

COLUMNA  $l_x$  DE LA TABLA DE VIDA PARA HOMBRES, INGLATERRA Y GALES, 1960-62, Y CURVA DE MAKEHAM SELECCIONADA:  $100\,000(0,998)^x(1,001)^{1,08x-1}$

Edad $x$	$l_x$ mediante el método de la tabla de vida iterativa (1)	Curva de Makeham seleccionada que se adapta a la columna (1) (2)
20	96,286	96,427
25	95,745	95,676
30	95,263	95,028
35	94,682	94,526

**CUADRO 10.5\***  
**TABLA DE VIDA CANADIENSE, SEXO MASCULINO, 1965, AJUSTADA MEDIANTE LA CURVA DE GOMPERTZ  $l_x = 100\,000(1,42795)^{10,993928x-1}$**

Edad	$l_x$ calculada según el método de la tabla de vida iterativa (1)	$l_x$ ajustada mediante la curva de Gompertz para las edades 0, 20 y 40 de la columna (1) (2)
0	100,000	100,000
5	97,126	98,937
10	96,804	97,917
15	96,569	96,938
20	95,997	95,997
25	95,159	95,093
30	94,406	94,225
35	93,623	93,390
40	92,587	92,587
45	90,979	91,815
50	88,463	91,072

\* Programado por Effat Moussa.

¿Cuáles son las ecuaciones que pasan una curva de Gompertz por  $l_0$ ,  $l_{20}$  y  $l_{40}$ ? Comente sobre el ajuste de la curva de Gompertz con  $g = 1,42795$  y  $c = 0,993928$  para los hombres de Canadá, 1965, en el cuadro 10.5. Compárelo con un polinomio que pasa por  $l_0$ ,  $l_{20}$ ,  $l_{40}$ . Si parece mejor la curva de Gompertz, muestre cómo se puede usar para determinar  ${}_5L_x$  a partir de la serie de  $l_x$  a intervalos quinquenales.

#### Datos alternativos sobre exposición en la forma de nacimientos

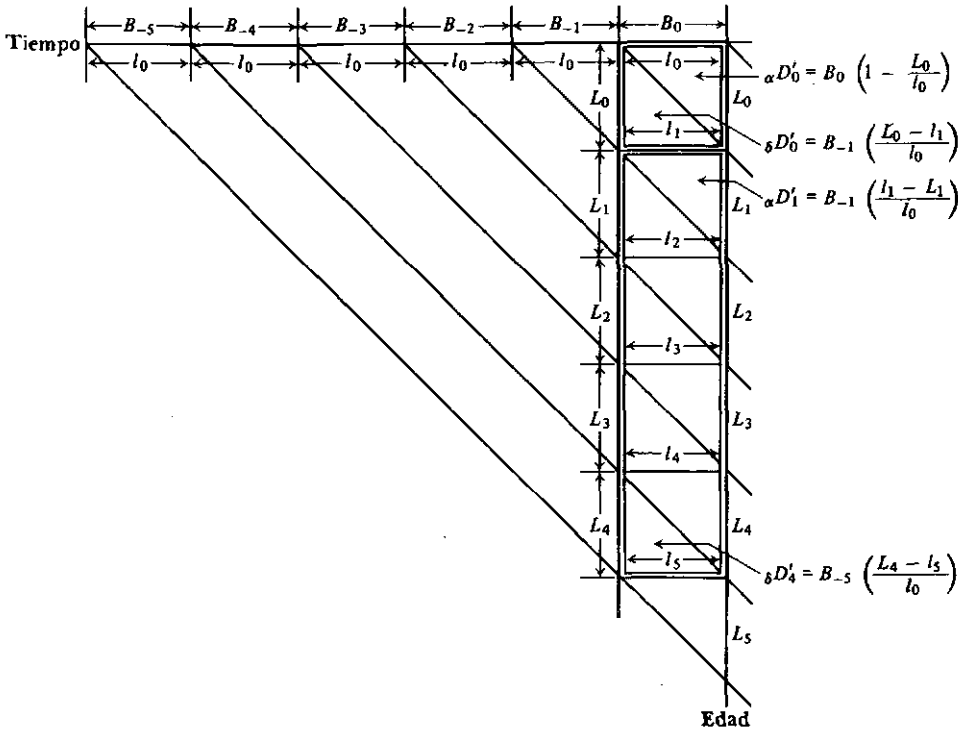
El principio de concordancia con los datos, del que depende la tabla de vida iterativa de la sección 1.2 y la presente sección, se aplica también a las edades más jóvenes de la tabla de vida, cuando los nacimientos del año dado y de los precedentes proporcionan estimaciones de la población expuesta, con frecuencia más precisas que los censos.

Corrientemente los nacimientos vienen dados en años calendarios, tal como las muertes. (Si se dan por mes u otra unidad de tiempo más pequeña, el método es fácilmente adaptado y mejorado.) En el año calendario al que se va a aplicar la tabla de vida, sean  $D_0$  las muertes bajo un año de edad y  ${}_4D_1$  las de uno a cuatro en su último cumpleaños; sean  $B_0$  los nacimientos del año dado,  $B_{-1}$  los del año anterior, ..., hasta  $B_{-5}$ . Esta es toda la información que se supone disponible en lo que sigue.



GRAFICO 10.1

DIAGRAMA DE LEXIS QUE MUESTRA EL CALCULO DE LAS MUERTES ESPERADAS EN LAS EDADES 0 y 1-4 AL ULTIMO CUMPLEAÑOS, DURANTE UN AÑO CALENDARIO, BASADO SOBRE ITERACION PRECEDENTE DE LA TABLA DE VIDA Y NACIMIENTOS DE SEIS AÑOS CALENDARIOS



Consideremos las muertes bajo un año de edad divididas en  ${}_a D'_0$  provenientes de  $B_0$  y en  ${}_\delta D'_0$  provenientes de  $B_{-1}$ . (Una de las ventajas del método es que no se necesitan datos sobre esta división.) Se elige un conjunto inicial arbitrario de valores para  $l_0$ ,  $l_1$  y  $l_5$  de la tabla de vida y mediante la hipérbola (10.4.3) ajustada a través de estos tres números, se obtienen las integrales  ${}_1 L_0$  y  ${}_4 L_1$ . Si, al igual que en el capítulo 1, las primas distinguen las estimaciones hechas en base a la tabla de vida con respecto a las correspondientes observaciones, entonces tenemos  ${}_a D'_0 = B_0(1 - L_0/l_0)$  y  ${}_\delta D'_0 = B_{-1}(L_0 - l_1)/l_0$ , y

$$D'_0 = {}_a D'_0 + {}_\delta D'_0 = B_0 \left(1 - \frac{L_0}{l_0}\right) + B_{-1} \left(\frac{L_0 - l_1}{l_0}\right), \tag{10.4.8}$$

es comparable con  $D_0$ , el número observado de muertes bajo un año de edad. Si  $D'_0$  es mayor (menor) que  $D_0$ , entonces el valor arbitrario  $q_0 = 1 - l_1/l_0$  es demasiado alto (bajo). De allí que se deba ajustar  $q_0$  a  $q_0^*$  mediante

$$q_0^* = \left(1 - \frac{l_1}{l_0}\right) \left(\frac{D_0}{D'_0}\right), \tag{10.4.9}$$

para la próxima iteración (gráfico 10.1).

**CUADRO 10.6**  
**ULTIMA ITERACION DE LA TABLA DE VIDA PARA LAS EDADES 0-4,**  
**MOSTRANDO LA CONCORDANCIA DE LAS MUERTES ESPERADAS**  
**CON LAS OBSERVADAS, PARA HOMBRES DE FRANCIA, 1965\***

Edad x	Año y	Nacimientos observados $B_y = B_{-y}$	De la iteración precedente	
			$l_x$	${}_1L_x$
0	1965	441,588	100,000	98,492.1
1	1964	449,511	97,973.9	97,836.3
2	1963	443,844		97,693.3
3	1962	425,919		97,628.6
4	1961	428,877		97,591.4
5	1960	419,775	97,577.9	

( ${}_1L_x$  obtenido ajustando la hipérbola  $(ax + b)/(x + b)$  a  $l_1$  y  $l_6$  determinándose que  $a = 0,974535$ ,  $b = 0,256863$ , y luego integrando).

Edad x	Muertes esperadas			Muertes observadas 1965
0	$B_0(1 - L_0/l_0)$	$\alpha D'_0$	6658.7	$D_0 = 8988$
	$B_{-1}(L_0 - l_1)/l_0$	$\delta D'_0$	<u>2329.4</u>	
			$D'_0 = 8988.1$	
1	$B_{-1}(l_1 - L_1)/l_0$	$\alpha D'_1$	618.5	
2	$B_{-2}(L_1 - L_2)/l_0$	$\delta D'_1 + \alpha D'_2$	634.7	
3	$B_{-3}(L_2 - L_3)/l_0$	$\delta D'_2 + \alpha D'_3$	275.6	
4	$B_{-4}(L_3 - L_4)/l_0$	$\delta D'_3 + \alpha D'_4$	159.5	
5	$B_{-5}(L_4 - l_5)/l_0$	$\delta D'_4$	<u>56.7</u>	
			${}_4D'_1 = 1745.0$	${}_4D_1 = 1745$

Fuente: \* *Demographic Yearbook* de las Naciones Unidas, 1965 y 1966, cuadros 13 y 43. Se ha supuesto una relación de masculinidad uniforme para los nacimientos.

La correspondiente estimación  ${}_4D'_1$  de las muertes de uno a cuatro años de edad es

$${}_4D'_1 = B_{-1} \left( \frac{l_1 - L_1}{l_0} \right) + B_{-2} \left( \frac{L_1 - L_2}{l_0} \right) + \dots + B_{-5} \left( \frac{L_4 - l_5}{l_0} \right), \quad (10.4.10)$$

expresión que contiene las muertes que se espera ocurran en el año calendario dado, sobre la base de los  $B$  dados y los  $l$  y  $L$  de la iteración precedente. El  ${}_4q_1^*$

CUADRO 10.7

COMPARACION DEL  ${}_3d_0$  CORRESPONDIENTE A LA TABLA DE VIDA CON REGISTROS DE NACIMIENTOS COMO LA FUENTE SOBRE EXPOSICION, CON EL  ${}_3d_0$  BASADO EN EL RECUENTO CENSAL O ESTIMACION DE POBLACION COMO LA FUENTE SOBRE EXPOSICION. ESTUDIO SOBRE NUEVE PAISES, 1965 \*

País	Hombres		Mujeres	
	Exposición medida por		Exposición medida por	
	Registro de nacimientos	Censo	Registro de nacimientos	Censo
Bulgaria	3982	4031	3097	3291
Francia	2422	2419	1889	1884
Grecia	4139	4001	3683	3581
Mauricio	9547	9599	8258	8366
Países Bajos	2017	2021	1557	1556
Nueva Zelanda	2681	2488	2001	1860
Puerto Rico	5405	5253	4500	4365
Taiwán	4112	4280	3859	4007
Estados Unidos	3136	3049	2459	2388

\* Las tablas de vida basadas sobre registros de nacimientos fueron programadas por William Taylor; las tablas de vida con base censal por Wilhelm Flieger.

mejorado es

$${}_4q_1^* = \left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right) \left(\frac{{}_4D_1}{{}_4D_1'}\right).$$

Con los valores corregidos  $q_0^*$  y  ${}_4q_1^*$ , nuevas estimaciones de  $l_1^*$  y  $l_5^*$  quedan disponibles y el proceso se puede repetir hasta que concuerden los  $q$  sucesivos, por ejemplo, con una diferencia menor que 1 millonésimo. Observe que a diferencia de la iteración de la sección 1.2, la presente no requiere el uso de una tasa de crecimiento  $r$ . Esta es la ventaja de proceder a lo largo de líneas de cohorte. En el cuadro 10.6 aparece la muestra de una hoja de trabajo. El método se podría mejorar para que tomara en cuenta los cambios dentro de cada año cuando éstos se infieren de una curva que pasa por  $B_0, B_{-1}, \dots$

El factor de separación  $f_0^* = {}_8D_0^*/D_0^*$  de la sección 1.1 está implícito en el proceso; muestre cómo se lo puede estimar entre cualquier par de años que tengan suficientes diferencias en nacimientos. Muestre también cómo se puede construir el método para que dé una mejor tabla de vida cuando se dispone de los nacimientos por mes para los seis años pertinentes. Adapte el método a un período de exposición trienal.

Puesto que la teoría aquí presentada aún no ofrece ayuda para decidir qué manera de medir la exposición es superior, es afortunado que las diferencias sean frecuentemente pequeñas, como lo muestra el  $\sigma d_0$  del cuadro 10.7 para nueve países que varían en la calidad de los datos estadísticos.

### 10.5. ESTIMACION DEL ERROR DE INTERPOLACION

Los clásicos términos del resto para las series de Taylor e interpolación de Newton tienen sus usos, pero en algunas circunstancias un procedimiento diferente puede proporcionar más información sobre el error y ser más adecuado para el cálculo mediante máquinas.

Cuando nos son dados  $n$  valores de una función y deseamos interpolar o ajustar para determinar valores intermedios, podemos estudiar la precisión probable de alcanzarse mediante el uso en  $n-1$  de los puntos para interpolar el  $n$ ésimo. La comparación del valor interpolado con el  $n$ ésimo valor dado, constituirá entonces una estimación del error para cualquier nuevo punto que se vaya a interpolar. Si el  $n$ ésimo valor interpolado se escribe  $f(x_n)$ , y el  $n$ ésimo punto dado  $y_n$ , entonces  $f(x_n) - y_n$  es el error de  $f(x_n)$ .

Supongamos  $n = 4$ . Sabemos por resolución de la ec. (10.2.2) para  $f(x)$  que el valor interpolado para el cuarto punto es (10.2.3). Entonces  $f(x) - y$  es lo mismo que (10.2.3), con la única diferencia de que se reemplaza el cero de la esquina superior derecha del numerador por  $y$ . Cuando se compara el  $f(x_4)$  interpolado con el  $y_4$  observado, el error es

$$f(x_4) - y_4 = \frac{\begin{vmatrix} x_4^2 & x_4 & 1 & y_4 \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x_4^2 & x_4 & 1 & y_4 \end{vmatrix}}{-\Delta_{44}} = \frac{\Delta}{-\Delta_{44}}, \quad (10.5.1)$$

donde  $\Delta$  es el determinante en el numerador y  $\Delta_{44}$  es  $\Delta$  con la última columna y última fila suprimidas.

Disponiéndose de cuatro puntos, se podría tomar cada uno de ellos como  $x_4, y_4$  en (10.5.1), y se obtendrían así cuatro indicaciones del error en el proceso. Con  $n$  puntos, se obtendrían  $n$  indicaciones que por extensión de la notación ya empleada se podría designar

$$f(x_i) - y_i = \frac{\Delta}{(-1)^{i+n+1} \Delta_{in}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.5.2)$$

Puede ocurrir que los puntos estén lejos de ser equidistantes; las fórmulas de interpolación pueden implicar derivadas como en el desarrollo de Taylor o en la interpolación osculatoria; se pueden reemplazar las funciones interpolatrices polinómicas por funciones exponenciales o de otras formas; estas situaciones más generales requieren, cuanto más obvias modificaciones de (10.5.2). Puesto que

$n$  puntos darán un resultado mejor que  $n - 1$ , la aplicación de (10.5.2) exagera un poco el error a que está sujeta la interpolación final.

Se puede ejemplificar el procedimiento con tres puntos, por ejemplo,  $l_{25}$ ,  $l_{30}$  y  $l_{35}$ . Si interpolamos por años simples, entonces, los errores con rectas que pasen por los puntos conocidos son

$$-\frac{\Delta}{\Delta_{13}} = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 1 & l_{25} \\ 30 & 1 & l_{30} \\ 35 & 1 & l_{35} \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} 30 & 1 \\ 35 & 1 \end{vmatrix}},$$

y otras dos razones que difieren sólo en sus denominadores, son

$$-\begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 35 & 1 \end{vmatrix},$$

respectivamente. Se ve que los denominadores son iguales a 5, 5 y  $-10$  respectivamente; para los hombres de los Estados Unidos, 1964, en que  $l_{25} = 94\,854$ ,  $l_{30} = 94\,002$  y  $l_{35} = 92\,991$  (cuadro 1.3), el numerador común es 795. De allí que las tres estimaciones del error sean  $795/5 = 159$ ,  $795/5 = 159$  y  $795/(-10) = -79.5$ , como se puede verificar sin el uso de determinantes en este ejemplo simple. Dado que el  $l_{40}$  de la misma tabla es 91 601, el lector puede aplicar la técnica para averiguar el error de un ajuste con 4 puntos y comentar sobre el mejoramiento logrado por medio de un gráfico. Más ampliamente, él puede comparar el error obtenido mediante (10.5.1) con respecto al término usual del resto, por ejemplo, en la forma dada por Freeman (1962, pág. 57).

La técnica se puede aplicar a interpolación de orden superior, incluyendo casos tales como los multiplicadores de Sprague u otros que aparecen en el cuadro 10.1. La aplicación requiere que las fórmulas se desarrollen para intervalos desiguales, puesto que si estamos trabajando con siete puntos, necesitaremos interpolar cada uno separadamente de los otros seis y comparar con los valores observados. Si se dispone de un computador, uno podría evitar el cálculo de coeficientes como los del cuadro 10.1, y en su lugar, usar directamente (10.5.2).

## APROXIMACIONES FINITAS

Las aproximaciones finitas constituyen la tarea de todos los que se ocupan del análisis demográfico. Uno no puede construir una tabla de vida, calcular tasas de supervivencia, o establecer una tasa intrínseca sin que implícitamente se reemplacen integrales o derivadas por cantidades finitas que son aproximaciones a ellas. Los problemas no son nuevos, pero con el advenimiento de las computadoras, exigen una atención especial. Los resultados que se detallan enseguida están destinados para referencia más que para lectura general.

### Intervalos quinquenales y de un año

Cuando se dan grupos quinquenales de edad en los datos originales, la integración numérica se ve frecuentemente facilitada mediante una interpolación explícita de éstos a años aislados de edad con un polinomio de cuarto o quinto grado, usando los métodos del capítulo 10. La interpolación se trata como si fueran datos, y se aplica alguna aproximación usual tal como la trapezoidal para estimar integrales para la columna  $L_x$  de la tabla de vida y números similares derivados. El presente capítulo, sin embargo, no introduce de manera alguna años simples de edad, pero intenta ser más analítico. Si los años simples de edad son meramente divisiones de un grupo quinquenal, a ser inferidos de las relaciones de los grupos quinquenales sucesivos (como lo son en cualquier interpolación), lo mismo ocurre con las supervivencias y otros productos de cálculos. ¿Por qué no pasar a una conclusión que nos dé directamente los grupos quinquenales de edad requeridos y evitamos los años aislados intermedios? Un ejemplo del procedimiento empleado aparece en el capítulo 1, donde podemos asegurar que la tabla de vida concuerda con los datos, estando la tabla final y los datos en grupos quinquenales de edad. Si posteriormente deseamos años simples de edad podemos interpolar la tabla final.

### 11.1. LA MATRIZ DE PROYECCION

#### La razón de supervivencia corregida

El tema va más allá de la construcción de la tabla de vida; se extiende también a su uso, por ejemplo en proyección. Si la población que tiene entre  $x$  y  $x + dx$  años de edad es  $k(x)dx$  y si el número de sobrevivientes es  $l(x)$ , entonces la población que tiene entre  $x$  y  $x + dx$  años y que sobreviven  $n$  años es

$$k(x) \frac{l(x+n)}{l(x)} dx, \quad (11.1.1)$$

y la que tiene entre  $x$  y  $x + n$  años y sobreviven  $n$  años es

$$\int_0^n k(x+t) \frac{l(x+n+t)}{l(x+t)} dt. \quad (11.1.2)$$

En el capítulo 2 y siguientes sustituimos (11.1.2) por el producto de dos integrales dividido por una tercera; esto es,

$$\frac{\int_0^n k(x+t) dt \int_0^n l(x+n+t) dt}{\int_0^n l(x+t) dt} = \frac{{}_nK_x {}_nL_{x+n}}{{}_nL_x}, \quad (11.1.3)$$

lo cual es una práctica común en demografía.

Desde el punto de vista lógico nada nos da, en general, el derecho a descomponer (11.1.2) de esta manera. Sólo en el caso especial en que la distribución  $k(x)$  dentro del grupo de edades que va de  $x$  a  $x + n$  sea la misma que la de  $l(x)$  tendrá lugar una cancelación y se hará válida la simplificación (11.1.3).

Pero una población que crece rápidamente se traslada a edades menores dentro de cada grupo de edades, y la población estable es una aproximación mejor para el valor efectivo que la población estacionaria. (Recuerde la aplicación de este principio para construir la tabla de vida iterativa del capítulo 1.) Supongamos que

$$k(x+t) = Ae^{-r(x+t)}l(x+t),$$

donde  $A$  y  $r$  no necesitan ser los mismos a través de todas las edades, pero se suponen constantes para intervalos de  $2n$  años; sustituyendo en (11.1.2) se tiene:

$$\int_0^n k(x+t) \frac{l(x+n+t)}{l(x+t)} dt = \int_0^n Ae^{-r(x+t)}l(x+t) \frac{l(x+n+t)}{l(x+t)} dt.$$

Podemos multiplicar por la unidad en la forma

$$\frac{{}_nK_x}{{}_nK_x} = \frac{{}_nK_x}{\int_0^n Ae^{-r(x+t)}l(x+t) dt},$$

y obtener para la población proyectada

$${}_n\bar{K}_x = \frac{\int_0^n Ae^{-r(x+t)}l(x+n+t) dt}{\int_0^n Ae^{-r(x+t)}l(x+t) dt}, \quad (11.1.4)$$

siendo la razón de las dos integrales en (11.1.4) la supervivencia apropiada para aplicar a  ${}_nK_x$ . La fórmula es exacta si la distribución por edades es estable por secciones.

Una manera de abordar (11.1.4) consiste en desarrollar  $e^{-rt}$  bajo el signo integral hasta el primer término en  $r$ , para obtener para la razón de supervivencia de las integrales:

$$\frac{\int_0^n (1-rt)l(x+n+t) dt}{\int_0^n (1-rt)l(x+t) dt}. \quad (11.1.5)$$

Ahora

$$\int_0^n (1-rt)l(x+t) dt = \int_0^n l(x+t) dt - r \int_0^n tl(x+t) dt,$$

y evidentemente necesitaremos aproximaciones para  $\int_0^* t l(x+t) dt$  y  $\int_0^* l(x+t) dt$ . Estas se obtendrán en las secciones siguientes y se insertarán en (11.1.5) para producir los resultados (11.1.4) a (11.1.18).

### Integración aproximada

Cualquier forma analítica que se haga pasar a través de una sucesión de puntos en un plano dará lugar a una fórmula de integración para intervalos de la variable independiente. Para  $x$  fijo el polinomio  $l(x+t)$  definido por

$$\begin{vmatrix} t^2 & t & 1 & l(x+t) \\ 0 & 0 & 1 & l_x \\ 25 & 5 & 1 & l_{x+5} \\ 100 & 10 & 1 & l_{x+10} \end{vmatrix} = 0 \quad (11.1.6)$$

pasará a través de los puntos de  $l_x$  en  $x$ ,  $x+5$ ,  $x+10$ , como un caso especial de (10.2.2). Si

$$\Delta l_x = l_{x+5} - l_x,$$

$$\Delta^2 l_x = \Delta l_{x+5} - \Delta l_x = l_{x+10} - 2l_{x+5} + l_x,$$

entonces el lector puede demostrar que (11.1.6) es la fórmula de diferencias de Newton para intervalos iguales

$$l(x+t) = l_x + \frac{t}{5} \Delta l_x + \frac{t(t-5)}{2! 5^2} \Delta^2 l_x, \quad (11.1.7)$$

si se anulan la tercera diferencia y las superiores a ella.

Integrando (11.1.6) o (11.1.7) de  $x$  a  $x+5$  se tiene la aproximación

$${}_s L_x = \int_0^5 l(x+t) dt = \frac{2}{3} \frac{5}{2} l_x + \frac{1}{3} {}^0 l_{x+5} - \frac{5}{12} l_{x+10}. \quad (11.1.8)$$

El mismo procedimiento aplicado a la cúbica en  $t$  a través de los valores  $x-5$ ,  $x$ ,  $x+5$ ,  $x+10$ , daría un determinante de  $5 \times 5$  lo cual después de la integración se reduce a

$${}_s L_x = \int_0^5 l(x+t) dt = \frac{3}{2} \frac{5}{4} (l_{x+5} + l_x) - \frac{5}{24} (l_{x+10} + l_{x-5}). \quad (11.1.9)$$

Se acostumbra [Greville, 1943, pág. 40 y (1.1.11)] escribir esto en la forma

$$\int_0^5 l(x+t) dt = \frac{5}{2} (l_{x+5} + l_x) + \frac{5}{24} ({}_s d_{x+5} - {}_s d_{x-5}). \quad (11.1.10)$$

Necesitamos también  $\int_0^* t l(x+t) dt$ . Integrando esto último por partes y usando

$$dT(x+t)/dt = -l(x+t),$$



tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^5 t l(x+t) dt &= - \int_0^5 t dT(x+t) \\ &= - [tT_{x+t}]_0^5 + \int_0^5 T(x+t) dt = -5T_{x+5} + \int_0^5 T(x+t) dt. \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

Desarrollando  $T(x+t)$  bajo el signo integral en el segundo miembro de (11.1.11) de acuerdo a la misma fórmula usada para  $l(x+t)$  en (11.1.7) y luego integrando con respecto a  $t$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^5 t l(x+t) dt &= -5T_{x+5} + (5T_x + \frac{5}{2} \Delta T_x - \frac{5}{12} \Delta^2 T_x) \\ &= \frac{25}{12} {}_5L_x + \frac{5}{12} {}_5L_{x+5}, \end{aligned} \quad (11.1.12)$$

y escribiendo  $x+5$  en lugar de  $x$  se obtiene

$$\int_0^5 t l(x+5+t) dt = \frac{25}{12} {}_5L_{x+5} + \frac{5}{12} {}_5L_{x+10}. \quad (11.1.13)$$

### Paso final en la corrección de supervivencia

Para la razón de las integrales en (11.1.4) escribimos ahora (11.1.5) y en consecuencia

$$\frac{\int_0^5 e^{-rt} l(x+5+t) dt}{\int_0^5 e^{-rt} l(x+t) dt} = \frac{{}_5L_{x+5} - r[\frac{25}{12} {}_5L_{x+5} + \frac{5}{12} {}_5L_{x+10}]}{{}_5L_x - r[\frac{25}{12} {}_5L_x + \frac{5}{12} {}_5L_{x+5}]}, \quad (11.1.14)$$

lo cual el lector puede demostrar que es muy cercanamente igual a

$$\frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} \left[ 1 + \frac{5r}{12 - 25r} \left( \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} - \frac{{}_5L_{x+10}}{{}_5L_{x+5}} \right) \right]. \quad (11.1.15)$$

El argumento incluye la sustitución de  $1 + \alpha$  en lugar de  $1/(1 - \alpha)$ , donde

$$\alpha = \frac{5r}{12 - 25r} \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x}$$

es suficientemente pequeño como para que su cuadrado y potencias superiores se puedan despreciar.

Observe que (11.1.15) utiliza  ${}_5L_x$ ,  ${}_5L_{x+5}$  y  ${}_5L_{x+10}$ , basados en valores de  $lx$  a  $l_{x+15}$  y por lo tanto asimétricos con respecto al intervalo de edades  $x$  a  $x+10$  a los que se refiere la proyección. Si el factor de corrección se estima a partir de los grupos precedentes de edades [esto es, escribiendo  $x-5$  en lugar de  $x$  dentro de los paréntesis de (11.1.15)],

$$\frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} \left[ 1 + \frac{5r}{12 - 25r} \left( \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} - \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} \right) \right],$$

y esto se promedia con (11.1.15), el resultado está situado simétricamente con respecto al intervalo de edades que va de  $x$  a  $x + 10$ :

$$\frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} \left[ 1 + \frac{5r}{24 - 50r} \left( \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} - \frac{{}_5L_{x+10}}{{}_5L_{x+5}} \right) \right]. \quad (11.1.17)$$

El lector puede demostrar que cuando la cantidad en los paréntesis de (11.1.17) está expresada en términos de  ${}_5q_x$  y se desprecia el término en  $r^2$ , el factor de supervivencia está sólo levemente subestimado por

$$\frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} [1 + \frac{5}{4}r({}_5q_{x+10} + {}_5q_{x+5} - {}_5q_x - {}_5q_{x-5})]. \quad (11.1.18)$$

Tal como en el recurso análogo incorporado en el procedimiento de la tabla de vida al final del capítulo 1, se puede hacer una elección entre un  $r$  particular, la tasa intrínseca, aplicada a través de todo el rango de edades, y el "r local" de (1.2.7) inferido separadamente para cada grupo de edades usando la misma manera en que se distribuye la población por edades. Además de ser un poco más apropiado, el "r local" tiene la conveniencia de ser fácilmente calculable.

La magnitud de las correcciones depende claramente de la tasa de crecimiento a lo largo del tiempo de la población en cuestión, y del aumento de las tasas de mortalidad de edad en edad. En la parte inferior derecha de la matriz en el cuadro 2.2 aparece el valor de  ${}_5L_{45}/{}_5L_{40}$  para las mujeres de los Estados Unidos, 1964. El aumento de una cohorte anual a la próxima en este trecho de la distribución por edades sugiere un  $r$  de 0,015. Del cuadro 2.1, y del hecho de que  ${}_5L_{50}$  es 450 468, tenemos para los cuatro factores de supervivencia co-

$$(11.1.15) \quad ({}_5L_{45}/{}_5L_{40})1.0000573 = 0.983100,$$

$$(11.1.16) \quad ({}_5L_{45}/{}_5L_{40})1.0000362 = 0.983080,$$

$$(11.1.17) \quad ({}_5L_{45}/{}_5L_{40})1.0000468 = 0.983090,$$

$$(11.1.18) \quad ({}_5L_{45}/{}_5L_{40})1.0000457 = 0.983089,$$

nuevamente contra el 0,983044 no corregido. La fórmula preferida (11.1.17), da 6 238 miles para la proyección en 1969 en lugar de los 6 237 miles mostrados en el cuadro 2.3. Evidentemente el asunto es más de principio que de consecuencia numérica.

### Corrección por agrupamiento

Un aspecto enteramente diferente de la aproximación lo constituye la corrección de Sheppard por agrupamiento, aplicable a las distribuciones con contacto de alto orden con el eje de las  $x$  en sus extremos. La función de fecundidad neta  $p(x)m(x)$  tiene tal contacto. En términos de los cumulantes brutos (sección 5.6) identificados con una barra, los cumulantes corregidos son (Kendall y Stuart, 1958, Vol. I, pág. 81).

$$\kappa_1 = \bar{\kappa}_1; \quad \kappa_2 = \bar{\kappa}_2 - \frac{d^2}{12}; \quad \kappa_3 = \bar{\kappa}_3; \quad \kappa_4 = \bar{\kappa}_4 + \frac{d^4}{120}, \dots, \quad (11.1.19)$$

donde  $d$  es el intervalo de agrupamiento, tomado aquí igual a 5. Nuestro objeto en esta sección consistirá en ir más allá de la corrección de cumulantes para determinar la corrección por agrupamiento apropiada a la ecuación característica

$$\phi(r) = \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) m(x) dx = 1. \quad (11.1.20)$$

Primero alteramos temporalmente la ecuación como si fuéramos a resolverla con cumulantes como lo sugirió Lotka (1939c, pág. 71), y como se demuestra en la sección 6.5. Dividiendo ambos miembros de (11.1.20) por  $R_0$ , desarrollando la exponencial, e integrando término por término, se tiene en el primer miembro la función generatriz de momentos de  $p(x)m(x)/R_0$  evaluada en  $-r$ . Enseguida tomando logaritmos naturales y recordando que el logaritmo de la función generatriz de momentos genera los cumulantes

$$\ln \int_0^{\infty} e^{-ra} \frac{p(a)m(a) da}{R_0} = -\kappa_1 r + \frac{\kappa_2 r^2}{2!} - \dots,$$

tenemos

$$-\kappa_1 r + \frac{\kappa_2 r^2}{2!} - \frac{\kappa_3 r^3}{3!} + \frac{\kappa_4 r^4}{4!} - \dots = -\ln R_0, \quad (11.1.21)$$

suponiéndose exactos los cumulantes  $\kappa$ , y, en particular, corregidos por agrupamiento. Sustituyendo (11.1.19) para  $d=5$  en (11.1.21) da

$$\left( -\bar{\kappa}_1 r + \frac{\bar{\kappa}_2 r^2}{2!} - \frac{\bar{\kappa}_3 r^3}{3!} + \frac{\bar{\kappa}_4 r^4}{4!} - \dots \right) - \frac{5^2}{12} \frac{r^2}{2!} + \frac{5^4}{120} \frac{r^4}{4!} = -\ln R_0, \quad (11.1.22)$$

corrigiendo sólo hasta el cuarto cumulante. La cantidad que aparece entre paréntesis en el primer miembro de (11.1.22) es el logaritmo del primer miembro de (11.1.20) calculado sin la corrección por agrupamiento. En consecuencia, sustituyendo la integral no corregida, distinguida por una barra, encontramos que (11.1.22) se convierte en

$$\ln \left( \int_0^{\infty} e^{-ra} \frac{p(a)m(a) da}{R_0} \right) - \frac{25}{24} r^2 + \frac{125}{(24)^2} r^4 = -\ln R_0.$$

Tomando antilogaritmos, es decir exponenciales, y multiplicando por  $R_0$ , volvemos a la ecuación original (11.1.20), excepto que en lugar de 1 en el segundo miembro tenemos

$$\exp \left( \frac{25}{24} r^2 - \frac{125}{(24)^2} r^4 \right) \div 1 + \frac{25}{24} r^2 + \frac{125}{384} r^4$$

hasta los términos en  $r^4$ . Es decir, tenemos que resolver

$$\bar{\phi}(r) = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a)m(a) da = 1 + \frac{25}{24} r^2 + \frac{1}{3} \frac{25}{24} r^4.$$

El segundo miembro se aparta poco de la unidad para valores de  $r$  de uso corriente:

$r$	$1 + \frac{35}{4}r^2 + \frac{125}{384}r^4$
0.01	1.000104
0.02	1.000417
0.03	1.000938

En el cuadro 5.3 el  $\sigma^2$  se calculó en ambas columnas sin la corrección por agrupamiento. El  $1\ 000r$  resultante en (6.2.7) usando este  $\sigma^2$  fue superior en 0,003 al  $1\ 000r$  de (5.3.5). Dado que  $K_3$  para las mujeres de los Estados Unidos en 1964 fue 122,4 y sustituyendo este valor en el término que contiene  $r^3$  de (6.5.4) tenemos  $K_3 r^3 / 6\mu = 2,98 \times 10^{-6}$ . Esto explica la diferencia de 3 en la tercera cifra decimal entre el  $1\ 000r$  de (5.3.5) y el  $1\ 000r_L$  de (6.2.7). Una deducción de  $\sigma^2$  por agrupamiento de  $5^2/12 = 2,083$  habría reducido  $1\ 000r_L$  a 15,696, en desacuerdo con  $1\ 000r$ . El hecho subyacente es que tanto (5.3.5) como (6.2.7) con  $\sigma^2$  no corregido por agrupamiento contiene errores que se compensan, y sacando uno de ellos (el sesgo de agrupamiento) hacemos que la estimación de  $r$  sea levemente peor. Por otra parte, la corrección por agrupamiento fue esencial en el cuadro 6.4, donde deseábamos la distribución interpolada en intervalos quinquenales para ajustar las observaciones lo más estrechamente posible.

El lector avanzado puede intentar la obtención del resultado (11.1.23) sin la mediación de los cumulantes mediante una integración directa tal como proceden Kendall y Stuart para determinar (11.1.19).

### Primera fila de la matriz de proyección

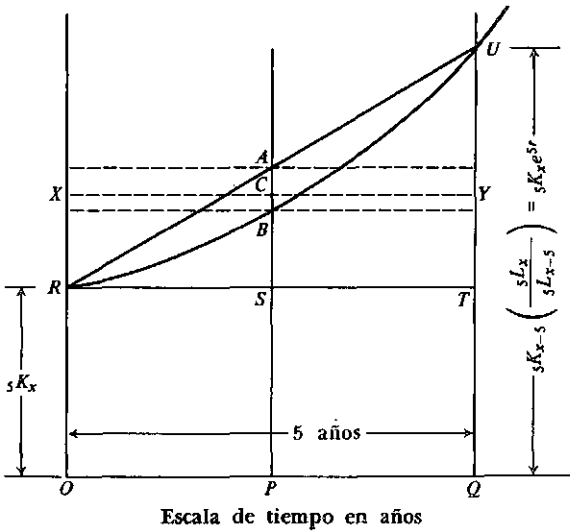
Aparecen tres métodos para formar el elemento de fecundidad de la matriz de proyección, los cuales serán examinados a continuación. El de los capítulos 2 y 3 se denominará método *A*.

**METODO A.** *La proyección comienza con la media de las poblaciones inicial y final.* Al reexaminar las exigencias del método de proyección usado en los capítulos 2 y 3 deberíamos recordar que las tasas específicas de fecundidad por edades fueron allí aplicadas a la media aritmética de la población que se supone que existe en el intervalo de tiempo en cuestión para la edad dada. Con grupos quinquenales de edad y una población inicial que tenía de  $x$  a  $x + 4$  años en su último cumpleaños igual a  ${}_5K_x$ , la población proyectada cinco años más tarde de edades  $x$  a  $x + 4$  años es  ${}_5K_{x+5}({}_5L_x / {}_5L_{x-5})$ , y el promedio expuesto se toma como

$$\frac{1}{2} \left( {}_5K_x + {}_5K_{x+5} \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} \right).$$

La referencia al gráfico 11.1 muestra el método *A* de proyección asociado con el punto medio *A* sobre la recta *RU*. Si  ${}_5L_x / {}_5L_{x-5}$  se puede considerar aplicable a cada punto de edad desde  $x$  hasta  $x + 5$ , entonces podemos decir que hemos usado la recta horizontal que pasa por *A* (que aparece como recta que

**GRAFICO 11.1**  
**CURVA EXPONENCIAL DEL CRECIMIENTO DE LA POBLACION RBU**  
**Y TRES APROXIMACIONES HORIZONTALES**



brada en el gráfico 11.1) como si representara la población en cada momento del intervalo de tiempo  $OQ$ . La ecuación característica (3.2.4) la escribiremos en la forma  $\psi_A(r) = 1$  cuando  $\lambda = e^{5r}$  y multiplicamos por  $e^{-5nr}$ .

**METODO B.** *La proyección comienza con la media geométrica de las poblaciones inicial y final.* Si una población está creciendo exponencialmente a la tasa intrínseca, o sea, si se está comportando como una población estable, entonces a cualquier tiempo intermedio  $t$  durante el período quinquenal del primer ciclo de proyección será igual a la población inicial multiplicada por  $e^{rt}$ , o sea,  ${}_5K_x e^{rt}$ . En el punto medio será igual a  ${}_5K_x e^{5r/2}$ . Si la población fuera estable, con

$$\frac{B_0}{l_0} (e^{-(x+2.5)r} {}_5L_x)$$

individuos de  $x$  a  $x + 4$  años al comienzo del período quinquenal, como corresponde a la distribución por edades de una población estable cuyos nacimientos son  $B_0$ , entonces  $2\frac{1}{2}$  años más tarde estará multiplicada por  $e^{2.5r}$ . Usando esta población del punto medio como la población expuesta al riesgo en los cinco años, los nacimientos durante los cinco años se obtendrán multiplicando a ella por la tasa específica de fecundidad por edades  ${}_5F_x$ :

$$\frac{B_0}{l_0} \left\{ \sum_{x=0}^{\beta-5} e^{-(x+2.5)r} {}_5L_x e^{5r/2} F_x \right\}. \tag{11.1.24}$$

Esto es equivalente a considerar la recta horizontal que pasa por  $B$  como la población media desde el momento  $O$  hasta  $Q$  en el gráfico 11.1.

Nuevamente, si la población es estable, estos nacimientos, que ocurren en promedio a mitad de período, deben ser  $e^{5r/2}$  veces los nacimientos  $B_0$  que forman la raíz de la población estable en el momento cero. De allí que igualando (11.1.24) a  $B_0 e^{5r/2}$  y cancelando  $B_0 e^{5r/2}$  se llega a

$$\bar{\phi}_B(r) = \frac{1}{l_0} \left\{ \sum_{x=0}^{\beta-5} e^{-(x+2.5)r} {}_5L_x F_x \right\} = 1. \quad (11.1.25)$$

Todas las ecuaciones subsiguientes estarán relacionadas con (11.1.25) que escribiremos

$$\phi_B(r) = 1, \quad \text{or} \quad \bar{\phi}_B(r) = 1,$$

la última cuando es necesario tener en cuenta que se omitió la corrección por agrupamiento. Esta es la aproximación que se usa comúnmente en demografía (Coale, 1957b) y que ya ha aparecido antes como (5.3.2). ¿Es obvia la razón por la cual  $\bar{\phi}_B(r)$  debería ser lo mismo que el denominador de (5.7.3), el resultado de aplicar la transformada de Laplace a una función de fecundidad neta concentrada en los puntos medios de los intervalos? ¿Cuál es la relación con la ecuación característica de la matriz cuya primera fila es (8.3.5)?

**METODO C.** *La proyección suponiendo crecimiento exponencial y comenzando con la media de población para el intervalo inicial.* La introducción del modelo estable sugiere un progreso adicional; ¿por qué no habríamos de hacer la población durante el primer ciclo de proyección por cinco años igual al promedio de la trayectoria exponencial que estamos suponiendo? Esto lo denominaremos método C, en el cual para cada grupo de edad en el período inicial, un promedio

$$\frac{K_x \int_0^5 e^{rt} dt}{5} = \frac{K_x e^{rt} \Big|_0^5}{5r} = \frac{K_x (e^{5r} - 1)}{5r} \quad (11.1.26)$$

es la base a la que se aplica  ${}_5F_x$ . Este es el nivel C en el gráfico 11.1, fijado para hacer que el área  $OXCYQ$  sea igual al área  $ORBUQ$ . La razón de (11.1.26) a  $K_x e^{5r/2}$  del método B anterior es

$$\begin{aligned} \frac{K_x (e^{5r} - 1)/5r}{K_x e^{5r/2}} &= \frac{e^{5r/2} - e^{-5r/2}}{5r} \\ &= \frac{\sinh(5r/2)}{5r/2} = 1 + \frac{25}{24} r^2 + \frac{125}{384} r^4 + \dots, \end{aligned} \quad (11.1.27)$$

donde *senh* es el seno hiperbólico.

Si el método B es nuestra pauta, entonces para el método C la ecuación integral  $\bar{\phi}_B(r) = 1$  se modifica mediante multiplicación por (11.1.27) en el primer miembro y se obtiene

$$\phi_C(r) = (1 + \frac{25}{24} r^2 + \frac{125}{384} r^4 + \dots) \bar{\phi}_B(r) = 1. \quad (11.1.28)$$

Demuestre que (11.1.28) es lo mismo que (5.7.5) igualado a la unidad.

### Neutralización del error en el método *B* mediante la corrección por agrupamiento

La ecuación para la tasa intrínseca cuando corregimos por agrupamiento es (11.1.23) y para el método *C* es (11.1.28). Aplicando tanto la corrección por agrupamiento como lo que se gana al considerar *C* sobre *B* se logra, de nuevo hasta  $r^4$ :

$$\bar{\psi}_B(r)(1 + \frac{25}{8}r^2 + \frac{1}{3}\frac{25}{84}r^4) = 1 + \frac{25}{8}r^2 + \frac{1}{3}\frac{25}{84}r^4,$$

lo cual por cancelación se convierte en  $\bar{\psi}_B(r) = 1$  de (11.1.25). Hemos demostrado que hasta  $r^4$  la corrección por agrupamiento neutraliza el progreso desde el punto medio al promedio de la trayectoria exponencial dentro de los intervalos de la proyección y nos deja con la ecuación característica  $\bar{\psi}_B(r) = 1$ .

### Comparación de los métodos *A* y *B*

Examinemos de qué manera la proyección de población común, que hemos llamado método *A*, tiene valor en relación con *B*. Si se aplicara a una población inicial que fuera estable, entonces cualquier grupo que comience en  $K_x$  termina el período quinquenal en  $e^{5r}K_x$ . Puesto que en *A* se usa la media aritmética de las poblaciones inicial y final, el promedio implícito del método *A* en el primer período es  $K_x(1 + e^{5r})/2$ . La razón de esto al punto medio de la curva exponencial, que es *B* (nuestra norma), es

$$\begin{aligned} \frac{K_x(1 + e^{5r})/2}{K_x e^{5r/2}} &= \frac{e^{5r/2} + e^{-5r/2}}{2} \\ &= \cosh \frac{5}{2}r = 1 + \frac{25}{8}r^2 + \frac{625}{384}r^4 + \dots \end{aligned} \quad (11.1.29)$$

Traducido a la geometría del gráfico 11.1, la ecuación (11.1.29) nos dice que  $AC \doteq 2CB$ , y recordamos que *C* está sobre la recta horizontal *XY*. Haga un dibujo de modo que el área de *XYQO* sea igual a la de *RBUQO*, y compare el término en  $r^2$  con (11.1.27).

Habiendo determinado la razón del nivel del método *A* al nivel del método *B* estamos en condiciones de mostrar cómo se compara la tasa intrínseca calculada mediante *A* con la calculada mediante *B*. Puesto que el nivel de *A* relativo a *B* está dado por (11.1.29), entonces la ecuación característica para *A* debe ser

$$\begin{aligned} \psi_A(r) &= \cosh\left(\frac{5}{2}r\right)\psi_B(r) = \frac{e^{5r/2} + e^{-5r/2}}{2}\psi_B(r) \\ &= \left(1 + \frac{25}{8}r^2 + \frac{625}{384}r^4\right)\psi_B(r) = \bar{1}, \end{aligned}$$

en caso que se puedan despreciar los términos que están después del que contiene a  $r^4$ . Aumentando  $\psi_B(r)$  aumenta la raíz real en una cantidad que se puede determinar del gráfico 5.2 mediante consideraciones geométricas. El lector puede demostrar que hasta  $r^2$  la tasa intrínseca derivada de la matriz del método matricial *A* excede a la de la ecuación integral del método *B* en  $25r^2/8A_m$ , donde  $A_m$  es la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable.

## Resumen de correcciones

El trabajo que hemos realizado hasta este momento aparece resumido en la muestra 11.1, cuyas filas muestran las opciones principales del procedimiento de cálculo. La matriz usual de proyección  $A$  implica una tasa intrínseca demasiado alta, exageración que se debe al uso de la media aritmética de los extremos cuando la población está creciendo geoméricamente. La ecuación integral  $\psi_B(r) = 1$  parece levemente baja debido a que comienza con el punto medio en lugar de una población media, pero esto está compensado por la ausencia de la corrección por agrupamiento. La diferencia entre las raíces de la matriz  $A$  y de la ecuación integral  $B$  es aproximadamente tres veces la que existe entre las raíces de  $B$  y  $C$ . La última línea de la tabla combina el método mejorado  $C$  con la corrección por agrupamiento y nos lleva de regreso a  $B$ .

El cuadro 11.1 muestra para cinco países la forma en que la discrepancia entre las dos maneras de calcular la tasa intrínseca aumenta con el cuadrado de la tasa. La discrepancia en  $1000r$  entre los métodos  $A$  y  $B$  para Mauricio, 1965, es  $31,261 - 31,149 = 0,112$ , contra  $0,119$  en la última columna. En lo demás la última columna es prácticamente idéntica señalándose la diferencia entre los dos métodos (dentro de los lugares decimales que aparecen).

Hasta donde la ecuación integral (método  $B$ ) proporciona una mejor aproximación a la tasa intrínseca que la que da la matriz usual de proyección, hay un argumento para formar nuestra matriz de proyección por medio de ella, usando los elementos (8.3.5) en la fila superior. La conveniencia de una matriz que utiliza (8.3.5) consiste en que la población final, que crece de acuerdo a la raíz dominante sola, deberá concordar exactamente con la población proyectada. Desgraciadamente, las ecuaciones de recurrencia (2.1.7) por las cuales se desarrolló la matriz pierden su linealidad cuando se hace este cambio y su solución expli-

CUADRO 11.1  
VALOR DE  $1000r$  MEDIANTE LA MATRIZ [METODO  $A$  DE (11.5.3)] Y LA ECUACION INTEGRAL [METODO  $B$  DE (11.1.25)], EXPLICANDO LA DIFERENCIA MEDIANTE  $1000 (25r^2/8A_r)$ . MUJERES DE CINCO PAISES, 1965

	Método		A - B	$A_r$	$1000 \times 25r^2/8A_r$
	A	B			
	Matriz $1000r$	Ecuación integral $1000r_0$			
Canadá	14.691	14.667	0.024	27.2	0.025
Finlandia	4.550	4.548	0.002	27.9	0.002
Mauricio	31.261	31.149	0.112	27.3	0.119
Holanda	12.539	12.522	0.017	28.5	0.017
Estados Unidos*	12.670	12.650	0.020	26.1	0.019

\* Nacimientos ajustados.



**MUESTRA 11.1**  
RESUMEN DE LOS METODOS DE PROYECCION Y VALORES RESULTANTES DE  $r$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Método	Promedio supuesto del primer intervalo como razón a la población al comienzo de la proyección	Columna (2) relativa al método B	Ecuación característica	$r$ dado $r_0$ de $\psi_B(r_0) = 1$ del método B ( $A_r$ evaluado en $r_0$ )	1 000r para Mauricio, 1964, mujeres
A. Proyección estándar aplicando tasas de fecundidad a la media aritmética de la población inicial y final en grupos de edades.	$\frac{1 + e^{5r}}{2}$	$\frac{e^{5r/2} + e^{-5r/2}}{2}$ $= \cosh\left(\frac{5r}{2}\right)$ $= 1 + \frac{25}{8}r^2 + \frac{625}{384}r^4$	$\psi_A(r)$ $= \cosh\left(\frac{5r}{2}\right)\bar{\psi}_B(r)$ $= 1$	$r_A \doteq r_B + \frac{25r_0^2}{8A_r}$	34.418
B. Aplicando tasas de fecundidad a la población exponencial en el punto medio; esto corresponde a la ecuación integral.	$e^{5r/2}$	1	$\bar{\psi}_B(r) = 1$	$r = r_B = r_0$	34.283
C. Aplicando tasas de fecundidad a la población exponencial promedio.	$\frac{e^{5r} - 1}{5r}$	$\frac{e^{5r/2} - e^{-5r/2}}{5r}$ $= \frac{\sinh(5r/2)}{5r/2}$ $= 1 + \frac{25}{24}r^2 + \frac{125}{384}r^4$	$\psi_C(r)$ $= \frac{\sinh(5r/2)\bar{\psi}_B(r)}{5r/2}$ $= 1$	$r_C \doteq r_B + \frac{25r_0^2}{24A_r}$	34.328
Ecuación integral (método B) corregida por agrupamiento.			$\psi_B(r)$ $= \frac{(5r/2)\bar{\psi}_B(r)}{\sinh(5r/2)} = 1$	$r \doteq r_B - \frac{25r_0^2}{24A_r}$	34.238
Método C corregido por agrupamiento.			$\psi_C(r) = \bar{\psi}_B(r) = 1$	$r = r_B$	34.283

cita sería difícil; en la práctica se podrían resolver, en caso de que fuese necesario, mediante métodos iterativos. En (8.3.5) y cuadro 8.2, se restauró la linealidad reemplazando  $\sqrt{\lambda}$  por  $\sqrt{\lambda_1}$ .

El lector que desee preocuparse de esto más ampliamente puede considerar distintas combinaciones de las correcciones para supervivencia, las ecuaciones (11.1.15) a (11.1.18) y aquellas para los elementos de fecundidad dados en la muestra 11.1.

### Extensión a un intervalo general

La discusión anterior ha sido conducida en términos de un intervalo quinquenal de edad con fines de concreción y debido a que éste es el caso más familiar en la práctica. El lector puede deducir las fórmulas para un intervalo general, por ejemplo  $d$  años, y demostrar que al tener en cuenta el agrupamiento se tiene la ecuación

$$\bar{\psi}(r) = 1 + \frac{(rd)^2}{24} + \frac{(rd)^4}{1920} + \dots,$$

en lugar de (11.1.23), donde la ecuación no corregida sería  $\bar{\psi}(r) = 1$ . La razón de la función característica no corregida  $\bar{\psi}(r)$  a la corregida  $\psi(r)$  es

$$\frac{\bar{\psi}(r)}{\psi(r)} = 1 + \frac{(rd)^2}{24} + \frac{(rd)^4}{1920}, \quad (11.1.30)$$

hasta los términos en  $r^4$ .

Si la proyección da lugar a la ecuación  $\psi_A(r) = 1$ , y la ecuación integral a  $\bar{\psi}_B(r) = 1$ , no considerando la corrección por agrupamiento, entonces el lector puede generalizar la muestra 11.1 para demostrar que la razón de la función característica del método  $A$  a aquella del método  $B$  es

$$\frac{\psi_A(r)}{\bar{\psi}_B(r)} = \frac{e^{rd/2} + e^{-rd/2}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{rd}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{rd}{2}\right)^4 + \dots \quad (11.1.31)$$

La razón de  $\psi_C(r)$  a  $\bar{\psi}_B(r)$  es

$$\frac{\psi_C(r)}{\bar{\psi}_B(r)} = \frac{e^{rd/2} - e^{-rd/2}}{rd} = 1 + \frac{1}{3!} \left(\frac{rd}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{rd}{2}\right)^5 + \dots \quad (11.1.32)$$

Superponemos ahora dos de estas modificaciones (una sobre otra). Al ir del método  $B$  al método  $C$  aumentamos la función característica en la razón  $\psi_C(r)/\bar{\psi}_B(r)$ , dada anteriormente como (11.1.32). Al corregir por agrupamiento multiplicamos por  $\psi(r)/\bar{\psi}(r)$ , que es el recíproco del segundo miembro de (11.1.30). Al ir del método  $B$  al método  $C$  y corregir por agrupamiento, multiplicamos por el cociente de (11.1.32) dividido por (11.1.30) que es uno en el segundo miembro hasta  $r^4$ .

El argumento anterior demuestra como sube y baja la curva  $\psi(r)$  cambiando las condiciones bajo las que se realiza el cálculo. Se invita nuevamente al lector a interpretar el argumento refiriéndose al gráfico 5.2.

**Intervalo terminal de edad abierto en su extremo superior**

La aplicación de la tabla de vida para determinar la supervivencia en la edad terminal de una proyección es un tanto diferente de la que se hace en las edades más jóvenes. Podemos por supuesto considerar el último intervalo de edad como si tuviera una amplitud de cinco años, por ejemplo 85 a 89 en el último cumpleaños; si se supone que nadie vive más allá de éste, el elemento en la esquina inferior derecha de la matriz de proyección sería cero, y los elementos subdiagonales serían todos supervivencias quinquenales  ${}_5L_{x+5}/{}_5L_x$ . Pero si consideramos el último intervalo de la distribución de edades como abierto en su extremo superior, necesitamos un elemento no cero en la esquina inferior derecha de la matriz; esto trasladará a algunos sobrevivientes en el mismo intervalo abierto en el próximo período. Denomine  $m_{nn}$  al elemento desconocido requerido y  $k_n$  al último grupo poblacional. Entonces la condición de estabilidad es  $MK = \lambda K$ , o sea, un conjunto de  $n$  ecuaciones lineales, de las cuales la última es

$$m_{n,n-1}k_{n-1} + m_{nn}k_n = \lambda k_n,$$

de modo que

$$m_{nn} = \lambda - \frac{m_{n,n-1}k_{n-1}}{k_n}.$$

El lector puede escribir  $n = 18$  para poner esto en términos del grupo 85 y más y verificar que

$$m_{18,18} = \lambda - \frac{({}_5L_{85}/{}_5L_{80})({}_5L_{80}\lambda^{-16.5})}{{}_5L_{85}\lambda^{-17.5} + {}_5L_{90}\lambda^{-18.5} + \dots} = \frac{{}_5L_{90} + {}_5L_{95}\lambda^{-1} + \dots}{{}_5L_{85} + {}_5L_{90}\lambda^{-1} + \dots},$$

que es  $\lambda$  veces la razón de la población estable de 90 años y más a la de 85 y más.

**11.2. DISTRIBUCION ESTABLE POR EDADES OBTENIDA DE LA COLUMNA  $l_x$  DE LA TABLA DE VIDA**

El número de personas que tiene entre  $x$  y  $x + 5$  años en la distribución por edades estable digamos  ${}_5K_x$ , es, a partir de una raíz  $l_0$ ,

$${}_5K_x = \int_x^{x+5} e^{-ra}l(a) da, \tag{11.2.1}$$

como surge del debate del capítulo 7. Desarrollando la exponencial bajo la integral en la forma  $e^{-r(x+2.5)}[1 - (a - x - 2\frac{1}{2})r + \dots]$  y luego integrando mediante la aplicación de (11.1.12) se llega a las aproximaciones

$$\begin{aligned} {}_5K_x &\doteq e^{-r(x+2.5)}[{}_5L_x + \frac{r}{2}({}_5L_x - {}_5L_{x+5})], \\ {}_5K_x &\doteq e^{-r(x+2.5)}[{}_5L_x + \frac{r}{2}({}_5L_{x-5} - {}_5L_{x+5})], \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

donde la segunda está situada simétricamente y es obtenida promediando la primera con una expresión similar que tenga  $({}_5L_{x-5} - {}_5L_x)$  dentro de los paréntesis.

Una alternativa consiste en considerar  $e^{-ra}l(a)$  como una sola función para la que se conocen los valores en puntos discretos separados por cinco años;

**CUADRO 11.2**  
**EXTRACTO DE LA TABLA DE VIDA OFICIAL PARA HOMBRES, 1959-61,**  
**ESTADOS UNIDOS, JUNTO CON VALORES SELECCIONADOS**  
**DE LA FUNCION EXPONENCIAL**

INTERVALOS QUINQUENALES				
x	$l_x$	$e^{-0.02x}$	${}_5L_x$	$e^{-0.02(x+2.5)}$
60	73,887	0.301194	346,168	0.286505
65	64,177	0.272532	291,793	0.259240
70	52,244	0.246597	228,353	0.234570
75	38,950	0.223130	160,542	0.212248

INTERVALOS SIMPLES				
x	$l_x$	$e^{-0.02x}$	${}_1L_x$	$e^{-0.02(x+0.5)}$
65	64,177	0.272532	63,062	0.269820
66	61,947	0.267135	60,789	0.264477
67	59,631	0.261846	58,433	0.259240
68	57,235	0.256661	56,002	0.254107
69	54,770	0.251579	53,507	0.249075

hacer pasar una curva de tercer grado a través de cuatro valores consecutivos, e integrar mediante (11.1.9):

$$\begin{aligned}
 {}_5K_x &= \int_0^5 e^{-r(x+t)} l(x+t) dt \\
 &= \frac{5}{24} (e^{-r(x+5)} l_{x+5} + e^{-rx} l_x) - \frac{5}{24} (e^{-r(x+10)} l_{x+10} + e^{-r(x-5)} l_{x-5}). \quad (11.2.3)
 \end{aligned}$$

Como un ejemplo numérico de las diferencias que resultan de diferentes fórmulas, considere la tabla de vida oficial de los Estados Unidos para hombres, 1959-1961, grupo de edades 65-69, con un  $r$  arbitrario de 0,02. Usando los datos presentados en el cuadro 11.2, el lector puede verificar que usando simplemente  $e^{-07.5r} {}_5L_{65}$  en lugar de  ${}_5K_{65}$  resulta 75 644; que la corrección (11.2.2) mediante el desarrollo de  $e^{-rx}$  hasta  $r$  dentro de la integral da  $e^{-07.5r} [{}_5L_{65} + \frac{5}{24} r ({}_5L_{60} - {}_5L_{70})] = 75 772$ ; que (11.2.3), la curva de tercer grado que pasa por  $e^{-rx} l(x)$ ,  $x = 60, 65, 70, 75$ , da 75 815.

Tenemos ahora tres resultados y nos gustaría elegir el mejor. Si el ajuste en años simples realizado oficialmente es correcto, podemos multiplicar cada  ${}_1L_x$  por  $e^{-r(x+2.5)}$  y sumar los resultados. Las cifras oficiales se dan en el cuadro 11.2; el lector puede verificar que el resultado es  ${}_5K_{65} = 75 799$ . [¿A cuánto se elevaría esto si tomáramos en cuenta el término en  $r$  en el desarrollo para un

intervalo de un año análogo a (11.2.2)?] Esta evidencia sugiere que nuestro tercer método (11.2.3) es superior aunque nuestro deseo sería disponer de una mejor prueba.

La tasa intrínseca de natalidad es la tasa de natalidad en la población estable. Ponderando las tasas específicas de fecundidad por edades por las cifras de la población estable se obtiene

$$b = \frac{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}.$$

Si  $r$  satisface la ecuación característica  $\psi(r) = 1$ , el numerador es 1, y en consecuencia

$$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$$

se calcula fácilmente de la distribución estacionaria por edades y de la tasa intrínseca  $r$ . Los primeros dos grupos de edades no pueden ajustarse satisfactoriamente mediante un polinomio, de modo que escribimos

$$b = \frac{1}{\int_0^{10} e^{-ra} p(a) da + \int_{10}^{\infty} e^{-ra} p(a) da},$$

o, de (11.2.3)

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{b} = & \int_0^{10} e^{-rx} l(x) dx - \frac{5}{24} e^{-5r} l_5 + \frac{5}{2} e^{-10r} l_{10} \\ & + \frac{125}{24} e^{-15r} l_{15} + 5e^{-20r} l_{20} + 5e^{-25r} l_{25} + \dots, \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

donde  $\int_0^{10} e^{-rx} l(x) dx$  debería manejarse mediante la hipérbola de (10.4.5) o por otros medios.

La alta precisión de (11.2.3) sugiere alternativas para (11.1.15) a (11.1.18) respecto a la supervivencia. Aun escribiendo  $k(x)$  en lugar de  $e^{-rx} l(x)$ , la razón de las integrales en (11.1.14) es

$$\frac{e^{5r} \int_0^5 k(x+5+t) dt}{\int_0^5 k(x+t) dt}.$$

Evaluando cada integral por (11.2.3) se obtiene para la razón de supervivientes

$$\frac{e^{5r} [13(k_{x+10} + k_{x+5}) - (k_{x+15} + k_x)]}{13(k_{x+5} + k_x) - (k_{x+10} + k_{x-5})}.$$

Con el objeto de aplicar esto a  ${}_5L_{45}/{}_5L_{40}$  de la población femenina de los Estados Unidos, 1964, necesitamos los cinco valores de  $l_x$ :

$$l_{30} = 95,573,$$

$$l_{40} = 94,685,$$

$$l_{45} = 93,385,$$

$$l_{50} = 91,450,$$

$$l_{55} = 88,566,$$

junto con el correspondiente  $e^{-0.015x}$ . Entonces (11.2.5) da 0,983085 contra el  ${}_5L_{45}/{}_5L_{40}$  sin corregir de 0,983044 y los diversos valores corregidos que van desde 0,983080 a 0,983100 obtenidos de las fórmulas (11.1.15) a (11.1.18) y presentados anteriormente.

Las diferencias numéricas entre el factor de supervivencia  ${}_5L_{x+5}/{}_5L_x$  usado comúnmente y las fórmulas mejoradas de (11.1.15) a (11.1.18), o el mejoramiento algo diferente (11.2.5), son pequeñas evidentemente. Sin embargo, vale la pena tener en cuenta el hecho de que una población creciente tiende a hacer que la distribución dentro de cada grupo de edad sea algo más joven que la de una población estacionaria. De las diversas maneras en que se puede aplicar este principio, parece que la más precisa es la que está incorporada en (11.2.5).

### 11.3. POBLACIONES ESTABLES CAMBIADAS DE UNA APROXIMACION FINITA A OTRA

La matriz  $M$  permite una fácil computación de muchos parámetros de la población. Por ejemplo, sabemos de (3.2.30) que

$$M^t \doteq \lambda_1^t Z_1 = \lambda_1^t \{K_1\} [H_1],$$

y que para  $t$  mayor que 64 o 128 la aproximación es muy buena. De allí que la distribución estable  $\{K_1\}$  por edades se obtenga fácilmente como la primera (o cualquiera otra) columna de  $M^t/\lambda_1^t$ . Pero vimos antes que partiendo de la matriz (método  $A$ ) se llega a un  $\lambda_1$ , y por tanto a un  $r_1 = 0,2 \ln \lambda_1$  que es levemente alto.

En la distribución estable por edades el  ${}_5K_x^*$  mejorado basado en la ecuación integral  $r^*$  del método (preferido)  $B$  se puede obtener corrigiendo  ${}_5K_x$ , una columna de  $M^t/\lambda_1^t$ :

$$\begin{aligned} {}_5K_x^* &= {}_5K_x \frac{\exp[-r^*(x+2.5)]}{\lambda^{-(x+2.5)/5}} = {}_5K_x \exp[-(r^* - r)(x+2.5)] \\ &\doteq {}_5K_x (1 + (r - r^*)(x+2.5)). \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

si tanto las distribuciones original y mejorada están basadas en la misma raíz  $l_0$ . Puesto que  $r - r^* = 25r^2/8A_r$ , donde  $A_r$  es la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable ( $r - r^*$  es lo mismo que el  $r_A - r_B$  de la primera fila de la muestra 11.1), tenemos

$${}_5K_x^* \doteq {}_5K_x \left[ 1 + \frac{25r^2}{8A_r} \left( x + \frac{5}{2} \right) \right] \doteq {}_5K_x \left[ 1 + \frac{r^2}{8} \left( x + \frac{5}{2} \right) \right],$$

usando el hecho de que  $A_r$  no se aleja mucho de 25 en las poblaciones humanas. Los valores de  ${}_5K_x^*$  serán sensiblemente mayores que los de  ${}_5K_x$  en las edades más altas en las poblaciones de rápido crecimiento.

A través de una estimación mejorada la correspondiente tasa intrínseca de natalidad es

$$b^* = \frac{l_0}{\sum {}_5K_x^*}, \quad (11.3.2)$$

si la raíz de  ${}_5K_x^*$ , que se puede considerar como el valor límite de  ${}_0K_0^*$ , es igual a  $l_0$ . Reemplazando (11.3.1) en (11.3.2), y dividiendo numerador y denominador por  $\Sigma {}_5K_x$  resulta

$$b^* = \frac{l_0}{\Sigma {}_5K_x + (r - r^*)[\Sigma {}_5K_x(x + \frac{5}{2})]} = \frac{b}{1 + (r - r^*)\bar{A}_r} \\ \doteq b \left(1 - \frac{\bar{A}_r r^2}{8}\right), \quad (11.3.3)$$

donde  $\bar{A}_r$  es la edad promedio en la población estable. El  $b^*$  mejorado, al igual que  $r^*$ , es más pequeño que la cantidad basada en la estimación empleando la matriz. [Determine  $d^*$ ].

Mediante una manipulación similar, el lector puede demostrar que la edad media mejorada en la población estable,  $\bar{A}_r^*$ , es

$$\bar{A}_r^* = \frac{b^*}{b} [\bar{A}_r + (r - r^*)(\bar{\sigma}_r^2 + \bar{A}_r^2)] \doteq \bar{A}_r + \frac{\bar{\sigma}_r^2 r^2}{8},$$

donde  $\bar{\sigma}_r^2$  es la varianza de la población estable. El intervalo entre dos generaciones obtenido con una estimación mejorada,  $T^*$ , es

$$T^* = \frac{\ln R_0}{r^*} \doteq \frac{T}{1 - 25r/8A_r} \doteq T \left(1 + \frac{r}{8}\right).$$

### CUADRO 11.3

APROXIMACIONES MEDIANTE MATRICES (METODO A) Y POR ECUACION INTEGRAL (METODO B) A SIETE PARAMETROS DE LA POBLACION ESTABLE PARA DOS PAISES

	Inglaterra y Gales 1960-62, hombres		Togo, 1961 mujeres	
	A Proyección estándar o matriz (3.2.4)	B Ecuación integral (11.1.25)	A Proyección estándar o matriz (3.2.4)	B Ecuación integral (11.1.25)
1000r	9.56	9.55	27.29	27.21
1000b	20.35	20.34	50.39	50.30
${}_5K_0$	4.7571	4.7572	3.8521	3.8529
${}_5K_{20}$	3.8717	3.8725	1.7416	1.7449
${}_5K_{40}$	3.1028	3.1040	0.7952	0.7981
$\bar{A}_r$	31.89	31.89	21.03	21.06
T	30.30	30.31	27.89	27.97

Los párrafos precedentes han mostrado cómo se pueden cambiar las estimaciones hechas con la matriz (método *A*, sin asterisco) en estimaciones que concuerdan con la ecuación integral (método *B*, escrito aquí con asterisco). Los resultados para hombres, Inglaterra y Gales, 1960-62, y para mujeres, Togo, 1961, basados en la matriz y la ecuación integral, mostrarán la magnitud de las diferencias en países de baja y alta fecundidad (cuadro 11.3). Todos los resultados basados en el método *B* para Togo se pueden reproducir a partir de los resultados basados en el método *A*, dado  $\bar{\sigma}_r^2 = 307$ .

Los resultados anteriores para cambiar de *B* a *A* se adaptan fácilmente para trasladarse entre cualquier otro par de métodos entre los que aparecen en la muestra 11.1.

#### 11.4. LAS CONSTANTES *Q* DE LA ECUACION INTEGRAL

En el capítulo 5 encontramos una expresión  $Qe^{rt}$  como el término típico de la solución a la ecuación integral, donde *Q* se define como

$$Q = \frac{\int_0^\beta e^{-rt} G(t) dt}{-\psi'(r)} = \frac{V}{A_r},$$

y necesitamos alguna forma finita mediante la cual se pueda evaluar esto numéricamente a partir de los datos disponibles ordinariamente, por ejemplo, población, tabla de vida y tasas de fecundidad, todos por grupos quinquenales de edad. Recordando la definición de  $G(t)$  como el número de niños nacidos en el momento *t* de aquellas mujeres que estaban vivas en el momento 0, o sea,

$$G(t) = \int_0^\beta k(x) \frac{p(x+t)}{p(x)} m(x+t) dx, \quad t < \beta,$$

vemos que *V*, el numerador de *Q*, es en efecto una integral doble, a ser evaluada para el área del lado superior derecho de la diagonal en el diagrama de Lexis (gráfico 5.1), ya que la raíz real *V* es el valor reproductivo total y  $A_r$  es la edad media en la población estable; las demás raíces requieren valores análogos complejos de éstos.

Para cada *t* múltiplo de 5, o sea, a lo largo de cada horizontal, requeriremos la integral simple multiplicada por  $e^{-rt}$ ,

$$e^{-rt} G(t) \doteq e^{-rt} \sum_{z=0}^{z=\beta-5} {}_tK_z \frac{{}_zL_{z+t}}{{}_zL_z} F_{z+t},$$

donde, como siempre, *x* toma sus valores para intervalos quinquenales, 0, 5, 10, ...,  $\beta - 5$ . Para ir de esta estimación del integrando de *Q* para cualquier horizontal a una estimación de él para la franja que queda entre dos valores de *t*, necesitamos el promedio entre *t* y *t* + 5 multiplicado por 5:

$$\frac{5e^{-r(t+5)}G(t+5) + 5e^{-rt}G(t)}{2},$$

y sumando para *t* da

$$\begin{aligned} V &= \frac{5}{2}G(0) + 5e^{-5r}G(5) + \dots \\ &= \frac{5}{2} \sum_{z=0}^{\beta-5} {}_tK_z F_z + 5 \sum_{z=0}^{\beta-5} \sum_{t=5}^{\beta-z-5} e^{-rt} {}_tK_z \frac{{}_zL_{z+t}}{{}_zL_z} F_{z+t} \end{aligned} \quad (11.4.1)$$



como numerador de  $Q$ . Esta cantidad dividida por  $A_r = -\psi'(\tau)$  nos proporciona la estimación requerida de  $Q$ .

Los datos del cuadro 2.1 nos servirán nuevamente para un ejemplo numérico. Para  $Q_1$  calculamos primero  ${}_5K_x/{}_5L_x$ ,  $x = 0, 5, 10, \dots$ , y enseguida multiplicamos esto por  ${}_5L_x F_x$  y sumamos para las edades  $x$  que son múltiplos de 5; después multiplicamos por  ${}_5L_{x+5} F_{x+5}$  y sumamos de nuevo, etc. Para las mujeres de los Estados Unidos, 1964, el resultado que se obtiene basado en (11.4.1) es

$$Q_1 = \frac{V}{A_r} = \frac{55,696}{25.974} = 2144.3$$

en miles de nacimientos. De allí que el primer término de (5.1.3) para una condición inicial consistente con la distribución por edades de la población femenina de los Estados Unidos, 1964, es

$$\begin{aligned} B(t) &= 2144.3e^{(0.01870)t} \\ &= 2144.3(1.08168)^{t/5} \text{ miles.} \end{aligned}$$

En  $t = 100$  esto da 10 310,1 miles. Como una verificación rápida, observamos que la matriz de proyección de la población femenina de 1964 daría 10 382,8 mil nacimientos en el año 2064. La verificación es aproximada debido a que al cabo de 100 años aún están actuando algunas raíces distintas de la dominante, y debido a que la proyección es una aproximación finita diferente de la ecuación para  $B(t)$ .

El numerador de  $Q_1$  dado en (11.4.1) y aplicado a la raíz real es una aproximación al mismo  $V$ , valor reproductivo total femenino, definido para una mujer de edad  $x$  en (3.2.15) y que aparece en el conjunto de todas las edades en el cuadro 3.5. Su estimación en (11.4.1) es apropiada a la ecuación integral, en tanto que  $[H_1]\{K^{(0)}\}$  de la sección 3.2 corresponde a la formulación matricial. Para las mujeres de los Estados Unidos, 1964, el valor obtenido de (11.4.1) mostrado arriba es  $V = 55\,696\,000$ , contra el dado en el cuadro 3.5, que es  $V = 55\,728\,000$ , esto es, una diferencia de 1 en 2 000.

Para la raíz real  $r_1$ , la figura sólida cuyo volumen pretendemos medir como  $V$  tiene la forma de una campana más bien asimétrica sobre el eje  $x$  en el momento 0; ella se inclina para abajo a medida que avanza en el tiempo. Si  $r$  es 33 por mil, entonces al cabo de 30 años será alrededor de 1/2.7 de la altura inicial. La parte de él que constituye la integral  $V$  es sólo aquella que está a la derecha de la diagonal en el diagrama de Lexis (gráfico 5.1): la mitad de un pan cortado diagonalmente. [Lotka (1942) muestra una forma de gráfico algo diferente.]

## 11.5. RESUMEN Y COMPUTACION NUMERICA BASADO EN CUATRO FORMULACIONES DEL PROCESO DE RENOVACION

Lo que sigue es un resumen de las cuatro aproximaciones finitas a la ecuación integral introducida arriba como  $A$  (capítulos 2 y 3),  $B$  (secciones 5.2 y 5.3),  $C$  (sección 5.7), y  $D$  (sección 5.8). Se ordenarán aquí en orden ascendente de acuerdo a la raíz real a que dan lugar:  $B, C, A, D$ .

Cuando se resuelve la ecuación de renovación mediante el método de Hertz-Lotka se llega a la aproximación (11.1.25) usada comúnmente para la ecuación característica (5.2.2):

$$l_0 \phi_B(r) = e^{-17.5r} L_{15} F_{15} + e^{-22.5r} L_{20} F_{20} + \dots + e^{-52.5r} L_{50} F_{50} = l_0, \quad (11.5.1)$$

donde la fecundidad se extiende desde los 15 a los 55 años de edad y donde hemos omitido la corrección por agrupamiento.

La segunda formulación de la ecuación de renovación en orden ascendente de la raíz real hace uso de la transformada de Laplace. La forma del histograma da como (5.7.5) la ecuación característica

$$\begin{aligned} l_0 \phi_C(r) &= \frac{L_{15} F_{15}}{5r} (e^{-15r} - e^{-20r}) + \frac{L_{20} F_{20}}{5r} (e^{-20r} - e^{-25r}) + \dots \\ &+ \frac{L_{50} F_{50}}{5r} (e^{-50r} - e^{-55r}) = l_0. \end{aligned} \quad (11.5.2)$$

Mediante comparación directa de términos en  $L_{15} F_{15}$ , etc., el lector puede demostrar que

$$\phi_C(r) = \phi_B(r) \operatorname{senh}(5r/2)/(5r/2),$$

donde nuevamente  $\operatorname{senh}$  es el seno hiperbólico.

El método del capítulo 3 es la proyección de población corriente traducida a la forma matricial. Si en (3.2.4) consideramos las raíces características  $\lambda$  de la matriz de proyección como  $\lambda = e^{5r}$  ó  $r = 0.2 \ln \lambda$ , entonces obtenemos una ecuación en  $r$  comparable con la precedente:

$$\begin{aligned} 2l_0 \phi_A(r) &= L_{15} F_{15} e^{-15r} + (L_{15} F_{15} + L_{20} F_{20}) e^{-20r} \\ &+ (L_{20} F_{20} + L_{25} F_{25}) e^{-25r} + \dots + L_{50} F_{50} e^{-55r} = 2l_0. \end{aligned} \quad (11.5.3)$$

Demuestre que

$$\phi_A(r) = \phi_B(r) \cosh(5r/2) = \phi_C(r) \coth(5r/2) 5r/2,$$

siendo  $\coth$  la cotangente hiperbólica.

La cuarta formulación es a través de las fracciones parciales, en la sección 5.8. La ecuación que resulta cuando en (5.8.7) se reemplaza  $s$  por  $e^{-5r}$  es

$$l_0 \phi_D(r) = 5l_{15} F_{12.5} e^{-15r} + 5l_{20} F_{17.5} e^{-20r} + \dots + 5l_{50} F_{52.5} e^{-55r} = l_0, \quad (11.5.4)$$

donde  $F_{12.5}$  etc. es la tasa específica de fecundidad por edades para los cinco años centrados en la edad 15, etc. No podemos aplicar esto a datos sin una aproximación a  $F_{x+2.5}$  a partir de  $F_x$ ; la más simple es la media aritmética:

$$F_{x+2.5} = \frac{F_x + F_{x+5}}{2}, \quad x = 15, 20, \dots, 50,$$

y supondremos que  $\psi_D(r)$  se basa en esto.

[Demuestre que la aproximación

$$F_{x+2.5} = 0.1 \left( \frac{L_x F_x}{l_{x+5}} + \frac{L_{x+5} F_{x+5}}{l_{x+5}} \right), \quad x = 15, 20, \dots, 50,$$

en (11.5.4) hace  $\psi_D(r)$  idéntica a  $\psi_A(r)$ ].

El cuadro 11.4 muestra en cuatro columnas las soluciones para la raíz real de las cuatro ecuaciones resumidas en esta sección. No sólo aumentan las raíces reales de izquierda a derecha —la ecuación integral da el  $r$  más bajo y las fracciones parciales el más alto—, sino que las diferencias crecen cuando vamos de izquierda a derecha; la diferencia por exceso de la proyección (11.5.3) sobre la transformada de Laplace (11.5.2) es aproximadamente 2 veces la de la transformada de Laplace (11.5.2) sobre la ecuación integral (11.5.1); la solución por fracciones parciales (11.5.4) es irregular y hasta un dos por ciento más grande que las demás.

La variación entre las raíces complejas que aparece en el cuadro 11.4 es más grande aún. El resultado de la fracción parcial es cercano a la proyección,

CUADRO 11.4  
PRIMERAS TRES RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA  
EN LAS CUATRO FORMULACIONES. MUJERES

	Ecuación integral (11.5.1) $\psi_B(r) = 1$	Transformada de Laplace del histograma (11.5.2) $\psi_C(r) = 1$	Proyección (11.5.3) $\psi_A(r) = 1$	Fracción parcial (11.5.4) $\psi_D(r) = 1$
RAIZ REAL $r_1$				
Francia 1962	0.01015	0.01016	0.01016	0.01016
México 1960	0.03325	0.03329	0.03338	0.03398
Holanda 1962	0.01375	0.01376	0.01377	0.01387
Taiwán 1961	0.03141	0.03145	0.03152	0.03185
RAICES COMPLEJAS PRINCIPALES $r_2, r_3$				
Francia 1962	-0.0245 $\pm 0.2278i$	-0.0263 $\pm 0.2266i$	-0.0298 $\pm 0.2240i$	-0.0297 $\pm 0.2240i$
México 1960	-0.0164 $\pm 0.2158i$	-0.0176 $\pm 0.2147i$	-0.0198 $\pm 0.2125i$	-0.0192 $\pm 0.2126i$
Holanda 1962	-0.0163 $\pm 0.2139i$	-0.0177 $\pm 0.2132i$	-0.0207 $\pm 0.2114i$	-0.0206 $\pm 0.2114i$
Taiwán 1961	-0.0066 $\pm 0.2194i$	-0.0082 $\pm 0.2185i$	-0.0115 $\pm 0.2165i$	-0.0112 $\pm 0.2166i$

aunque algo irregular, en tanto que la transformada de Laplace es cómodamente intermedia y además está aproximadamente a medio camino entre la ecuación integral y la proyección. [Demuestre que los tres puntos que representan las raíces complejas principales de las tres ecuaciones (11.5.1), (11.5.2) y (11.5.3) caen sobre una recta.]

### Un criterio general

En caso de que hubiera diferentes métodos finitos disponibles para estimar una integral u otra cantidad, nos gustaría usar aquel que nos acerque más a la respuesta "verdadera". ¿Pero qué pasa si no va a haber una respuesta verdadera? Se obtiene un criterio general para comparar las aproximaciones finitas propuestas calculándolas de los datos con diferentes amplitudes de intervalos de edad, por ejemplo diez años y cinco años. Si no sabemos cuál es la respuesta verdadera, podemos observar cuál de los métodos altera menos la respuesta que él proporciona para el intervalo decenal y el intervalo quinquenal. Careciendo de otro conocimiento, podemos suponer que este método también variará menos de cinco años a un año, etc. Desarrolle una teoría para mostrar en qué circunstancias el error de una aproximación lineal es proporcional al cuadrado de la amplitud del intervalo, y en qué circunstancias al cubo.

Esto concluye un recuento algo extenso de las distintas maneras necesariamente aproximadas en que se pueden obtener los números de las fórmulas desarrolladas en la teoría de los capítulos anteriores, y particularmente del capítulo 5. Uno debería disculparse de que haya tanto detalle de pequeño efecto numérico, y aun de que la computación mecánica haga que pequeñas diferencias aparezcan notables cuando antes se habrían perdido entre los errores a que está inevitablemente sujeto el trabajo manual.

V Parte

INTERACCION ENTRE  
POBLACIONES



## ASPECTOS CUALITATIVOS DE LA INTERACCION ENTRE POBLACIONES

### Independencia y asociación

Hasta aquí nuestra discusión sólo ha considerado poblaciones de una especie, aisladas y para un sexo, dentro de las cuales no hemos reconocido otras subdivisiones que las de por edad. Los modelos de los capítulos 1 a 8 son demasiado simples para describir, en una especie o sexo particular, las relaciones de categorías adicionales a la edad, y ellos no han hecho intentos por tratar con diversas especies o con los dos sexos simultáneamente.

En *asociación biológica* (Volterra, 1926, págs. 33-37) el tamaño de una especie afecta, favorablemente o no, el crecimiento de otras. La asociación adopta distintas formas, que se discutirán en este capítulo y en los dos siguientes: las relaciones entre el cazador y su presa, los dos sexos en una población humana o animal; la migración entre las poblaciones de dos territorios que se comunican, los casados y solteros de un grupo humano, mujeres de diferente paridez, personas en el colegio o en la fuerza de trabajo.

### 12.1. EL MODELO LINEAL

Algunas de estas situaciones se pueden analizar de una manera preliminar (Lotka, 1956, págs. 78, 146) mediante un par de ecuaciones diferenciales lineales,

$$\begin{aligned} dN_1(t)/dt &= a_{11}N_1(t) + a_{12}N_2(t), \\ dN_2(t)/dt &= a_{21}N_1(t) + a_{22}N_2(t), \end{aligned} \tag{12.1.1}$$

expresadas en términos matriciales como  $\{N'(t)\} = \mathbf{A}\{N(t)\}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(t) = \begin{Bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{Bmatrix}.$$

Si  $a_{11}$  es positivo, mientras más ejemplares haya de la primera especie, ésta más aumentará, y en ausencia de la segunda lo hará a una tasa  $a_{11}$ , que llamaremos su tasa *autónoma*. Si  $a_{22}$  es también positivo y  $a_{12} = a_{21} = 0$ , las especies son independientes y no surgen mayores consecuencias. Simbolizaremos esta configuración por

$$\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix},$$

y ella implica ausencia de asociación en el sentido de este capítulo.

Las asociaciones de mayor interés son cuatro.

a) *Competencia*. Supongamos que las dos especies se obstruyen entre sí. Ambas tasas autónomas,  $a_{11}$  y  $a_{22}$ , tendrán que ser positivas si cada especie ha de sobrevivir en ausencia de la otra, y *a fortiori* si han de sobrevivir juntas. Debido a que el crecimiento de la primera disminuye las subsistencias de la segunda y en consecuencia la tasa de crecimiento de la segunda,  $dN_2(t)/dt$ , tenemos

$$\frac{\partial(dN_2(t)/dt)}{\partial N_1(t)} = a_{21} < 0, \quad (12.1.2)$$

que denominaremos la *dependencia* (negativa en este caso) de la segunda sobre la primera, y esta relación es recíproca entre las dos especies. De allí que la descripción de la competencia, en la medida en que ella se puede dar en el modelo lineal, es

$$a_{11} > 0; \quad a_{22} > 0; \quad a_{12} < 0; \quad a_{21} < 0,$$

que podemos escribir

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}.$$

b) *Depredación*. Si la segunda especie vive comiéndose a la primera, o como un parásito de la primera, entonces, mayores cantidades de la segunda especie afectan adversamente el crecimiento de la primera, y

$$\frac{\partial(dN_1(t)/dt)}{\partial N_2(t)} = a_{12} \quad (12.1.3)$$

debe ser negativa. Inversamente, mayores cantidades de la presa permitirán un incremento en el depredador, y  $a_{21}$  debe ser positivo. Para el caso de depredación pura, la segunda no tiene otra sustentación que la primera y por ello su tasa autónoma  $a_{22}$  es negativa. En consecuencia tenemos

$$a_{11} > 0; \quad a_{22} < 0; \quad a_{12} < 0; \quad a_{21} > 0,$$

o, en forma breve,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline + & - \\ \hline \end{array}.$$

para los casos de la presa-depredador, el parásito-huésped, y situaciones intermedias (Elton, 1933, pág. 27).

c) *Depuración o saprofitismo*. Si la segunda vive de los residuos o del cadáver de la primera, no produciéndole ni beneficio ni daño, y no pudiera sobrevivir sin ella, entonces

$$a_{11} > 0; \quad a_{22} < 0; \quad a_{12} = 0; \quad a_{21} > 0;$$

esto es,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & 0 \\ \hline + & - \\ \hline \end{array}.$$



d) *Simbiosis*. Si la segunda vive de la primera, pero la beneficia, la relación es simbiótica, donde cada una ayuda al crecimiento de la otra; si cada una es también necesaria a la otra, tenemos

$$a_{11} < 0; \quad a_{22} < 0; \quad a_{12} > 0; \quad a_{21} > 0,$$

o

$$\begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix}.$$

La población humana y el ganado de un área existe en relación simbiótica, donde la leche y la carne constituyen el alimento humano y la gente cultiva pasto para las vacas. Si el pasto crece en forma natural, los humanos que comen carne son depredadores de las vacas; aquellos que toman leche son parásitos.

El conjunto del cual son seleccionados estos cuatro casos se puede formar escribiendo los signos posibles de las cuatro constantes,  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ , en un arreglo cuadrado. El número de combinaciones es evidentemente  $2^4 = 16$  si  $a_{ij} \neq 0$ , y  $3^4 = 81$  si se permiten valores nulos. Algunos de éstos se ven mejor como combinaciones de los demás; por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}$$

significa que las dos especies tienen tasas autónomas de crecimiento positivas y también que se sostienen simbióticamente entre sí.

Aquellos que no se interesan por los tecnicismos de una solución explícita para las ecuaciones diferenciales pueden estudiar las propiedades de (12.1.1) con la ayuda de un computador. Las ecuaciones proporcionan derivadas en el momento inicial a partir del conocimiento de  $N_1(0)$  y  $N_2(0)$ , que son las poblaciones iniciales de las dos especies. Dadas éstas y las  $a$ , las derivadas permiten dar un paso de amplitud  $h$ :

$$N_1(h) = N_1(0) + hN_1'(0) = N_1(0) + h[a_{11}N_1(0) + a_{12}N_2(0)],$$

$$N_2(h) = N_2(0) + hN_2'(0) = N_2(0) + h[a_{21}N_1(0) + a_{22}N_2(0)].$$

Ahora se puede calcular  $N_1(h)$  y  $N_2(h)$ , y a continuación substituirlos en lugar de  $N_1(0)$  y  $N_2(0)$  y luego repetir el ciclo. Este proceso de avances sucesivos da una solución más precisa cuando  $h$  es pequeño y se puede mejorar considerablemente mediante el uso de derivadas de orden superior, como en el capítulo 13, pero tal refinamiento no es necesario para el propósito actual, que consiste en determinar el carácter general de la trayectoria. [Expresa las condiciones de avances sucesivos en forma de una ecuación matricial y bosqueja un análisis en términos de los valores característicos. ¿Qué sucede a esta solución cuando  $h$  se hace pequeño?]

Como ejemplo numérico ensayamos las ecuaciones (cuadro 12.1, sección I)

$$N_1'(t) = 0.01N_1(t) - 0.04N_2(t),$$

$$N_2'(t) = 0.02N_1(t) - 0.05N_2(t),$$

que corresponden a depredación, y comenzamos con  $N_1(0) = 90$ ,  $N_2(0) = 80$ ; al cabo de 500 ciclos (años), las cantidades han descendido al orden de 0.1. Por

**CUADRO 12.1**  
**SOLUCION NUMERICA APROXIMADA PARA OCHO CASOS DE DEPREDACION**  
**USANDO SOLO LAS PRIMERAS DERIVADAS E INTERVALOS DE UN AÑO\***

	I		II	
	$N_1'(t) = 0.01N_1(t) - 0.04N_2(t)$ $N_2'(t) = 0.02N_1(t) - 0.05N_2(t)$		$N_1'(t) = 0.05N_1(t) - 0.04N_2(t)$ $N_2'(t) = 0.02N_1(t) - 0.01N_2(t)$	
t	$N_1(t)$	$N_2(t)$	$N_1(t)$	$N_2(t)$
0	90	80	90	80
50	27.36	21.31	203	159
100	10.65	6.99	574	382
200	2.84	1.50	$7.90 \times 10^3$	$4.21 \times 10^3$
300	0.99	0.50	$1.43 \times 10^5$	$7.24 \times 10^4$
400	0.36	0.18	$2.73 \times 10^6$	$1.37 \times 10^6$
500	0.13	0.07	$5.24 \times 10^7$	$2.62 \times 10^7$
	III		IV	
	$N_1'(t) = 0.1N_1(t) - 0.1N_2(t)$ $N_2'(t) = 0.1N_1(t) - 0.2N_2(t)$		$N_1'(t) = 0.01N_1(t) - 0.04N_2(t)$ $N_2'(t) = 0.03N_1(t) - 0.05N_2(t)$	
t	$N_1(t)$	$N_2(t)$	$N_1(t)$	$N_2(t)$
0	80	90	80	90
50	$1.07 \times 10^3$	409	-1.03	16.04
100	$2.15 \times 10^4$	$8.21 \times 10^3$	-11.26	-4.65
200	$8.64 \times 10^6$	$3.30 \times 10^6$	-0.86	-1.39
300	$3.47 \times 10^9$	$1.33 \times 10^9$	0.25	0.16
400	$1.39 \times 10^{12}$	$5.34 \times 10^{11}$	0.00	0.02
500	$5.62 \times 10^{14}$	$2.15 \times 10^{14}$	0.00	0.00

\* Programado por William Cummings y William Taylor.

otra parte, las ecuaciones (cuadro 12.1, sección II)

$$N_1'(t) = 0.05N_1(t) - 0.04N_2(t),$$

$$N_2'(t) = 0.02N_1(t) - 0.01N_2(t),$$

también representan depredación y con coeficientes que no parecen muy diferentes de los precedentes, producen números del orden de  $10^7$  al cabo de 500 años. Los dos pares de ecuaciones arrojan resultados muy diferentes: en el primero ambas especies casi han desaparecido, en tanto que en el segundo han crecido astronómicamente. Llevando a cabo tal proceso, para dichas ecuaciones.

Cuadro 12.1 (continuación)

V			VI	
$N_1'(t) = 0.05N_1(t) - 0.04N_2(t)$			$N_1'(t) = 0.03N_1(t) - 0.04N_2(t)$	
$N_2'(t) = 0.03N_1(t) - 0.01N_2(t)$			$N_2'(t) = 0.03N_1(t) - 0.03N_2(t)$	
t	$N_1(t)$	$N_2(t)$	$N_1(t)$	$N_2(t)$
0	80	90	80	90
50	2.33	126	-0.95	45.5
100	-580	-210	-82.4	-32
200	$-3.24 \times 10^3$	$-4.47 \times 10^3$	-55.6	-82
300	$3.74 \times 10^4$	$1.97 \times 10^5$	103	60
400	$1.05 \times 10^5$	$2.05 \times 10^5$	23.7	65
500	$-2.21 \times 10^6$	$-1.44 \times 10^6$	-114	-83
VII			VIII	
$N_1'(t) = 0.01N_1(t) - 0.03N_2(t)$			$N_1'(t) = 0.05N_1(t) - 0.03N_2(t)$	
$N_2'(t) = 0.03N_1(t) - 0.05N_2(t)$			$N_2'(t) = 0.03N_1(t) - 0.01N_2(t)$	
t	$N_1(t)$	$N_2(t)$	$N_1(t)$	$N_2(t)$
0	80	90	80	90
50	23.6	27.2	175	202
100	6.55	7.88	367	439
200	0.33	0.51	$1.11 \times 10^3$	$1.64 \times 10^3$
300	-0.03	0.00	$-3.13 \times 10^3$	$6.71 \times 10^2$
400	-0.01	-0.01	$-1.04 \times 10^5$	$-7.62 \times 10^4$
500	0.00	0.00	$-1.34 \times 10^6$	$-1.14 \times 10^6$

con los ocho conjuntos de coeficientes que aparecen en el cuadro 12.1, se obtienen las extremadamente variadas trayectorias de donde se sacaron los valores. La explicación de las grandes diferencias radica en las raíces de una ecuación característica, a cuya formulación procedemos ahora.

Diferenciamos el primer miembro de (12.1.1) y en la derivada sustituimos el valor de  $dN_2(t)/dt$  del segundo miembro; después de efectuar alguna otra simplificación, que se deja al lector, surge una ecuación lineal de segundo orden en  $N_1(t)$

$$N_1''(t) - (a_{11} + a_{22})N_1'(t) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})N_1(t) = 0. \quad (12.1.4)$$

Evidentemente  $e^{\lambda t}$  es una solución si  $\lambda$  satisface la ecuación característica

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}\}, \quad (12.1.5)$$

y siendo aditivas las soluciones, la trayectoria de la primera especie es

$$N_1(t) = n_{11}e^{\lambda_1 t} + n_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad (12.1.6)$$

donde  $n_{11}$  y  $n_{12}$  son constantes. (Ellas se determinan a partir de las condiciones iniciales con una técnica ejemplificada abajo.) Puesto que nos aseguráramos las mismas raíces características para la correspondiente ecuación diferencial de segundo orden en  $N_2(t)$  sola [esto sigue de la simetría de (12.1.5)], la otra parte de la solución debe ser

$$N_2(t) = n_{21}e^{\lambda_1 t} + n_{22}e^{\lambda_2 t}. \quad (12.1.7)$$

Escribiremos  $N$  para designar la disposición de las  $n$  en forma de una matriz.

### Estudio de la trayectoria fase

Sin embargo, la solución cuantitativa detallada se requiere en forma menos frecuente que un enunciado cualitativo; queremos saber, por ejemplo, si las trayectorias de las dos especies serán finalmente estacionarias a un nivel finito o escapan al infinito, y, si son finitas, si se presentaran ciclos. Para tales conclusiones, es útil conocer cómo se relacionarán entre sí las cantidades de las dos especies, independientemente del tiempo. La relación entre  $N_1$  y  $N_2$  sin que intervenga la variable tiempo se denomina *trayectoria fase* del sistema. Los distintos resultados posibles en la solución de (12.1.1) a través de la trayectoria fase son discutidos por Davis (1960, pág. 311), Kaplan (1958, pág. 412) y Coddington y Levinson (1955, pág. 371), y a continuación serán brevemente resumidos.

Para eliminar la variable tiempo entre (12.1.6) y (12.1.7), resolvemos éstas como si fueran un par de ecuaciones lineales en las incógnitas  $e^{\lambda_1 t}$  y  $e^{\lambda_2 t}$ ,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \frac{n_{22}N_1(t) - n_{12}N_2(t)}{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}, \\ e^{\lambda_2 t} &= \frac{n_{11}N_2(t) - n_{21}N_1(t)}{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}, \end{aligned} \quad (12.1.8)$$

suponiendo que el común denominador,  $|N| = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}$ , no es cero. Entonces elevamos la primera a la potencia  $\lambda_2/\lambda_1$ , e igualamos los dos valores de  $e^{\lambda_2 t}$ . Enseguida por una rotación de los ejes sin traslación del origen, (12.1.8) da lugar a la trayectoria fase

$$w = z^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad (12.1.9)$$

donde  $w = (n_{11}N_2 - n_{21}N_1)/|N|$  y  $z = (n_{22}N_1 - n_{12}N_2)/|N|$  son las nuevas coordenadas.

CUADRO 12.2

POSIBLES PUNTOS ESTACIONARIOS EN LA INTERACCION DE DOS ESPECIES, EN BASE A CUATRO CONDICIONES SELECCIONADAS DE LOS SIGNOS DE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES, MOSTRANDO OCHO CONDICIONES EN LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA DE (12.1.4) (Véase Gráfico 12.1)

Condiciones en las raíces	Signos de los coeficientes			
	a) Competencia	b) Depredación	c) Depuración	d) Simbiosis
	+ - - +	+ - + -	+ 0 + -	- + + -
<i>Reales y distintas</i> $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$				
I. Ambas negativas - estable $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}; a_{11} + a_{22} < 0$				
II. Ambas positivas - inestable $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}; a_{11} + a_{22} > 0$				
III. De signo opuesto - inestable $a_{11}a_{22} < a_{12}a_{21}$				
<i>Complejas</i> $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$				
IV. Parte real negativa - ciclos amortiguados $a_{11} + a_{22} < 0$				
V. Parte real positiva - ciclos crecientes $a_{11} + a_{22} > 0$				
VI. Imaginarias puras - ciclos invariables $a_{11} + a_{22} = 0$				
<i>Reales e iguales</i> $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$				
VII. Negativas - estable $a_{11} + a_{22} < 0$				
VIII. Positivas - inestable $a_{11} + a_{22} > 0$				

En el plano  $xy$ ,  $x = a_{11} + a_{22}$ ;  $y = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

Los nuevos ejes no serán rectangulares, a menos que se verifique:  $n_{11}n_{12} + n_{21}n_{22} = 0$ , pero esto es de importancia secundaria para el presente propósito, y los dibujos de la trayectoria fase se distorsionarán en un sistema de referencia rectangular. Se puede ahora aplicar la solución formal de (12.1.1) a las cuatro formas de asociación. En el gráfico 12.1 aparecen las curvas de  $w$  contra  $z$ , cada una en el área del plano  $xy$  en que puede ocurrir.

a) *Competencia*. Dos especies en competencia se designan como

+	-
-	+

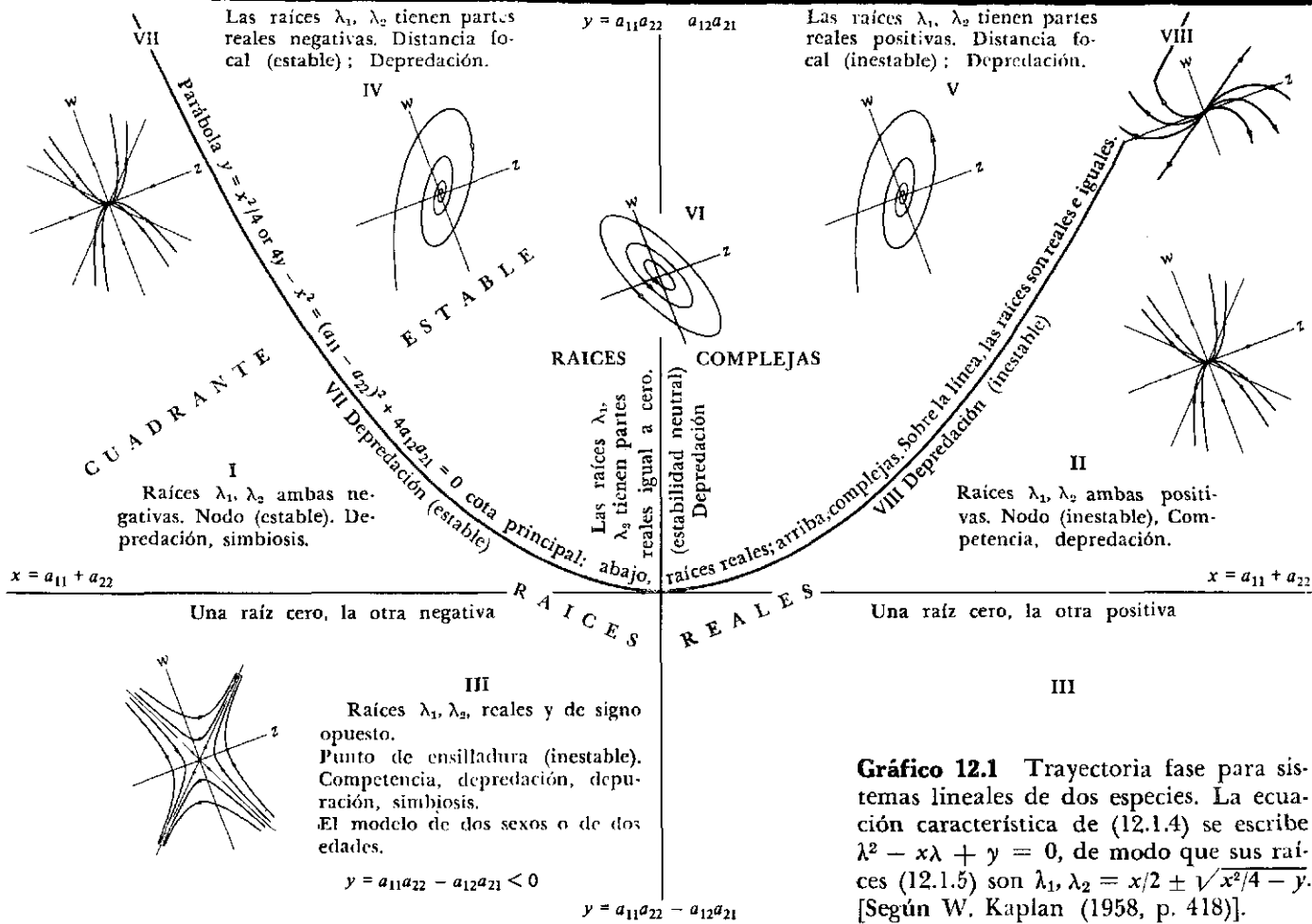
Puesto que los elementos  $a_{12}$  y  $a_{21}$  de la diagonal secundaria son negativos, las raíces deben ser reales, como se puede probar mediante (12.1.5). Siendo reales, si son distintas de cero deben ser I) negativas, II) positivas, o III) una negativa y una positiva (véase el cuadro 12.2).

I) El caso de ambas raíces negativas requiere que la suma de  $a_{11}$  y  $a_{22}$  sea negativa [¿por qué?] y esto es inconsistente con el hecho de que sean separadamente positivas como lo requiere la condición de competencia. Por tanto el modelo I no puede representar competencia, lo cual es un hecho importante en cuanto que sólo las raíces negativas (o raíces complejas con partes reales negativas) permiten estabilidad, en un sentido que se discutirá abajo.

II) Ambas raíces serán positivas si  $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$  [demuestre esto] vale decir, si la media (geométrica) de las tasas autónomas es mayor que la media de las interdependencias. La referencia a (12.1.6) y (12.1.7) muestra que, con raíces positivas, los números  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  tienden a más o menos infinito, dependiendo del coeficiente  $n_i$ , del término con el mayor  $\lambda$ . Se trata de una situación en que no se puede establecer una cota superior para los valores absolutos de los números.

III) Las raíces serán de signo opuesto si  $a_{11}a_{22} < a_{12}a_{21}$ , esto es, si las tasas autónomas son menores (en promedio geométrico) que el valor absoluto de los efectos de competencia. Esta es una competencia más genuina que la del caso precedente, donde los efectos competitivos modificaban los efectos autónomos, pero no podían revertirlos. Con una raíz positiva y una negativa (12.1.9) será una hipérbola con forma de silla de montar, pareciéndose a la condición III del gráfico 12.1 [Demuestre esto]. Evidentemente, entre  $w$  y  $z$ , uno de ellos tiende a cero y el otro a más o menos infinito con los ejes como asíntotas. Para obtener  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  a partir de  $w$  y  $z$  los ejes deben volverse a rotar hacia atrás, y evidentemente el movimiento es hacia una asíntota que aún pasa por el origen. Esto implica una razón fija entre  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  cuando  $t$  se hace grande. Las ecuaciones (12.1.1) suponen provisión indefinida del alimento común y en consecuencia, crecimiento indefinido de las dos especies a una tasa determinada por la raíz positiva, a pesar del hecho de que ellas se obstruyen entre sí.

Evidentemente II) y III) constituyen el conjunto exhaustivo de posibilidades para la competencia en el caso lineal, con la excepción sin importancia de  $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ . El lector puede demostrar que en dicho caso  $\lambda_1 = a_{11} + a_{22}$ ,  $\lambda_2 = 0$  y puede describir las trayectorias. No habiendo otros casos bajo competencia, volvemos al de depredación.



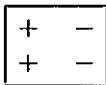
**Gráfico 12.1** Trayectoria fase para sistemas lineales de dos especies. La ecuación característica de (12.1.4) se escribe  $\lambda^2 - x\lambda + y = 0$ , de modo que sus raíces (12.1.5) son  $\lambda_1, \lambda_2 = x/2 \pm \sqrt{x^2/4 - y}$ . [Según W. Kaplan (1958, p. 418)].

**CUADRO 12.3**  
**LOCALIZACION DE LOS COEFICIENTES Y MAGNITUD DE LAS RAICES**  
**PARA OCHO CASOS DE DEPREDACION DEL CUADRO 12.1**

Caso	Localización en Gráfico 12.1			Raíces	
	x	y	Δ	λ <sub>1</sub>	λ <sub>2</sub>
I	-	+	+	-0.01	-0.03
II	+	+	+	0.03	0.01
III	-	-	+	0.0618	-0.1618
IV	-	+	-	-0.02 ±	0.0173i
V	+	+	-	0.02 ±	0.0173i
VI	0	+	-		± 0.0173i
VII	-	+	0	-0.02	-0.02
VIII	+	+	0	0.02	0.02

$x = a_{11} + a_{22}$ ;  $y = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ;  $\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$ .

b) *Depredación.* Para este caso, designado



en referencia a la matriz de coeficientes de (12.1.1), el producto  $4a_{12}a_{21}$  bajo el radical en (12.1.5) es necesariamente negativo. Las raíces serán reales si la expresión bajo el radical en (12.1.5) es positivo. Este es positivo si

$$(a_{11} + |a_{22}|)/2 > \sqrt{|a_{12}a_{21}|}, \tag{12.1.10}$$

lo que expresado en palabras nos dice que la media (aritmética) de los valores absolutos de las tasas autónomas  $a_{11}$  y  $|a_{22}|$  es mayor que la media (geométrica) de las interdependencias  $|a_{12}|$  y  $a_{21}$ . Tal relación se podría cumplir fácilmente si la segunda especie tiene alguna presa alternativa en adición a la primera especie.

**Condiciones para la oscilación**

El resultado de la depredación genuina entre solamente dos especies es bastante diferente, en la situación en que la media (geométrica) de las interdependencias es mayor que la media (aritmética) de las tasas autónomas. En tal caso las raíces son complejas y se puede escribir  $\lambda_1, \lambda_2 = x \pm iy$ . La primera trayectoria será

$$N_1(t) = n_{11}e^{(x+iy)t} + n_{12}e^{(x-iy)t},$$



o si  $n_{11} + n_{12} = m_{11}$ ,  $n_{11} - n_{12} = m_{12}$ ,

$$N_1(t) = e^{xt}(m_{11} \cos yt + im_{12} \operatorname{sen} yt), \quad (12.1.11)$$

la cual es una expresión real, puesto que  $m_{12}$  es un imaginario puro por la misma razón que  $Q_2 - Q_3$  en (5.8.9) es un imaginario puro.

El término que aparece entre paréntesis en (12.1.11) es un par de curvas sinusoidales que difieren en fase en  $90^\circ$ , con longitud de onda  $2\pi/y$ . Su amplitud crece o disminuye con el tiempo según que  $x$  sea positiva o negativa. Pero  $x$  es  $\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ ; las ondas son amortiguadas si el promedio de las tasas autónomas es negativo; crecientes si el promedio es positivo; inalteradas si el promedio es cero.

La ecuación (12.1.11) y su análoga para  $N_2(t)$  se puede considerar como un par de ecuaciones simultáneas en las incógnitas  $e^{xt} \cos yt$  y  $e^{xt} \operatorname{sen} yt$ . Su solución es la misma que los segundos miembros de (12.1.8) si se escribe  $m$  en lugar de  $n$ . Rotando los ejes, al denominar a los segundos miembros  $z$  y  $w$  respectivamente, da

$$e^{xt} \cos yt = z, \quad e^{xt} \operatorname{sen} yt = w,$$

o

$$\sqrt{z^2 + w^2} = e^{xt}, \quad w/z = \tan yt.$$

Si  $x = 0$  las raíces son imaginarias puras y constituyen el caso VI de los cuadros 12.1, 12.2 y 12.3; la trayectoria fase es un círculo en las unidades de  $w$  y  $z$  seleccionadas. Con  $x > 0$ , la eliminación de  $t$  produce la ecuación de una espiral con movimiento hacia afuera cuando  $t$  aumenta, y tenemos el caso V. Con  $x < 0$ , se aplica la misma curva, pero el movimiento es hacia adentro, indicando estabilidad (IV). Si  $x = 0$ , el sistema podría continuar indefinidamente con oscilaciones en torno a una media fija (VI). También podría continuar indefinidamente alrededor de una media fija si la presa tuviera un protector parcial y el depredador creciera sólo hasta lo que una producción anual de la presa pudiera alimentar (Sauvy, 1959, Vol. I, pág. 19). Esto último no se puede describir mediante el modelo lineal (12.1.1), pero está cubierto por (12.3.1), presentado más adelante.

Se producen ondas, tanto en las poblaciones de un sexo de los capítulos 3 y 5 en que se reconocía la edad, como en las dos poblaciones de la relación depredador-presa. Lo que situaciones de otra manera diferentes tienen en común es un efecto de retardo, similar a un termostato que responde al cambio de temperatura no de manera inmediata sino después de un período finito. Los mecanismos de retroalimentación tienen cierta analogía con la población.

Moran (1950) discute una especie aislada cuya población en el  $t$ ésimo año es generada por la relación  $N_t = aN_{t-1} + bN_{t-2}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes. El enfoque usual a tales ecuaciones (Goldberg, 1961, pág. 141; Miller, 1960, pág. 133) consiste en ensayar  $N_t = x^t$  y obtener una ecuación característica en  $x$  cuyas raíces son  $x_1$  y  $x_2$ . La solución es entonces  $N_t = Ax_1^t + Bx_2^t$ , siendo  $A$  y  $B$  constantes arbitrarias. Se presentarán ondas cuando las raíces de la ecuación característica resultan ser complejas; el lector puede demostrar que esto ocurre si y sólo si  $b < -a^2/4$ ; serán de amplitud decreciente después de una perturbación inicial si  $b$  es también menor que  $1 - a^2/2$ . Identifique las áreas del plano  $a, b$  correspondiente a las diversas soluciones. Relacione este resultado con una versión de la ec. (12.1.4) en diferencias finitas y también al modelo de la sección 5.8 si se conocen dos grupos de edades.

La asociación de depredación parece ser el único de los procesos lineales con dos especies representado mediante la configuración de signos (a), (b), (c) y (d) en el cuadro 12.2, que puede generar ciclos espontáneamente. Aunque el tema no está en modo alguno resuelto, tales ciclos espontáneos pueden muy bien existir en la naturaleza (Gause, 1935a, págs. 44-48; Kostitzin, 1934; Neyman, Park y Scott, 1956). Lamentablemente, los ciclos impuestos, incluyendo las estaciones del año, están también presentes, y no es fácil discriminar mediante observación entre los efectos de ciclos impuestos y espontáneos.

### Ejemplos numéricos de depredación

El único conjunto de signos entre las cuatro combinaciones (a), (b), (c) y (d) del cuadro 12.2 para el cual son posibles las ocho condiciones en las raíces es (b) depredación,

+	-
+	-

y éste ha sido elegido para el ejercicio aritmético de los cuadros 12.1 y 12.3. Se ha seleccionado arbitrariamente un conjunto de coeficientes para hacerlo corresponder con cada una de las ocho condiciones en las raíces, numeradas I a VIII. La matriz de la columna encabezada I, correspondiente a la fila I del cuadro 12.2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.04 \\ 0.02 & -0.05 \end{bmatrix},$$

se puede citar como ejemplo, siendo A la matriz de coeficientes en (12.1.1). Las tres condiciones en los coeficientes, tal que ambas raíces sean negativas,

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0.0004 > 0,$$

$$x = a_{11} + a_{22} = -0.04 < 0,$$

$$y = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.0003 > 0,$$

se satisfacen completamente. En la solución (12.1.5) de la ecuación característica cuadrática, las raíces son  $\lambda_1 = -0.01$  y  $\lambda_2 = -0.03$ .

Los valores iniciales  $N_1(0) = 90$ ,  $N_2(0) = 80$  dan las condiciones

$$N_1(0) = 90 = n_{11}e^{-0.01(0)} + n_{12}e^{-0.03(0)},$$

$$N_2(0) = 80 = n_{21}e^{-0.01(0)} + n_{22}e^{-0.03(0)}, \quad (12.1.12)$$

o

$$90 = n_{11} + n_{12},$$

$$80 = n_{21} + n_{22}. \quad (12.1.13)$$

Las derivadas en  $t = 0$  son

$$dN_1(0)/dt = 0.01N_1(0) - 0.04N_2(0) = (0.01)(90) - (0.04)(80) = -2.3,$$

$$dN_2(0)/dt = 0.02N_1(0) - 0.05N_2(0) = (0.02)(90) - (0.05)(80) = -2.2,$$

e igualando éstas a las derivadas de (12.1.6) y 12.1.7) respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} -2.3 &= -0.01n_{11} - 0.03n_{12}, \\ -2.2 &= -0.01n_{21} - 0.03n_{22}. \end{aligned} \quad (12.1.14)$$

Resolviendo las cuatro ecuaciones (12.1.13) y 12.1.14) para las cuatro incógnitas da  $n_{11} = 20$ ,  $n_{12} = 70$ ,  $n_{21} = 10$ ,  $n_{22} = 70$ , de modo que la trayectoria de expansión es

$$\begin{aligned} N_1(t) &= 20e^{-0.01t} + 70e^{-0.03t}, \\ N_2(t) &= 10e^{-0.01t} + 70e^{-0.03t}. \end{aligned} \quad (12.1.15)$$

Este resultado exacto conduce a  $N_1(50) = 27,75$ , contra  $N_1(50) = 27,36$  en el cuadro 12.1; el proceso de avance similar al del cuadro 12.1 pero con segundas derivadas también produce  $N_1(50) = 27,67$ ; las terceras derivadas llevan la concordancia entre (12.1.15) y el proceso de avance del cuadro 12.1 a un uno por mil.

El mismo par de ecuaciones, (12.1.15), se puede considerar como la trayectoria fase, puesto que cualquier  $t$  dado proporciona un punto sobre la curva que relaciona  $N_1$  y  $N_2$ . Resolviendo (12.1.15) como ecuaciones lineales en  $e^{-0.01t}$  y  $e^{-0.03t}$  y enseguida eliminando  $t$ , la curva fase se obtiene explícitamente como

$$\frac{2N_2 - N_1}{70} = \left( \frac{N_1 - N_2}{10} \right)^3,$$

o mediante el cambio de coordenadas a  $w$  y  $z$ ,

$$w = z^3.$$

El gráfico 12.1 incluye bosquejos de ésta y las demás curvas dibujadas sobre el plano  $z, w$ , dando sus formas en términos de  $w$  y  $z$  que son funciones lineales especificables de  $N_1$  y  $N_2$ . El material del cuadro 12.1 se puede usar para determinar seis puntos sobre cada trayectoria fase y así verificar su forma, tal como cuando unimos puntos para revelar el objeto escondido en un *puzzle*.

### Otras configuraciones

c) *Saprotitismo*. Este caso se encuentra representado por la configuración de signos

$$\begin{bmatrix} + & 0 \\ + & - \end{bmatrix},$$

y puesto que  $a_{12}$  es cero, la inspección de (12.1.15) muestra que las raíces serán reales e iguales a  $a_{11}$  y  $a_{22}$ ; no habrá oscilación. Puesto que  $a_{22}$  es negativo, su exponencial tendrá importancia cada vez menor, y las especies saprófitas crecerán finalmente en proporción a  $e^{a_{11}t}$ , que equivale a decir a la tasa autónoma de la especie de la que depende.

d) *Simbiosis*. En simbiosis,

$$\begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix},$$

donde  $a_{21}$  y  $a_{12}$  son ambos positivos, las raíces serán reales en todas las circunstancias; de nuevo, la ecuación no indica tendencia a oscilar para los tamaños de las dos especies. Observe que ambas raíces no pueden ser positivas y analice los dos casos que son posibles (cuadro 12.2).

No hemos discutido aún el caso de las raíces iguales (y por lo tanto reales). Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , la solución dada como (12.1.6) y (12.1.7) se reemplaza por

$$\begin{aligned} N_1(t) &= n_{11}e^{\lambda t} + n_{12}te^{\lambda t}, \\ N_2(t) &= n_{21}e^{\lambda t} + n_{22}te^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (12.1.16)$$

Pruebe esto mediante sustitución en (12.1.1) y muestre que una forma de la trayectoria fase es  $w = z \ln z$ . En nuestro problema las raíces iguales sólo pueden ser  $(a_{11} + a_{22})/2$ , y si esta cantidad es negativa, el sistema es estable y finito; si es positivo, el sistema se hace infinito. Los denominaremos VII y VIII respectivamente, y la relación entre  $z$  y  $w$  puede ser una recta, una parábola, o una curva logarítmica; este último caso se encuentra implícito en el cuadro 12.3. El lector puede probar que ellos sólo se pueden aplicar a depredación, y puede continuar hasta distinguir las condiciones de las  $a$  que producen los distintos tipos de solución dentro de VII y VIII (Davis, 1962, pág. 42).

Nuestra exposición es, hasta aquí, en términos de las altamente simplificadas ecuaciones lineales (12.1.1). Nos acercamos ahora un poco más hacia la realidad con un modelo no lineal para depredación diseñado por Volterra (1926, pág. 38).

## 12.2. UN CASO NO LINEAL

Consideremos dos poblaciones, la de los depredadores (por ejemplo, lobos) y la de su presa (por ejemplo, cabras), cuyos tamaños en el momento  $t$  son  $N_2(t)$  y  $N_1(t)$  respectivamente. Supongamos que en ausencia de lobos, las cabras crecerán a una tasa  $a$ , y en ausencia de cabras, los lobos disminuirán a una tasa  $c$ . Supongamos también que la frecuencia de los encuentros es  $k$  veces el producto de las cantidades de las dos poblaciones, y que cada encuentro entre un lobo y una cabra resta  $b/k$  de una cabra y agrega  $d/k$  de un lobo a sus respectivas poblaciones, donde  $k$  es una constante que relaciona los encuentros a la densidad y no necesita ser mencionada explícitamente en las ecuaciones. Entonces podemos escribir para las tasas de cambio, donde ahora  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son mayores que cero:

$$\begin{aligned} dN_1(t)/dt &= aN_1(t) - bN_1(t)N_2(t), \\ dN_2(t)/dt &= -cN_2(t) + dN_1(t)N_2(t). \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

Las ecuaciones (12.2.1) no se pueden resolver para  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  en términos de funciones elementales, pero algunas de las propiedades de la solución se pueden obtener de la relación entre  $N_1$  y  $N_2$  cuando el tiempo es eliminado

**CUADRO 12.4**  
**TABLA ABREVIADA DE  $x^*/e^{ax}$  USADA PARA CALCULAR LOS CICLOS**  
**DEPREDADOR-PRESA DE VOLTERRA\***

x	a		x	a	
	1/2	1		1/2	1
0.10	0.3008	0.0905	1.60	0.5684	0.3230
0.20	0.4047	0.1638	1.70	0.5573	0.3106
0.30	0.4714	0.2222	1.80	0.5455	0.2975
0.40	0.5178	0.2681	1.90	0.5331	0.2842
0.50	0.5507	0.3033	2.00	0.5203	0.2707
0.60	0.5738	0.3293	2.10	0.5071	0.2572
0.70	0.5896	0.3476	2.20	0.4937	0.2438
0.80	0.5996	0.3595	2.30	0.4802	0.2306
0.90	0.6049	0.3659	2.40	0.4666	0.2177
1.00	0.6065	0.3679	2.50	0.4530	0.2052
1.10	0.6051	0.3662	2.60	0.4394	0.1931
1.20	0.6012	0.3614	2.70	0.4260	0.1815
1.30	0.5952	0.3543	2.80	0.4126	0.1703
1.40	0.5876	0.3452	2.90	0.3995	0.1596
1.50	0.5785	0.3347	3.00	0.3865	0.1494

\* Programado por Andrea Tyrec.

(la trayectoria fase descrita arriba). Primeramente cambiamos las escalas sustituyendo  $cx/d$  por  $N_1$  y  $ay/b$  por  $N_2$ . Entonces las ecuaciones (12.2.1) se convierten en

$$\begin{aligned}x' &= ax - axy, \\y' &= -cy + cxy,\end{aligned}\tag{12.2.2}$$

y, por división,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{-cy + cxy}{ax - axy},$$

o, multiplicando en esta proporción y luego dividiendo por  $xy$ ,

$$ay'/y - ay' + cx'/x - cx' = 0.\tag{12.2.3}$$

Integrando (12.2.3) y tomando antilogaritmos da

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)^c \left(\frac{y}{e^y}\right)^a = e^A, \tag{12.2.4}$$

donde  $A$  es una constante de integración. Sustituyendo ahora  $x = dN_1/c$ ,  $y = bN_2/a$ , encontramos el resultado de Volterra

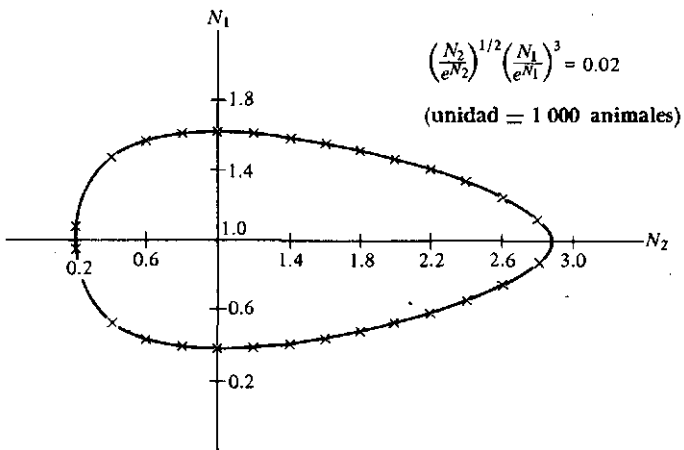
$$\left(\frac{N_1^c}{e^{dN_1}}\right) \left(\frac{N_2^a}{e^{bN_2}}\right) = K, \tag{12.2.5}$$

donde  $K$  es una constante. Un breve extracto del cálculo de  $x^a/e^{ax}$  aparece en el cuadro 12.4.

Si el primer miembro de (12.2.4) es igual a  $z$ , una función de  $x$  e  $y$  representada por la altura sobre el plano  $xy$ , entonces los valores de  $z$  caen sobre una colina suavemente descendente de cumbre redondeada, estando la cima localizada en  $x = 1$ ,  $y = 1$ , o  $N_1 = c/d$ ,  $N_2 = a/b$ . Esto prueba que para un dado  $K$ ,  $N_2$  como una función de  $N_1$  consiste en una línea de contorno de la colina, y en consecuencia una curva cerrada, casi como una elipse distorsionada. Para dos funciones cualesquiera  $f_1(N_1)$  y  $f_2(N_2)$  que tengan un único modo, una manera simple de dibujar líneas de contorno  $f_1(N_1)f_2(N_2) = K$  consiste en tabular  $f_1(N)$  y  $f_2(N)$  para valores de  $N$  a intervalos pequeños; ingrese en la tabla de  $f_1(N)$  con  $N = N_1$  para determinar  $f_1(N_1)$ ; divida  $K$  por éste para obtener  $K/f_1(N_1)$ ; enséguida entre al cuerpo de la tabla de  $f_2(N_2)$  con  $K/f_1(N_1)$  para determinar a qué (dos) argumentos  $N_2$  corresponde esto. El resultado de esta sucesión de dos búsquedas es el valor de  $N_2$  correspondiente a  $N_1$ .

Este principio fue aplicado para dibujar la curva (12.2.5), teniendo como resultado el que aparece en el gráfico 12.2 para  $a = b = 1/2$ ,  $c = d = 3$ , y

**GRAFICO 12.2**  
**TRAYECTORIA FASE PARA CICLOS DEPREDADOR-PRESA**  
**EN UN SISTEMA NO LINEAL (HIPOTETICO)**



$K = 0,02$ . [¿Cuál es la forma de  $(x^a/e^{ax})(y^b/e^{by}) = K$  cuando  $K$  toma un valor tal que  $x$  e  $y$  son ambos pequeños? Averigüe su centro, orientación y las longitudes de sus ejes].

La figura cerrada alrededor de la cual se mueve un punto de la trayectoria fase, en caso de que se apliquen nuestras suposiciones, corresponde a una serie sin fin de ondas en las trayectorias separadas  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  (véase gráfico 12.2). Una vez más depredación produce oscilaciones, aunque aquí no son de una forma trigonométrica simple.

La solución numérica de (12.2.1) no ofrece dificultad para los métodos corrientes de aproximación una vez que tenemos las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , y un conjunto de condiciones iniciales. Progresos adicionales en este campo requieren contar con procedimientos para establecer constantes que reflejen las propiedades de los organismos y su medio ambiente.

El paso siguiente para construir un modelo realista de dos especies es la sustracción de términos en  $[N_1(t)]^2$  y  $[N_2(t)]^2$  del lado derecho del primero y segundo miembros de (12.1.1) y (12.2.1) respectivamente. Esto toma en cuenta la disminución de la tasa de crecimiento ocasionada por encuentros entre miembros de la misma especie (Gause, 1935a, pág. 5). Los términos cuadráticos suponen límites sobre el medio ambiente e implica una genuina competencia entre los miembros de cada especie. Se puede esperar que ellos impongan sobre la situación de las dos especies, un tipo de límite superior equivalente a la asíntota superior de la logística (9.2.4) para el caso de una especie. Esto se podrá entender fácilmente después de una discusión del modelo no lineal general.

### 12.3. EL MODELO NO LINEAL GENERAL

#### Dos especies

El esquema más general para dos especies que aparece en la literatura (Lotka, 1934, págs. 40-41; Davis, 1962, pág. 317; Gause, 1935a, pág. 9; Kostitzin, 1934, pág. 41) es

$$\begin{aligned} dN_1(t)/dt &= P(N_1(t), N_2(t)), \\ dN_2(t)/dt &= Q(N_1(t), N_2(t)), \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios u otras funciones de las poblaciones de ambas especies; sus derivadas en el dominio de interés deben ser finitas o cero. Los *puntos críticos* o *estacionarios* del sistema se definen como los valores de  $N_1$  y  $N_2$  para los que las dos derivadas (12.3.1) se anulan; esto es, ellos son las soluciones en  $N_1$  y  $N_2$  de

$$P(N_1, N_2) = 0; \quad Q(N_1, N_2) = 0. \quad (12.3.2)$$

Volviendo a (12.2.1) para ofrecer una ilustración, los puntos estacionarios en el ejemplo de los lobos y las cabras se obtienen resolviendo

$$aN_1 - bN_2N_1 = 0, \quad -cN_2 + dN_2N_1 = 0. \quad (12.3.3)$$

Evidentemente  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0$  satisfacen las ecuaciones, y aquí el punto estacionario se produce donde ambas especies se extinguen. Un punto más interesante es aquel donde las cabras son  $N_1 = c/d$  y los lobos  $N_2 = a/b$ , y es alrededor de éste que los ciclos giran; en el gráfico 12.2 por ejemplo, el punto  $c/d$ ,  $a/b$  es 1, 1.

Puesto que las derivadas se anulan en los puntos estacionarios, las poblaciones de las dos especies deben ser constantes allí, al menos momentáneamente, lo que equivale a decir que los puntos estacionarios son también puntos de *equilibrio*. Pequeñas desviaciones respecto de este equilibrio pueden poner en movimiento fuerzas que restauren el equilibrio, en cuyo caso hablamos de *estricta estabilidad*, o puede llevar al sistema muy lejos, lo que se denomina un caso de *inestabilidad*. En forma alternativa, el alejamiento de la situación de equilibrio puede dar por resultado ciclos en torno al punto estacionario (compare este significado de estabilidad con el de los capítulos 3 y 5. Los dos usos provienen de diferentes campos de estudio). Todos estos casos están ejemplificados en el cuadro 12.1 para el modelo lineal de depredación.

El comportamiento de las ecuaciones en torno a los puntos estacionarios nos permite clasificar aquél en otras circunstancias. Esto deriva de que en la vecindad de un punto estacionario, las características estables de la solución son las mismas que aquellas de los términos lineales obtenidos mediante un desarrollo de Taylor, proposición conocida como teorema de estabilidad de la mecánica no lineal (Davis, 1962, pág. 318). Si una solución en  $N_1$  y  $N_2$  de (12.3.2) es  $N_{10}$ ,  $N_{20}$ , entonces

$$\begin{aligned} P(N_1, N_2) &= P(N_{10}, N_{20}) + (N_1 - N_{10})P'_1(N_{10}, N_{20}) \\ &\quad + (N_2 - N_{20})P'_2(N_{10}, N_{20}) + \dots, \\ Q(N_1, N_2) &= Q(N_{10}, N_{20}) + (N_1 - N_{10})Q'_1(N_{10}, N_{20}) \\ &\quad + (N_2 - N_{20})Q'_2(N_{10}, N_{20}) + \dots, \end{aligned} \quad (12.3.4)$$

donde  $P'_1(N_1, N_2) = \partial P(N_1, N_2) / \partial N_1$ , etc. El primer término a la derecha de cada una de las ecuaciones (12.3.4) desaparece por la definición de los puntos estacionarios, (12.3.2); a su vez podemos despreciar, en la vecindad de los puntos estacionarios, aquellos términos de orden superior a los registrados, ya que allí las potencias de pequeñas cantidades tales como  $N_1 - N_{10}$  y  $N_2 - N_{20}$  son a su vez pequeñas, suponiendo finitas las derivadas de  $P$  y  $Q$ . Con varios puntos estacionarios, la condición de estabilidad no es la misma en todas partes, y nuestras observaciones se aplican sólo en el entorno de cada punto. El caso lineal, por otra parte, tenía sólo un punto estacionario, de modo que todos los enunciados sobre estabilidad se aplicaban *a largo plazo*. El interés principal de las condiciones sobre los coeficientes discutidas en la primera parte de este capítulo radica en su aplicación como primeras aproximaciones a diversas configuraciones no lineales.

### Competencia en un medio ambiente limitado

Este enfoque no lineal permite hacer un mejoramiento sustancial al modelo de competencia de la sección 12.1. Suponemos ahora que cada especie está afectada tanto por su propia densidad como por la densidad de las otras

$$\begin{aligned} N'_1(t) &= r_1 N_1(t) - r_{11} N_1^2(t) - r_{12} N_1(t) N_2(t), \\ N'_2(t) &= r_2 N_2(t) - r_{21} N_1(t) N_2(t) - r_{22} N_2^2(t). \end{aligned} \quad (12.3.5)$$

El hecho de que se reste el término cuadrático expresa el carácter limitado del medio ambiente. Para el caso de competencia, las tasas autónomas  $r_1$  y  $r_2$  son



ambas positivas, y las interdependencias o términos del producto cruzado serían negativas. Esta configuración se puede escribir

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline + & - & - \\ \hline + & - & - \\ \hline \end{array},$$

y suponemos que todos los  $r$  en (12.3.5) son positivos.

Para ver qué tipo de puntos estacionarios serán posibles, las derivadas de los primeros miembros en las dos ec. (12.3.5) se hacen cero:

$$0 = r_1 N_1 - r_{11} N_1^2 - r_{12} N_1 N_2, \quad 0 = r_2 N_2 - r_{21} N_1 N_2 - r_{22} N_2^2. \quad (12.3.6)$$

En general, un par de ecuaciones cuadráticas en dos variables tendrán cuatro soluciones, que corresponden a los cuatro puntos en que dos secciones cónicas se intersectan. Por simple inspección se ve que las ecuaciones se satisfacen para  $N_1(t) = N_2(t) = 0$ , y es claro que se ha llegado a un punto estacionario cuando ambas especies se han extinguido. Otra solución corresponde a  $N_1(t) = 0$  y  $N_2(t) = r_2/r_{22}$ , que sería positiva. Una tercera solución está constituida por  $N_2(t) = 0$  y  $N_1(t) = r_1/r_{11}$ , también positiva. En estos dos últimos puntos estacionarios, una especie está extinta y la otra tiene el campo a su disposición (Lotka, 1932).

La cuarta solución del par de ecuaciones cuadráticas (12.3.6) es la más interesante, y posiblemente corresponde a un punto estacionario en el que cantidades positivas de las dos especies coexisten en equilibrio. Nosotros determinaremos en qué condiciones puede existir tal punto estacionario bajo un régimen de competencia. La raíz en  $N_1$  y  $N_2$  que estamos buscando se obtiene dividiendo los miembros de (12.3.6) por  $N_1$  y  $N_2$  respectivamente, para llegar a

$$r_1 - r_{11} N_1 - r_{12} N_2 = 0, \quad r_2 - r_{21} N_1 - r_{22} N_2 = 0. \quad (12.3.7)$$

Dado que los  $r$  son números positivos pequeños y los  $N$  son generalmente grandes, es fácil pensar en conjuntos de  $r$  en (12.3.7), tal que por lo menos  $N_1$  o  $N_2$  sea negativo, pero sin embargo, para algunos valores de los  $r$ ,  $N_1$  y  $N_2$  pueden ser positivos. Supongamos que exista tal solución  $N_1 = N_{10}$ ,  $N_2 = N_{20}$ , donde  $N_{10} > 0$ ,  $N_{20} > 0$ , y escribamos  $n_1 = N_1 - N_{10}$ ,  $n_2 = N_2 - N_{20}$ . Entonces buscamos el desarrollo de (12.3.5) correspondiente a (12.3.4), en torno al punto estacionario  $N_{10}$ ,  $N_{20}$ . Si  $P(N_1, N_2)$  de (12.3.1) es  $r_1 N_1 - r_{11} N_1^2 - r_{12} N_1 N_2$  como en la primera ecuación de (12.3.5), entonces el desarrollo en una serie de Taylor bidimensional en el entorno de  $N_{10}$ ,  $N_{20}$  da

$$\begin{aligned} P(N_1, N_2) &= P(N_{10}, N_{20}) + n_1 P'_1(N_{10}, N_{20}) + n_2 P'_2(N_{10}, N_{20}) \\ &= r_1 N_{10} - r_{11} N_{10}^2 - r_{12} N_{10} N_{20} \\ &\quad + n_1 (r_1 - 2r_{11} N_{10} - r_{12} N_{20}) + n_2 (-r_{12} N_{10}), \end{aligned} \quad (12.3.8)$$

y similarmente para  $Q(N_1, N_2)$ , deteniéndonos en los términos lineales en  $n_1$  y  $n_2$ .

Pero usando el hecho de que  $N_{10}$ ,  $N_{20}$  satisface (12.3.7), obtenemos una simplificación de (12.3.8) que lleva a

$$P(N_1, N_2) = (-r_{11} N_{10}) n_1 + (-r_{12} N_{10}) n_2,$$

y similarmente,

$$Q(N_1, N_2) = (-r_{21}N_{20})n_1 + (-r_{22}N_{20})n_2.$$

Sustituyendo estas aproximaciones lineales en (12.3.5) resulta

$$n_1'(t) = -r_{11}N_{10}n_1 - r_{12}N_{10}n_2, \quad n_2'(t) = -r_{21}N_{20}n_1 - r_{22}N_{20}n_2, \quad (12.3.9)$$

cuyos coeficientes se pueden identificar con los  $a$  de (12.1.1).

Con el objeto de estudiar las propiedades de estabilidad en el entorno del punto  $N_{10}, N_{20}$ , del cual estamos suponiendo cae en el cuadrante positivo, nos referimos a los criterios resumidos en el cuadro 12.2. Las raíces serán complejas sólo si  $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$ , lo cual en este caso ocurre si

$$(-r_{11}N_{10} + r_{22}N_{20})^2 + 4(-r_{12}N_{10})(-r_{21}N_{20}) < 0. \quad (12.3.10)$$

Puesto que la expresión del primer miembro de (12.3.10) consiste en dos términos positivos, no puede su suma ser negativa, de modo que las raíces deben ser reales; una vez más, los ciclos espontáneos no pueden surgir en el caso de competencia.

Si las raíces son reales, la primera condición para la estabilidad es que  $a_{11} + a_{22} < 0$ , lo cual requiere que  $-r_{11}N_{10} - r_{22}N_{20} < 0$ , que evidentemente se satisface. Pero la segunda condición es  $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$  ó  $r_{11}N_{10}r_{22}N_{20} > r_{12}N_{10}r_{21}N_{20}$ ; esto es,

$$r_{11}r_{22} > r_{12}r_{21},$$

y esto se satisface sólo en circunstancias restringidas. La estabilidad requiere que la (media geométrica de la) resistencia ofrecida por un medio ambiente sea mayor que la (media geométrica de la) interferencia de las especies entre sí.

Si consideramos la competencia genuina como la situación en que las fuerzas competitivas son más severas que las ambientales,  $r_{12}r_{21} > r_{11}r_{22}$ , entonces dicha competencia genuina es inherentemente inestable en el medio ambiente limitado. En resumen, la mayoría de las configuraciones de las  $r$  en (12.3.5) no mostrarán puntos estacionarios en el cuadrante positivo; si existe uno, la trayectoria se alejará de él si  $r_{12}r_{21} > r_{11}r_{22}$ ; esto es, si las fuerzas competitivas son mayores que la resistencia del medio, el movimiento tenderá en general hacia un punto en el que una de las especies queda extinta y la otra tiene el campo a su disposición.

Esta teoría parece corresponder con los resultados de experimentos. Thomas Park (1964, pág. 138) resume algo de su propio trabajo como sigue: "Si medimos cómo actúa  $X$ , cómo lo hace  $Y$  cuando ambas están *solas*, podemos en consecuencia detectar y evaluar lo que es *nuevo*, o competitivo, cuando ambas están juntas. . . Es esto. ¡Siempre ocurre que una especie es eliminada y la otra sobrevive!" Pero él prosigue diciendo que bajo un dado conjunto de condiciones externas, la especie que sobrevive no necesita ser la misma que lo hace bajo un conjunto diferente. En la naturaleza raramente se da el caso de dos especies que vivan y compitan en el mismo medio ambiente. Para otros rasgos de la competencia el lector puede consultar el artículo de Park y la literatura biológica que cita.

La depredación en un ambiente limitado,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline + & - & - \\ \hline - & + & - \\ \hline \end{array},$$

puede tener puntos estables para cantidades positivas de ambas especies, como lo puede demostrar el lector a partir del análogo a (12.3.9) y (12.3.10), y puede tener ciclos, como surge del análogo a (12.3.8) obtenido para este caso.

### Muchas especies

La generalización para múltiples especies fue considerada por Lotka (1956, pág. 158), Rashevsky (1960, cap. 36) y Volterra (1937). Lotka dijo que el estudio de la evolución de especies individuales no muestra señales de éxito; "El objeto físico que tenemos ante nosotros es un sistema indiviso". Si dicho sistema indiviso consta de  $k$  especies, habiendo  $N_i(t)$  individuos (o  $N_i(t)$  unidades de peso o biomasa) de la especie  $i$ ésima, y el cambio en el tamaño de cualquier especie es una función  $P$  del tamaño de las poblaciones de todas las especies en el sistema, entonces tenemos

$$\begin{aligned} dN_1(t)/dt &= P_1(N_1(t), N_2(t), \dots, N_k(t)), \\ dN_2(t)/dt &= P_2(N_1(t), N_2(t), \dots, N_k(t)), \\ &\vdots \\ dN_k(t)/dt &= P_k(N_1(t), N_2(t), \dots, N_k(t)). \end{aligned} \quad (12.3.11)$$

Igual que antes, los puntos estacionarios se determinan reemplazando las derivadas del primer miembro de las ecs. (12.3.11) por cero y resolviendo las  $k$  ecuaciones simultáneas. En el entorno de cualquier punto estacionario elegido, se puede desarrollar cada ecuación de (12.3.11) como una serie de Taylor cuyo término absoluto se anulará necesariamente. Truncando después de las primeras derivadas se obtienen  $k$  ecuaciones lineales para las  $k$  especies, que, al igual que (12.1.1), se pueden escribir

$$\{\mathbf{N}'(t)\} = \mathbf{A}\{\mathbf{N}(t)\},$$

en el entendimiento de que ahora  $\mathbf{A}$  es una matriz  $k \times k$  y no una matriz  $2 \times 2$ , y que  $\{\mathbf{N}(t)\}$  es  $k \times 1$ , con valores  $N_i(t)$  medidos a partir de un punto estacionario más que a partir de cero. La solución del conjunto en el entorno del punto singular es de la forma

$$\begin{aligned} N_1(t) &= n_{11}e^{\lambda_1 t} + n_{12}e^{\lambda_2 t} + \dots + n_{1k}e^{\lambda_k t}, \\ N_2(t) &= n_{21}e^{\lambda_1 t} + n_{22}e^{\lambda_2 t} + \dots + n_{2k}e^{\lambda_k t}, \\ &\vdots \\ N_k(t) &= n_{k1}e^{\lambda_1 t} + n_{k2}e^{\lambda_2 t} + \dots + n_{kk}e^{\lambda_k t}, \end{aligned} \quad (12.3.12)$$

donde los  $\lambda_i$  son las  $k$  soluciones de la ecuación característica  $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ , y los  $n_{ij}$  dependen de los valores iniciales  $N_i(0)$ .

Los  $\lambda_i$  pueden ser positivos o negativos, reales o complejos, y la estructura de éstos determinará la naturaleza de la trayectoria en el punto estacionario bajo estudio. Si el equilibrio va a ser estable, de modo que un pequeño desplazamiento de los valores  $N_i(t)$  respecto del punto estacionario hará entrar en juego fuerzas que retornarán el sistema al mismo punto singular, todas las raíces reales deben ser negativas (ilustrado para dos especies por los casos I y VII en los cua-

dros 12.1, 12.2 y 12.3), y las partes reales de todas las raíces complejas también deben ser negativas (ilustrado para dos especies por el caso IV) (Lotka, 1934, págs. 38-42; Kostitzin, 1934, págs. 39-40).

El modelo no lineal para múltiples especies permite el examen de lo que sucede cuando las especies competidoras tienen, además de su común y limitada fuente de alimentación, alguna otra fuente suplementaria que es exclusiva de cada una (Gause y Witt, 1964, pág. 112). Como se supuso arriba, esto atenúa la competencia, y ambas especies, aun no siendo igualmente eficientes, pueden continuar existiendo, en tanto que la competencia por una sola fuente de alimentación elimina a la especie menos eficiente. Las oscilaciones en la situación depredador-presa se modifican también por la presencia de otras especies. Una fuente alternativa de alimentación para el depredador podría distraer probablemente su atención respecto de la presa original, pero modificando un parámetro del modelo lineal se puede mostrar que ello puede dar por resultado la extinción de esta última. El lector puede querer examinar las ecuaciones para el caso de tres especies y mostrar cómo la fuente alternativa de alimentación (ahora una explícita tercera especie) cambia las interrelaciones entre las dos especies originales (Kerner, 1961).

Fuera de la información consistente en tasas hipotéticas de crecimiento e interdependencia, los métodos reseñados infieren oscilaciones en la situación depredador-presa, y demuestra la extinción del más débil de competidores desiguales. El propósito de este capítulo no es enseñar biología, sino mostrar cómo se pueden sacar algunas conclusiones cualitativas de ecuaciones simples. La biología del tema es sutil e intrincada, y el lector puede consultar Wynne-Edwards (1962). L. C. Cole (1951 y 1965) y Slobodkin (1961) para la discusión de los problemas. Bartlett (1960) ha dado un resumen conciso de modelos estocásticos para la asociación de las especies, cuyas propiedades no son en modo alguno las mismas que aquellas de la versión determinística a que está confinado este capítulo. La habilidosa transformación de la teoría a una forma gráfica, por cuenta de Kenneth Boulding (1962, cap. 1), contiene numerosas sugerencias acerca de su relevancia en el estudio de la interacción social. La limitada aplicación biológica de la teoría se debe parcialmente a la carencia de datos. Lo mejor que se ha tenido sobre animales en la naturaleza son rústicos totales para unos pocos puntos en el tiempo.

Los individuos de las poblaciones humanas, por otra parte, están cuidadosamente contados y clasificados en categorías tales como sexo, estado civil y edad. Las reglas que gobiernan su interacción no son menos complejas, y de allí que no necesitemos confinarnos al modelo para un sexo de los capítulos 1 a 8. El capítulo 13 volverá a poblaciones humanas e incluirá la interacción entre subpoblaciones categorizadas por sexo y estado civil. En el capítulo 14 se considerarán algunos de estos mismos problemas con una técnica matricial que permite una computación más conveniente cuando se consideran las distribuciones por edades.

## EL PROBLEMA DE LOS SEXOS Y OTROS USOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SIMULTANEAS

El estudio elaborado por Volterra acerca de la interacción de los cambios en dos grupos, se aplica también entre seres humanos si, por analogía con su trabajo, consideramos a los hombres y mujeres dentro de un territorio dado como dos poblaciones en interacción. El comer y ser comido del modelo de Volterra se convierte ahora en el proceso de casamiento y procreación, y algunas de las ecuaciones resultantes son lineales y de fácil resolución. La primera referencia a esto que hemos podido encontrar ha sido en David G. Kendall (1949), que muestra cómo la consideración conjunta de los sexos enriquece la discusión de la población y conduce a un resultado más realista.

### 13.1. INCONSISTENCIA AL TRATAR SEPARADAMENTE LOS SEXOS

Kendall parte de la simple ecuación que describe el cambio de la población

$$N'(t) = (b - d)N(t), \quad (13.1.1)$$

donde  $N(t)$  es el número de individuos en la población en el momento  $t$  y  $N'(t)$  su derivada,  $b$  la tasa de natalidad, y  $d$  la tasa de mortalidad. Si la diferencia  $(b - d)$  es constante, la solución a (13.1.1) es

$$N(t) = N(0)e^{(b-d)t}, \quad (13.1.2)$$

siendo  $N(0)$  la población inicial. Un valor que puede usarse para  $(b - d)$  es la tasa intrínseca de crecimiento natural para alguno de los sexos, por ejemplo como aparece en el cuadro 13.1 y calculado mediante (5.3.2). Cuando los valores para hombres y mujeres en los Estados Unidos para 1964 se sustituyen en (13.1.2) tenemos

$$M(t) = M(0)e^{0.01748t},$$

$$F(t) = F(0)e^{0.01870t},$$

donde el número de hombres en el momento  $t$  es  $M(t)$  y el de mujeres  $F(t)$ .

Estos resultados son inconsistentes en el sentido de que la relación de masculinidad,

$$\frac{M(t)}{F(t)} = \frac{M(0)}{F(0)} e^{0.00178t},$$

crece constantemente con el tiempo. Al cabo de 100 años los hombres sobrepasarán en número a las mujeres en más del 19 por ciento, al cabo de 200 años en 43 por ciento. El modelo no puede arrojar luz sobre la tendencia en la reiaz-

CUADRO 13.1

TASAS INTRINSECAS DE NATALIDAD, MORTALIDAD Y CRECIMIENTO NATURAL, COMPARANDO CALCULOS PARA DATOS DE HOMBRES Y MUJERES\*

	HOMBRES		
	1000b <sub>m</sub> *	1000d <sub>m</sub> *	1000r <sub>m</sub> *
Chile 1964	36.02	12.47	23.55
Chipre 1956-1958	28.33	7.51	20.82
Inglaterra y Gales 1960-1962	20.34	10.79	9.55
Hungría 1964	13.35	16.31	-2.96
Noruega 1963	20.35	9.93	10.42
Trinidad y Tobago 1956-1958	39.34	8.79	30.55
Estados Unidos 1959-1961	28.89	7.97	20.92
1962	27.98	8.17	19.81
1963	27.17	8.49	18.68
1964	26.23	8.75	17.48
	MUJERES		
	1000b <sub>f</sub>	1000d <sub>f</sub>	1000r <sub>f</sub>
Chile 1964	31.99	10.94	21.05
Chipre 1956-1958	24.45	7.62	16.83
Inglaterra y Gales 1960-1962	19.28	9.51	9.77
Hungría 1964	10.36	17.64	-7.28
Noruega 1963	20.27	8.53	11.74
Trinidad y Tobago 1956-1958	39.98	7.63	32.35
Estados Unidos 1959-1961	27.31	6.61	20.70
1962	25.84	7.01	18.83
1963	24.56	7.46	17.10
1964	23.48	7.78	15.70

\* Programado por Wilhelm Flieger basado en la aproximación de la ecuación integral  $B$  de la ecuación (11.5.1). Observe que los valores de  $r_m^*$  y  $r_f$  son menores en 0.00003 para los Estados Unidos en 1964 que las cifras correspondientes en el cuadro 14.2, obtenidas con la matriz de proyección, método  $A$  de (11.5.3).

ción de masculinidad. Usarlo para derivar tal tendencia sería tan erróneo como proyectar los lobos y cabras del capítulo anterior en forma separada, lo cual sólo podría conducir a absurdos tales como los lobos aumentando a infinito en tanto que su único alimento, las cabras, disminuyendo a cero.

Karmel (1948a, págs. 243-44) desarrolló un método para tomar en cuenta la diferencia en las tasas intrínsecas masculinas y femeninas  $r_m$  y  $r_f$  en términos de la diferencia en las distribuciones por edades de las poblaciones masculina y femenina, suponiendo inicialmente que los padres son de la misma edad que las madres. Su función  ${}_5H_x$  se puede expresar en intervalos quinquenales como

$${}_5H_x = \frac{{}_5K_x^* / {}_5K_x}{{}_5L_x^* / {}_5L_x},$$

donde  $s$  es la relación de masculinidad al nacimiento (la razón de los bebés hombres a los bebés mujeres nacidos en el periodo bajo observación),  ${}_5K_x^*$  y  ${}_5K_x$  son las cifras observadas de hombres y mujeres en las edades  $x$  a  $x + 4$  en su último cumpleaños, y  ${}_5L_x^*$  y  ${}_5L_x$  son los sobrevivientes en las edades  $x$  a  $x + 4$  en las tablas de vida masculina y femenina. Entonces  $H$  se define como la media armónica de los  ${}_5H_x$  ponderados en cada edad por la función de fecundidad neta:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{R_0} \sum \frac{{}_5L_x {}_5F_x}{{}_5H_x}, \quad x = 10, 15, \dots, 50.$$

Mediante uso directo del álgebra, resulta que la diferencia entre las tasas netas de reproducción masculina y femenina ( $r_m - r_f$ ), se estima mediante

$$(r_m - r_f) \doteq -\frac{\ln H}{T}, \quad (13.1.3)$$

siendo  $T$  el intervalo medio entre dos generaciones.

Puesto que esto no toma las estadísticas de nacimientos por edad del padre, se puede calcular para cualquier población para la que estén disponibles tablas de vida, distribución de la población por edades y por sexo, y tasas específicas de fecundidad por edad de la población femenina. Por lo tanto no se puede llegar a los mismos resultados que aquellos basados en los datos completos del cuadro 13.1, pero en general parecen ir en la dirección correcta. Para los Estados Unidos, 1964, la ec. (13.1.13) muestra una diferencia, 1 000 ( $r_m - r_f$ ), de 2,25 en favor de los hombres, contra el valor observado 1,78 del cuadro 13.1, también en favor de los hombres. Para las otras seis poblaciones las diferencias 1 000 ( $r_m - r_f$ ) se comparan como sigue:

	OBSERVADO (del cuadro 13.1 calculado a partir de los nacimientos según edad de la madre y según la edad del padre)	ESTIMADO (según el método de Karmel (13.1.3) a partir de los nacimientos según edad de la madre sólo)
Chile 1964	2,50	2,47
Chipre 1956-1958	3,99	5,19
Inglaterra y Gales 1960-1962	-0,22	1,19
Hungría 1964	4,32	2,90
Noruega 1963	-1,32	0,33
Trinidad Tobago 1956-1958	-1,80	1,46

Dibuje un diagrama y muestre que la regresión es sólo aproximadamente una recta y no una que pase por el origen. La relación entre las dos estimaciones de  $r_m - r_f$  se alteraría si supusiéramos padres con cinco años más de edad que las madres, y no de la misma edad, o si interpoláramos entre las estimaciones basadas sobre cero y cinco años de diferencia en el  $H$  de (13.1.3).

La tabulación de Karmel (1948a, págs. 254-55) de (13.1.3) para un número de lugares y fechas muestra que  $r_m$  es mayor que  $r_f$  cuatro de cada cinco veces. La migración precedente, la mala declaración de edad, y otros factores tienen todos una participación en esta tasa masculina de crecimiento aparentemente mayor (Myers, 1941). Sin que nos adentremos en éstos aquí, procedemos a estudiar el modelo para los dos sexos.

Kendall (1949, pág. 247) y Goodman (1953b) escapan de la contradicción implícita en el tratamiento separado de los sexos estableciendo un par de ecuaciones, cada una de las cuales toma en cuenta la interacción:

$$\begin{aligned} M'(t) &= -d_m M(t) + b_m L[M(t), F(t)], \\ F'(t) &= -d_f F(t) + b_f L[M(t), F(t)], \end{aligned} \quad (13.1.4)$$

donde la función  $L$  de las cifras de los dos sexos en el momento  $t$  resta aún por ser especificada. El primer miembro de (13.1.4) expresa el hecho de que la tasa de crecimiento de la población masculina,  $M'(t)$ , recibe el efecto negativo de la tasa bruta de mortalidad y el efecto positivo de la tasa bruta de natalidad, estando esta última multiplicada por una cierta función  $L$  de las poblaciones masculina y femenina; la segunda es similar a la primera sólo que para mujeres. Tal como (13.1.1), las ecs. (13.1.4) no toman en cuenta la edad. Ellas podrían ser estudiadas mediante los métodos usados para conjuntos no lineales (12.3.1), pero el tratamiento aquí se restringirá a los casos especiales que son lineales.

## 13.2. DOMINANCIA

### Mujeres - La solución de Goodman

Goodman (1953b) dio las soluciones explícitas de (13.1.4) para distintas posibilidades en  $L$ , y proporcionó la mayoría de los resultados del presente capítulo. (El continuó luego con modelos estocásticos, y lo seguiremos en el capítulo 16.) Su primera línea de ataque consistió en vincular los nacimientos de cada sexo a la población femenina, aplicando el supuesto conocido como *dominancia femenina*, según el cual tanto los nacimientos del sexo masculino como los del femenino dependen sólo de la población femenina. Esto equivale a decir que en lugar de la función  $L$  él escribió  $F(t)$ , el número de mujeres en el momento  $t$ , de modo que (13.1.4) se convirtió en

$$\begin{aligned} M'(t) &= -d_m M(t) + b_m F(t), \\ F'(t) &= -d_f F(t) + b_f F(t). \end{aligned} \quad (13.2.1)$$

[Identifique estas ecuaciones con aquéllas para el caso de depuración en el cuadro 12.2. ¿Tiene algún significado demográfico el parecido? Use el argumento centrado en (12.1.5) para probar que las raíces de (13.2.1) son reales y de signos opuestos para una población creciente].



Las ecuaciones diferenciales lineales simultáneas (13.2.1) son resolubles mediante un recurso que no estará disponible en los casos que siguen, porque aquí podemos hacer uso del hecho de que el segundo miembro contiene sólo  $F(t)$  y no  $M(t)$ . El segundo miembro de (13.2.1) sólo da

$$F(t) = F(0)e^{(b_f - d_f)t}, \quad (13.2.2)$$

que es idéntico a (13.1.2). Se puede sustituir esta expresión para  $F(t)$  en el primer miembro de (13.2.1), lo cual se convierte en

$$M'(t) + d_m M(t) = b_m F(0)e^{(b_f - d_f)t}.$$

Si multiplicamos ambos miembros por  $e^{d_m t}$ , el primer miembro se convierte en la derivada de  $e^{d_m t} M(t)$ . La solución obtenida al integrar es por tanto

$$e^{d_m t} M(t) = \frac{b_m F(0) \exp[(b_f - d_f + d_m)t]}{b_f - d_f + d_m} + K, \quad (13.2.3)$$

donde  $K$  es una constante. Para ajustar la condición límite de que la población masculina en el momento  $t=0$  sea  $M(0)$ , hacemos  $t=0$  en (13.2.3) y encontramos

$$K = M(0) - \frac{b_m F(0)}{b_f - d_f + d_m}. \quad (13.2.4)$$

Dividiendo (13.2.3) por  $e^{d_m t}$  se obtiene

$$M(t) = \frac{F(0)b_m e^{(b_f - d_f)t}}{b_f - d_f + d_m} + Ke^{-d_m t}, \quad (13.2.5)$$

lo cual, junto con (13.2.4) y (13.2.2), constituye la solución a (13.2.1). [Verifique este resultado aplicando el método usado para resolver (12.1.1).]

Comparando con el cálculo anterior basado en (13.1.2), encontramos inalterada la trayectoria para la población femenina, pero aquella para la masculina tiene ahora dos términos exponenciales, con exponentes de signos opuestos en poblaciones crecientes. Se puede seguir a la relación de masculinidad a través del tiempo y se puede ver que ella alcanza un nivel finito. Para dividir (13.2.5) por (13.2.2), observando que las  $b$ ,  $d$  y  $b_f - d_f + d_m$  son todas positivas, vemos que las exponenciales en la razón desaparecen en el límite, y nos quedamos con

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{F(t)} = \frac{b_m}{b_f - d_f + d_m}. \quad (13.2.6)$$

Este resultado teórico simple y básico permite una variedad de respuestas numéricas, dependiendo de cómo se seleccionen sus cuatro parámetros. Las opciones principales están entre

- tasas intrínsecas y brutas,
- retención de la relación de masculinidad al nacimiento observada o de  $b_m$  y  $b_f$  obtenidos para los dos sexos por separado,
- uso de la tasa intrínseca de crecimiento natural femenina o masculina para averiguar la tasa intrínseca de mortalidad masculina.

La aplicación inicial se hará con la primera de las dos opciones que aparecen en a), b) y c). Los parámetros serán intrínsecos, es decir, estarán basados en el supuesto de tasas específicas por edad y sexo constantes en el futuro. Se mantendrá la relación de masculinidad al nacimiento; siendo  $b_f$  la tasa intrínseca de natalidad femenina del capítulo 7, para  $b_m$  se usará el valor  $b_f s$ , donde  $s$  es la de masculinidad al nacimiento observada. Finalmente, la tasa intrínseca de mortalidad masculina  $d_m$  se obtendrá de la tabla de vida masculina, pero con una tasa de crecimiento impuesta sobre ella igual a la tasa intrínseca femenina. Esto hace  $d_m$  en general diferente de la tasa intrínseca de mortalidad masculina designada como  $d_m^*$  en el cuadro 13.1. Para los Estados Unidos en 1964,  $1000d_m^* = 8,75$  del cuadro 13.1 es más bajo que  $1000d_m = 9,23$  obtenido de la tabla de vida masculina y de la tasa intrínseca de crecimiento femenina, debido a que el  $r_m^*$  masculino es mayor que el  $r_m$  femenino, y en consecuencia produce una población estable más joven.

Sobre esta base, con los datos de la población femenina de los Estados Unidos en 1964 del cuadro 13.1, más el hecho de que la relación de masculinidad al nacimiento fue  $s = 1,0472$ , obtenemos de (13.2.6) una relación de masculinidad final de

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \frac{(23.48)(1.0472)}{23.48 - 7.78 + 9.23} = 0.986.$$

Si  $S(t) = M(t)/F(t)$  es la trayectoria de la relación de masculinidad, derive de (13.2.1) la ecuación

$$S'(t) = b_m - S(t)(b_f - d_f + d_m).$$

¿De qué manera la teoría de la sección 12.3 sobre puntos estacionarios hace obvio que esta ecuación diferencial en  $S(t)$  lleva a (13.2.6) como el valor límite de  $S(t)$ ? Observe que aunque las ecs. (13.2.1) no tienen puntos estacionarios salvo el caso carente de interés en que  $M(t) = F(t) = 0$ , la ecuación en  $S(t)$  deducida de ellos tiene un punto estacionario finito de equilibrio estable.

A diferencia de las proyecciones separadas para hombres y mujeres, el uso de la dominancia tiende a dar tasas de crecimiento iguales de los dos sexos después que han desaparecido los efectos de las distribuciones iniciales. El cuadro 13.2 está basado en una proyección que usa tasas específicas por edad y sexo constantes con dominancia femenina mediante (14.1.5), vale decir, una extensión de la matriz  $L$  de (2.1.9). Dicha tabla muestra para cuatro países que las razones de crecimiento para el período quinquenal que va desde  $t = 95$  hasta  $t = 100$  son las mismas para hombres que para mujeres hasta aproximadamente de cuatro decimales. Los pequeños desvíos de la igualdad desaparecen con una nueva proyección; un experimento con datos de Checoslovaquia para 1962 mostró una razón de crecimiento  $M(100)/M(95) = 1,0190$ , contra  $F(100)/F(95) = 1,0192$ , pero en 500 años teníamos concordancia hasta cinco lugares decimales:

$$M(500)/M(495) = F(500)/F(495) = 1.01918.$$

Esto es igual a  $e^{5(b_f - d_f)} = e^{5(0.01583 - 0.01203)}$  obtenido de los mismos datos (no aparecen en la tabla). En la sección 14.1 se discute la dominancia en relación a la proyección.

Los resultados de la proyección de la población actual verifican también (13.2.6) aritméticamente. La proyección con las tasas constantes de 1963 y do-

CUADRO 13.2  
 PROYECCION POR EDAD Y SEXO CON DOMINANCIA FEMENINA PARA UN PERIODO  
 DE 100 AÑOS; SE MUESTRA LA CONVERGENCIA DE LAS TASAS  
 DE CRECIMIENTO MASCULINA Y FEMENINA

	Austria 1963	Finlandia 1964	Japón 1960	Tailandia 1959
Razón del total de hombres al total de hombres cinco años antes:				
$M(5)/M(0)$	1.0332	1.0479	1.0489	1.1627
$M(50)/M(45)$	1.0508	1.0361	0.9968	1.1496
$M(100)/M(95)$	1.0521	1.0329	0.9855	1.1451
Razón del total de mujeres al total de mujeres cinco años antes:				
$F(5)/F(0)$	1.0255	1.0450	1.0479	1.1496
$F(50)/F(45)$	1.0473	1.0372	0.9972	1.1465
$F(100)/F(95)$	1.0522	1.0327	0.9851	1.1451

minancia femenina [de nuevo mediante la matriz  $36 \times 36$  en (14.1.5)] lleva a la población masculina de Austria, para el año 2063, a 8 426 000 y a la población femenina a 8 662 000, de modo que la relación de masculinidad para Austria en el momento 100 es

$$\frac{M(100)}{F(100)} = \frac{8,426,000}{8,662,000} = 0.9728,$$

como aparece en la última línea del cuadro 13.3, en tanto que (13.2.6) da

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \frac{b_m}{b_f - d_f + d_m} = \frac{20.64}{19.83 - 9.69 + 11.08} = 0.9727,$$

que aparece en la penúltima línea del cuadro 13.3. Aunque el resultado (13.2.6) no ha tomado explícitamente en cuenta la edad, aun cuando se han sustituido las tasas intrínsecas por constantes, se llega a la misma relación de masculinidad final que la proyección completa por edad y por sexo.

El modelo incluye el supuesto de Karmel de que el crecimiento final de la población masculina es igual al crecimiento final de la población femenina,  $r_m = r_f$ , de modo que, si  $b'_m$  es la tasa bruta de natalidad masculina final, tenemos  $r_m = b'_m - d_m$  y  $r_f = b_f - d_f$ , y por tanto

$$b'_m - d_m = b_f - d_f,$$

permitiéndonos calcular  $b'_m$  como

$$b'_m = b_f - d_f + d_m.$$

CUADRO 13.3

COMPARACION DE LA RELACION DE MASCULINIDAD FINAL DE GOODMAN (13.2.6) CON EL RESULTADO DE LA PROYECCION POR EDAD Y SEXO PARA 100 AÑOS\*

	Austria 1963	Finlandia 1964	Japón 1960	Tailandia 1959
<b>Tasas intrínsecas</b>				
1000b <sub>f</sub>	19.83	17.38	12.68	36.78
1000d <sub>f</sub>	9.69	10.91	15.66	9.74
1000d <sub>m</sub>	11.08	12.49	16.68	10.86
<b>Tasas de natalidad de Goodman con dominancia femenina para hombres</b> 1000b <sub>m</sub> = 1000sb <sub>f</sub>	20.64	18.26	13.39	41.86
<b>Tasa de natalidad de Karmel para hombres</b> (r <sub>m</sub> = r <sub>f</sub> ): 1000b' <sub>m</sub> = 1000(b <sub>f</sub> - d <sub>f</sub> + d <sub>m</sub> )	21.22	18.96	13.70	37.90
<b>Relación de masculinidad inicial</b>	0.8752	0.9329	0.9650	1.0277
<b>Relación de masculinidad final (13.2.6) obtenida de la ecuación diferencial:</b> <sup>b</sup> $\frac{M}{F} = \frac{b_m}{b_f - d_f + d_m} = \frac{b_m}{b'_m}$	0.9727	0.9631	0.9773	1.1045
<b>Relación de masculinidad en t = 100 años obtenida de la proyección por edad y sexo con dominancia femenina</b> M(100)/F(100)	0.9728	0.9628	0.9768	1.1043

\* Programado por Nancy Wang.

<sup>b</sup> Ver una discusión adicional en Goodman (1967e).

Denominaremos a  $b'_m$  tasa intrínseca de natalidad de Karmel, en tanto que la  $b_m$  obtenida al multiplicar la tasa intrínseca de natalidad femenina por la relación de masculinidad al nacimiento la denominaremos tasa intrínseca de Goodman. Ninguna de ellas depende de un conocimiento de los nacimientos según edad del padre. La relación de masculinidad final determinada bajo el supuesto de dominancia femenina encontrado en (13.2.6) es desde este punto de vista igual a

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \frac{b_m}{b_f - d_f + d_m} = \frac{b_m}{b'_m},$$

vale decir, la razón de la tasa intrínseca de natalidad masculina de Goodman a la de Karmel.

Hemos, por tanto, hecho referencia a tres tasas finales diferentes o a tasas intrínsecas de natalidad masculinas; para los Estados Unidos en 1964 ellas son, por cada mil habitantes:

#### Dominancia femenina

$$\left. \begin{array}{l} \text{Goodman: } 1\,000b_m = 1\,000sb_f = 24,59 \\ \text{Karmel: } 1\,000b'_m = 1\,000(b_f - d_f + d_m) = 24,93 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{De los datos sobre} \\ \text{nacimientos según} \\ \text{edad de la madre.} \end{array}$$

#### Dominancia masculina

$$1\,000b_m^* = 26,23 \quad \left. \vphantom{1\,000b_m^*} \right\} \begin{array}{l} \text{De los datos sobre nacimientos según la} \\ \text{edad del padre.} \end{array}$$

A cada uno corresponde una relación de masculinidad al nacimiento, la cual sólo para el primero,  $1\,000b_m$  de arriba, es necesariamente igual a la relación de masculinidad al nacimiento observada. (Observe cómo surgen estos números en el cuadro 13.4).

Cuando  $b_m$  es igual a  $b_f$  multiplicado por la relación de masculinidad  $s$ , podemos ver cómo (13.2.6) se ve afectada por la diferencia en las tasas de mortalidad dividiendo numerador y denominador por  $b_f$  para obtener

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \frac{s}{1 + (d_m - d_f)/b_f}$$

Aparte de  $s$  que es sustancialmente constante en las poblaciones humanas, el elemento operativo en la relación de masculinidad final es la diferencia entre las tasas de mortalidad masculina y femenina, como una razón con respecto a la tasa de natalidad femenina.

#### Aplicación a tasas intrínsecas y brutas

Hasta este momento la aplicación de (13.2.6) nos ha permitido decir que la relación de masculinidad límite es la que se desarrollaría si continuaran indefinidamente las tasas específicas de mortalidad por edades en el período dado, junto con las tasas específicas de fecundidad femenina por edades y relación de masculinidad al nacimiento. La *relación de masculinidad intrínseca* con dominancia femenina, como se puede denominar bajo estas condiciones a la razón  $M(\infty)/F(\infty)$  de (13.2.6), tiene en cierto modo el mismo grado de interés para nosotros que la tasa intrínseca de crecimiento natural en el modelo que reconoce edad para un solo sexo, pero lógicamente en menor medida. Las ecuaciones suponen no sólo que la distribución actual por edades se acercará a la estabilidad, sino que operarían las tasas estables o intrínsecas para cada sexo con el objeto de satisfacer a la ec. (13.2.6). Estos dos pasos distinguibles lógicamente se efectúan al mismo tiempo, y se acerca rápidamente a la situación de estabilidad. Demuestre de (13.2.2) y (13.2.5) que el desvío respecto de la relación de masculinidad estable en el momento  $t$  es del orden de  $e^{-bt}$

Una interpretación diferente consiste en hacer los  $b$  y  $d$  iguales a las tasas corrientes brutas más que a las tasas intrínsecas. Esto nos diría en qué dirección

se está acercando más la relación de masculinidad. La ecuación (13.2.6) se convierte entonces en

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \frac{b_m}{b_f + d_m - d_f}$$

$$= \frac{B_M/K_F}{B_F/K_F + D_M/K_M - D_F/K_F} = \frac{B_M}{B_F + D_M(K_F/K_M) - D_F},$$

donde  $K_M$ ,  $B_M$  y  $D_M$  son las cifras absolutas de población, nacimientos y muertes masculinas y  $K_F$ ,  $B_F$  y  $D_F$  las cifras femeninas correspondientes. Para los Estados Unidos en 1964 tenemos las estadísticas que aparecen en el cuadro 13.4, que llevan a  $M(\infty)/F(\infty) = 0,919$ .

La relación de masculinidad final es, aplicando las tasas intrínsecas de 1964, igual a 0,986; la relación de masculinidad final en base a las tasas brutas de 1964, es 0,919. ¿Cuál es el significado de esta gran diferencia? Aparentemente, si las tasas brutas se mantuvieran en el futuro, la proporción de población masculina continuaría bajando, como de hecho ha estado declinando en los últimos censos. La relación de masculinidad observada para la población residente de los Estados Unidos en 1940 fue 1,008; en 1950 la relación fue de 0,987; en 1960 fue 0,971 (*U. S. Statistical Abstract*, 1967, pág. 24). La persistencia de las tasas brutas de natalidad y mortalidad será posible, sin embargo, sólo si cambian las tasas específicas por edades. Si continúan las tasas específicas de mortalidad por edades para hombres y mujeres (que favorecen a las mujeres en la actualidad hasta en 100 por ciento en algunos grupos de edades), resultará una población femenina relativamente más envejecida; 10,27 por ciento de mujeres contra 8,36 por ciento de hombres tienen 65 años o más, lo que da una diferencia de 1,91 por ciento; la diferencia aumenta con el tiempo hasta un 2,74 por ciento final, y correspondientemente el exceso de la tasa de mortalidad masculina cae desde 2,82 a 1,45 por mil de población. Esto disminuye la cantidad  $(d_m - d_f)/b_f$  a un grado que basta para llevar la relación de masculinidad final [calculada según (13.2.6) usando tasas brutas en cada etapa en base a la proyección con dominancia femenina] desde 0,919 a 0,986, con saltos que son esencialmente grandes en los primeros diez años de la proyección (cuadro 13.4).

### Dominancia masculina

Las ecuaciones (13.2.1) están restringidas innecesariamente al ligar los nacimientos de niños de ambos sexos a la población femenina. Los mismos nacimientos se pueden igualmente ligar a la población masculina. Resolviendo un nuevo conjunto de ecuaciones similar a (13.2.1), en el que la tasa bruta de natalidad masculina (niños a los padres) es  $b_m^*$  y la tasa femenina  $b_f^*$  se define como  $b_m^*/s$ , y, como es apropiado a la dominancia masculina,  $b_m^*$  y  $b_f^*$  se multiplican por el número de hombres en el momento  $t$ , se obtiene una nueva relación de masculinidad final:

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \frac{b_m^* - d_m^* + d_f^*}{b_f^*} \quad (13.2.7)$$

(Deduzca esto de  $M(\infty)/F(\infty)$  de la ec. (13.2.6) mediante el intercambio de hombres y mujeres tomando enseguida el recíproco). Si las tasas de mortalidad para hombres y mujeres son iguales, las ecs. (13.2.6) y (13.2.7) en conjunto hacen que

CUADRO 13.4

POBLACION, NACIMIENTOS Y MUERTES POR SEXO. ESTADOS UNIDOS, 1964.  
LAS RELACIONES DE MASCULINIDAD FINALES ESTAN BASADAS EN TASAS  
BRUTAS DE 5, 10, 15 E  $\infty$  AÑOS DE PROYECCION

	CIFRAS ABSOLUTAS				
	Hombres		Mujeres		Total
Población	93,990,000		97,379,000		191,369,000
Nacimientos	2,060,162		1,967,328		4,027,490
Muertes	1,017,778		780,273		1,798,051
	BASADAS EN PROYECCION CON DOMINANCIA FEMENINA				
	Hombres		Mujeres		Relación de masculinidad final
	$1000b_m$	$1000d_m$	$1000b_f$	$1000d_f$	$\frac{b_f s}{b_f + d_m - d_f}$
Observada 1964	21.92	10.83	20.20	8.01	0.919
Proyectada 1969	23.34	10.96	21.42	8.56	0.942
1974	24.89	10.88	22.80	8.87	0.962
1979	25.74	10.61	23.61	8.96	0.979
Estable	24.93	9.23	23.48	7.78	0.986
	BASADAS EN PROYECCION CON DOMINANCIA MASCULINA				
	Hombres		Mujeres		Relación de masculinidad final
	$1000b_m^*$	$1000d_m^*$	$1000b_f^*$	$1000d_f^*$	$\frac{b_m^* - d_m^* + d_f^*}{b_m^*/s}$
Observada 1964	21.92	10.83	20.20	8.01	0.912
Proyectada 1969	23.01	10.96	21.11	8.57	0.938
1974	24.90	10.90	22.82	8.88	0.962
1979	26.35	10.62	24.17	8.96	0.981
Estable	26.23	8.75	24.78	7.31	0.990

Se preserva la relación de masculinidad de los nacidos definiendo  $b_m$  como  $sb_f$  en la proyección con dominancia femenina, y  $b_f^*$  como  $b_m^*/s$  en la dominancia masculina;  $s = 2\,060\,162/1\,967\,328 = 1,04719$ .

la relación de masculinidad final en la población sea igual a  $b_m/b_f = b_m^*/b_f^*$ , que es la relación de masculinidad al nacimiento. Podemos interpretar  $M(\infty)/F(\infty)$  separando la expresión de la derecha de (13.2.7) en dos partes, de las cuales la primera es la relación de masculinidad al nacimiento, la segunda, el exceso de muertes de la población masculina referido a la tasa de natalidad femenina  $b_f^*$ :

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = s - \frac{d_m^* - d_f^*}{b_f^*}.$$

La relación de masculinidad final es igual al exceso de nacimientos masculinos respecto al número total de nacimientos, menos su exceso de muertes tomado en relación a  $b_f^*$ .

Un rasgo satisfactorio de este modelo es que da en forma aproximada la misma relación de masculinidad final para dominancia masculina y para femenina. Para los Estados Unidos en 1964, usando ahora las tasas intrínsecas masculinas de los cuadros 13.1 y 13.4, encontramos que la relación de masculinidad final es

$$\frac{M(\infty)}{F(\infty)} = \frac{26.23 - 8.75 + 7.31}{26.23/1.0472} = 0.990,$$

contra el 0,986 obtenido de (13.2.6). Lo que hace que las versiones con dominancia masculina y con femenina sean similares es que ambas dependen casi de la misma manera de la diferencia entre las tasas de mortalidad masculina y femenina, y esta diferencia es  $1000(d_m^* - d_f^*) = 1,44$  para el modelo con dominancia masculina, y  $1000(d_m - d_f) = 1,45$  para el modelo con dominancia femenina.

### Dominancia intermedia

Más realista que la dominancia femenina o masculina es alguna forma intermedia en la que se determinen los nacimientos mediante el número promedio de hombres y mujeres. La solución cuando la función  $L$  de (13.1.4) es la media aritmética  $\frac{1}{2}[M(t) + F(t)]$  se deja como ejercicio para el lector.

Parece un poco más lógico usar una media geométrica, por lo menos por el hecho de que un número cero de uno u otro sexo daría cero nacimientos. Además, si de  $N$  individuos  $f$  son mujeres, el número de parejas es  $fN$ ,  $0 \leq f \leq \frac{1}{2}$  y  $(1-f)N$ ,  $\frac{1}{2} \leq f \leq 1$ . La media aritmética de los hombres y mujeres es  $N/2$ , la media geométrica es  $N\sqrt{f(1-f)}$ ; con un diagrama el lector puede averiguar en qué parte del rango  $0 \leq f \leq 1$  la media geométrica es una mejor aproximación al número de parejas.

Las ecuaciones (13.1.4) se convierten ahora en (véase Kendall, 1949, pág. 248; Goodman, 1953b, pág. 215)

$$\begin{aligned} M'(t) &= -d_m M(t) + b_m \sqrt{M(t)F(t)}, \\ F'(t) &= -d_f F(t) + b_f \sqrt{M(t)F(t)}. \end{aligned} \quad (13.2.8)$$

Mediante un cambio de variables se logra que estas ecuaciones sean lineales. Escriba  $R^2(t) = M(t)$  y  $S^2(t) = F(t)$ , de modo que  $M'(t) = 2R(t)R'(t)$  y  $F'(t) =$



$= 2S(t)S'(t)$ . Sustituyendo y dividiendo la primera ecuación por  $R(t)$  y la segunda por  $S(t)$  obtenemos

$$\begin{aligned} 2R' &= -d_m R + b_m S, \\ 2S' &= b_f R - d_f S, \end{aligned} \quad (13.2.9)$$

que constituyen un par de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden. Estas se pueden resolver explícitamente mediante métodos corrientes, ejemplificados en la sección 12.1 y más adelante en las soluciones de (13.3.1) y (13.4.1), y se las deja aquí para que las resuelva el lector. [Observe que (13.2.9) tiene la misma estructura de signos que la simbiosis en el cuadro 12.2. ¿Son posibles los ciclos en la trayectoria? ¿Pueden ser negativas ambas raíces de la ecuación característica? Demuestre que para una población creciente, según la teoría del capítulo 12, (13.2.9) tendrá una raíz negativa y una positiva, y debido a que las raíces son reales y distintas debe existir un valor límite de la relación de masculinidad].

Suponga que sólo es de interés la relación de masculinidad límite o estable. La condición de estabilidad en la relación de masculinidad

$$\frac{M(t)}{F(t)} = \left[ \frac{R(t)}{S(t)} \right]^2 \quad (13.2.10)$$

es que su derivada,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{R(t)}{S(t)} \right]^2 = 2 \left[ \frac{R(t)}{S(t)} \right] \left[ \frac{S(t)R'(t) - R(t)S'(t)}{S^2(t)} \right], \quad (13.2.11)$$

sea igual a cero. El numerador del segundo factor del segundo miembro de (13.2.11) dará la única raíz apropiada, e igualándola a cero tenemos

$$R(t)/S(t) = R'(t)/S'(t). \quad (13.2.12)$$

Sustituyendo las derivadas en esta última expresión por sus equivalentes de (13.2.9) y reordenando, obtenemos

$$b_f(R/S)^2 + (d_m - d_f)(R/S) - b_m = 0, \quad (13.2.13)$$

que es una ecuación de segundo grado en  $R/S$  cuya solución nos da la  $M/F = (R/S)^2$  final o intrínseca. Evalúe (13.2.13) para los Estados Unidos, 1964, del cuadro 13.1, usando como datos a) la media aritmética, y b) la media geométrica de las constantes con dominancia masculina y con dominancia femenina. La discusión siguiente acerca de la dominancia mixta deja abierta la definición de las constantes.

Este simple recurso para averiguar la relación final de masculinidad sin evaluación explícita de las trayectorias para los dos sexos es aplicable a otras formas de dominancia intermedia. Supongamos que los nacimientos dependen de la población masculina en la fracción  $D$ , donde  $0 \leq D \leq 1$ , y de la femenina en la fracción  $1 - D$ , de modo que la función  $L$  de (13.1.4) es

$$L(M(t), F(t)) = DM(t) + (1 - D)F(t). \quad (13.2.14)$$

Nuevamente podríamos demostrar, como en (13.2.12) que en la situación de estabilidad la razón de las derivadas es igual a la razón de  $M(t)$  a  $F(t)$

$$M(t)/F(t) = M'(t)/F'(t), \quad (13.2.15)$$

y sustituyendo las derivadas (13.1.4) con la función  $I$  de (13.2.14) insertada, se reduce (13.2.15) a la ecuación de segundo grado en  $M/F$ :

$$(M/F)^2 Db_f + (M/F)[b_f + d_m - d_f - D(b_m + b_f)] - (1 - D)b_m = 0. \quad (13.2.16)$$

Deduzca esto y enseguida verifíquelo haciendo  $D=0$  para obtener (13.2.6) y  $D=1$  para obtener (13.2.7). Demuestre que para una población en la que  $M/F < 1$  la  $M/F$  final es una función monótonamente decreciente de la  $D$  seleccionada.

En lo que precede, el grado de la dominancia masculina  $D$  es *exógeno*, lo que equivale a decir arbitrario, o al menos determinado por consideraciones ajenas al sistema. Si el modelo mismo pudiera determinar  $D$  en una forma realista, él podría ser mejorado. Podemos escribir por ejemplo:

$$\begin{aligned} M'(t) &= -d_m M(t) + b_m [M(t)D(t) + F(t)(1 - D(t))], \\ F'(t) &= -d_f F(t) + b_f [M(t)D(t) + F(t)(1 - D(t))], \\ D(t) &= \frac{F(t - \lambda)}{M(t - \lambda) + F(t - \lambda)}, \end{aligned} \quad (13.2.17)$$

El último miembro expresa el hecho de que la dominancia masculina es apropiada cuando la población masculina es escasa, y existe un rezago  $\lambda$  en el efecto de la escasez masculina sobre los nacimientos actuales. Las dos primeras ecuaciones no son altamente sensibles al valor de  $D$ . Mientras el conjunto (13.2.17) sea no lineal y su solución explícita sea una labor formidable, el bosquejo numérico de la trayectoria como un problema de recorrido no presenta dificultad al realizarlo con la ayuda de un computador.

Una manera de salir adelante con el conjunto de ecuaciones es con la ayuda del teorema de Taylor. Tenemos, tomando un término más que en el trabajo similar de la sección 12.1,

$$M(t + h) = M(t) + hM'(t) + \frac{h^2}{2!} M''(t),$$

hasta las segundas derivadas y en forma similar para  $F(t)$ . Si  $h = 1$  año y  $\lambda = 5$  años, y los valores iniciales son  $M(0) = F(0) = 500$  y  $D(t) = 0,5$ ,  $t \leq 5$ , entonces  $M'(0)$  y  $F'(0)$  son calculables de (13.2.17), y por diferenciación de (13.2.17) lo son  $M''(0)$  y  $F''(0)$ . La cantidad  $D(0)$  es tratada como constante en intervalos pequeños. A continuación el teorema de Taylor da  $M(1)$  y  $F(1)$ ;  $D(1)$  se toma como 0,5 y el proceso continúa.

El cuadro 13.5 muestra los extractos de dos caminos surgidos de las ecuaciones (13.2.17), teniendo ambos las constantes de aproximación para Noruega, 1963, que aparecen en la última línea del cuadro 13.6, y con rezago  $\lambda$  igual a 5 años. El primero de los dos caminos comienza con cantidades iguales para los dos sexos, y puesto que esto está próximo a la relación de masculinidad final, no se espera otro cambio que un crecimiento casi geométrico. Los demás cami-

**CUADRO 13.5**  
**CAMINOS ALTERNATIVOS PARA LAS POBLACIONES MASCULINA Y FEMENINA**  
**CON DOMINANCIA ENDOGENA, BASADO EN (13.2.17).**  
**CONSTANTES PARA NORUEGA, 1963<sup>a</sup>**

Año t	Población inicial M(0) = F(0) = 500			Población inicial M(0) = 0; F(0) = 1000		
	M(t)	F(t)	D(t)	M(t)	F(t)	D(t)
0	500	500	0.500	0	1000	0.500
5	529	529	0.500	52	1008	1.000
10	560	560	0.500	60	976	0.951
15	592	592	0.500	70	947	0.942
20	627	627	0.500	81	921	0.931
25	663	663	0.500	93	898	0.919
30	701	702	0.500	107	878	0.906
35	742	743	0.500	122	861	0.892
40	785	786	0.500	140	847	0.876
45	831	832	0.500	159	836	0.859
50	879	880	0.500	180	828	0.840
100	1546	1548	0.500	506	924	0.660
150	2719	2723	0.500	1081	1350	0.561
200	4783	4790	0.500	2043	2217	0.523
250	8413	8426	0.500	3689	3803	0.508
299	14632	14654	0.500	6476	6555	0.503
300	14799	14821	0.500	6550	6629	0.503

<sup>a</sup> La ecuación (13.2.17) con constantes  $b_m^t = 0,02077$ ;  $b_f^t = 0,01984$ ;  $d_m = 0,00949$ ;  $d_f = 0,00853$ ; rezago  $\lambda = 5$  años, aparece en el cuadro 13.6. Programado por William Taylor.

nos comienzan con 1 000 mujeres y 0 hombres, bastante alejados de la distribución final, y en ese caso los cambios son grandes. Con el objeto de comenzar el proceso, hicimos  $D(t)$  igual a 0,5 para los primeros cinco años, puesto que con cero hombres y siguiendo (13.2.7) estrictamente, los nacimientos serían cero en todos los casos. (En efecto, este sistema en base a la ecuación (13.2.17) comienza en la fecha 5 con 52 hombres y 1 008 mujeres). A continuación,  $F(t)$  declina cuando la escasez de hombres provoca una fuerte dominancia masculina; aparecen relativamente pocos nacimientos hasta que se vigoriza el número de hombres. La falta de nacimientos debido a la causa señalada resulta en una

**CUADRO 13.6**  
**RELACION DE MASCULINIDAD FINAL O INTRINSECA,**  
**USANDO DISTINTOS CONJUNTOS DE DATOS. NORUEGA, 1963**

Datos usados				Relación intrínseca de masculinidad	
$d_m - d_f$	$b_m^*$	$b_f$	$s$	Con dominancia femenina (13.2.6)	Con dominancia masculina (13.2.7)
0.00096	0.02035		1.0468	0.9975	0.9974
0.00096		0.02027	1.0468	0.9995	0.9995
0.00096	0.02035	0.02027		0.9585	0.9566
$b_m^\dagger; b_f^\dagger$ ; término medio; que satisfacen (13.2.18)					
	$b_m^\dagger$	$b_f^\dagger$	$s$		
0.00096	0.02077	0.01984	1.0468	0.9986	0.9985

población con la mitad del tamaño a los trescientos años, en este caso de condición inicial referida a un sexo, que la población a la que se arriba cuando se comienza con 500 personas de cada sexo. En  $t = 300$  ambos grupos están creciendo a la misma tasa, y la relación de masculinidad está próxima al valor 0,9986 a que se amoldan las constantes según (13.2.6).

Queda una dificultad mayor: la determinación de las constantes  $b_m$  y  $b_f$ . Una posibilidad está en la  $b_m^*$  masculina y  $b_f$  femenina observadas (tasas intrínsecas de natalidad por sexo separadas). Pero la razón  $b_m^*/b_f$  para Noruega, 1963, por ejemplo, es  $0,02035/0,2027 = 1,0039$ , y esto es muy diferente de la relación de masculinidad efectiva de los nacidos en 1963 que fue de 1,0468..

Los tres valores observados,

- $b_m^*$  tasa intrínseca de natalidad masculina,
- $b_f$  tasa intrínseca de natalidad femenina, y
- $s$  relación de masculinidad al nacimiento

serán en general inconsistentes entre sí. Puesto que se sabe que  $s$  va a ser más constante a través del tiempo que la tasa bruta de natalidad masculina o la femenina, se debería mantenerlo. Si preservamos  $s$ , nos sentimos tentados a tomar en cuenta  $b_m^*$  y  $b_f$  de tal manera que queda inalterado el promedio de  $b_m^*$  y  $b_f$ , o sea, deberían convertirse en  $b_m^* + \varepsilon = b_m^\dagger$  y  $b_f - \varepsilon = b_f^\dagger$ . Esto corresponde a la condición

$$\frac{b_m^\dagger}{b_f^\dagger} = \frac{b_m^* + \varepsilon}{b_f - \varepsilon} = s, \quad (13.2.18)$$

y en consecuencia tenemos

$$\varepsilon = \frac{sb_f - b_m^*}{1 + s}. \quad (13.2.19)$$

El uso de  $b_m^t = b_m^* + \varepsilon$ ,  $b_f^t = b_f - \varepsilon$ , y  $s$  parece constituir la violación mínima de los datos. Para Noruega, 1963, con  $s = 1,0468$ , esta componenda daría  $\varepsilon = 0,00043$  y los valores modificados  $b_m^t = 0,02077$  y  $b_f^t = 0,01984$ . Por tanto (13.2.6) para dominancia femenina daría como relación de masculinidad final

$$b_m^t / (b_f^t - d_f + d_m) = 0,9986;$$

para dominancia masculina (13.2.7) daría 0,9985.

El cuadro 13.6 muestra por medio de un resumen las opciones al seleccionar entre los tres valores  $b_m^*$ ,  $b_f$  y  $s$  usando los datos para Noruega, 1963, dejando de lado las variantes de  $d_m - d_f$  debido a tasas de crecimiento masculino y femenino diferentes. Se ve que las tres líneas que preservan  $s$ , la razón observada de los nacimientos masculinos a los femeninos, concuerdan bastante bien, en tanto que usando los  $b_m^*$  y  $b_f$  observados, el resultado es bastante diferente. Los  $b_m^*$ ;  $b_f^t$  término medio al final parecen hacer el mejor uso de todos los datos.

Se han propuesto otras formulaciones del problema de los dos sexos. Pollard (1948, pág. 313) relacionó los hijos con las madres y las hijas con los padres, lo cual para un cierto número de generaciones corresponde a una dominancia un poco superior a 0,5; su tasa intrínseca conjunta  $r$  es

$$r = \frac{T^* \rho^* + T \rho}{T^* + T}, \quad (13.2.20)$$

donde  $T^*$  y  $T$  son la extensión de la generación masculina y femenina, y  $\rho^*$  y  $\rho$  son las tasas intrínsecas masculina y femenina. Su ingenioso modelo nunca puede ser autocontradictorio. Yntema (1952) supuso que entre  $k$  generaciones habría  $Ck$  en que las razones son atribuibles a los padres y  $(1 - C)k$  en que son atribuibles a las madres. Esta generalización del método de Pollard da la ecuación característica

$$(\psi^*(r))^C (\psi(r))^{1-C} = \left( \int_0^\beta e^{-rx} \phi^*(x) dx \right)^C \left( \int_0^\beta e^{-rx} \phi(x) dx \right)^{(1-C)} = 1, \quad (13.2.21)$$

donde  $\phi^*(x)$  es la función neta de paternidad, esto es, el análogo masculino de  $\phi(x)$ . La raíz dominante de (13.2.21) dividirá la distancia entre las raíces masculina y femenina en dos intervalos cuyas longitudes están en la razón  $CT^*$  a  $(1 - C)T$ . La demostración de este enunciado requiere la aproximación  $\psi(r) = R_0 e^{-rT}$ , que es equivalente a (6.2.5) cuando  $T$  reemplaza a  $\mu - (\sigma^2 r / 2)$ . Entonces (13.2.21) se convierte en

$$(R_0^* e^{-rT^*})^C (R_0 e^{-rT})^{(1-C)} = 1,$$

Tomando logaritmos y resolviendo en términos de  $r$ , da si  $\rho = (\ln R_0) / T$ , etc.,

$$r = \frac{CT^* \rho^* + (1 - C)T \rho}{CT^* + (1 - C)T}, \quad (13.2.22)$$

del cual (13.2.20) es el caso especial en que  $C = 1 - C = \frac{1}{2}$ . Se puede demostrar mediante (14.1.7) y el argumento que sigue que el grado de dominancia masculina  $D$  usado antes tiene un efecto similar al  $C$  actual.

### 13.3. TRATAMIENTO SIMULTANEO DE LAS EDADES Y LOS SEXOS

La aplicación de ecuaciones diferenciales al tratamiento simultáneo de la edad y el sexo se puede ilustrar con un sexo y dos grupos de edad. Denominemos  $A(t)$  a la cantidad de los que tienen menos de 15 años de edad en el momento  $t$ , y  $B(t)$  a los que tienen más de 15. Supongamos para aquellos que tienen menos de 15 años una tasa constante de mortalidad  $d_a$  y tasa de fecundidad igual a cero, y para los que tienen 15 años y más, una tasa  $d_b$  y una tasa de fecundidad  $b$ . Supongamos también que la proporción de  $A(t)$  que alcanzan la edad 15 y salen del grupo es  $e$  por año. Las reglas de interacción están incorporadas en el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} A'(t) &= -(d_a + e)A(t) + bB(t), \\ B'(t) &= eA(t) - d_b B(t). \end{aligned} \quad (13.3.1)$$

La primera de éstas se justifica diciendo que el cambio en el grupo de edad más joven depende en forma inversa de las muertes y del envejecimiento del grupo, y en forma directa de los nacimientos en los miembros del grupo de más edad: el cambio en el último grupo depende en forma directa de los que entran por el proceso de envejecimiento y en forma inversa de las muertes. Las ecuaciones (13.3.1) caen bajo simbiosis en el esquema del cuadro 12.2. Demuestre que sus raíces son ambas negativas si  $b < (1 + d_a/e)d_b$ .

Para las mujeres de Estados Unidos 1960, los datos [arreglados en el mismo orden que los símbolos de (13.3.1)] son

$$\begin{aligned} A'(t) &= -\frac{61,297 + 1,483,000}{27,427,000} A(t) + \frac{2,078,142}{63,565,000} B(t), \\ B'(t) &= \frac{1,483,000}{27,427,000} A(t) - \frac{675,037}{63,565,000} B(t), \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

lo cual se reduce a

$$\begin{aligned} A'(t) &= -0.056306A(t) + 0.032693B(t), \\ B'(t) &= 0.054071A(t) - 0.010620B(t). \end{aligned} \quad (13.3.3)$$

Sustituyendo el valor de ensayo  $e^{rt}$ , obtenemos la ecuación característica en  $r$ ,

$$\begin{vmatrix} -r - 0.056306 & 0.032693 \\ 0.054071 & -r - 0.010620 \end{vmatrix} = 0, \quad (13.3.4)$$

y

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.01439, \\ r_2 &= -0.08131, \end{aligned}$$

como los dos  $r$  posibles. En consecuencia la solución a (13.3.2) es

$$\begin{aligned} A(t) &= a_1 e^{0.01439t} + a_2 e^{-0.08131t}, \\ B(t) &= b_1 e^{0.01439t} + b_2 e^{-0.08131t}. \end{aligned} \quad (13.3.5)$$

Buscamos la razón de edades final  $A/(A+B)$  y como ella no depende de las condiciones iniciales [¿cómo lo sabemos?] podemos tomar éstas arbitrariamente como

$$\begin{aligned} A(0) &= 1,000,000, \\ B(0) &= 0, \end{aligned}$$

y haciendo  $t=0$  en (13.3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} A'(0) &= -56,306, \\ B'(0) &= 54,071. \end{aligned}$$

Se pueden deducir ahora de (13.3.5) cuatro ecuaciones para las constantes, haciendo  $t=0$  y tomando también las derivadas y haciendo  $t=0$ .

$$\begin{aligned} 1,000,000 &= a_1 + a_2, \\ 0 &= b_1 + b_2, \\ -56,306 &= 0.01439a_1 - 0.08131a_2, \\ 54,071 &= 0.01439b_1 - 0.08131b_2. \end{aligned}$$

De las cuatro constantes sólo  $a_1$  y  $b_1$  afectan la población final, puesto que  $r_2$  es negativo. Por tanto llegamos a

$$A/(A+B) = a_1/(a_1 + b_1) = 0.3162,$$

que es una estimación de la proporción de la población estable con menos de 15 años de edad, basado sólo sobre dos grupos de edad y por tanto burda. Una cifra más precisa es 0.3430, calculada en grupos quinquenales de edad con el método del capítulo 3.

Una manera alternativa de disponer el argumento, análogo a (13.2.11), consiste en establecer la condición de estabilidad en la proporción de menores de 15:

$$\frac{d[A(t)]/d[A(t) + B(t)]}{dt} = 0,$$

lo que se reduce a

$$A(t)/B(t) = A'(t)/B'(t).$$

Sustituya los valores de  $A'(t)$  y  $B'(t)$  de (13.3.3) y resuelva la ecuación de segundo grado resultante para verificar que  $A/(A+B) = 0.3162$ .

Un enfoque aún más simple, cuando se dispone de un computador, es el proceso de recorrido (usado para construir el cuadro 13.5), operando ahora directamente sobre las ecuaciones (13.3.1) y con valores iniciales arbitrarios. Con los coeficientes de (13.3.3) y comenzando con 1000 individuos menores de 15 años de edad y ninguno con más de 15, en 250 años encontramos 9580 meno-

**CUADRO 13.7**  
**TRAYECTORIA DE LOS NUMEROS DE PERSONAS EN DOS GRUPOS DE EDADES  $A(t)$  Y  $B(t)$ , BASADOS EN (13.3.5),**  
**CON LA COMPARACION DE LOS RESULTADOS EN BASE A TRES DISTRIBUCIONES INICIALES DE EDADES.**  
**CONSTANTES PARA LA POBLACION FEMENINA DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1960\***

Año $t$	$A(t)$	$B(t)$	$\frac{100A(t)}{A(t) + B(t)}$	$A(t)$	$B(t)$	$\frac{100A(t)}{A(t) + B(t)}$	$A(t)$	$B(t)$	$\frac{100A(t)}{A(t) + B(t)}$
0	1000	0	100.00	500	500	0.5	0	1000	0.00
5	773	231	76.99	456	599	43.22	140	968	12.61
10	629	402	61.03	436	686	38.89	243	969	20.05
15	542	534	50.38	432	764	36.16	323	994	24.53
20	494	642	43.46	441	835	34.45	388	1036	27.26
25	471	736	39.04	458	914	33.38	445	1093	28.93
30	467	821	36.25	481	990	32.71	496	1160	29.96
35	475	902	34.51	510	1069	32.30	545	1237	30.59
40	493	983	33.41	543	1153	32.04	594	1323	30.98
45	518	1065	32.73	581	1241	31.88	644	1418	31.23
50	549	1150	32.31	622	1335	31.78	696	1521	31.38
100	1102	2381	31.63	1270	2747	31.62	1440	3114	31.62
150	2261	4889	31.62	2608	5640	31.62	2956	6392	31.62
200	4642	10037	31.62	5355	11580	31.62	6069	13123	31.62
250	9530	20607	31.62	10995	23774	31.62	12460	26941	31.62

\* Programado por William Taylor.



res de 15 años; comenzando con 500 con menos de 15 y 500 con más de 15, tenemos en 250 años 10 995 menores de 15; comenzando con 1 000 de 15 años y más, obtenemos en 250 años 12 460 menores de 15 años. En los tres la fracción de menores de 15 es la misma 0,3162 obtenida por la solución completa de arriba, pero las cantidades absolutas varían considerablemente (cuadro 13.7).

Dado sólo el hecho de que con 1 000 en la segunda categoría inicialmente, la cantidad en 150 años es 6 392, y en 250 años la cantidad es 26 941, vemos que la tasa intrínseca  $r$  es la solución de  $e^{100r} = 26\,941/6\,392 = 4,215$ ; en consecuencia,  $r = 0,01439$ , lo que concuerda con (13.3.4).

Por el mismo razonamiento que justificó la noción de un equivalente estable en la sección 3.2, preguntamos aquí qué población inicial que tenga el 0,3162 estable de sus miembros con menos de 15 años de edad habría proyectado la misma población para un  $t$  grande como la que se había obtenido para cada una de las tres condiciones iniciales del cuadro 13.7. Ésta debe ser el total en  $t = 250$  años, lo que es  $10\,995 + 23\,774 = 34\,769$  en el caso en que comenzáramos con 500 en cada categoría, llevando retroactivamente en el tiempo a la tasa  $r = 0,01439$ :

$$(34,769)[e^{(-0,01439)(250)}] = 953.$$

Las tres distribuciones iniciales de edades del cuadro 13.7 tienen equivalentes estables de 826, 953 y 1 080 respectivamente. Convéngase de que los equivalentes estables para las dos edades son los coeficientes  $a_1$  y  $b_1$  de (13.3.5) que corresponden a  $A(0)$  y  $B(0)$  dados, y que en términos de las raíces y coeficientes se pueden escribir

$$a_1 = \frac{-(d_a + e + r_2)A(0) + bB(0)}{r_1 - r_2},$$

$$b_1 = \frac{eA(0) - (d_b + r_2)B(0)}{r_1 - r_2}.$$

Para nuestro problema el equivalente estable total de una distribución  $A(0)$  y  $B(0)$  es

$$a_1 + b_1 = 0.826A(0) + 1.080B(0).$$

Cada interacción de los sexos en los dos grupos de edades se puede expresar con cuatro ecuaciones. Si  $M_a(t)$  y  $M_b(t)$  representan los hombres más jóvenes y los de más edad respectivamente,  $F_a(t)$  y  $F_b(t)$  a las mujeres más jóvenes y a las de más edad, y si el punto de intersección entre más joven y más viejo es inferior a las edades reproductivas, entonces

$$\begin{aligned} M'_a(t) &= -(d_{ma} + e_m)M_a(t) && + b_m F_b(t), \\ M'_b(t) &= e_m M_a(t) - d_{mb} M_b(t), \\ F'_a(t) &= && -(d_{fa} + e_f)F_a(t) + b_f F_b(t), \\ F'_b(t) &= && e_f F_a(t) - d_{fb} F_b(t), \end{aligned} \quad (13.3.6)$$

donde  $d_{ma}$  es la tasa de mortalidad para los hombres jóvenes,  $d_{mb}$  la tasa de mortalidad para los de más edad,  $e_m$  la proporción de jóvenes que alcanzan el final del grupo joven de edades,  $b_m$  la razón de los nacimientos masculinos a la pobla-

ción femenina de más edad. Las tasas para la población femenina aparecen con los mismos símbolos, excepto que se pone  $f$  en lugar de  $m$ . Todas las tasas, las presentes como las anteriores, son instantáneas y expresadas sobre una base anual. El lector debería expresar las primeras dos ecuaciones de (13.3.6) en palabras. Puede también escribir las ecuaciones diferenciales para un modelo con dos sexos que considere  $M(t)$ , total de hombres;  $F_a(t)$ , niñas con menos de 15 años,  $F_b(t)$ , mujeres de 15-44;  $F_c(t)$ , mujeres de 45 años y más.

Esto y las formulaciones (13.3.1) y (13.3.6) tienen la desventaja de que las cantidades  $e$ , que representan las salidas desde el grupo más joven al grupo de más edad, se toman de los datos, junto con las tasas de natalidad y mortalidad. Los modelos matriciales de los capítulos 3 y 14 requieren sólo las tasas obtenidas de los datos.

### 13.4. UN MODELO DE NUPCIALIDAD

En una sociedad monógama, aquellos que están casados constituyen una subpoblación cuya razón de masculinidad es uno —podemos considerar que hay  $N(t)$  hombres y  $N(t)$  mujeres. La subpoblación que consta de personas casadas no se puede considerar como una población cerrada, puesto que además de los nuevos casados, la procreación genera hijos (no casados), y la mortalidad entre las personas casadas deja viudos y viudas, tratados aquí como solteros. Los hechos pertinentes están expresados (de nuevo según Kendall, 1949, pág. 248; y Goodman, 1953a, pág. 216) en las ecuaciones

$$\begin{aligned} M'(t) &= -d_m M(t) && -mF(t) + (b_m^\circ + d_f^\circ)N(t), \\ F'(t) &= && -(d_f + m)F(t) + (b_f^\circ + d_m^\circ)N(t), \\ N'(t) &= && mF(t) - (d_f^\circ + d_m^\circ)N(t), \end{aligned} \quad (13.4.1)$$

donde  $M(t)$  es el número de hombres solteros,  $F(t)$  de mujeres solteras, y  $N(t)$  de parejas casadas;  $m$  es la proporción (supuesta constante) de mujeres solteras que se casan. Las razones que se refieren a la población casada las distinguiremos mediante  $^\circ$ . El primer miembro de (13.4.1), por ejemplo, dice que el cambio en el número de hombres solteros,  $M'(t)$ , es igual a

- |   |                    |
|---|--------------------|
| a) menos las muertes de la población masculina  | — $d_m M(t)$ .     |
| b) menos el número de mujeres que se casan, cada una de las cuales toma un varón de entre $M(t)$                  | — $mF(t)$ ,        |
| c) más los nuevos varones nacidos   | $b_m^\circ N(t)$ . |
| d) más las mujeres casadas que se mueren, cada una de las cuales deja un hombre en la categoría de los no casados | $d_f^\circ N(t)$ . |

En forma similar para las otras dos ecuaciones de (13.4.1).

Ahora se debe especificar la dominancia de los matrimonios, no de los nacimientos; se puede modificar la dominancia femenina en el matrimonio de (13.4.1) como se desea. El lector puede escribir una modificación de las ecuaciones (13.4.1) correspondiente a la dominancia intermedia para el matrimonio similar a (13.2.17) para dominancia para nacimientos. [¿Qué modificación adicional se requeriría si se consideraran tres edades de la población femenina: menores de 15, 15-44 y 45 o más?]

Si en (13.4.1) se reemplaza la función de ensayo  $e^{rt}$  para cada una de las incógnitas  $M(t)$ ,  $F(t)$  y  $N(t)$ , entonces la condición para consistencia proporciona una ecuación de determinantes en  $r$ :

$$\begin{vmatrix} -r - d_m & -m & b_m^o + d_f^o \\ 0 & -r - d_f - m & b_f^o + d_m^o \\ 0 & m & -r - d_f^o - d_m^o \end{vmatrix} = 0. \quad (13.4.2)$$

La forma de análisis aplicada a (12.1.1) mostrará que (13.4.1) sólo puede tener raíces reales, de las cuales a lo más una es positiva.

Reemplazamos los símbolos de (13.4.2) por sus valores para los Estados Unidos en 1960, basados sobre datos que son parcialmente hipotéticos. Por ejemplo, los primeros matrimonios que ocurrieron durante 1960 se calcularon tomando el total de matrimonios, 1 527 000, y asignándolos de acuerdo a la distribución por la condición marital anterior para los 33 estados que muestran tal información. Además, se debe hacer un ajuste en lo que se refiere a las parejas casadas, ya que los números de hombres casados y mujeres casadas son diferentes en el censo y las ecuaciones no toman en cuenta esto. Se tomó la cifra redonda de 42 750 000, intermedia entre ambas. Puesto que se carecía de la información por edades, todas las tasas son brutas más que intrínsecas.

Con los datos contruidos de esta manera, la ecuación de determinantes dispuesta en el mismo orden que (13.4.2) se convierte en

$$\begin{vmatrix} -r - 0.009260 & -0.02412 & 0.05099 + 0.00557 \\ 0 & -r - 0.01037 - 0.02412 & 0.04861 + 0.01294 \\ 0 & 0.02412 & -r - 0.00557 - 0.01294 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.4.3)$$

Desarrollando y cambiando signos en (13.4.3) se obtiene

$$(r + 0.009260)(r^2 + 0.05297r - 0.0008467) = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = 0.01286$$

$$r_2 = -0.06584$$

$$r_3 = -0.00926,$$

y la solución a (13.4.1) en términos de estas raíces es

$$M(t) = m_1 e^{r_1 t} + m_2 e^{r_2 t} + m_3 e^{r_3 t},$$

$$F(t) = f_1 e^{r_1 t} + f_2 e^{r_2 t} + f_3 e^{r_3 t},$$

$$N(t) = n_1 e^{r_1 t} + n_2 e^{r_2 t} + n_3 e^{r_3 t}, \quad (13.4.4)$$

donde nuevamente se deben ajustar los coeficientes a las condiciones iniciales.

La raíz dominante,  $r_1 = 12,86$  por mil, representa la tasa a la que crecería la población después del ajuste de las tasas de nupcialidad, natalidad y mortalidad que colocamos en (13.4.1) y se la puede denominar *tasa intrínseca de nupcialidad y sexo*. Se compara con la tasa bruta obtenida como nacimientos femeninos menos muertes femeninas dividida por la población femenina de 14,69 por mil; aparentemente, la persistencia de las tasas brutas de nupcialidad, natalidad

y mortalidad de 1960 implica una tasa final de crecimiento menor en 1,83 por mil que la persistencia de las tasas brutas de natalidad y mortalidad.

Hemos alcanzado ahora diversos valores para el crecimiento por mil de la población femenina en 1960 de los Estados Unidos:

tasa bruta de crecimiento	14,69,
tasa intrínseca por edad	20,71,
tasa intrínseca de nupcialidad y sexo	12,86.

La tasa intrínseca por edad es más alta que la tasa bruta en virtud del vacío en la distribución por edades correspondientes a los niños nacidos en la década del 30; el mero suavizamiento de éstos mediante la persistencia de las tasas específicas por edades de 1960 provocaría un alza en la tasa (bruta) de natalidad de más del 6 por mil. La tasa intrínseca de nupcialidad y sexo es menor que la tasa bruta debido a un fenómeno opuesto: las altas tasas de nupcialidad hasta el año 1956 y su posterior descenso. Los matrimonios por mil mujeres eran más de 80 en la mayoría de los años que van desde 1940 a 1956, siendo 82,4 en 1956, y habían caído a 73,5 en 1960 (*U. S. Statistical Abstract, 1966, pág. 61*). La persistencia de las tasas de nupcialidad de 1960 y tasas de natalidad de los casados daría por resultado una caída de la tasa de natalidad global en 1,34 por mil aproximadamente.

¿De qué manera ha afectado a la relación de masculinidad final la separación de la categoría de las parejas casadas en las ecs. (13.4.1)? Con el objeto de determinar esto resolvemos (13.4.1), partiendo de condiciones iniciales arbitrarias tal como se hizo para (13.3.1). Mediante diferenciación directa de (13.4.4) dos veces, haciendo  $t = 0$ , y resolviendo las nueve ecuaciones simultáneas para obtener las nueve incógnitas, determinamos números proporcionales a la población masculina, femenina y de parejas casadas en la condición estable:

$$M/m_1 = F/f_1 = N/n_1,$$

o sea,

$$M/1193 = F/1362 = N/1047. \quad (13.4.5)$$

La relación de masculinidad de la población total es

$$\frac{M + N}{F + N} = \frac{1193 + 1047}{1362 + 1047} = \frac{2240}{2409} = 0.930.$$

Esto es comparable con el cálculo hecho por medio de las ecs. (13.2.1) y (13.2.6), que no distinguían la población casada y que resultó ser 0,919 cuando se usaron las tasas brutas de 1960. La consideración de la nupcialidad en (13.4.1) da en este caso una relación de masculinidad final levemente más alta.

Igual que antes, reconstruimos la trayectoria definida por (13.4.1) numéricamente, y esto verificará la parte de la solución de la ecuación diferencial dada como (13.4.5) y nos informará acerca de las demás propiedades de la solución. Con los valores iniciales  $M(0) = 0$ ,  $F(0) = 0$  y  $N(0) = 100$  (elegidos deliberadamente para estar alejados de la situación de equilibrio),  $M'(0)$ ,  $F'(0)$  y  $N'(0)$  son calculables de (13.4.1), y mediante diferenciación de (13.4.1) también lo son  $M''(0)$ ,  $F''(0)$ ,  $N''(0)$ . Estos en los dos primeros términos del desarrollo de Taylor con  $h = 0,1$  dan  $M(0,1)$ ,  $F(0,1)$ ,  $N(0,1)$ , y el proceso continúa.

## CUADRO 13.8

TRAYECTORIA BASADA EN EL MODELO DE NUPCIALIDAD CON DOMINANCIA FEMENINA (13.4.1), CON CONSTANTES PARCIALMENTE HIPOTETICAS Y EN PARTE REFERIDAS A LOS ESTADOS UNIDOS, 1960\*

$t$ Año	Hombres solteros $M(t)$	Mujeres solteras $F(t)$	Parejas casadas $N(t)$	Relación de masculinidad
0	0	0	100	1.0000
1	6	6	98	0.9953
2	11	12	97	0.9912
3	16	17	95	0.9874
4	20	22	94	0.9841
5	25	27	93	0.9811
6	29	32	92	0.9784
7	33	36	91	0.9759
8	37	40	90	0.9737
9	41	45	90	0.9716
10	44	48	89	0.9697
20	73	80	88	0.9567
30	94	104	94	0.9494
40	113	125	104	0.9448
50	131	146	116	0.9415
60	150	168	131	0.9391
70	170	192	148	0.9372
80	194	218	169	0.9358
90	220	249	192	0.9346
100	250	283	218	0.9337
150	473	539	414	0.9312
199	887	1011	778	0.9304
200	898	1025	788	0.9304

\* Programado por Peter Smith.

El cuadro 13.8 muestra la trayectoria. Observamos:

- La razón  $M(200) : F(200) : N(200) = 898 : 1025 : 788$  es lo mismo que (13.4.5) obtenido resolviendo las ecuaciones.
- La población total al cabo de 200 años es  $898 + 1025 + 2(788) = 3499$ , y al cabo de 199 años, 3454, lo que da una razón de 1,0130, que es aproximadamente igual al exponencial de la raíz dominante  $r = 0,01286$  de (13.4.3).

- c) La razón de masculinidad al cabo de 200 años es  $(898 + 788)/(1\ 025 + 788) = 0,930$ , contra 0,930 en la solución a las ecs. (13.4.1).
- d) La distribución estable por sexo y por estado civil con que termina la tabla nos permite calcular qué número inicial estable de individuos habría sido equivalente a las 100 parejas casadas que se usaron. Es  $3\ 499e^{(-0,01286)(200)} = 267,3$ , como se puede obtener de una tabla de exponenciales. Sin tal tabla se resuelve fácilmente el cálculo usando el hecho de que la población en  $t = 100$  años es 969 ya que  $(969)^2/3\ 499 = 268,4$ . Si no estamos seguros de que se ha alcanzado la estabilidad al cabo de 100 años, podríamos usar el total en 150 años, que es 1 840, en la forma  $(1\ 840)^2/(3\ 499)^2 = 267,6$ .

Variando los parámetros en el modelo y recalculando, podemos responder numéricamente preguntas tales como el efecto de las condiciones iniciales sobre la población en  $t = 200$  años, o de la tasa de nupcialidad sobre la tasa estable de crecimiento. Bajando la tasa de nupcialidad desde 0,02412 a 0,01 se llega sólo a 1 011 personas al cabo de 200 años y a una tasa de crecimiento  $r_1 = 0,00545$ , muy por debajo del  $r_1$  de 0,01286 encontrado antes.

Más sorprendente es el hecho de que la relación de masculinidad sea afectada por la tasa de nupcialidad. Con  $m = 0,02412$  tenemos una relación de masculinidad de 0,930 al cabo de 200 años, con  $m = 0,010$  tenemos 0,952. ¿Cómo se podría averiguar los efectos de cambiar  $m$  directamente de las ecuaciones (13.4.1) y (13.4.2) sin uso alguno del computador?

Un procedimiento alternativo consiste en volver a (13.4.1), considerar nuevamente razones, por ejemplo  $M(t)/F(t)$  y  $N(t)/F(t)$ , e igualar cada una de estas razones a la razón correspondiente de las derivadas, siendo la condición de estabilidad la misma que vimos antes. El lector puede demostrar que (13.4.1) da para las razones estables  $N/F = N'/F'$  y  $M/F = M'/F'$  las ecuaciones

$$\begin{aligned} (N/F)(b_f^\circ + d_m^\circ) + (N/F)(d_f^\circ + d_m^\circ - d_f - m) - m &= 0, \\ (M/F)[(N/F)(b_f^\circ + d_m^\circ) + d_m - d_f - m] &= (N/F)(b_m^\circ + d_f^\circ) - m, \end{aligned}$$

escritas de esta manera debido a que ordinariamente resolveríamos la primera en términos de  $N/F$  y enseguida trataríamos la segunda como lineal en  $M/F$ .

Lo anterior no es más que un corto paso, apoyándose en el trabajo de Goodman y Kendall, en la aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes a poblaciones humanas. Las ecuaciones diferenciales son particularmente útiles cuando se desea tomar en cuenta un número de alternativas de cambio. Esto se ejemplifica en el conjunto (13.4.1): una mujer puede casarse, tener un hijo, y enseguida morir, todo en el mismo año, pero las ecuaciones no necesitan tomar explícitamente en cuenta tal contingencia múltiple porque, en efecto, ellas reducen el proceso a elementos de duración infinitesimalmente pequeña.

### 13.5. PARIDEZ Y ORDEN DE NACIMIENTO SEGUN LA EDAD

Como una indicación para un trabajo futuro, consideremos la población femenina clasificada de acuerdo a la *paridez* (el número de hijos que ha tenido una mujer) y la edad, sea casada o soltera. Sea  $F_{u,p}(t)$  el número de mujeres en el

momento  $t$  de edad  $a$  y paridez  $p$ . Aquellas casadas sin hijos son de paridez 0, y las no casadas son de paridez  $-1$ . La edad podría estar en grupos quinquenales de edad, aunque cualquier otro agrupamiento se ajustaría también y no existe el requerimiento de que el grupo de edad tenga el mismo intervalo a través de todo el estudio. Se podrían también agrupar las parideces.

Cualquiera haya sido la decisión sobre los grupos, regirá la siguiente relación para todas las edades excepto las más jóvenes, y para todas las parideces, siendo  $F'_{a;p}(t)$  la derivada de  $F_{a;p}(t)$  con respecto a  $t$ :

$$F'_{a;p}(t) = -(d_{a;p} + e_{a;p} + b_{a;p})F_{a;p}(t) + b_{a;p-1}F_{a;p-1}(t) + e_{a-1;p}F_{a-1;p}(t). \quad (13.5.1)$$

Los coeficientes con signo menos de  $F'_{a;p}(t)$  en el segundo miembro son la tasa de mortalidad  $d_{a;p}$ , la de salidas por el envejecimiento  $e_{a;p}$ , y la de tener un hijo  $b_{a;p}$ , todas para mujeres en el  $a$ ésimo grupo de edades y paridez  $p$ ésima; los términos positivos representan la entrada en el grupo a través de los grupos anteriores que alcanzan la edad o paridez dada. En la práctica no todas las distinciones proporcionadas en la ec. (13.5.1) son necesarias o factibles; por ejemplo, las tasas de mortalidad en un grupo dado de edad se tomarían usualmente como siendo las mismas para todas las parideces.

El conjunto (13.5.1) necesita suplementarse mediante una ecuación de diferente forma para el grupo más joven, para tomar en cuenta los nacimientos como entradas en la población. Si denominamos  $F_{0;-1}(t)$  al grupo más joven, entonces

$$F'_{0;-1}(t) = \sum_{a,p} b_{a;p}F_{a;p}(t) - (d_{0;-1} + e_{0;-1})F_{0;-1}(t). \quad (13.5.2)$$

Las ecuaciones (13.5.1) y (13.5.2) podrían ser un conjunto grande o pequeño de acuerdo a que se desee o no considerar agrupamientos detallados de edad y paridez. Fácilmente se podría modificar para incluir ambos sexos. Los computadores pueden manejar cientos de ecuaciones simultáneas, pero no se puede dar por sentado que mientras mayor sea el número de ecuaciones todo anda mejor. Más bien se trata del caso opuesto: mientras menor sea el conjunto que es capaz de representar los datos dados, el modelo proporciona una comprensión más clara.

Un medio alternativo para el manejo de algunos de los problemas de interacción de poblaciones es a través de una formulación matricial. Esta es especialmente conveniente para el cálculo con máquinas en que se va a considerar un cierto número de grupos de edades, como se ejemplificará en el capítulo siguiente.

## POBLACIONES EN INTERACCION ANALIZADAS POR EDADES

La discusión de las páginas precedentes sobre poblaciones en interacción mediante ecuaciones diferenciales, omite la importante variable edad. La edad queda más convenientemente incorporada con los dos métodos desarrollados antes: por matrices (capítulo 2) y por ecuaciones integrales (capítulo 5). Estos se usarán para tratar temas relativos a los sexos, paridez, participación en la fuerza de trabajo, y relaciones entre otras subdivisiones de la población. Las poblaciones de los capítulos 1 a 8 son colecciones de individuos de un sexo diferenciados sólo por edad; los capítulos 12 a 14 tratan con cantidades totales de individuos correspondientes a poblaciones en interacción; el capítulo 14 introduce las poblaciones en interacción por edad.

### 14.1. LA MATRIZ GENERALIZADA

La generalización de la matriz de los capítulos 2 y 3, debida a Leslie y que se aplica a un solo sexo, parece tomar cuatro direcciones diferentes cuya discusión constituye la sección 14.1: a) poblaciones que no se comunican, b) interacciones tales como la de migración y la de los sexos, c) clasificación múltiple de cada individuo en un momento cualquiera, y d) cada individuo moviéndose a través de una sucesión de estados.

a) *Poblaciones que no se comunican.* Si la migración entre las diversas regiones de un país o entre diversos países es nula, siendo aquéllas representadas mediante las matrices de proyección  $R$ ,  $S$  y  $T$  y los vectores de las distribuciones por edades iniciales  $\{J\}$ ,  $\{K\}$  y  $\{L\}$ , entonces, la proyección separada daría  $R\{J\}$ ,  $S\{K\}$  y  $T\{L\}$  como los vectores de las distribuciones por edad después de una unidad de tiempo. Podríamos alternativamente colocar las tres juntas en una matriz más grande (donde las submatrices simbolizadas como 0 están completadas con ceros) y en un vector más grande y multiplicar:

$$\begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} J \\ K \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RJ \\ SK \\ TL \end{Bmatrix}, \quad (14.1.1)$$

usando las reglas para matrices particionadas. Las raíces características de la matriz cuadrada que aparece en (14.1.1) son las raíces características de  $R$ ,  $S$  y



T, y sólo éstas. Mediante la descomposición del proceso de proyección desarrollado en el capítulo 3, la población proyectada en el momento  $t$  depende de  $\sum_i c_i \lambda_i^t$ ; donde  $i$  varía hasta el orden de la matriz mayor en (14.1.1). Cualquier migración introducirá elementos en las posiciones ocupadas por los ceros en (14.1.1) y modificará los elementos diagonales, cambiando de esa manera al menos alguna de las raíces características  $\lambda_i$ , y esto nos lleva al próximo caso.

b) *La migración y los sexos.* Para tomar en cuenta el movimiento desde la segunda a la primera región, que disminuirá  $S\{K\}$  y aumentará  $R\{J\}$  respectivamente, se requiere otra matriz, llamémosla  $M$ , en las segundas posiciones de la primera y segunda fila del operador en (14.1.1). Entonces, si la migración se va a efectuar al final del intervalo de proyección, tendremos

$$\begin{bmatrix} R & MS & 0 \\ 0 & (I - M)S & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RJ + MSK \\ (I - M)SK \\ TL \end{bmatrix}, \quad (14.1.2)$$

donde  $M$  es una matriz diagonal cuyos elementos son la fracción que migra a cada edad. Si la migración toma lugar al comienzo del intervalo, y suponemos que los migrantes conservan durante un período la mortalidad y la fecundidad del grupo que ellos dejan, entonces la proyección es

$$\begin{bmatrix} R & SM & 0 \\ 0 & S(I - M) & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RJ + SMK \\ S(I - M)K \\ TL \end{bmatrix}.$$

Si la migración ocurre al comienzo del intervalo y los migrantes asumen inmediatamente la mortalidad y la fecundidad del grupo al cual van, tenemos

$$\begin{bmatrix} R & RM & 0 \\ 0 & S(I - M) & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RJ + RMK \\ S(I - M)K \\ TL \end{bmatrix}.$$

En el último caso el  $SMK$  sustraído del segundo grupo no es igual, en general, al  $RMK$  sumado al primer grupo. ¿Bajo qué condiciones serán estos casos lo mismo?

Andrei Rogers (1967) ha usado álgebra matricial en el estudio de la migración a lo largo de diferentes líneas. El investiga el problema de estimar los intercambios de migración entre un número de regiones, a partir de un conocimiento de sus diversas poblaciones en diversas ocasiones; éste es el problema de inferir la matriz  $M$  de los vectores  $\{K^{(0)}\}$ ,  $\{K^{(1)}\}$ ,  $\{K^{(2)}\}$ , ..., que son recuentos de población según edad en sucesivos puntos del tiempo, anuales o quinquenales. Suponiendo que la misma matriz  $M$  se aplica a través de todos los intervalos entre éstos, tenemos para una región cualquiera las ecuaciones en  $M$ , que aquí incluyen migración, nacimientos y muertes,

$$M\{K^{(0)}\} = \{K^{(1)}\},$$

$$M\{K^{(1)}\} = \{K^{(2)}\},$$

⋮

Lamentablemente, el proceso ocurre de una manera suficientemente inestable como para que la matriz  $\mathbf{M}$ , que resulta de las ecuaciones con datos reales reemplazados en los  $\{\mathbf{K}^{(t)}\}$ , varía más allá de límites razonables. Rogers encontró, al menos en experimentos iniciales, que no podemos suponer que la misma matriz  $\mathbf{M}$  prosigue operando sobre los períodos sucesivos.

El enfoque es mencionado aquí debido a que una versión más simple, el método de supervivencia para medir la migración, ha sido aplicado extensa y exitosamente por los demógrafos. Dada numéricamente la matriz de proyección  $\mathbf{R}$  de (14.1.2), que representa la mortalidad y la fecundidad de una región, el vector de la distribución por edades inicialmente observada  $\{\mathbf{J}^{(0)}\}$  y el vector de la distribución por edades observada  $\{\mathbf{J}^{(1)}\}$  después de un ciclo, entonces, la cantidad total de migración por edades queda estimada en números absolutos mediante  $\{\mathbf{J}^{(1)}\} - \mathbf{R}\{\mathbf{J}^{(0)}\}$ . En el sistema (14.1.2), se pueden obtener dos estimaciones del vector de migración  $\mathbf{MS}\{\mathbf{K}\}$  si todo lo demás es conocido.

J. H. Pollard (1966) considera un vector de inmigración  $\{\mathbf{b}\}$  constante y conocido, el que se suma a la población en cada período de tiempo, nuevamente, para una población clasificada por edades. Entonces

$$\begin{aligned}\{\mathbf{K}^{(t)}\} &= \mathbf{M}\{\mathbf{K}^{(t-1)}\} + \{\mathbf{b}\} \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{M}\{\mathbf{K}^{(t-2)}\} + \{\mathbf{b}\}) + \{\mathbf{b}\} \\ &\quad \vdots \\ &= \mathbf{M}^t\{\mathbf{K}^{(0)}\} + \mathbf{M}^{t-1}\{\mathbf{b}\} + \mathbf{M}^{t-2}\{\mathbf{b}\} + \dots + \{\mathbf{b}\}.\end{aligned}$$

Para determinar la suma, digamos  $\{\mathbf{G}\}$ , de esta progresión geométrica de matrices, premultiplicamos por  $\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{M}\{\mathbf{G}\} = \mathbf{M}^t\{\mathbf{b}\} + \mathbf{M}^{t-1}\{\mathbf{b}\} + \dots + \mathbf{M}\{\mathbf{b}\},$$

restamos ambos miembros de  $\{\mathbf{G}\}$ ,

$$\{\mathbf{G}\} - \mathbf{M}\{\mathbf{G}\} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^t)\{\mathbf{b}\},$$

y finalmente premultiplicamos por  $(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$ ,

$$\{\mathbf{G}\} = (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{M}^t)\{\mathbf{b}\}.$$

La población, al cabo de  $t$  ciclos de proyección, es

$$\{\mathbf{K}^{(t)}\} = \mathbf{M}^t\{\mathbf{K}^{(0)}\} + (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{M}^t)\{\mathbf{b}\}.$$

El comportamiento de la población, cuando  $t$  se hace suficientemente grande, puede ser estudiado como una generalización de la población estable de la sección 3.2.

Los dos sexos, en una región cerrada, pueden ser también considerados como poblaciones que se comunican, pudiéndose idear un operador combinado para describir su relación. Si efectuamos el procedimiento del capítulo 2, estableciendo una serie de ecuaciones en diferencia que relacionen la población en

sucesivos períodos de tiempo, usando como intervalo de tiempo y edad 1 año, 5 años ó 15 años, terminamos obteniendo un conjunto de ecuaciones que nuevamente pueden ser expresadas en forma matricial. En la parte femenina, designaremos con la letra **B** (como en el capítulo 4) a la matriz cuadrada de fecundidad, cuyos elementos distintos de cero están todos en la primera fila, y por **S** la que se refiere a supervivencia, cuyos elementos distintos de cero están en la subdiagonal. Las matrices **B\*** y **S\*** tienen los significados correspondientes para la parte masculina de la población.

Si el modelo es de dominancia femenina, lo que equivale a decir que los nacimientos de ambos sexos están relacionados con el número de mujeres en edad reproductiva (sección 13.2), entonces el conjunto de ecuaciones lineales se puede escribir

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{(1)*} \\ \mathbf{K}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^* & s\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} + \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{(0)*} \\ \mathbf{K}^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad (14.1.3)$$

donde

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{(t)*} \\ \mathbf{K}^{(t)} \end{Bmatrix}$$

es el vector columna del número de personas según edades al momento  $t$ , estando los hombres en las primeras celdas. Por conveniencia se define ahora  $s$ , no como la razón de masculinidad al nacimiento sino como la razón entre hombres y mujeres sobrevivientes al final del ciclo de proyección. En consecuencia,  $s$  es igual a  ${}_nL_0^m / {}_5L_0^f$  veces la razón de los nacimientos masculinos a los femeninos. La matriz cuadrada que aparece en (14.1.3) es del tipo de las llamadas matrices reducibles en la sección 3.2. El lector puede mostrar que sus raíces distintas de cero son las de  $|\mathbf{B} + \mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ .

Podemos escribir (14.1.3) como un par de ecuaciones simultáneas en los vectores más pequeños que describen la distribución por edades de cada sexo, y cambiar el origen desde  $0$  a  $t-1$ :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}^{(t)*}\} &= \mathbf{S}^*\{\mathbf{K}^{(t-1)*}\} + s\mathbf{B}\{\mathbf{K}^{(t-1)}\}, \\ \{\mathbf{K}^{(t)}\} &= (\mathbf{B} + \mathbf{S})\{\mathbf{K}^{(t-1)}\}. \end{aligned} \quad (14.1.4)$$

La ecuación (14.1.4) relaciona la población en el momento  $t$  a aquella en el momento  $t-1$  y se puede resolver para  $t$  en términos de los vectores iniciales  $\{\mathbf{K}^{(0)*}\}$  y  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$ . El lector puede mostrar mediante la sustitución sucesiva del segundo miembro de (14.1.4) en el primero, que la solución del par de ecuaciones matriciales simultáneas es (Goodman, 1967a)

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}^{(t)}\} &= (\mathbf{B} + \mathbf{S})^t \{\mathbf{K}^{(0)}\}, \\ \{\mathbf{K}^{(t)*}\} &= (\mathbf{S}^*)^t \{\mathbf{K}^{(0)*}\} + s \left[ \sum_{i=0}^{t-1} (\mathbf{S}^*)^{t-i-1} \mathbf{B} (\mathbf{B} + \mathbf{S})^i \right] \{\mathbf{K}^{(0)}\}. \end{aligned}$$

Leyendo de derecha a izquierda, los factores en cada término del sumatorio que figura en el paréntesis cuadrado se pueden interpretar en palabras:  $(\mathbf{B} + \mathbf{S})^i$  proyecta la población femenina a través de  $i$  períodos;  $\mathbf{B}$  genera los niños en el  $(i+1)$  ésimo período;  $(\mathbf{S}^*)^{t-i-1}$  es la razón de supervivencia para dichos ni-

ños, edad por edad a través de los restantes  $t - i - 1$  periodos hasta el momento  $t$ .

Es posible escapar de nuestra restricción a la dominancia femenina, aunque ello se puede lograr a costa de una mayor complejidad en los resultados. Supongamos que una fracción  $D$  de los hombres y  $1 - D$  de las mujeres producen nacimientos, como en el capítulo 13. Entonces, correspondiente a (14.1.3) tenemos

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{(t)*} \\ \mathbf{K}^{(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D\mathbf{B}^* + \mathbf{S}^* & s(1 - D)\mathbf{B} \\ D\mathbf{B}^*/s & (1 - D)\mathbf{B} + \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{(t-1)*} \\ \mathbf{K}^{(t-1)} \end{Bmatrix}, \quad (14.1.5)$$

o, en la forma de un par de ecuaciones lineales simultáneas que relacionan separadamente los vectores de las distribuciones por edad en el momento  $t$  con aquellos en el momento  $t - 1$ ,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}^{(t)*}\} &= (D\mathbf{B}^* + \mathbf{S}^*)\{\mathbf{K}^{(t-1)*}\} + s(1 - D)\mathbf{B}\{\mathbf{K}^{(t-1)}\}, \\ \{\mathbf{K}^{(t)}\} &= (D\mathbf{B}^*/s)\{\mathbf{K}^{(t-1)*}\} + ((1 - D)\mathbf{B} + \mathbf{S})\{\mathbf{K}^{(t-1)}\}. \end{aligned} \quad (14.1.6)$$

La solución de (14.1.6) para  $\{\mathbf{K}^{(t)*}\}$  y  $\{\mathbf{K}^{(t)}\}$  en términos de  $\{\mathbf{K}^{(0)*}\}$  y  $\{\mathbf{K}^{(0)}\}$  es directa pero engorrosa. En lugar de dedicarse a ello, el lector puede considerar la naturaleza de la solución en base a la matriz cuadrada que aparece en (14.1.5). El puede mostrar, estableciendo la matriz explícitamente, sustrayendo  $\lambda\mathbf{I}$ , y desarrollando el determinante de la matriz resultante por los elementos de su primera fila, que la ecuación característica es

$$\lambda^*(D|\mathbf{B}^* + \mathbf{S}^* - \lambda\mathbf{I}| + (1 - D)|\mathbf{B} + \mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}|) = 0, \quad (14.1.7)$$

si las matrices para los sexos separados son  $n \times n$ . Con matrices  $n \times n$  (14.1.7) tienen  $n$  raíces nulas, y su raíz positiva se puede dar como un promedio ponderado de aquellas correspondientes a la matriz de proyección masculina  $\mathbf{B}^* + \mathbf{S}^*$  y a la matriz de proyección femenina  $\mathbf{B} + \mathbf{S}$ . Si la raíz masculina positiva fuese  $\lambda_1^*$  y la raíz positiva femenina  $\lambda_1$ , entonces, mediante un argumento similar al que condujo a (13.2.22) pero usando esta vez el método (5.3.4) de Newton-Raphson, la raíz positiva de (14.1.7) resulta ser aproximadamente

$$\frac{DT^*\lambda_1^* + (1 - D)T\lambda_1}{DT^* + (1 - D)T}.$$

Demuestre que esto concuerda con (13.2.22) hasta los términos de primer grado en  $\rho = 0.2 \ln \lambda_1$ , y que  $C = D$ . Compárelo numéricamente con el resultado exacto del cuadro 14.2.

La proyección de la población femenina de Estados Unidos basada en las tasas específicas de fecundidad y mortalidad por edad de 1964 apareció en el cuadro 2.3, tal como se llevara a cabo con la matriz del cuadro 2.2. En el cuadro 3.6 aparece la matriz separada para los hombres de Estados Unidos, también en base a tasas de 1964. En la primera parte del cuadro 14.1 aparece un resumen de su aplicación para proyecciones separadas. La contradicción entre los resultados para los dos sexos, que era de esperar a partir del argumento presentado al comienzo del capítulo 13, aquí se hace visible en la creciente desproporción entre las cantidades de hombres y mujeres.

## CUADRO 14.1

RESUMEN DE LAS PROYECCIONES SEGUN EDADES PARA SEXOS SEPARADOS  
Y DE LAS PROYECCIONES CONJUNTAS MEDIANTE (14.1.5).  
ESTADOS UNIDOS, 1964 (EN MILES) <sup>a</sup>

PROYECCIONES SEPARADAS				
	Hombres	Mujeres	Total	Razón de masculinidad
1964	93,990	97,379	191,369	0.9652
1984	124,103	128,284	252,387	0.9674
2004	172,247	171,659	343,906	1.0034
2024	245,290	235,347	480,637	1.0422
2044	348,218	322,685	670,903	1.0791
PROYECCION CONJUNTA				
Con dominancia masculina (D = 1)				
	Hombres	Mujeres	Total	Razón de masculinidad
1964	93,990	97,379	191,369	0.9652
1984	124,103	128,610	252,713	0.9649
2004	172,247	175,297	347,544	0.9826
2024	245,290	247,376	492,666	0.9916
2044	348,218	350,589	698,807	0.9932
Con dominancia intermedia (D = 0.5)				
	Hombres	Mujeres	Total	Razón de masculinidad
1964	93,990	97,379	191,369	0.9652
1984	123,821	128,444	252,265	0.9640
2004	170,108	173,467	343,575	0.9806
2024	238,597	241,312	479,909	0.9887
2044	333,123	336,529	669,652	0.9899
Con dominancia femenina (D = 0)				
	Hombres	Mujeres	Total	Razón de masculinidad
1964	93,990	97,379	191,369	0.9652
1984	123,545	128,284	251,829	0.9631
2004	167,993	171,659	339,652	0.9786
2024	232,005	235,347	467,352	0.9858
2044	318,259	322,685	640,944	0.9863

<sup>a</sup> Programado por Diego Salazar.

Es posible una proyección internamente consistente mediante la matriz de (14.1.5), la que contiene  $36 \times 36$  elementos en grupos quinquenales de edad. La reproducción de tal matriz en este libro no sería conveniente, pero cualquier elemento correspondiente a las edades de fecundidad positiva es fácilmente derivable a partir de los cuadros 2.3 y 3.6. También se requieren las relaciones de supervivencia  ${}_5L_{x+5}/{}_5L_x$  para las edades que siguen al fin del período de vida reproductivo; para los hombres éstas son calculables a partir del cuadro 1.3; para las mujeres vienen proporcionadas por la matriz del cuadro 2.2. Si a la matriz grande de (14.1.5) la denominamos  $A$ , entonces, se puede verificar que alguno de sus elementos, para los Estados Unidos en 1964, son

$$\begin{array}{ll} a_{1,1} = 0.0 & a_{10,14} = 0.77638 \\ a_{1,6} = 0.44940D & a_{19,7} = (0.28323)D/s \\ a_{1,23} = s(1 - D)(0.47607) & a_{19,23} = (1 - D)(0.47607) \\ a_{5,4} = 0.99190 & a_{24,6} = 0.0 \\ a_{6,22} = 0.0 & a_{28,27} = 0.98304 \end{array}$$

donde

$$s = 1.04719(485,860/488,970) = 1.04053.$$

Esta es la matriz que provee las proyecciones conjuntas del cuadro 14.1.

Las raíces características del sistema de proyección (14.1.5), para las tasas específicas de natalidad y mortalidad por edades de los Estados Unidos en 1964, se obtienen de (14.1.7) y aparecen en el cuadro 14.2.

c) *Clasificación múltiple de cada individuo.* Un individuo puede asistir a la escuela y participa en la fuerza de trabajo al mismo tiempo; puede tener una cierta característica familiar y una cierta categoría ocupacional simultáneamente, ninguna de las cuales necesita depender de la otra. Las proporciones de individuos con el status en cuestión dentro de los diversos intervalos de edades se conocen con el nombre de tasas de participación. En el cuadro 14.3 aparece la participación de la población masculina y femenina en la fuerza de trabajo, esto es, la proporción de cada grupo de edad en la fuerza laboral. Conveniencias de aplicación por intervalos quinquenales de edad requerirían partir los intervalos decenales en dos.

Suponga que reconocemos  $n$  grupos quinquenales de edad, en los cuales las proporciones para los hombres son  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , donde  $p_1 = p_2 = 0$ , siendo arregladas bajo la forma de un vector horizontal  $[P]$ . Suponga también que proyectamos la población masculina clasificada en  $n$  grupos de edades, representada como un vector columna  $\{K\}$ , mediante la premultiplicación por una matriz  $L$  de  $n \times n$  que contiene probabilidades de supervivencia en la subdiagonal y probabilidades de paternidad en la primera fila. Entonces, en el momento inicial, la fuerza de trabajo está dada por  $[P]\{K\}$ , 5 años después por  $[P]L\{K\}$ , 10 años después por  $[P]L^2\{K\}$ , 5t años después del comienzo por  $[P]L^t\{K\}$ . Si uno está interesado en la participación de los electores en favor del Partido Republicano, en la medida en que esto es una función de la edad, y representa las tasas  $q_i$  en el vector fila  $[Q]$ , entonces, con todas las tasas espe-

SOLUCIONES NO NULAS DE LA ECUACION PARA LOS DOS SEXOS (14.1.7) CON DOMINANCIA MASCULINA, FEMENINA E INTERMEDIA. ESTADOS UNIDOS, 1964

$$|A - \lambda I| = D(\lambda^{11} - 0.0212\lambda^9 - 0.2321\lambda^7 - 0.4711\lambda^5 - 0.4367\lambda^3 - 0.2726\lambda - 0.1399\lambda^3 - 0.0598\lambda^2 - 0.0245\lambda - 0.0085) + (1 - D)(\lambda^{11} - 0.0010\lambda^9 - 0.0874\lambda^7 - 0.3462\lambda^5 - 0.4712\lambda^3 - 0.3329\lambda^2 - 0.1798\lambda - 0.0740\lambda^3 - 0.0168\lambda^2 - 0.0009\lambda) = 0.$$

	Dominancia masculina	Dominancia intermedia <sup>a</sup>			Dominancia femenina
	D = 1	D = 0.7	D = 0.5	D = 0.3	D = 0
$\lambda_1$	1.09149	1.08884	1.08697	1.08500	1.08185
$\lambda_2, \lambda_3$	.3975 ± .7890i	.3742 ± .7844i	.3582 ± .7820i	.3419 ± .7801i	.3167 ± .7782i
$\lambda_4, \lambda_5$	-.4434 ± .4422i	-.4371 ± .4278i	-.4317 ± .4163i	-.4248 ± .4023i	-.4068 ± .3690i
$\lambda_6, \lambda_7$	-.5553 ± .1464i	-.5392 ± .1455i	-.5245 ± .1444i	-.5036 ± .1427i	-.4213 ± .1373i <sup>b</sup>
$\lambda_8, \lambda_9$	-.1591 ± .5456i	-.1357 ± .5299i	-.1135 ± .5151i	-.0774 ± .4969i	.0074 ± .5192i <sup>b</sup>
$\lambda_{10}$	.2146 ± .4391i	.1934 ± .4122i	.1681 ± .3875i	.1214 ± .3491i	-0.0738 0
$\lambda_{11}$					

En lo que sigue aparecen las raíces de la misma ecuación  $|A - \lambda I| = 0$ , expresadas como  $r = 0,2 \ln \lambda$ :

$r_1$	0.01751	0.01702	0.01668	0.01632	0.01573
$r_2, r_3$	-.0248 ± .2208i	-.0281 ± .2251i	-.0301 ± .2283i	-.0321 ± .2316i	-.0348 ± .2369i
$r_4, r_5$	-.0936 ± .1568i	-.0983 ± .1549i	-.1023 ± .1534i	-.1072 ± .1516i	-.1198 ± .1473i
$r_6, r_7$	-.1109 ± .0516i	-.1165 ± .0527i	-.1217 ± .0537i	-.1295 ± .0552i	-.1628 ± .0630i <sup>b</sup>
$r_8, r_9$	-.1130 ± .2574i	-.1207 ± .2640i	-.1279 ± .2708i	-.1375 ± .2833i	-.1311 ± .3113i <sup>b</sup>
$r_{10}$	-.1432 ± .2232i	-.1573 ± .2264i	-.1724 ± .2323i	-.1991 ± .2472i	-0.5213 -∞
$r_{11}$					

<sup>a</sup> Observe la discrepancia con respecto a una ponderación por  $DT^*$  y  $(1-D)T$  especialmente para raíces de menor valor absoluto;

$T^* = 29,222$ ,  $T = 26,250$ .

<sup>b</sup> Excepción al arreglo por valor absoluto decreciente.

## CUADRO 14.3

TASAS DE PARTICIPACION EN LA FUERZA DE TRABAJO,  
ESTADOS UNIDOS, 1960 Y 1965 \*

	PORCENTAJE EN LA FUERZA DE TRABAJO 100 [P]			
	Hombres		Mujeres	
	1960	1965	1960	1965
14-19	46.3	43.8	30.1	28.9
20-24	88.9	86.2	46.1	49.7
25-34	96.4	96.0	35.8	38.5
35-44	96.4	96.2	43.1	45.9
45-54	94.3	94.3	49.3	50.5
55-64	85.2	83.2	36.7	40.6
65+	32.2	26.9	10.5	9.5
Todas las edades sobre 14 años	79.7	76.9	36.1	37.5

Fuente: \* *Statistical Abstract of the United States, 1967, pág. 222.*

cificas por edades constantes, la votación republicana al cabo de  $t$  periodos estaría dada por  $[Q]L^t\{K\}$ .

Las fórmulas anteriores proporcionan una respuesta sólo respecto al total y no descompuesta por edades. Para conservar la distribución por edades, digamos de la fuerza de trabajo, como un vector columna, deberíamos sustituir  $[P]$  en  $[P]L^t\{K\}$  por las mismas tasas de participación escritas como los elementos diagonales de una matriz que tuviera ceros en todas las demás celdas. Si esta matriz es  $\text{diag}(P)$ , entonces, la fuerza laboral representada como un vector columna es  $\text{diag}(P)L^t\{K\}$  después de  $t$  periodos o  $5t$  años.

d) *Cada individuo moviéndose a través de una sucesión de estados.* Lógicamente distinto del anterior es el conjunto de problemas donde cada individuo se mueve a través de una sucesión de estados y puede estar sólo en uno a la vez. El modelo de fecundidad según paridez es un ejemplo de ello, donde la mujer que ha tenido su primer hijo se dice ser de paridez 1, la que ha tenido su segundo hijo, de paridez 2, etc. Se puede extender esta noción para incluir la paridez cero, definida como la de las mujeres que se han casado pero que aún no han tenido su primer hijo, y a la paridez menos-uno, referida a las mujeres que aún no se han casado.

La importancia práctica de la nupcialidad y de la paridez fue puesta de relieve por Karmel (1950) en su discusión del trabajo de Whelpton. Las tasas específicas por edad y paridez fluctúan más fácilmente que las tasas específicas por edad. En algunas circunstancias estas fluctuaciones pueden no ser significa-



tivas: temprano en la década del 40 se dio un fuerte crecimiento de la tasa de nupcialidad y poco tiempo después, en los primeros nacimientos; la cifra ajustada por edad y paridez se vio más influenciada por dicho incremento en los primeros nacimientos que la tasa general ajustada por edades, en que los primeros nacimientos se diluyeron con los nacimientos de otros órdenes. Si el aumento de los nacimientos debido a la concentración de nuevos matrimonios no es realmente un aumento de fecundidad, entonces, sería erróneo interpretar de tal manera el incremento en la tasa ajustada por edad y paridez ajustada. Una tasa ajustada por estado civil, paridez y grupos de edades satisface este punto, por lo que procedemos a ilustrarlo.

El modelo ha sido desarrollado por E. M. Murphy (1965) y aplicado en el computador para una matriz de  $51 \times 51$ , reconociendo grupos quinquenales de edad; pero con propósitos de exposición Murphy trata sólo tres edades y tres categorías de paridez. Para aplicar esta versión simple uno podría construir un grupo de paridez formado por las mujeres no casadas, otro por las mujeres casadas que han tenido un hijo y el tercero por las mujeres casadas que han tenido más de un hijo. Alternativamente, el primer grupo podría estar formado por las mujeres casadas o no casadas sin hijos, el segundo por las mujeres con uno o dos hijos y el tercero por las mujeres con tres o más hijos. Cualquiera sea la condensación determinada, tres grupos de paridez y tres grupos de edades dan lugar a nueve combinaciones de edad y paridez, excepto que en la primera edad es posible dejar de lado la segunda y tercera paridez. Por lo tanto, la población de mujeres puede ser vista como dividida en las siguientes siete clases o estados de edad y paridez:

		<i>Paridez p</i>		
		1	2	3
<i>Edad a</i>	1	$k_{11}$	—	—
	2	$k_{21}$	$k_{22}$	$k_{23}$
	3	$k_{31}$	$k_{32}$	$k_{33}$

Las transiciones posibles serán identificadas como sigue:

<i>De edad 1 a edad 2</i>			<i>De edad 2 a edad 3</i>	
Transición desde el estado	Probabilidad de transición		Transición desde el estado	Probabilidad de transición
11 a 21	$P_{11-21}$		21 a 31	$P_{21-31}$
11 a 22	$P_{11-22}$		21 a 32	$P_{21-32}$
11 to 23	$P_{11-23}$		21 a 33	$P_{21-33}$
			22 a 32	$P_{22-32}$
			22 a 33	$P_{22-33}$
			23 a 33	$P_{23-33}$

(14.1.8)

En consecuencia, hay nueve elementos distintos de cero para la sobrevivencia en la matriz de transición  $P$  de  $7 \times 7$ , distribuidos como aparece en (14.1.9)

desde la segunda a la séptima fila de la matriz. Además, hay siete elementos,  $m_{op}$ , para la probabilidad de que una mujer de edad  $a$  y paridez  $p$  dé a luz una niña durante el próximo período de 15 años; estos elementos aparecen en la fila superior. La disposición de los elementos es arbitraria mientras la matriz y el vector sean consistentes entre sí, y en nuestro vector los tipos de paridez se dan en orden numérico dentro de las edades

$$PK = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ p_{11-21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{11-22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{11-23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21-31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21-32} & p_{22-32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21-33} & p_{22-33} & p_{23-33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} \quad (14.1.9)$$

Se puede verificar la operación de  $P$  respecto de las propiedades deseadas. Por ejemplo,  $p_{21-32}$  multiplica a  $k_{21}$  y el resultado se suma al producto de  $p_{22-32}$  y  $k_{22}$ , colocándose el total en la sexta celda del vector producto, lo que constituye el nuevo  $k_{32}$ . Similarmente se pueden revisar otros elementos para asegurar que se comportan de la manera requerida (Murphy, 1965).

Para estudiar la matriz  $P$  recurrimos nuevamente a su ecuación característica  $|P - \lambda I| = 0$ . Una manera de evaluar el determinante  $|P - \lambda I|$  consiste en restar de la fila superior convenientes múltiplos de los elementos de la diagonal y subdiagonal, eliminando sucesivamente  $m_{33}$ ,  $m_{32}$ , ..., para llevar el determinante a la forma diagonal inferior. El lector puede verificar mediante este u otro procedimiento que la ecuación característica es

$$\begin{aligned} |P - \lambda I| &= \lambda^4 [-\lambda^3 + \lambda^2(m_{11}) + \lambda(m_{21}p_{11-21} + m_{22}p_{11-22} + m_{23}p_{11-23}) \\ &\quad + m_{31}(p_{11-21}p_{21-31}) + m_{32}(p_{11-21}p_{21-32} + p_{11-22}p_{22-32}) \\ &\quad + m_{33}(p_{11-21}p_{21-33} + p_{11-22}p_{22-33} + p_{11-23}p_{23-33})] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (14.1.10)$$

Definamos  $p_{1-2}$  como la probabilidad, en la condición estacionaria, de sobrevivir desde el primer grupo de edades al segundo, a través de cualquier sucesión de órdenes de paridez y definamos  $p_{1-3}$  como la probabilidad de sobrevivir del primero al tercer grupo de edades a través de cualquier sucesión de cambios de paridez y edad; escribamos finalmente  $p_{2-3}$  como  $p_{1-3}/p_{1-2}$ , sin intentar expresar  $p_{2-3}$  en palabras. El coeficiente de  $\lambda^2$  dentro del corchete en (14.1.10) es  $m_{11}$ , vale decir, la probabilidad del primer grupo de edades de tener un hijo durante los próximos 15 años. El coeficiente de  $\lambda$  es la suma de las probabilidades de ir desde el primero al segundo grupo de edades y luego tener un hijo, sumándose los diversos órdenes de paridez, y podemos escribir el coeficiente como  $m_2 = p_{1-2}\bar{m}_2$ . El término absoluto tiene que ver con el último grupo de edades y se puede escribir  $m_3 = p_{1-2}p_{2-3}\bar{m}_3 = p_{1-3}\bar{m}_3$ .

Las definiciones se pueden resumir en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 p_{1 \rightarrow 2} &= p_{11 \rightarrow 21} + p_{11 \rightarrow 22} + p_{11 \rightarrow 23}, \\
 m_2 &= p_{1 \rightarrow 2} \bar{m}_2 = m_{21} p_{11 \rightarrow 21} + m_{22} p_{11 \rightarrow 22} + m_{23} p_{11 \rightarrow 23}, \\
 p_{1 \rightarrow 3} &= p_{1 \rightarrow 2} p_{2 \rightarrow 3} = p_{11 \rightarrow 21} p_{21 \rightarrow 31} + p_{11 \rightarrow 21} p_{21 \rightarrow 32} + p_{11 \rightarrow 22} p_{22 \rightarrow 32} \\
 &\quad + p_{11 \rightarrow 21} p_{21 \rightarrow 33} + p_{11 \rightarrow 22} p_{22 \rightarrow 33} + p_{11 \rightarrow 23} p_{23 \rightarrow 33}, \\
 m_3 &= p_{1 \rightarrow 2} p_{2 \rightarrow 3} \bar{m}_3 = m_{31} p_{11 \rightarrow 21} p_{21 \rightarrow 31} + m_{32} (p_{11 \rightarrow 21} p_{21 \rightarrow 32} + p_{11 \rightarrow 22} p_{22 \rightarrow 32}) \\
 &\quad + m_{33} (p_{11 \rightarrow 21} p_{21 \rightarrow 33} + p_{11 \rightarrow 22} p_{22 \rightarrow 33} + p_{11 \rightarrow 23} p_{23 \rightarrow 33}).
 \end{aligned}$$

Dentro de cada coeficiente las probabilidades de reproducción correspondientes a los diversos órdenes de paridez están ponderadas por las probabilidades de alcanzar un orden dado. En términos de estos coeficientes (14.1.10) se puede escribir en la forma abreviada

$$\lambda^4 (-\lambda^3 + \lambda^2 m_{11} + \lambda p_{1 \rightarrow 2} \bar{m}_2 + p_{1 \rightarrow 2} p_{2 \rightarrow 3} \bar{m}_3) = 0, \quad (14.1.11)$$

donde ahora, todos los subíndices se refieren a edades. La ecuación (14.1.10) puede ser escrita aún más brevemente en términos de los  $m$  sin barra:

$$\lambda^4 (-\lambda^3 + \lambda^2 m_{11} + \lambda m_2 + m_3) = 0.$$

Entonces (14.1.11) y en consecuencia (14.1.9), deben tener las mismas raíces que la matriz,

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \bar{m}_2 & \bar{m}_3 \\ p_{1 \rightarrow 2} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2 \rightarrow 3} & 0 \end{bmatrix}, \quad (14.1.12)$$

rodeada por cuatro filas y cuatro columnas de ceros, donde nuevamente todos los subíndices se refieren a edades. En la próxima sección se verificará este resultado mediante el enfoque, bastante diferente, de decremento múltiple. Tanto aquí como en el modelo del decremento múltiple, los grupos de edades están ponderados internamente por paridez, siendo los pesos, en general, diferentes de las proporciones de mujeres según orden de paridez en el grupo de edad dado para la población observada; la ponderación dentro de un grupo dado de edad está de acuerdo con la distribución según paridez *estacionaria*, más que con la distribución correspondiente en la población *actual*.

El tomar en cuenta los órdenes de paridez, ¿hace variar mucho las tasas intrínsecas? La respuesta depende de la discrepancia que exista entre la distribución según paridez de las mujeres observadas y aquella hacia la que tendería la población si se mantuvieran indefinidamente las tasas específicas por paridez y grupos de edades. Murphy (1965) encontró, para las mujeres norteamericanas 1962, que la tasa bruta de crecimiento era de 13,44 por mil de la población; la tasa intrínseca por edades, 18,85; y la tasa intrínseca por paridez y por grupos de edades 20,21. Evidentemente, la persistencia de las tasas específicas prevalentes en 1962 llevaría la población hacia las edades y parideces de las tasas de natalidad más altas, esto es, edades en los veinte y primeras parideces.

Observe que el nacimiento de una niña, el cual agrega un 1 en la posición superior del vector que aparece en el segundo miembro de (14.1.9), no es necesario para un cambio en las parideces. Para nuestros propósitos, los órdenes de paridez son meramente una clasificación de las mujeres en relación con el nacimiento de un niño (hombre o mujer); por la definición de  $m_{op}$ , los nacimientos agregados al primer elemento del vector en (14.1.9),  $k_{11}$ , son sólo de niñas. No existe contradicción si consideramos a las parideces como un conjunto perfectamente general de clases mutuamente excluyentes entre las cuales se mueve la población en una sola dirección. Estas clases podrían ser grados escolares, o el color del cabello clasificado entre juvenil y canoso, o el número de hijos que ha tenido una mujer. Para esta última clasificación de las mujeres se dispone de datos: los registros muestran tablas de nacimientos según edad de la madre y orden de nacimiento, y los censos proporcionan un denominador mediante la tabulación de las mujeres según la edad y el número total de hijos nacidos.

Richard Stone (1966, capítulo 9) ha sugerido un modelo del sistema educacional que considera etapas o grados a través de los cuales los estudiantes pasan sucesivamente. El va más allá del modelo de paridez para proponer que la educación superior sea considerada como un proceso epidémico en el cual, los cambios en la demanda de vacantes dependen, en parte, del número infectado y por lo tanto capaces de infectar a otros, y en parte, del número aún no infectado y por lo tanto propensos a ser infectados. Comparando el procedimiento con una epidemia, se halla en condiciones de usar la teoría que ha sido desarrollada para esto último (Bartlett, 1960, pág. 57, Bailey, 1964), y finaliza con un proceso logístico. El modelo entra luego a tratar con diferentes ramas de la educación (instrucción técnica, universitaria, etc.) y hasta toma en cuenta el progreso tecnológico en los métodos de instrucción en cualquier rama dada.

Cualquiera de los sistemas de ecuaciones diferenciales del capítulo precedente se puede transformar en uno de ecuaciones en diferencias, y esto simplifica la incorporación explícita de las distribuciones por edades. En particular, se puede construir una versión diferente del modelo de nupcialidad debido a Kendall y Goodman que aparece en (13.4.1). Si escribimos  $M_t$  para la población masculina soltera en el momento (discreto)  $t$ , y  $F_t$  y  $N_t$  para la población femenina soltera y las parejas casadas respectivamente, los parámetros convertidos de tasas instantáneas a probabilidades análogas a las  $q_x$  de la tabla de vida, y suponiendo una vez más la dominancia femenina, entonces, la nueva forma del modelo es

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= (1 - d_m)M_t - mF_t + (b_m^o + d_f^o)N_t, \\ F_{t+1} &= (1 - d_f - m)F_t + (b_f^o + d_m^o)N_t, \\ N_{t+1} &= mF_t + (1 - d_f^o - d_m^o)N_t, \end{aligned} \quad (14.1.13)$$

donde  $m$  es la tasa de nupcialidad (dominancia femenina), y los círculos representan las tasas de natalidad y mortalidad en la población casada. El argumento que hay por detrás de (14.1.13) es similar al de (13.4.1), excepto que los parámetros requieren ahora definiciones un tanto diferentes; por ejemplo,  $1 - d_f^o - d_m^o$  en la tercera ecuación es la probabilidad conjunta de supervivencia de marido y mujer. Para pequeñas unidades de tiempo

$$M'(t) \doteq M(t+1) - M(t).$$

Si  $A$  es la matriz de coeficientes en (14.1.13) y  $\{K_t\}$  el vector columna,

$$\{K_t\} = \begin{pmatrix} M_t \\ F_t \\ N_t \end{pmatrix},$$

entonces (14.1.13) se puede escribir en forma matricial como  $\{K_{t+1}\} = A\{K_t\}$  y analizarla mediante el mismo tipo de álgebra que el de las matrices del capítulo 3. ¿Cómo se representaría un modelo de nupcialidad con dominancia masculina? ¿Con dominancia intermedia?

El tomar en cuenta la edad dentro del modelo de nupcialidad (14.1.13) sólo requiere una reinterpretación de los símbolos. Supongamos que  $M_t$  es un vector columna que representa el número de hombres en sucesivos grupos de edades, e  $I - d_m$  es una matriz cuadrada con elementos distintos de cero sólo en su sub-diagonal, indicando las probabilidades de supervivencia según la tabla de vida masculina apropiada;  $b_m^0$  es también una matriz cuadrada, pero con elementos distintos de cero en su primera fila, y similarmente para las mujeres y para los demás coeficientes. Se debe también incorporar la consideración de la supervivencia de viudos y viudas hasta el final del intervalo de tiempo. Con estos cambios de interpretación, la ecuación

$$\{K_{t+1}\} = A\{K_t\}$$

rige para el modelo de nupcialidad (14.1.13) considerando  $n$  grupos de edades, siendo  $A$  de orden  $3n \times 3n$ . Judah Matras (1966) propuso un recurso similar para poner matrices dentro de matrices con el objeto de analizar movilidad según edad.

Todos los modelos anteriores son determinísticos, en el sentido de suponer que la aplicación de cierta tasa de mortalidad  $d_m$  a la población  $M_t$  dará por resultado  $M_t d_m$  muertes exactamente. J. H. Pollard (1966) ha mostrado cómo construir matrices que den tanto varianzas como valores esperados, y su método puede ser aplicado a cualquier modelo lineal en que los coeficientes se puedan interpretar como probabilidades; un ejemplo simple aparece en la sección 16.4.

El tema de la ergodicidad, referido al estado estable que alcanzaría una población sujeta a las tasas en cuestión durante un período de tiempo suficientemente largo, puede surgir en conexión con cualquier proceso de proyección. Para la tabla de vida, la distribución por edades del estado estable es la columna  $L_x$ . El capítulo 5 contiene una prueba de ergodicidad para la población de un solo sexo con nacimientos y muertes dadas, especificando respectivamente, edad de la madre y edad al morir. ¿Qué podemos decir sobre el caso de tasas específicas por edad y paridez? Resulta que también en dicho caso se alcanzará un estado estable. Linder (1938) ha demostrado esto para una población en la que se dan y se mantienen constantes, simultáneamente, las tasas específicas por edad, estado civil, paridez, duración del matrimonio y diferencia de edades entre marido y mujer. Su generalización del teorema de Lotka expresa: "Una población en la que las probabilidades de muerte, casamiento y divorcio, como así también la fecundidad, permanecen constantes, crecerá exponencialmente después de un período de tiempo suficientemente largo. En tal situación, el porcentaje de mujeres de una cierta edad, estado civil, paridez, duración del matrimonio y diferencia de edad con sus maridos, permanecerá constante". (1938, pág. 146). La prueba está basada en las propiedades de las ecuaciones en dife-

rencias y no necesita reproducirse aquí. El lector puede inferir la naturaleza de la distribución límite extendiendo el análisis que condujo a (14.1.12).

## 14.2. DECREMENTO MULTIPLE

### La tabla de vida analizada según paridez

La discusión alternativa de paridez mediante la ecuación integral o el enfoque continuo, descansa en una generalización de la tabla de vida. Se sigue del capítulo 1 que la distribución por edades de la tabla de vida es la que existiría en el estado estable si se aplicaran las tasas observadas de mortalidad por edades y los nacimientos fueran suficientes para reemplazar por sí solos las muertes. Esta manera de tratar la mortalidad se puede extender al paso de las mujeres a través de los estados de nupcialidad y paridez, como así también (y finalmente) a la de muerte. Comenzando con la versión continua de la tabla de vida y aplicando a cada  $l(x)$ , el número de sobrevivientes a la edad  $x$  la proporción observada de mujeres que se casan, entonces (no considerando viudez y divorcio) se puede construir una columna llamada  $l^{(0)}(x)$  correspondiente a las mujeres que son de paridez cero, casadas pero que aún no han tenido su primer hijo. Necesitamos excluir de  $l^{(0)}(x)$  las mujeres que han tenido un hijo. Si  $m^{(i)}(x)dx$  es la probabilidad del nacimiento de un hijo a una mujer de paridez  $i$ ésima, entre las edades  $x$  y  $x + dx$ , esto es, la probabilidad de un  $(i + 1)$ ésimo hijo, y  $\mu(x)dx$  la probabilidad de muerte entre las edades  $x$  y  $x + dx$ , entonces, a cada edad tenemos

$$l^{(0)}(x + dx) = l^{(0)}(x) - l^{(0)}(x)m^{(0)}(x) dx + l^{(-1)}(x)m^{(-1)}(x) dx - l^{(0)}(x)\mu(x) dx, \quad (14.2.1)$$

donde  $l^{(-1)}(x)$  son mujeres solteras y  $m^{(-1)}(x)$  es la probabilidad de casarse; similarmente para  $l^{(i)}(x + dx)$ .

La ecuación (14.2.1) expresa la condición de que el número de mujeres casadas de paridez cero a la edad  $x + dx$  es igual a las de edad  $x$  menos el número de las que tienen un hijo y así pasan a la primera paridez, más las recién casadas, a la tasa de nupcialidad  $m^{(-1)}(x)$  que provienen de las  $l^{(-1)}(x)$ , solteras menos las muertes. Dado un conjunto de  $m^{(i)}(x)$  [la probabilidad (supuesta fija) de alcanzar la paridez  $(i + 1)$ ésima] para cada paridez y edad,  $l^{(i+1)}(x)$  se puede calcular a partir de  $l^{(i)}(x)$ , y representaría una situación estacionaria tal como lo es la columna  $l(x)$  de la tabla de vida convencional.

En la práctica (Jordan, 1952, cap. 15) los datos se dan en grupos de edades finitos y no podemos simplemente igualar las tasas centrales  $m^{(i)}(x)dx$  con las probabilidades  $q_x^{(i)}$  de tener el  $(i + 1)$ ésimo hijo en el próximo intervalo de tiempo y edad para una mujer de edad exacta  $x$ . Aquí enfrentamos el mismo problema que tenemos en la tabla de mortalidad convencional o de decremento simple: determinar un conjunto de  $q_x$  a partir de las  $m_x$ , o más exactamente, de las tasas observadas por edades  $M_x$ . El principio de iterar los datos usado para construir una tabla de vida en el capítulo 1, se puede extender a la de decremento múltiple.

¿Se parecen también las  $l^{(i)}(x)$  al número de sobrevivientes de la tabla de vida en el sentido de que permiten calcular probabilidades? Por analogía a  $l(x + n)/l(x)$ , la probabilidad de que una persona de edad exacta  $x$  esté viva  $n$

años más tarde,  $l^{(i+j)}(x+n)/l^{(i)}(x)$  parecería ser la probabilidad de que una persona de  $x$  años de edad y con  $i$  hijos esté viva  $n$  años más tarde y tenga  $i+j$  hijos, pero un poco de reflexión mostrará que esto no es generalmente cierto. Sin embargo, nuestra aplicación será para la probabilidad de que una niña recién nacida esté viva y con  $i$  ésima paridez al cabo de  $x$  años. Las probabilidades para individuos de edad cero vienen dadas correctamente por  $l^{(i)}(x)/l_0$ ; el numerador aquí no puede incluir ningún individuo que no esté explícitamente "expuesto" en el denominador.

### 14.3. LA ECUACION INTEGRAL MODIFICADA PARA TENER EN CUENTA EL ORDEN DE NACIMIENTO

Buscamos un análogo a la ecuación integral (5.1.2) de Lotka:

$$B(t) = \int_0^{\beta} B(t-x) \frac{l(x)}{l_0} m(x) dx = \int_0^{\beta} B(t-x) \phi(x) dx, \quad (14.3.1)$$

en la cual  $l(x)m(x)/l_0$ , los nacimientos en la población estacionaria de raíz uno a la edad  $x$ , se reemplazarían por términos que representen la probabilidad de que una niña sobreviva hasta la edad  $x$  habiendo tenido  $i$  hijos de ambos sexos, y que a la edad  $x$  tenga su  $(i+1)$  hijo (mujer), sumados a través de todos los  $i$  que representan hijas. En lugar de  $l(x)m(x)/l_0$ , tendríamos para la edad  $x$

$$\sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{l^{(i)}(x)}{l_0} m_f^{(i)}(x), \quad (14.3.2)$$

donde  $\gamma$  es el mayor número de hijos tenidos por una mujer, y  $m_f^{(i)}(x)$  es la probabilidad de tener una hija a la edad  $x$  después de  $i$  hijos de uno u otro sexo. La ecuación (14.3.2) es la distribución que resultaría de la continuación indefinida de las (dadas) tasas específicas de fecundidad por edad y paridez y de las tasas específicas de mortalidad por grupos de edades del año bajo estudio. Hemos escrito  $m_f^{(i)}(x)$  con un subíndice  $f$  para mujeres en (14.3.2) a fin de recordar que no es lo mismo que la probabilidad de tener el próximo hijo, usado para construir  $l^{(i)}(x)$ , que era la probabilidad de un hijo de cualquier sexo.

La nueva función de fecundidad neta es

$$\phi_P(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\gamma-1} l^{(i)}(x) m_f^{(i)}(x)}{l_0}, \quad (14.3.3)$$

y da el análogo por edad y paridez de (14.3.1):

$$B(t) = \int_0^{\beta} B(t-x) \phi_P(x) dx. \quad (14.3.4)$$

Podemos, tal como en el capítulo 5, intentar con

$$B(t) = Qe^{rt}$$

y obtener una ecuación característica,

$$\phi_P(r) = \int_0^{\beta} e^{-rz} \phi_P(x) dx = 1, \quad (14.3.5)$$

cuya raíz real en  $r$  sería la tasa intrínseca asociada con tasas específicas por edad y paridez. La solución completa de (14.3.4) para la función desconocida  $B(t)$  prosigue exactamente como para (5.1.2). El lector podrá mostrar en qué sentido (14.3.5) es una versión continua de (14.1.10).

Hemos llegado por tanto a dos métodos para establecer el modelo para edad y paridez —la ecuación matricial y la ecuación integral— y hemos sugerido su equivalencia. La ecuación integral requiere que preliminarmente se desarrolle la tabla de decremento múltiple para las mujeres de acuerdo a la paridez (tanto de hijos varones como de hijas) y edad; una vez que tenemos los  $l^{(i)}(x)$  a nuestra disposición, por ejemplo en intervalos quinquenales, el resto del cálculo de (14.3.5) prosigue sin dificultad sobre las probabilidades por edad y paridez de dar a luz nacimientos femeninos. (Describa un modelo en el que se definan las parideces en términos de hijas mujeres exclusivamente).

La diferencia entre la solución de  $r$  en la ecuación homogénea de Lotka (14.3.1) y en la ecuación por paridez (14.3.4) depende de la diferencia entre las dos funciones de fecundidad neta:

$$\phi(x) - \phi_P(x) = \frac{l(x)}{l_0} \sum_{i=0}^{i-1} \left( \frac{k^{(i)}(x)}{k(x)} - \frac{l^{(i)}(x)}{l(x)} \right) m^{(i)}(x), \quad (14.3.6)$$

donde  $k^{(i)}(x)/k(x)$  es la proporción de mujeres que tiene edad  $x$  e  $i$  hijos en la población real, y  $l^{(i)}(x)/l(x)$  la correspondiente proporción en la tabla estacionaria de decremento múltiple. La diferencia fue notable en los Estados Unidos temprano en la década del 40, cuando una súbita alza en la tasa de nupcialidad dio proporciones reales de cero ésima y primera parideces  $k^{(i)}(x)/k(x)$  mucho mayores que las correspondientes proporciones de la tabla de vida.

A pesar de que el argumento de este capítulo toma debidamente en cuenta edad y paridez, es groseramente incompleto al desatender las cohortes. Los principales defectos de todo análisis basado en la sección transversal de un período han sido señalados por Norman Ryder (1964). Para poner un ejemplo que es sólo levemente exagerado, supongamos que en una población grande durante un largo periodo de tiempo, cada mujer intenta tener exactamente tres hijos y que lleva a cabo dicha intención durante el curso de su vida reproductiva. Supongamos que después de un periodo en que las edades de reproducción han sido las mismas, ocurre un cambio en la distribución de tales nacimientos en el tiempo, en la forma de un adelanto en las edades de reproducción. Cada mujer aún intenta tener el mismo número de hijos en total, pero las cohortes más jóvenes tienen sus hijos más tempranamente. En consecuencia, el examen de las tasas de periodo para varios años sucesivos mostrará un incremento en la tasa de natalidad. Tal aumento no constituye realmente evidencia de una fecundidad creciente.

Supongamos nuevamente que el tiempo en el que las mujeres tienen sus hijos varía, postergándose los embarazos en épocas de depresión y adelantándolos en épocas de prosperidad, pero aspirándose aún a una cantidad total fija de hijos durante el período de vida reproductivo de cada mujer. Las considerables



fluctuaciones que mostrarán los nacimientos de cada período no están enteramente desprovistos de significación demográfica, pero se debe entender que representan variaciones del espaciamiento en el tiempo de una fecundidad completa esencialmente invariable. Tales consideraciones han dado importancia a encuestas que preguntan a las parejas cuáles son sus intenciones de procreación (Westoff, Potter y Sagi, 1963; Freedman, Goldberg y Bumpass, 1965).

La reproducción de cohortes de mujeres está representada por la densidad a lo largo de las líneas de vida de un diagrama de Lexis (gráfico 5.1.). Si la función de fecundidad neta está representada ahora por  $\phi(a, t)$ , una función de la edad y el tiempo, entonces, la integral o total a lo largo de una franja horizontal se referirá a la  $R_0$  del período, en tanto que una integral a lo largo de una franja diagonal dará la  $R_0$  de una cohorte. Evidentemente, la ecuación integral (5.1.2) es enteramente una relación que conecta períodos y edades, tomando las integrales, como ella lo hace, a lo largo de líneas verticales y horizontales. Al describirla, se usó en algo la imagen de las cohortes, pero éstas fueron sintéticas más que cohortes reales.

Ryder (1964) ha relacionado la integral a lo largo de la diagonal con las integrales a lo largo de la horizontal y de la vertical. Esto le permite traducir información de período en la correspondiente cohorte y viceversa. Ryder no sólo muestra la media de período como una versión deformada de la media de la cohorte, sino que también estima la dirección y el tamaño de la distorsión en términos de la media, varianza y asimetría de las secciones transversales por edad y tiempo.

Nuestro ejemplo de decremento múltiple ha sido la paridez, en la que la población sobreviviente pasa a través de estados que son mutuamente excluyentes y dispuestos en una sucesión irreversible. Se requiere una generalización en dirección diferente para la tabla de vida por causas de muerte, donde las muertes se clasifican en categorías mutuamente excluyentes en un orden arbitrario, y donde el cáncer, las enfermedades cardiovasculares y otras combinaciones, se pueden considerar como estando en competencia por la vida de una persona (Chiang, 1961c). Sin detenernos a examinar la teoría para tales situaciones, nuestro próximo paso es el estudio de modelos probabilísticos, los que son más interesantes que la teoría determinista que nos ha ocupado hasta ahora, y también más difíciles. Se necesita el primero y segundo momento de ciertas distribuciones para propósitos muestrales; dichos momentos son el tema principal del capítulo 15.



VI Parte

MODELOS PROBABILISTICOS



## VARIANZA MUESTRAL DE LAS CARACTERISTICAS DEMOGRAFICAS

Se recurre comúnmente a las encuestas muestrales o a un área de registro que es una muestra probabilística de un territorio, cuando las estadísticas vitales son incompletas o se carece totalmente de ellas. Se pueden usar las muestras para determinar la posición demográfica de los países subdesarrollados y los cambios en su posición con la llegada del control de la natalidad. En vista de la necesidad de datos nos encontramos con la sorpresa de que existe poco material publicado acerca de métodos de encuesta y errores de muestreo en relación a características demográficas. Según mi conocimiento la literatura está constituida por artículos de Wilson (1938), Irwin (1949), Chiang (1960b) y Koop (1951), los tres primeros relativos a la tabla de vida y especialmente la esperanza de vida y el último a la tasa bruta de reproducción, todo bajo supuestos simplificadores.

### 15.1. FUNCIONES DE LA TABLA DE VIDA

El "método Delta" es una manera de seguir la propagación del error (Deming, 1964, pág. 37 y siguientes). Supongamos que  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$ , y que  $x$  tiene un error  $\Delta x$ , siendo éste el desvío respecto al valor esperado  $\mathcal{E}x$ , el promedio para todas las muestras. Supondremos que se trata de muestreo insesgado, de manera que  $\mathcal{E}x$  es también el valor verdadero o parámetro. Entonces, si el error  $\Delta x$  es una cantidad pequeña,

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x; \quad \Delta v = \frac{dv}{dx} \Delta x; \quad (15.1.1)$$

$$\Delta(uv) \doteq (\Delta u)v + u(\Delta v); \quad (15.1.2)$$

$$\Delta(u/v) \doteq \frac{u}{v} \left( \frac{\Delta u}{u} - \frac{\Delta v}{v} \right); \quad (15.1.3)$$

$$\Delta e^u \doteq e^u \Delta u; \quad (15.1.4)$$

$$\Delta \ln u \doteq \frac{\Delta u}{u}. \quad (15.1.5)$$

Estas son por supuesto las fórmulas usadas en diferenciación. Mientras la variación esté restringida a un rango suficientemente pequeño, la  $u$  es representable por la relación lineal  $u = \mathcal{E}u + (x - \mathcal{E}x) du/dx$ , en la cual  $du/dx$

se puede considerar constante. Enseguida, pasando  $\mathcal{E}u$  al primer miembro, elevando al cuadrado y promediando tenemos

$$\text{Var}(u) = \mathcal{E}(u - \mathcal{E}u)^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \text{Var}(x).$$

Podemos obtener una fórmula para la varianza a partir de cualquiera de las relaciones (15.1.1) a (15.1.5) elevando al cuadrado las diferenciales y promediando para todas las muestras. El resultado para la razón en particular está establecido simplemente en términos de la *varianza relativa* (Hansen, Hurwitz y Madow, 1953, Vol. II, pág. 51; Kish, 1965, pág. 48), definida para una variable aleatoria  $u$  como

$$V_u^2 = \frac{\text{Var}(u)}{(\mathcal{E}u)^2}.$$

Entonces de (15.1.3) resulta que

$$V_{u/v}^2 = V_u^2 - 2r_{uv}V_uV_v + V_v^2,$$

donde  $r_{uv}$  es el coeficiente de correlación de Pearson.

#### El número de sobrevivientes $l_x$

Si se puede suponer que la tabla de vida ha sido hecha siguiendo una generación o cohorte se obtiene una deducción simple y exacta de la varianza de  $l_x$ , donde cada miembro está sujeto independientemente al riesgo dado de morir año a año,  $1 - (\lambda_{x+1}/\lambda_x)$ . Los sobrevivientes a la edad  $x$  de  $l_0$  nacimientos se distribuyen binomialmente. Si  $\lambda_x$  es la proporción esperada de los que sobreviven a la edad  $x$ , el número esperado de los sobrevivientes es  $l_0\lambda_x$ , y la varianza de  $l_x$  entre las muestras de  $l_0$  nacimientos es  $l_0\lambda_x(1 - \lambda_x)$  (Wilks, 1962, pág. 137). Más abajo se generaliza este resultado a las covarianzas mediante el uso de una función generatriz, y en (15.1.17) se obtiene un coeficiente de correlación.

#### El número de muertes ${}_n d_x$ y la probabilidad ${}_n q_x$

Si se obtiene  ${}_n d_x$  cuando se observan  $k_x$  individuos a la edad exacta  $x$  y se toma nota de cuántos mueren durante los  $n$  años subsiguientes y la verdadera probabilidad de morir es  $1 - (\lambda_{x+n}/\lambda_x)$ , entonces, la varianza de  ${}_n d_x$  debe ser

$$\text{Var}({}_n d_x) = k_x \left(1 - \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}\right) \left(\frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}\right). \quad (15.1.6)$$

La probabilidad de muerte observada  ${}_n q_x$  estaría bajo estas circunstancias sujeta a la varianza

$$\text{Var}({}_n q_x) = \left(1 - \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}\right) \left(\frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}\right) / k_x.$$

Si la muestra consiste de  $l_0$  niños de cero años seguidos a través de la vida, entonces el  $k_x$  esperado es  $l_0 \lambda_x$ , y la varianza es aproximadamente

$$\text{Var}({}_n q_x) \doteq ({}_n q_x)(1 - {}_n q_x)/l_0 \lambda_x. \quad (15.1.7)$$

En el caso del número de sobrevivientes en la tabla de vida hacemos una distinción en la notación entre el valor de la población, valor universal, o parámetro  $\lambda_x$ , y el número  $l_x$  obtenido en una muestra particular. Sin embargo, sería una deformación hacer la misma distinción para  ${}_n q_x$ ,  ${}_n m_x$ , etc. y no se ha intentado esto. Los símbolos del segundo miembro de fórmulas tales como (15.1.7) se deberían interpretar como valores verdaderos o aproximaciones de ellos;  $\Delta$  significaría siempre la diferencia entre la observación (aleatoria) y el valor verdadero del parámetro. Las expresiones que siguen están simplificadas por omisión del subíndice  $n$  que se refiere al intervalo de edad, por ejemplo  ${}_n q_x$  se escribe  $q_x$ . Se dará siempre por entendido el tamaño  $n$  del intervalo.

En la práctica se puede obtener  $q_x$  mediante  $m_x$ , la tasa específica de mortalidad por edades de (Chiang, 1960a)

$$q_x = \frac{nm_x}{1 + (n - a_x)m_x}, \quad (15.1.8)$$

una identidad deducible de la definición de  $a_x$  en (1.1.6). Según esta manera de construir la tabla de vida, los errores de  $q_x$  se plantearán en términos de los de  $m_x$ , diferenciando (15.1.8) para obtener

$$\Delta q_x \doteq q_x \left( \frac{\Delta m_x}{m_x} - \frac{(n - a_x) \Delta m_x}{1 + (n - a_x)m_x} \right) \quad (15.1.9)$$

a partir de (15.1.3), suponiendo que  $a_x$ , el promedio de años vividos desde la edad  $x$  por los que mueren en el grupo de edad que va de  $x$  a  $x + n$ , no está sujeto a error de muestreo. El supuesto adicional de que la variación en el denominador del segundo miembro de (15.1.8) es despreciable, produce  $\Delta q_x \doteq (q_x/m_x) \Delta m_x$ , de lo cual sigue (Chiang, 1960b)

$$\text{Var}(q_x) \doteq \left( \frac{q_x}{m_x} \right)^2 \text{Var}(m_x) \doteq n^2 \text{Var}(m_x). \quad (15.1.10)$$

Esto nos deja justo a un paso de los datos primarios  $D_x$  y  $K_x$ , cuya razón  $D_x/K_x$  es aproximadamente  $m_x$ . Mediante otra aplicación de (15.1.3)

$$\Delta m_x \doteq m_x \left( \frac{\Delta D_x}{D_x} - \frac{\Delta K_x}{K_x} \right), \quad (15.1.11)$$

y elevando al cuadrado se llega a la varianza de  $m_x$ . Si las muertes y la población se obtienen independientemente, se puede despreciar el término correspondiente al producto cruzado. Si se puede suponer que se conoce exactamente la población a la mitad del periodo,  $K_x$ , entonces la varianza relativa de  $m_x$ , definida como  $\text{Var}(m_x)/[\mathcal{E}(m_x)]^2$ , se reduce a la de  $D_x$ . Alternativamente, si se puede suponer que los individuos de la muestra han sido seleccionados indepen-

dientemente al azar de una población inicial conocida exactamente,  $D_x$  es la suma de extracciones de una variable binomial, y su varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}(D_x) &= (K_x + \frac{1}{2}D_x)(q_x)(1 - q_x) \\ &= D_x(1 - q_x), \end{aligned} \quad (15.1.12)$$

la que se puede aproximar por  $D_x$  para la mayoría de las edades.

Usando el argumento en la dirección inversa podríamos partir con (15.1.12), la varianza de  $D_x$ , el número de muertes y plantear el efecto de esta varianza sobre la de  $m_x$  mediante (15.1.11), y luego sobre  $q_x$  mediante (15.1.10). Siguiendo adelante, el próximo eslabón consiste en ir de  $\Delta q_x$  a  $\Delta \hat{e}_x$ .

### Esperanza de vida $\hat{e}_x$

Para obtener la varianza de la esperanza de vida  $\hat{e}_x$ , observamos cómo ella varía cuando hay cambio en  $q_y$ , donde  $y$  se usa para los diversos grupos de edad ( $n$  años de intervalo) mayores. Para cualquier edad  $y > x$  el lector puede establecer la identidad

$$\hat{e}_x = \frac{T_x - T_y}{l_x} + \frac{L_y}{l_x} + \frac{T_{y+n}}{l_x} = \frac{T_x - T_y}{l_x} + \frac{l_y}{l_x} \left( \frac{L_y}{l_y} \right) + \left( \frac{l_{y+n}}{l_x} \right) \hat{e}_{y+n}. \quad (15.1.13)$$

El valor de  $(T_x - T_y)/l_x$ , el número promedio de años vividos entre la edad  $x$  y la edad  $y$ , no está afectado por  $q_y$ , que concierne a las edades posteriores a  $y$ . De acuerdo a los supuestos de este modelo, la esperanza a la edad  $y + n$ ,  $\hat{e}_{y+n}$ , no está afectada por  $q_y$ . Se desprecia cualquier efecto de  $q_y$  sobre  $a_y$ . En consecuencia, poniendo en lugar de  $L_y$  su valor de la ecuación precedente (1.1.6) y escribiendo  $l_{y+n} = l_y(1 - q_y)$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_x}{\partial q_y} &= \frac{\partial}{\partial q_y} \left[ \frac{T_x - T_y}{l_x} + \frac{l_y}{l_x} \left( \frac{nl_y - (n - a_y)d_y}{l_y} \right) + \frac{l_y}{l_x} (1 - q_y) \hat{e}_{y+n} \right] \\ &= -\frac{l_y}{l_x} [n - a_y + \hat{e}_{y+n}]. \end{aligned} \quad (15.1.14)$$

Por lo tanto, si los errores de los  $q_y$  están incorrelacionados, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{e}_x) &= \sum_{y \geq x} \left( \frac{\partial \hat{e}_x}{\partial q_y} \right)^2 \text{Var}(q_y) \\ &= \sum_{y \geq x} \left( \frac{l_y}{l_x} \right)^2 (n - a_y + \hat{e}_{y+n})^2 \text{Var}(q_y), \end{aligned} \quad (15.1.15)$$

lo que es sustancialmente el resultado obtenido por Wilson (1938, pág. 706) y Chiang (1960b, pág. 231).

La aplicabilidad de (15.1.15) está restringida por el supuesto de independencia y otras simplificaciones. La fórmula que no tome en cuenta las intercorrelaciones es apropiada si los individuos han sido extraídos al azar en la



muestra, pero no lo es si la extracción de la muestra ha sido en base a grupos o conglomerados de individuos; el uso de (15.1.15) para una muestra compuesta de conglomerados puede dar por resultado una subestimación burda de la varianza. Por otra parte, tomar los productos cruzados como asimismo todos los cuadrados requeriría para  $\hat{e}_0$  la estimación de algo así como 200 correlaciones en grupos quinquenales de edad. Sin embargo, es claro el principio mediante el cual podemos deducir una fórmula completa: el efecto de variación en los datos primarios  $D_x$  y  $K_x$  seguirían a  $m_x$ , luego a  $q_x$ , enseguida a  $\hat{e}_x$ . Abajo se da un ejemplo simple del uso de (15.1.14), y luego se sugiere un procedimiento alternativo para seguir esta cadena en el computador y obtener el mismo resultado para cualquier grupo de edad sin el álgebra de las últimas páginas.

### Propagación de un error calculado determinísticamente

Para saber qué efecto porcentual causa en las  $\hat{e}_x$  un cambio del uno por ciento en las  $q_y$ , modificamos (15.1.14) dividiendo por  $\hat{e}_x$  y aplicándola a incrementos finitos:

$$\frac{\Delta \hat{e}_x}{\hat{e}_x} = - \left( \frac{q_y}{\hat{e}_x} \right) \left( \frac{l_y}{l_x} \right) (n - a_y + \hat{e}_{y+n}) \frac{\Delta q_y}{q_y} \quad (15.1.16)$$

Consideremos como un ejemplo  $x = 30$  e  $y = 40$ , y los datos de la tabla para la población masculina de los Estados Unidos en 1961

$$\begin{aligned} \hat{e}_{30} &= 40.80; & \frac{l_{40}}{l_{30}} &= \frac{91884}{94103}; \\ \hat{e}_{40} &= 27.32; & {}_5q_{40} &= 0.02232, \end{aligned}$$

y hagamos  ${}_5a_{40}$  igual a 2,5. Entonces el efecto relativo de un pequeño cambio en  ${}_5q_{40}$  sobre  $\hat{e}_x$  es

$$- \left( \frac{0.02232}{40.80} \right) \left( \frac{91884}{94103} \right) (5 - 2.5 + 27.32) \frac{\Delta {}_5q_{40}}{{}_5q_{40}} = -0.0159 \frac{\Delta {}_5q_{40}}{{}_5q_{40}},$$

de acuerdo con (15.1.16). Quiere decir que un cambio de un 1 por ciento en  ${}_5q_{40}$  significará un cambio de 0,0159 por ciento en  $\hat{e}_{30}$  en la dirección opuesta.

Cuando la tabla de vida se calculó realmente con un incremento del 1 por ciento en  ${}_5q_{40}$ , la esperanza de vida a la edad exacta 30 bajó de 40,8040 a 40,7975, es decir 0,0065, que equivale a un cambio relativo de  $-0,0065/40,8040 = -0,016$  por ciento. Esta es una verificación aritmética de (15.1.15) para el caso en que sólo una de las tasas específicas de mortalidad por edad está sujeta a error. El computador proporciona una técnica general para averiguar diferenciales pasando por los datos levemente modificados y comparando con el resultado original. El lector podrá extender el método para encontrar momentos de orden superior y covarianzas.

### La tabla de vida estocástica mediante simulación

El método determinístico de los párrafos precedentes se puede seguir paralelamente mediante un proceso estocástico. Ronald Lee, usando el computador

## CUADRO 15.1

ESPECIMEN ALEATORIO O TABLA DE VIDA SIMULADA QUE COMIENZA CON 100 NACIMIENTOS, EN LA CUAL SE HA DADO A CADA INDIVIDUO UNA PROBABILIDAD SEPARADA DE SOBREVIVIR EN CADA EDAD;  ${}_0q_x$  FUE TOMADO DE LAS MUJERES ESTADOUNIDENSES, 1964; METODO SIMPLIFICADO\*

Edad x	${}_0q_x$	$l_x$	${}_0d_x$	${}_0L_x$	$e_x$
0	0.02107	100	2	98.5	74.01
1	0.00347	98	0	392.0	74.51
5	0.00185	98	0	490.0	70.51
10	0.00154	98	0	490.0	65.51
15	0.00274	98	0	490.0	60.51
20	0.00359	98	1	487.5	55.51
25	0.00440	97	0	484.8	51.06
30	0.00634	97	0	485.0	46.06
35	0.00929	97	0	485.0	41.06
40	0.01372	97	0	485.0	36.06
45	0.02073	97	0	486.0	31.06
50	0.03154	97	5	474.0	26.05
55	0.04510	92	7	442.9	22.31
60	0.06841	85	7	407.5	18.94
65	0.10622	78	7	372.5	15.41
70	0.15976	71	7	340.8	11.69
75	0.24798	64	23	264.4	7.64
80	0.38839	41	16	165.4	5.48
85	1.00000	25	25	59.2	2.37

\* Programado por Ronald Lee, quien también proporcionó el material para los cuadros 15.2. a 15.5.

CDC 6400 de la Universidad de California, Berkeley, tomó un conjunto fijo de  $q_x$  (los de las mujeres estadounidenses, 1964) y expuso a cada uno de cien individuos de edad cero al riesgo  $q_0$ , luego expuso a los sobrevivientes sucesivamente a las probabilidades  $q_1, q_5, q_{10}, \dots$ . El resultado se repitió hasta producir 150 tablas similares a la mostrada en el cuadro 15.1 en un proceso que usó más de 200 000 números aleatorios y que fue ejecutado en 27 segundos. (Con el objeto de ahorrar tiempo de computador se utilizó un método simplificado de construcción de una tabla de vida que no implicara iteración, pero este fue un método uniforme durante toda esta sección y por lo tanto no afecta a ninguna de nuestras conclusiones).

CUADRO 15.2

DISTRIBUCION DE LOS VALORES DE  $z_0$  EN 150 TABLAS DE VIDA ALEATORIAS,  
BASADAS EN LAS  $q_x$  DE LAS MUJERES ESTADOUNIDENSES  
EN 1964 Y EN 100 NACIMIENTOS

-68.99	4
69.00-69.99	4
70.00-70.99	13
71.00-71.99	29
72.00-72.99	27
73.00-73.99	34
74.00-74.99	22
75.00-75.99	13
76.00-76.99	1
77.00+	3
TOTAL	150

CUADRO 15.3

MEDIAS Y VARIANZAS ENTRE 150 TABLAS DE VIDA ALEATORIAS  
BASADAS EN LAS  $q_x$  DE LAS MUJERES ESTADOUNIDENSES EN 1964 Y EN  
100 NACIMIENTOS; LOS VALORES ESPERADOS APARECEN ENTRE PARENTESIS  
DEBAJO DE CADA RESULTADO SIMULADO <sup>a</sup>

Edad x	$l_x$		${}_n d_x^b$		$\dot{c}_x$	
	Media	Varianza	Media	Varianza	Media	Varianza
0	100.00 (100.00)	0 (0)	2.21, (2.11)	1.83 (2.06)	72.84 (73.02)	3.23 (3.14)
20	96.83 (96.96)	2.60 (2.95)	0.33 (0.35)	0.35 (0.35)	55.12 (55.22)	1.78 (1.72)
40	94.46 (94.68)	5.26 (5.03)	1.23 (1.30)	1.37 (1.28)	36.20 (36.25)	1.47 (1.33)
60	84.18 (84.57)	13.47 (13.05)	5.81 (5.79)	5.57 (5.45)	19.09 (19.10)	0.91 (0.79)
80	44.28 (44.50)	25.07 (24.70)	17.25 (17.28)	14.75 (14.30)	5.52 (5.54)	0.19 (0.29)

<sup>a</sup> Programado por Ronald Lee y Hardeo Sahai.

<sup>b</sup> El intervalo  $n$  es de un año para la edad 0 y de cinco años para las edades subsiguientes.

A cada uno de los elementos de la tabla corresponde ahora una distribución de frecuencias. Por ejemplo, los 150 valores de  $\hat{e}_0$  son como aparecen en el cuadro 15.2. Con respecto a las  $l_x$ , las  $d_x$ , y las  $\hat{e}_x$ , las medias y las varianzas para las 150 tablas de mortalidad fueron calculadas a partir de las "observaciones" producidas por la máquina; en el cuadro 15.3 se muestran algunas de estas medias y varianzas. Por ejemplo, la media de la distribución en el cuadro 15.2, calculada a partir de datos no agrupados se muestra que es 72,84, y su varianza 3,23.

En el cuadro 15.3 también aparecen entre paréntesis los resultados determinísticos. Para las mujeres estadounidenses, 1964, la  $\hat{e}_0$  calculada por el mismo método simplificado es 73,02, y por (15.1.15) la varianza de  $\hat{e}_0$  es 3,14. En el cuadro 15.3 estos valores determinísticos se presentan entre paréntesis, ítem por ítem, justo debajo del resultado de la simulación.

¿Cómo se compara una media de las 150 tablas estocásticas con la cifra correspondiente en la tabla determinística? Para  $l_{60}$  la media de las 150 tablas fue 84,18, y por el mismo método la tabla determinística dio 84,57, lo que da una diferencia de 0,39. Si las  $l_{60}$  se distribuyen normalmente podemos considerar esto en relación a la varianza "observada" 13,47 cuando se la estima con 149 grados de libertad, y encontrar que  $t$  es  $0,39/\sqrt{13,47/150} = 1,3$ , lo cual tiene una probabilidad próxima a 0,2 de ser sobrepasado por factores aleatorios. Alternativamente, la podemos comparar con la varianza teórica dada por  $l_0(\lambda_x)(1-\lambda_x)$  en base al supuesto de que lo último es exacto, y encontrar  $0,39/\sqrt{13,05/150}$ ; mediante esta imposición, resulta apropiada una distribución normal y lleva aproximadamente a la misma probabilidad.

Las varianzas obtenidas de las 150 tablas estocásticas se pueden comparar con los resultados teóricos deducidos anteriormente en este capítulo. De acuerdo a lo que se muestra en el cuadro 15.3, la varianza entre las 150  $\hat{e}_{40}$  con 149 grados de libertad es 1,47; la basada en (15.1.15) es 1,33; la razón de la primera a la segunda,  $1,47/1,33$ , multiplicada por 149, es decir 165, se puede considerar como el valor de una variable  $\chi^2$  con 149 grados de libertad. La probabilidad de que  $\chi^2$  sea mayor que 165 por el azar, es aproximadamente 0,2. En toda la tabla la única diferencia significativa al nivel del 5 por ciento es para  $\hat{e}_{80}$ .

### Distribuciones completas de las funciones de la tabla de vida; intercorrelaciones

El argumento anterior ha estado restringido a las varianzas, vale decir, a los segundos momentos de las distribuciones de números individuales. Chiang (1960a) fue más allá y dedujo la función generatriz de toda la columna correspondiente al número de sobrevivientes de la tabla de vida. Piense nuevamente en  $l_0$  no como el comienzo arbitrario de la tabla de vida, sino como un número observado de nacidos que son seguidos a través de sus vidas. Los sobrevivientes de entre ellos,  $l_x$ , se contabilizan año por año. Supongamos que ellos son extraídos al azar de una población sujeta a una tabla de vida cuya columna del número de sobrevivientes es  $\lambda_x$  en base a una raíz unitaria. Entonces, como vimos arriba, para cualquier edad  $x$ , la cantidad observada  $l_x/l_0$  se puede considerar como una muestra de la distribución binomial con parámetro  $\lambda_x$ ; en consecuencia, la probabilidad de que la tabla de vida de la muestra contenga exactamente  $l_x$  individuos en edad  $x$  es

$$\binom{l_0}{l_x} \lambda_x^{l_x} (1 - \lambda_x)^{l_0 - l_x}.$$

La función generatriz es el valor esperado de la  $l_x$ ésima potencia de otra variable indefinida  $t_x$ :

$$\mathcal{E}(t_x^{l_x}) = \sum_{l_x} \binom{l_0}{l_x} \lambda_x^{l_x} (1 - \lambda_x)^{l_0 - l_x} t_x^{l_x} = (1 - \lambda_x + \lambda_x t_x)^{l_0}.$$

La derivada de esto último con respecto a  $t_x$ , evaluada en  $t_x = 1$ , es  $l_0 \lambda_x$ , que es el valor esperado de  $l_x$ . Las derivadas subsiguientes servirán para calcular los momentos subsiguientes. La distribución está implícita en su función generatriz.

No necesitamos restringirnos a una única variable  $t_x$ , sino que podemos poner tantas de tales variables como  $l_x$  haya, de manera que las  $t_x$  en conjunto determinen la distribución conjunta de las  $l_x$ . Resulta que la función generatriz conjunta es

$$\mathcal{E}(t_1^{l_1} t_2^{l_2} \dots t_w^{l_w}) = \{1 - [\lambda_1(1 - t_1) + \lambda_2 t_1(1 - t_2) + \lambda_3 t_1 t_2(1 - t_3) + \dots + \lambda_w t_1 t_2 \dots t_{w-1}(1 - t_w)]\}^{l_0}.$$

Lo que se demuestra por inducción (Chiang, 1960a, pág. 624). Se puede ejemplificar su uso diferenciando con respecto a  $t_x$  y enseguida con respecto a  $t_y$ , para obtener el momento conjunto de  $l_x$  y  $l_y$  respecto a cero. Tomando esta segunda derivada y haciendo todos los  $t_i$  iguales a uno da

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(t_1^{l_1} t_2^{l_2} \dots t_y^{l_y})}{\partial t_x \partial t_y} \Big|_{t_i=1} = l_0 \lambda_y (1 - \lambda_x) + l_0^2 \lambda_x \lambda_y,$$

si  $y \geq x$ . La covarianza de  $l_x$  y  $l_y$  se obtiene al restar el producto de las medias del momento conjunto respecto a cero, esto es,  $(l_0 \lambda_x)(l_0 \lambda_y) = l_0^2 \lambda_x \lambda_y$ , que conduce a

$$\text{Covar}(l_x, l_y) = l_0 \lambda_y (1 - \lambda_x).$$

El coeficiente de correlación entre  $l_x$  y  $l_y$  es

$$\begin{aligned} r_{l_x l_y} &= \frac{\text{Covar}(l_x, l_y)}{\sqrt{\text{Var } l_x \text{ Var } l_y}} = \frac{l_0 \lambda_y (1 - \lambda_x)}{\sqrt{l_0 \lambda_x (1 - \lambda_x) l_0 \lambda_y (1 - \lambda_y)}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_y (1 - \lambda_x)}{\lambda_x (1 - \lambda_y)}}, \end{aligned} \tag{15.1.17}$$

el cual no depende de  $l_0$ . La ecuación (15.1.17) no es simétrica entre  $x$  e  $y$ , y asume que  $x$  es la edad menor. [¿Habría usted esperado que la correlación fuera una expresión simétrica en  $x$  e  $y$ ?]

## CUADRO 15.4

CORRELACIONES ENTRE  $l_x$  Y  $l_y$ ,  $x \leq y$ , ENTRE 150 TABLAS DE VIDA ALEATORIAS BASADAS EN LAS  $q_x$  DE LAS MUJERES ESTADOUNIDENSES EN 1964 Y EN 100 NACIMIENTOS; LOS VALORES ESPERADOS APARECEN ENTRE PARENTESIS DEBAJO DE CADA RESULTADO SIMULADO

	$l_{20}$	$l_{40}$	$l_{60}$	$l_{80}$
$l_{20}$	1.000	0.754 (0.747)	0.478 (0.418)	0.167 (0.161)
$l_{40}$		1.000	0.620 (0.558)	0.204 (0.216)
$l_{60}$			1.000	0.388 (0.387)
$l_{80}$				1.000

El experimento aleatorio de Ronald Lee estimó estas correlaciones por simulación para ciertos valores de  $l_x$ ; en el cuadro 15.4 se muestran sus resultados para las mujeres estadounidenses de 1964. Entre paréntesis aparecen los valores de  $r$  obtenidos de (15.1.17), usando el  $\lambda_x$  determinístico.

Las correlaciones para  $l_x$  son positivas: cuando ocurre en una tabla que  $l_x$  es mayor que el promedio, también  $l_y$  va a ser probablemente mayor, disminuyendo la correlación a medida que aumenta la distancia y  $-x$ . Tal como aparece en el cuadro 15.5, la correlación de los  ${}_5d_x$  es negativa y pequeña, habiéndose hecho los cálculos en base a las mismas 150 tablas aleatorias para los Estados Unidos. La correlación de los  $\hat{e}_x$  mostrada en la misma tabla es positiva y más grande. Para mostrar el grado en que varían tales correlaciones de un experimento a otro, se presentan también los resultados correspondientes para México, población femenina, año 1960.

Las correlaciones aquí obtenidas son de extracciones aleatorias de una población de  $q_x$  dado. Se esperaría que fuera cero entre los  $q$  y entre los  $m$  por lo cual los grupos de edad varían casi independientemente. Un tipo de correlación bastante diferente, tal vez de mayor interés demográfico, es aquella entre las tablas de vida observadas. En la sección 4.2 incluimos un breve análisis estadístico de tres conjuntos de tablas de vida computadas por William Cummings. El tercero de sus conjuntos consistía de 83 tablas para hombres de los países ya desarrollados de Europa, América y Oceanía para fechas igual y posteriores a 1945. Después de construir las tablas en base a las estadísticas oficiales de mortalidad y población dadas por edad y sexo, produjo entre otros materiales estadísticos las correlaciones de las  $q_x$  en todas las combinaciones. En el cuadro 15.6 se muestra una selección de estas correlaciones.

Estas correlaciones son muy diferentes de los valores cercanos a cero que

## CUADRO 15.5

CORRELACIONES ENTRE PARES DE ÍTEM CORRESPONDIENTES A TABLAS DE VIDA ALEATORIAS CON 100 NACIMIENTOS, BASADOS EN LAS  $q_x$  DE ESTADOS UNIDOS Y MEXICO

Estados Unidos, población femenina, 1964			
	${}_{5d}_{40}$	${}_{5d}_{60}$	${}_{5d}_{80}$
${}_{5d}_{20}$	-0.033	-0.131	-0.033
${}_{5d}_{40}$	1.000	-0.066	-0.067
${}_{5d}_{60}$		1.000	-0.056
	${}_{e}_{40}$	${}_{e}_{60}$	${}_{e}_{80}$
${}_{e}_{20}$	0.850	0.575	0.243
${}_{e}_{40}$	1.000	0.727	0.229
${}_{e}_{60}$		1.000	0.302

México, población femenina, 1960			
	${}_{5d}_{40}$	${}_{5d}_{60}$	${}_{5d}_{80}$
${}_{5d}_{20}$	-0.131	-0.077	+0.029
${}_{5d}_{40}$	1.000	+0.011	-0.004
${}_{5d}_{60}$		1.000	-0.105
	${}_{e}_{40}$	${}_{e}_{60}$	${}_{e}_{80}$
${}_{e}_{20}$	0.698	0.493	0.185
${}_{e}_{40}$	1.000	0.623	0.127
${}_{e}_{60}$		1.000	0.172

deberían aparecer entre las  $q$  de tablas confeccionadas por extracciones aleatorias. Aquí las correlaciones son positivas y altas, y mientras más cerca estén las edades, más grande es la correlación. La correlación entre  ${}_{5q}_{20}$  y  ${}_{5q}_{25}$  es 0,926; entre  ${}_{5q}_{40}$  y  ${}_{5q}_{45}$  es 0,948; entre  ${}_{5q}_{60}$  y  ${}_{5q}_{65}$  es 0,979 (no aparece en la tabla). Haciendo un resumen aproximativo: las edades separadas por un intervalo de

## CUADRO 15.6

CORRELACIONES DE  ${}_{5q_x}$  ENTRE 83 TABLAS DE VIDA PARA HOMBRES, REPRESENTANDO LAS OBSERVACIONES PARA PAISES DESARROLLADOS SUBSIGUIENTES A 1945, QUE APARECEN EN LA SECCION 4.2

	${}_{5q}_{25}$	${}_{5q}_{30}$	${}_{5q}_{35}$	${}_{5q}_{40}$	${}_{5q}_{45}$	${}_{5q}_{50}$	${}_{5q}_{55}$
${}_{5q}_{20}$	0.926	0.838	0.772	0.709	0.621	0.474	0.330
${}_{5q}_{25}$	1.000	0.956	0.891	0.840	0.732	0.589	0.418
${}_{5q}_{30}$		1.000	0.942	0.910	0.808	0.666	0.503
${}_{5q}_{35}$			1.000	0.973	0.903	0.789	0.655
${}_{5q}_{40}$				1.000	0.948	0.863	0.740
${}_{5q}_{45}$					1.000	0.949	0.851
${}_{5q}_{50}$						1.000	0.952
${}_{5q}_{55}$							1.000

5 años tienen una correlación de 0,95 aproximadamente; las que se diferencian en 10 años, 0,85; en 20 años, 0,7; en 30 años, 0,5; en 40 años, 0,3. En los extremos de la tabla,  ${}_{5q}_{80}$  tiene con  ${}_{4q}_1$  una correlación de sólo 0,155. Cualesquiera sean las causas especiales que actúan sobre la mortalidad en los diversos países ellas parecen actuar en rangos limitados de variación de edad.

## Tasas tipificadas

Vimos en sección 1.1 que la comparación de la mortalidad entre dos poblaciones es análoga a una comparación de precios entre dos áreas, en la cual las tasas de mortalidad para los diversos grupos de edad-sexo toman el lugar de los precios de las diversas mercancías, y el número de personas de cada edad toma el lugar de las cantidades de estas mercancías. Si la población típica (cantidad en el año base) en el  $i$ ésimo grupo es  $K'_i$  entonces, la tasa tipificada por el método directo es la que resulta de aplicar las tasas específicas por edad-sexo dadas  $d_i$  a la población tipo en un número finito de intervalos de edad:

$$(\text{sd}) = \frac{\sum_i K'_i d_i}{K'}$$

donde  $K' = \sum_i K'_i$ . Esta tiene las dimensiones de una tasa de mortalidad y se convierte en un índice agregado de base ponderada al ser dividido por  $d' = D'/K'$ , la tasa bruta en la población tipo, siendo  $D' = \sum D'_i$  el número absoluto de muertes de todas las edades.

Para obtener una aproximación simple a su error muestral supondremos que:

- a) la población tipo es arbitraria, y en consecuencia sus números y tasas no están sujetos a error muestral;



- b) la población dada se conoce en un mayor orden de precisión que las muertes dadas;
- c) el muestreo es independiente para las diversas edades, y por tanto las covarianzas entre las muertes a las diferentes edades son cero;
- d) las muertes son muestreadas individualmente al azar de un universo grande, de modo que  $d_i$  se distribuye binomialmente.

En base a estos supuestos la varianza  $\text{Var}(mt)$  de la tasa de mortalidad tipificada por el método directo se deduce fácilmente

$$\text{Var}(sd) = \sum_i \left(\frac{K_i'}{K'}\right)^2 \text{Var}(d_i) = \sum_i \left(\frac{K_i'}{K'}\right)^2 d_i(1 - d_i),$$

y si la fracción de muertes  $d_i$  es pequeña, esto se reduce a

$$\text{Var}(sd) \doteq \sum_i \left(\frac{K_i'}{K'}\right)^2 d_i.$$

La tasa tipificada por el método indirecto ( $mti$ ) divide las muertes dadas  $D$  por la aplicación a la distribución de edad dada  $K_i$  de las tasas específicas  $d_i'$  de la población tipo y la multiplica por la tasa bruta  $d'$  de la población tipo

$$(isd) = \frac{d'D}{\sum_i K_i d_i'}.$$

(La omisión de  $d'$  del numerador daría a éste las dimensiones de un número índice agregado, y él está ponderado en base a un año común, como vimos en la sección 1.1). En base a los mismos supuestos de arriba, la varianza de  $\text{Var}(mti)$  es

$$\text{Var}(isd) = \left(\frac{d'}{\sum_i K_i d_i'}\right)^2 \text{Var} D \doteq \left(\frac{d'}{\sum_i K_i d_i'}\right)^2 D.$$

Puesto que los supuestos incluyen que las tasas tipo no estén sujetas a variación siendo arbitrarias, y que el número expuesto en la población dada tiene error muestral relativo insignificante, el único elemento aleatorio en la expresión de  $\text{Var}(mti)$  es  $D$ . Siempre que se pueda suponer tanto a la tasa bruta como a la tasa tipificada por el método indirecto ( $mti$ ) como múltiplos fijos de  $D$ , su varianza relativa (o su raíz cuadrada, el coeficiente de variación) será la misma. Por otra parte, la tasa tipificada por el método directo ( $mt$ ) puede tener una varianza relativa mayor o menor que la tasa bruta.

## 15.2. FUNCIONES DE FECUNDIDAD

### La tasa neta de reproducción $R_0$

En la práctica  $R_0$  está más influida por la variación en la fecundidad que en la mortalidad. Ahora supondremos que la tabla de vida se obtiene de algún modo

sin error. Por definición, si la fecundidad efectiva va desde los 15 hasta los 45 años,

$$R_0 = \frac{{}_5L_{15}F_{15} + {}_5L_{20}F_{20} + \dots + {}_5L_{40}F_{40}}{l_0},$$

donde

$$F_x = {}_5B_x / {}_5K_x,$$

siendo  ${}_5B_x$  los nacimientos de niñas nacidas de madres que tenían  $x$  a  $x + 4$  años en su último cumpleaños. Suponiendo que la muestra ha sido sacada independientemente al azar de modo que las covarianzas son cero, obtenemos

$$l_0^2 \text{Var}(R_0) = ({}_5L_{15})^2 \text{Var}(F_{15}) + ({}_5L_{20})^2 \text{Var}(F_{20}) + \dots + ({}_5L_{40})^2 \text{Var}(F_{40}). \quad (15.2.1)$$

Si en (15.2.1) se consideran las  $F$  como variantes hipergeométricas, basadas en muestras de tamaño  $n$  sacada cada una sin reemplazo de una población finita de tamaño  $N$ , entonces los factores  $[1 - (n/N)]$  integran la varianza y tenemos el resultado dado por Koop (1951, pág. 156). Con muestreo por conglomerados, términos tales como  $2({}_5L_{15})({}_5L_{20}) \text{Covar}(F_{15}, F_{20})$  se habrían agregado a (15.2.1).

Si tanto las muertes como los nacimientos han sido obtenidos mediante muestras, entonces la desviación de  $R_0$  respecto a su valor esperado es

$$\Delta l_0 R_0 = \sum_{x=15}^{40} (F_x \Delta {}_5L_x + {}_5L_x \Delta F_x),$$

y la varianza de  $R_0$  no sólo incluirá términos para la varianza debida a mortalidad y a fecundidad sino también para las correlaciones entre los nacimientos y las supervivencias en las edades correspondientes y a diferentes edades.

### La tasa intrínseca de crecimiento natural $r$

Surge una pequeña novedad en el cálculo de la varianza de la tasa intrínseca, tomada como la solución en  $r$  de la ecuación

$$l_0 \psi(r) = \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} (e^{-(x+2.5)r} {}_5L_x F_x) = l_0. \quad (15.2.2)$$

Aplicando el método-Delta a los tres factores de cada término de  $\psi(r)$ ,

$$l_0 \Delta \psi(r) = \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} e^{-(x+2.5)r} {}_5L_x F_x \left( -(x+2.5) \Delta r + \frac{\Delta {}_5L_x}{{}_5L_x} + \frac{\Delta F_x}{F_x} \right), \quad (15.2.3)$$

por una extensión obvia de (15.1.2).

Pero sabemos que en (15.2.2)  $\psi(r)$  no varía, siendo igual a la unidad como la condición en  $r$  de la ecuación característica  $\psi(r) = 1$ . Por eso es permisible

igualar (15.2.3) a cero y cambiar el término en  $\Delta r$  al otro miembro de la igualdad, de modo que

$$\Delta r \sum_{x=\alpha}^{\beta-b} (x + 2.5)e^{-(x+2.5)r} {}_5L_x F_x = \sum_{x=\alpha}^{\beta-b} e^{-(x+2.5)r} {}_5L_x F_x \left( \frac{\Delta {}_5L_x}{{}_5L_x} + \frac{\Delta F_x}{F_x} \right). \quad (15.2.4)$$

A la izquierda la distorsión en  $r$  está multiplicada por  $l_0$  veces la edad media al nacimiento de los hijos en la población estable,  $A_r$ . Si se puede tratar la edad media al nacimiento de los hijos como una cantidad constante en relación a  $\Delta r$ ,  $\Delta {}_5L_x$ , y  $\Delta F_x$ , y (15.2.4) se lleva al cuadrado y se promedia para ambos lados y luego se divide por  $l_0 A_r^2$ ; el cuadrado del coeficiente de  $\Delta r$ ; el resultado es la varianza de la tasa intrínseca. Alternativamente, se puede obtener la varianza de  $r$  de  $Tr = \ln R_0$  de la sección 5.6, usando la varianza de  $R_0$  dada arriba.

### La tasa intrínseca de natalidad $b$

La varianza de la tasa intrínseca de natalidad  $b$  sigue de la de  $r$ . La tasa  $b$  es  $m(a)$  ponderada por la distribución por edad  $e^{-ra}p(a)$  como en (7.1.8):

$$b = \frac{\int_a^\beta e^{-ra} p(a) m(a) da}{\int_0^\infty e^{-ra} p(a) da},$$

y si  $r$  es tal que el numerador es igual a la unidad, entonces

$$b = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-ra} p(a) da}.$$

En consecuencia

$$\frac{\partial b}{\partial r} = b \frac{\int_0^\infty a e^{-ra} p(a) da}{\int_0^\infty e^{-ra} p(a) da} = b \bar{A}_r,$$

o sea,  $b$  veces la edad media  $\bar{A}_r$  en la población estable. Para la población femenina de Inglaterra y Gales en 1961,  $b = 0,01931$  y  $\bar{A}_r = 33,73$ , haciendo

$$\partial b / \partial r = (0.01931)(33.73) = 0.651.$$

La varianza de  $b$  sería  $(0,651)^2 = 0,424$  veces la varianza de  $r$ .

## 15.3. UN ENFOQUE SIMPLIFICADO DE LAS MUESTRAS COMPLEJAS

En la práctica las muestras son estratificadas, homogéneas y en cualquier caso elaboradas con el interés puesto en la eficiencia; los datos adicionales obtenidos fuera de la encuesta frecuentemente son incorporados en estimadores de razón o regresión, nuevamente en beneficio de la eficiencia; finalmente en demografía, las características cuyas varianzas requerimos, son ellas mismas funciones muy

elaboradas de los datos primarios. El lector que desee convencerse del último punto puede intentar expresar  $e_x$ , la esperanza de vida a la edad  $x$ , como una función explícita del número de muertes y población a las diversas edades desde  $x$  hasta el final de la vida. En vista de los diseños muestrales elaborados, estimadores complejos, y funciones que implican considerable manipulación de los totales primarios  ${}_nD_x$  y  ${}_nB_x$  estimados en base a la muestra, no es probable que las fórmulas presentadas hasta este momento encuentren mucha aplicación en encuestas; cuando se apliquen será con tales supuestos simplificadores que pueden dar una estimación del error sumamente mala. Esto sugiere el uso de algunos métodos prácticos introducidos en encuestas para campos distintos al que estamos estudiando, donde se encuentran dificultades similares.

Supongamos que dos organizaciones que realizan encuestas han efectuado encuestas probabilísticas insesgadas en una población dada para estimar un parámetro  $X$ , que podría ser la tasa intrínseca, la esperanza de vida a la edad 0 o cualquier otro parámetro. Las muestras y los procedimientos de estimación pueden ser tan complejos como lo requiere la eficiencia; ni siquiera necesitamos saber qué métodos usaron, aparte de que ambos eran insesgados, independientes, casi con la misma varianza y distribuidos de manera más o menos normal. Supongamos que el primero hace una estimación  $X_1$  y el segundo,  $X_2$ , y el usuario desea aprovechar ambos estimadores. Entonces su mejor estimador es  $(X_1 + X_2)/2$ , el que a su vez tiene una varianza estimada mediante  $[(X_1 - X_2)/2]^2$ .

Un grado de libertad no da una precisión adecuada, pero generalmente se dispone de más grados de libertad. Si se tiene acceso a los datos de las encuestas de ambas organizaciones, se puede dividir cada encuesta en dos partes de manera que se podría sacar una independientemente, logrando así tres grados de libertad. Puede ser difícil hacer esto logrando que la variación administrativa quede incluida en el error, pero la encuesta relativa al estado de la población (Current Population Survey) que realiza la Oficina de Censos de los Estados Unidos corrige una parte de tal error. Divide la encuesta completa en dos maneras haciendo esto 40 veces (Oficina del Censo, 1964). Los errores no son totalmente independientes, pero cada uno agrega alguna información. Un computador bastante potente demora aproximadamente 24 horas en realizar 80 veces el procedimiento complejo de estimación, pero produce un error muestral bastante fidedigno, usando el equivalente de aproximadamente 25 grados de libertad.

Se podría agrupar la muestra por pares de estratos de la población original, y las estimaciones se harían a partir de la muestra para cada uno de los estratos. El estimador del total sería entonces

$$(X_1 + X_2) + (X_3 + X_4) + \dots$$

y la varianza de esto se estimaría mediante

$$(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + \dots \quad (15.3.1)$$

La ecuación (15.3.1) tiene un sesgo por exceso debido a la inclusión en la varianza de la diferencia entre los miembros de los estratos apareados, habiéndose

eliminado esta parte de la varianza del estimador mismo. Un camino alternativo consiste en dividir sistemáticamente el diseño original en un número de submuestras independientes y enseguida determinar la varianza entre los estimadores construidos en base a éstas (Deming, 1956).

El muestrista práctico persigue la eficiencia de la estimación aunque sea a costa del sesgo. Para tomar un ejemplo exagerado, supongamos que hemos elegido una muestra aleatoria consistente en una provincia de los Estados Unidos con el objeto de estimar la población presente (1967). Contamos su población en 1967, por ejemplo  $Y_i$ , y quedamos entonces enfrentados al problema de la elección de un factor que permita estimar la población total. Pensamos en 50, que es el recíproco de la probabilidad que tiene cada provincia de ser elegida; el estimador  $\hat{Y} = 50 Y_i$ , es insesgado en el sentido de que el promedio de tales estimaciones tomado para muchas muestras daría el verdadero valor. Alternativamente, la razón de la población en 1960 de los Estados Unidos a la población en 1960 de la provincia seleccionada, o sea  $X/X_i$ , daría  $\hat{Y} = (X/X_i)Y_i$ . Este estimador es sesgado en el sentido de que el promedio de muchas muestras no sería igual al verdadero valor. La mayoría de la gente sean muestristas o no, no tendría dudas de que entre los dos estimadores propuestos es preferible el sesgado. Aunque el uso de una provincia para estimar el total de los Estados Unidos es difícilmente una proposición aceptable, aun la conclusión que hemos sacado según la cual de dos estimadores el más eficiente puede ser el sesgado, es frecuentemente cierta en trabajo muestral.

La serie de métodos menos analíticos pero más prácticos a que hemos hecho referencia aquí alcanza su culminación en el "método de la navaja" desarrollado por Fred Mosteller y John Tukey basado en una sugerencia original de Quénouille (1956), que permite liberarse del término principal de sesgo (Cochran, 1963, pág. 180). La muestra se divide en  $k$  submuestras. Si  $Y$  es el resultado de un cálculo aunque complejo para la muestra completa, y  $Y_j$  es el resultado del cálculo para la muestra omitiendo la  $j$  ésima submuestra, lo cual equivale a decir para todas las  $k - 1$  submuestras distintas de la  $j$  ésima, entonces los *seudovalores* se definen mediante

$$Y_j^* = kY - (k - 1)Y_j.$$

Los  $k$  seudovalores son tratados como observaciones; su media aritmética

$$\hat{Y} = \frac{\sum_{j=1}^k Y_j^*}{k} \quad (15.3.2)$$

se considera para el estimador final, y la varianza de este estimador se estima como

$$\text{Var}(\hat{Y}) \doteq \frac{\hat{s}^2}{k} = \frac{\sum_{j=1}^k (Y_j^* - \hat{Y})^2}{(k)(k - 1)}. \quad (15.3.3)$$

Se pueden establecer límites de confianza suponiendo que  $\hat{Y}\sqrt{k}/\hat{s}$  se distribuye como una  $t$  con  $k - 1$  grados de libertad.

El sentido según el cual  $\hat{Y}$  es insesgado se puede estudiar suponiendo un estimador  $X$ , basado en  $m$  elementos, tal que

$$\mathcal{E}(X) = \mu + \frac{a}{m} + \frac{b}{m^2} + \dots, \quad (15.3.4)$$

donde  $\mu$  es el parámetro requerido y el sesgo es del orden de  $a/m$ . (El argumento requiere que el sesgo sea función del tamaño muestral.) Para  $k$  grupos, cada uno con  $n$  observaciones, (15.3.4) da para  $Y_j$  basado en  $(k-1)n$  elementos

$$\mathcal{E}(Y_j) = \mu + \frac{a}{(k-1)n} + \frac{b}{(k-1)^2 n^2} + \dots$$

En forma similar, si  $Y$  está basado en  $kn$  observaciones,

$$\mathcal{E}(Y) = \mu + \frac{a}{kn} + \frac{b}{k^2 n^2} + \dots$$

Resulta entonces que la esperanza del pseudovalor  $Y_j^*$  es

$$\mathcal{E}(Y_j^*) = \mathcal{E}(kY - (k-1)Y_j) = \mu - \frac{b}{n^2 k(k-1)} + \dots,$$

siendo despreciables los términos que quedan más allá de  $\mu$  debido a los valores que toman  $n$  y  $k$  en la práctica. El término correspondiente al sesgo principal se ha anulado.

Para aplicar el método de la navaja a un diseño muestral, supóngase que buscamos la tasa intrínseca de crecimiento natural  $r$  para una población en la que se carece de datos censales y de registro. Para recolectar datos primarios particionamos el territorio que se va a muestrear en 1 000 unidades muestrales; 75 de estas unidades se eligen al azar para que constituyan la muestra; se considera entonces que la muestra consiste de  $k=15$  grupos de  $n=5$  unidades muestrales cada uno, donde los grupos se han formado aleatoriamente. Con 14 de estos grupos definimos una pseudounidad para  $Y_j$ , a partir de las observaciones que realicemos para ella calculamos toda la sucesión de números de los nacimientos y defunciones, a través de la tabla de vida femenina y la función de reproducción neta; y finalizamos con  $r_j$  y el pseudovalor correspondiente  $r_j^*$ . Este cálculo se debería desarrollar 15 veces en total, proporcionando 15 estimadores insesgados  $r_1^*, r_2^*, \dots, r_{15}^*$ . Reemplazando  $Y$  por  $r$  en (15.3.2) y (15.3.3) obtenemos el estimador que deseamos para  $r$  y su varianza. El computador obvia la gran cantidad de operaciones aritméticas que hay que efectuar.

El método de la navaja es útil en muestreo de áreas basado en mapas, haya o no a mano información precedente en la forma de censos pasados o registros inciertos de nacimientos y defunciones.

Deming y Keyfitz (1967) supusieron una situación en la que no existía tal material, ni aun mapas, y se tuvo que usar una muestra de puntos y no de áreas para determinar el número de personas. Adaptando métodos desarrollados para encuestas sobre la vida silvestre (Bailey, 1951; Chapman, 1955; Goodman, 1953a; Leslie, 1952) ellos presentan estimadores de la población total en la forma de una función del número de individuos encontrados por enumeradores errantes que salen en una primera ocasión y encuentran  $n_1$  personas, luego salen en una segunda ocasión y encuentran  $n_2$ , de los cuales  $n_{12}$  son comunes a las dos ocasiones. Se obtiene un estimador simple del total aplicando a  $n_1$  un factor de ajuste

$n_2/n_{12}$ , dando  $n_1 n_2 / n_{12}$ . El estimador máximo-verosímil del total de la población es, si  $n_1$ ,  $n_2$ , y  $n_{12}$  son variables aleatorias,  $(n_1 + n_2)^2 / 4n_{12}$ . En la práctica esto sería un método residual, posiblemente de uso para aquellos casos perdidos en la enumeración de un censo regular.

## CONCLUSION

Se ha dado alguna idea de la variación de los parámetros de la población en condición de muestreo aleatorio. Esto no es equivalente a una variación en el fenómeno de la población mismo. Lo último, más cercano a la esencia de la demografía, se revela mejor en modelos estocásticos formales, y esto es lo que haremos ahora.

## PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

Con la única excepción del capítulo 15, hasta aquí hemos tratado los procesos de población como si fueran determinísticos, aceptando los valores esperados como el resultado inevitable en cada ensayo. Desde luego que la palabra "probabilidad" aparece, como por ejemplo en la aplicación de la tabla de vida, para averiguar si un individuo sobrevivirá, pero hemos perdido la variación entre los grupos a los que se aplican las mismas probabilidades. Las dificultades matemáticas de modelos probabilísticos realistas son considerables, existiendo en esta área una literatura altamente técnica. Referencias de ella se encontrarán en Bayley (1964), Bartlett (1960), Bharucha-Reid (1960). Incluiremos aquí tres modelos: el proceso de nacimientos puro; el proceso de nacimiento, muerte e inmigración, y el problema de los sexos. Estas ideas se originaron con Yule (1924), Feller (1939), Kendall (1949) y Goodman (1953).

**Una simulación en el computador**

Para sugerir algunos rasgos de los modelos probabilísticos de población, reseñaremos un proceso simple de nacimientos y muertes, sin hacer distinciones de edad. Supongamos  $\lambda = 0,0194$  y  $\mu = 0,0094$ , siendo éstas aproximadamente las tasas brutas corrientes de natalidad y mortalidad en los Estados Unidos. Comenzaremos con 100 individuos, y para el primer año preguntamos al generador de números aleatorios del computador si el primer individuo vivirá o morirá. Hacemos esto pidiendo un número de cuatro dígitos en una distribución rectangular entre 0 y 1. Si el número que sale es menor que 0,0094 se interpreta que morirá, en tanto que un número que esté entre 0,0094 inclusive y 0,9999 significa que él vivirá. El mismo procedimiento se aplica a cada uno de los demás individuos. Entonces la pregunta acerca de nuevos nacimientos se hace respecto a cada uno. El resultado para el año cero en nuestro primer ensayo fue de 3 muertes y 1 nacimiento (en tanto que los valores esperados eran 0,94 y 1,94 respectivamente). Restando las 3 muertes y agregando un nacimiento se llega a un total de 98 individuos al comienzo del año 1. El cuadro 16.1 nos muestra los primeros 15 años de la primera simulación, que se continuó hasta 100 años, repitiéndola luego 19 veces. Todo esto, incluyendo la extracción de 400 000 números aleatorios, lo completó la CDC 6 400 en poco más de medio minuto. Debo expresar mi reconocimiento a Frank Oechsli por haber desarrollado el programa.

Para el período de 100 años, las 20 simulaciones terminaron con las siguientes cantidades de individuos vivos en la comunidad cerrada hipotética: 223, 224, 266, 304, 298, 236, 255, 300, 192, 298, 315, 258, 290, 255, 272, 295, 261, 371, 273, 274. La media de estos números es 271,5, la varianza de la población que



## CUADRO 16.1

PRIMEROS 15 AÑOS DE LA PRIMERA SIMULACION DEL PROCESO DE NACIMIENTOS Y MUERTES  $\lambda = 0,0194$ ;  $\mu = 0,0094$ \*

Año	Población al comienzo del año	Nacimientos durante el año	Muertes durante el año
0	100		
1	98	1	3
2	99	1	0
3	98	0	1
4	97	1	2
5	101	5	1
6	103	2	0
7	105	2	0
8	107	3	1
9	106	2	3
10	105	1	2
11	107	3	1
12	108	2	1
13	109	2	1
14	109	2	2
15	114	5	0

\* Programado por Frank Oechsli.

se infiere de ellos es 1 627 y la desviación estándar 40,3, considerándolos como una muestra con 19 grados de libertad.

¿Qué nos dice la comparación de esto con la teoría? Por lo menos la media está más cerca de lo que tenemos derecho a esperar. De acuerdo a la teoría expresada más adelante en (16.2.13b), y en el modelo de población estable de los capítulos 5 y 7, el número esperado al cabo de 100 años es  $100e^{(\lambda-\mu)100} = 271.8$ . La varianza estimada con nuestras observaciones fue 1 627 que es mayor que el 1 345 calculado de (16.2.13a), pero una referencia a la distribución de  $\chi^2$  para 19 grados de libertad da una probabilidad de aproximadamente 0,25 para un exceso igual o mayor. De los 20 ensayos, el intervalo  $272 \pm 40$ , o sea de 232 a 312, comprende alrededor de 15, lo que está cerca del número esperado si la distribución es normal. El cuadro 16.2 nos muestra la media y la dispersión entre los 20 ensayos en intervalos de 10 años, junto con la media y la varianza esperadas en cada punto de tiempo.

El correspondiente proceso de nacimientos puro en el cual  $\lambda = 0,01$  y  $\mu = 0,0$ , lleva a los mismos valores esperados pero comparando (16.1.7) y (16.2.13a) vemos que la varianza esperada es sólo 1/2,88 veces mayor. En el ejemplo del cuadro 16.2, en 100 años la varianza esperada sería 467.

## CUADRO 16.2

RESUMEN DE 20 ENSAYOS DE UN PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE,  
CON  $\lambda = 0,0194$  Y  $\mu = 0,0094$ \*

Tiempo	MEDIA		VARIANZA	
	Observado en la simulación	Esperado de (16.2.13b)	Observado en la simulación	Esperado de (16.2.13a)
0	100.0	100.0	0	0
10	111.9	110.5	38.7	33.4
20	123.3	122.1	52.0	77.7
30	136.9	135.0	122.9	136.1
40	149.5	149.2	217.3	211.4
50	165.0	164.9	394.8	308.2
60	181.4	182.2	489.6	431.3
70	198.0	201.4	630.4	588.2
80	221.6	222.6	950.4	786.0
90	247.2	246.0	1293.9	1034.4
100	271.5	271.8	1627.0	1344.8

\* Programado por Frank Oechsli.

Después de un comentario sobre la naturaleza y aplicación de los diferenciales volvemos al desarrollo de la teoría, partiendo con el proceso de nacimientos puro.

**Elementos diferenciales del nacimiento y muerte**

Es común a las situaciones discutidas más abajo, una tasa de natalidad  $\lambda$ , siendo  $\lambda dt$  la probabilidad de cada individuo de dar a luz a un nuevo individuo del mismo sexo durante el breve intervalo de duración  $dt$ . En todo momento haremos un supuesto básico: los distintos individuos están sujetos independientemente a las probabilidades dadas. De allí que, por ejemplo, la probabilidad de que no haya nacimientos entre los  $n$  individuos en el tiempo  $dt$  es  $(1 - \lambda dt)^n$ , la probabilidad de que haya exactamente un nacimiento es  $n(1 - \lambda dt)^{n-1}\lambda dt$ , etc. Como  $dt$  se hace infinitamente pequeño las expresiones que tienen a  $(dt)^2$  como factor se hacen despreciables, de manera que podemos escribir  $(1 - \lambda dt)^n \doteq 1 - n\lambda dt$  para la probabilidad de 0 nacimientos en el tiempo  $dt$ , y  $n\lambda dt$  para la probabilidad de un nacimiento. El suceso que consiste en dos o más nacimientos en el tiempo  $dt$  tendrá una probabilidad de menor orden de magnitud que éstos, pudiendo ser omitida. Cuando se introduce más de un evento, por

ejemplo, nacimiento y muerte, de nuevo se aplicarán las probabilidades a los individuos independientemente, y no se necesita considerar más de un evento en un período infinitesimal; el caso en el que tengamos un nacimiento y una muerte en el tiempo  $dt$ , lo podemos excluir aun para individuos diferentes en una población grande.

### 16.1. EL PROCESO PURO DE NACIMIENTOS Y SUS EXTENSIONES

Si la probabilidad de que un individuo dé a luz en el tiempo  $dt$  es  $\lambda dt$ , entonces, como vimos, la probabilidad de que haya un nacimiento entre  $n$  individuos es  $n\lambda dt$ . Llamemos  $p_n(t + dt)$  a la probabilidad de que la población haya alcanzado el número  $n$  en el momento  $t + dt$ . Entonces, si  $dt$  es suficientemente pequeño, la probabilidad  $p_n(t + dt)$  es la suma de sólo dos eventos mutuamente excluyentes: a) que la población tenga  $n$  individuos en el tiempo  $t$  y que no haya nacimientos en el intervalo que va de  $t$  a  $t + dt$ , y b) que tenga  $n - 1$  individuos en un momento  $t$  y haya un nacimiento en el intervalo que va de  $t$  a  $t + dt$ . En símbolos

$$p_n(t + dt) = p_n(t)(1 - n\lambda dt) + p_{n-1}(t)((n - 1)\lambda dt). \quad (16.1.1)$$

Pasando  $p_n(t)$  al primer miembro y dividiendo por  $dt$ ,

$$\frac{p_n(t + dt) - p_n(t)}{dt} = -p_n(t)n\lambda + p_{n-1}(t)(n - 1)\lambda,$$

y tomando límite cuando  $dt$  se hace pequeño,

$$p'_n(t) = -p_n(t)n\lambda + p_{n-1}(t)(n - 1)\lambda, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (16.1.2)$$

en particular, para  $n = 1$ ,

$$p'_1(t) = -p_1(t)\lambda,$$

y definimos  $p_n(t) = 0$  para  $n \leq 0$ .

Aunque (16.1.2) es un conjunto infinito, la ecuación se puede resolver para cualquier valor particular de  $n$  sin tomar en cuenta los  $n$  más grandes. La solución (Yule, 1924) es

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16.1.3)$$

que es la probabilidad de que haya  $n$  individuos en el momento  $t$  cuando la condición inicial es un individuo, como se puede verificar por sustitución en (16.1.2) (Furry, 1937, pág. 571; Bharucha-Reid, 1960, pág. 78). De (16.1.3) resulta evidente que el total  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)$  es igual a 1 para cualquier tiempo  $t$ , como se requiere para que  $p_n(t)$  sea la distribución de probabilidad de la variable discreta  $n$ .

El valor esperado de  $n$  en el momento  $t$  debe ser,

$$\mathcal{E}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1},$$

como se deduce de (16.1.3). Sumando la serie resulta

$$\mathcal{E}(n) = e^{\lambda t}.$$

Esta es también la solución para el caso determinístico continuo comenzando con un individuo, donde el crecimiento es con seguridad  $n\lambda$ , expresada por la condición

$$dn/dt = n\lambda,$$

tal como hemos encontrado en la ecuación (13.1.2) y en otras partes. Podemos decir para todos los casos tratados en este capítulo, aunque no en general, que el modelo determinístico imita el modelo probabilístico, al menos en alcanzar el valor esperado correcto.

Cuando se trata de un individuo como condición inicial, la solución está indebidamente restringida. Una manera fácil de extenderla a varios individuos es establecer una función generatriz de probabilidades de la forma

$$\phi(z, t) = p_0(t) + p_1(t)z + p_2(t)z^2 + \cdots + p_n(t)z^n + \cdots, \quad (16.1.4)$$

similar a la función generatriz de la sección 5.8 donde  $z$  es una variable cuyos exponentes siguen la huella de los coeficientes llevándolos junto con sus potencias. Si la función generatriz de probabilidades para un individuo como condición inicial es  $\phi(z, t)$ , entonces la función generatriz para dos individuos será  $[\phi(z, t)]^2$ . Por las reglas para multiplicación de polinomios

$$[\phi(z, t)]^2 = [p_0(t)]^2 + [2p_0(t)p_1(t)]z + \cdots,$$

y estos coeficientes de las potencias de  $z$  son las probabilidades de cero, uno, ... individuos en el momento  $t$ . El lector puede verificar que las reglas de combinación de probabilidades para determinar las probabilidades de cero, uno, dos, ... individuos en el momento  $t$  son las mismas que para la multiplicación de  $\phi(z, t)$  por sí mismo para hallar los coeficientes de  $z^0, z^1, z^2, \dots$ . La función generatriz para  $n_0$  individuos nos da  $[\phi(z, t)]^{n_0}$ .

Diferenciando la función generatriz (16.1.4) con respecto a  $z$ , tenemos

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} = p_1(t) + 2p_2(t)z + 3p_3(t)z^2 + \cdots + np_n(t)z^{n-1} + \cdots,$$

y haciendo  $z = 1$ , tenemos el valor esperado de  $n$ , el número de personas en el momento  $t$ , siempre que la serie  $\phi(z, t)$  converja uniformemente. Si partimos con un individuo, el momento factorial de orden  $r$  en torno a 0 de la distribución

de  $n$  en el momento  $t$  se puede determinar diferenciando  $\phi(z, t)$   $r$  veces y luego igualando  $z$  a 1; para el segundo momento factorial tenemos

$$\mathcal{E}n(n-1) = \left. \frac{\partial^2 \phi(z, t)}{\partial z^2} \right|_{z=1}.$$

La probabilidad de que la población tenga  $n$  miembros en el momento  $t$  es  $1/n!$  veces la derivada  $n$ ésima con respecto a  $z$  de la función generatriz cuando  $z = 0$ :

$$p_n(t) = \left. \frac{\phi^{(n)}(z, t)}{n!} \right|_{z=0}.$$

Partiendo con un individuo, la función generatriz para el proceso de nacimientos puro es, usando (16.1.3),

$$\phi(z, t) = ze^{-\lambda t} + z^2 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) + z^3 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \dots, \quad (16.1.5)$$

donde no hay término absoluto, lo que está de acuerdo con un proceso cuya probabilidad de extinción es cero. Sumando en la ecuación (16.1.5) resulta

$$\phi(z, t) = \frac{ze^{-\lambda t}}{1 - z(1 - e^{-\lambda t})}. \quad (16.1.6)$$

Diferenciando y enseguida haciendo  $z = 1$ , el lector puede demostrar que el número esperado de individuos en el momento  $t$  es  $e^{\lambda t}$ , igual que antes. Puede también diferenciar dos veces (16.1.6) para obtener  $\mathcal{E}n(n-1)$  y demostrar que la varianza es

$$\mathcal{E}n(n-1) + \mathcal{E}n - (\mathcal{E}n)^2 = e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1). \quad (16.1.7)$$

Para estudiar la distribución  $p_n(t)$  partiendo con  $n_0$  individuos, sólo necesitamos examinar las propiedades de la  $n_0$ ésima potencia de la función generatriz  $\phi(z, t)$ , o sea

$$(\phi(z, t))^{n_0} = \left( \frac{ze^{-\lambda t}}{1 - z(1 - e^{-\lambda t})} \right)^{n_0}, \quad (16.1.8)$$

de la cual se determinará que los diversos cumulantes son  $n_0$  veces los cumulantes que se obtienen cuando se parte con un individuo. (Véase sección 5.6 para la definición de cumulante y una propiedad análoga de la ecuación de renovación para generaciones sucesivas.)

Se puede lograr que el proceso de nacimientos puro sirva como modelo para una población humana aunque el ajuste es imperfecto. En 1962 los Estados Unidos tenían una tasa neta de reproducción femenina de 1,633. Interprete esto de la siguiente manera: en cada generación, por cada persona viva hay un incremento de 0,633 de persona. Midiendo  $t$  en generaciones se tiene  $\lambda = \ln 1,633$ ,

y el resultado  $\mathcal{E}n = e^{2t}$  nos dice que el incremento sería de 63 por ciento, por generación, tal como en el modelo determinístico. Pero ahora también podemos decir cuál es la probabilidad de que 7 niñas recién nacidas tengan 11 bisnietos, o sea que se incrementen exactamente a 11 al cabo de 3 generaciones. Esto lo da el coeficiente de  $z^{11}$  para  $t = 3$  y  $n_0 = 7$  en (16.1.8), el cual es

$$e^{-72t} \left( \frac{(7)(8)(9)(10)}{(1)(2)(3)(4)} \right) (1 - e^{-2t})^4 = 0.00249. \quad (16.1.9)$$

Exponga los supuestos en que se basa este resultado. Al menos uno de éstos no intervendrá en el modelo de la próxima sección.

## 16.2. UN MODELO DE NACIMIENTO, MUERTE E INMIGRACION

Nos acercamos más a la realidad demográfica incluyendo en nuestro modelo nacimientos, muertes e inmigración (Kendall, 1949, pág. 241), aunque aún sin reconocer sexo o edad. La tasa de natalidad es  $\lambda$ , la de mortalidad es  $\mu$  y la de inmigración es  $\nu$ . Consideramos a  $\lambda$  y  $\mu$  como probabilidades que se aplican a los individuos presentes. Por otra parte  $\nu$  es un número absoluto fijo que no está relacionado con la población obtenida. (Cualquier componente de inmigración que sea proporcional a la población simplemente se puede incorporar a  $\lambda$ .)

De nuevo partimos considerando el período  $(0, t + dt)$  dividido en  $(0, t)$  y  $(t, t + dt)$ . La probabilidad de que haya  $n$  individuos en la población en el momento  $t + dt$  es igual a la probabilidad de que

- haya  $n$  individuos en el momento  $t$  y nada suceda entre  $t$  y  $t + dt$ ,
- haya  $n - 1$  individuos en el momento  $t$  y se agregue 1 por nacimiento o inmigración en  $(t, t + dt)$ ,
- haya  $n + 1$  individuos en el tiempo  $t$  y muera 1 en  $(t, t + dt)$ .

Estos tres casos mutuamente excluyentes constituyen todas las posibilidades puesto que nuevamente estamos suponiendo que  $dt$  es suficientemente pequeño como para no admitir dos eventos. El proceso puede comenzar con cero individuos (la componente de inmigración hace esto admisible). Una vez más lo que sucede a cada persona cuando el proceso se efectúa se supone independiente de lo que sucede a cada una de las demás personas, y las probabilidades se consideran constantes respecto de los individuos y del tiempo.

La expresión simbólica de las probabilidades en a), b) y c) nos da

$$p_n(t + dt) = p_n(t)(1 - (n\lambda + n\mu + \nu) dt) + p_{n-1}(t)((n-1)\lambda + \nu) dt + p_{n+1}(t)(n+1)\mu dt. \quad (16.2.1)$$

Pasando  $p_n(t)$  del segundo al primer miembro, dividiendo por  $dt$  y tomando límite cuando  $dt$  tiende a cero,

$$p'_n(t) = -(n\lambda + n\mu + \nu)p_n(t) + [(n-1)\lambda + \nu]p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.2.2)$$

El lector puede verificar que si  $p_n(t)$  se define como 0 para  $n < 0$ , entonces (16.2.2) se aplica para todos los  $n$  no negativos, incluyendo  $n = 0$ .

El conjunto infinito de ecuaciones diferenciales en diferencias (16.2.2) se puede convertir en una sola ecuación en la función generatriz de probabilidades. Multiplicando el primer elemento de este conjunto de ecuaciones por 1, el segundo por  $z$ , el tercero por  $z^2$ , etc., resulta en el conjunto

$$p'_n(t)z^n = -(\lambda + \mu)p_n(t)z(z^n)' - \nu p_n(t)z^n + \lambda z^2 p_{n-1}(t)(z^{n-1})' + \mu p_{n+1}(t)(z^{n+1})' + \nu p_{n-1}(t)z^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16.2.3)$$

donde las "primas" indican diferenciación con respecto a  $t$  en el primer miembro y con respecto a  $z$  en el segundo. [El lector puede verificar (16.2.3) observando, por ejemplo, que el primer término del segundo miembro es  $-(n\lambda + n\mu)p_n(t)z^n$ , y así está de acuerdo con (16.2.2).] Sumando (16.2.3) para todos los  $n$ , obtenemos una ecuación en la función generatriz  $\phi(z, t)$  de (16.1.4):

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = (\lambda z - \mu)(z - 1) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} + \nu(z - 1)\phi(z, t). \quad (16.2.4)$$

De allí que tenemos una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales con un término debido a inmigración que no lleva derivada. El par de ecuaciones auxiliares (Wilson, 1958, pág. 267) a partir de las cuales podemos determinar la forma general de la solución de (16.2.4) es

$$-\frac{dt}{1} = \frac{dz}{(\lambda z - \mu)(z - 1)} = -\frac{d\phi}{\nu(z - 1)\phi}.$$

Resolviendo la primera,

$$-dt = \frac{dz}{(\lambda z - \mu)(z - 1)},$$

el lector obtendrá

$$\left(\frac{\lambda z - \mu}{z - 1}\right) e^{-(\lambda - \mu)t} = C, \quad (16.2.5)$$

donde  $C$  es una constante. Resolviendo enseguida

$$\frac{dz}{(\lambda z - \mu)(z - 1)} = -\frac{d\phi}{\nu(z - 1)\phi},$$

se encontrará

$$K = (\lambda z - \mu)\phi^{\lambda/\nu}, \quad (16.2.6)$$

donde  $K$  es una constante. De (16.2.5) y (16.2.6) la solución general es  $K = \Phi(C)$ , o

$$(\lambda z - \mu)\phi^{\lambda/\nu} = \Phi \left[ \left( \frac{\lambda z - \mu}{z - 1} \right) e^{-(\lambda - \mu)t} \right], \quad (16.2.7)$$

que satisface (16.2.4) para cualquier  $\Phi$ , como se puede verificar por diferenciación.

La ecuación (16.2.7) relaciona nuestra función generatriz  $\phi$  con las dos variables  $t$  y  $z$ , prescindiendo de la naturaleza de la función arbitraria  $\Phi$  y sujeta sólo a algunas restricciones muy generales, como por ejemplo, que  $\Phi$  sea diferenciable. Al igual que la constante arbitraria en una ecuación diferencial común  $\Phi$  nos permite ajustarnos a una condición de límite. En este caso podemos llegar a algo específico, usando la condición inicial que consiste en partir con una población cero en un tiempo cero, esto es, con  $\phi(z, 0) = 1$ . Haciendo  $t = 0$  y  $\phi = 1$ , (16.2.7) se convierte en

$$(\lambda z - \mu) = \Phi \left( \frac{\lambda z - \mu}{z - 1} \right). \quad (16.2.8)$$

Escribiendo  $Z$  en lugar de  $[(\lambda z - \mu)/(z - 1)]$ , que es el argumento de  $\Phi$  en (16.2.8) tenemos  $z$  expresado en términos de  $Z$ :

$$z = \frac{Z - \mu}{Z - \lambda}.$$

Sustituyendo este valor de  $z$  en (16.2.8) da

$$\lambda \left( \frac{Z - \mu}{Z - \lambda} \right) - \mu = \Phi(Z),$$

o

$$\Phi(Z) = \frac{Z(\lambda - \mu)}{Z - \lambda}, \quad (16.2.9)$$

como la forma de la función  $\Phi$ .

Para el resultado final sólo necesitamos usar la función especificada en (16.2.9) con el argumento de  $\Phi$  en (16.2.7) y esto altera (16.2.7) a la forma específica

$$(\lambda z - \mu)\phi^{\lambda/\nu} = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda z - \mu)}{\lambda z - \mu - \lambda(z - 1)e^{(\lambda - \mu)t}},$$

de donde resulta que

$$\phi = \left( \frac{\lambda - \mu}{\lambda z - \mu - \lambda(z - 1)e^{(\lambda - \mu)t}} \right)^{\nu/\lambda}, \quad (16.2.10)$$



que se puede expresar en potencias ascendentes de  $z$  escribiendo

$$\phi(z, t) = \left( \frac{\lambda - \mu e^{\lambda t}}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \right)^{\nu/\lambda} \left( 1 - z \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \right)^{-\nu/\lambda} \quad (16.2.11)$$

y desarrollando el último factor por el teorema del binomio. La probabilidad de que haya cero personas en el momento  $t$  es el término absoluto en el desarrollo de (16.2.11):

$$\left( \frac{\lambda - \mu e^{\lambda t}}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \right)^{\nu/\lambda}. \quad (16.2.12)$$

El lector puede escribir la probabilidad de que en el momento  $t$  haya exactamente una persona y determinar el número esperado de personas en el momento  $t$ .

En el presente modelo se permite la inmigración, de manera que no puede haber extinción. La población puede hacerse cero, pero sigue teniendo la probabilidad  $\nu dt$  de que llegue un inmigrante en cada intervalo  $dt$ , o la probabilidad  $1 - \nu dt$  de no recibir inmigrantes. La probabilidad de que aparezca al menos un inmigrante en  $t$  años es  $1 - e^{-\nu t}$ , que tiende a 1, o sea certeza, cuando se hace grande. En el lenguaje del camino aleatorio, "extinción" no es aquí una barrera absorbente, como sucede en el proceso de nacimiento y muerte. Aprovechamos esta ventaja usando una condición inicial consistente en cero personas.

No podemos proceder de manera similar, poniendo simplemente  $\nu = 0$  en (16.2.11) para establecer la función generatriz para el proceso de nacimiento y muerte sin inmigración. Es necesario volver a (16.2.4) y observar que se reduce a

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = (\lambda z - \mu)(z - 1) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z}.$$

El conjunto de ecuaciones auxiliares es ahora

$$-dt = \frac{dz}{(\lambda z - \mu)(z - 1)},$$

que se resuelve como antes para dar (16.2.5). Siguiendo una versión más simple del argumento que lleva a (16.2.11), el lector puede verificar que si parte con una población de un individuo, o sea, con  $\phi(z, 0) = z$ , llega a la función generatriz

$$\phi(z, t) = \left( \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1) - z(\mu e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \right) \left( 1 - z \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \right)^{-1}. \quad (16.2.13)$$

El puede desarrollar (16.2.13) en potencias ascendentes de  $z$  para establecer en este modelo levemente más realista la probabilidad de que siete niñas recién nacidas tengan 11 descendientes al cabo de tres generaciones, dado que ahora la tasa neta de reproducción de 1,633 está formada de una tasa bruta de reproducción  $\lambda = \ln 1,690$  menos una probabilidad de morir  $\mu = \ln(1,690/1,633) = 0,0343$ . Compare esto con (16.1.9).

Diferenciando dos veces (16.2.13) e igualando  $z$  a uno, determinamos los dos primeros momentos factoriales  $\mathcal{E}n$  y  $\mathcal{E}n(n-1)$ , de los sobrevivientes del proceso de nacimiento y muerte en el momento  $t$ . A partir de estos momentos obtenemos la varianza como

$$\mathcal{E}(n)(n-1) + \mathcal{E}n - (\mathcal{E}n)^2 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1), \quad (16.2.13a)$$

lo cual junto con la media

$$\mathcal{E}n = e^{(\lambda-\mu)t}, \quad (16.2.13b)$$

constituye una descripción aproximada del proceso.

Para una diferencia dada entre  $\lambda$  y  $\mu$ , el valor esperado de la población en el momento  $t$  no se verá afectado por el hecho de que  $\lambda$  y  $\mu$  sean grandes o pequeños, pero la varianza resulta muy afectada. Supongamos que tanto a  $\lambda$  como a  $\mu$  le sumamos un número positivo  $k$ . Entonces los factores exponenciales de (16.2.13a) y (16.2.13b) no cambian, pero el lector puede demostrar que la varianza es  $1 + 2k/(\lambda + \mu)$  veces más grande. Si una población inicial dada está creciendo a razón de  $\frac{1}{2}$  por ciento por año con  $\lambda = 0,045$  y  $\mu = 0,040$  tendrá en el momento  $t$  una varianza 3,4 veces mayor que si hubiera crecido con  $\lambda = 0,015$  y  $\mu = 0,010$ .

### Extinción

La probabilidad de extinción se obtiene haciendo  $z = 0$  en (16.2.13) y permitiendo a  $t$  crecer indefinidamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(0, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}. \quad (16.2.14)$$

Este límite es cualitativamente diferente según que  $\lambda - \mu$  sea positivo o negativo. Para  $\lambda$  mayor que  $\mu$ , la cantidad  $e^{(\lambda-\mu)t}$  crece indefinidamente, y los demás términos en el numerador y denominador pueden despreciarse; el límite es  $\mu/\lambda$ . Para  $\lambda$  menor que  $\mu$  los exponentes se hacen insignificantes, y en el límite la razón es uno. De allí que cuando la tasa de natalidad es mayor que la de mortalidad, la probabilidad de extinción es la razón de la tasa de mortalidad a la de natalidad; cuando la tasa de natalidad es menor que la de mortalidad, la extinción es segura.

Cuando el proceso parte con  $n_0$  personas en lugar de una, en (16.2.13) la función generatriz (y por lo tanto su término absoluto) está elevada a la  $n_0$  éxima potencia. Alternativamente y de manera más directa, si hay  $n_0$  individuos y cada uno tiene una probabilidad  $\mu/\lambda$  de que su línea desaparezca, entonces la probabilidad de que los  $n_0$  individuos desaparezcan es el producto de las probabilidades separadas,  $(\mu/\lambda)^{n_0}$ , aun suponiendo que las líneas se desarrollan independientemente y se considera un solo sexo.

Es de especial interés el caso  $\lambda = \mu$ , que corresponde al modelo determinístico que en el capítulo I denominamos "estacionario". Nuevamente debemos modifi-

car el argumento para averiguar la probabilidad de extinción porque (16.2.14) queda indeterminada cuando  $\lambda = \mu$ . El lector puede demostrar que cuando  $\lambda$  se aproxima a  $\mu$  por defecto en (16.2.14), el límite doble  $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \{ \lim_{t \rightarrow \infty} [\phi(0, t)] \}$  es igual a uno. Podrá también obtener el mismo resultado haciendo que  $\lambda$  se acerque a  $\mu$  por exceso.

De este modo la extinción es segura en una población estacionaria que consiste inicialmente de una persona. Se puede también demostrar por un proceso límite similar que la extinción es segura en una población que consiste inicialmente de  $n_0$  individuos, no importando cuán grande sea  $n_0$ , siempre que esté dado de antemano. Nos hallamos ante la paradoja de que una población llamada estacionaria en el modelo determinístico, con igual tasa bruta de natalidad que de mortalidad, tiene una probabilidad de extinción igual a uno. La denominada población estacionaria desaparecerá con certeza, no importando cuán grande sea el principio, así que nos trasladamos de una forma de análisis determinística a una probabilística.

Sin embargo, esto sólo es verdad cuando se aplica la misma condición (igual probabilidad de dar lugar a un nacimiento y de morir) a todos los individuos. Si existe algún subgrupo de los  $n_0$  con  $\lambda - \mu$  positiva, entonces éste tendrá una probabilidad de extinción menor que uno. La condición de homogeneidad es esencial para el argumento del párrafo precedente.

Aunque la probabilidad de extinción es uno, aun para una pequeña población inicial puede transcurrir una cantidad considerable de tiempo antes de que ocurra la extinción. Frank Oechsli calculó 50 réplicas de un caso en el que la población inicial era 1, y tanto  $\lambda$  como  $\mu$  eran 0,2. Esto se puede considerar como una población que tiene inicialmente una persona vista en ciclos de 10 años, en la cual tanto la tasa bruta de natalidad como la de mortalidad fueron de 20 por mil por año. Correr el programa para 100 ciclos de 10 años es equivalente a correrlo para 1 000 años. Traducidos a años, los tiempos de extinción resultaron como sigue:

Período de extinción (años)	Número de casos
-10	11
10-19	8
20-29	5
30-39	2
40-49	3
	<hr/> 29

Además, había casos de extinción después de 60, 60, 70, 80, 80, 90, 90, 130, 150, 180, 180, 210, 220, 230, 410, 570, 600, 740 y 960 años. En dos casos, no se llegó a la extinción al cabo de 1 000 años y en ese momento las dos poblaciones contenían 10 y 17 individuos. Alguno de estos casos podrían continuar durante miles de años más, aun partiendo con el mínimo valor que es de un individuo. En realidad, el tiempo esperado de extinción es  $(-\mu/\lambda) \ln(1 - \lambda/\mu)$ , que es infinito para  $\lambda = \mu$ .

Sobre la base de las tasas específicas de fecundidad y mortalidad femeninas por edad de los Estados Unidos en 1965, las tasas intrínsecas de natalidad y mortalidad son  $1000\lambda = 21,29$  y  $1000\mu = 8,64$  y de ahí se deduce que la probabilidad  $\mu/\lambda$  de que la línea femenina descendente de una mujer dada desaparezca es 0,41. Esta cantidad varía considerablemente con la variación en las tasas intrínsecas de natalidad y mortalidad. En 1959-61 sus valores eran, respectivamente,  $1000\lambda = 27,65$  y  $1000\mu = 6,52$ , y en base a éstos la probabilidad de extinción de una línea femenina baja a 0,24. Para 1939-41,  $1000\lambda = 15,78$  y  $1000\mu = 14,84$ , y la probabilidad de extinción  $\mu/\lambda$  sube a 0,94 (se han usado nacimientos ajustados oficialmente para todos los periodos). El proceso de ramificación del capítulo 18 es una forma más precisa de determinar la probabilidad de extinción, pero requiere datos acerca de la probabilidad de que una mujer tenga 0, 1, 2, ... hijas. [¿Qué conjunto de dichas probabilidades supone implícitamente el presente proceso de nacimiento y muerte?]

### 16.3. EL PROBLEMA DE LOS SEXOS TRATADO ESTOCASTICAMENTE

El análisis de las probabilidades en el problema de los sexos, tratado determinísticamente en el capítulo 13, es una extensión de las ideas anteriores. Discutiremos la trayectoria de una población (en el sentido de una distribución de probabilidades en cada momento de tiempo) que parte con un número dado de hombres y mujeres, suponiendo tasas específicas de fecundidad y mortalidad por sexo, y algún tipo de dominancia, es decir, una regla para atribuir los nacimientos a los padres. En nuestra exposición, atribuiremos los nacimientos sólo a las mujeres; la restricción no es esencial, pero sería tedioso removerla. Toda la literatura original sobre este tema parece estar contenida en unos pocos párrafos al final de un artículo de Leo A. Goodman (1953b), en el cual nos hemos basado para lo que sigue. Veremos más adelante cómo este resultado se ajusta a un procedimiento más general debido a John H. Pollard (1966).

El problema es encontrar la distribución de probabilidades de los números de hombres y mujeres en el momento  $t$  en una población que comienza con  $m_0$  hombres y  $f_0$  mujeres y en la cual las tasas brutas de mortalidad masculina y femenina son  $d_m$  y  $d_f$  y las tasas brutas de natalidad masculina y femenina son  $b_m$  y  $b_f$ . Si el número de mujeres es  $f$ , la probabilidad de que ocurra un nacimiento masculino en un tiempo  $dt$  será  $fb_m dt$ , y de que ocurra un nacimiento femenino es  $fb_f dt$ . Queda mejor si hacemos  $b_m$  igual a  $b_f$  multiplicada por la razón de masculinidad al nacimiento.

Para el momento  $t$  buscamos las probabilidades de todas las combinaciones de  $m$  y  $f$ , las poblaciones de hombres y mujeres simbolizando la probabilidad de extinción en el momento  $t$  por  $p_{0,0}(t)$ , la probabilidad de cero hombres y una mujer en el momento  $t$  por  $p_{0,1}(t)$ , etc. (El primer subíndice de  $p$  quedará siempre para representar hombres y el segundo para designar mujeres). La probabilidad  $p_{m,f}(t+dt)$  de que haya una población de  $m$  hombres y  $f$  mujeres al cabo del período  $(0, t+dt)$  debe ser igual a la suma de las probabilidades para los cinco casos mutuamente excluyentes:

- a) que en el momento  $t$  haya  $m$  hombres y  $f$  mujeres y no ocurran nacimientos ni muertes en  $(t, t+dt)$ ,

- b) que en el momento  $t$  haya  $m - 1$  hombres y  $f$  mujeres y que haya un nacimiento masculino en  $(t, t + dt)$ ,
- c) que en el momento  $t$  haya  $m$  hombres y  $f - 1$  mujeres y que haya un nacimiento femenino en  $(t, t + dt)$ ,
- d) que en el momento  $t$  haya  $m + 1$  hombres y  $f$  mujeres y que muera un hombre en  $(t, t + dt)$ ,
- e) que en el momento  $t$  haya  $m$  hombres y  $f + 1$  mujeres y muera una mujer en  $(t, t + dt)$ .

Expresado en los símbolos definidos arriba esto significa que

$$p_{m,f}(t + dt) = \{1 - (md_m + fd_f + fb_m + fb_f) dt\} p_{m,f}(t) \quad (16.3.1a)$$

$$+ b_m f p_{m-1,f}(t) dt \quad (16.3.1b)$$

$$+ b_f (f - 1) p_{m,f-1}(t) dt \quad (16.3.1c)$$

$$+ d_m (m + 1) p_{m+1,f}(t) dt \quad (16.3.1d)$$

$$+ d_f (f + 1) p_{m,f+1}(t) dt \quad (16.3.1e)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, f = 0, 1, 2, \dots$ , donde las cinco líneas corresponden a las cinco posibilidades que hemos designado con las letras de la a) a la e). Restando  $p_{m,f}(t)$  de ambos miembros, dividiendo por  $dt$ , y tomando límite cuando  $dt$  tiende a cero, (16.3.1) se convierte en el conjunto doblemente infinito de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes:

$$\frac{dp_{m,f}(t)}{dt} = -(md_m + fd_f + fb_m + fb_f) p_{m,f}(t) \quad (16.3.2a)$$

$$+ b_m f p_{m-1,f}(t) \quad (16.3.2b)$$

$$+ b_f (f - 1) p_{m,f-1}(t) \quad (16.3.2c)$$

$$+ d_m (m + 1) p_{m+1,f}(t) \quad (16.3.2d)$$

$$+ d_f (f + 1) p_{m,f+1}(t) \quad (16.3.2e)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, f = 0, 1, 2, \dots$ . Para no tener que pensar en lo que sucede a (16.3.2) para  $m$  y  $f$  pequeños, definimos  $p_{m,f}(t)$  igual a cero para todo  $m$  o  $f$  negativo.

Igual que antes, creamos una función generatriz de probabilidades. El elemento típico,  $p_{m,f}(t)$ , del conjunto doblemente infinito, se multiplica por  $z_1^m z_2^f$ , donde nuevamente los números  $z_1$  y  $z_2$  no tienen otro significado fuera del hecho de que la probabilidad de  $m$  hombres y  $f$  mujeres está asociada con el coeficiente de  $z_1^m z_2^f$ . La función  $\phi(z_1, z_2, t)$  se define por

$$\phi(z_1, z_2, t) = \sum_{m,f=0}^{\infty} p_{m,f}(t) z_1^m z_2^f. \quad (16.3.3)$$

Con la ayuda de esta función, podremos condensar el conjunto doblemente infinito de ecuaciones (16.3.2), en una sola ecuación. La multiplicación de (16.3.2) por  $z_1^m z_2^f$  da, después de sumar para todo  $m$  y  $f$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -d_m z_1 \frac{\partial \phi}{\partial z_1} - (d_f + b_m + b_f) z_2 \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \quad (\text{a})$$

$$+ b_m z_1 z_2 \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \quad (\text{b})$$

$$+ b_f z_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \quad (\text{c})$$

$$+ d_m \frac{\partial \phi}{\partial z_1} \quad (\text{d})$$

$$+ d_f \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \quad (\text{e})$$

y juntando los coeficientes de  $\partial \phi(z_1, z_2, t)/\partial z_1$ , y  $\partial \phi(z_1, z_2, t)/\partial z_2$  en el segundo miembro, tenemos una ecuación relativamente simple que describe todo el proceso:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = d_m (1 - z_1) \frac{\partial \phi}{\partial z_1} + \{ -(b_m + b_f + d_f) z_2 + b_m z_1 z_2 + b_f z_1^2 + d_f \} \frac{\partial \phi}{\partial z_2}. \quad (16.3.4)$$

La solución directa de (16.3.4) por el método ejemplificado en (16.2.3) conduce a las ecuaciones diferenciales ordinarias auxiliares cuyas variables no se pueden separar. Puesto que no podemos resolver para  $\phi(z_1, z_2, t)$ , dirigimos nuestra atención a las relaciones entre los momentos.

Los momentos se determinan diferenciando (16.3.4), que supondremos aquí posible de diferenciación. La primera derivada de (16.3.4) con respecto a  $z_1$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z_1} &= -d_m \frac{\partial \phi}{\partial z_1} + d_m (1 - z_1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_1^2} + b_m z_2 \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \\ &+ \{ -(b_m + b_f + d_f) z_2 + b_m z_1 z_2 + b_f z_1^2 + d_f \} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_1 \partial z_2}. \end{aligned}$$

Esto se simplifica considerablemente cuando hacemos  $z_1 = z_2 = 1$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z_1} = -d_m \frac{\partial \phi}{\partial z_1} + b_m \frac{\partial \phi}{\partial z_2}. \quad (16.3.5)$$

Ahora  $\partial \phi / \partial z_1$ , evaluada en  $z_1 = 1, z_2 = 1$ , es  $\mathcal{E}^m$ , el número esperado o primer momento de hombres en el momento  $t$ ; el primer miembro de (16.3.5) es la derivada con respecto al tiempo del primer momento para los hombres; en consecuencia, (16.3.5) es lo mismo que

$$d(\mathcal{E}m)/dt = -d_m \mathcal{E}m + b_m \mathcal{E}f. \quad (16.3.6)$$

De manera exactamente igual, diferenciando y luego haciendo  $z_1 = z_2 = 1$ , obtenemos las otras cuatro ecuaciones en los momentos respecto de cero (después de convertir los momentos factoriales a momentos ordinarios):

$$d(\mathcal{E}f)/dt = (b_f - d_f) \mathcal{E}f, \quad (16.3.7)$$

$$d(\mathcal{E}m^2)/dt = -2d_m \mathcal{E}m^2 + 2b_m \mathcal{E}mf + d_m \mathcal{E}m + b_m \mathcal{E}f, \quad (16.3.8)$$

$$d(\mathcal{E}mf)/dt = (b_f - d_f - d_m) \mathcal{E}mf + b_m \mathcal{E}f^2, \quad (16.3.9)$$

$$d(\mathcal{E}f^2)/dt = 2(b_f - d_f) \mathcal{E}f^2 + (b_f + d_f) \mathcal{E}f. \quad (16.3.10)$$

El conjunto de ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10) constituyen una consideración determinística de un proceso estocástico. Para ver cómo las medias y las varianzas cambian con el tiempo, se ha calculado la trayectoria, usando el teorema de Taylor hasta la segunda derivada como en la sección 13.2, desarrollando ahora para intervalos de  $h = 0,1$  de año durante 250 años. Para Bélgica, 1960, las constantes son:

$$1000b_m = 18.175; \quad 1000b_f = 17.309; \quad 1000d_m = 12.190; \quad 1000d_f = 10.930.$$

El cuadro 16.3 da un extracto de lo que resulta.

Se pueden advertir distintas propiedades del proceso a medida que  $t$  se acerca a 250 años:

- a)  $\mathcal{E}f$  crece geoméricamente; los demás cuatro momentos crecen algo menos rápido que geoméricamente;
- b) La razón de crecimiento para 0,1 de año es 1,00064 para cada  $\mathcal{E}m$  y  $\mathcal{E}f$ , correspondiendo a una tasa exponencial de 0,0064 sobre una base anual. Estos están de acuerdo con una tasa estable final sugerida por la entrada de:

$$b_f - d_f = 0.006379;$$

- c) Los 3 segundos momentos están creciendo a más del doble de la tasa de los primeros momentos, de modo que los segundos momentos están tendiendo aproximadamente a múltiplos de los cuadrados de los primeros momentos;
- d) El coeficiente de correlación entre  $m$  y  $f$  parece tender a la unidad.

Los 250 años de esta tabla no constituyen un período suficientemente largo como para mostrar exactamente estas relaciones. Se hace innecesario, sin embargo, hacer especulaciones adicionales, puesto que las ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10) se pueden resolver explícitamente. Ellas constituyen un conjunto lineal homogéneo cuyas incógnitas son los cinco primeros y segundos momentos, y son tratadas con relativa facilidad debido a la forma que toman sus coeficientes. Introduciendo la solución de ensayo  $a_i e^{r^i t}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , para las cinco incógnitas en las ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10) y luego dividiendo por  $e^{r^i t}$ , se tienen

## CUADRO 16.3

TRAYECTORIA DE LOS PRIMEROS Y SEGUNDOS MOMENTOS EN UN PROCESO DE DOS SEXOS, PARTIENDO CON UNA MUJER Y DESARROLLANDO A PARTIR DE (16.3.6) ... (16.3.10) EN INTERVALOS DE 0.1 DE AÑO USANDO EL TEOREMA DE TAYLOR HASTA LAS SEGUNDAS DERIVADAS; DATOS DE BELGICA, 1960\*

Tiempo en años	$E(m)$	$E(f)$	VAR(m)	COVAR (m,f)	VAR(f)	r de Pearson
0.0	0	1	0	0	0	0
5.0	0.0913	1.0321	0.0917	0.0067	0.1477	0.0573
10.0	0.1801	1.0652	0.1832	0.0273	0.3099	0.1145
20.0	0.3513	1.1347	0.3758	0.1142	0.6817	0.2257
30.0	0.5153	1.2088	0.5967	0.2695	1.1252	0.3289
40.0	0.6739	1.2876	0.8638	0.5029	1.6514	0.4211
50.0	0.8284	1.3716	1.1953	0.8262	2.2729	0.5013
60.0	0.9804	1.4611	1.6093	1.2526	3.0041	0.5697
70.0	1.1310	1.5564	2.1253	1.7974	3.8616	0.6274
80.0	1.2815	1.6580	2.7640	2.4782	4.8642	0.6759
90.0	1.4331	1.7661	3.5479	3.3153	6.0334	0.7166
100.0	1.5867	1.8813	4.5024	4.3320	7.3935	0.7508
125.0	1.9865	2.2034	7.8271	7.8433	11.8228	0.8153
150.0	2.4212	2.5805	12.9494	13.1860	18.1860	0.8593
175.0	2.9053	3.0222	20.6188	21.1034	27.2509	0.8903
200.0	3.4540	3.5395	31.8707	32.6294	40.0795	0.9130
225.0	4.0831	4.1453	48.1382	49.1986	58.1378	0.9300
249.9	4.8068	4.8518	71.2940	72.6860	83.3296	0.9430
250.0	4.8099	4.8549	71.4043	72.7976	83.4486	0.9431

\* Programado por Hardeo Sahai.

5 ecuaciones lineales homogéneas en  $r$ , y la condición para consistencia entre éstas es la ecuación en determinantes obtenida eliminando los  $a_i$ :

$$\begin{vmatrix} -r - d_m & b_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r + b_f - d_f & 0 & 0 & 0 \\ d_m & b_m & -r - 2d_m & 2b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r + b_f - d_f - d_m & b_m \\ 0 & b_f + d_f & 0 & 0 & -r + 2(b_f - d_f) \end{vmatrix} = 0. \quad (16.3.11)$$



Sin hacer cálculos se puede ver que las cinco raíces de (16.3.11) son  $-d_m$ ;  $b_f - d_f$ ;  $-2d_m$ ;  $b_f - d_f - d_m$ ;  $2(b_f - d_f)$ . La solución general para los cinco valores esperados que son las incógnitas en las ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10) está formada por la suma de sus  $a_{ij}e^{r_j t}$  para los distintos valores de  $r_j$  que satisfacen (16.3.11):

$$a_{i1}e^{-d_m t} + a_{i2}e^{(b_f - d_f)t} + a_{i3}e^{-2d_m t} + a_{i4}e^{(b_f - d_f - d_m)t} + a_{i5}e^{2(b_f - d_f)t}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (16.3.12)$$

y el conjunto de soluciones incluiría 25 constantes arbitrarias. Sin embargo, si se agrupan las ecuaciones se demuestra que 13 de las constantes deben ser cero. Podemos resolver para  $\mathcal{E}f$  por sí mismo, de modo que podamos tener una sola constante; podemos resolver para  $\mathcal{E}f$  y  $\mathcal{E}m$  sin considerar segundos momentos, de manera que  $\mathcal{E}m$  pueda tener sólo dos constantes; podemos resolver para  $\mathcal{E}f$  y  $\mathcal{E}f(f-1)$  sin considerar hombres, de manera que  $\mathcal{E}f(f-1)$  pueda tener sólo dos constantes, etc. En resumen, el conjunto de ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10) es descomponible o reducible en un sentido sugerido por las matrices no negativas de (2.1.12) y de la sección 3.2, aunque la matriz que estamos tratando ahora difiere de esos primeros casos por el hecho de que contiene elementos negativos.

Los  $a_{ij}$  dependen de las condiciones iniciales y en nuestra primera aproximación al problema tomaremos como condición inicial una mujer. Es bastante fácil establecer los diversos momentos cuando  $m_0 = 0$  y  $f_0 = 1$ : son todos cero en  $t = 0$ , excepto  $\mathcal{E}f = 1$ .

Debido a que el conjunto de ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10) es descomponible, podemos prescindir de métodos generales de solución que están disponibles para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (Gantmacher, 1959, Vol. II, pág. 116; Friedman, 1956, pág. 120). Si la solución es desarrollada en la sucesión:

- 1) (16.3.7) para  $\mathcal{E}f$ ;
- 2) (16.3.6) para  $\mathcal{E}m$  y (16.3.10) para  $\mathcal{E}f^2$ , en uno u otro orden;
- 3) (16.3.9) para  $\mathcal{E}mf$ ;
- 4) (16.3.8) para  $\mathcal{E}m^2$ ,

(16.3.13)

donde la única opción en el ordenamiento es entre  $\mathcal{E}m$  y  $\mathcal{E}f^2$ , entonces, se puede seguir el método simple que produjo (13.2.5). En realidad, ya hemos resuelto para  $\mathcal{E}f$  y  $\mathcal{E}m$  en el capítulo 13, e introduciendo el resultado de cada solución sucesiva en la siguiente ecuación de la sucesión (16.3.13) no requiere un nuevo principio y proporciona todos los  $a_{ij}$  de (16.3.12).

Sin embargo, los valores de los  $a$  no dan completamente las medias y varianzas que buscamos. Queremos  $\text{Var}(m) = \mathcal{E}(m - \mathcal{E}m)^2 = \mathcal{E}m^2 - (\mathcal{E}m)^2$ ,  $\mathcal{E}(f - \mathcal{E}f)^2 = \mathcal{E}f^2 - (\mathcal{E}f)^2$ , y  $\mathcal{E}(m - \mathcal{E}m)(f - \mathcal{E}f) = \mathcal{E}mf - \mathcal{E}m\mathcal{E}f$ , y los resultados que surgen finalmente después de una aplicación directa aunque extensa del álgebra son:

$$\mathcal{E}m = \frac{b_m}{d_m + b_f - d_f} (e^{(b_f - d_f)t} - e^{-d_m t}); \quad \mathcal{E}f = e^{(b_f - d_f)t};$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(m) &= \frac{(b_f + d_f)b_m^2}{(d_m + b_f - d_f)^2} \left( \frac{e^{2(b_f - d_f)t}}{b_f - d_f} - \frac{e^{-2d_m t}}{2d_m + b_f - d_f} + \frac{2e^{(b_f - d_f - d_m)t}}{d_m} \right) \\ &\quad + b_m e^{(b_f - d_f)t} \left( \frac{1}{d_m + b_f - d_f} - \frac{2b_m(b_f + d_f)}{d_m(b_f - d_f)(2d_m + b_f - d_f)} \right) \\ &\quad - \frac{b_m e^{-d_m t}}{d_m + b_f - d_f}; \\ \text{Covar}(m, f) &= \frac{b_m(b_f + d_f)}{d_m + b_f - d_f} \left( \frac{e^{2(b_f - d_f)t}}{b_f - d_f} + \frac{e^{(b_f - d_f - d_m)t}}{d_m} \right) - \frac{b_m(b_f + d_f)e^{(b_f - d_f)t}}{d_m(b_f - d_f)}; \\ \text{Var}(f) &= \frac{b_f + d_f}{b_f - d_f} e^{(b_f - d_f)t} (e^{(b_f - d_f)t} - 1). \end{aligned} \quad (16.3.14)$$

Verifique a partir de (16.3.14) las propiedades asintóticas a) a d) sugeridas arriba por el cuadro 16.3 y la trayectoria calculada de las ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10).

Hasta aquí nuestro trabajo se ha basado en la condición inicial de una mujer. Para partir con  $f_0$  mujeres en lugar de 1, no se requiere más ajuste de los resultados anteriores que multiplicar las medias, varianzas y covarianzas por  $f_0$ .

Partir con  $m_0$  hombres y cero mujeres equivale a un proceso de muertes puro, de acuerdo a nuestro supuesto de dominancia femenina. El lector puede demostrar que en el momento  $t$  la población masculina esperada será  $m_0 e^{-d_m t}$  y la varianza del número de hombres será  $m_0(e^{-d_m t} - e^{-2d_m t})$ .

Estamos ahora listos para escribir los cinco momentos, en el instante  $t$ , cuando el proceso parte con  $m_0$  hombres y  $f_0$  mujeres. Recurriendo al supuesto de que las distintas líneas de descendencia de la población se desarrollan independientemente, sumamos los momentos para una condición inicial de  $m_0$  hombres y cero mujeres con los momentos para una condición inicial de cero hombres y  $f_0$  mujeres, para obtener para el instante  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}m &= m_0 e^{-d_m t} + f_0 \frac{b_m}{d_m + b_f - d_f} (e^{(b_f - d_f)t} - e^{-d_m t}), \\ \mathcal{E}f &= f_0 e^{(b_f - d_f)t}. \end{aligned} \quad (16.3.15)$$

(Las ecuaciones idénticas (13.2.5) y (13.2.2) fueron encontradas para el problema determinístico correspondiente). La varianza de los hombres es  $f_0$  multiplicando por  $\text{Var}(m)$  en (16.3.14) más  $m_0(e^{-d_m t} - e^{-2d_m t})$ . La varianza de las mujeres y la covarianza son simplemente  $\text{Var}(f)$  y  $\text{Covar}(m, f)$  de (16.3.14) multiplicado por  $f_0$ .

### Simulación para procesos complejos

Joginder Kumar ha simulado (cuadro 16.4) el proceso de los dos sexos con datos con dominancia femenina derivados de Bélgica, 1960, para los cuales las tasas intrínsecas son como se muestra en el ejemplo precedente. El aplicó estas probabilidades a cada individuo en cada quinquenio durante 50 años en ciclos de cinco años, y replicó 100 veces, tomando en cada una de ellas una población

CUADRO 16.4

MOMENTOS DEL PROCESO DE DOS SEXOS DESPUES DE 50 AÑOS SEGUN (16.3.14)  
Y LA SIMULACION; POBLACION INICIAL: 100 DE CADA SEXO;  
100 REPLICAS; DATOS DE BELGICA, 1960\*

	Esperado de (16.3.14) sin edad	SIMULADO	
		Sin edad	Con edad
$\xi(M(50))$	137.20	132.51	141.88
$\xi(F(50))$	137.16	136.45	144.52
VAR(M(50))	144.34	133.97	99.79
COVAR(M, F)	82.62	51.80	31.41
VAR(F(50))	227.29	235.03	214.57
PEARSON $r$	0.456	0.292	0.215

\* Programado por Joginder Kumar.

inicial de 100 hombres y 100 mujeres. El experimento dio para la población por sexo al cabo de 50 años las 100 réplicas resumidas en la segunda columna del cuadro 16.4.

Comparamos ahora (16.3.14) y (16.3.15) con los resultados de este experimento. Para hacer esto multiplicamos por 100 los valores de los momentos en  $t = 50$  (cuadro 16.3) para obtener las contribuciones a los valores teóricos con respecto a las 100 mujeres iniciales. Para los 100 hombres iniciales, la contribución a  $\xi m$  es  $100e^{-50am}$ , y a  $\text{Var}(m)$  es  $100e^{-50am}(1 - e^{-50am})$ . Estos sumados a las medias y varianzas correspondientes a  $f_0 = 100$ ,  $m_0 = 0$ , constituyen la primera columna del cuadro 16.4.

La comparación está por tanto contenida en las dos primeras columnas del cuadro 16.4. Los cuatro momentos de una variable parecen concordar, en tanto que la covarianza y correlación parecen ser significativamente mayores en la columna esperada que en la simulada. Se requiere evidentemente una prueba más grande para confirmar la teoría en detalle.

Kumar hizo también la simulación por edad en grupos quinquenales de edad, como se advierte en la tercera columna del cuadro 16.4, que se puede denominar proyección estocástica según edad con dominancia femenina. Nuevamente se aplicaron las probabilidades a los individuos, pero dentro de los grupos de edades. Los elementos de la matriz  $L$  de (2.1.9) se interpretaron como probabilidades, lo cual implicaba cierta aproximación, ya que ellos fueron obtenidos como valores esperados. La diferencia es importante puesto que un periodo de cinco años es suficientemente largo como para que una mujer pudiera haber tenido dos hijos en él; tanto Orcutt y otros (1961) como Horvitz (1967) usaron periodos de un mes para evitar esta dificultad.

Las varianzas en la simulación que lleva en cuenta edad, parecen ser significativamente menores que en la que no la tiene en consideración. En cuanto a las conclusiones que se pueden sacar de este experimento, el resultado parece análogo a la reducción de varianza en muestreo estratificado.

#### 16.4. UNA EXPRESION GENERAL PARA LAS VARIANZAS EN LOS MODELOS DE POBLACION LINEALES

J. H. Pollard (1966) demuestra cómo se puede hacer para que la matriz de Leslie de los capítulos 2 y 3 proporcione las varianzas y los momentos de orden superior y no sólo de los valores esperados. Su método es aplicable para reformar cualquier modelo determinístico lineal del tipo de los discutidos en los capítulos 12 y 13, sólo a condición de que sus coeficientes puedan interpretarse como probabilidades. Aunque su técnica muy general serviría para construir una versión probabilística de modelos determinísticos altamente complejos, nuevamente concentraremos nuestra atención en el caso más simple: la interacción de los sexos, con dominancia femenina y sin reconocimiento de edad, cuya representación por medio de ecuaciones diferenciales está dada por (16.3.6) a (16.3.10). La desventaja que tiene la presentación al reconocer más variables consiste sólo en que las matrices crecen en el número de sus elementos de acuerdo al cuadrado del número de elementos en la formulación determinística inicial. Diez variables (por ejemplo, 10 edades hasta 49, o casado, soltero, viudo, divorciado y separado para cada uno de los dos sexos) significaría una matriz determinística de 10 por 10 y una matriz de 110 por 110 para dar los valores esperados y las varianzas.

Comenzamos con un par de ecuaciones diferenciales que muestran las relaciones de los valores esperados, aquí (16.3.6) y (16.3.7), o el equivalente (13.2.1). Para traducir las derivadas a cambios en un período de tiempo  $h$  corto pero finito, necesitamos sólo suponer que los números en el momento  $t + h$  difieren de aquellos en el momento  $t$  por las cantidades del segundo miembro de las ecuaciones (16.3.6) y (16.3.7) multiplicados por  $h$ . Entonces los números de los dos sexos en el momento  $t + h$  son iguales a

$$\begin{aligned} M(t+h) &= (1 - hd_m)M(t) + hb_m F(t); \\ F(t+h) &= (1 + hb_f - hd_f)F(t). \end{aligned} \quad (16.4.1)$$

Si el vector

$$\begin{Bmatrix} M(t) \\ F(t) \end{Bmatrix}$$

se escribiera  $\mathbf{N}(t)$ , y la matriz de  $2 \times 2$  de coeficientes en (16.4.1) se escribiera  $\mathbf{A}$ , entonces (16.4.1) es simplemente  $\{\mathbf{N}(t+h)\} = \mathbf{A}\{\mathbf{N}(t)\}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - hd_m & hb_m \\ 0 & 1 + hb_f - hd_f \end{bmatrix}.$$

Supondremos que  $h$  está incorporada en las tasas y no necesita demostrarse separadamente en lo que sigue; es lo mismo que cambiar la unidad de tiempo a  $h$ .

Pensemos ahora los segundos momentos respecto a cero como arreglados en orden de diccionario, uno bajo el otro, para formar el vector

$$\{C(t)\} = \begin{Bmatrix} c_{11}(t) \\ c_{12}(t) \\ c_{21}(t) \\ c_{22}(t) \end{Bmatrix}.$$

Definamos también el producto directo  $A \times A$  (léase  $A$  por  $A$ ) como la matriz que se obtiene multiplicando cada elemento de  $A$  por toda la matriz  $A$ .

Recordando que estamos haciendo la unidad de tiempo suficientemente pequeña para que no puedan ocurrir dos sucesos en ella, de modo que todos los productos  $d_m d_f$ , etc., sean cero, la matriz  $A \times A$  de (16.4.1) se resuelve prontamente, y es igual a

$$\begin{aligned} A \times A &= \begin{bmatrix} a_{11}a_{11} & a_{11}a_{12} & a_{12}a_{11} & a_{12}a_{12} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}a_{12} & a_{22}a_{11} & a_{22}a_{12} \\ a_{21}a_{21} & a_{21}a_{22} & a_{22}a_{21} & a_{22}a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2d_m & & b_m & & & & 0 \\ 0 & 1 + b_f - d_f - d_m & & 0 & & & b_m \\ 0 & & 0 & 1 + b_f - d_f - d_m & & & b_m \\ 0 & & 0 & & 0 & 1 + 2(b_f - d_f) & & \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16.4.2)$$

Comparemos la matriz  $A \times A$  de (16.4.2) con la parte inferior derecha  $3 \times 3$  de la matriz cuyo determinante se muestra en (16.3.11). Reemplazar la  $r$  por 1 es equivalente a traducir el sistema (16.3.11) de una forma diferencial a una forma finita. La cuarta fila de (16.3.11) corresponde al momento  $c_{12}$ ; supóngase que agregamos otra fila idéntica para representar el mismo momento escrito como  $c_{21}$ . Puesto que la matriz  $A \times A$  va a multiplicar el vector de momentos  $C$ ,  $2b_m$  en la tercera línea de (16.3.11) es equivalente a dos elementos, cada uno igual a  $b_m$ , en la primera fila de (16.4.2), uno en la segunda columna y uno en la tercera columna.

En base a tales consideraciones la fórmula de recurrencia para los valores esperados y segundos momentos de (16.3.6) a (16.3.10) se puede escribir para un intervalo finito como

$$\begin{Bmatrix} N(t+1) \\ C(t+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \times A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(t) \\ C(t) \end{Bmatrix}, \quad (16.4.3)$$

donde volviendo a las ecuaciones (16.3.6) a (16.3.10) podemos ver que  $\mathbf{B}$  debe ser igual a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_m & b_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_f + d_f \end{bmatrix}.$$

El efecto de  $\mathbf{B}$  consiste en agregar un múltiplo de los valores esperados a los cuadrados medios, en tanto que deja los productos cruzados tal como quedarían con multiplicación simple por  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ . Pollard demuestra que la misma ecuación de recurrencia (16.4.3) relaciona el vector que está constituido por las medias, varianzas y covarianzas.

Aquí se ha dado una demostración sólo para el problema de los dos sexos con dominancia femenina, pero el resultado (16.4.3) tiene gran generalidad. Construya ecuaciones para las medias, varianzas, y covarianzas con dominación mixta, reconociendo los sexos sin distinción de edad o estado civil.

Existe en la actualidad una literatura sofisticada sobre el problema del cual hemos estudiado un caso especial en esta sección. Procediendo con un argumento mucho más completo, como asimismo más general que el que usamos para establecer (16.3.14) y (16.3.15), Goodman (1967b) ha extendido recientemente su trabajo más antiguo al modelo estocástico de los dos sexos y dependiente de la edad. Por otra parte, Pollard, en una investigación no publicada hasta ahora ha usado su producto matricial directo para calcular medias, varianzas y covarianzas de los modelos que reconocen un gran número de grupos de edad, sexo y estado civil dentro de la población.

## 16.5. DISTRIBUCION DE LA RELACION DE MASCULINIDAD

La distribución de la relación de masculinidad en el momento  $t$  en el modelo de la sección 16.3 es formalmente análoga a la distribución de una razón en el muestreo aleatorio. Como una primera aproximación al valor esperado de la relación de masculinidad podemos dividir el número esperado de hombres por el número esperado de mujeres, que es lo que hace el modelo determinístico. Sin embargo, esto presenta un sesgo, tal como lo presenta el estimador de razón en muestreo aleatorio (Cochran, 1963, pág. 161). Si el desvío de  $m$  de su media,  $m - \mathcal{E}m$ , se denomina  $\Delta m$ , y  $f - \mathcal{E}f = \Delta f$ , entonces  $\mathcal{E}(\Delta m) = \mathcal{E}(\Delta f) = 0$ , y

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(\frac{m}{f}\right) &= \mathcal{E}\left(\frac{\mathcal{E}m + \Delta m}{\mathcal{E}f + \Delta f}\right) = \frac{\mathcal{E}m}{\mathcal{E}f} \left[ \mathcal{E}\left(\frac{1 + \Delta m/\mathcal{E}m}{1 + \Delta f/\mathcal{E}f}\right) \right] \\ &\doteq \frac{\mathcal{E}m}{\mathcal{E}f} \left\{ \mathcal{E}\left[ 1 - \frac{\Delta m \Delta f}{\mathcal{E}m \mathcal{E}f} + \left(\frac{\Delta f}{\mathcal{E}f}\right)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$\mathcal{E}\left(\frac{m}{f}\right) \doteq \frac{\mathcal{E}m}{\mathcal{E}f} - \frac{\text{Covar}(m, f)}{(\mathcal{E}f)^2} + \frac{\mathcal{E}m \text{Var}(f)}{(\mathcal{E}f)^3}, \quad (16.5.1)$$

donde la aproximación es mejor si las varianzas son pequeñas en comparación con los valores esperados, y se pueden despreciar los momentos de orden superior. La referencia a (16.3.14) nos muestra que cuando  $t$  se hace grande,  $[\text{Covar}(m, f)]/(\mathcal{E}\mathcal{E}m)$  tiende a  $(b_f + d_f)/(b_f - d_f)$ , y lo mismo para  $[\text{Var}(f)]/(\mathcal{E}f)^2$ . De allí que cuando  $t$  se hace grande, los últimos dos términos del segundo miembro de (16.5.1) se anulan para dar  $\mathcal{E}(m/f) = \mathcal{E}m/\mathcal{E}f$ . Goodman (1967b) demuestra que esto es cierto para el caso general más interesante donde el proceso de los dos sexos depende de la edad.

El lector puede aplicar la misma técnica para encontrar la varianza de la razón de masculinidad en términos de los mismos cinco momentos de  $m$  y  $f$ :

$$\text{Var}\left(\frac{m}{f}\right) = \frac{\text{Var}(m)}{(\mathcal{E}f)^2} - \frac{2\mathcal{E}m \text{Covar}(m, f)}{(\mathcal{E}f)^3} + \frac{(\mathcal{E}m)^2 \text{Var}(f)}{(\mathcal{E}f)^4}, \quad (16.5.2)$$

en cuyo desarrollo se desprecia la cantidad  $[\mathcal{E}(m/f) - (\mathcal{E}m/\mathcal{E}f)]^2$ . Use (16.3.14) para demostrar que cuando  $t$  se hace grande,  $\text{Var}(m/f)$  tiende a cero. Esto también es probado por Goodman (1967b) para el proceso de los dos sexos con dependencia de la edad.

Los tres casos tratados en este capítulo —el proceso de nacimientos puro; el proceso de nacimiento, muerte e inmigración; el de los sexos— están elegidos de manera un tanto arbitraria de un gran número de modelos. Una mayor variedad se encuentra en las revistas, en artículos de Bartlett (1960) y Bailey (1964). Bartlett (1955 y 1957) también ha desarrollado técnicas para manejar en forma estocástica los modelos competitivo y de depredador-presa discutidos determinísticamente en el capítulo 12. A pesar de que este trabajo es muy importante, debido a consideraciones de espacio y de aplicación especial a grandes poblaciones humanas, que es de central interés en este libro, nos vemos obligados a apartarnos ahora con el objeto de examinar ciertos modelos bastante diferentes que se han usado para concepción y nacimiento.

## DISTRIBUCIONES DE POBLACION Y COMPORTAMIENTO INDIVIDUAL

### 17.1. REGLAS DE DETENCION

#### Efecto sobre el tamaño de la familia

Los modelos de población se pueden fundamentar en la noción de que los individuos siguen alguna regla en sus decisiones para tener más niños. Para comenzar con las reglas más simples, ¿cuál es la distribución por tamaño de familia de las parejas que continúan teniendo niños hasta que tienen un hijo varón?, ¿hasta que tienen dos hijos varones?, ¿hasta que tienen un hijo y una hija?, ¿hasta que tienen dos hijos y dos hijas? Si la proporción  $p$  de los nacimientos son hombres y  $q$  son mujeres ( $p + q = 1$ ), entonces el lector puede verificar que la distribución para estos casos es como la dada en el cuadro 17.1, donde se supone que el control de natalidad es completo, que el sexo de cada niño es independiente del sexo de los demás niños en la familia, y que el cálculo está restringido a las parejas fecundas.

Podemos establecer en forma general el resultado del cuadro 17.1, notando (Sheps, 1963, pág. 70) que si los padres se detienen después de  $\alpha$  hijos y  $\beta$  hijas, entonces, la probabilidad de que tengan  $n = \alpha + \beta + k$  niños,  $k \geq 0$ , está compuesta de dos partes:

1. La probabilidad de que tengan  $\alpha + k$  hijos y  $\beta - 1$  hijas, en todos los órdenes posibles, que es

$$\binom{\alpha + \beta + k - 1}{\beta - 1} p^{\alpha+k} q^{\beta-1},$$

y luego tengan, para finalizar, una hija (probabilidad  $q$ );

2. La probabilidad de que tengan  $\alpha - 1$  hijos y  $\beta + k$  hijas, en todos los órdenes posibles, que es

$$\binom{\alpha + \beta + k - 1}{\alpha - 1} p^{\alpha-1} q^{\beta+k},$$

y luego tengan, para finalizar, un hijo (probabilidad  $p$ ).

Los dos resultados se excluyen mutuamente y por tanto, la probabilidad de  $n = \alpha + \beta + k$  niños es la suma de sus probabilidades

$$\binom{n-1}{\beta-1} p^{n-\beta} q^{\beta} + \binom{n-1}{\alpha-1} p^{\alpha} q^{n-\alpha}. \quad (17.1.1)$$



CUADRO 17.1

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE PAREJAS FECUNDAS SEGUN NUMERO DE NIÑOS, CUANDO RIGEN CIERTAS REGLAS DE DETENCION

Número de hijos	Se detiene en 1 hijo varón (1)	Se detiene en 2 hijos varones (2)	Se detiene en 1 hijo y una hija (3)
1	$p$	0	0
2	$qp$	$p^2$	$pq + pq$
3	$q^2p$	$\binom{2}{1}qp^2$	$p^2q + pq^2$
4	$q^3p$	$\binom{3}{1}q^2p^2$	$p^3q + pq^3$
5	$q^4p$	$\binom{4}{1}q^3p^2$	$p^4q + pq^4$
.	.	.	.
.	.	.	.
$n$	$q^{n-1}p$	$\binom{n-1}{1}q^{n-2}p^2$	$p^{n-1}q + pq^{n-1}$
.	.	.	.
.	.	.	.

Las medias y varianzas de los tamaños de tales familias se pueden calcular rápidamente. Para la primera columna, donde las parejas se detienen con un hijo varón, el número medio de hijos es

$$E_n = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}. \quad (17.1.2)$$

El lector puede demostrar por un cálculo similar que la varianza del número  $n$  de hijos, para esta regla de detención es

$$\text{Var}(n) = 1/p^2 - 1/p = q/p^2. \quad (17.1.3)$$

Las medias de las variables aleatorias son aditivas. Cualquiera sea el número esperado de niñas que vengan entre el comienzo y el primer niño, será igual al número entre el primero y segundo niño, etc. Se deduce de esto y de (17.1.2),

que la pareja que se detiene después de  $\alpha$  niños varones, tendrá en promedio  $\alpha/p$  hijos. Las varianzas de variables aleatorias independientes son aditivas, de manera que de (17.1.3) resulta que la varianza del total de hijos nacidos de padres que se detienen con  $\alpha$  niños varones es  $\alpha q/p^2$ . [¿Podemos obtener por una adición similar la media y la varianza para  $\alpha$  niños y  $\beta$  niñas?]

Para calcular los momentos de las distribuciones correspondientes a una regla de detención que involucra niños y niñas son muy útiles las funciones generatrices de momentos. Usando el cuadro 17.1, multiplicamos la fila correspondiente a un niño por  $s$ , a dos niños por  $s^2$ , a tres niños por  $s^3$ , etc., y la fila correspondiente a  $n$  niños por  $s^n$ . Cuando hacemos esto para la columna (3) y sumamos los resultados, obtenemos  $\phi(s)$ , esto es, el valor esperado de  $s^n$  para parejas que se detienen con un hijo y una hija:

$$\begin{aligned}\phi(s) &= (pq + pq)s^2 + (p^2q + pq^2)s^3 + \dots + (p^{n-1}q + pq^{n-1})s^n + \dots \\ &= pq s^2 \left( \frac{1}{1-ps} + \frac{1}{1-qs} \right).\end{aligned}\quad (17.1.4)$$

Lo único que necesitamos para determinar la media es diferenciar (17.1.4) con respecto a  $s$  y hacer  $s = 1$ :

$$\mathcal{E}n = 1/qp - 1 = 1/q + 1/p - 1. \quad (17.1.5)$$

Si  $p = q = \frac{1}{2}$ , el tamaño esperado de la familia es tres. Si  $p$  y  $q$  son un tanto diferentes de  $\frac{1}{2}$ , por ejemplo  $p = \frac{1}{2} + \epsilon$  y  $q = \frac{1}{2} - \epsilon$ , entonces, el número esperado de hijos es

$$\mathcal{E}n = 1/p + 1/q - 1 \doteq 3 + 16\epsilon^2, \quad (17.1.6)$$

o sea, poco más de tres. (Para los Estados Unidos en 1965,  $\epsilon$  fue igual a 0,0115.) Aun considerando familias que se detienen en un hijo y una hija, el lector puede mostrar que un número esperado de  $\frac{1}{2} - 2\epsilon^2$  parejas tendrán 2 hijos;  $\frac{1}{4} - \epsilon^2$  tendrán tres hijos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{\epsilon^2}{2^{n-2}}(n-1)(n-4)$$

tendrán  $n$  hijos, supuesto que podemos despreciar las potencias de  $\epsilon$  de orden tres o superiores.

La función generatriz para el total de hijos  $n \geq \alpha + \beta$  de parejas que se detienen después de  $\alpha$  hijos y  $\beta$  hijas se obtiene de (17.1.1). Demuestre que la probabilidad de  $n \geq \alpha + \beta$  hijos, es el coeficiente de  $s^n$  en

$$g(s) = \left(\frac{qs}{1-ps}\right)^\beta + \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^\alpha,$$

donde se pueden dejar de lado las potencias menores que  $s^{\alpha+\beta}$ . Haga  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$  y reconcilie este resultado con (17.1.4), teniendo en cuenta que toda detención que considere menos de un hijo y una hija se ha eliminado de (17.1.4).

Este modelo se puede usar para determinar el grado en que la incapacidad de los padres para influir en el sexo de sus niños aún no nacidos, dará lugar a que las familias sean más grandes en las comunidades donde el sexo de los niños es importante. Si las parejas fecundas quieren 1 hijo varón, entonces, el número medio de niños que ellos tendrán que tener es  $1/p = 2 - 4\epsilon$ . Si ellos insisten en tener al menos 1 niño y 1 niña, tendrán en promedio casi un 50 por ciento más de hijos que si quedaran satisfechos con dos hijos sin importarles el sexo.

Estos resultados quedan modificados cuando se coloca un límite superior  $\omega$  al número total de niños que tendrá una pareja. El lector puede mostrar la modificación necesaria en (17.1.4), (17.1.5) y (17.1.6), cuando se desea un hijo de cada sexo pero la pareja no está dispuesta a tener más de  $\omega$  hijos en total para lograr dicha meta (Sheps, 1963).

Un argumento algo diferente se aplica a las parejas deseosas de que un cierto número de sus hijos lleguen a edad adulta, con probabilidades de mortalidad infantil y juvenil-adulta dadas. Si la probabilidad de que muera un niño es  $d$  y ellos tienen  $\alpha$  hijos varones, entonces, la probabilidad de que ninguno muera es  $1 - d^\alpha$ . Si el objetivo es asegurar que al menos un hijo varón sobrevivirá con probabilidad  $1 - \delta$  (para conservar la descendencia) entonces el número  $\alpha$  de hijos varones está determinado por  $d^\alpha = \delta$ , o sea,  $\alpha = \ln \delta / \ln d$ . Si  $d = \frac{1}{2}$  y  $\delta = \frac{1}{32}$ , se requerirá que nazcan  $\alpha = 5$  varones; combinando esto con el argumento de los párrafos anteriores, nos da el número total de hijos que se requieren:  $n = \alpha/p$ , lo que da un número cercano a 10. Tales cálculos sobre preferencia de sexo y seguridad de supervivencia en la próxima generación, realizados con menos formalidad y con estimaciones decididamente subjetivas de las constantes, indudablemente influyen en la política individual de nacimientos contra el sexo y la mortalidad. Si el padre desea establecer una política de planificación familiar que le asegure su línea completa de descendientes masculinos con probabilidad dada, tendría que remitirse a los procesos de nacimiento y muerte del capítulo 16 o al proceso de ramificación del capítulo 18.

El lector puede investigar las consecuencias de reglas como las anteriores, para la tasa de reproducción neta y la tasa intrínseca de crecimiento natural de la población.

### Efecto sobre la relación de masculinidad

En una población que use control de natalidad, en que las parejas deciden cuántos hijos tendrán y prefieren hijos varones, ¿pueden sus decisiones afectar la relación de masculinidad al nacimiento? Es fácil decir (Winston, 1932) que el deseo de tener hijos varones dará por resultado más niños varones, pero se requiere un análisis más cuidadoso del mecanismo probabilístico. Goodman (1961a) ha proporcionado una consideración sistemática de las consecuencias que tiene el hecho de que los padres sigan las siguientes diferentes reglas para decidir si tienen o no otro hijo.

Supongamos como antes que la probabilidad de que sea un niño varón el que nace es  $p$  y de que sea una niña es  $q = 1 - p$ , que éstas son las mismas para todas las parejas, en forma independiente, y para todos los órdenes de nacimientos. Entonces consideremos la Regla I: Las parejas dejan de tener niños cuando nace el primer hijo varón. La proporción de parejas que tienen sólo un

hijo, un varón, es  $p$ ; la proporción de las que tienen una niña y un niño es  $qp$ ; la proporción de las que tienen dos niñas y un niño es  $q^2p$ , etc. Si el número total de parejas bajo consideración es  $n$ , entonces su distribución esperada por número de hijos será la columna (2) del cuadro 17.2. Si no se coloca límite al tamaño de la familia, la razón de nacimientos masculinos al total de nacimientos de la población será el total de la columna (3) en el cuadro 17.2, dividido por el total de la columna (4); o sea,

$$\frac{np + nqp + nq^2p + \dots}{np + 2nqp + 3nq^2p + \dots}$$

CUADRO 17.2

DISTRIBUCION DE  $n$  PAREJAS SEGUN NUMERO DE HIJOS, MOSTRANDO LOS NACIMIENTOS ESPERADOS, CUANDO LAS PAREJAS DEJAN DE TENER HIJOS AL NACER EL PRIMER VARON

Número de hijos (1)	Parejas (2)	Varones (3)	Total de hijos de ambos sexos (4)
1	$np$	$np$	$np$
2	$nqp$	$nqp$	$2nqp$
3	$nq^2p$	$nq^2p$	$3nq^2p$
4	$nq^3p$	$nq^3p$	$4nq^3p$
.	.	.	.
.	.	.	.

que se reduce a  $p$ , como era de esperar. La relación de masculinidad al nacimiento no se ve afectada por la aplicación de la Regla I en una comunidad donde todas las parejas tienen la misma probabilidad de tener hijos varones. Queda asimismo sin afectarse, entre parejas homogéneas, por cualquier otra regla o combinación de reglas de detención; mientras el tener niños satisfaga las condiciones de un juego de azar insesgado, los padres no pueden alterar las probabilidades de ganar varones eligiendo su tiempo de entrada y abandono del juego.

Aunque la proporción de varones entre todos los hijos, o entre los primeros hijos, segundos hijos, o cualquier orden de nacimiento especificado de antemano, no puede ser afectado por decisiones relativas a si se tiene o no un hijo más, nada impide a los padres determinar la probabilidad de que su último hijo sea varón; basado en la Regla I esa probabilidad sería la certeza.

Un problema bastante diferente es el de la proporción media de niños varones en una familia que, como me lo señaló R. C. Lewontin, no es  $p$ . Tomando

la primera columna del cuadro 17.1, donde se supone que cada pareja deja de tener hijos cuando nace el primer varón, la proporción de niños varones en familias con  $n$  hijo es 1, en familias con dos hijos es  $\frac{1}{2}$ , en familias con tres hijos es  $\frac{1}{3}$ , etc. La proporción media de varones se obtiene multiplicando estos números por la frecuencia relativa de las familias con 1, 2, 3, ... hijos:

$$1p + \left(\frac{1}{2}\right)q p + \left(\frac{1}{3}\right)q^2 p + \dots = -(p \ln p)/q,$$

obteniendo este último resultado por medio de la serie de Taylor para el desarrollo del logaritmo natural de  $1 - q$ . Si  $p = q = \frac{1}{2}$ , tenemos

$$\frac{-p \ln p}{q} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-0.693)}{\frac{1}{2}} = 0.693$$

(muy diferente de  $\frac{1}{2}$ ) como la proporción promedio de varones en una familia. Si  $p = \frac{1}{2} + \varepsilon$ , se verá que el promedio es  $0.693 + 0.773\varepsilon$ , siempre que  $\varepsilon$  sea pequeño.

Todo lo anterior está basado en la suposición de que la probabilidad de tener un varón es la misma de una pareja a otra. Weiler (1959) y Goodman (1961a) analizan las consecuencias de la preferencia por varones en una población que usa control de natalidad y en la cual las parejas tienen diferentes probabilidades de producir varones. Supongamos que la  $i$ ésima pareja tiene una probabilidad  $p_i$  de tener un varón en un nacimiento dado (siendo ésta fija para todos los nacimientos) y que sigue la Regla I, según la cual deja de tener hijos después que alcanza un varón. Entonces, el número esperado de hijos varones para esa pareja será 1, en tanto que el total esperado de hijos de acuerdo a (17.1.2) será  $1/p_i$ . Si  $n$  parejas siguen la Regla I, ellas tendrán un número esperado de  $n$  varones entre  $\sum_i^n 1/p_i$  hijos, o una proporción de nacimientos masculinos

$$\frac{\sum_i 1}{\sum_i 1/p_i} = \frac{n}{\sum_i 1/p_i}. \quad (17.1.7)$$

Esta es la media armónica de las  $p_i$  y nos referiremos a ella como  $(hp)$ . Llamemos  $(ap)$  a la media aritmética de las  $p_i$ , esto es,  $(ap) = \sum_i p_i/n$ . La media armónica de un conjunto de números positivos (no todos idénticos) es menor que su media aritmética [¿cómo se demuestra esto?], de manera que (17.1.7) o  $(hp)$  debe ser menor que  $\sum_i p_i/n = (ap)$ , la proporción esperada de varones entre padres que no siguen una regla de detención relativa al sexo de sus hijos.

Esto muestra que el deseo de las parejas por tener hijos varones, expresado en la Regla I, tendrá el efecto de *disminuir* la proporción de nacimientos de varones en  $(ap) - (hp)$ , comparada con la que habrían alcanzado sin seguir ninguna regla de detención. El resultado no parece paradójico si se considera que la Regla I conduce a la formación de familias más grandes, por aquellas parejas que tienen tendencia a producir niñas. Si las parejas quieren aumentar su proporción esperada de niños varones, deberían dejar de tener hijos al nacimiento de la primera niña (Regla III de Goodman). Esto sería como si ellos estuvieran probando si son productores de niños o productores de niñas, y aquellos que

encontraron que son productores de niños entonces contribuyeron con más hijos. [¿Puede usted sugerir un procedimiento más eficiente a ser seguido por los padres; uno que diera una mayor proporción de varones a la comunidad?]

Esta sección se ha preocupado de la distribución de nacimientos totales y nacimientos varones entre las mujeres. En la sección siguiente se estudiará la sucesión de nacimientos ocurridos a mujeres individuales, sin tomar en cuenta el sexo del hijo.

## 17.2. LOS NACIMIENTOS COMO UNA SUCESION EN EL TIEMPO

El más simple modelo estocástico de reproducción implica una probabilidad fija en cada período breve, la misma para todas las mujeres consideradas y sin permitir que el período estéril siga a la concepción; estas condiciones, como aquellas de la sección precedente, producen una distribución geométrica.

Sheps (1964) comienza con este caso, contando el tiempo en unidades de un ciclo menstrual, las que con un promedio de 29,5 a 30 días se pueden referir como un mes. La escala de tiempo se colocará en cero al comienzo del primer mes de exposición, y una concepción se contará al final del mes en que ocurre, de manera que una concepción en el primer mes se dirá que ocurre después de un *intento*, o una *tardanza* de cero mes. La probabilidad de que una concepción no ocurra en el primer mes y ocurra en el segundo es  $qp$ ; de que no ocurra en los primeros  $r-1$  meses y ocurra en el  $r$ ésimo es  $q^{r-1}p$ , y entonces diremos que ha habido  $r$  intentos y una tardanza de  $r-1$  meses. La distribución de los intentos es formalmente idéntica a la del número de hijos entre padres que dejan de tener niños cuando alcanzan un hijo varón [columna (2) del cuadro 17.1]. El número medio de intentos es  $1/p$  [con una tardanza media de  $q/p = (1/p) - 1$ ]; la varianza entre los intentos o entre las tardanzas es  $q/p^2$ , como se deduce de (17.1.3); la función generatriz de probabilidades del número de intentos es

$$g(s) = ps/(1 - qs).$$

[¿Cuál es la función generatriz de las probabilidades de las tardanzas?]

El modelo, en la forma en que ha sido presentado arriba, está restringido por la suposición de que todas las mujeres tienen idéntica probabilidad de concebir en cualquier intervalo de tiempo. Sheps va más allá para tener en cuenta la heterogeneidad en la probabilidad de concepción, considerando a  $p$  como una variable, de modo que la proporción de mujeres fértiles que tienen una probabilidad de concepción por mes entre  $p$  y  $p + dp$  sea  $\phi(p) dp$  ( $0 < p < 1$ ). Para la  $i$ ésima mujer, cuya probabilidad mensual es  $p_i$ , el número medio de intentos  $w_i$  sería  $1/p_i$  (en este análisis se omiten las mujeres estériles cuyo  $p_i = 0$ ). El número esperado de intentos, promediado sobre todas las mujeres, es

$$\mathcal{E}w = \frac{\sum_1^n 1/p_i}{n}, \quad (17.2.1)$$

siendo  $n$  el número de mujeres en la población. Para la distribución continua de  $p$ , el número esperado medio de intentos es

$$\mathcal{E}w = \int_0^1 \phi(p)/p dp.$$

Por lo tanto  $1/\mathcal{E}w$  es la media armónica de las  $p$ . La ecuación (17.2.1) dice que el número promedio de intentos es el recíproco de la media armónica de las probabilidades de que una mujer dé a luz en un mes cualquiera. Puesto que la media armónica es menor que la media aritmética,  $\mathcal{E}w$  es mayor que el recíproco de la media aritmética. Esto prueba que la heterogeneidad, sin que cambie el promedio de las  $p_i$  aumenta el número medio de intentos. [Expresar las fórmulas y resultados en términos de tardanzas.]

Dadas ciertas formas de la distribución  $\phi(p)$ , la media y la varianza de la distribución de los teóricos tiempos de espera se pueden calcular a partir de la media y varianza de la probabilidad  $p$  de concebir en un mes dado. R. G. Potter y M. P. Parker (1964) muestran la utilidad de la distribución beta incompleta o distribución de Pearson Tipo I, para traducir una media y varianza de probabilidades en las correspondientes a los tiempos de espera. La proporción de parejas que tienen fecundabilidad entre 0 y  $p$  se toma como

$$F(p) = \int_0^p \phi(p) dp = \frac{\int_0^p p^{a-1}(1-p)^{b-1} dp}{\int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1} dp}, \quad (17.2.2)$$

siendo  $B(a, b)$  el denominador, o sea, la función beta con argumentos  $a$  y  $b$ . Usando

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

y la relación de los valores sucesivos de la función gamma,  $\Gamma(a)$ ,

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1),$$

el lector puede demostrar que la fecundabilidad media

$$\mathcal{E}p = \frac{\int_0^1 p^a(1-p)^{b-1} dp}{\int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1} dp}$$

se reduce a

$$\mathcal{E}p = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \bigg/ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{a}{a+b}. \quad (17.2.3)$$

Se puede también mostrar que el valor esperado del cuadrado de  $p$  es

$$\mathcal{E}(p^2) = \frac{(a+1)(a)}{(a+b+1)(a+b)},$$

y su varianza,  $\text{Var}(p) = \mathcal{E}[p - \mathcal{E}(p)]^2$ , es

$$\text{Var}(p) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}. \quad (17.2.4)$$

Por un argumento similar, el número esperado de intentos es igual a

$$\mathcal{E}w = \mathcal{E}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{a+b-1}{a-1}, \quad a > 1. \quad (17.2.5)$$

Comparando esto con el valor correspondiente que se obtiene en el caso de que todas las mujeres tengan la misma probabilidad, esto es,

$$\mathcal{E}w = \frac{1}{\mathcal{E}p} = \frac{a+b}{a},$$

vemos que para  $a > 1$  y  $b > 0$ ,

$$\frac{a+b-1}{a-1} > \frac{a+b}{a},$$

de modo que una vez más, la variación de las mujeres con respecto a la probabilidad media dada aumenta el tiempo teórico de espera. El lector puede mostrar que el ajuste por medio de la función beta permite expresar el número medio de intentos en términos de los dos primeros momentos de las probabilidades de concebir:

$$\mathcal{E}w = \mathcal{E}\left(\frac{1}{p}\right) = 1 + \left(\frac{2\mathcal{E}p}{1-\mathcal{E}p} - \frac{\mathcal{E}(p^2)}{\mathcal{E}p - \mathcal{E}(p^2)}\right)^{-1}.$$

Potter y Parker (1964) han demostrado que el valor esperado de la varianza de los intentos o de los tiempos de espera es

$$\text{Var}(w) = \frac{(ab)(a+b-1)}{(a-1)^2(a-2)}, \quad a > 2. \quad (17.2.6)$$

Observe la diferencia entre la varianza de los tiempos de espera observados individualmente (17.2.6) y la varianza  $\mathcal{E}(1/p)^2 - (\mathcal{E}1/p)^2$  de los teóricos tiempos de espera para mujeres individuales. Derive una expresión para lo último y demuestre que es igual a  $1/a$  multiplicado por (17.2.6).

Nuestro principal interés aquí es hacer una inferencia sobre las  $p$  a partir de las  $w$ . Queremos conocer la distribución de fecundabilidad  $p$ , dadas observaciones de los tiempos de espera  $w$ . Resolvemos (17.2.5) y (17.2.6) en términos de la media y varianza de los tiempos de espera observados, para determinar estimaciones  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  de  $a$  y  $b$  respectivamente:

$$\hat{a} = \frac{2 \widehat{\text{Var}}(w)}{\widehat{\text{Var}}(w) - (\widehat{\mathcal{E}}(w))^2 + \widehat{\mathcal{E}}(w)},$$

$$\hat{b} = (\widehat{\mathcal{E}}(w) - 1)(\hat{a} - 1), \quad (17.2.7)$$



donde hemos reemplazado  $\text{Var}(w)$  y  $\mathcal{E}w$  por sus estimaciones, obtenidas de las observaciones Potter y Parker (1964, pág. 108) usan las observaciones  $\mathcal{E}w = 5,47$  meses y  $\widehat{\text{Var}}(w) = 89,98$  para encontrar  $\hat{a} = 2,75$  y  $\hat{b} = 7,82$  de (17.2.7). A partir de estos valores se puede delinear en detalle la distribución de  $p$ , siempre suponiendo que la función beta es apropiada. A partir de (17.2.3) la media estimada de  $p$  es 0,260, y de (17.2.4), la estimación de su desviación típica es 0,129. El modelo se puede usar para hacer pronósticos acerca de mujeres individuales, basados en sus tiempos de espera previos. Los autores muestran que las mujeres que conciben con facilidad son aptas para concebir con facilidad de nuevo, en tanto que la mayoría de las que conciben en forma lenta no serán tan lentas la próxima vez.

William Brass (1958) ajustó la distribución de Poisson y no consideró realista hacer su constante,  $\lambda$ , igual para todas las mujeres. Comienza suponiendo que para una mujer dada, el parámetro  $\lambda$  es fijo y que la probabilidad de cero nacimientos en el tiempo  $t$  es  $e^{-\lambda t}$ , de un nacimiento es  $\lambda t e^{-\lambda t}$ , de dos nacimientos  $[(\lambda t)^2/2!]e^{-\lambda t}$ , etc. Se demuestra fácilmente que la función generatriz de la distribución de Poisson es  $\mathcal{E}s^r = e^{-\lambda t + \lambda t s}$  (Kendall y Stuart, 1958, Vol. 1, pág. 125). A continuación Brass supone que las  $\lambda$  se distribuyen entre las mujeres de acuerdo a una curva de Pearson de Tipo III, la función gamma incompleta: la proporción de mujeres de parámetro  $\lambda$  a  $\lambda + dt$  se toma como  $(a^k e^{-a\lambda} \lambda^{k-1} d\lambda)/\Gamma(k)$ . La contribución de las mujeres entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ , a la función generatriz del tamaño de familia, debe ser igual al producto

$$(e^{-\lambda t + \lambda t s})[(a^k e^{-a\lambda} \lambda^{k-1} d\lambda)/\Gamma(k)], \quad (17.2.8)$$

e integrando respecto de  $\lambda$ , de (17.2.8) resulta,

$$[(a + t - st)/a]^{-k}, \quad (17.2.9)$$

que es la función generatriz de la distribución binomial negativa (Kendall y Stuart, 1958, Vol. 1, pág. 130). La probabilidad de  $r$ , el coeficiente de  $s^r$  en el desarrollo de (17.2.9), se puede escribir como

$$\left(\frac{a}{a+t}\right)^k \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)r!} \left(\frac{t}{a+t}\right)^r. \quad (17.2.10)$$

Ahora que tenemos la distribución teórica (17.2.10) en función de los parámetros  $a$ ,  $t$  y  $k$ , sólo es necesario estimar éstos a partir de los datos reales. Diferenciando sucesivamente la función generatriz de momentos (17.2.9) con respecto a  $s$  y haciendo  $s = 1$ , tenemos los momentos factoriales respecto a cero:

$$\mu'_{[1]} = \frac{tk}{a}, \quad \mu'_{[2]} = \frac{t^2 k(k+1)}{a^2}, \quad (17.2.11)$$

y resolviendo para  $k$  y  $t/a$ , resulta

$$k = \frac{\mu'_{[2]}}{\mu'_{[1]} - \mu'^2_{[1]}}, \quad \frac{t}{a} = \frac{\mu'_{[2]} - \mu'^2_{[1]}}{\mu'_{[1]}}, \quad (17.2.12)$$

que es todo lo que necesitamos. La distribución de probabilidad de  $r$  representada como en (17.2.10), parece como si contuviera tres parámetros, pero en realidad sólo tiene dos, debido a que  $a$  y  $t$  intervienen sólo en forma de una razón.

Apliquemos ahora esto a datos de los Estados Unidos, 1960. Las cantidades calculadas a partir de la columna "observada" del cuadro 17.3 son

$$\begin{aligned} \mu'_{[1]} &= 2.304 & \mu'^2_{[1]} &= 5.308 \\ \mu'_{[2]} &= 6.641 & \mu'_{[2]} - \mu'^2_{[1]} &= 1.333 \\ k &= 3.982 & \frac{a}{t} &= 1.728 \end{aligned} \quad (17.2.13)$$

$$\left(\frac{a}{a+t}\right)^k = 0.1622.$$

Por ejemplo,  $\mu'_{[2]}$  es

$$\begin{aligned} &[(0)(937) + (0)(1)(1010) + (1)(2)(1283) + \dots \\ &+ (6.5)(7.5)(274)]/5190 = 6.641. \end{aligned}$$

A partir de estos datos es fácil desarrollar los términos de la distribución (17.2.10),  $r = 0, 1, 2, \dots$ , dados en la columna de la derecha del cuadro 17.3. Por ejemplo, para  $r = 2$  hijos, tenemos según (17.2.10)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{0.1622\Gamma(3.982+2)}{\Gamma(3.982)2!}\right)\left(\frac{1}{1+1.728}\right)^2 \\ &= \frac{(0.1622)(4.982)(3.982)}{2} (0.3666)^2 \\ &= 0.2162. \end{aligned}$$

y multiplicando esto por 5 190 da 1 122 como se muestra en el cuadro.

La curva ajustada tiene decididamente muy pocas mujeres con cero hijos, lo que refleja, como señala Brass, que el modelo no toma en cuenta la posibilidad de genuina esterilidad a que está sujeta una parte de cualquier población. Brass resuelve esto ajustando una binomial negativa truncada; él saca la frecuencia 0 de la comparación. El cuadro 17.3 sugiere una preferencia especial por dos y cinco hijos de parte de los padres. Además, la parte superior de la distribución ajustada es demasiado alta; tiene demasiadas mujeres con 6 hijos y más. Brass prosigue ajustando una curva que tome en cuenta el período de embarazo, durante el cual, el riesgo de concepción es cero. Para mujeres con 6 hijos, esta no exposición elimina algo así como 5 de los 20 ó 25 años del período reproductivo, explicándose de esta manera un 20 por ciento de diferencia en el número de hijos de tales mujeres. El tema de la siguiente sección se refiere a períodos de no exposición al riesgo.

## CUADRO 17.3

AJUSTE DE LA BINOMIAL NEGATIVA A HIJOS ALGUNA VEZ NACIDOS DE MUJERES 45-49 AÑOS, ESTADOS UNIDOS, 1960 (EN MILES)

Hijos nacidos <i>r</i>	Mujeres entrevistadas	
	Real <sup>a</sup>	Ajustado <sup>b</sup>
TOTAL	5,190	5,190
0	937	842
1	1,010	1,229
2	1,283	1,122
3	819	821
4	463	525
5	404	306
6 y más	274 <sup>c</sup>	345

<sup>a</sup> Fuente: *Demographic Yearbook*: Naciones Unidas, 1963, pág. 454.

<sup>b</sup> La distribución ajustada es

$$5190(0.6334)^{3.982} \frac{\Gamma(r+3.982)}{\Gamma(3.982)r!} (0.3666)^r$$

$$= 841.8(3.982)(4.982) \dots (2.982+r) \frac{(0.3666)^r}{r!}$$

|←————— *r* factors —————→|

<sup>c</sup> Se han tomado como si tuvieran una media de 7,5 hijos, lo que se puede controlar mediante el ajuste y demostrar que es levemente alto.

## 17.3. DESCUENTO POR EL PERIODO ESTERIL DEL EMBARAZO

Los procesos probabilísticos que implican dilerimiento han sido discutidos en diversos contextos. Dandekar (1955) supuso que los accidentes están sujetos a una distribución de Poisson, excepto que por un número de días después de cada accidente la persona afectada estaba fuera de la fábrica y en consecuencia no expuesto al riesgo. Neyman (1949) supuso que una lancha pesquera tenía una probabilidad fija de divisar en cualquier momento un cardumen de peces, salvo que después que fue avistado uno, se invirtieron  $h - 1$  horas en pescarlo, y en consecuencia la probabilidad de ver algún otro cardumen durante ese tiempo fue cero. Dandekar prosiguió la aplicación al proceso de nacimiento con tiempo de espera fijo después de cada concepción. Singh (1963) deriva estimadores óptimos asintóticamente normales de los parámetros, y encuentra un ajuste razonablemente bueno a los datos de Dandekar acerca de la distribución del número de hijos nacidos a mujeres en el grupo de edad 21-25, en Kolhapur, India.

En lugar de informar sobre éstos, traduciré en términos matriciales algunas de sus ideas (Feller, 1957, cap. 15). Comenzaremos con una ilustración bastante simple, en la que el uso de matrices puede considerarse superfluo: experimentos de Bernoulli, cada uno con probabilidad  $p$  de éxito y  $q$  de fracaso independiente del resultado en los demás meses, descritos por la matriz  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ p & q \end{bmatrix}.$$

Las probabilidades de éxito y fracaso en cualquier mes se pueden representar mediante los dos elementos del vector  $\mathbf{\Pi}$ : supongamos conocido que en el mes cero hay un fracaso con certeza; de modo que  $\mathbf{\Pi}_0 = [0 \quad 1]$ . Un mes después, el vector de probabilidades es

$$\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{P} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} p & q \\ p & q \end{bmatrix} = [p \quad q]. \quad (17.3.1)$$

Si el mes cero fue un éxito,  $\mathbf{\Pi}_1 = [p \quad q]$  como antes, una propiedad de independencia característica de los ensayos de Bernoulli. Las probabilidades para el mes  $t$  éximo son  $\mathbf{\Pi}_t = \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{P}^t$ ; y se puede demostrar fácilmente que éste tampoco depende de  $\mathbf{\Pi}_0$ , ni de  $t$ . En (17.3.1) y posteriormente, un vector fila es postmultiplicado por una matriz; en el capítulo 3, los vectores columna fueron pre-multiplicados por matrices. La diferencia de presentación sólo refleja los estilos notacionales de diferentes partes de la literatura. Traduzca (17.3.1) a la forma que usa vectores columna y dé la regla general para tal traducción.

Cuando el proceso de concepción y nacimiento se considera en términos discretos, donde los puntos del tiempo se llaman ovulaciones o meses, entonces (17.3.1) constituye la descripción de un proceso en el cual la probabilidad para cualquier mes es independiente de la de los meses precedentes. Se puede hacer una mejora distinta al modelo suponiendo que lo que sucede en un mes cualquiera depende de los meses precedentes.

Sea  $p$  la probabilidad de concepción si no ha habido tal en los nueve meses precedentes o si hubo una exactamente nueve meses antes, y  $q$  si ha habido una concepción en los ocho meses precedentes. Reconocemos 10 estados:  $E_0$ , una concepción este mes;  $E_1$ , una concepción el mes pasado;  $E_2$ , una concepción hace dos meses, ...;  $E_9$ , la última concepción hace exactamente 9 meses y ahora un nacimiento; (en el mismo estado  $E_9$  de nuestro modelo simplificado, estar sujeto a concepción están las mujeres cuya última concepción fue hace 10 meses o más, o nunca). La probabilidad  $p_{0,1}$  de ir desde  $E_0$  a  $E_1$  es 1 (no tomando en cuenta la mortalidad); en general, la probabilidad de ir desde  $E_i$  a  $E_{i+1}$  en un mes es  $p_{i,i+1} = 1$ ,  $i = 0, \dots, 8$ ; en tanto que  $p_{9,0} = p$  y  $p_{9,9} = q$ . Todas las demás transiciones tienen probabilidad cero. A una mujer que está en  $E_9$ , digamos, que ahora está teniendo un nacimiento o que no ha tenido una concepción en los nueve meses precedentes, se representará por  $\mathbf{\Pi}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \dots 1]$ , un punto de partida conveniente. Entonces, las probabilidades de las diversas transiciones se pueden arreglar en la forma de una matriz  $\mathbf{P}$ , y las probabilidades de los estados en el momento  $t$  son

$$\Pi_t = \Pi_0 \mathbf{P}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ p & 0 & 0 \dots 0 & q \end{bmatrix}^t. \quad (17.3.2)$$

Los productos del vector inicial  $\Pi_0$  (que contiene 10 elementos, de los cuales 9 son ceros) con las potencias de la matriz  $10 \times 10$ , son sucesivamente

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= [0 & 0 & 0 \dots 1], \\ \Pi_0 \mathbf{P} &= [p & 0 & 0 \dots q], \\ \Pi_0 \mathbf{P}^2 &= [qp & p & 0 \dots q^2], \\ \Pi_0 \mathbf{P}^3 &= [q^2 p & qp & p \dots q^3], \\ &\vdots \end{aligned} \quad (17.3.3)$$

Una matriz estocástica es *regular* si al ser elevada a potencias, existe algún  $n$  a partir del cual,  $\mathbf{P}^n$  consiste sólo de elementos positivos (no cero), condición que se puede escribir  $\mathbf{P}^n > 0$ . Esto significa que es posible la transición desde un estado a cualquier otro, por alguna ruta. Resulta natural que esto deba ser así, a partir de las condiciones de nuestra formulación, las que permiten que una mujer vaya de cualquier etapa de embarazo a cualquier otra. Del sexto al quinto mes tomaría al menos 9 meses; del sexto al sexto, al menos 10 meses. El lector puede demostrar formalmente que la matriz  $\mathbf{P}$  de (17.3.2) es regular, por medio de una adaptación del argumento de la sección 4.3. Una cadena regular es ergódica, esto es, se estabilizará, y los valores estables en el vector final,  $\Pi_\infty = \Pi_0 \mathbf{P}^\infty$ , no dependerán del vector inicial (Kemeny y Snell, 1960, sección 2.4).

En la situación de estabilidad, la distribución de un grupo de edades en los diversos estados puede ser estimada mediante un conjunto de ecuaciones lineales. Si la matriz estable  $\Pi_\infty$  es

$$\Pi_\infty = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \dots \pi_9],$$

la condición de estabilidad es la ecuación matricial

$$\Pi_\infty = \Pi_\infty \mathbf{P},$$

que es la misma que las nueve ecuaciones homogéneas

$$\begin{aligned} \pi_0 &= p\pi_9, \\ \pi_1 &= \pi_0, \\ \pi_2 &= \pi_1, \\ &\vdots \\ \pi_8 &= \pi_7, \end{aligned} \quad (17.3.4)$$

y éstas, junto con las condiciones no homogéneas sobre las probabilidades de un conjunto exhaustivo de eventos mutuamente excluyentes

$$\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_9 = 1, \quad (17.3.5)$$

se puede resolver para las  $\pi$  lo que viene a dar

$$\pi_0 = \pi_1 = \cdots = \pi_9 = p/(9p + 1)$$

y

$$\pi_9 = 1/(9p + 1).$$

El vector estable es en consecuencia

$$\Pi_{\infty} = \left[ \frac{p}{9p + 1} \quad \frac{p}{9p + 1} \quad \cdots \quad \frac{p}{9p + 1} \quad \frac{1}{9p + 1} \right]. \quad (17.3.6)$$

Si el período estéril es de  $h - 1$  meses, entonces los 9 en (17.3.6) se reemplazan por  $h - 1$ . Es posible hacer un análisis adicional de la forma general de la matriz  $P^h$  definida en (17.3.2), en términos de las raíces características de  $P$ , determinadas a partir de  $|P - \lambda I| = 0$ , una ecuación en forma de determinante que el lector puede evaluar como

$$|P - \lambda I| = \lambda^h - q\lambda^{h-1} - p = 0. \quad (17.3.7)$$

La unidad es la raíz dominante de (17.3.7), y se puede encontrar una aproximación asintótica correspondiente al término principal de (3.2.23), por el método usado para el diferente problema de la sección 3.2. Roger Avery ha señalado que la matriz de (17.3.2) se puede generalizar para tomar en cuenta el aborto espontáneo, reemplazando los 1 por las probabilidades de continuar el embarazo, y completando con los complementos de éstos la última columna.

Si el objeto consiste meramente en calcular el vector estable real (17.3.6), se dispone de una línea de razonamiento alternativa y menos técnica. Supongamos que la probabilidad de concepción de una mujer que no está embarazada en algún mes dado es  $p$ . Entonces, el número medio de intentos para cada éxito es  $1/p$ , como vimos en la sección 17.2. Si el período no susceptible es de  $h - 1$  meses, supuesto que no está sujeto a variación alguna (aleatoria o de otro tipo), entonces el tiempo medio desde un embarazo al siguiente es de  $h - 1 + 1/p$  meses. Entre un grupo grande de mujeres con este intervalo medio, la tasa de embarazo, que es la misma que la proporción en su primer mes de embarazo es

$$\frac{1}{h - 1 + 1/p} = \frac{p}{(h - 1)p + 1}, \quad (17.3.8)$$

lo cual está de acuerdo con el primer elemento de (17.3.6) cuando  $h=10$ . De manera similar para la proporción de mujeres que están en el segundo, tercero, ...,  $(h-1)$  ésimo mes de embarazo; si todo embarazo lleva a un nacido vivo, entonces, entre un grupo grande, después que el proceso ha estado en marcha por algún tiempo, el mismo número de mujeres estará en cada uno de los  $(h-1)$  estados. Y si  $p/[(h-1)p+1]$  están en cada uno de los estados de embarazo, o  $(h-1)p/[(h-1)p+1]$  en todos, entonces el resto, o sea

$$1 - \frac{(h-1)p}{(h-1)p+1} = \frac{1}{(h-1)p+1}, \quad (17.3.9)$$

debe estar en el  $h$  ésimo estado, el de no embarazo o susceptibilidad. Este argumento un tanto intuitivo justifica aproximadamente (17.3.6).

Para un ejemplo numérico de los resultados (17.3.8) y (17.3.9), supongamos un período no susceptible de  $h-1=9$  meses, y  $p=0,18$  la probabilidad de concepción en cualquier mes dado. Entonces la tasa asintótica de concepción mensual (igual a la tasa bruta de natalidad para una población grande) será

$$0.18/[9(0.18) + 1] = 0.0687.$$

Si la contracepción se usa ahora universalmente con un 50 por ciento de eficacia, entonces  $p$  baja a 0,09, y la tasa bruta de natalidad a  $0,09/[9(0,09) + 1] = 0,0497$  por mes, que equivale a una reducción del 28 por ciento. Si, por otra parte, el 50 por ciento de la población usa anticonceptivos con 100 por ciento de eficacia, la reducción en la tasa de natalidad es de 50 por ciento. (Véase Tietze, (1962) para medidas de la eficacia anticonceptiva.)

Dichas tasas se pueden traducir a números esperados de hijos durante un período de vida reproductiva de 20 años = 240 meses. La  $p$  de 0,18, no considerando el período estéril, da  $240 \times 0,18 = 43$  nacimientos, descontando por el período de esterilidad esto se reduce a un más razonable máximo de  $240 \times 0,0687 = 16,5$ . Si el 50 por ciento de las mujeres usa anticonceptivos con 100 por ciento de eficacia después de tener dos hijos, el promedio bajará a  $\frac{1}{2}(16,5 + 2,0) = 9,2$ ; si todas las mujeres usan la contracepción con 50 por ciento de eficacia después de dos hijos, el promedio será

$$2.0 + (240 - 28)(0.0497) = 12.5,$$

donde descontamos 28 meses por dos períodos de esterilidad de 9 meses cada uno y dos períodos de espera de 5 meses cada uno.

El argumento conduce a una política de persuasión de mujeres para que usen anticonceptivos efectivamente. Si (en un país) la eficacia con que todas las mujeres usan anticonceptivos es  $1-e$ , y (en otro país) la proporción de mujeres que usan anticonceptivos con eficacia perfecta es  $1-\alpha$  (el resto no usa), entonces, para un efecto equivalente de la tasa bruta de natalidad asintótica, tenemos

$$\frac{0.18e}{9(0.18e) + 1} = \alpha \frac{0.18}{9(0.18) + 1}$$

o, dividiendo por 0,18 y tomando recíprocos,

$$1.62 + \frac{1}{e} = \frac{2.62}{\alpha},$$

que es una relación lineal en los recíprocos. Para pequeños cambios  $\Delta\alpha$  y  $\Delta e$  tenemos

$$\frac{\Delta e}{e^2} = 2.62 \frac{\Delta\alpha}{\alpha^2},$$

de modo que, en el margen, se requeriría un cambio en  $e$  de  $2,62e/\alpha$  por ciento para igualar el efecto de un 1 por ciento de cambio en  $\alpha$ . Esto es suponiendo un período de esterilidad de 9 meses, que es indudablemente bajo. Mindel Sheps (1967, pág. 13) supone un período de 18 meses; el lector verá en su calculadora de escritorio en qué medida las conclusiones anteriores son corroboradas por períodos más prolongados de no susceptibilidad. Dibuje la curva de  $1 - e$  contra  $1 - \alpha$  para distintos períodos.

El intervalo de esterilidad por embarazo es menos importante donde los padres han tenido todos los hijos que desean y están aspirando a un 100 por ciento de eficacia anticonceptiva (Tietze, 1962). Los efectos de lograr sólo un 95 por ciento de eficacia bien pueden ser sorprendentes. Supongamos que 95 por ciento de efectividad lleva la probabilidad de concepción en cualquier mes a 0,01. Entonces, la probabilidad de evitar durante 20 años (ó 240 meses) todos los nacimientos es sólo  $(0,99)^{240} = 0,09$ , un valor no afectado por el período no susceptible. El número esperado de nacimientos en 20 años es  $240(0,01) = 2,4$ , calculado en base a la distribución binomial y sin considerar el período de esterilidad del embarazo. Esto sería reducido muy levemente si tomamos en cuenta dicho período, a aproximadamente  $240[0,01/(0,09 + 1)] = 2,2$ . Las parejas féculdas que usan anticonceptivos todo el tiempo y que alcanzan un 95 por ciento de efectividad anticonceptiva pueden esperar más de dos hijos en 20 años, bajo las suposiciones que aquí hemos hecho. Si ellos quieren un número esperado de 3 hijos, entonces sólo durante  $3/p = 17$  meses, más los tres períodos de embarazo en el curso de los 20 años, podrían ellos arriesgarse a no usar anticonceptivos en absoluto; durante 196 meses tendrían que tener cuidado.

Otros temas de discusión, para los que podría ser útil un análisis formal, surgen de la importante distinción entre planificación familiar, que permite a las mujeres tener el número de hijos que desean, y planificación de la población, por medio de la cual el número total se restringe a lo que se pueda sostener colectivamente (Davis, 1967). La relación entre variables sociales por una parte y variables intermedias, incluyendo el uso de anticoncepción, por la otra, es presentada por Davis y Blake en un artículo clásico (1956).

La utilidad de descontar por un período de esterilidad, al pensar en el proceso de concepción y nacimiento, y especialmente al considerar el efecto de la contracepción, justifica la presentación de una deducción adicional. La técnica de ecuaciones en diferencias publicada por D. Basu (1955) arroja más luz sobre el argumento precedente.



Supongamos que la probabilidad de concepción para el mes  $n$  es  $P_n$ . Si no ocurrió ninguna concepción en el momento cero, de lo cual la probabilidad es  $q$ , entonces, todas las probabilidades posteriores son las mismas excepto que se pueden medir a partir del momento 1. Con respecto a esta posibilidad  $P_n$  es  $qP_{n-1}$ . Si en el momento cero hubo una concepción, de lo cual la probabilidad es  $p$ , entonces las probabilidades posteriores, desde el momento  $h$  en adelante son las mismas, pero ahora medidas a partir del momento  $h$ , y con respecto a esto  $P_n$  es igual a  $pP_{n-h}$ . Combinando estas dos posibilidades, mutuamente excluyentes y exhaustivas, sobre  $P_0$  resulta

$$P_n = qP_{n-1} + pP_{n-h}, \quad n > 0, \quad (17.3.10)$$

donde definimos  $P_n = 0$ ,  $n < 0$ . [Esta sucinta manera de justificar (17.3.10), considerando tres escalas de tiempo, se debe a D. Sharma].

Si la función generatriz de las  $P_n$  es

$$\phi(s) = P_0 + P_1s + P_2s^2 + \dots,$$

entonces, multiplicando la ecuación de recurrencia (17.3.10) —que contiene  $P_n$  a la izquierda— por  $s^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y sumando resulta en

$$\phi(s) = p + qs\phi(s) + ps^h\phi(s), \quad (17.3.11)$$

y resolviendo para  $\phi(s)$ , tenemos

$$\phi(s) = p/(1 - qs - ps^h). \quad (17.3.12)$$

Si hacemos  $s$  igual a  $1/\lambda$ , entonces (17.3.12) se convierte en

$$\frac{p\lambda^h}{\lambda^h - q\lambda^{h-1} - p},$$

cuyo denominador es idéntico con el primer miembro de (17.3.7). [¿Qué demuestra esto?]

Las raíces de la ecuación polinómica de grado  $h$ ,  $ps^h + qs - 1 = 0$  son 1 y números negativos, o complejos de valor absoluto *mayor* que 1, como se puede demostrar adaptando el argumento que se siguió en (5.2.3), usado para la ecuación integral en el capítulo 5. Efectúe la prueba comenzando por poner

$$s = e^z(\cos y + i \sin y)$$

en  $ps^h + qs = 1$ , igualando las partes reales y comparando con la ecuación en la raíz real  $s = 1$ .

Expresando el segundo miembro de (17.3.12) en crecientes potencias de  $s$ , obtendríamos como coeficientes de  $s$  las probabilidades, consideradas desde un

punto inicial cero, de una concepción en el ceroésimo, primero, segundo, etc. mes. Si bien es cierto que esto se puede hacer para comprobar el procedimiento, ello no nos acerca a una solución. Pero la forma de (17.3.12) sugiere que el análisis de la sección 5.8 puede ser aplicable. La función generatriz queda más simple desarrollándola en fracciones parciales, factorizado el denominador en  $(1-s)R(s)$ , donde  $R(s)$  tiene raíces  $s_i$  en  $s$  tal que  $|s_i| > 1$ . Si pensamos en las fracciones  $-A_i/(s-s_i)$  que surgirían y las imaginamos desarrolladas en crecientes potencias de  $(s/s_i)$ , resulta claro que su influencia sobre la solución disminuye a medida que las potencias de  $(s/s_i)$  van ascendiendo, lo que equivale a decir, a medida que el tiempo va transcurriendo. Finalmente, lo único que prevalece es el término  $As^t$  correspondiente a la raíz igual a 1 y él constituye la solución *asintótica*; un poco en el sentido en que  $u_t s^t$ ; donde  $u_t = 1/[{}_1^{t+1}F_1(s_1)]$  es el primer término de (5.8.6), constituye la solución, para un  $t$  suficientemente grande, en el conjunto de ecuaciones (5.8.2). Necesitamos conocer explícitamente  $A$ .

La descomposición en fracciones parciales de  $\phi(s)$  a partir de (17.3.12) se puede escribir

$$\phi(s) = \frac{p}{1 - qs - ps^h} = \frac{A}{1-s} + \frac{B(s)}{R(s)},$$

multiplicando por  $1-s$  y tomando límites cuando  $s$  tiende a 1, nos da para la constante  $A$

$$A = p \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{1-s}{1-qs-ps^h} \right) = -p \left/ \frac{d(1-qs-ps^h)}{ds} \right|_{s=1} = \frac{p}{q+hp}. \quad (17.3.13)$$

El desarrollo asintótico se obtiene despreciando  $B(s)/R(s)$ :

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{p}{1-qs-ps^h} \sim \frac{A}{1-s} \\ &= \frac{p}{q+hp} (1+s+s^2+s^3+\dots); \end{aligned}$$

o sea, la probabilidad de una concepción en un mes cualquiera es

$$p/(q+hp) = p/(1+(h-1)p), \quad (17.3.14)$$

lo que concuerda con el resultado del argumento anterior, como se expresó en (17.3.8) o, para  $h=10$ , en (17.3.6). Como en el capítulo 5, las raíces complejas (obtenidas igualando el denominador  $R(s)$  a cero, y omitidas en este tratamiento) producirán ondas de amplitud decreciente en la aproximación a la probabilidad asintótica (17.3.14).

Mindel Sheps demuestra en un trabajo inédito que este enfoque se puede extender fácilmente para tomar en cuenta las pérdidas fetales, al menos cuando las pérdidas ocurren en un tiempo fijo, digamos  $w$ , después de la concepción.

Supongamos que  $\pi$  es la probabilidad que tiene una mujer susceptible de iniciar una concepción de que ésta resultará en aborto espontáneo  $w$  meses después,  $p$  la probabilidad de una concepción que tendrá por resultado un nacido vivo, y  $q = 1 - \pi - p$ . Entonces, en lugar de (17.3.10) obtenemos para  $P_n$ , la probabilidad de que una concepción conduzca a un nacimiento vivo en el mes  $n$ :

$$P_n = 0, \quad n < 0,$$

$$P_0 = p,$$

$$P_n = qP_{n-1} + \pi P_{n-w} + pP_{n-h}, \quad n > 0.$$

Ahora multiplicando  $P_n$  por  $s^n$  y sumando da

$$\phi(s) = p + qs\phi(s) + \pi s^w \phi(s) + ps^h \phi(s),$$

y despejando  $\phi(s)$  se ve que es

$$\phi(s) = \frac{p}{1 - qs - \pi s^w - ps^h}. \quad (17.3.15)$$

La ecuación (17.3.12) es el caso especial en que  $\pi$ , la probabilidad de pérdida, es cero.

La probabilidad asintótica de concepción que conduce a un nacimiento vivo, obtenida despreciando las fracciones parciales más allá de la primera, está dada por los coeficientes de  $s$  en el término principal de  $A/(1-s)$ , es decir, por  $A$ . Esto se obtiene de (17.3.15) tomando una derivada como antes:

$$A = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{(1-s)p}{1 - qs - \pi s^w - ps^h} \right) = \frac{p}{q + \pi w + ph}, \quad (17.3.16)$$

comparable con (17.3.14) (Sheps y Perrin, 1963, pág. 1035).

Tres formulaciones diferentes han producido los resultados idénticos (17.3.6), (17.3.8) y (17.3.14), para la tasa asintótica de embarazo y con cada una se podría producir (17.3.16). La probabilidad final de estar en un mes dado de embarazo,  $p/(9p+1)$  o  $p/[(h-1)p+1]$ , es obtenida mediante otros métodos por Henry (1957, 1961) y Dandekar (1955).

### El contador de tipo I

Podemos necesitar saber más acerca de la distribución de los embarazos durante un intervalo de tiempo dado. Para las varianzas y momentos de orden superior no bastará la solución presentada arriba. Feller (1948) proporciona un elegante análisis del contador de Tipo I para partículas radioactivas, trabajando en base a una ecuación de renovación similar a (5.1.1). Consideraciones secundarias acerca del método de Feller se pueden encontrar en Bharucha-Reid (1960, pág. 299) y Fisz (1962, cap. 5). Sheps (1967) reseña la extensa literatura sobre los modelos de concepción y nacimiento.

#### 17.4. SIMULACION

Louis Henry (1953a, 1957, 1961) fue uno de los primeros en el estudio de modelos estocásticos para reproducción. El afianza los resultados del presente capítulo y desarrolla un modelo en que el orden de los nacimientos juega un papel central. Perrin y Sheps (1964) consideran un proceso estocástico que reconoce cinco estados, no solo fecundable y embarazo, sino también tres tipos de esterilidad, además del embarazo, que son los que siguen a la pérdida fetal, nacido muerto y a un nacido vivo. El mismo mejora las versiones anteriores al considerar todo en tiempo continuo (y no en tiempo discreto como ocurre con casi toda la exposición precedente), y al hacer del intervalo estéril debido a pérdida, una variable aleatoria. Sheps y Menken (1967) proveen una clasificación, resumen y reconciliación de la diversa y extensa literatura.

A un cierto punto en la construcción de modelos probabilísticos, la matemática se vuelve inmanejable y así se hace natural el uso de simulación. Sheps (1967), Perri y Sheps (1965), Sheps y Ridley (1965b), y Hyrenius (1964) han diseñado simulaciones acerca de embarazo y nacimiento. Orcutt y otros (1961) efectuaron una promisoría simulación de gran escala, que no sólo incluía nacimientos y defunciones, sino también la formación de hogares y el ingreso a la población activa. Más recientemente, Horvitz y otros (1967) han emprendido una extensa simulación que debería dar por resultado nuevos descubrimientos acerca de la fecundidad y crecimiento de la población.

## EL PROCESO DE RAMIFICACION COMO UN MODELO DE POBLACION

El proceso de ramificación tiene sus raíces en la discusión de Francis Galton sobre "la decadencia de las familias de hombres que ocuparon posiciones conspicuas en tiempos pasados". Pocos de los grandes escritores y estadistas del pasado tienen descendientes vivos actualmente. La gente ha señalado esto como una evidencia de que "una elevación en el confort físico y capacidad intelectual está necesariamente acompañada por una disminución en la fecundidad". Pero si "por la ley común de las probabilidades, una gran proporción de familias está muriendo continuamente, evidentemente resulta que hasta que sepamos qué proporción es, no podemos estimar si cualquier disminución de apellidos entre las familias cuya historia podemos delinear es o no un signo de fecundidad disminuida" (Galton y Watson, 1874, pág. 138). El enunciado juicioso de la teoría lo proporciona Harris (1963), basado en cientos de artículos disponibles y en sus propias contribuciones. Las aplicaciones en física nuclear y química han llegado a ser importantes. Estamos aquí en presencia de un caso entre muchos de un método ideado para el estudio del hombre y que ha resultado fructífero en el estudio de la naturaleza.

Después de un resultado importante en términos de la función iterada (18.1.2) abajo, se describirá un método de uso del computador para calcular distribuciones en generaciones sucesivas, y se exhibirán los resultados de los cálculos.

### 18.1. TEORIA DE RAMIFICACION

El punto de partida es un conjunto de probabilidades  $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$ , de que un hombre no tenga hijos varones, tenga un hijo varón, dos hijos varones, etc. o que una mujer no tenga hijas, tenga una hija, etc. Estas probabilidades se aplican independientemente a cada individuo, sea grande o pequeña la familia en que nació. Podemos calcular las probabilidades para los nietos varones: la probabilidad de que un hombre no tenga hijos) más la probabilidad de que tenga un hijo varón que no tenga hijos varones  $\pi_1\pi_0$  más la probabilidad de que tenga dos hijos varones ninguno de los cuales tiene un hijo varón,  $\pi_2\pi_0^2$ , etc. Para cualquier otro resultado se podrían similarmente seguir todas las rutas (mutuamente excluyentes) posibles y sumar las probabilidades de todas ellas.

#### La función iterada

El recurso usado por Watson para resolver el problema formulado por Galton

fue una función generatriz que sistematiza el cálculo de probabilidades. El estudio

$$f(s) = \pi_0 + \pi_1 s + \pi_2 s^2 + \dots, \quad (18.1.1)$$

que el lector puede comparar con la función generatriz bastante diferente  $F(s)$  de (5.8.3) o  $\phi(s)$  usada en (17.3.11). Entre otras diferencias la suma de las probabilidades que tenemos aquí,  $f(1)$ , debe ser igual a 1. [¿Cuál es el valor de  $F(1)$  en (5.8.3)?] Evidentemente  $f(0)$  es la probabilidad de cero hijos varones, vale decir, la probabilidad de extinción en la primera generación. La distribución del número de hijos varones en dos hombres está dada por los coeficientes de las potencias de  $s$  en

$$\begin{aligned} [f(s)]^2 &= (\pi_0 + \pi_1 s + \pi_2 s^2 + \dots)^2 \\ &= \pi_0^2 + 2\pi_0\pi_1 s + (2\pi_0\pi_2 + \pi_1^2)s^2 + \dots \end{aligned}$$

como se puede verificar prontamente por enumeración de las diversas posibilidades. Por ejemplo, la probabilidad de que dos hombres tengan en total dos hijos varones es  $2\pi_0\pi_2 + \pi_1^2$ , etc., siempre bajo el supuesto de independencia y con la aplicabilidad del mismo conjunto de probabilidades.

Esto proporciona la distribución de probabilidad de los nietos varones. La probabilidad de que un hombre tenga dos hijos varones es  $\pi_2$ ; la distribución (condicional) de los hijos varones de estos dos está dada por los coeficientes de las potencias de  $s$  en  $[f(s)]^2$ . En consecuencia, si no sabemos cuántos hijos varones tendrá, las probabilidades de que tenga dos, y que tenga cero, uno, dos ... nietos varones son los coeficientes de  $s^0, s^1, s^2, \dots$  en  $\pi_2[f(s)]^2$ . Las correspondientes probabilidades no condicionales para nietos varones que cubren el caso de tres nietos varones son los coeficientes de las potencias de  $s$  en  $\pi_3[f(s)]^3$ . Por tanto podemos decir, en base al supuesto de probabilidades constantes e independientes, que las probabilidades de cero, uno, dos, etc. nietos se obtienen como los coeficientes de  $s^0, s^1, s^2, \dots$  en

$$\pi_0 + \pi_1[f(s)] + \pi_2[f(s)]^2 + \pi_3[f(s)]^3 + \dots \quad (18.1.2)$$

Pero (18.1.2) es exactamente lo mismo que (18.1.1) con  $f(s)$  ocupando el lugar de  $s$ , y se puede escribir  $f[f(s)]$  o  $f_2(s)$ . Se puede continuar la iteración de  $f(s)$ ; la distribución de los números de bisnietos estaría dada por los coeficientes de  $s$  en  $f_3(s) = f\{f[f(s)]\}$ , etc. Cada una de las iteraciones se deduce de la anterior:  $f_{n+1}(s) = f[f_n(s)]$  y podemos iterar en grupos sin afectar la respuesta:

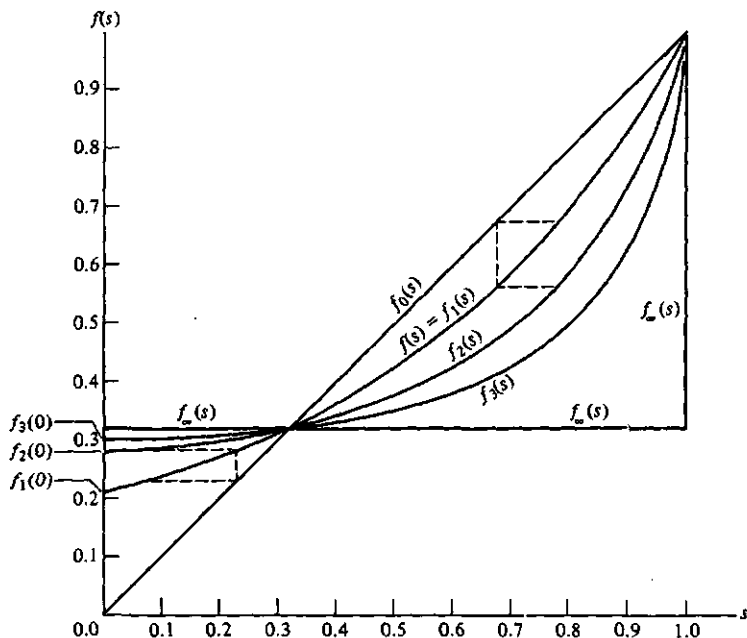
$$f_{m+n}(s) = f_m[f_n(s)] = f_n[f_m(s)],$$

para todo entero  $m > 0, n > 0$ .

La probabilidad de extinción en la primera generación es  $\pi_0$  o  $f(0)$ . En la segunda generación, nietos, es  $f[f(0)]$  o  $f_2(0)$ , y en la  $n$  ésima generación es  $f_n(0)$ . La probabilidad de extinción en la  $(n+1)$  ésima generación debe ser al menos tan grande como la de la  $n$  ésima. Un examen del proceso algebraico mediante el cual se forma  $f_{n+1}(s)$  a partir de  $f_n(s)$  demuestra que el término absoluto  $f_n(0)$

Gráfico 18.1

FUNCION ITERADA  $f_n(s)$  PARA  $n = 0, 1, 2, 3, \infty$ . MUJERES JAPONESAS DE 45-49 AÑOS, CENSO DE 1960



puede aumentar con  $n$ , pero nunca puede decrecer de modo que  $f_n(0)$  debe ser una sucesión monótonamente no decreciente en  $n$ . Además,  $f_n(0)$  tiene una cota superior, correspondiente a la probabilidad de extinción de la unidad, y cualquier serie monótonamente creciente con una cota superior debe tener un punto límite único.

Para determinar este punto límite, notemos que:

- a) en el límite  $f_{n+1}(0)$  será igual a  $f_n(0)$ ,
- b) por definición para todo  $n$ ,  $f_{n+1}(0) = f[f_n(0)]$ .

De a) y b) tenemos en el límite la ecuación

$$f_n(0) = f[f_n(0)],$$

de modo que el valor límite  $x$ , digamos de  $f_n(0)$  es la raíz real entre 0 y 1 de

$$x = f(x), \tag{18.1.3}$$

si tal raíz existe (Feller, 1957, pág. 275).

Las sucesivas iteraciones de  $f(s)$  se intersectan con seguridad en el punto en que  $s = f(s)$ , puesto que donde  $s = f(s)$  tendremos  $s = f[f(s)]$ , etc. Esto y (18.1.3) fijan dos puntos en  $f_\infty(s)$ , una función no decreciente de  $s$  para todo  $0 \leq s \leq 1$ , y puesto que sus ordenadas son las mismas,  $f_\infty(s)$  debe ser una recta horizontal en el intervalo que va de 0 a  $x$ .

En el punto de aplicación de esta teoría nos apartamos de la exposición

## MUESTRA 18.1

DISTRIBUCION  $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$  DE MUJERES DE ACUERDO AL NUMERO DE HIJAS MUJERES, DEDUCIDA DE LA DISTRIBUCION  $c_0, c_1, c_2, \dots$  DE ACUERDO AL NUMERO DE HIJOS (Véase págs. 411-412).

Número total hijos/hijas	Número de mujeres	Computada como si tuviera 0, 1, 2, ... hijas mujeres			
		0	1	2	...
0	$c_0$	$c_0$			...
1	$c_1$	$c_1(1-g)$	$c_1g$		...
2	$c_2$	$c_2(1-g)^2$	$2c_2(1-g)g$	$c_2g^2$	...
3	$c_3$	$c_3(1-g)^3$	$3c_3(1-g)^2g$	$3c_3(1-g)g^2$	...
4	$c_4$	$c_4(1-g)^4$	$4c_4(1-g)^3g$	$6c_4(1-g)^2g^2$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Total	$\frac{c}{c}$	$\frac{\pi_0 c}{\pi_0 c}$	$\frac{\pi_1 c}{\pi_1 c}$	$\frac{\pi_2 c}{\pi_2 c}$	...

de Galton en términos de hombres y sus hijos varones a lo que los datos comúnmente disponibles permiten—mujeres e hijas mujeres. El gráfico 18.1 muestra la primera, segunda, tercera, y última iteraciones,  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$ ,  $f_3(s)$ , y  $f_\infty(s)$ , para las mujeres japonesas de 45-49 años de edad, tal como ellas informaron retrospectivamente acerca del número de sus hijos en el censo de 1960. Los datos primarios fueron la distribución de las mujeres de acuerdo al total de hijos nacidos (Naciones Unidas, *Demographic Yearbook*, 1963, tabla 16); de éstos se dedujo la distribución de las mismas mujeres según el número de hijas mujeres que sobreviven a edad madura, usando un recurso discutido abajo e ilustrado en la muestra 18.1. En el cuadro 18.1 se proporciona una información más detallada sobre la misma población, donde el cambio de  $f_n(s)$  hacia una recta con un salto en  $s=1$  continúa hasta  $f_q(s)$ . Calculada la curva de  $f_{10}(s)$  en doble precisión (no aparece en la tabla) ésta permaneció entre  $f_{10}(s) = 0,32$  y  $f_{10}(s) = 0,35$  en todo el rango desde  $s = 0,00$  a  $s = 0,98$ , y luego fue de  $0,35$  a  $1,00$  entre  $s = 0,98$  y  $s = 1,00$ . Para  $n$  finito dado, las curvas de  $f_n(s)$  son ascendentes y cóncavas hacia arriba (donde  $s > 0$ ), puesto que  $f'(s)$  y  $f''(s)$  son mayores que cero.

Los diversos métodos para la solución de la ecuación característica  $\psi(r)$  de (5.2.2) en la sección 5.3 están disponibles para  $s = f(s)$ . El lector puede aplicar cualquiera de éstos o el método de la secante de la sección 3.2 a los datos para Israel, 1961 (cuadro 18.2). Aquí  $s = f(s)$  es

$$s = 0.2767 + 0.3289s + 0.1949s^2 + 0.0862s^3 + 0.0509s^4 \\ + 0.0329s^5 + 0.0183s^6 + 0.0080s^7 + 0.0026s^8 + 0.0006s^9.$$

El lector encontrará que  $s - f(s) = 0,00522$  para  $s = 0,5$ ;  $s - f(s) = -0,00202$  para  $s = 0,52$ ; la recta de interpolación da  $s - f(s) = 0$  para  $s = 0,5144$ . Verifique que  $0,5144 = f(0,5144)$ .

## Una formulación matricial

En vez de programar la extensa álgebra para manipular las probabilidades individuales mediante la función iterada, expresamos lo último como una matriz



## CUADRO 18.1

ITERACIONES SUCESIVAS DE LA FUNCION GENERATRIZ DE LA DISTRIBUCION  
DE PROBABILIDADES DE LAS MUJERES JAPONESAS  
DE 45-49 AÑOS EN 1960 SEGUN NUMERO DE HIJAS MUJERES NACIDAS\*

s	$f_1(s)$	$f_2(s)$	$f_3(s)$	$f_4(s)$	$f_5(s)$
0.0	0.2092	0.2752	0.3020	0.3139	0.3194
0.1	0.2375	0.2863	0.3068	0.3161	0.3204
0.2	0.2717	0.3005	0.3132	0.3191	0.3218
0.3	0.3130	0.3190	0.3217	0.3231	0.3237
0.4	0.3630	0.3434	0.3335	0.3287	0.3264
0.5	0.4238	0.3764	0.3503	0.3370	0.3304
0.6	0.4978	0.4223	0.3756	0.3499	0.3367
0.7	0.5881	0.4882	0.4160	0.3720	0.3480
0.8	0.6986	0.5868	0.4872	0.4153	0.3716
0.9	0.8339	0.7415	0.6313	0.5242	0.4404
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Aumento de  $f_5(s)$  a  $f_6(s)$  para  $s = 0,9$  a  $s = 1,0$

s	$f_5(s)$	$f_6(s)$	$f_7(s)$	$f_8(s)$	$f_9(s)$
0.90	0.4404	0.3861	0.3555	0.3395	0.3316
0.91	0.4545	0.3946	0.3601	0.3419	0.3328
0.92	0.4714	0.4052	0.3659	0.3449	0.3342
0.93	0.4920	0.4185	0.3734	0.3487	0.3362
0.94	0.5175	0.4357	0.3834	0.3540	0.3388
0.95	0.5497	0.4588	0.3973	0.3615	0.3426
0.96	0.5913	0.4908	0.4177	0.3729	0.3485
0.97	0.6467	0.5377	0.4500	0.3919	0.3586
0.98	0.7229	0.6115	0.5073	0.4287	0.3793
0.99	0.8327	0.7399	0.6296	0.5227	0.4393
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$$\begin{aligned}
 f_1(s) = & \pi_0 + \pi_1 s + \pi_2 s^2 + \dots = 0.20917 + 0.25838s \\
 & + 0.23595s^2 + 0.15933s^3 + 0.08275s^4 + 0.03567s^5 \\
 & + 0.01331s^6 + 0.00420s^7 + 0.00106s^8 + 0.00016s^9 \\
 & + 0.00002s^{10}.
 \end{aligned}$$

\* Programado por Thomas G. Donnelly y William Taylor.

## CUADRO 18.2

PRIMEROS SEIS ELEMENTOS DE LAS DIEZ PRIMERAS FILAS DE LA MATRIZ INFINITA  $P$  PARA LAS MUJERES DE ISRAEL DE 45-49 AÑOS, 1961\*

1.0000	0	0	0	0	0	...
0.2767	0.3289	0.1949	0.0862	0.0509	0.0329	...
0.0765	0.1820	0.2160	0.1759	0.1229	0.0853	...
0.0212	0.0755	0.1345	0.1618	0.1535	0.1287	...
0.0059	0.0279	0.0662	0.1055	0.1295	0.1338	...
0.0016	0.0096	0.0286	0.0569	0.0861	0.1075	...
0.0004	0.0032	0.0114	0.0272	0.0490	0.0722	...
0.0001	0.0010	0.0043	0.0119	0.0250	0.0425	...
0.0000	0.0003	0.0016	0.0049	0.0118	0.0228	...
0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0052	0.0113	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

\* Programado por Andrea Tyree.

y así reducimos a una multiplicación matricial el problema de averiguar la probabilidad de que una línea de descendencia contenga exactamente  $n$  miembros en  $x$  generaciones.

Aun con las restricciones de que la edad no está considerada, que estamos siguiendo un solo sexo, por ejemplo mujeres, y que las generaciones van a ser la unidad de referencia, llamamos  $E_0$  al estado de no tener hijas mujeres durante el curso de la vida,  $E_1$  al de tener una hija mujer,  $E_2$  al de tener dos hijas mujeres, etc. Entonces el vector que representa las probabilidades de alcanzar estos estados al cabo de la vida reproductiva de una mujer será

$$\Pi = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots] \cong [\text{Pr } E_0 \quad \text{Pr } E_1 \quad \text{Pr } E_2 \quad \dots].$$

Piense en una matriz infinita  $P$ , que postmultiplica el vector  $\Pi$ , si es necesario convertido en vector infinito llenándolo con ceros, para llevar cualquier generación a la próxima. Para llevar la primera generación a la segunda tenemos

$$\Pi P = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \dots] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots \\ \pi_0^2 & 2\pi_1\pi_0 & 2\pi_2\pi_0 + \pi_1^2 & \dots \\ \pi_0^3 & 3\pi_1\pi_0^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \quad (18.1.4)$$

Para construir  $P$  se requiere una fórmula simple (18.1.5 abajo) basada en el hecho de que lo que aparece en el casillero  $j$ ésimo de la  $i$ ésima fila es el coefi-

ciente de  $s^{j-1}$  en  $(\pi_0 + \pi_1 s + \pi_2 s^2 + \dots)^{j-1}$  (Galton y Watson, 1874, pág. 140). Los elementos de cada fila se obtienen multiplicando los de arriba y a la izquierda por  $\pi_0, \pi_1, \pi_2$ , etc. De allí que el primer elemento de la cuarta fila es el primer elemento de la tercera multiplicado por  $\pi_0$ , el segundo elemento de la cuarta fila es el segundo elemento de la tercera multiplicado por  $\pi_0$ , más el primer elemento multiplicado por  $\pi_1$ ; el tercero es el tercer elemento de la tercera fila multiplicado por  $\pi_0$  más el segundo de la tercera fila multiplicado por  $\pi_1$  más el primero de la tercera fila multiplicado por  $\pi_2$ , etc. En general

$$P_{ij} = \pi_0 P_{i-1,j} + \pi_1 P_{i-1,j-1} + \pi_2 P_{i-1,j-2} + \dots \quad (18.1.5)$$

Entonces  $\mathbf{P}$  representará la transición desde una mujer que existe con certeza,

$$\mathbf{\Pi} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \dots],$$

a las probabilidades de 0, 1, 2, ... hijas mujeres. Siendo  $\mathbf{\Pi P}$  las probabilidades para los números de hijas entonces para 0, 1, 2, nietas a través de las hijas las probabilidades están dadas por el vector horizontal  $\mathbf{\Pi P}^2$ ; ...; para 0, 1, 2, ... descendientes mujeres a través de la línea femenina en la  $n$  ésima generación, las probabilidades son  $\mathbf{\Pi P}^n$ . Demuestre que la multiplicación por la matriz  $\mathbf{P}$ , cuyos números se calculan mediante (18.1.5), es el equivalente de una iteración de la función generatriz.

Para aplicar este método a datos reales de una sucesión de generaciones, necesitamos conocer la distribución de los individuos de acuerdo con el número de su prole, todo para un sexo. Lotka (1931b, pág. 378) usa la población blanca de los Estados Unidos en 1920 y obtiene de las estadísticas de nacimientos la probabilidad de tener 0, 1, 2, 3, ... hijos. Esto toma en cuenta todos los nacimientos, pero tiene el defecto de que se aplica a un solo período. Podemos evitar la distorsión debida al período, al menos en este caso, usando una fuente diferente: los informes censales de las mujeres de 45-49 años de edad sobre el número de hijos nacidos vivos que han tenido. La ventaja de referirse a una cohorte está aquí acompañada por la desventaja de omitir del análisis a las mujeres que murieron antes de tener 45-49 años. Restringir el análisis a mujeres de 45-49 años, distorsiona la distribución al omitir partes a la izquierda, o sea, en los números más pequeños de hijos.

Necesitamos el número de hijos del mismo sexo cuando aquel de los padres que viven lo hace por un período suficientemente largo como para que sus hijos se conviertan a su vez en padres. Lo que está disponible para los Estados Unidos (*Demographic Yearbook*, 1963, Tabla 16) es sólo la distribución de las mujeres según los hijos (ambos sexos) tenidos, y debemos aplicar un recurso debido a Lotka (1931b, pág. 379; 1939c, pág. 131) para aproximar la distribución de las mujeres según número de hijas mujeres.

Supongamos que la proporción de mujeres que no tienen hijos es  $c_0$ , que tienen un hijo es  $c_1$ , que tienen dos hijos es  $c_2$ , etc., y que la proporción de nacimientos que son del sexo femenino es  $g$ , igual a 0,48793 para los Estados Unidos en 1959-61 de acuerdo a los registros oficiales. Entonces podemos decir que todas las  $c_0$  mujeres no tienen hijas mujeres. De las  $c_1$  madres de un hijo, la proporción con una hija mujer es  $g$ , de modo que  $gc_1$  es un número esperado de todas las mujeres que tienen un hijo y que este hijo sea del sexo femenino. De las  $c_2$  madres con dos hijos, habrá un número esperado  $g^2 c_2$  con dos hijas muje-

res;  $2g(1-g)c_2$  con una hija mujer;  $(1-g)^2c_2$  sin hijas. Procediendo de esta manera (muestra 18.1) dividimos las  $c$  en clases de acuerdo al número de hijas mujeres en una distribución binomial.

Se requiere un ajuste adicional para permitir la posibilidad de morir antes que se alcance la edad reproductiva. Suponemos para todos los individuos la misma probabilidad promedio de sobrevivir a la edad reproductiva. Para las tablas de vida oficiales de los Estados Unidos en 1959-61, encontramos que  $l_{25}/l_0$  es 0,96418. Esto se puede aplicar en la misma forma que la relación de masculinidad; en realidad se puede incorporar como un factor en la  $g$  del paso precedente. Si pensamos en la probabilidad de que un nacimiento sea no sólo una niña, sino una niña que sobrevive a la edad de 25 años, para reemplazar la  $g$  usada previamente, no se requiere cambio adicional en el procedimiento.

La segunda fila del cuadro 18.2 muestra la distribución de las mujeres según número de hijas mujeres para Israel, 1961, tal como se obtuvo por este método. El cuadro 18.2 como un todo es una parte de la matriz  $\mathbf{P}$  que se construyó en el computador. En principio, tanto la matriz  $\mathbf{P}$  como el vector  $\mathbf{\Pi}$  son infinitos en tamaño; nuestra aproximación fue de  $150 \times 150$  para la primera y  $150 \times 1$  para el último, necesitando 22 500 posiciones de memoria para  $\mathbf{P}$  y 150 para  $\mathbf{\Pi}$ .

La distribución de probabilidades para generaciones sucesivas aparece en las filas sucesivas del cuadro 18.3 siendo cada una el vector  $\mathbf{\Pi}$  de (18.1.4) después de la multiplicación por  $\mathbf{P}^x$ . El lector puede verificar la transición de una fila a la siguiente, al menos para las primeras generaciones y números de descendientes. Por ejemplo, la probabilidad de una ( $n=1$ ) bisnieta ( $x=3$ ) se obtiene como el producto interno de la fila para nietas en el cuadro 18.3 ( $x=2$ ) por la segunda columna de la matriz  $\mathbf{P}$  del cuadro 18.2:

$$(0.3847)(0) + (0.1519)(0.3289) + (0.1224)(0.1820) + \dots = 0.0811,$$

que concuerda con el segundo elemento de la tercera fila del cuadro 18.3.

A la altura de la decimotercera generación la probabilidad de extinción es para Israel tan alta cuanto 0,5134, en tanto que la probabilidad de tener aun sólo un descendiente es apenas 0,0007. La más alta probabilidad individual aparte de cero es de veinte descendientes, pero aun ésa es sólo 0,00077 (no aparece en el cuadro). Un cálculo similar para la población femenina de Estados Unidos, 45-49 años, en 1960, muestra que la probabilidad de cero descendientes es 0,79878; de uno, 0,00594; de dos, 0,00611, en la decimotercera generación. Cuando se toman en cuenta más generaciones, estas probabilidades continúan disminuyendo, bajando a un límite cero para algún número dado no cero de descendientes. O la línea se extingue de nuevo o uno tiene cientos o miles de descendientes.

## 18.2. METODO ABREVIADO PARA DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE EXTINCION

La probabilidad de extinción se puede expresar en forma simple suponiendo una progresión geométrica en las  $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$ . Si toda la serie forma una progresión geométrica con razón común  $g$ ,

$$\pi_0 = \pi; \quad \pi_1 = \pi g; \quad \pi_2 = \pi g^2, \dots,$$

PROBABILIDAD DE  $n$  DESCENDIENTES DEL SEXO FEMENINO EN LA  $x$ ésima GENERACION PARA LAS MUJERES ISRAELIES DE 45-49 AÑOS; 1961\*

x	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	. . .
1	0.2767	0.3289	0.1949	0.0862	0.0509	0.0329	0.0183	0.0080	0.0026	. . .
2	0.3847	0.1519	0.1224	0.0844	0.0645	0.0506	0.0387	0.0286	0.0208	. . .
3	0.4384	0.0811	0.0737	0.0595	0.0514	0.0451	0.0391	0.0333	0.0282	. . .
4	0.4681	0.0466	0.0451	0.0392	0.0361	0.0336	0.0311	0.0284	0.0258	. . .
5	0.4856	0.0280	0.0280	0.0254	0.0242	0.0234	0.0224	0.0212	0.0200	. . .
6	0.4962	0.0172	0.0176	0.0164	0.0159	0.0157	0.0153	0.0148	0.0144	. . .
7	0.5028	0.0108	0.0112	0.0105	0.0104	0.0103	0.0102	0.0100	0.0098	. . .
8	0.5069	0.0068	0.0071	0.0067	0.0067	0.0067	0.0067	0.0067	0.0066	. . .
9	0.5095	0.0043	0.0045	0.0043	0.0043	0.0044	0.0044	0.0044	0.0043	. . .
10	0.5112	0.0028	0.0029	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	. . .
11	0.5123	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	. . .
12	0.5130	0.0011	0.0012	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012	. . .
13	0.5134	0.0007	0.0008	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	. . .
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

\* Programado por Andrea Tyree

en tal caso, puesto que la suma de las probabilidades es igual a la unidad,

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots = \pi + \pi g + \pi g^2 + \dots = \pi/(1 - g) = 1, \quad (18.2.1)$$

y  $\pi = 1 - g$ . Además, el número medio de hijas mujeres  $m$  se determina de

$$\begin{aligned} m &= \pi_1 + 2\pi_2 + \dots = \pi g + 2\pi g^2 + \dots \\ &= \pi g/(1 - g)^2 = g/(1 - g) \end{aligned} \quad (18.2.2)$$

aplicando (18.2.1), y en consecuencia

$$g = m/(1 + m); \quad \pi = 1 - g = 1/(1 + m). \quad (18.2.3)$$

Ahora la probabilidad de extinción es la solución en  $s$  de

$$\begin{aligned} s &= f(s) = \pi_0 + \pi_1 s + \pi_2 s^2 + \dots \\ &= \pi + \pi g s + \pi g^2 s^2 + \dots \end{aligned}$$

o

$$s = \pi/(1 - g s). \quad (18.2.4)$$

Sustituyendo los valores de  $g$  y  $\pi$  de (18.2.3) en (18.2.4),

$$s = \frac{1/(1 + m)}{1 - ms/(1 + m)}$$

o

$$(ms - 1)(s - 1) = 0,$$

de lo cual la solución admisible es

$$ms - 1 = 0, \quad \text{o} \quad s = 1/m = \pi/(1 - \pi), \quad (18.2.5)$$

un resultado debido a Steffensen, citado por Lotka (1939c, pág. 136). Este método de un solo parámetro es insatisfactorio; para las mujeres estadounidenses de 45-49 años en 1960 da una probabilidad de extinción de 0.6297, contra 0.8209 obtenido de la ecuación completa  $s = f(s)$ .

Nosotros pasamos ahora a un sistema biparamétrico programado por Lotka (1939c, pág. 130) que supone una progresión geométrica desde el segundo término  $\pi_1$  en adelante. Aquí

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_1 g + \pi_1 g^2 + \dots \\ &= \pi_0 + \pi_1/(1 - g). \end{aligned} \quad (18.2.6)$$

Para la ecuación  $s = f(s)$  tenemos

$$s = \pi_0 + \pi_1 s/(1 - g s). \quad (18.2.7)$$

Eliminando  $\pi_1$  de (18.2.6) y (18.2.7) y no considerando la raíz  $s = 1$  se llega a

$$s = \pi_0/g. \quad (18.2.8)$$

## CUADRO 18.4

PROBABILIDAD DE EXTINCION DE LA LINEA FEMENINA EN LA DECIMOTERCERA GENERACION; PROBABILIDAD DE EXTINCION FINAL SEGUN (18.2.10) Y SEGUN LA ECUACION POLINOMICA  $s = f(s)$ ; CINCO COHORTES DE MUJERES DE 45-49 QUE INFORMARON SOBRE NUMERO DE HIJOS NACIDOS

	Extinción en la 13ª generación usando la matriz <sup>a</sup> (18.1.4)	EXTINCION FINAL SEGUN			
		Progresión geométrica después del primer término (18.2.10)			Ecuación polinómica <sup>b</sup> $s = f(s)$
		$\pi_0$	$\pi_1$	Probabilidad de extinción	
Hungría 1960	0.7020	0.3432	0.3269	0.6834	0.7130
Israel 1961	0.5134	0.2766	0.3289	0.5071	0.5144
Japón 1960	0.3242	0.2092	0.2584	0.3107	0.3242
México <sup>c</sup> 1960	0.4066	0.3047	0.1569	0.3935	0.4066
Estados Unidos 1960	0.7988	0.3864	0.3168	0.7989	0.8209

<sup>a</sup> Programado por Andrea Tyree.

<sup>b</sup> Programado por William Taylor.

<sup>c</sup> Edades 40-49.

Lotka establece  $g$  por mínimos cuadrados de  $\pi_1, \pi_2 \dots$ . Alternativamente, se puede eliminar  $g$  de (18.2.6) y (18.2.7) y resolver para  $s$  en la ecuación cuadrática

$$\frac{1}{1 - \pi_0} - \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{s - \pi_0} - \frac{1}{\pi_1 s}, \quad (18.2.9)$$

de modo que se usa sólo  $\pi_0$  y  $\pi_1$  de los datos. El lector puede probar que las raíces de (18.2.9) son  $s = 1$  (que no es de interés) y

$$s = \frac{\pi_0 - \pi_0^2}{1 - \pi_0 - \pi_1} = \frac{\pi_0}{1 - \pi_1/(1 - \pi_0)}. \quad (18.2.10)$$

El cuadro 18.4 nos muestra una buena concordancia para cinco poblaciones entre la matriz para la decimotercera generación, el cálculo mediante (18.2.10),

## CUADRO 18.5

MUJERES DE 45-49 AÑOS DE EDAD SEGUN NUMERO DE HIJOS DECLARADOS, PERU 1961, CON EL CALCULO ABREVIADO EN (18.2.10) DE LA PROBABILIDAD DE EXTINCION DE LA LINEA FEMENINA MOSTRANDO EL USO DEL METODO DE LA MUESTRA 18.1 PARA ESTABLECER  $\pi_0$  Y  $\pi_1$

$$g = \left( \frac{\text{Nacimientos de niñas}}{\text{Total de nacimientos}} \right) \left( \frac{l_{35}}{l_0} \right) = \left( \frac{173\ 567}{358\ 318} \right) 0,81611 = 0,39532$$

Número de hijos nacidos $i$	Cientos de mujeres que declaran $i$ hijos <sup>a</sup> $c_i$	$(1-g)^i$	$ig(1-g)^{i-1}$
0	192	1	
1	105	0.6047	0.3953
2	115	0.3656	0.4781
3	136	0.2211	0.4336
4	148	0.1337	0.3496
5	163	0.0808	0.2643
6	198	0.0489	0.1918
9 <sup>b</sup>	816	0.0108	0.0635
Total de mujeres informantes	1873		

$$\pi_0 = \sum_1 c_i (1-g)^i / \sum c_i = 0.2024$$

$$\pi_1 = \sum_1 i c_i g (1-g)^{i-1} / \sum c_i = 0.1816$$

$$\text{Probabilidad de extinción} \doteq \frac{\pi_0}{1 - \pi_1 / (1 - \pi_0)} = 0.262$$

<sup>a</sup> Fuente: Naciones Unidas, *Demographic Yearbook*, 1963, pág. 455.

<sup>b</sup> Siete y más.

y la ecuación completa  $s = f(s)$ , o sea, todas las maneras de estimar la probabilidad de extinción.

El método más fácil es (18.2.10), que sólo requiere  $\pi_0$  y  $\pi_1$ , calculables como dos promedios ponderados de la distribución de las mujeres de acuerdo a los hijos nacidos. El cuadro 18.5 muestra el detalle del cálculo para Perú, 1961, dando los promedios ponderados  $\pi_0 = 0,2024$  y  $\pi_1 = 0,1816$ . Entonces de (18.2.10) la probabilidad de extinción es 0,262.



### 18.3. EFECTO DE UN CAMBIO EN LA DISTRIBUCION SOBRE LA PROBABILIDAD DE EXTINCION

La variación de la probabilidad de extinción entre las poblaciones es sorprendentemente grande; las usadas con fines de ilustración en este capítulo van desde 0,26 para Perú (cuadro 18.5) hasta 0,82 para los Estados Unidos (cuadro 18.4). La probabilidad de extinción depende de la fracción de individuos que no tienen hijos o que sólo tienen un hijo, más que del promedio de hijos que tengan. El promedio podría ser exactamente una niña, pero si cada mujer tuviera una niña sobreviviente la probabilidad de extinción sería cero. El promedio de mujeres mejicanas de 40-49 años fue de 4,331 hijos, y la probabilidad de extinción fue de 0,41; para las mujeres japonesas de 45-49 años resultó que en promedio tienen menos hijos que las mejicanas, 3,916, pero su probabilidad de extinción también fue menor, 0,32 en la trigésimotercera generación, debido a una menor variación entre las mujeres.

El cambio en la probabilidad de extinción correspondiente a un pequeño cambio en la probabilidad  $\pi_i$  de tener  $i$  hijos se determina mediante la ecuación  $s = f(s)$ . Diferenciando ambos miembros respecto a  $\pi_i$  se obtiene

$$\frac{ds}{d\pi_i} = \frac{df(s)}{d\pi_i} + \frac{df(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{d\pi_i} = s^i + f'(s) \frac{ds}{d\pi_i},$$

de donde la solución para  $ds/d\pi_i$  es

$$\frac{ds}{d\pi_i} = \frac{s^i}{1 - f'(s)}.$$

Pero al despreciar el hecho de que  $\sum \pi_i = 1$  estamos simplificando demasiado la situación. Puesto que la suma de las probabilidades debe dar uno, podemos aumentar  $\pi_i$  sin un cambio correspondiente en otros términos. Suponga que disminuimos  $\pi_j$  en  $\delta$ , la misma cantidad en que crece  $\pi_i$ ,  $i < j$ . Entonces debido a una doble aplicación del argumento anterior, el cambio en  $s$  es

$$\Delta s = \left( \frac{s^i - s^j}{1 - f'(s)} \right) \delta. \quad (18.3.1)$$

El resultado (18.3.1) muestra que si trasladamos cualquier parte de la distribución de probabilidades desde  $\pi_j$  hasta el valor  $\pi_i$ ,  $i < j$ , aumentamos la probabilidad de extinción. (Para demostrar esto necesitamos el hecho de que  $1 - f'(s)$  es positivo para el  $s$  que satisface  $s = f(s)$ ). Si tanto  $i$  como  $j$  son grandes, el efecto es pequeño, y será más pequeño mientras más cerca estén  $i$  y  $j$  entre sí y mientras menor sea el valor de  $s$ . Se logra el mayor efecto cuando  $i = 0$  y  $j$  es suficientemente grande como para que  $s^j$  sea despreciable, incrementándose en tal caso la probabilidad de extinción en  $1/[1 - f'(s)]$  veces el aumento en  $\pi_0$ . Demuestre para los datos de Israel del cuadro 18.2, en que la ecuación  $s = f(s)$  se satisface para  $s = 0,5144$  y  $f'(0,5144) = 0,6423$ , que un cambio de 0,01 de  $\pi_1$  a  $\pi_0$  aumentará la probabilidad de extinción en 0,0136; demuestre también que el mismo cambio de  $\pi_9$  a  $\pi_8$  aumentaría la probabilidad de extinción en sólo 0,000067.

De esta manera podríamos tomar dos poblaciones verdaderas, por ejemplo, Perú e Israel, y "explicar" o descomponer la diferencia en sus probabilidades de extinción en términos de las diferencias de los diversos  $\pi$ .

¿Cuál distribución de niñas nacidas de cada mujer está implícita en el proceso de nacimientos de la sección 16.1? ¿En el proceso de nacimiento y muerte? ¿Por qué la probabilidad de extinción calculada en base al proceso de ramificación es más precisa que la que se calcula en la sección 16.1?

Este capítulo ha discutido sólo un "tipo", un solo sexo de una población humana no diferenciada en cuanto a edad u otras características. La extensión del argumento a los diversos tipos, que pueden ser edades, sexos, estados civiles, especies animales, o combinaciones de éstas, aparecen en el trabajo de Bartlett (1955), Harris (1963), Pollard (1966) y Goodman (1967b). El modelo de población menos restringido desarrollado hasta ahora es el proceso de ramificación multitypico de Galton-Watson, del cual apareció un caso especial en la sección 16.4. Su análisis general incluye ideas matemáticas que están fuera del alcance de este libro.

## CONCLUSION

Como este tratamiento de las matemáticas para el estudio de las poblaciones proviene de un trabajo de aproximadamente cinco años de labor casi ininterrumpida, estoy más que nunca consciente de las lagunas que contiene. No sólo se han omitido del todo algunos temas, sino que algunos de los que se incluyen han sido cubiertos incompletamente. Pensé que era mejor desarrollar con algún detalle temas básicos tales como las representaciones matricial y mediante ecuaciones integrales de la trayectoria de la población y terminar con un recuento superficial de los procesos estocásticos, aunque esto último sea importante matemática y demográficamente; la razón de esta elección respecto de los temas se debió parcialmente a la falta de espacio, y en parte a un intento de mantener las matemáticas al nivel del cálculo y álgebra matricial elementales. Algunos tópicos, como por ejemplo el ajuste de curvas (capítulo 9) y su aplicación a la interpolación (capítulo 10), han sido tratados en forma breve debido simplemente a que en la actualidad se dispone de suficiente literatura secundaria, además del hecho de que el interés moderno se ha trasladado a otras áreas.

Muchos temas importantes están representados sólo por medio de preguntas dirigidas al lector, las cuales él puede responder en su papel de borrador mientras lee. No se necesita pedir excusas al lector por el hecho de que se le pida que complete los aspectos algebraicos de una demostración para la cual todos los supuestos necesarios están en la página que tiene frente a sí. El lector necesita participar en el desarrollo del argumento, y el libro es ya larguísimo. Por otra parte, lo compacto de la presentación y el largo del salto de un paso al siguiente puede a veces alcanzar tal grado que se pierda la pista de un argumento, y de esto sí que hay que excusarse. La velocidad promedio con que puedo completar en detalle el argumento a una clase es de una hoja impresa por hora aproximadamente, y al lector solitario le llevará al menos ese tiempo autoexplicárselo, a menos que ya conozca algo del tema. Fuera del autor serán pocos los que sigan cada página con este grado de atención; la presentación de una lista de los símbolos principales, después de la bibliografía, permitirá en algún grado la lectura separada de los capítulos.

La omisión más grande es la falta de material que llene las lagunas entre

demografía y econometría, demografía y genética, demografía y ecología, y demografía y sociología. Las técnicas aquí presentadas se están usando en campos interdisciplinarios, y hemos presentado en la siguiente bibliografía algunos ítem que dan a conocer estas extensiones. Muchos problemas requieren investigación, y se espera que sean aplicables a ella los métodos del presente libro.



## BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz, M. y I.A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, D.C.: National Bureau of Standards Applied Mathematics Series N° 55, 1965.
- Aitken, A.C., *Determinants and Matrices*. 9a ed. Nueva York: Interscience Publishers, 1956.
- Allen, R.G.D., *Mathematical Analysis for Economists*. 1era ed., 1938. Londres: Macmillan, 1962.
- Andrewartha, H.G. y L.C. Birch, "The Lotka-Volterra theory of interspecific competition", *Australian Journal of Zoology*, I, (1953), 174-177.
- . *The Distribution and Abundance of Animals*. Chicago: University of Chicago Press, 1954.
- Arriagá, E.A., "New abridged life tables for Peru: 1940, 1950-51 and 1961", *Demography*, III (1966), 218-237.
- Bailey, N.T.J., "On estimating the size of mobile populations from capture-recapture data", *Biometrika*, XXXVIII (1951), 293-306.
- . *The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1964.
- Bajema, C., "Estimation of the direction and intensity of natural selection in relation to human intelligence by means of the intrinsic rate of natural increase", *Eugenics Quarterly*, XIII (1966), 306-315.
- Barclay, George W., *Techniques of Population Analysis*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1958.
- Bartlett, M.S., *An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1955.
- . "On theoretical models for competitive and predatory biological systems", *Biometrika*, XLIV (1957), 27-42.
- . *Stochastic Population Models in Ecology and Epidemiology*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1960.
- . C. Gower y P.H. Leslie, "A comparison of theoretical and empirical results for some stochastic population models", *Biometrika*, XLVII (1960), 1-11.
- . y D.G. Kendall, "On the use of the characteristic functional in the analysis of some stochastic processes occurring in physics and biology", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, XLVII (1951), 65-76.
- Basu, D., "A note on the structure of a stochastic model considered by V.M. Dandekar", *Sankhya*, xv (1955), 251-252.
- Beard, R.E., "Some notes on approximate product-integration", *Journal of the Institute of Actuaries*, LXXIII (1947), 356-416.
- Beers, Henry, "Six-term formulas for routine actuarial interpolation", *Record American Institute of Actuaries*, XXXIII (1944), 245-260.
- Bernardelli, H., "Population waves", *Journal of Burma Research Society*, XXXI, Parte I (1941), 1-18.
- Beshers, James, *Population Processes in Social Systems*. Nueva York: Free Press, 1967.

- Bharucha-Reid, Albert T., *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications*. Nueva York: McGraw-Hill, 1960.
- Bishir, John, "Maximum population size in a branching process", *Biometrics*, XVIII (1962), 394-403.
- Blalock, H.M., Jr., *Causal Inferences in Non-experimental Research*, Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina Press, 1964.
- Blumen, I.; M. Kogan y P.J. McCarthy, *The Industrial Mobility of Labor as a Probability Process*. Vol. VI of Cornell Studies of Industrial and Labor Relations. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1955.
- Bogue, D.J., *Principles of Demography*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1968.
- . y Evelyn Kitagawa, *Techniques of Demographic Research*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1968.
- Booth, Andrew D., *Numerical Methods*. 2da. ed. Londres: Butterworth's Scientific Publications, 1957.
- Bortkiewicz, L.V., "Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der stationären und in der progressiven Bevölkerung", *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, XIX (1911), 63-138.
- . *Bevölkerungswesen*. Leipzig: Teubner, 1919.
- Boulding, K.E., "Toward a general theory of growth", *Canadian Journal of Economics and Political Science*, XIX (1953), 326-340.
- . *A Reconstruction of Economics*. Nueva York: Science Editions, 1962.
- Bourgeois-Pichat, Jean, *Mesure de la Fécondité des Populations* (INED, Cuaderno 12). Paris: Presses Universitaires de France, 1950.
- . "Utilisation de la notion de population stable pour mesurer la mortalité et la fécondité des populations des pays sous-développés", *Bulletin de l'Institut International de Statistique*. (Actas de la 30a. Sesión), 1957.
- . I. "Définition d'une population stable et étude expérimentale de ses propriétés caractéristiques"; II. "Calcul des caractéristiques des populations stables"; III. "Une généralization du concept de population stable"; IV. "Le réseau de populations stables type intermédiaire". (Inédito, mimeografiado, abril, 1962).
- Bowley, A.L., "Births and population of Great Britain", *Journal of the Royal Economic Society*, XXXIV (1924), 188-192.
- Brass, W., "The estimation of total fertility rates from data for primitive communities", *World Population Congress, 1954*, 263-270. Nueva York: Naciones Unidas.
- . "Simplified methods of fitting the truncated negative binomial distribution", *Biometrika*, XLV (1958), 59-68.
- . "The distribution of births in human populations", *Population Studies*, XII (1958), 51-72.
- Brown, A.W., "A note on the use of a Pearson Type III function in renewal theory", *Annals of Mathematical Statistics*, XI (1940), 448-453.
- Burgdörfer, F., "Dynamik d. künft. Bevölkerungsentwickl. im Deutschen Reich", *Allgemeines Statistisches Archiv*, XXII (1932), 168.
- Burks, Barbara S., "Statistical method for estimating the distribution of sizes of completed fraternities in a population represented by a random sampling of individuals", *Journal of the American Statistical Association*, XXVIII (1933), 388-394.
- Burnside, W.S. y A.W. Panton, *The Theory of Equations*. 2 vols., 7a. rev. ed., 1912 y 1928. Nueva York: Dover Publications, 1960.
- Cannan, E., "The probability of a cessation of the growth of population in England and Wales during the next century", *The Economic Journal*, V (1895), 505-515.

- Carlson, J.F. y J.R. Oppenheimer, "On multiplicative showers", *Physical Review*, LI (1937), 220-231.
- Chapman, D.G., "Population estimation based on change of composition caused by selective removal", *Biometrika*, XLII (1955), 279-290.
- Chemical Rubber Publishing Company, *Standard Mathematical Tables*. 12a. ed. Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Publishing Co., 1959.
- Chiang, C.L., "Competition and other interactions between species", en O. Kempthorne (ed.), *Statistics and Mathematics in Biology*. Ames, Iowa: Iowa State College Press, 1954, págs. 197-215.
- . "A stochastic study of the life table and its applications: I. Probability distributions of the biometric functions", *Biometrics*, XVI(1960a), 618-635.
- . "A stochastic study of the life table and its applications: II. Sample variance of the observed expectation of life and other biometric functions", *Human Biology*, XXXII (1960b), 221-238.
- . "Standard error of the age-adjusted death rate", *Vital Statistics—Special Reports*, XLVII (1961a), 275-285 (U.S. Department of Health, Education and Welfare, National Vital Statistics Division).
- . "A stochastic study of the life table: III. The follow-up study with the consideration of competing risks", *Biometrics*, XVII (1961b), 57-78.
- . "On the probability of death from specific causes in the presence of competing risks", *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, VI (1961c), 169-180.
- . *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1968.
- Chrystal, George, *Textbook of Algebra*. Nueva York: Dover Publications, 1961.
- Clark, C. y R.E. Dyne, "Applications and extensions of the Karmel formula for reproductivity", *Economic Record*, XXII (1946), 23-39.
- Coale, Ansley J., "The effects of changes in mortality and fertility on age composition", *Milbank Memorial Fund Quarterly*, XXXIV (1956), 79-114.
- . "How the age distribution of a human population is determined", *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, XXII (1957a), 83-89.
- . "A new method for calculating Lotka's  $r$ —the intrinsic rate of growth in a stable population", *Population Studies*, XI (1957b), 92-94.
- . "Increases in expectation of life and population growth", *Proceedings of the International Population Conference, Vienna 1959* (Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población), 36-41.
- . "Estimates of various demographic measures through the quasi-stable age distribution", *Emerging Techniques in Population Research*: Proceedings of the 1962 Annual Conference of the Milbank Memorial Fund. 175-193.
- . "Convergence of a human population to a stable form". Reunión Anual de la Population Association of America, 1967.
- , y P. Demeny. *Regional Model Life Tables and Stable Populations*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1966a.
- . *Methods of Estimating Fertility and Mortality from Censuses of Population*. Princeton, N.J.: Office of Population Research, 1966b.
- , y M. Zelnick, *New Estimates of Fertility and Population in the United States*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.
- Cochran, W.G., *Sampling Techniques*. 2a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons, 1963.
- Coddington, E.A. y N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. Nueva York: McGraw-Hill, 1955.
- Cole, L.C., "Population cycles and random fluctuations", *Journal of Wildlife Management*, XV (1951), 233-252.

- Cole, L.C., "The population consequences of life history phenomena", *Quarterly Review of Biology*, XIX (1954), 103-137.
- . "Dynamics of animal population growth", en M.C. Sheps y J.C. Ridley (eds.), *Public Health and Population Change: Current Research Issues*, Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 1965.
- . *Ecology*. San Francisco: Freeman (en prensa).
- Coleman, J.S., *Introduction to Mathematical Sociology*. Londres: Free Press of Glencoe (Macmillan), 1964.
- Consael, R. y A. Lamens, "Processus Markoviens d'embranchement en demographie", *Bulletin of the International Statistical Institute*, XXXVII (1960), 271-289.
- Cox, David, R., *Renewal Theory*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1962.
- Cox, P.R., "Projection of population size and age-sex structure", *Proceedings of the World Population Conference, 1965*, Summary Report, I, 253. Nueva York, Naciones Unidas, 1966.
- Czuber, E., *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*. 2 vols. Leipzig: Teubner, 1921. 1923.
- Dandekar, V.M., "Certain modified forms of binomial and Poisson distributions", *Sankhya*, XV (1955), 237-251.
- Darwin, J.H., "Population differences between species growing according to simple birth and death processes", *Biometrika*, XL (1953), 370-382.
- . "The behavior of an estimator for a simple birth and death process", *Biometrika*, XLIII (1956), 23-31.
- Davis, Harold T., *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Primera pub., 1960. Nueva York: Dover Publications, 1962.
- Davis, Kingsley, "Population policy: Will current programs succeed?", *Science*, CLVIII (1967) 730-739.
- . y Judith Blake, "Social structure and fertility: An analytic framework", *Economic Development and Cultural Change*, IV (1956), 211-235.
- De Bach, P. y H.S. Smith, "Are population oscillations inherent in the host-parasite relations?", *Ecology*, XXII (1941), 363-369.
- Decey, E.S., Jr., "Life tables for natural populations of animals", *Quarterly Review of Biology*, XXII (1947), 283-314.
- Demeny, Paul, "Estimation of vital rates for populations in the process of destabilization". (Mimeografiado, 1964).
- Deming, W. Edwards, *Statistical Adjustment of Data*. 1a. pub., 1943. Nueva York: Dover Publications, 1964.
- . "On simplifications of sampling design through replication with equal probabilities and without stages", *Journal of the American Statistical Association*, LI (1956), 24-53.
- . y N. Keyfitz, "Theory of surveys to estimate total population", *Proceedings of the World Population Conference, 1965*, III, 141-144. Nueva York: Naciones Unidas, 1967.
- Dharmadhikari, S.W., "A generalization of a stochastic model considered by V.M. Dandekar", *Sankhya*, XXVI, Serie A (1964), 31-38.
- Dobbermack, W. y G. Tietz, "Die Entwicklung von Personengesamtheiten vom Standpunkt der Sozialversicherungstechnik", *Twelfth International Congress of Actuaries*, IV (1940), 233-253.
- Doetsch, G., *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1958.
- Dorn, Harold F., "Pitfalls in population forecasts and projections", *Journal of the American Statistical Association*, XLV (1950), 311-334.



- Dublin, L.I. y A.J. Lotka, "On the true rate of natural increase as exemplified by the population of the United States, 1920", *Journal of the American Statistical Association*, XX (1925), 305-339.
- , A.J. Lotka y M. Spiegelman, *Length of Life*. Nueva York: Ronald Press, 1949.
- Duncan, O.D., "Occupation trends and patterns of net mobility in the United States", *Demography*, III (1966), 1-18.
- , R.P. Cuzzort y Beverley Duncan, *Statistical Geography*. Glencoe, Illinois: Free Press, 1961.
- Durand, J.D., "World population estimates 1750-2000", *Proceedings of the World Population Conference, 1965*, II, 17-22. Nueva York: Naciones Unidas, 1967a.
- , "The modern expansion of world population", *Proceedings of the American Philosophical Society*, CXI (1967b), 136-159.
- Edwards, A.W.F., "Sex-ratio data analysed independently of family limitation", (Mecanografiado, 1965).
- Elderton, W.P., *Frequency Curves and Correlation*. 3a. ed. Cambridge: The University Press, 1938.
- Elton, Charles, *The Ecology of Animals*. Londres: Methuen & Company, 1933.
- Errington, P., "Predation and vertebrate populations", *Quarterly Review of Biology*, XXI (1946), 144-177.
- Euler, L., "Recherches générales sur la mortalité et la multiplication", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, XVI (1760), 144-164.
- Faddeeva, V.N., *Computational Methods of Linear Algebra*. Trad., C.D. Benster. Nueva York: Dover Publications, 1959.
- Feller, W., "Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung", *Acta Biotheoretica*, V (1939), 11-40.
- , "On the integral equation of renewal theory", *Annals of Mathematical Statistics*, XII (1941), 243-267.
- , "On probability problems in the theory of counters", en *Studies and Essays* (presented to R. Courant on his 60th birthday). Nueva York: Interscience Publishers, 1948, págs. 105-115.
- , "Diffusion processes in genetics", *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (1951), 227-246.
- , *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol. 1, 2a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons, 1957.
- Finn, R.K., "Accounting for periodicities in biology", *Bull. Math. Biophysics*, XVI (1954), 181-182.
- Fisher, R.A., *The Genetical Theory of Natural Selection*. Primera pub., 1930. Nueva York: Dover Publications, 1958.
- Fisz, Marek, *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1963.
- Flieger, Wilhelm, SVD., *A Re-examination of the Demographic Transition in the Light of Newly Collected Data*. Ph. D. dissertation, Department of Sociology, University of Chicago, 1967.
- Foerster, H. v., P.M. Mora y L.W. Amiot, "Doomsday: Friday, 13 November, A. D. 2026", *Science*, CXXXII (1960), 1291-1295.
- Fort, T., *Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain*. Oxford: Oxford University Press, 1948.
- Frazer, R.A., W.J. Duncan y A.R. Collar, *Elementary Matrices*. Cambridge: The University Press, 1963.
- Freedman, R., D. Goldberg y L. Bumpass, "Current fertility expectations of married couples in the United States: 1963", *Population Index*, xxxi (1965), 3-20.

- Freeman, Harry, *Finite Differences for Actuarial Students*. Cambridge: The University Press, 1962.
- Friedman, B., *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1956.
- Frobenius, G., "Über Matrizen aus nicht negativen Elementen", *Sitz. Preuss. Akad.* (1912), 456-477.
- Fröberg, Carl-Erik, *Introduction to Numerical Analysis*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1965.
- Furry, W.H., "On fluctuation phenomena in the passage of high energy electrons through lead", *Physical Review*, LII (1937), 569-581.
- Galton, F. y H.W. Watson, "On the probability of extinction of families", *Journal of the Anthropological Institute*, VI (1874), 138-144.
- Gantmacher, F.R., *The Theory of Matrices*, trad. K.A. Hirsch 2 vols. Nueva York: Chelsea Publishing Co., 1959.
- Gause, G.F., *La théorie mathématique de la lutte pour la vie*. (Actualités Scientifiques, N° 277). Paris: Hermann, 1935a.
- . "Experimental demonstration of Volterra's periodic oscillations in the number of animals", *Journal of Experimental Biology*, XII (1935b), 44-48.
- . y A.A. Witt, "Behavior of mixed populations and the problem of natural selection", en W.E. Hazen (ed.), *Readings in Population and Community Ecology*. Philadelphia: W.B. Saunders Co., 1964, págs. 108-121.
- Gershenson, H., *Measurement of Mortality*. Chicago: Society of Actuaries, 1961.
- Glass, D.V. y E. Grebenik, *The Trend and Pattern of Fertility in Great Britain, A Report on the Family Census of 1946*. Vol. 6 of Papers of the Royal Commission on Population. Londres: H.M. Stationery Office, 1954.
- Goldberg, Samuel, *Introduction to Difference Equations*. Nueva York: Science Editions, 1961.
- Goodman, L.A., "Population growth of the sexes", *Biometrics*, IX (1953a), 212-225.
- . "Sequential sampling tagging for population size problems", *Annals of Mathematical Statistics*, XXIV (1953b), 56-69.
- . "Some possible effects of birth control on the human sex ratio", *Annals of Human Genetics* (Londres), XXV (1961a), 75-81.
- . "Statistical methods for the mover-stayer model", *Journal of the American Statistical Association*, LVI (1961b), 841-868.
- . "Some possible effects of birth control on the incidence of disorders and on the influence of birth order", *Annals of Human Genetics* (Londres), XXVII (1963), 41-52.
- . "On the statistical analysis of mobility tables", *American Journal of Sociology*, LXX (1965), 564-585.
- . "Population growth of the sexes when the age-specific rates for males and females are different: I. The expected pattern of growth". (Inédito, 1967a).
- . "Population growth of the sexes when the age-specific rates for males and females are different: II. A stochastic model". (Inédito, 1967b).
- . "On the reconciliation of mathematical theories of population growth", *Journal of the Royal Statistical Society*, CXXX, Serie A (General) (1967c), 541-553.
- . "The probabilities of extinction for birth-and-death processes that are age-dependent or phase-dependent", *Biometrika*, LIV (1967d).
- . "On the age-sex composition of the population that would result from given fertility and mortality conditions", *Demography*, IV (1967e).
- . "An elementary approach to the population projection-matrix and to the mathematical theory of population growth", *Demography*, V (1968a).
- . "Stochastic models for the population growth of the sexes", (Inédito, 1968b).

- Grabill, Wilson, "Lecture on Aitken's iteration process", given at Population Research and Training Center, University of Chicago, mayo, 1965. (Mimeografiado).
- Greville, T.N.E., "Short methods of constructing abridged life tables", *Record of the American Institute of Actuaries*, XXXII, Parte I (1943), 29-42.
- . "A generalization of Waring's formula", *Annals of Mathematical Statistics*, XV (1944a), 218-219.
- . "The general theory of osculatory interpolation", *Transactions of the Actuarial Society of America*, XLV (1944b), 202-265.
- . "United States abridged life tables, 1945", *Vital Statistics Special Reports: Selected Studies of the Public Health Agency*, National Office of Vital Statistics, XXIII (Abril 15, 1947), 243-247.
- . *Methodology of the National, Regional, and State Life Tables for the United States: 1959-1961*. Washington, D.C.: United States Department of Health, Education, and Welfare, National Center for Health Statistics, Public Health Publication N° 1252, Vol. I, N° 4, octubre 1967.
- Hadwiger, H., "Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V.A. Kostitzin", *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, XXXIV (1937), 37-43.
- . "Zur Frage des Beharrungszustandes bei kontinuierlich sich erneuernden Gesamtheiten", *Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung*, V (1939a), 32-34.
- Hadwiger, H., "Über die Integralgleichungen der Bevölkerungstheorie", *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, XXXVIII (1939b), 1-14.
- . "Eine analytische Reproduktionsfunktion für biologische Gesamtheiten", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, XXIII (1940), 101-113.
- . "Eine Formel der mathematischen Bevölkerungstheorie", *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, XLI (1941), 67-73.
- , y W. Ruchti, "Über eine spezielle Klasse analytischer Geburtenfunktionen", *Metron*, XIII, 4 (1939), 17-26.
- , y W. Ruchti, "Darstellung der Fruchtbarkeit durch eine biologische Reproduktionsformel", *Archiv Mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung*, VII (1941), 30-40.
- Hajnal, J., "Aspects of recent trends in marriage in England and Wales", *Population Studies*, I (1947a), 72-92.
- . "The analysis of birth statistics in the light of the recent international recovery of the birth-rate", *Population Studies*, I (1947b), 137-164.
- . "Some comments on Mr. Karmel's paper, 'The relations between male and female reproduction rates'", *Population Studies*, II (1948), 354-360.
- . "The prospects for population forecasts", *Journal of the American Statistical Association*, L (1955), 309-322.
- . "The ergodic properties of nonhomogeneous finite Markov chains", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, LII (1956), 67-77.
- . "Weak ergodicity in nonhomogeneous Markov chains", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, LIV (1958), 233-246.
- Haldane, J.B.S., "A mathematical theory of natural and artificial selection", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, XXIII (1927), 607-615.
- Hansen, M.H., W.N. Hurwitz y W.G. Madow, *Sample Survey Methods and Theory*. 2 vols. Nueva York: John Wiley & Sons, 1953.
- Harris, Theodore E., *The Theory of Branching Processes*. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1963.

- Hartree, D.R., *Numerical Analysis*. 2a. ed. Oxford: Clarendon Press, 1958.
- Hauser, P.M., "The use of sampling for vital registration and vital statistics". *Bulletin of the World Health Organization*, XI (1954), 5-24.
- y O.D. Duncan (eds.), *The Study of Population*. Chicago: University of Chicago Press, 1959.
- Hawkins, D. y S. Ulam, *Theory of Multiplicative Processes*, I. Los Alamos Scientific Laboratory, LADC-265, 1944.
- Hazen, William E. (ed.), *Readings in Population and Community Ecology*. Philadelphia: W.B. Saunders Co., 1964.
- Henderson, R., *Mathematical Theory of Graduation*, Actuarial Studies, N° 4. Chicago: Society of Actuaries, 1938.
- Henry, Louis, "Fondements théoriques des mesures de la fécondité naturelle", *Revue de l'Institut International de Statistique*, XXI (1953a), 135-151.
- , *Fécondité des mariages: Nouvelle méthode de mesure*. Paris: Institut National d'Etudes Démographiques, 1953b.
- , "Fécondité et famille. Modèles mathématiques I", *Population*, XII(1957) 413-444.
- , "Fécondité et famille. Modèles mathématiques II", *Population*, XVI (1961), 27-48 y 261-282.
- Herglotz, G., "Über die Integralgleichungen der Elektronentheorie", *Mathematische Annalen*, LXV (1908), 87-106.
- Hermalin, A.I., "The effect of changes in mortality rates on population growth and age distribution in the United States", *Milbank Memorial Fund Quarterly*, XLIV (1966), 451-469.
- Hertz, P., "Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einflusse einer stets gleich gerichteten Kraft", *Mathematische Annalen*, LXV (1908), 1-86.
- Hickman, J.C., "A statistical approach to premiums and reserves in multiple decrement theory", *Transactions of the Society of Actuaries*, XVI, Part I (1964), 1-16.
- Hildebrand, F.B., *Introduction to Numerical Analysis*. Nueva York: MacGraw-Hill, 1956.
- Horvitz, D.G.; F. Giesbrecht y P.A. Lachenbruch, "Microsimulation of vital events in a large population". Documento presentado a la reunión de la Population Association of America, Cincinnati, 1967.
- Householder, Alton S., *Principles of Numerical Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill, 1953.
- Hyrenius, H., "La mesure de la reproduction et de l'accroissement naturel", *Population*, III (1948), 271-292.
- , "Reproduction and replacement", *Population Studies*, IV (1951), 421.
- , y I. Adolffson, *A Fertility Simulation Model*. Goteborg, Sweden: University of Goteborg, Demographic Institute Reports, 2, 1964.
- Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*. Primera pub., 1926. Nueva York: Dover Publications, 1956.
- Irwin, J.O., "The standard error of an estimate of expectational life", *Journal of Hygiene*, XLVII (1949), 188-189.
- Jaffe, A.J., *Handbook of Statistical Methods for Demographers*, U.S. Bureau of the Census. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1951.
- Johnson, N.L., "Systems of frequency curves generated by methods of translation", *Biometrika*, XXXVI (1949), 149-176.
- Johnston, J., *Econometric Methods*. Nueva York: McGraw-Hill, 1963.
- Jordan, C., *Calculus of Finite Differences*, 2a. ed. Nueva York: Chelsea Publishing Co., 1947.
- Jordan, C.W., *Life Contingencies*. Chicago: Society of Actuaries, 1952.

- Joshi, D.D., "Les processus stochastiques en démographie", *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, III (1954), 153-177.
- . "Stochastic models utilized in demography", *Proceedings, World Population Conference, 1965*, III, 227-233. Nueva York: Naciones Unidas, 1967.
- Kaplan, E.L., y Paul Meier, "Nonparametric estimation from incomplete observations", *Journal of the American Statistical Association*, LIII (1958), 457-481.
- Kaplan, Wilfred, *Ordinary Differential Equations*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958.
- . *Operational Methods for Linear Systems*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- Karlin, Samuel y J. McGregor, "The differential equations of birth and death processes and the Stieltjes moment problem", *Transactions of the American Mathematical Society*, LXXXV (1957a), 489-546.
- . "The classification of birth and death processes", *Transactions of the American Mathematical Society*, LXXXVI (1957b), 366-400.
- . "Linear growth, birth, and death processes", *Journal of Mathematics and Mechanics*, IV (1958), 643-662.
- Karmel, P.H., "The relations between male and female reproduction rates", *Population Studies*, I (1947), 249-274.
- . "An analysis of the sources and magnitudes of inconsistencies between male and female net reproduction rates in actual populations", *Population Studies*, II (1948a), 240-273.
- . "The relations between male and female nuptiality in a stable population", *Population Studies*, I (1948b), 353-387.
- . "A note on P.K. Whelpton's calculation of parity adjusted reproduction rates", *Journal of the American Statistical Association*, XLV (1950), 119-124.
- Kemeny, J.G. y J.L. Snell, *Finite Markov Chains*. N. York: Van Nostrand Co., 1960.
- Kendall, David G., "On the generalized birth-and-death process", *Annals of Mathematical Statistics*, XIX (1948a), 1-15.
- . "On some modes of population growth leading to R.A. Fisher's logarithmic series distribution", *Biometrika*, XXXV (1948b), 6-15.
- . "On the role of variable generation time in the development of a stochastic birth process", *Biometrika*, XXXV (1948c), 316-330.
- . "Stochastic processes and population growth", *Journal of the Royal Statistical Society*, B, XI (1949), 230-264.
- . "An artificial realization of a simple 'birth-and-death' process", *Journal of the Royal Statistical Society*, B, XII (1950), 116-119.
- . "Les processus stochastiques de croissance en biologie", *Ann. Inst. H. Poincaré*, XIII (1952), 43-108.
- Kendall, Maurice G., y Alan Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*. 3 vols. Nueva York: Hafner Publishing Company, 1958.
- Kerner, E.H., "On the Volterra-Lotka principle", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, XXIII (1961), 141-157.
- Keyfitz, N., "Estimating the trajectory of a population", *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, IV (1965), 81-113.
- , D. Nagnur y D. Sharma, "On the interpretation of age distributions", *Journal of the American Statistical Association*, LXII (1967), 862-874.
- Kimball, A.W., "Disease incidence estimation in population subject to multiple causes of death", *Bulletin of the International Statistical Institute*, Uppsala, 1957, págs. 1-12.
- Kimeldorf, G.S. y D.A. Jones, "Bayesian graduation", *Transactions of the Society of Actuaries*, XIX (1967), 66-112.

- Kish, Leslie, *Survey Sampling*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1965.
- Kitagawa, Evelyn M., "Standardized comparisons in population research", *Demography*, I (1964), 296-315.
- Knibbs, George H., "The mathematical theory of population, of its character and fluctuations, and of the factors which influence them ...", *Census of the Commonwealth of Australia, April, 1911*, I, Appendix A, 1-466.
- . "The growth of human populations and the laws of their increase", *Metron*, V (1925), 147-162.
- Kober, H., *Dictionary of Conformal Representations*. Nueva York: Dover Publications, 1952.
- Koop, J.C., "Notes on the estimation of gross and net reproduction rates by methods of statistical sampling", *Biometrics*, VII (1951), 155-166.
- Kostitzin, V.A., *Symbiose, parasitisme, et évolution*. (Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 96). Paris: Hermann, 1934.
- Kunstadter, Peter, Roald Buhler, F.F. Stephan y C.F. Westoff, "Demographic variability and preferential marriage patterns", *American Journal of Physical Anthropology*, XXI (1963), 511-519.
- Lah, Ivo, "Generalization of Yastremsky's formula for analytical graduation of fertility rates", *Journal of the Royal Statistical Society*, XX, Part I (1958) 100-104.
- . "Analytische Ausgleichung der aus den Ergebnissen der Volkszählungen berechneten demographischen Tafeln", *International Union for the Scientific Study of Population Conference*, 1959, págs. 192-201.
- Lamens, A., "Sur le processus non-homogène de naissance et de mort à deux variables aléatoires", *Acad. roy. Belg., Bull. classe sci.*, ser. 5, XLIII (1957), 711-719.
- , y R. Consael, "Sur le processus non-homogène de naissance et de mort", *Acad. roy. Belg., Bull. classe sci.*, ser. 5, XLIII (1957), 597-605.
- Lederman, W. y G.E.H. Reuter, "Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A, CCXLVI (1954), 321-369.
- Lefkovic, L.P., "An extension of the use of matrices in population mathematics", *Biometrics*, XXI (1965), 1-18.
- Leibenstein, H., *A Theory of Economic Demographic Development*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1954.
- Leslie, P.H., "On the use of matrices in certain population mathematics", *Biometrika*, XXXIII (1945), 183-212.
- . "Some further notes on the use of matrices in population mathematics", *Biometrika*, XXXV (1948a), 213-245.
- . "On the distribution in time of the births in successive generations", *Journal of the Royal Statistical Society*, CXI, Part I (1948b), 44-53.
- . "The estimation of population parameters obtained by means of the capture-recapture method, II", *Biometrika*, XXXIX (1952), 363-388.
- , y J.C. Gower, "The properties of a stochastic model for two competing species", *Biometrika*, XLV (1958), 316-330.
- , y T. Park, "The intrinsic rate of natural increase of *Triboleum castaneum* Herbst", *Ecology*, XXX (1949), 469-477.
- Lewis, E.G., "On the generation and growth of a population", *Sankhya*, VI (1942), 93-96.
- Lewontin, R.C. y L.C. Dunn, "The evolutionary dynamics of a polymorphism in the house mouse", *Genetics*, XLV (1960), 705-722.
- Lexis, W., *Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik*. Strasbourg: Trubner, 1875.

- Li, C.C., *Population Genetics*, Chicago: University of Chicago Press, 1955.
- Linder, A., "Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung", *Archiv Mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung*, IV (1938), 136-156.
- . "Fruchtbarkeit, Sterblichkeit und Bevölkerungszahl", *Mitteilungen Verein schweizerischer Versicherungsmathematiker*, XLII (1942), 35.
- López, Alvaro, *Problems in Stable Population Theory*. Princeton, N.J.: Office of Population Research, 1961.
- . "Asymptotic properties of a human age distribution under a continuous net maternity function", Documento presentado ante la Reunión de la Population Association of America, 1967.
- Lorimer, F. y F. Osborn, *Dynamics of Population*. Nueva York: Macmillan, 1934.
- Lotka, Alfred J., "Relation between birth rates and death rates", *Science*, N.S. XXVI (1907a), 21-22.
- . "Studies on the mode of growth of material aggregates", *American Journal of Science*, XXIV (1907b), 199-216.
- . "The stability of the normal age distribution", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, VIII (1922), 339-345.
- . *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams & Wilkins, 1925. Re-editado por Dover Publications, 1956.
- . "The progressive adjustment of age distribution to fecundity", *Journal of the Washington Academy of Sciences*, XVI (1926), 505-513.
- . "The progeny of a population element", *American Journal of Hygiene*, VIII (1928), 875-901.
- . "The spread of generations", *Human Biology*, I (1929a), 305-320.
- . "Biometric functions in a population growing in accordance with a prescribed law", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, XV (1929b), 793-798.
- . "The structure of a growing population", *Human Biology*, III (1931a), 459-493.
- . "The extinction of families", *Journal of the Washington Academy of Sciences*, XXI (1931b), 377, 453.
- . "Orphanhood in relation to demographic factors", *Metron*, IX (1931c), 37-109.
- . "Zur Dynamik der Bevölkerungsentwicklung", *Allgemeines Statistisches Archiv*, XXII (1932a), 587-588; XXIII (1933), 98-99.
- . "The growth of mixed populations: Two species competing for a common food supply", *Journal of the Washington Academy of Sciences*, XXI (1932c) 461-469.
- . "Industrial replacement", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, (1933a), 51-63.
- . "Applications de l'analyse au phénomène démographique", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, LXXIV (1933b), 336-341.
- . *Théorie analytique des associations biologiques*. Part I. Principes. (Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 187). Paris: Hermann et Cie, 1934.
- . "The geographic distribution of intrinsic natural increase in the United States and an examination of the relation between several measures of net reproductivity", *Journal of the American Statistical Ass.*, XXXI (1936), 273-294.
- . "Population analysis: A theorem regarding the stable age distribution", *Journal of the Washington Academy of Sciences*, XXVII (1937), 299.
- . "Some recent results in population analysis", *Journal of the American Statistical Association*, XXXIII (1938), 164-178.
- . "A contribution to the theory of self-renewing aggregates, with special reference to industrial replacement", *Annals of Mathematical Statistics*, X (1939a), 1-25.

- Lotka, Alfred J., "On an integral equation in population analysis", *Annals of Mathematical Statistics*, X (1939b), 144-161.
- . *Théorie analytique des associations biologiques*. Part II. Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. (Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 780). Paris: Hermann & Cie, 1939c.
- . "The place of the intrinsic rate of natural increase in population analysis", *Proceedings of the 8th American Scientific Congress*. Washington, D.C. (1940).
- . "The progeny of an entire population", *Annals of Mathematical Statistics*, XIII (1942), 115-126.
- . "Population analysis as a chapter in the mathematical theory of evolution", en W.E. LeGros Clark y P.B. Medawar (eds.). *Essays on Growth and Form*. Nueva York: Oxford University Press, 1945, págs. 355-385.
- . "Application of recurrent series in renewal theory", *Annals of Mathematical Statistics* XIX (1948), 190-206.
- Lovitt, W.V., *Linear Integral Equations*. Primera pub., 1924. Nueva York: Dover Publications, 1950.
- Makeham, W.M., "On the law of mortality", *Journal of the Institute of Actuaries*, XIII (1860), 325-358.
- Matras, Judah, "Social mobility and social structure: Some insights from the linear model", Sexto Congreso Mundial de Sociología, Evien, Francia, 1966.
- Milbank Memorial Fund, *Emerging Techniques in Population Research*. Nueva York: Milbank Memorial Fund, 1963.
- Miller, Kenneth S., *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*. Nueva York: Henry Holt & Co., 1960.
- Miller, M.D., *Elements of Graduation*. Chicago: American Institute of Actuaries, 1949.
- Milne, William Edmund, *Numerical Calculus*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
- Moore, Felix, "The construction of abridged life tables", (Inédito, 1968).
- Moran, P.A.P., "Some remarks on animal population dynamics", *Biometrics*, VI (1950), 250-258.
- . *The Statistical Processes of Evolutionary Theory*. Oxford: Clarendon Press, 1962.
- Moser, C., "Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit", *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*, XXI (1926), 1-24.
- Moulton, Forest Ray, *Differential Equations*. Primera pub., 1930. Nueva York: Dover Publications, 1958.
- Moyal, J.E., "The general theory of stochastic population processes", *Acta Mathematica*, CVIII (1962a), 1-31. Applied Mathematics and Statistics Lab., Stanford University, Technical Report N° 7.
- . "Multiplicative population chains", *Proceedings of the Royal Society*, A, CCLXVI (1962b), 518-526.
- Muir, Thomas, *A Treatise on the Theory of Determinants*. Rev. por W.H. Metzler, 1933. Nueva York: Dover Publications, 1960.
- Murphy, Edmund M., "A generalization of stable population techniques", Unpublished Ph. D. dissertation, Dept. of Sociology. University of Chicago, 1965.
- Myers, R.J., "The validity and significance of male net reproduction rates", *Journal of the American Statistical Association*, XXXVI (1941), 275-282.
- McCracken, Daniel D. y William S. Dorn, *Numerical Methods and FORTRAN Programming*, Nueva York: John Wiley & Sons, 1964.
- McKendrick, A.G., "Applications of mathematics to medical problems", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, XLIV, I (1926), 98-130.



- Nelder, J.A., "The fitting of a generalization of the logistic curve", *Biometrics*, XVII (1961), 89-110.
- Newcombe, H.B., "Pedigrees for population studies; a progress report", *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, XXIX (1964), 21-30.
- Neyman, J., "On the problem of estimating the number of schools of fish", *University of California Publications in Statistics*, I (1949), 21-36.
- Neyman, J., T. Park y E.L. Scott, "Struggle for existence. The *Tribolium* model: Biological and statistical aspects", *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, IV (1956), 41-79.
- Nicholson, A.J., "An outline of the dynamics of animal population", *Australian Journal of Zoology*, II (1954), 9-65.
- Nörland, N.E., *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1924.
- Notestein, Frank W., et al., *The Future Population of Europe and the Soviet Union*. Geneva: League of Nations, 1944.
- Orcutt, Guy H., et al., *Microanalysis of Socioeconomic Systems: A Simulation Study*. New York: Harper & Row, 1961.
- Otter, Richard, "The multiplicative process", *Annals of Mathematical Statistics*, XX (1949), 206-224.
- Park, T., "Experimental studies of interspecies competition. I. Competition between populations of the flour beetles *Tribolium confusum* Duval and *Tribolium castaneum* Herbst", *Ecological Monographs*, XVIII (1948), 265-308.
- . "Experimental studies of interspecies competition. II. Temperature, humidity, and competition in two species of *Tribolium*", *Physiological Zoology*, XXVII (1954), 177-238.
- . "Beetles, competition, and population", en W.E. Hasen, ed., *Readings in Population and Community Ecology*. Phil.: W.B. Saunders Co., 1964, págs. 132-142.
- Parzen, E., *Stochastic Processes*. San Francisco: Holden-Day, 1962.
- Pearl, R., *Studies in Human Biology*. Baltimore: Williams and Wilkins, 1924.
- . *The Biology of Population Growth*. New York: Alfred A. Knopf, 1925.
- , T. Park y J.R. Miner, "Experimental studies on the duration of life. XVI. Life tables for the flour beetle *Tribolium confusum* Duval", *American Naturalist*, LXXV (1941), 5-19.
- , y L.J. Reed, "On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation", *Proceedings of the National Academy of Science*, VI (1920), 275-288.
- Perlis, S., *Theory of Matrices*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1952.
- Perrin, E.B. y M.C. Sheps, "Human reproduction: A stochastic process", *Biometrics*, XX (1964), 28-45.
- . "A mathematical model for human fertility patterns", *Archives of Environmental Health*, X (1965), 694-698.
- Perron, Oskar, "Zur Theorie der Matrizen", *Mathematische Annalen*, LXIV (1907), 248-263.
- Pierpont, James, *Functions of a Complex Variable*. Primera pub., 1914. Nueva York: Dover Publications, 1959.
- Pinney, E., *Ordinary Difference-Differential Equations*. Berkeley: University of California Press, 1958.
- Pitt-Rivers, G.H. (ed.), *Problems of Population*. International Union for the Scientific Investigation of Population Problems. Londres: Allen & Unwin, 1932.
- Pollard, Alfred H., "The measurement of reproductivity", *Journal of the Institute of Actuaries*, LXXIV (1948), 288-305.
- . "The measurement of the intensity of marriage", *Journal of the Institute of Actuaries Stud. Soc.*, II (1953), 21-30.

- Pollard, J.H., "On the use of the direct matrix product in analysing certain stochastic population models", *Biometrika*, LIII (1966), 397-415.
- Potter, R.G. y M.P. Parker, "Predicting the time required to conceive", *Population Studies*, XVIII (1964), 99-116.
- Preinreich, G.A.D., "The theory of industrial replacement", *Skandinavisk Aktuarietidskrift* (1939), 1-9.
- Pressat, Roland, *L'Analyse démographique: méthodes, résultats, applications*. Paris: Presses Universitaires de France, 1961.
- Pretorius, S.J., "Skew bi-variate frequency surfaces, examined in the light of numerical illustrations", *Biometrika*, XXII (1930), 109-223.
- Pyke, Ronald, "Markov renewal processes: Definitions and preliminary properties", *Annals of Mathematical Statistics*, XXXII (1961), 1231-1242.
- Quenouille, M.H., "Notes on bias in estimation", *Biometrika*, XLIII (1956), 353-360.
- Quensel, C.E., "Changes in fertility following birth restriction", *Skandinavisk Aktuarietidskrift* (1939), 177-199.
- Rainville, E.D., *The Laplace Transform: an Introduction*. N. York: Macmillan, 1963.
- Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill, 1965.
- , y H.S. Wilf, *Mathematical Methods for Digital Computers*. Nueva York: Wiley & Sons, 1960.
- Rao, C. Radhakrishna, *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1952.
- Rashevsky, Nicholas, *Mathematical Biophysics. Physico-Mathematical Foundations of Biology*. 2 vols. 3a. ed. rev. Nueva York: Dover Publications, 1960.
- Reed, Lowell J. y Margaret Merrell, "A short method for constructing an abridged life table", *American Journal of Hygiene*, XXX (1939), 33-62.
- Rhodes, E.C., "Population mathematics, I, II, and III", *Journal of the Royal Statistical Society*, CIII (1940), 61-89, 218-245 y 362-387.
- Richter, Hans, "Untersuchungen zum Erneuerungsproblem", *Mathematische Annalen*, CXVIII (1941), 145-194.
- Rogers, Andrei, "Estimating interregional population and migration operators from interregional population distributions". Reunión Anual de la Population Association of America, 1967.
- , *Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution*. Berkeley: University of California Press, 1968.
- Ryder, N.B., "The translation model of demographic change", *Emerging Techniques in Population Research* (39a Reunión Anual del Milbank Memorial Fund, 1962). Nueva York: Milbank Memorial Fund, 1963.
- , "The process of demographic translation", *Demography*, I, N° 1 (1964) 74-82.
- Sauvy, Alfred, *Théorie générale de la population*. Vol. I. *Economie et population*. Vol. II. *Biologie sociale*. Paris: Presses Universitaires de France, 1952, 1954.
- Saxena, G.B., "Estimates of birth rate and expectation of life in India on the basis of quasi-stability", *Proceedings of World Population Conference, 1965*. III, 203-204. Nueva York: Naciones Unidas, 1967.
- Scarborough, James B., *Numerical Mathematical Analysis*. 4a. ed. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1958.
- Schulthess, Harald, "Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes", *Bulletin de l'Association des Actuairees Suisses*, XXXIII (1937), 69.
- Semenoff, N., *Chemical Kinetics and Chain Reactions*. Oxford: Oxford University Press, 1935.

- Sharpe, F.R. y A.J. Lotka, "A problem in age-distribution", *Philosophical Magazine*, Ser. 6, XXI (1911), 435-438.
- Sheps, Mindel C., "Effects on family size and sex ratio of preferences regarding the sex of children", *Population Studies*, XVII (1963), 66-72.
- . "On the time required for conception", *Population Studies*, XVIII (1964), 85-97.
- . "Uses of stochastic models in the evaluation of population policies", *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. IV (1967), 115-136.
- , y J.A. Menken, "A survey of probability models for family building", Documento presentado a la Reunión de la Biometrics Society. Washington, D.C. 1967.
- , y E.B. Perrin, "Changes in birth rates as a function of contraceptive effectiveness: Some applications of a stochastic model", *American Journal of Public Health*, LIII (1963), 1031-1046.
- . "Further results from a human fertility model with a variety of pregnancy outcomes", *Human Biology*, XXXVIII (1966), 180-193.
- , y J.C. Ridley (eds.), *Public Health and Population Change: Current Research Issues*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 1965a.
- . "Studying determinants of natality: Quantitative estimation through a simulation model", *Proceedings of World Population Conference, 1965*, III. 265. Nueva York: Naciones Unidas, 1967.
- Simon, Herbert, *Models of Man*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1957.
- Singh, S.N., "Probability models for the variation in the number of births per couple", *Journal of the American Statistical Association*, LVIII (1963), 721-727.
- Sirken, M.G., *Comparison of Two Methods of Constructing Abridged Life Tables by Reference to a "Standard" Table*. U.S. Department of Health, Education and Welfare, National Center for Health Statistics, Serie 2, N° 4, 1964.
- Skellam, J.G., "Random dispersal in theoretical populations", *Biometrika*, XXXVIII (1951), 196-218.
- . "Studies in statistical ecology. I. Spatial patterns", *Biometrika*, XXXIX (1952), 346-362.
- Slobodkin, L.B., "An algebra of population growth", *Ecology*, XXXIV (1953), 513-519.
- . *Growth and Regulation of Animal Populations*. Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1961.
- Smirnov, V.I., *Advanced Calculus*. Vol. II of *A Course of Higher Mathematics*. Trad., D.E. Brown. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
- Smith, Walter L., "Renewal theory and its ramifications", *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B*, XX (1958).
- Spengler, J.J., "The economist and the population question", *American Economic Review*, LVI (1966), 1-24.
- . y O.D. Duncan (eds.), *Demographic Analysis: Selected Readings*. Glencoe, III. Free Press, 1956.
- Spiegelman, Mortimer, *Introduction to Demography*. 2a. ed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1968.
- Spurgeon, E.F., *Life Contingencies*, Cambridge: The University Press, 1932.
- Steffensen, J.F., *Interpolation*. Baltimore: Williams and Wilkins, 1927.
- Stephan, F.F., "The expected value and variance of the reciprocal and other negative powers of a positive Bernoullian variate", *Annals of Mathematical Statistics*, XVI (1945), 50-61.

- Stolnitz, G.J., *Life Tables from Limited Data: A Demographic Approach*. Princeton: Princeton University Press, 1956.
- Stone, Richard, "Population mathematics, demand analysis and investment planning", University of Cambridge, Department of Applied Economics, Reprint Series, N° 176. Published in Polish in *Przegląd Statystyczny*, VIII (1961), 1-9.
- . "A model of the educational system", *Minerva*, III (Invierno, 1965), 172-186.
- . *Mathematics in the Social Sciences and Other Essays*. Cambridge, Massachusetts: M.I.T. Press, 1966.
- Sundbärg, Gustav, *Bevölkerungsstatistik Schwedens 1950-1900*. Stockholm: Norstedt, 1907.
- Tabah, León, "Algunos modelos teóricos y numéricos de población", Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago, Chile, 1964. Serie B, E/CN.CELADE/B. 1. (Inédito).
- . "Relationships between age structure, fertility, mortality and migration. Population replacement and renewal", *United Nations World Population Conference, 1965*, background paper B. 7/15/E/476.
- Täcklind, Sven, "Elementare Behandlung von Erneuerungsproblem für den stationären Fall", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, XXVII (1944), 1-15.
- . "Fourieranalytische Behandlung von Erneuerungsproblem", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, XXVIII (1945), 68-105.
- Thompson, W.R., "On the reproduction of organisms with overlapping generations", *Bull. Ent. Res.*, XXII (1931), 147-172.
- . "Biological control and the theories of the interaction of populations", *Parasitology*, xxxi (1939), 299-388.
- Thompson, W.S. y P.K. Whelpton, *Population Trends in the United States*. Nueva York: McGraw-Hill, 1933.
- Tietze, C., "Pregnancy rates and birth rates", *Population Studies*, XVI (1962), 31-37.
- Turnbull, H.W., *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*. 3a. ed. New York: Dover Publications, 1960.
- United States Bureau of the Census, *The Current Population Survey: A Report on Methodology*. Documento Técnico N° 7. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1963.
- . *Statistical Abstract of the United States: 1965*. 86a. ed. Washington, D.C., 1965.
- United States Department of Health, Education and Welfare. *United States Life Tables: 1959-61*. Washington, D.C.: National Center for Health Statistics, Public Health Publication N° 1252, Vol. I, N° 1, diciembre, 1964.
- United Nations, *Age and Sex Patterns of Mortality: Model Life Tables for Underdeveloped Countries*. Nueva York: 1955.
- . *Methods for Population Projections by Sex and Age*. Population Studies N° 25. Nueva York, 1956.
- . *Demographic Yearbook*, 13a. a 17a. edición, prueba de 18a. edición, Nueva York: United Nations International Publications Service, 1961-1966.
- Van der Pol, B. y H. Bremmer, *Operational Calculus*. 2a. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1964.
- Veit, K.P., "Stationary population methods", *Transactions of the Society of Actuaries*, XVI, Part I (1964), 233-264.
- Verhulst, P.F., "Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement", *Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quételet* (Brussels), x (1838), 113-121.

- Vincent, P., "Potentiel d'accroissement d'une population stable", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, LXXXVI (1945), 16-29.
- . "De la mesure du taux intrinsèque d'accroissement naturel dans les populations monogames", *Population*, I (1946), 699-712.
- Volterra, Vito, "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi", *Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, año CCCXXIII, II (1926), 1-110.
- . "Principes de biologie mathématique, I. Les fondements de la théorie de la lutte pour la vie", *Acta Biotheoretica*, III (1937), 1-35.
- , y U. D'Ancona, *Les associations biologiques au point de vue mathématique*. (Actualités Scientifiques et Industrielles, 243). Paris: Hermann et Cie, 1935.
- Wangersky, P.J. y W.J. Cunningham, "Time lag in population models", *Cold Spring Harbor Symposium on Quantitative Biology*, XXII (1957), 329-338.
- Waring, E., "Problems concerning interpolation", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, LXIX (1779), 59-67.
- Waugh, W.A. O'N., "An age-dependent birth and death process", *Biometrika*, XLII (1955), 291-306.
- Weiler, H., "Sex ratio and birth control", *American Journal of Sociology*, LXV (1959), 298-299.
- Westoff, C.F.; R.G. Potter y P.C. Sagi, *The Third Child: A Study in the Prediction of Fertility*. Princeton: Princeton University Press, 1963.
- Whelpton, P.K., "An empirical method of calculating future population", *Journal of the American Statistical Association*, XXXI (1936), 457-473.
- . "Reproduction rates adjusted for age, parity, fecundity, and marriage", *Journal of the American Statistical Association*, XLI (1946), 501-516.
- . *Forecasts of the Population of the United States, 1945-1975*. U.S. Bureau of the Census. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1947.
- . "Comments on Mr. Karmel's note on P.K. Whelpton's calculation of parity adjusted reproduction rates", *Journal of the American Statistical Association*, XLV (1950), 125-135.
- . *Cohort Fertility: Native White Women in the United States*. Princeton, University Press, 1954.
- Wicksell, S.D., "Nuptiality, fertility, and reproductivity", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, (1931), 125-157.
- Widder, D.V., *The Laplace Transform*. Princeton: Princeton University Press, 1946.
- . *Advanced Calculus*. Nueva York: Prentice-Hall, 1947.
- Wielandt, Helmut, "Unzerlegbare, nicht negative Matrizen", *Mathematische Zeitschrift*, LII (1950), 642-648.
- Wilks, Samuel S., *Mathematical Statistics*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1962.
- Willers, Fr. A., *Practical Analysis: Graphical and Numerical Methods*. Trad., R.T. Beyer. Nueva York: Dover Publications, 1948.
- Wilson, E.B., "Mathematics of growth", *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, II (1934), 199-202.
- Wilson, E.B., "The standard deviation of sampling for life expectancy", *Journal of the American Statistical Association*, XXXIII (1938), 705-708.
- , y M.M. Hilferty, "Size of completed families", *Journal of the American Statistical Association*, XXX (1935), 577-580.
- Wilson, Edwin Bidwell, *Advanced Calculus*. Nueva York: Dover Publications, 1958.
- Winsor, C.P., "Mathematical analysis of growth of mixed populations", *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, II (1934), 181-189.

- Winston, S., "Birth control and the sex-ratio at birth", *American Journal of Sociology*, XXXVIII (1932), 225-231.
- Wolfenden, H.H., *Population Statistics and their Compilation*. Primera pub., 1925. Chicago: University of Chicago Press, 1954.
- Woolfer, T.J., "Completed generation reproduction rates", *Human Biology*, XIX (1947), 133-153.
- . "The relation of the net reproduction rate to other fertility measures", *Journal of the American Statistical Association*, XLIV (1949), 501-517.
- Wynne-Edwards, V.C., *Animal Dispersion in Relation to Social Behavior*. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1962.
- Yates, F., *Sampling Methods for Censuses and Surveys*. 3a. ed. Londres: Charles Griffin and Co., 1960.
- Yerushalmy, J., "The age-sex composition of the population resulting from natality and mortality conditions", *Milbank Memorial Fund Quarterly*, XXI (1943), 37-63.
- Yntema, L., *Mathematical Models of Demographic Analysis*. Leiden: J.J. Groen & Zoon, 1952.
- Yule, G.U., "A mathematical theory of evolution based on the conclusions of Dr. J.C. Willis, F.R.S.", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, B, CCXIII (1924), 21-87.
- . "The growth of population and the factors which control it", *Journal of the Royal Statistical Society*, LXXXVIII, Part I (1925), 1-58.
- Zwiggli, Ernst, "Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums", *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*, XXIV (1929), 95-104.
- . "Zur Methodik der Bevölkerungsvorausberechnung", *Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, LXIX (1933), 255.
- . "Entwicklung von Personengesamtheiten, Zusammenfassender Bericht", *Twelfth International Congress of Actuaries*, III (1940), 263-273.

## LISTA DE SIMBOLOS

Símbolo	Definición	Capítulo
$A_r$	Edad media de las madres al nacimiento de sus hijos en la población estable:	5
	$A_r = \int_a^\beta ae^{-ra} p(a)m(a) da$	
$\bar{A}_r$	Edad media en la población estable:	7
	$\bar{A}_r = \frac{\int_0^w ae^{-ra} p(a) da}{\int_0^w e^{-ra} p(a) da}$	
$a$	Como subíndice o argumento de una función se usa para indicar edad. Se usa indistintamente con $x$ .	5
${}^n a_x$	Número promedio de años vividos entre las edades $x$ y $x + n$ por los que mueren en ese intervalo de edad.	1
$B$	Matriz de valores característicos; el $j$ -ésimo elemento de su $i$ -ésima fila es	8
	$b_{ij} = \lambda_j^{-i+1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 9;$	
	esto es, $b_{ij}$ es la potencia $(-i + 1)$ -ésima del $j$ -ésimo valor característico.	
$B$	Matriz con elementos distintos de cero sólo en su primera fila, representando nacimientos.	4
${}^n B_x$	Número de nacimientos de mujeres que tienen de $x$ a $x + n$ años de edad, o $x$ a $x + n - 1$ en su último cumpleaños.	2
$B(t)$	Número de nacimientos como función del tiempo; corrientemente bajo el supuesto de que las tasas específicas de fecundidad y mortalidad permanecen constantes.	5

Símbolo	Definición	Capítulo
$b$	Tasa intrínseca de natalidad, esto es, tasa de natalidad en la población estable.	7
	$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$	
$b_m, b_f$	Tasa bruta de natalidad para hombres y mujeres respectivamente como parámetro de un proceso estocástico para dos sexos.	13
$c_i$	Proporción de mujeres que tienen exactamente $i$ hijos.	18
$c_i$	La ponderación del $i$ -ésimo vector columna estable en la descomposición de $\{K^{(0)}\}$ , como en	3
	$\{K^{(0)}\} = c_1\{K_1\} + c_2\{K_2\} + \dots + c_n\{K_n\}$	
$c(a)$	Proporción de población (masculina o femenina) a la edad $a$ :	7
	$c(a) = \frac{k(a)}{K}$	
$c(a, t)$	Lo mismo que $c(a)$ pero ahora se considera la variación respecto del tiempo.	7
$D$	Número de muertes observadas a todas las edades, corrientemente para un sexo.	1
$D$	Grado de dominancia masculina.	13
${}_n D_x$	Muertes observadas entre las edades $x$ y $x + n$ , esto es, edades de $x$ a $x + n - 1$ en el último cumpleaños.	1
$d$	Tasa intrínseca de mortalidad, esto es, tasa de mortalidad en la población estable.	7
$d_m, d_f$	Tasa bruta de mortalidad para hombres y mujeres respectivamente como parámetro de un proceso estocástico para dos sexos.	13
${}_n d_x$	Número de personas que mueren en la población estacionaria entre las edades $x$ y $x + n$ ;	1
	${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$	
$E_i$	$i$ -ésimo estado (embarazo o no y mes de embarazo).	17
$\mathcal{E}$	Valor esperado o promedio.	15
$e$	Base de los logaritmos naturales, igual a 2,7182818 ...	1
$\dot{e}_x$ o $\dot{e}(x)$	Esperanza completa (esto es, incluyendo fracciones de un año) de vida a la edad $x$ :	1
	$\dot{e}(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$	



Símbolo	Definición	Capítulo
$F(s)$	Función generatriz de las probabilidades $f_i$ . $F(s) = f_0 + f_1s + f_2s^2 + \dots$	5
$F(t)$	Número de mujeres en el momento $t$ en el modelo para dos sexos.	13
${}_aF_a$	Tasa específica de fecundidad por edad para mujeres que tienen entre $a$ y $a + n$ años de edad ${}_aF_a = \frac{\int_a^{a+n} k(x)m(x) dx}{\int_a^{a+n} k(x) dx}$	2
$f$	Número de mujeres; variable aleatoria del proceso demográfico para dos sexos.	16
$f_i$	Probabilidad de que una niña recién nacida sobreviva y tenga una hija a la edad exacta $5i$ .	5
$f_z^z$	Factor de separación: fracción de las muertes de menores de un año de edad provenientes de los nacimientos del año calendario anterior $z - 1$ .	1
$f(s)$	Función generatriz para las probabilidades $\pi_i$ de $i$ hijos en un hombre o hijas a una mujer $f(s) = \pi_0 + \pi_1s + \pi_2s^2 + \dots$	18
$f_n(s)$	Función generatriz iterada $n$ veces $f_n(s) = f(f_{n-1}(s))$	18
$f(\lambda)$	Función característica de la matriz $\mathbf{M}$ : $f(\lambda) =  \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I} $	3
$G(t)$	Niños nacidos en el momento $t$ de mujeres que estaban vivas en el momento 0, $t \geq 0$ .	5
$g$	Proporción de nacidos que son del sexo femenino; proporción de nacidos que son del sexo femenino y que sobreviven hasta los 25 años de edad.	18
$g_a^{t_1}$	Número de individuos de un sexo dado, con $a$ años de edad en el último cumpleaños en el momento $t$ .	4
$H$	Medida de Karmel tal que la diferencia entre las tasas intrínsecas masculinas y femeninas se estima por $(r_m - r_f) \doteq -\frac{\ln H}{T}$	13

se define  $H$  como la media armónica ponderada de  ${}_5H_x$ , siendo las ponderaciones la función de fecundidad neta.

Símbolo	Definición	Capítulo
${}_5H_x$	Medida de Karmel para el intervalo quinquenal de edades que va de $x$ a $x + 4$ ${}_5H_x = \frac{{}_5K_x^*}{{}_5K_x} / \frac{{}_5L_x^*}{{}_5L_x}$	13
<b>H</b>	La matriz constituida por los vectores fila estable $[H_i]$ colocados uno debajo del otro:	3
	$H = \begin{Bmatrix} [H_1] \\ [H_2] \\ \vdots \\ [H_n] \end{Bmatrix}$	
$[H_i]$	$i$ -ésimo vector fila (vector característico), correspondiente a $\lambda_i$ ; satisface $[H_i]M = \lambda_i[H_i]$	3
$[H_i]$	$i$ -ésimo vector fila estable de la matriz de proyección después de la normalización.	3
$k - 1$	Periodo no fecundo, supuesto constante para todas las mujeres.	17
$i$	La tasa de interés anual.	1
$i$	Unidad en el eje imaginario para números complejos: $i = \sqrt{-1}$	3
(isd)	Tasa bruta de mortalidad tipificada por el método indirecto.	1
<b>K</b>	La matriz constituida por los vectores columna estables $\{K_i\}$ puestos uno al lado del otro: $K = \{[K_1][K_2] \cdots [K_n]\}$	3
$K$	Población de todas las edades (total), en general de un solo sexo.	1
$\underline{K}$	Vector columna de la distribución por edades, pero con los nueve grupos de edades reducidos a tres: $\underline{k}_1 = k_1 + k_2 + k_3$ es la población menor de 15 años de edad.	2
$[K_i]$	El $i$ -ésimo vector columna estable (vector característico), correspondiente a $\lambda_i$ ; satisface $M[K_i] = \lambda_i[K_i]$	3
$\underline{K}_i$	$i$ -ésimo vector columna estable de la matriz de proyección en intervalos de 15 años de edad.	3

Simbolo Definición Capítulo

$\{\bar{K}^{(0)}\}$  Distribución por edades observadas, comúnmente para un sexo y representada por un vector columna en grupos quinquenales de edades: 2

$$\{\bar{K}^{(0)}\} = \left\{ \begin{matrix} {}_5K_0 \\ {}_5K_5 \\ \vdots \\ {}_5K_{85} \end{matrix} \right\},$$

a veces incluye sólo edades al fin del período reproductivo, en cuyo caso se escribe sin barra.

$\{K^{(t)}\}$  Vector columna de la distribución por edades (observada,  $t = 0$ , o proyectada,  $t > 0$ ; edades 0 a  $\beta$  en el momento  $t$ . 2

${}_nK_x$  Número de personas en la población observada entre las edades exactas  $x$  y  $x + n$ , o entre las edades  $x$  y  $x + n - 1$  en el último cumpleaños: 1

$${}_nK_x = \int_0^n k(x+t) dt$$

${}_nK_x^{(t)}$   ${}_nK_x$  en el momento  $t$ . 1

$k_i$  Número de mujeres (u hombres) en el  $i$ -ésimo grupo de edades. 2

$k_{ij}$  Número de mujeres en el  $i$ -ésimo grupo de edades y paridez  $j$ -ésima. 14

$k(x)$  Ordenada en  $x$  de la curva continua que representa la población según la edad. 1

$k(x, t)$   $k(x)$  en el momento  $t$ . 7

$L$  Matriz de la proyección hasta el final de la vida;  $L$  es  $18 \times 18$  con intervalos quinquenales de edad. 2

$\bar{L}_0$  Población total de la tabla de vida en base a una raíz unitaria:  $\bar{L}_0 = \bar{e}_0$  7

$\bar{L}_i/\bar{L}_0$  Momento de orden  $i$ -ésimo centrado en cero del número de sobrevivientes de la tabla de vida: 7

$$\frac{\bar{L}_i}{\bar{L}_0} = \frac{\int_0^\omega a^i l(a) da}{\int_0^\omega l(a) da}$$

${}_nL_x$  Número de sobrevivientes en la tabla de vida entre  $x$  y  $x + n$  años de edad: 1

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t) dt$$

(se omite  $n$  cuando el texto deja claro que se refiere a intervalos de 1 ó 5 años).

Símbolo	Definición	Capítulo
$l_0$	Raíz de la tabla de vida, elegida arbitrariamente.	1
$l_0$	Número de los que empiezan la vida juntos en una cohorte constituyendo una muestra; no es arbitrario.	15
$l(x)$ o $l_x$	Número esperado de sobrevivientes de edad $x$ de los nacidos de un sexo dado para tasas específicas observadas de mortalidad por edades.	1
$l_x^{(i)}$	Número de personas sobrevivientes a la edad $x$ en la $i$ -ésima categoría de una tabla de vida en la que se admiten diversos decrementos.	14
$\ln$	Logaritmo natural o Neperiano.	1
$M$	Tasa bruta de mortalidad observada: $M = D/K$ .	1
$\mathbf{M}$	La parte de la matriz $\mathbf{L}$ aplicable hasta el fin del período reproductivo; en la representación quinquenal $\mathbf{M}$ puede ser $9 \times 9$ , $10 \times 10$ u $11 \times 11$ , dependiendo de que los nacimientos aparezcan para edades de las madres hasta 45, 50 ó 55.	2
$\underline{\mathbf{M}}$	La matriz $\mathbf{M}$ cuando se la reduce desde la forma $9 \times 9$ a una aproximación $3 \times 3$ para grupos de 15 años de edad. El elemento $j$ -ésimo de la $i$ -ésima fila de $\underline{\mathbf{M}}$ es $m_{ij}$ , de $\mathbf{M}$ es $m_{ij}$ .	2
$\mathbf{M}^{(0)}, \mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \dots$	Valores de la matriz de proyección supuestamente aplicables a intervalos sucesivos de tiempo.	4
${}_nM_x$	Tasa específica de mortalidad por edades observada para personas —generalmente de un sexo— entre las edades exactas $x$ y $x + n$ .	1
${}_nM'_x$	Tasa específica de mortalidad por edades aplicable a una población que crece a una tasa dada $r$ , a partir de la tabla de vida y $r$ .	1
$M(t)$	Número de personas del sexo masculino en el momento $t$ en el modelo determinístico.	13
$\frac{M}{F} = \frac{M(\infty)}{F(\infty)}$	Relación de masculinidad estable:	13
	$\frac{M}{F} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{F(t)}$	
$m$	Número de personas del sexo masculino, variable aleatoria, en el proceso demográfico para dos sexos.	16
$m_j^{(i)}(x)$	Probabilidad a la edad $x$ de tener una hija después de $i$ hijos de uno u otro sexo.	14

Símbolo	Definición	Capítulo
$m_{ij}^{(n)}$	El $j$ -ésimo elemento de la $i$ -ésima fila de $M^n$ , la $n$ -ésima potencia de la matriz $M$ .	2
$m(a)$	Función continua que representa fecundidad; la probabilidad de que una mujer dé a luz entre $a$ y $a + da$ es $m(a)da$ , si se excluye la mortalidad.	5
${}_n m_x$	Tasa específica de mortalidad por edades en la población de la tabla de vida:  ${}_n m_x = {}_n d_x / {}_n L_x$	1
$N$	Matriz de proyección $M$ deflatada de su componente real:  $N = M - \lambda_1 Z_1$	3
$N(t)$	Población en el momento $t$ .	9
$N_1(t)$	Número de elementos de la primera especie en el momento $t$ , por ejemplo, presa en el modelo de Volterra.	12
$N_2(t)$	Número de elementos de la segunda especie en el momento $t$ , por ejemplo, depredador en el modelo de Volterra.	12
$n$	Número de personas en la población en el momento $t$ ; es una variable aleatoria.	16
$[P]$	Vector fila de las tasas de participación (por ejemplo, en la fuerza de trabajo) a las diversas edades.	14
$P$	Matriz de probabilidades de transición; $p_{ij}$ es la probabilidad de ir desde el estado $i$ -ésimo al $j$ -ésimo.	17
$P^{(\tau)}$	Producto de las matrices de proyección para $\tau$ períodos:  $P^{(\tau)} = M^{(\tau)} M^{(\tau-1)} \dots M^{(1)}$	4
$p$	Probabilidad de concebir en un mes dado de exposición al riesgo para una mujer en estado secundo; probabilidad de que un nacimiento dado sea masculino; $p$ es fija para todos los miembros de la población.	17
$P_i$	Probabilidad que tiene la pareja $i$ -ésima de que un nacimiento dado sea masculino; probabilidad mensual de concebir de la $i$ -ésima mujer.	17
$P_{ij}$	Probabilidad de pasar desde el $i$ -ésimo al $j$ -ésimo estado en un mes dado.	17
$P_{ij \rightarrow kl}$	Probabilidad de transición desde la edad $i$ -ésima y paridez $j$ -ésima a la edad $k$ -ésima y paridez $l$ -ésima durante un período de tiempo unitario.	14

Símbolo	Definición	Capítulo
$p_{m,f}(t)$	Probabilidad de que en un momento $t$ haya una población con $m$ hombres y $f$ mujeres en el proceso estocástico para dos sexos.	16
$p_n(t)$	Probabilidad de que la población haya alcanzado el número $n$ en el momento $t$ .	16
$p(a)$	Probabilidad de supervivencia desde el nacimiento hasta la edad $a$ : $p(a) = l(a)/l_0;$ $p(a)$ es la columna del número de sobrevivientes en una tabla de vida de raíz 1.	5
${}_n p_x$	Probabilidad que tiene un individuo de edad exacta $x$ de vivir $n$ años más ${}_n p_x = 1 - {}_n q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$	1
$Q_s$	Coefficiente de $e^{r \cdot t}$ en la solución de la ecuación integral $B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-a)p(a)m(a) da;$ $B(t) = \sum_{s=1}^{\infty} Q_s e^{r \cdot t}$	5
$q$	Probabilidad de que no haya concepción en un mes dado de exposición al riesgo: $q = 1 - p$ ; se usa también para la probabilidad de que un nacimiento dado sea femenino.	17
$q_i$	Probabilidad que tiene la $i$ -ésima familia de que un nacimiento dado sea femenino.	17
${}_n q_x$	Probabilidad de una persona que ahora tiene la edad exacta $x$ de morir en los próximos $n$ años ${}_n q_x = {}_n d_x / l_x$	1
$R_0$	Tasa neta de reproducción, esto es, el número esperado de hijas que dará a luz una niña nacida ahora, en base a tasas observadas de supervivencia y fecundidad. $R_0 = \int_a^{\beta} p(a)m(a) da$	5

Símbolo	Definición	Capítulo
$R_i$	Momento de la función de fecundidad neta $p(a)m(a)$ :	6
	$R_i = \int_a^\beta a^i p(a)m(a) da$	
	<p>En sentido estricto, <math>p(a)m(a)</math> no es una distribución, puesto que su integral es <math>R_0</math> y no uno; generalmente usamos la distribución <math>p(a)m(a)/R_0</math>, cuyo momento <math>i</math>-ésimo centrado en cero es <math>R_i/R_0</math>.</p>	
$r$	Tasa de crecimiento; tasa intrínseca de crecimiento natural; la variable de la función $\psi(r)$ en la ecuación característica $\psi(r) = 1$ .	1
$r_m, r_f$	Tasas intrínsecas de crecimiento para la población masculina y femenina.	14
$r_1, r_2, r_3, \dots$	Raíces de $\psi(r) = 1$ ; $r_1$ es real; todas las demás son complejas, y sus partes reales son menores que $r_1$ .	5
${}_n r_x$	Tasa de crecimiento asumida para las edades que van de $x$ a $x + n$ , inferida de la distribución por edades observada como	1
	${}_n r_x = \frac{1}{2n} \ln \left( \frac{{}_n K_{x-n} / {}_n L_{x-n}}{{}_n K_{x+n} / {}_n L_{x+n}} \right)$	
$S$	Matriz que representa la supervivencia, cuyos únicos elementos distintos de cero están en su subdiagonal.	4
$s$	Relación de masculinidad al nacimiento: razón de los nacimientos masculinos a los femeninos en un período dado; se llama también índice de masculinidad de los nacimientos.	13
(sd)	Tasa bruta de mortalidad tipificada por el método directo.	1
$T$	Intervalo medio entre dos generaciones definido por $e^{rT} = R_0$ .	6
$T_x$	Suma de ${}_n L_x$ desde la edad $x$ hasta el final de la vida:	1
	$T_x = {}_n L_x + {}_n L_{x+n} + \dots + {}_n L_{\omega-n} = \int_0^{\omega-x} l(x+t) dt$	
Th	Índice de Thompson:	7
	$\text{Th} \doteq \frac{{}_5 K_0 / {}_{30} K_{15}}{{}_5 L_0 / {}_{30} L_{15}}$	
	aproximadamente igual a la tasa neta de reproducción $R_0$ .	
$T(x)$	Integral de $l(x)$ desde la edad $x$ hasta el fin de la vida:	1
	$T(x) = \int_0^{\omega-x} l(x+t) dt$	

Símbolo	Definición	Capítulo
$U(s)$	Función generatriz de las cantidades $u_i$ :	5
	$U(s) = u_0 + u_1s + u_2s^2 + \dots$	
$u$	Parte real de la raíz $\lambda$ de $ \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}  = 0$ .	3
$u_t$	Número total de hijos en el momento $t$ en todas las generaciones en el modelo de fracciones parciales.	5
$v$	Parte imaginaria, esto es, coeficiente de $i = \sqrt{-1}$ , en la raíz compleja de $ \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}  = 0$ :	3
	$\lambda = u + iv$	
$V$	Valor reproductivo total de una población (un sexo).	3
$v_x$	Valor reproductivo de una mujer de edad exacta $x$ :	3
	$v_x = \frac{1}{l_x} \int_x^{\beta} e^{-r_1(a-x)} l(a) m(a) da$	
$w_i$	Tiempo de espera teórico para la concepción de la mujer $i$ -ésima:	17
	$w_i = 1/p_i$	
$\mathcal{E}(w)$	Tiempo medio de espera teórico para la concepción	17
	$\mathcal{E}(w) = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{p_i}$	
$\text{Var}(w)$	Varianza del tiempo de espera teórico para la concepción	17
	$\text{Var}(w) = \frac{1}{n} \sum \left( \frac{1}{p_i} - \mathcal{E}(w) \right)^2$	
$x$	Edad; frecuentemente una variable discreta con valores en intervalos quinquenales, 0, 5, 10, ...	1
$x$	Parte real de la raíz compleja $r$ de la ecuación $\psi(r) = 1$ .	3
$y$	Parte imaginaria, esto es coeficiente de $i = \sqrt{-1}$ , en la raíz compleja $r$ de $\psi(r) = 1$ .	3
$\{y_1, y_2\}$	Diferencia dividida:	10
	$\{y_1, y_2\} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
$\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots$	Matrices estables en el análisis de la matriz de proyección, correspondiente a $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ; satisfacen la relación $\mathbf{M}\mathbf{Z}_i = \lambda_i\mathbf{Z}_i$ y son idempotentes ( $\mathbf{Z}_i^2 = \mathbf{Z}_i$ ).	3



Símbolo	Definición	Capítulo
$\alpha$	Edad más joven de reproducción o también edad que es múltiplo de 5 y está justo bajo la edad más joven de reproducción.	2
$\beta$	Edad más alta de reproducción, o edad que es múltiplo de 5 justo sobre la edad más alta de reproducción.	2
$\beta_1$	Medida de Pearson de asimetría: $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$	6
$\beta_2$	Coficiente de curtosis de Pearson: $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$	6
$\Delta l_x$	Primera diferencia de $l_x$ , tomada generalmente para un intervalo quinquenal.  $\Delta l_x = l_{x+5} - l_x = -{}_5d_x$	1
$\kappa_i$	$i$ -ésimo cumulante, generalmente de la función de fecundidad neta dividida por $R_0$ . Para $i = 1$ , $\kappa_i$ es igual a $\mu$ o $\mu'_1$ ; el primer momento centrado en cero; para $i = 2, 3$ , es igual a los correspondientes momentos centrados en la media  ( $\kappa_2 = \mu_2 = \sigma^2$ , $\kappa_3 = \mu_3$ ); for $i = 4$ , it is $\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$	5
$\Delta$	Matriz diagonal cuyo $i$ -ésimo elemento comenzando la lectura desde el extremo superior izquierdo es $\lambda_i$ , la $i$ -ésima raíz de $ \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}  = 0$	3
$\lambda$	Un valor característico; la variable de $f(\lambda)$ en la ecuación en determinantes  $f(\lambda) =  \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}  = 0$	3
$\lambda$	Tasa instantánea de natalidad en el proceso de nacimientos y muertes; la probabilidad de que cada individuo dé a luz en el momento $t$ a $t + dt$ es $\lambda dt$ .	16
$\lambda_x$	En problemas de muestreo, es la probabilidad como parámetro de sobrevivir desde el nacimiento hasta la edad $x$ ; en las observaciones, $l_x$ es el número de sobrevivientes a la edad $x$ de una muestra de $l_0$ nacidos.	15
$\lambda_1$	Raíz real de la ecuación en determinantes $ \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}  = 0$ ; en la matriz usada en el análisis demográfico es la raíz de mayor valor absoluto.	3
$\lambda_2, \lambda_3$	Segunda y tercera raíces en valor absoluto de $ \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}  = 0$ ; son generalmente complejas.	3
$\mu$	Tasa instantánea de mortalidad; la probabilidad que tiene cada persona de morir entre $t$ y $t + dt$ es $\mu dt$ .	16

Símbolo	Definición	Capítulo
$\mu$	Edad media al nacimiento de los hijos en la población estacionaria: $\mu = R_1/R_0$	6
$\bar{\mu}$	Edad media en la población estacionaria: $\bar{\mu} = \bar{L}_1/\bar{L}_0$	9
$\mu(x)$	Fuerza de la mortalidad o tasa instantánea de mortalidad a la edad $x$ $\mu(x) = -\frac{1}{l(x)} \frac{dl(x)}{dx}$	1
$\Pi_t$	Vector que contiene las probabilidades de los diversos estados en el momento $t$ .	17
$\pi_i$	Probabilidad del $i$ -ésimo estado en la condición estable.	17
$\pi_i$	Probabilidad de que un hombre tenga $i$ hijos o una mujer $i$ hijas.	18
$\sigma^2$	Varianza de las edades de las madres en el nacimiento de sus hijos en la población estacionaria: $\sigma^2 = \frac{R_2}{R_0} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2$	6
$\bar{\sigma}^2$	Varianza de las edades en la población estacionaria: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_0} - \left(\frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_0}\right)^2$	9
$\phi(a)$	Función de fecundidad neta: $\phi(a) = p(a)m(a)$ La probabilidad (al nacimiento) de que sobreviva una niña y tenga ella misma una hija entre las edades $a$ y $a + da$ es $\phi(a)da$ .	5
$\phi(s)$	Función generatriz de $P_i$ : $\phi(s) = P_0 + P_1s + P_2s^2 + \dots$	17
$\phi_p(x)$	Función de fecundidad neta que considera clases de decremento, por ejemplo parideces, cuando la distribución de la población entre las clases es estacionaria.	14
$\phi(z, t)$	Función generatriz de probabilidades para las $p_n(t)$ : $\phi(z, t) = p_0(t) + p_1(t)z + p_2(t)z^2 + \dots$	16

Símbolo	Definición	Capítulo
$\phi(r)$	Valor descontado de los nacimientos futuros a una niña en el momento de su nacimiento:	5
	$\phi(r) = \int_a^{\beta} e^{-ra} p(a) m(a) da$	
	Se usa frecuentemente en la ecuación característica para $r$ :	
	$\phi(r) = 1$	
$\omega$	Ultima edad de la tabla de vida:	17
	$l_{\omega} = 0$	

## General

Se usan subíndices para los argumentos de una función que son variables discretas, y paréntesis para el caso de argumento continuo. Por ejemplo, el número de sobrevivientes de la tabla de vida a la edad quinquenal  $x$  es  $l_x$ ,  $x = 0, 5, 10, 15, \dots$ ; a la edad  $a$  (un elemento de un conjunto continuo de valores) es  $l(a)$ .

Un subíndice en la parte inferior izquierda significa el largo de un intervalo, generalmente de edad. Por ejemplo,  ${}_5L_x$  es el número de individuos de un sexo dado en la población estacionaria entre las edades exactas  $x$  y  $x + 5$ . Cuando por el contexto se deja claro que se trata de un intervalo de un año o de cinco años, se omite el 1 o el 5 de la parte inferior izquierda.

Un super-índice en la parte superior derecha es usado para indicar el tiempo: por tanto, la población en el momento  $t$  entre las edades  $x$  y  $x + n$  es  ${}_nK_x^{(t)}$ . Para las proyecciones para un periodo quinquenal, la unidad para  $t$  es cinco años, en tanto que las unidades para  $x$  y  $n$  son años simples.  $E_x^z$  es la exposición al riesgo a la edad  $x$  del último cumpleaños durante el año calendario  $z$ . Se usa una barra sobre el símbolo,  $k_i$ , para distinguir los cumulantes de la distribución de edades de los de la distribución de las edades en el momento del nacimiento.

Los símbolos para el proceso con un solo sexo descrito en términos de población femenina se aplican igualmente a la masculina; por ejemplo,  $R_0$  es el número esperado de hijos hombres en un niño hombre recién nacido, calculado en base a las tasas específicas de fecundidad y mortalidad observadas por edades. La potencia de una matriz  $A$  es  $A^t$ , que tiene como  $j$ -ésimo elemento de la  $i$ -ésima fila a  $a_{ij}^{(t)}$ .

$|A|, |\mathbf{A}|$  Valor absoluto de  $A$  si  $A$  es escalar, real o complejo. Determinante si  $\mathbf{A}$  es una matriz cuadrada.

$\doteq$  Aproximadamente igual a.

$\sim$  Asintóticamente igual a.

\* Transformada de Laplace; valor mejorado en un proceso iterativo; característica masculina cuando es necesario distinguir masculino de femenino.

CUADRO DE  $e^x$  PARA CALCULO DE EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

$x^*$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004
0.00	1.000 000	1.001 001	1.002 002	1.003 005	1.004 008
0.01	1.010 050	1.011 061	1.012 072	1.013 085	1.014 098
0.02	1.020 201	1.021 222	1.022 244	1.023 267	1.024 290
0.03	1.030 455	1.031 486	1.032 518	1.033 551	1.034 585
0.04	1.040 811	1.041 852	1.042 894	1.043 938	1.044 982
0.05	1.051 271	1.052 323	1.053 376	1.054 430	1.055 485
0.06	1.061 837	1.062 899	1.063 962	1.065 027	1.066 092
0.07	1.072 508	1.073 581	1.074 655	1.075 731	1.076 807
0.08	1.083 287	1.084 371	1.085 456	1.086 542	1.087 629
0.09	1.094 174	1.095 269	1.096 365	1.097 462	1.098 560

$x$	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.00	1.005 013	1.006 018	1.007 025	1.008 032	1.009 041
0.01	1.015 113	1.016 129	1.017 145	1.018 163	1.019 182
0.02	1.025 315	1.026 341	1.027 368	1.028 396	1.029 425
0.03	1.035 620	1.036 656	1.037 693	1.038 731	1.039 770
0.04	1.046 028	1.047 074	1.048 122	1.049 171	1.050 220
0.05	1.056 541	1.057 598	1.058 656	1.059 715	1.060 775
0.06	1.067 159	1.068 227	1.069 295	1.070 365	1.071 436
0.07	1.077 884	1.078 963	1.080 042	1.081 123	1.082 204
0.08	1.088 717	1.089 806	1.090 897	1.091 988	1.093 081
0.09	1.099 659	1.100 759	1.101 860	1.102 963	1.104 066

$x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.0	1.000000	1.105171	1.221403	1.349859	1.49182
1.0	2.718282	3.004166	3.320117	3.669297	4.05520
2.0	7.389056	8.166170	9.025013	9.974182	11.02318
3.0	20.08554	22.19795	24.53253	27.11264	29.96410
4.0	54.59815	60.34029	66.68633	73.69979	81.45087
5.0	148.4132	164.0219	181.2722	200.3368	221.4064
6.0	403.4288	445.8578	492.7490	544.5719	601.8450
7.0	1096.633	1211.967	1339.431	1480.300	1635.984
8.0	2980.958	3294.468	3640.950	4023.872	4447.067
9.0	8103.084	8955.293	9897.129	10938.02	12088.38

$x$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	1.648721	1.822119	2.013753	2.225541	2.45960
1.0	4.481689	4.953032	5.473947	6.049647	6.68588
2.0	12.18249	13.46374	14.87973	16.44465	18.17411
3.0	33.11545	36.59823	40.44730	44.70118	49.40241
4.0	90.01713	99.48432	109.9472	121.5104	134.2898
5.0	244.6919	270.4264	298.8674	330.2996	365.0375
6.0	665.1416	735.0952	812.4058	897.8473	992.2747
7.0	1808.042	1998.196	2208.348	2440.602	2697.282
8.0	4914.769	5431.660	6002.912	6634.244	7331.974
9.0	13359.73	14764.78	16317.61	18033.74	19930.37

\* El argumento  $x$  es el número de comienzo de la fila más el número al tope de la columna. Como un ejemplo de su uso véase el cuadro 5.3.

# INDICE

	Página
Prefacio . . . . .	v
Reconocimientos . . . . .	ix
<b>PRIMERA PARTE LA TABLA DE VIDA</b>	
Capítulo 1. <i>El Modelo de Población Estacionaria</i>	
1.1 Una Presentación de la Tabla de Vida . . . . .	3
1.2 Una Tabla de Vida que Itera a los Datos . . . . .	19
1.3 Niveles de Discurso . . . . .	24
<b>SEGUNDA PARTE ANALISIS DISCRETO PARA UN SEXO</b>	
Capítulo 2. <i>El Conjunto Básico de Ecuaciones de Recurrencia</i>	
2.1 Proyección de Población . . . . .	27
2.2 Condensación de la Matriz . . . . .	37
Capítulo 3. <i>Análisis General de la Matriz de Proyección</i>	
3.1 Un Ejemplo Numérico para la Matriz 3 x 3 . . . . .	41
3.2 Algebra Matricial del Proceso de Proyección . . . . .	47
3.3 Cálculo Iterativo de los Componentes Matriciales . . . . .	63
3.4 Interpretación de los Resultados . . . . .	69
Capítulo 4. <i>Estudio de una Matriz de Proyección que Cambia a Través del Tiempo</i>	
4.1 Experimentos Acerca de los Efectos del Cambio en las Tasas Específicas de Fecundidad y Mortalidad por Edades . . . . .	74
4.2 Análisis de Colecciones de Tablas de Vida . . . . .	81
4.3 Extrapolación a Poblaciones Futuras . . . . .	86
4.4 Ajuste de Datos . . . . .	88
4.5 Sobre Ergodicidad Fuerte y Débil . . . . .	89
<b>TERCERA PARTE EL ANALISIS CONTINUO</b>	
Capítulo 5. <i>La Ecuación de Renovación: Solución General</i>	
5.1 Proyección de Población en el Caso Continuo . . . . .	97
5.2 Solución por Cálculo Elemental . . . . .	100
5.3 Solución Numérica de la Ecuación Característica . . . . .	108

	Página
5.4 Propiedades de la Transformada de Laplace . . . . .	114
5.5 Solución General Vía la Transformada de Laplace . . . . .	116
5.6 La Sucesión de Generaciones . . . . .	117
5.7 Distribuciones Puntual y Rectangular de la Función de Fecundidad Neta . . . . .	127
5.8 Formulación a Través de las Funciones Generatrices y las Fracciones Parciales . . . . .	130
Capítulo 6. <i>Parametrización del Proceso de Renovación</i>	
6.1 Ajuste de la Función de Fecundidad Neta . . . . .	140
6.2 Ajuste de la Función de Fecundidad Neta por Medio de la Distribución Normal (Lotka) . . . . .	141
6.3 Ajuste Mediante la Función Gamma Incompleta (Wicksell) . . . . .	147
6.4 Ajuste Mediante una Distribución que Relaciona Generaciones Sucesivas (Hadwiger) . . . . .	149
6.5 Compatibilidad de los Diversos Ajustes de la Función de Fecundidad Neta . . . . .	155
Capítulo 7. <i>Interrelaciones entre las Variables Demográficas en las Poblaciones Estables</i>	
7.1 Relaciones en Cualquier Población Cerrada . . . . .	170
7.2 Relaciones Bajo la Condición de Estabilidad . . . . .	174
7.3 Una Aplicación de la Teoría de la Población Estable . . . . .	184
7.4 Algunos Efectos Sobre la Distribución por Edades de Cambios en la Fecundidad y la Mortalidad . . . . .	185
Capítulo 8. <i>Reconciliación de la Ecuación Matricial e Integral</i>	
8.1 Una Ecuación en Diferencias de Orden Superior . . . . .	195
8.2 Ecuaciones Matriciales e Integrales . . . . .	200
8.3 Resumen de Soluciones . . . . .	206
Capítulo 9. <i>Series de Tiempo Demográficas</i>	
9.1 Nacimientos Correspondientes a Números Totales Dados . . . . .	210
9.2 Ajuste Mediante una Curva en la cual las Constantes Participan de Manera No-lineal . . . . .	214
9.3 La Forma Casi-logística de los Nacimientos en una Población que Crece Logísticamente . . . . .	218
9.4 La Explosión Demográfica . . . . .	219
 CUARTA PARTE TECNICAS NUMERICAS  	
Capítulo 10. <i>Interpolación y Ajuste</i>	
10.1 Interpolación Lineal . . . . .	223
10.2 Expresiones para Interpolación Polinómica Mediante Determinantes . . . . .	224
10.3 Expresiones Matriciales para la Interpolación Polinomial . . . . .	232
10.4 Tópicos en la Construcción de la Tabla de Vida . . . . .	234
10.5 Estimación del Error de Interpolación . . . . .	244

Capítulo 11. *Aproximaciones Finitas*

11.1 La Matriz de Proyección .....	246
11.2 Distribución Estable por Edades Obtenida de la Columna $l_x$ de la Tabla de Vida .....	259
11.3 Poblaciones Estables Cambiadas de una Aproximación Finita a Otra .....	262
11.4 Las Constantes Q de la Ecuación Integral .....	264
11.5 Resumen y Computación Numérica Basado en Cuatro Formulas del Proceso de Renovación .....	265

QUINTA PARTE INTERACCION ENTRE POBLACIONES

Capítulo 12. *Aspectos Cualitativos de la Interacción entre Poblaciones*

12.1 El Modelo Lineal .....	271
12.2 Un Caso no Lineal .....	284
12.3 El Modelo no Lineal General .....	287

Capítulo 13. *El Problema de los Sexos y Otros Usos de las Ecuaciones Diferenciales Simultáneas*

13.1 Inconsistencia al Tratar Separadamente los Sexos .....	293
13.2 Dominancia .....	296
13.3 Tratamiento Simultáneo de las Edades y los Sexos .....	310
13.4 Un Modelo de Nupcialidad .....	314
13.5 Paridez y Orden de Nacimientos Según la Edad .....	318

Capítulo 14. *Poblaciones en Interacción Analizadas por Edades*

14.1 La Matriz Generalizada .....	320
14.2 Decremento Múltiple .....	334
14.3 La Ecuación Integral Modificada para Tener en Cuenta el Orden de Nacimiento .....	335

SEXTA PARTE MODELOS PROBABILISTICOS

Capítulo 15. *Varianza Muestral de las Características Demográficas*

15.1 Funciones de la Tabla de Vida .....	341
15.2 Funciones de Fecundidad .....	353
15.3 Un Enfoque Simplificado de las Muestras Complejas .....	355

Capítulo 16. *Procesos de Nacimiento y Muerte*

16.1 El Proceso Puro de Nacimientos y sus Extensiones .....	363
16.2 Un Modelo de Nacimiento, Muerte e Inmigración .....	366
16.3 El Problema de los Sexos Tratado Estocásticamente .....	372
16.4 Una Expresión General para las Varianzas en los Modelos de Población Lineales .....	380
16.5 Distribución de la Relación de Masculinidad .....	382

	Página
Capítulo 17. <i>Distribuciones de Población y Comportamiento Individual</i>	
17.1 Reglas de Detención .....	384
17.2 Los Nacimientos como una Sucesión en el Tiempo .....	390
17.3 Descuento por el Período Estéril del Embarazo .....	395
17.4 Simulación .....	404
Capítulo 18. <i>El Proceso de Ramificación como un Modelo de Población</i>	
18.1 Teoría de Ramificación .....	405
18.2 Método Abreviado para Determinar la Probabilidad de Extinción .....	412
18.3 Efecto de un Cambio en la Distribución sobre la Probabilidad de Extinción .....	417
Bibliografía .....	421
Lista de Símbolos .....	439
Cuadro $e^x$ para Cálculo de Exponenciales y Logaritmos .....	452





Impreso en los Servicios  
de Reproducción de CELADE





