

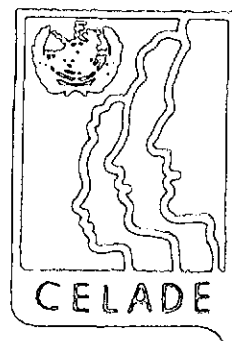
E/11
c.3

Reserva Univ.

ALFRED J. LOTKA DEMOGRAFIA MATEMATICA

SELECCION DE ARTICULOS

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA



Santiago de Chile

DEMOGRAFIA MATEMATICA

Alfred J. Lotka

**DEMOGRAFIA
MATEMATICA**

Selección de artículos



CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
SANTIAGO DE CHILE, 1973

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFÍA
CELADE

Sede: J. M. Infante 9. Casilla 91. Teléfono 257806. Santiago (Chile)

Subsede: Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. Apartado Postal 5249.
San José (Costa Rica)

INDICE

I. LA ESTABILIDAD DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL POR EDADES ..	1
II. SOBRE LA TASA INTRÍNSECA DE CRECIMIENTO NATURAL (De acuerdo a cómo aparece dada por la población de los Estados Unidos, en 1920)	7
Introducción	7
Razonamiento y método	8
Efectos sobre la tasa de crecimiento de las modificaciones en los factores demográficos	21
Tamaño de la familia	21
Resumen	23
Nota bibliográfica	24
APÉNDICE	25
Razonamiento riguroso y métodos de cálculo	25
Método de empleo de las tablas de vida en el cálculo retros- pectivo de las tasas de natalidad norteamericanas	29
Puntos estimados en las tablas de vida	30
Estimación de las tablas de vida más antiguas	30
III. EL AJUSTE PROGRESIVO DE LA COMPOSICIÓN POR EDADES A LA FECUNDIDAD	31
IV. EL TAMAÑO DE LAS FAMILIAS NORTEAMERICANAS EN EL SIGLO DIECIOCHO	39
El significado de las constantes empíricas en la ley de Pearl-Reed, de crecimiento de la población	39
Tratamiento más exacto	42
Aplicación numérica	42

Duración media de una generación	47
Tasa de natalidad	48
Intervalo entre nacimientos	48
Segundo factor limitante en la ley de Pearl-Reed	50
Resumen	50
V. LA ORFANDAD EN RELACIÓN CON LOS FACTORES DEMOGRÁFICOS	53
Un estudio de análisis de población	53
Introducción	53
La orfandad en relación con la mortalidad de los padres ..	56
Número de huérfanos que ocurren anualmente	70
Orfandad en Inglaterra y Gales	71
Tratamiento analítico	73
Tratamiento sintético	74
Conclusión	78
APÉNDICE	80
Proporción de huérfanos entre personas de edad determinada	80
VI. EL TAMAÑO PROMEDIO DE LA FAMILIA EN UNA POBLACIÓN ESTACIONARIA Y EN UNA POBLACIÓN, DECRECIENTE	99
Tamaño de las familias en una población estacionaria ...	99
Tamaño de las familias en una población decreciente ...	100
La familia de dos hijos	100
VII. ANÁLISIS DE POBLACIÓN: UN TEOREMA RELATIVO A LA DISTRIBUCIÓN ESTABLE POR EDADES	103
VIII. PUNTOS DE CONTACTO DEL ESTUDIO DE LA POBLACIÓN CON RAMAS CONEXAS DE LA CIENCIA	107
IX. EL LUGAR DE LA TASA INTRÍNSECA DE CRECIMIENTO NATURAL EN EL ANÁLISIS DE POBLACIÓN	119
APÉNDICE	124
Una relación fundamental en el análisis de población	124
X. EL ANÁLISIS DE POBLACIÓN COMO UN CAPÍTULO DE LA TEORÍA MATEMÁTICA DE LA EVOLUCIÓN	131
Las raíces de la ecuación característica (11)	134
Relación entre las raíces de la ecuación característica (11) y las semivariantes de Thiele de la función de distribución $\varnothing(a)$	135
La tasa intrínseca de crecimiento natural y otras medidas conexas del crecimiento potencial de la población	137

I. LA ESTABILIDAD DE LA DISTRIBUCION NORMAL POR EDADES¹

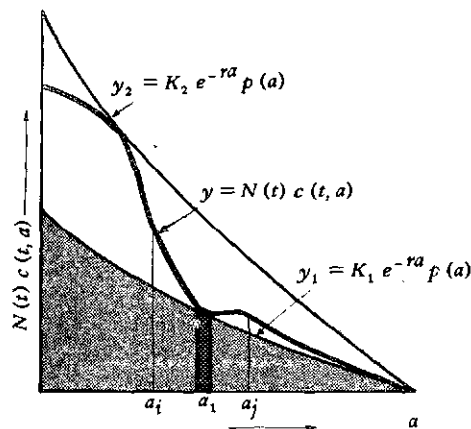
Existe una distribución por edades única que, en ciertas circunstancias², tiene la propiedad de perpetuarse una vez establecida en una población. Este hecho se prueba fácilmente³, como también la forma analítica de esta distribución *fija* o *normal* única por edades.

Más difícil es demostrar que esta distribución por edades es *estable*, que la población volverá espontáneamente a ella después de desplazarse desde allí, o que convergerá hacia ella desde una distribución inicial arbitraria por edades. Tal demostración ha sido presentada hasta ahora sólo para el caso de pequeños desplazamientos⁴, mediante un método que emplea ecuaciones integrales. El propósito del presente artículo es mostrar una prueba de estabilidad que emplea solamente operaciones analíticas elementales, y que se puede ampliar fácilmente para abarcar también el caso de grandes desplazamientos. Este método presenta la ventaja adicional de ser planteado en relación inmediata y claramente reconocible con las causas físicas que operan en la determinación de la distribución normal por edades.

Considérese una población que tiene una distribución dada por edades en el instante t , como la que representa la curva dibujada con trazo grueso en el gráfico 1. Las abscisas representan las edades a (en años, por ejemplo),

mientras que las ordenadas y son tales que el área comprendida entre dos ordenadas levantadas en a_1 y a_2 , respectivamente, representan el número de individuos entre las edades a_1 y a_2 .

GRAFICO 1



Si simbolizamos por $N(t)$ la población total en el instante t , y si las ordenadas de nuestra curva son

$$y = N(t) c(t, a) \quad (1)$$

tenemos, evidentemente

$$\int_{a_1}^{a_2} y da = N(t) \int_{a_1}^{a_2} c(t, a) da = N(t, a_1, a_2) \quad (2)$$

¹ *Documentos del Departamento de Biometría y Estadísticas Vitales*. Escuela de Higiene y Salud Pública, Johns Hopkins University, nº 71.

² Estas circunstancias son:

- a) Una curva de vida invariable (tabla de vida);
- b) una razón constante entre los nacimientos masculinos y femeninos;

c) una tasa constante de procreación por persona en cada año de edad, para cualquier composición por sexo y edad de la población.

³ Lotka, A. J.: *Amer. J. Sci.*, 26, 1907 (21); *Ibid.*, 24 (199); *J. Wash. Acad. Sci.*, 3, 1913 (241, 289).

⁴ Sharpe, F.R., y Lotka, A. J.: *Phil. Mag.*, Abril, 1911, 435.

donde $N(t, a_1, a_2)$ indica el número de individuos vivos en el momento t , con edades comprendidas entre a_1 y a_2 . Podemos decir que $c(t, a)$ es el coeficiente de la distribución por edades. Por supuesto, es en general una función de t , y sólo en el caso especial de la

distribución por edades estable o autoperpetuable, $c(a)$ es independiente del tiempo.

Ahora, sin suponer nada acerca de la estabilidad de la distribución por edades autoperpetuable, es fácil demostrar⁵ que su forma debe ser

$$c(a) = \frac{e^{-ra} p(a)}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da} = b e^{-ra} p(a) \quad (3)$$

en que r es la raíz real de la ecuación

$$1 = \int_{a_i}^{a_j} e^{-ra} p(a) \beta(a) da \quad (4)$$

En esta ecuación, r es la tasa natural de incremento de la población, esto es, la diferencia $r = b - d$ entre la tasa de natalidad per cápita b , y la tasa de mortalidad per cápita d , y $p(a)$ es la probabilidad, al nacer, de que un individuo elegido al azar viva hasta la edad a (en otras palabras, es la función principal tabulada en las tablas de vida, y denotada comúnmente por l_x). Los límites a_i y a_j de la integral son los límites inferior y superior de edad del período de reproducción. El factor $\beta(a)$, que puede denominarse factor de procreación, o más simplemente factor de nacimiento, es el número promedio de nacimientos aportados anualmente por un progenitor de edad a . (En una población de ambos sexos es, por supuesto, indiferente, numéricamente, si se le asigna el nacimiento al padre o a la madre. Sin embargo, se simplificará el razonamiento si pensamos en imputar cada nacimiento sólo a la madre).

El factor $\beta(a)$ dependerá en general de la distribución por edades prevaleciente. Esto se ve con más facilidad en los casos extremos, como por ejemplo una población que consta exclusivamente de hombres de menos de un año de edad y de mujeres mayores de 45. Pero, excepto en estos casos extremos, $\beta(a)$ no variará fuertemente ante cambios en la estructura por edades de la población. Desarrollaremos primero nuestro razonamiento bajo el supuesto que $\beta(a)$ es independiente de la distribución por edades. Extenderemos luego nuestro razonamiento al caso más general en que $\beta(a)$ varía con $c(t, a)$.

Refiriéndonos ahora nuevamente al gráfico 1, dibujemos dos curvas auxiliares, una curva *tangente inferior* y una *curva tangente superior*

$$y_1 = K_1 e^{-ra} p(a) \quad (5)$$

$$y_2 = K_2 e^{-ra} p(a) \quad (6)$$

siendo K_1 y K_2 las constantes, elegidas de modo tal que la curva tangente inferior quede enteramente bajo la curva arbitraria dada, excepto donde es tangente a ella, mientras la curva tangente superior queda enteramente sobre la curva dada, excepto donde es tangente a ella.

La curva arbitraria dada que representa la estructura por edades de la población en el instante t , queda enteramente comprendida en la franja o área encerrada entre las curvas tangentes inferior y superior.

Considérese ahora la situación en un instante posterior t' . Si la población en el período t consistía únicamente de los individuos representados por el área ligeramente sombreada en el gráfico 1, esto es, el área bajo la curva tangente inferior, entonces, en el instante t' , la población quedaría representada por la curva inferior del gráfico 2, cuya ecuación es

$$y_1' = K_1' e^{-ra} p(a) \quad (7)$$

$$= K_1 e^{r(t'-t)} e^{-ra} p(a) \quad (8)$$

Puesto que la distribución por edades (5) es de la forma estable (3), ella persiste en (7); por otro lado, dada esta distribución estable por edades, la población en conjunto crece en progresión geométrica, de manera que $K_1' = K_1 e^{r(t'-t)}$. En verdad, hemos dejado de considerar aquella parte de la población que en el gráfico 1 está representada por el área punteada. Luego, además de la población bajo la curva inferior del gráfico 2, habrá en el instante t' otra parte de la población que para nuestros propósitos presentes no es necesario determinar numéricamente. Sólo necesitamos saber que es algún número positivo, de modo que la curva que representa la

⁵ Se introduce aquí cierta ambigüedad por el hecho de que, con $\beta(a)$ variable, la ecuación (4) puede tener más de una raíz real para r . Sin embargo, en la práctica, en una población humana, de todos modos probablemente sólo una de tales raíces existe o tiene un efecto cualquiera sobre el curso de los sucesos.

población efectiva en el instante t' , quede enteramente por encima o en contacto con la curva (8).

Precisamente mediante un razonamiento similar se demuestra, fácilmente, que en el instante t' la curva verdadera queda enteramente bajo la curva o en contacto con ésta.

$$y'_2 = K_2 e^{r(t'-t)} e^{-ra} p(a) \quad (9)$$

Luego, en el instante t' , la curva verdadera queda totalmente en la franja comprendida entre las curvas (8) y (9).

$$\begin{aligned} y'_{t'}(a_1 + t' - t) &= K'_1 e^{-ra_1} p(a_1 + t' - t) = \\ &= K_1 e^{r(t'-t)} e^{-r(a_1 + t' - t)} p(a_1 + t' - t) \end{aligned}$$

De esto se desprende que la franja elemental de población, que en el instante t' , tiene un punto en común con la curva tangente inferior (8), está constituida por los sobrevivientes de la franja que en el período t tenía un punto en común con la curva tangente inferior. En otras palabras, si seguimos identificando a los individuos, al elemento de la población que en cualquier instante tiene puntos de

Considerérese ahora una franja elemental, de ancho da , de la población original (indicada con sombreado oscuro en el gráfico 1), que en el instante t está en contacto con la curva tangente inferior. Supongamos que este contacto ocurre en la edad a_1 , de modo que $y_t(a_1) = K_1 e^{-ra_1} p(a_1)$. En el instante t' los individuos sobrevivientes de aquellos comprendidos en la franja elemental tendrán la edad $(a_1 + t' - t)$, de manera que estarán entonces representados por una franja de ancho da y de altura

contacto con la curva tangente inferior, este elemento (mientras cualquier parte de él sobreviva) continúa en contacto con esa curva. (Sin embargo, debe recordarse que la propia curva tangente cambia con el tiempo de acuerdo a (5), (8)).

Análogamente, se desprende que el elemento de la población que en cualquier instante tiene punto de contacto con la curva tangente superior, continúa en contacto mientras alguna parte de él sobreviva.

Y aun considerando cualquier elemento de la población que no tenga contacto con las curvas tangentes inferior o superior, pero que tenga su extremo superior en algún punto dentro del área encerrada entre esas curvas, puede demostrarse, precisamente a través de un razonamiento similar, que tal elemento continúa en aquella posición intermedia.

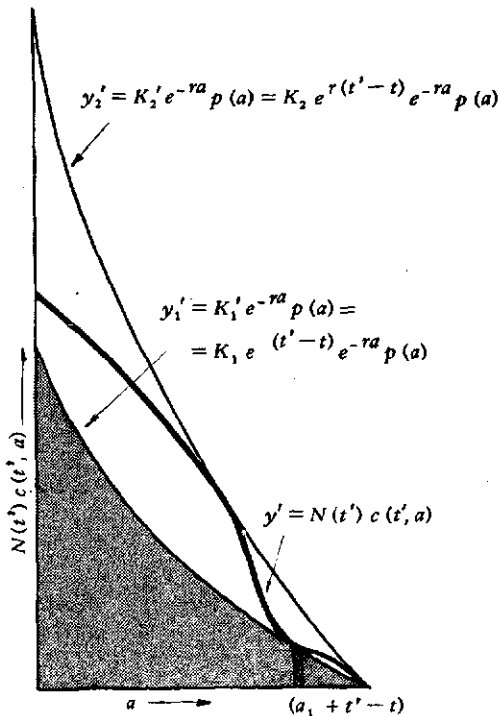
Apartándonos ahora de la consideración de los sobrevivientes de la población original, y tomando en cuenta la nueva población aumentada por los nacimientos desde el instante $t = t'$, observamos que si la población original ha sido aquella representada por el área sombreada en el gráfico 1, esto es, por el área bajo la curva tangente inferior, la tasa de natalidad debió haber sido en todo momento tal que reprodujera continuamente una población representada por la curva tangente inferior (5), (8).

De hecho, siempre que el contacto con la curva tangente inferior no sea continuo en un intervalo de edades igual o mayor que $a_j - a_i$, puede verse fácilmente que el total de nacimientos

$$B = N \int_{a_i}^{a_j} c(a) \beta(a) da$$

es siempre mayor (se excluye aquí la igualdad)

GRAFICO 2



Las curvas mostradas deben ser interpretadas sólo en un sentido cualitativo; así, por ejemplo, el incremento en las ordenadas al pasar del gráfico 1 al 2, está muy exagerado para hacerlo evidente.

que aquél que resulta de y a su vez reproduce la distribución por edades representada por la curva tangente inferior.

Igualmente, la tasa total de natalidad es siempre menor que aquella que habría resultado de una población y una distribución por edades como las representadas por la curva tangente superior.

De esto resulta claro que, una vez que la población original se ha extinguido, la curva representativa no volverá jamás a tener contacto con las curvas tangentes originales inferior y superior; en cambio en lo sucesivo deberá estar separada de ellas en cualquier punto por un margen finito (excepto, por supuesto, donde las curvas cortan al eje de las a).

Podemos empezar otra vez dibujando un nuevo par de curvas tangentes, entre las dos originales, y así indefinidamente, hasta que las curvas tangentes inferior y superior coincidan, y con ellas también coincida la curva de la distribución real por edades, que entonces es la de la forma

$$N(t) c(a) = K e^{rt} e^{-ra} p(a)$$

a la que reconocemos como la distribución estable por edades (3), con

$$N(t) = K e^{rt} \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da$$

En este razonamiento hemos excluido expresamente el caso en que la curva original de la distribución por edades tenga contacto continuo con una de sus curvas tangentes en un intervalo mayor que el período de reproducción ($a_j - a_i = A$). Si este contacto continuo tiene lugar en la 0 -ésima generación en un intervalo nA , donde $a_j/A > n > 1$, una sencilla reflexión indica que en la siguiente generación (la primera) el contacto tendrá lugar en un intervalo $(n-1)A$, en la segunda generación en $(n-2)A$, etc. Por tanto, llegará un instante (en la práctica muy pronto) en que el contacto se producirá en un período menor que el período de reproducción A . Después de esto, es aplicable el razonamiento expuesto anteriormente.

Si la curva que representa la distribución original por edades hace contacto con una de las curvas tangentes a lo largo de todo el tramo que va desde $a = 0$ hasta $a = a_j$, de manera que $a_j/A \leq n$, entonces, por supuesto, la distribución estable por edades está prácticamente estabilizada al menos desde el instante en que la parte de la población original con edades superiores a la edad reproductiva a_j se ha extinguido.

Queda por considerar el efecto de la varia-

bilidad en la forma de $\beta(a)$ ante cambios en $c(t, a)$. Parte de tal variabilidad indudablemente existe debido a la influencia de las edades del hombre y la mujer al contraer matrimonio. No obstante, podemos también en este caso definir unas curvas tangentes inferior y superior (5), (6), en términos del valor de r dado por la ecuación (4); sin embargo, a fin de hacer de éste un valor determinado, es necesario ahora hacer algún supuesto definido acerca de la forma de $\beta(a)$, que es ahora variable. Tan sólo con el propósito de definir r , supondremos que la función $\beta(a)$ bajo el signo integral tiene la forma particular que corresponde a la distribución estable por edades.⁵

Sin embargo, ahora no podemos pensar, como antes, que la parte de la población representada por el área sombreada en el gráfico 1 irá por sí misma a reproducir su propia forma de distribución por edades. Ya que en cuanto al sexo, su estructura diferirá en general de la estructura de la población "normal" con distribución por edades autoperpetuable. Por lo tanto, deberemos considerar tres diferentes posibilidades:

1. El área sombreada por sí sola generará una población que excede a toda edad la continuación de la normal o estable del área sombreada original. Si es éste el caso, el razonamiento presentado en relación con el caso de $\beta(a)$ invariable es válido *a fortiori* mientras se trate de la curva tangente inferior.

2. El área sombreada por sí sola generará una población que, comparada con la continuación de la de tipo normal (8) del área sombreada original, diferirá por defecto en alguna o todas las edades. En este caso se presenta la alternativa:

a) La deficiencia es más que compensada por la población adicional generada por la parte de la población original que está representada por el área punteada del gráfico 1. En este caso también es aplicable de manera esencialmente análoga el razonamiento original, en cuanto concierna a la curva tangente inferior.

b) Después de que se han tomado en cuenta los aportes de todas las partes de la población, queda una diferencia por defecto con respecto a la población definida por (8) no compensada en la población que resulta de la presente. En tal caso, no es aplicable el razonamiento presentado bajo el supuesto de invariabilidad de $\beta(a)$ y la población puede alejarse de la distribución por edades (3), en lugar de acercarse a ella. La estabilidad de la distribución fija por edades no puede extenderse a desplazamientos como éste.

Reflexiones análogas son aplicables, *mutatis*

mutandis, en lo concerniente a la curva tangente superior.

Si prevalecen las condiciones (1) ó (2) respecto a la curva tangente inferior, y las correspondientes condiciones respecto a la superior, podemos argumentar, como en el caso de $\beta(a)$ constante, que luego de la desaparición de la generación existente, se puede dibujar un nuevo par de curvas tangentes que quedarán entre el par definido por (8), (9). Y si aún persisten las condiciones (1) ó (2) con relación a las nuevas curvas tangentes, se puede repetir

el mismo proceso de acercamiento entre ellas al extinguirse la generación actual, y así sucesivamente, como en el razonamiento presentado al principio. Ahora las condiciones (1) ó (2) seguirán prevaleciendo para cada nuevo par de tangentes si, a medida que las tangentes inferior y superior se acercan, $\beta(a)$ tiende a una forma límite. En tal caso, por tanto, la distribución por edades definida por (3), (4) es estable incluso ante desplazamientos de cualquier magnitud, siempre que, como se señaló, prevalezcan las condiciones (1) ó (2).

II. SOBRE LA TASA INTRINSECA DE CRECIMIENTO NATURAL¹

(De acuerdo a cómo aparece dada por la población de los Estados Unidos, en 1920)

INTRODUCCION

La política actual de restricción de la inmigración a Estados Unidos otorga un interés particular a las investigaciones sobre las capacidades de crecimiento natural de nuestra población. Para el observador ocasional puede parecer que el exceso de nuestra tasa de natalidad sobre nuestra tasa de mortalidad nos da una medida, o al menos un índice, de esta capacidad de crecimiento natural. Si observa que en 1920 la tasa anual de natalidad fue de 23,40 por mil y la tasa de mortalidad de 12,41 por mil, puede pensar que no hay motivo para inquietarse ante un saldo de 10,99, que representa la "tasa natural de crecimiento" de la población.²

¹Para comodidad de los lectores que no se interesan por seguir en detalle el tratamiento matemático de los problemas contemplados aquí, los métodos exactos y rigurosos mediante los cuales se obtuvieron los resultados, se presentan separados del texto principal, en el Apéndice. Esta sección ha sido enteramente preparada por Alfred J. Lotka. En el texto se ha indicado métodos simples para los que no se pretende un rigor matemático, pero que dan valores aproximados. En cada caso se da también el valor exacto con fines comparativos, de manera que el lector puede normalmente verificar el grado de desviación con respecto a los valores exactos. Pese a que los métodos aproximados son útiles para un examen simple, ciertamente tienen poco valor sin el respaldo y el control de los resultados del análisis riguroso. Mientras tanto, el lector renuente a la matemática encontrará aquí en forma accesible todos los resultados y gran parte del razonamiento, reunidos en la primera parte del documento, el que en esta medida constituye un todo completo e independiente. (A.)

El título original es "On the True Rate of Natural Increase". Se ha preferido utilizar el adjetivo "intrínseca" en lugar de "verdadera", que sería la traducción correcta de "true", pues el mismo Lotka usó el término "intrinsic" en trabajos posteriores, término que finalmente ha adquirido un uso generalizado. (T.)

En realidad este razonamiento está mal orientado. Tanto la tasa de natalidad como la de mortalidad son afectadas por la distribución por edades de la población. Si existe una proporción relativamente alta de personas entre los 20 y los 45 años de edad, tenderá a haber una tasa alta de natalidad porque estas son las edades reproductivas; y tenderá a haber una tasa baja de mortalidad porque a estas edades la mortalidad es reducida.

Es verdad que por ciertas razones económicas ésta sería una situación deseable, siempre que esté garantizada la permanencia de la alta proporción de personas de edad media. Las personas de estas edades realizan trabajos productivos, y la presencia de una elevada proporción de ellas provoca efectos favorables sobre el nivel general de bienestar de toda la comunidad. Pero un examen de las razones de esta preponderancia de las personas que están en el período productivo de la vida, parece no contribuir mucho al optimismo respecto de la continuación de la situación prevaleciente. En lo esencial, hay dos circunstancias que han provocado esta proporción relativamente alta de personas en o alrededor de las edades medias. Primero, la inmigración, que aporta principalmente adultos y, por tanto, aumenta de inmediato el tamaño de la clase adulta de nuestra población. Pero, en lo sucesivo, esta fuente de miembros productivos y reproductivos de nuestra comunidad será restringida, de modo que con el tiempo debemos esperar, en este aspecto, una preponderancia menos pro-

²Por razones que se aclararán más adelante, las cifras seleccionadas aquí como referencia son las relativas a los nacimientos y defunciones de mujeres blancas, expresadas respecto a la población femenina blanca de la Zona de Registro de Nacimientos (Birth Registration Area). Por cierto, las cifras así presentadas son aproximadamente análogas a las tasas de natalidad y mortalidad presentadas habitualmente.

nunciada de esta clase de edad en la población.

La segunda fuente de nuestra elevada población adulta no es tan evidente. A lo largo de las pasadas décadas la tasa de natalidad ha venido declinando. Esto significa que las personas que hoy tienen 30 años de edad son los sobrevivientes de un lote relativamente³ mayor de nacimientos que, por ejemplo, las personas de 10 años de edad, que nacieron en una época más reciente y, por tanto, con una tasa de natalidad menor. De esta manera, los grupos de mayor edad están hoy ponderados por los frutos de una tasa de natalidad relativamente más alta en el pasado más remoto. Mientras siga declinando la tasa de natalidad, esta situación de una distribución por edades abultada en las edades adultas puede no dar signos visibles de su debilidad intrínseca. Pero la tasa de natalidad no puede seguir decreciendo indefinidamente. Tarde o temprano deberá hacerse estacionaria o se acercará a ello. Así, también la segunda fuente de nuestra proporción relativamente elevada de personas en los grupos de edades de reproducción quedará eliminada; y entonces, con la misma mortalidad que hoy y con la misma fecundidad de nuestras mujeres, tendríamos una tasa de natalidad muy diferente de la que se observa ahora. Es decir, si se estableciera permanentemente el patrón actual de fecundidad femenina por edades, y si igualmente continuara en forma permanente el patrón actual de mortalidad por edades, tendríamos, después que la distribución por

edades hubiera tenido tiempo de ajustarse a estas condiciones biológicas constantes⁴, una tasa de natalidad de sólo 20,9 por mil al año, en lugar de la actual de 23,4; al mismo tiempo, la tasa de mortalidad aumentaría desde la cifra actual (1920) de 12,41 a 15,43. Cada uno de estos cambios por separado es bastante significativo; pero cuando consideramos el efecto sobre la tasa natural de crecimiento, esto es, sobre el exceso de la tasa de natalidad respecto a la tasa de mortalidad, encontramos que ha variado desde 11 por mil al año a 5,5 por mil al año; íse ha reducido exactamente a la mitad!

En vista de que el método para calcular la distribución por edades, la tasa de natalidad, la tasa de mortalidad y la tasa de crecimiento natural de una población que tiene un patrón dado de fecundidad y de mortalidad por edades no es de conocimiento general, es conveniente ilustrarlo mediante un ejemplo numérico.

RAZONAMIENTO Y METODO

En el razonamiento y en los cálculos que siguen, es conveniente limitar nuestras consideraciones a las mujeres. Para ello aceptaremos la cifra efectiva de 1,06 como la razón de nacimientos masculinos a femeninos (blancos) y supondremos que permanece constante. Las cifras efectivamente observadas⁵ para esta razón son las siguientes:

<u>1917-22</u>	<u>1922</u>	<u>1921</u>	<u>1920</u>	<u>1919</u>	<u>1918</u>	<u>1917</u>
1,060	1,058	1,061	1,059	1,059	1,060	1,060

Se ve que la razón es esencialmente constante. Como consecuencia de esto, existe una relación simple entre las cifras aquí calculadas directamente para las mujeres y las correspondientes cifras para los hombres. Se hará debida referencia a este punto cuando se presente la ocasión, pero en el intertanto nos exime de la necesidad de seguir la pista a ambos sexos, simplificando entonces grandemente nuestras consideraciones.

El curso general del razonamiento a seguir y la información fundamental sobre la que se basarán los cálculos son los siguientes:

³ En proporción a la población total en la época de su nacimiento.

⁴ Quizá sería conveniente llamar la atención sobre el hecho de que la diferencia entre la situación existente y aquella que sirve aquí de base de comparación, descansa exclusivamente en el factor accidental que es la distribución por edades. Los factores esenciales, fundamentalmente biológicos, son estrictamente los

Información:

- 1) Las tasas de fecundidad por edades $m(a)$.
- 2) Una tabla de vida, que dé las relaciones de supervivencia por edades $p(a)$.

De éstos se deducirán:

- a) La razón, R_0 , de los nacimientos totales en dos generaciones sucesivas.
- b) La duración media, T , de una generación.
- c) La tasa anual de crecimiento, r .
- d) Las correspondientes tasas de natalidad y mortalidad.

mismos en la situación real y en el modelo de referencia. Y, mientras que la distribución por edades existente representa un estado transitorio de cosas, incapaz de una existencia continua bajo condiciones constantes de frecuencia de maternidad y de mortalidad, la distribución por edades del modelo de referencia es estable, autosostenida bajo las condiciones biológicas prevalecientes ahora.

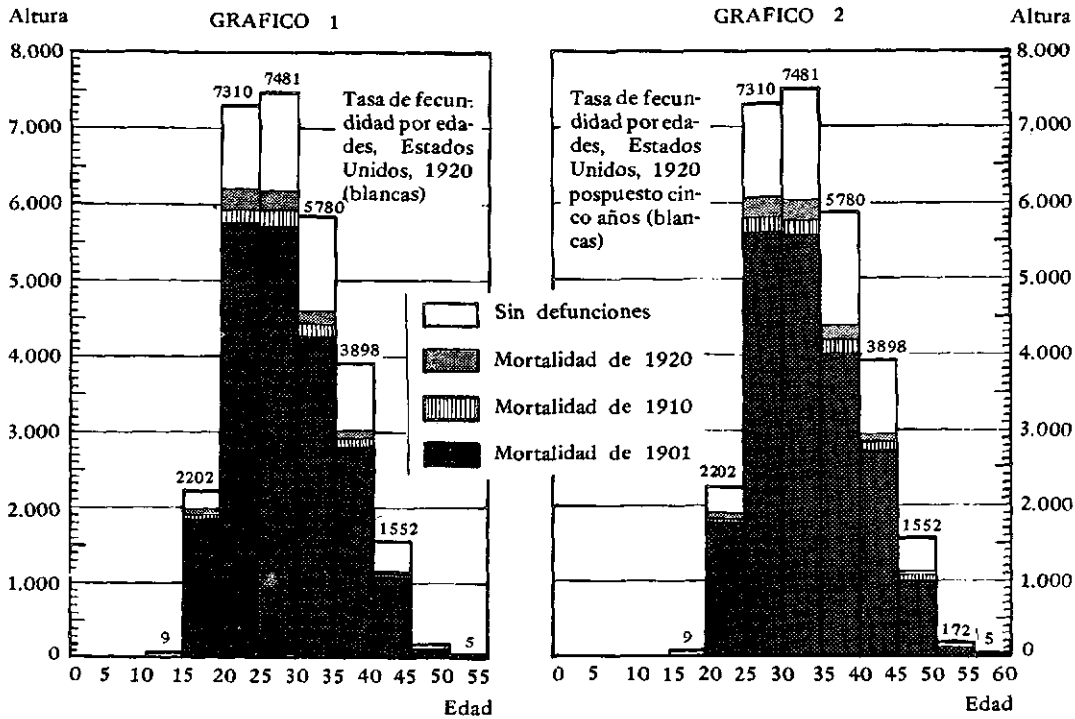
⁵ U.S. Census Bureau: *Birth Statistics*, 1922, pág. 30.

Estos distintos puntos serán ahora considerados por turno.

Patrón de fecundidad por edades. El patrón de fecundidad por edades de las mujeres de Estados Unidos en 1920 aparece en el gráfico 1,

la curva superior escalonada (histograma), y en el cuadro I, columna 2, con base en la información encontrada en las Estadísticas de Nacimientos de 1920, publicadas por la Oficina del Censo, páginas 168 y siguientes.

NACIMIENTOS TOTALES DE HIJAS DE UNA COHORTE DE 100 000 MUJERES QUE COMIENZAN JUNTAS LA VIDA



Las áreas de las columnas enteras (cinco veces la altura) representan los nacimientos potenciales de hijas, dentro de los límites de edad indicados, si no hubiera muertes en la cohorte. Las áreas de las columnas truncas representan los nacimientos efectivos de hijas dentro de los mismos límites de edad, reducidos por las muertes de las madres potenciales de acuerdo con las tablas de vida de 1920, 1910 y 1901, respectivamente. Las cifras indican alturas, no áreas. Para obtener las tasas de fecundidad multiplíquese los nacimientos de hijas por 2,06 a efecto de incluir a los hijos.

Con esto se ve que, de acuerdo con el patrón de fecundidad por edades actual, 100 000 mujeres, si todas sobrevivieran hasta los 55 años de edad, tendrían un total de 142 045 hijas. *Razón de los nacimientos totales en dos generaciones sucesivas.* En realidad, por supuesto, una cierta proporción de estas mujeres muere antes de completar el período de reproducción y algunas incluso antes de entrar en él. Así, por ejemplo, entre los 25 y los 30 años de edad, las 100 000 mujeres nacidas originalmente habrían tenido, si hubieran sobrevivido todas 7 481 hijas. Pero, de hecho, sólo 82 960 de las 100 000 nacidas alcanzaron los 27,5 años de edad. Por consiguiente, las 100 000 mujeres consideradas tendrán, entre los 25 y los 29 años de edad, sólo $7\,481 \times 0,8296 = 6\,206$ hijas.

Observaciones similares se aplican a los otros grupos de edades. Las cifras correspon-

dientes a los sucesivos grupos de edades se muestran en el cuadro I, columna 6, en el gráfico 1, segunda⁶ curva escalonada (histograma) contando desde arriba. El resultado neto es que si seguimos la historia de 100 000 mujeres con la tasa corriente de fecundidad, encontramos que a lo largo de su vida dan a luz 116 760 hijas; o como promedio, una mujer da a luz a 1,168 hijas en el transcurso de su vida. Entonces, esta es la razón del total de nacimientos (de hijas) en dos generaciones sucesivas. Para referencias posteriores es conveniente denominar a esta razón mediante el símbolo R_0 .

⁶ La tercera y cuarta curvas escalonadas y las cifras ligadas a ellas, dan el número de hijas correspondiente a una combinación de la frecuencia de maternidad de 1920 con la mortalidad de 1910 y 1901, respectivamente. Para una discusión más amplia de este punto véase página

CUADRO 1
TASAS DE FECUNDIDAD POR EDADES, MUJERES BLANCAS DE LOS
ESTADOS UNIDOS, 1920

Tasas de fecundidad $m(a)$ = hijas por año, por 100 000 mujeres blancas en cualquier estado civil y según los grupos de edades planteados

(1) Grupo de edades	(2)	(3) $p(a)^a$ en edades pivotales 12,5, 17,5, etc.			(6) Producto $p(a) m(a)$			(8)
	$m(a)$ 1920	1920	1910	1901	1920	1910	1901	
10-14	9	0,88567	0,83556	0,81232	8	8	7	
15-19	2 202	0,87438	0,82495	0,79926	1 950	1 817	1 760	
20-24	7 310	0,85509	0,80852	0,77834	6 251	5 910	5 690	
25-29	7 481	0,82960	0,78801	0,75268	6 206	5 894	5 630	
30-34	5 780	0,80181	0,76480	0,72445	4 634	4 421	4 187	
35-39	3 898	0,77417	0,73839	0,69474	3 018	2 878	2 708	
40-44	1 552	0,74664	0,70903	0,66336	1 159	1 101	1 030	
45-49	172	0,71610	0,67567	0,62917	123	116	108	
50-54	5	0,62937	0,63490	0,58894	3	3	3	
	28 409				23 352	22 148	21 123	
	X 5				X 5	X 5	X 5	
Total de hijas por período vivido	142 045				116 760	110 740	105 615	
Con muertes como en	0 ^b				1920	1910	1901	

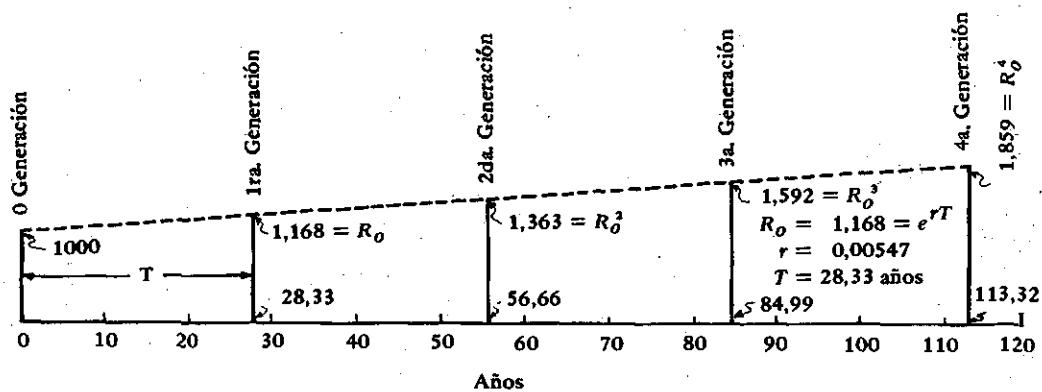
^a $p(a)$ es la probabilidad, al nacer, de alcanzar la edad a . Es la función tabulada en las tablas de vida como l_x , si se la construye respecto a una raíz de la unidad.

^b Sin muertes hasta el final del grupo de edades de reproducción.

*Intervalo medio entre dos generaciones.*⁷ Puesto que los nacimientos se producen desde alrededor de los quince hasta aproximadamente los cincuenta y cinco años de edad, no es posible llamar a una edad, la edad de la reproducción y fijar así, en esta forma sencilla, la

GRAFICO 3

DIAGRAMA QUE ILUSTRA LA DEFINICION DEL INTERVALO ENTRE DOS GENERACIONES



Puesto que la tasa intrínseca de crecimiento es 0,547 por ciento ó 0,00547 por persona al año, y los totales en generaciones sucesivas están en razón 1,168, estas generaciones deben centrarse con un espaciamento de 28,33 años para dar la tasa intrínseca de crecimiento indicada. Esta separación de 28,33 años es el intervalo medio entre dos generaciones (de madre a hija).

⁷ La traducción correcta hubiera sido "Duración media de una generación". Posteriormente el mismo Lotka llamó a esta relación con más propiedad "Intervalo medio entre dos generaciones". (T .)

duración de una generación. De hecho, el término "duración media de una generación" se usa corrientemente en forma vaga, sin intentar una definición estricta. Podemos definir la duración media de una generación como sigue: Comenzando con una cohorte de N individuos (la generación "cero") nacidos al mismo tiempo, sean $R_0N, R_0^2N, R_0^3N, \text{etc.}$, los nacimientos totales en las generaciones 1a., 2a., 3a., etc., de sus descendientes. En realidad, los nacimientos en cada generación se extienden a lo largo de un número de años. Sin embargo, podemos considerarlos concentrados, para cada generación, en un punto en el tiempo, estando sepa-

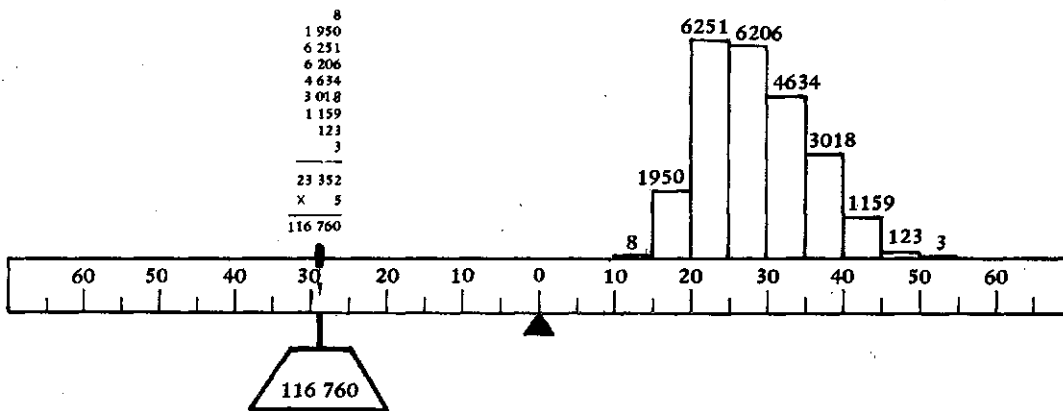
radas uniformemente las generaciones sucesivas en T años. Existe un valor específico T , un espaciamiento específico de las generaciones sucesivas, que da como resultado la misma tasa intrínseca de crecimiento que aquella que efectivamente se da con los nacimientos en cada generación extendidos a lo largo de un número de años. Este valor particular de T es el intervalo medio entre dos generaciones.

Quizás el diagrama del gráfico 3 ayude a dilucidar más la naturaleza de la cantidad así definida.

El método exacto para calcular el intervalo medio entre dos generaciones se presenta en

GRÁFICO 4

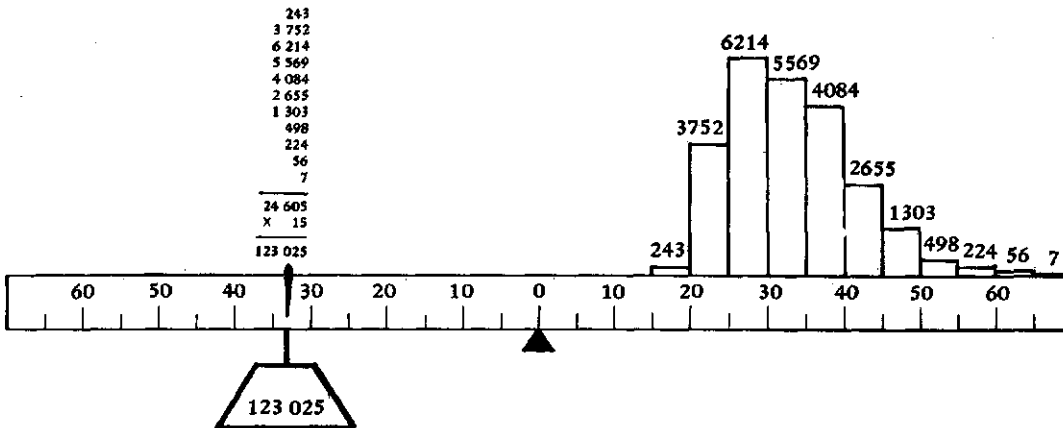
INTERPRETACIÓN MECÁNICA DEL INTERVALO MEDIO ENTRE DOS GENERACIONES



El histograma de las hijas de una cohorte de 100 000 madres que empiezan juntas la vida es equilibrado por la suma total de hijas, 116 760, a 28,46 años del punto de apoyo. El valor exacto del intervalo medio entre dos generaciones es 28,33, debiéndose la diferencia a la influencia de los momentos segundo y superiores.

GRAFICO 5

INTERPRETACIÓN MECÁNICA DEL INTERVALO MEDIO ENTRE DOS GENERACIONES



El histograma de los hijos de una cohorte de 100 000 padres que empiezan juntos la vida es equilibrado por la suma total de hijos, 123 025, a 32,98 años del punto de apoyo. El valor exacto del intervalo medio entre dos generaciones es de 32,76 años.

el Apéndice. Aquí bastará con indicar que se obtiene una buena aproximación, en forma muy simple, encontrando la edad mediana⁸ en la segunda curva (contando desde arriba) en el gráfico 1. Esta mediana cae en los 27,8 años de edad, y esto da aproximadamente el intervalo medio entre dos generaciones.

Una aproximación muy cercana al valor verdadero está dada por el pie de la perpendicular que pasa por el centro de gravedad del área bajo la curva. Esto da 28,46 años. El intervalo medio entre dos generaciones recibe así una interpretación mecánica que se pone de manifiesto en los gráficos 4 y 5.

El método exacto de cálculo presentado en el Apéndice conduce al valor 28,33.

Debe advertirse en particular que el intervalo medio entre dos generaciones analizado aquí es el que va de madre a hija, y no es igual al que va de padre a hijo, debido principalmente al matrimonio más tardío de los hombres respecto a las mujeres. Un cálculo separado del intervalo medio entre dos generaciones de padre a hijo dio 32,76 años, cuatro años y medio por sobre la generación de madre a hija.

Tasa intrínseca de crecimiento. Se puede demostrar⁹ que, con un patrón fijo de tasas de fecundidad femenina por¹⁰ edades y un patrón fijo de mortalidad por edades, la población (en ausencia de inmigración) se ajustará a una distribución fija por edades. La tasa natural de crecimiento, r , será entonces constante. La tasa de crecimiento así definida se denominará "intrínseca" o "tasa natural estable de crecimiento" en las condiciones dadas de fecundidad y mortalidad. La determinación exacta de su valor exige la solución de una ecuación trascendental. El método se encuentra en el Apéndice. Aquí bastará con indicar que se obtiene una buena aproximación, en forma muy simple, a partir del valor aproximado del intervalo medio entre dos generaciones T , determinado arriba, y de la razón R_0 del total de nacimientos en dos generaciones sucesivas. Puesto que una tasa de crecimiento R_0 durante T años a interés compuesto, corresponde a un

⁸ Esta edad mediana es tal que, en promedio, la mitad de los nacimientos en el curso de la vida de una mujer tiene lugar antes y la otra mitad después de esa edad.

⁹ *Phil. Mag.*, abril, 1911, página 435; *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 1922, Vol. 8, pág. 339. A.J. Lotka: *Elements of Physical Biology*, Williams & Wilkins, 1925, pág. 112.

¹⁰ Las tasas de paternidad para hombres de diferentes edades no constituyen un factor independiente, sino que deben considerarse como determinadas por los hábitos existentes de nupcialidad de acuerdo a la edad, una vez que se han fijado los restantes factores considerados aquí.

crecimiento anual r compuesto de T años,

$$(1 + r)^T = R_0$$

$$r = \sqrt[T]{R_0 - 1}$$

Con los valores aquí considerados, esto es, un crecimiento de 1,168 en el curso de una generación de 28,46 años, se obtiene

$$r = \sqrt[28,46]{1,168 - 1}$$

$$= 0,00546$$

El valor exacto encontrado con el método presentado en el Apéndice es

$$r = 0,00547$$

Puede señalarse brevemente aquí que, mientras en este cálculo aproximado hemos encontrado primero un valor aproximado de T y a partir de él hemos deducido r , en el cálculo exacto este proceso se invierte, obteniéndose primero un valor exacto de r y deduciéndose a partir de este valor exacto de T , en total concordancia con la definición de esta cantidad dada anteriormente.

Tasas intrínsecas de natalidad y mortalidad. Cuando se verifica la distribución estable por edades, las tasas de natalidad y mortalidad asumen valores determinados. El método para su cálculo exacto se da en el Apéndice.

Se puede obtener una buena aproximación a la tasa de natalidad "intrínseca" o "estable" (bajo patrones dados de frecuencia de maternidad y de mortalidad por edades) mediante el siguiente razonamiento, comparativamente sencillo.

Si r , la tasa de crecimiento, es pequeña, la distribución por edades "estable" no difiere apreciablemente de la de una población estacionaria, esto es, de una "población de tablas de vida".

Ahora, en una tabla de vida, la tasa de natalidad por persona que se da en la población (femenina) viviente es igual a la que se da en una cohorte de mujeres que inician al mismo tiempo la vida y a las que se sigue la pista a lo largo de ella. Pero esta última cifra ya la hemos determinado, y resultó ser 1,168 por duración media de la vida (57,52 años), por cuanto hemos encontrado que, de acuerdo con las condiciones de 1920, 1 000 mujeres (contadas al nacer) tendrán en el curso de su vida 1 168 hijas. Por consiguiente, la tasa de natalidad anual es $1,168 / 57,52 = 0,0204$ ó 20,4 por mil. El método exacto de cálculo que se presenta en el Apéndice, que es independiente de cualquier supuesto simplificador, da el valor 20,90.

La tasa de mortalidad se obtiene ahora inmediatamente a partir de la relación $b - d = r$, que, por el método aproximado, da $d = 14,9$ por mil, y por el método exacto, $d = 15,4$ por mil.

COMPARACION DE LOS ASPECTOS DEMOGRAFICOS "INTRINSECOS" Y OBSERVADOS

Al recoger nuestros resultados obtenidos hasta este punto y compararlos con las cifras observadas correspondientes, tenemos:

CUADRO 2

Tasas de natalidad y de mortalidad "intrínsecas" o "estables" comparadas con las reales		
	Calculadas	Reales en 1920
Tasa de natalidad b	20,90	23,40
Tasa de mortalidad d	15,43	12,41
Tasa natural de crecimiento $r = b - d$	5,47	10,99

Las cifras calculadas de este modo difieren tan marcadamente de los valores observados que la mente exige de inmediato un examen comparativo sobre las fuentes de la divergencia.

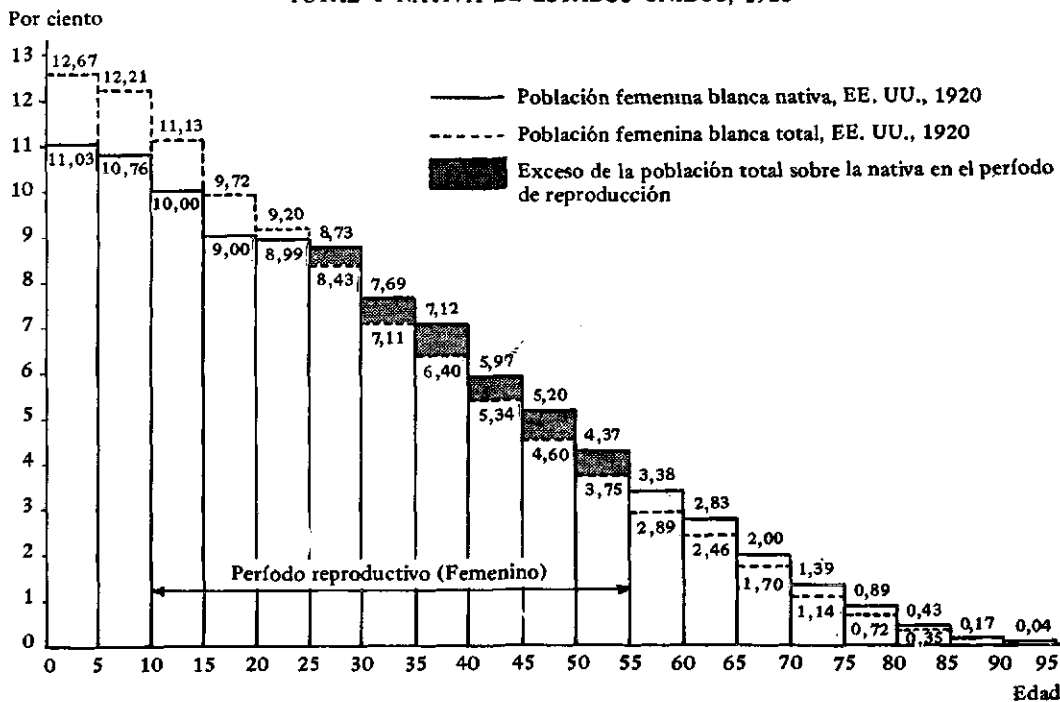
En principio, estas fuentes son dos: 1. Inmigración; 2. Tasa de natalidad descendente.

1. *Efecto inmediato de la inmigración.* Podemos abordar de dos maneras diferentes el examen sobre el efecto de la inmigración en la tasa de natalidad y en la tasa natural de crecimiento de la población.

a) Podemos comparar la distribución por edades efectiva de la población total, de la que se originan realmente los nacimientos, con la de la población nacida en el país únicamente, de la que hubiéramos tenido que depender para obtener los padres de la generación naciente si no hubiera inmigración en los años recientes. Lo que nos interesa aquí son los grupos de edades dentro del período de reproducción. Las cifras de 1920 se muestran en el gráfico 6 y en el cuadro 3, columnas 2 y 3. En el grupo de edades más activamente re-

GRÁFICO 6

COMPARACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES POR EDADES DE LA POBLACIÓN FEMENINA BLANCA TOTAL Y NATIVA DE ESTADOS UNIDOS, 1920



Muestra el exceso (sombreado) de los nacimientos totales sobre los nativos a las edades de reproducción. Tasa de fecundidad (incluyendo sólo hijas) indicadas por 100 000 $m(a)$.

CUADRO 3

COMPARACION DE LAS POBLACIONES TOTAL, NATIVA Y "TÍPICA" (MUJERES BLANCAS)

Tasas anuales de fecundidad y mortalidad de 1920
Distribución por edades en el período de reproducción, y nacimientos resultantes

Grupos de edades	Distribución por edades				Nacimientos		
	Total de mujeres blancas N(a). Grupos de edades como porcentajes de todas las edades	Mujeres blancas nativas N'(a). Grupo de edades como porcentaje de todas las edades	Población "típica" N"(a). Mujeres blancas como porcentaje de todas las edades	Tasa de fecundidad m(a) por 100 000 en cualquier estado civil	Producto total blancos N m(a) = nacimiento(hijas)	Producto blancos nativos N' m(a) = nacimientos(hijas)	Producto "típico" N" m(a) = nacimientos (hijas)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)=(2)X(5)	(7)=(3)X(5)	(8)=(4)X(5)
10-14	10,00	11,13	8,65	9	90	100	78
15-19	9,00	9,72	8,31	2 202	19 818	21 403	18 299
20-24	8,99	9,20	7,91	7 310	65 717	67 252	57 822
25-29	8,73	8,43	7,47	7 480	65 300	63 056	55 876
30-34	7,69	7,11	7,02	5 780	44 448	44 448	40 633
35-39	7,12	6,40	6,59	3 898	27 754	24 947	25 688
40-44	5,97	5,34	6,15	1 552	9 265	8 288	9 483
45-49	5,20	4,61	5,74	172	894	793	979
50-54	4,37	3,75	5,30	5	22	19	27
	67,07	65,69	63,06	28 408 X 5			
				142 040			
Total de hijas por 10 millones de mujeres					233 308	230 306	208 885
Por 1 000 mujeres					23,330 ^b	23,030	20,890
Hijos por 1 000 personas					23,560	23,260	21,340

Nota: Las cifras indicadas como totales son las hijas nacidas por diez millones de la población femenina. Para encontrar los hijos de ambos sexos nacidos por persona de ambos sexos, multiplíquese por 2,060 para corregir por la relación de masculinidad de los nacidos, y divídase por la relación de masculinidad de la población (2,040^c en los dos primeros, 2,017 en el último caso). Así

$$23,33 \times \frac{2,060}{2,040} = 23,56 \quad 23,03 \times \frac{2,060}{2,040} = 23,26 \quad 20,89 \times \frac{2,060}{2,017} = 21,34$$

^a Distribución fija o estable por edades correspondiente a las condiciones de frecuencia de maternidad y de mortalidad de 1920.

^b Esta cifra, para Estados Unidos, difiere muy ligeramente de los 23,4 para la zona de registro de nacimientos, (birth registration area).

^c Cociente 3,040 del XIV Censo de los Estados Unidos, 1920, vol. II, pág. 155.

productivo, 20 a 40 años, la población femenina blanca total muestra un exceso de 1,4 en la edad de 32,5, o alrededor de 4,3 por ciento, sobre la población femenina blanca nativa.

Sin duda, esto se debe en parte al exceso de la tasa de natalidad observada sobre la calculada y a la correspondiente deficiencia en la tasa de mortalidad observada.

b) La segunda forma de abordar el problema de la influencia de la inmigración sobre la tasa de natalidad es la adoptada por el profesor

J. M. Gillette en un estudio publicado en 1916 en *Journal of The American Statistical Association*, páginas 345-380. No seguiremos aquí su método, en parte porque él ha ejemplificado ya suficientemente, y en parte porque el abrupto cambio en las condiciones de inmigración alrededor de 1915 hace que su aplicación al período considerado aquí sea excepcionalmente difícil y poco confiable.

No obstante, esto puede ser tal que, siendo el exceso de la tasa de natalidad observada sobre

la calculada de aproximadamente 11 por ciento de la observada, sólo una parte relativamente pequeña de él se deba al efecto inmediato de la inmigración, y debemos ahora examinar la segunda fuente de divergencias entre las tasas reales observadas y las tasas "intrínsecas" calculadas. Esta segunda fuente se encuentra en la constante disminución de la tasa de natalidad en los últimos años.

No obstante, por una aparente paradoja, una tasa de natalidad en descenso tiende a incrementar en forma refleja la tasa de natalidad del momento. Aunque esto puede parecer a primera vista casi contradictorio, después de todo no es más que otro ejemplo de una ley de inercia como la que el estudioso de las ciencias físicas encuentra en una variedad de fenómenos diferentes, y denomina, de acuerdo a las circunstancias, Ley de Lenz de auto-inducción, o Principio de Maupertius, de Lé Chatelier, etc. De hecho, es una observación muy generalizada el que el comienzo de un movimiento determinado provoca automáticamente influencias que se oponen a ese movimiento. Incluso el trabajador social puede haberse familiarizado con manifestaciones de este principio.

A partir del ejemplo numérico que tenemos ante nosotros, veremos ahora cómo opera este principio en el caso de una tasa de natalidad en descenso.

2. *Efecto de la caída constante de la tasa de natalidad.* De la población nativa, aquellas personas que tienen hoy 20 años de edad, por ejemplo, son los supervivientes del total nacido 20 años atrás, si prescindimos del ítem relativamente pequeño de la emigración de nativos fuera de Estados Unidos. Así, si conociéramos la tasa de natalidad en los últimos años y tuviéramos una tabla de vida válida para todo el período pasado que estamos considerando, podríamos calcular la distribución por edades de la población nativa actual. Podríamos entonces cerciorarnos de la relación entre la declinación de la tasa de natalidad en las pasadas décadas, por una parte y, por la otra, el exceso de personas en edad de reproducción en nuestra población.

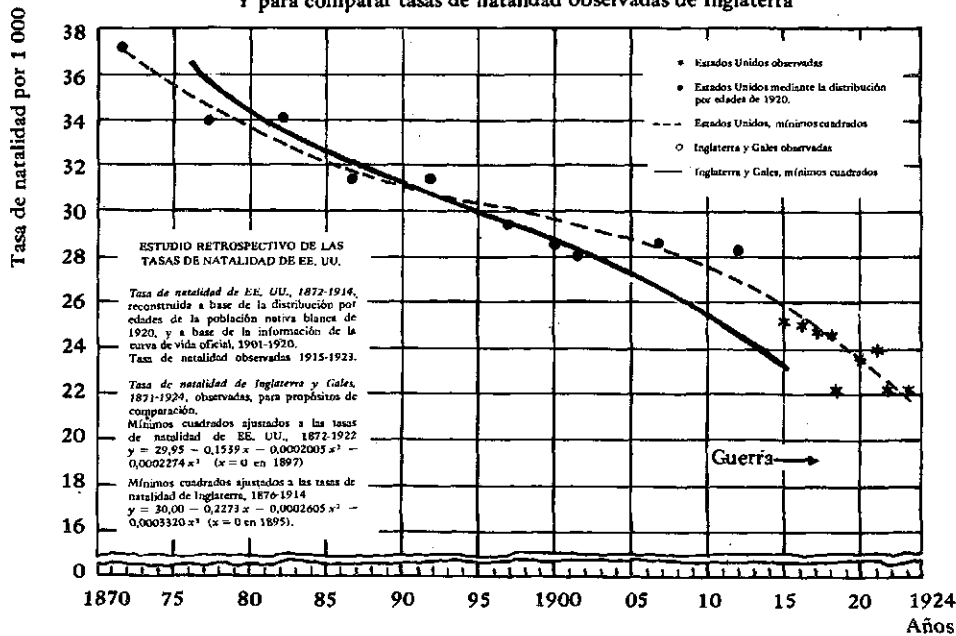
En realidad, la tasa de natalidad no se convirtió en los Estados Unidos en objeto de registro oficial hasta 1915, de manera que no podemos llevar a cabo dicho cálculo.

Reconstrucción retrospectiva de las tasas de natalidad norteamericanas. No obstante, podemos invertir el proceso, y averiguar qué tipo de tasas de natalidad en los últimos años habrían derivado en la población nativa actual. Se llevó a cabo este cálculo, separado según hombres y mujeres, con los resultados que aparecen en el cuadro 4 y en el gráfico 7. En este cálculo se consideró a la población en

GRÁFICO 7

RECONSTRUCCION DE LAS TASAS DE NATALIDAD DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1872-1914

Y para comparar tasas de natalidad observadas de Inglaterra



CUADRO 4

CUADRO RETROSPECTIVO DE LAS TASAS DE NATALIDAD (POR 1 000), BLANCOS
Estados Unidos: observadas 1922-1915; calculadas^a 1912-1872
Inglaterra y Gales: observadas 1924-1871

	EE.UU.	EE.UU. ^b	Δ	Inglaterra y Gales		
	No ajustadas	Ajustadas		No ajustadas	Ajustadas ^c	
Estados Unidos observadas						
1924	19,00 ^d	15,10	
1923	22,20 ^e	21,80	+ 0,40	19,70	16,10	
1922	22,20	22,40	- 0,20	20,40	17,10	
1921	24,00	23,00	+ 1,00	22,40	18,10	
1920	23,50	23,50	- 0,50	25,50	19,00	
1919	22,10	24,10	- 2,00	18,50	19,80	
Estados Unidos calculadas						
1918	24,60	24,50	+ 0,10	17,70	20,60	} Años de guerra Δ
1917	24,70	25,00	- 0,30	17,80	21,30	
1916	25,00	25,40	- 0,40	20,90	22,00	
1915	25,10	25,80	- 0,70	21,90	22,70	
1912	28,10	26,80	+ 1,30	23,90	24,40	- 0,50
1907	28,30	28,20	+ 0,10	26,50	26,70	- 0,20
1902	28,00	29,20	- 1,20	28,50	28,30	+ 0,20
1897	29,40	30,00	- 0,60	29,60	29,50	+ 0,10
1892	31,40	30,70	+ 0,70	30,40	30,70	- 0,30
1887	31,40	31,70	- 0,30	31,90	32,00	- 0,10
1882	34,10	33,00	+ 1,10	23,80	33,60	+ 0,20
1877	34,00	34,80	- 0,80	36,00	35,90	+ 0,10
1876	36,30	36,50	- 0,20
1872	37,30	37,20	+ 0,10	35,60
1871	35,00

^a A partir de la distribución por edades de 1920 e información de la tabla de vida

^b Mediante una parábola de tercer grado basada en once puntos quinquenales, 1872-1922. Véase gráfico 7.

^c Mediante una parábola de tercer grado basada en 39 puntos, 1876-1914. Véase gráfico 7.

^d Información de prensa.

^e Esta cifra incluye negros. En 1922 la cifra correspondiente era de 22,5.

un grupo de edades determinado como centrada en la mitad del grupo, y se tomó el valor correspondiente de l_x , empleando una tabla de vida o una combinación de tablas de vida, tan adecuada como fue posible al período a que se refieren

las cifras. Véase el Apéndice, pág. 25.

Las cifras así calculadas de las últimas décadas, combinadas con las cifras observadas de años más recientes, fueron ajustadas por mínimos cuadrados mediante una parábola cúbica.

$$y = 29,95 - 0,1539x - 0,0002005x^2 - 0,0002274x^3$$

(x igual a cero en 1897).

Considerando el intervalo de tiempo abarcado —poco más de medio siglo— el ajuste de esta ecuación simple parece digno de atención,

especialmente al examinarla en relación con el ajuste solamente aproximado de una ecuación cúbica similar

$$y = 30,00 - 0,2273 x - 0,0002605 x^2 - 0,0003320 x^3$$

(x igual a cero en 1895)

a la curva de las tasas de natalidad observadas de Inglaterra y Gales a lo largo del período de 39 años, 1876—1914, que aparecen en el cuadro 4. Por cierto, la guerra destruyó la regularidad en Inglaterra, si bien tuvo un efecto insignificante sobre ésta en los Estados Unidos.

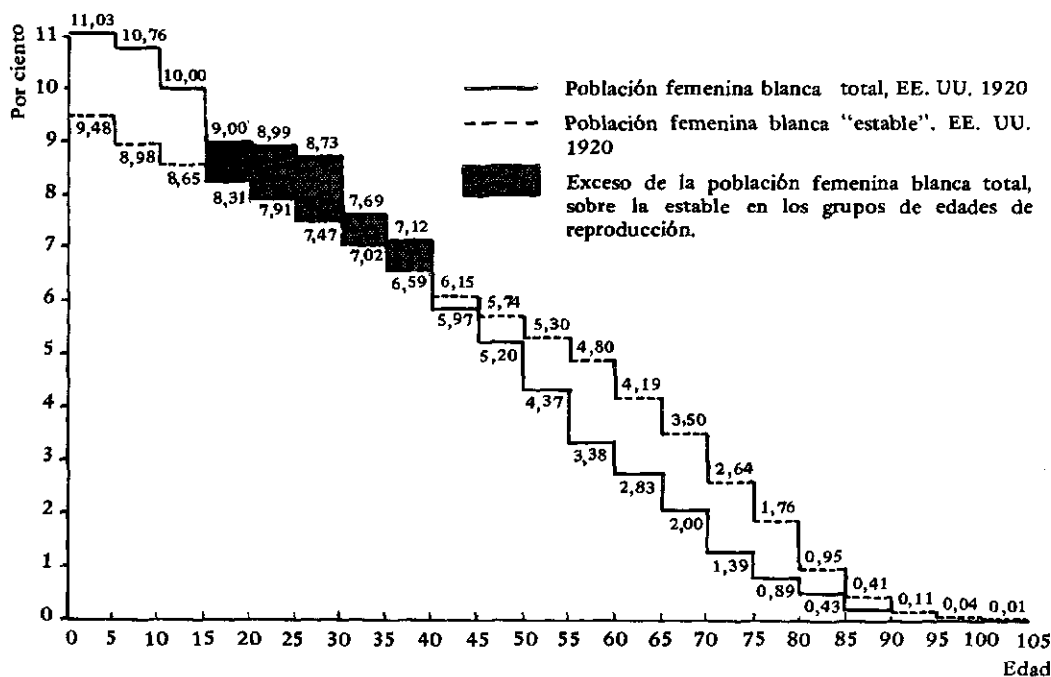
Aun cuando no se pretende que se considere que las cifras así obtenidas de los Estados Unidos suministren una descripción cabal de las tasas de natalidad de los años indicados, el

paralelismo general de la serie calculada de los Estados Unidos y las cifras observadas de Inglaterra dejan pocas dudas de que aquéllas indican verdaderamente la tendencia general de la tasa de natalidad en el pasado.

Se ve así que una tasa de natalidad, totalmente en conformidad con lo que era dable esperar haya prevalecido en el pasado, explica nuestra distribución actual por edades. En el cuadro 3, columnas 2, 3, 4 y en los gráficos 8 y 9, se ve,

GRAFICO 8

COMPARACION DE LA POBLACION FEMENINA BLANCA TOTAL DE LOS ESTADOS UNIDOS EN 1920 CON LA POBLACION DE DISTRIBUCION POR EDADES ESTABLE



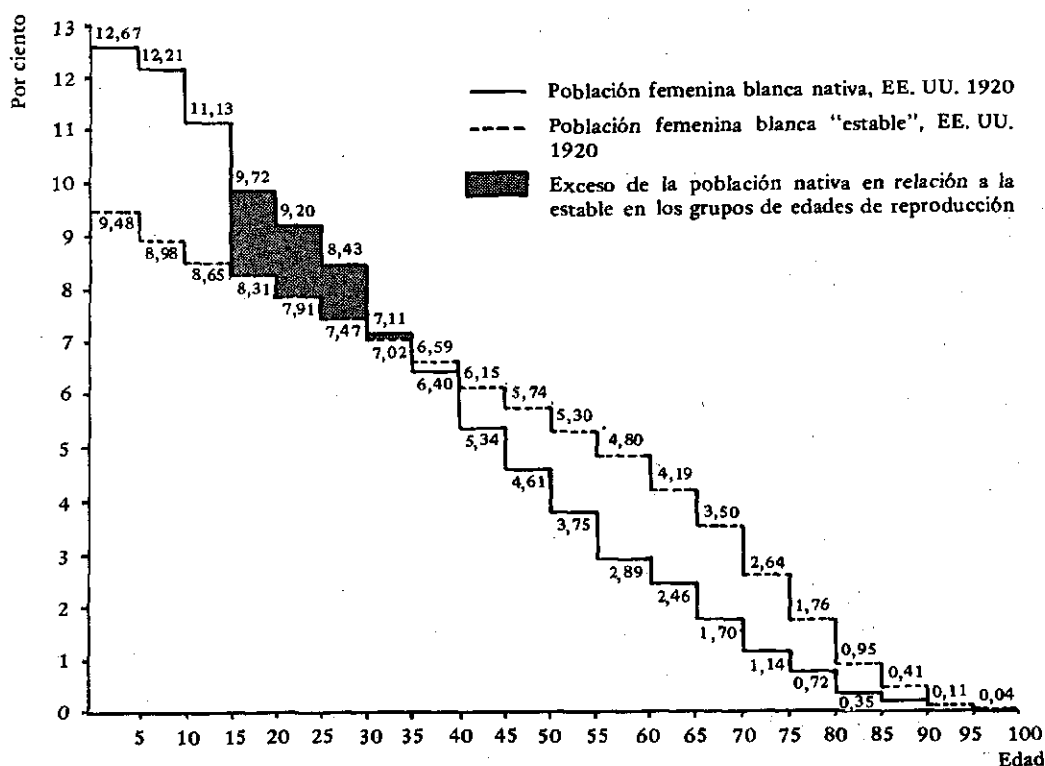
Las áreas sombreadas representan el exceso de la población total observada sobre la "estable" en los grupos de edades de reproducción.

a su vez, que nuestra distribución por edades actual muestra un marcado exceso, en las edades medias, en relación con la distribución "estable" por edades. El término distribución "estable" por edades debe entenderse aquí que denota aquella distribución fija por edades que finalmente se alcanzaría si nuestros patrones actuales de fecundidad y de mortalidad por

edades, continuaran por un lapso suficiente para permitir que la distribución por edades se ajustase a las condiciones existentes, de manera que ya no se dejara sentir el abultamiento reflejo de nuestra tasa actual de natalidad debido al efecto persistente de la declinación reciente. Verificación del cálculo de la población estable. Se verifica fácilmente que la distribu-

GRAFICO 9

COMPARACION DE LA POBLACION FEMENINA BLANCA NATIVA DE LOS ESTADOS UNIDOS EN 1920 CON LA POBLACION DE DISTRIBUCION ESTABLE POR EDADES



Las áreas sombreadas representan el exceso de la población nativa observada en relación a la "estable" en los grupos de edades de reproducción.

ción por edades calculada según los patrones dados de fecundidad y mortalidad por edades, da origen en forma real y consistente, a la tasa de natalidad calculada; para ello se aplican a los grupos de edades en períodos de reproducción, de la población estable calculada, los factores del patrón dado de maternidad. La información pertinente se encuentra en el cuadro 3, columna 8 y, como se verá, la concordancia es esencialmente perfecta. Así, por ejemplo, la tasa de natalidad calculada de la población estable directamente a partir del valor de r dado anteriormente (5,47 por mil al año) es 20,90; compárese con esta cifra el valor 20,89 encontrado a partir de la distribución por edades en el período de reproducción de la población estable y las tasas de fecundidad dadas que aparecen al pie de la última columna en el cuadro 3. Esta concordancia apoya no sólo nuestro cálculo sino también el razonamiento que lo sustenta. La interpretación gráfica de esta concordancia aparece en el gráfico 10, que muestra la distribución por edades en la pobla-

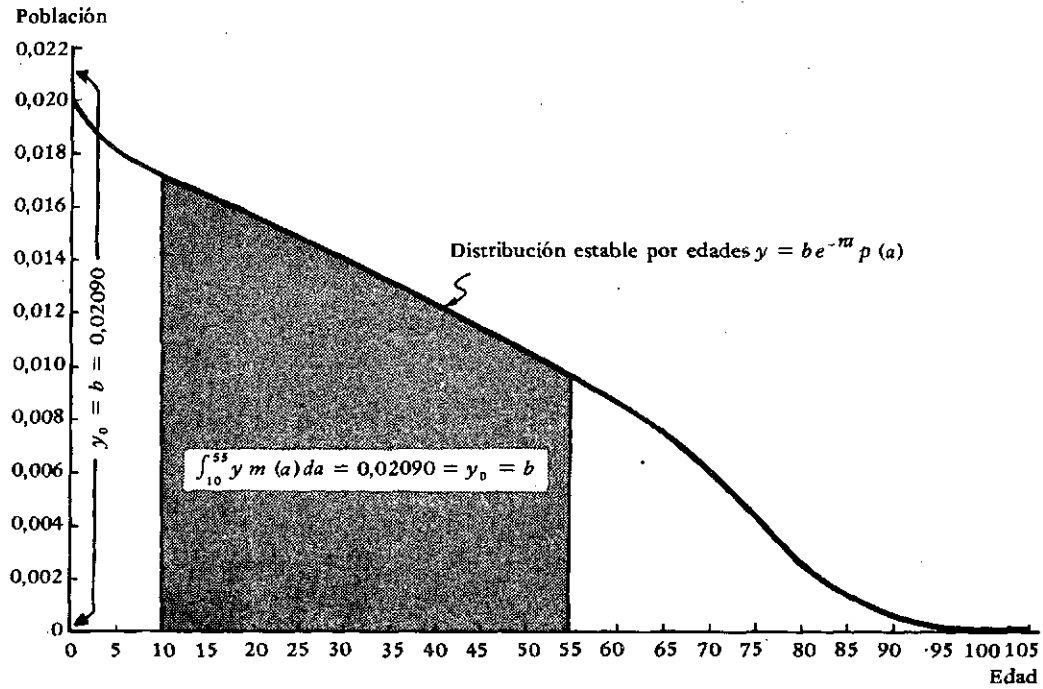
ción normal femenina. El área sombreada representa a aquella proporción de la población que está procreando, y la integral del producto de los elementos de esta área por las correspondientes tasas de fecundidad (de hijas) da precisamente la ordenada cero que, por supuesto, representa la tasa de natalidad (hijas por mujer por año).

Esta relación entre el área sombreada y la ordenada cero existe en *cualquier* población; pero el rasgo característico del modelo "estable"¹¹ calculado aquí es que su forma es fija,

¹¹ Quizá sea conveniente, para evitar equivocaciones, señalar que la población "estable" o "normalizada", empleada aquí como modelo de referencia, no es una población "estacionaria". Una población estacionaria no es compatible con el patrón de frecuencia de maternidad y de mortalidad por edades de 1920, mientras que el modelo empleado aquí no sólo es compatible con estas condiciones, sino que es precisamente la distribución por edades a que estas condiciones, si se mantienen permanentemente, conducirían eventualmente. Además, el modelo empleado aquí no es una distribución por edades meramente arbitraria,

GRAFICO 10

ILUSTRACION DE LA RELACION ENTRE LA ORDENADA CERO (TASA DE NATALIDAD) Y EL AREA EN LOS GRUPOS DE EDADES DE REPRODUCCION (AREA SOMBREADA EN EL GRAFICO)



En la curva de la distribución "estable" por edades de la población femenina de los Estados Unidos en 1920. La curva está dibujada para una unidad de población de modo que su área total es igual a la unidad.

pues es la única distribución por edades permanentemente compatible con el patrón de fecundidad y de mortalidad por edades de 1920.

Las cifras del cuadro 3, columna 6, permiten además una verificación¹² de la tasa de natalidad calculada, a saber, 23,33 hijas por mujer, 23,56 hijos por persona; frente a 23,4 y 23,5, que es la observada. Para una explicación sobre el factor para convertir tasas de natalidad de hijas por mujer a hijos por persona véase el Apéndice.

Debe haber quedado claro ahora cómo

tal como las que se utilizan corrientemente en las estadísticas del estado civil con propósitos de comparación, sino es tal que representa las propiedades reproductivas y de vida intrínsecas de la población que realmente existía en 1920. Sólo el factor espontáneo y perturbador de la distribución variable por edades, condición temporal asignable a la historia pretérita de la población, es eliminado al corregir este modelo de la distribución fija por edades correspondiente a la vigencia permanente de las frecuencias de maternidad y las mortalidades existentes en las distintas edades de la vida.

¹²Puramente aritmética en este caso.

nuestro exceso actual de personas en edades medias sobre lo normal, conduce a una tasa de natalidad superior a aquella calculada como equivalencia normal a nuestro patrón de fecundidad y de mortalidad por edades. Estamos, por decirlo así, viviendo de nuestro pasado. Lo que por el momento mantiene una alta tasa de natalidad no es nuestra alta vitalidad de procreación intrínseca, sino el hecho de que los descendientes supervivientes de una generación más reproductiva están engrosando los rangos de edad media, y dando una apariencia espuria de crecimiento vigoroso a una población que de otra manera se reproduciría más bien en forma insuficiente. Debemos comprender que, si la tasa actual de procreación persistiera, finalmente el exceso de personas en edad media temprana desaparecería, y nos enfrentaríamos, no a la tasa actual de natalidad¹³ de 0,02340, sino a una tasa de natalidad de sólo 0,02090. Al mismo tiempo, la tasa de mortalidad asumi-

¹³ Debe hacerse referencia nuevamente a la nota 1, al pie de la pág. 7.

CUADRO 5

TASA NATURAL DE CRECIMIENTO, ESTADOS UNIDOS, 1920, POBLACION BLANCA

Ciclo reproductivo Tasa de fecundidad	Tabla de vida <i>p</i> (a)	Tasa natural de crecimiento		Hijas por 1 000 mujeres (durante todo el período de vida)			Hijos (de ambos sexos) por madre ^d	Intervalo medio entre dos generaciones (años)	Tasa de natalidad <i>b</i> por 1 000 al año				Tasa de mortalidad <i>d</i> por 1 000 al año	Tasa natural de crecimiento $b - d = r$ por 1 000 al año		
		Por año 1 000 <i>r</i>	Por generación 1 000	Todas las mujeres ^e	Mujeres casadas <i>b</i>	Madres ^c			Calculada para la distribución estable por edades ^e	Observada con la distribución efectiva por edades	Calculada para la distribución estable por edades	Observada con la distribución efectiva por edades		Calculada para la distribución estable por edades	Observada con la distribución efectiva por edades	
(1)	(2)	(3)	(3a)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
EE. UU., Z.R.N., 1920	1920	5,47	1 168	1 168	1 488	1 786	3,68	28,30	20,90	21,34	23,40	23,50	15,43	12,41	5,47	10,99
Idem.	1910	3,59	1 107	1 107	1 490	1 790	3,68	28,40	21,04	17,45	3,59
Idem.	1901	1,92	1 056	1 056	1 477	1 775	3,66	28,40	20,88	18,96	1,92
Idem., pero desplazado 5 años hacia adelante	1920	3,62	1 128	1 128	1 437	1 724	3,55	33,40	19,68	16,06	3,62
EE. UU., Z.R.N., 1920	Sin muertes en el período de reproducción ^f	12,32	1 420	1 420	1 809	2 171	4,47	28,50	24,27	11,95	12,32

^a Estas cifras se basan en 1 000 mujeres nacidas, no en 1 000 mujeres vivas.

^b Estas cifras se basan en 1 274 mujeres nacidas, de las cuales 1 000 son casadas y 274 mueren solteras, de acuerdo con el Censo de los Estados Unidos de 1920, *Population*, Vol. II, pág. 392.

^c Las cifras para 1920 están basadas en 1 529 mujeres nacidas, de las cuales 1 000 se convierten en madres y 529 mueren sin haber tenido hijos, de acuerdo al Censo de los Estados Unidos de 1920, *Population*, Vol. II, pág. 392, suponiendo que un sexto de todas las mujeres casadas mueren sin haber tenido hijos; las cifras para 1910 y 1901 están sobre una base combinada.

^d En base a la razón de masculinidad de 1,06 nacimientos masculinos por 1,00 femeninos.

^e El término distribución "estable" por edades denota aquella distribución por edades que finalmente se alcanzaría si permanecieran invariables por un largo período los valores existentes de *m* (a) y *p* (a)

^f Se supone que todas las muertes tienen lugar exactamente en la duración media de la vida, 57,52 años de edad.

ría el valor 0,01543 en lugar de 0,01241. Y, lo que es más notable, mientras la disminución de la tasa de natalidad sería un poco superior al 10 por ciento y el aumento en la tasa de mortalidad de sólo 23 por ciento aproximadamente, el efecto sobre la tasa de crecimiento, $(b - d)$, sería el de reducirla de 0,01099 a 0,00547, esto es, al 50 por ciento de su valor actual

EFFECTOS SOBRE LA TASA DE CRECIMIENTO DE LAS MODIFICACIONES EN LOS FACTORES DEMOGRAFICOS

Efecto del mejoramiento en la mortalidad. Un estudio comparativo interesante, sugerido en relación con nuestras actuales consideraciones, es el examen de la participación específica que le ha cabido a los recientes avances en la salud pública general, tal como aparecen expresados en las cifras de nuestras tablas de vida,

Con la tasa observada de crecimiento de 1920
 Con la tasa "intrínseca" final de crecimiento:
 (a) Fecundidad de 1920, mortalidad de 1920
 (b) Fecundidad de 1920, pero pospuesta 5 años, mortalidad de 1920
 (c) Fecundidad de 1920, mortalidad de 1910
 (d) Fecundidad de 1920, mortalidad de 1901

en la compensación de la disminución de la actividad de reproducción de nuestra población. Para concretar el asunto, preguntémosnos: ¿Cuál sería la tasa de crecimiento de nuestra población, aparte de la inmigración (y la emigración), si nuestro comportamiento actual con respecto a la procreación estuviera asociado con la tabla de vida de 1910 ó la de 1901 y no con la de 1920? La respuesta, los resultados de los cálculos llevados a cabo sobre la base indicada, se encuentra en el cuadro 5. Se verá que la tabla de vida de 1910 nos deja con un pequeño margen, una tasa de crecimiento natural de 3,59 por mil al año; la tabla de vida de 1901 nos defiende apenas de la disminución, con una tasa de crecimiento muy pequeña pero todavía positiva de 1,92 por mil al año. Los mismos hechos se ponen de relieve de otra manera en el cuadro siguiente, que da, para las distintas condiciones consideradas aquí, el tiempo que se requeriría para que la población se duplicara:

Plazo para la duplicación en años

63

127

190

192

361

Efecto de la prolongación de la soltería. En esta ocasión no se puede presentar una discusión cabal del efecto de la prolongación o acortamiento de la soltería sobre la tasa natural de crecimiento. Pero hay un caso especial que puede tratarse muy fácilmente. Supongamos que el ciclo reproductivo fuera trasladado hacia adelante (pospuesto a edades superiores) como un todo, de manera que, por ejemplo, una mujer de 25 años de edad procreara como promedio con la tasa actual característica de los 20 años de edad, y así sucesivamente a todo lo largo de la escala (véase gráfico 2). La tasa natural resultante de crecimiento puede calcularse obviamente mediante el mismo método que para las condiciones reales. Al realizar el cálculo (por el método exacto) encontramos los valores siguientes

$$b = 0,0196$$

$$d = 0,0160$$

$$r = 0,0036$$

Así, se ve que el aplazamiento del ciclo reproductivo en cinco años reduce la tasa natural de crecimiento de la población en un monto

aproximadamente igual al que resultaría de retroceder diez años en lo que respecta a las cifras de mortalidad dadas en la tabla de vida.

De paso, puede advertirse que la disminución de la tasa de crecimiento por la prolongación de la soltería, se debe en parte al incremento del intervalo medio entre dos generaciones ocasionado por esta prolongación, y en parte a la reducción de los supervivientes que llegan a la edad matrimonial al aumentar esta edad. En el Apéndice se encuentra una fórmula que pone de manifiesto este hecho.

TAMAÑO DE LA FAMILIA

El término "tamaño de la familia" es evidentemente vago. Es innecesario señalar aquí la ambigüedad de su interpretación. Para nuestro propósito, es mejor tratar con el concepto estrechamente relacionado y más definido de "número medio de hijos por madre". A partir de éste, se puede obtener el "tamaño de una familia normal" sumándole 2, pues los padres completan la familia.

Número de hijos por madre. Hemos encontrado incidentalmente el número de hijas nacidas

de una cohorte de 1 000 mujeres que inician juntas la vida. Este número era de 1 168, según las condiciones de fecundidad y mortalidad de 1920. Con una relación de masculinidad al nacer de 1,06 varones por 1 mujer, esto da 1,238 hijos varones, ó 2,406 hijos por mujer contados sin considerar el estado civil. No obstante, de la cohorte de 1 000 mujeres que inician juntas la vida, sólo 785 se casan finalmente, mientras las otras 215 mueren solteras, tanto antes de alcanzar la pubertad como en edades adultas. Entonces, si despreciamos el ítem relativamente sin importancia de los nacimientos ilegítimos, los 2 406 hijos han nacido de 785 mujeres casadas, lo cual da un promedio de 3,06 hijos por mujer casada. Si reducimos aún más nuestra base de referencia a las madres, esto es, a las mujeres casadas que tienen uno o más hijos, y si suponemos que un matrimonio de cada seis¹⁴ no tiene hijos (a causa de la muerte de la esposa o el marido poco después del matrimonio, o también a causa de la esterilidad, natural o de otro tipo), encontramos la cifra de de 3,68 para el número de hijos por madre, tal como se indica en el cuadro 5, columna 7.

Se han calculado cifras equivalentes, que también aparecen en el cuadro 5, para los siguientes casos adicionales:

1. Patrón de tasas de fecundidad por edades de 1920 asociado con la mortalidad de 1910.
2. El mismo patrón, asociado con la mortalidad de 1901.
3. El mismo patrón, asociado con "sin muertes" desde la edad cero hasta el fin del período de reproducción.
4. Patrón de tasas de natalidad por edades de 1920, pero pospuesto en cinco años, asociado con la mortalidad de 1920.

El caso 3 es hipotético, y representa una situación que no podría ocurrir en la práctica, pero tiene interés, pues muestra el grado de influencia de las muertes, hasta el final del período reproductivo, al rebajar la relación entre dos generaciones sucesivas desde su máximo potencial de 1,420 hasta el valor real de 1,168. Las cifras así enunciadas son quizá algo engañosas, pues no sugieren una diferencia muy marcada a primera vista. Pero, en el curso de tres generaciones, la prole para el caso de "sin muertes" hasta el fin del período de reproducción estaría, en comparación con la prole con muertes como en 1920, en la relación

$(1,420 : 1,168)^3 = 1,795$. Entonces, en el curso de tres generaciones, digamos 90 años, las muertes de las madres potenciales provocan una pérdida igual a cuatro quintos de la prole efectiva.

Comparación con la población estacionaria. Una comparación de cierto interés es la del número de hijos por madre calculado como se hizo arriba, y correspondiente al estado actual (1920) del patrón de fecundidad por edades y a la tabla de vida actual (1920), en contraste con el número de hijos por madre que se requiere para mantener una población exactamente estacionaria. Para obtener esta última cifra, consideramos una cohorte de 1 000 mujeres nacidas un día determinado. *Para mantener el equilibrio*, éstas deben tener finalmente 1 000 hijas. Por la tabla de vida sabemos cuántas de estas 1 000 mujeres mueren cada año, y de los datos censales sabemos cuántas de ellas mueren solteras. Las cifras pertinentes se muestran en el cuadro 6. Se encuentra así que, de acuerdo con las condiciones de fecundidad y de mortalidad de 1920, de 1 000 mujeres nacidas, 785 mueren casadas y 215 mueren solteras. Entonces, esas 785 deben tener 1 000 hijas, ó 1 000 deben tener 1 274 hijas. Con una relación de 1,06 varones nacidos por 1 mujer, las 1 000 mujeres tendrán 1 350 hijos varones. Este resultado se verificó independientemente mediante un cálculo separado del número de hijos varones por hombre requerido para mantener estacionaria la población. Como se verá en el cuadro 6, la concordancia es extremadamente cercana.

Entonces, *para lograr el equilibrio*, cada mujer casada debe tener como promedio $1,27 + 1,35 = 2,62$ hijos. Pero, como ya se señaló, no todas las mujeres casadas se convierten en madres. Algunas mueren sin descendencia en los primeros años de su matrimonio; otras son estériles y no tienen hijos aunque vivan durante todo el período de reproducción. Parece difícil obtener una estimación exacta del número de mujeres casadas que mueren sin tener hijos. Si, como antes, estimamos la proporción de matrimonios sin hijos en un sexto, entonces cinco sextos de las 785 mujeres casadas, es decir, de 1 000 mujeres nacidas, 654 deben tener 1 000 hijas, o, como promedio una madre debe tener 3,15 hijos.

Esta cifra puede parecer sorprendentemente alta. Puede comparársele con las distintas cifras que figuran en el cuadro 5, columna 7, en que aparece la cifra correspondiente para el número real de hijos por madre bajo distintas condiciones planteadas.

¹⁴ Para un resumen de las investigaciones concernientes al porcentaje de matrimonios que quedan infecundos, véase Reynolds y Macomber, *Fertility and Sterility in Human Marriage*, Saunders, 1924, pág. 28-33.

CUADRO 6

PROPORCIÓN DE PERSONAS QUE MUEREN SOLTERAS EN DIFERENTES PERIODOS DE EDAD Y A TRAVES DE LA VIDA, SOBRE 100 000 NACIDAS

Edad	Hombres			Mujeres		
	Muertes	Solteros por ciento	Muertos solteros	Muertes	Solteras por ciento	Muertas solteras
Menores de 15	14 250	100,00	14 250	11 950	100,00	11 950
15	273	99,80	272	240	98,60	237
16	307	99,70	306	270	95,70	258
17	335	99,10	332	302	89,90	271
18	358	96,90	347	340	80,00	272
19	376	93,00	350	377	70,30	265
20	390	86,80	339	410	60,00	246
21	402	78,20	314	440	52,50	231
22	412	70,60	291	465	44,90	209
23	425	63,00	268	486	38,30	186
24	436	56,30	245	505	33,00	167
25	447	49,60	222	520	29,00	151
26	458	44,10	202	532	25,30	135
27	470	38,40	181	543	22,00	119
28	485	34,60	168	550	20,20	111
29	499	29,50	147	555	17,50	97
30	514	29,00	149	560	18,50	104
31	527	24,70	130	563	14,50	81
32	540	24,40	132	564	14,70	83
33	552	21,50	119	563	12,70	71
34	560	20,20	113	562	12,80	72
35-44	5 975	16,10	962	5 650	11,40	644
45-54	8 400	12,00	1 008	7 800	9,60	749
55-64	13 675	9,80	1 340	12 800	8,40	1 075
65 y más	49 075	7,30	3 582	52 600	7,10	3 735
TOTAL			25 769			21 519

Hijos varones, hijas e hijos por persona casada

(1) Basado en los hombres

$$1 - 0,25769 = 0,74231$$

$$1/0,74231 = 1,34715 \text{ hijos varones por hombre casado}$$

$$\frac{1,34715}{1,06} = \frac{1,27089}{2,61804} \text{ hijos por hombre casado}$$

(2) Basado en las mujeres

$$1 - 0,21522 = 0,74878$$

$$1/0,74878 = 1,27419 \text{ hijas por mujer casada}$$

$$1,27419 \times 1,06 = \frac{1,35064}{2,62483} \text{ hijos varones por mujer casada}$$

(3) Fuentes

1. Muertes^a de acuerdo a la Tabla de Vida Abreviada de los Estados Unidos de Foudray, 1919-1920, págs. 20-21 (hombres); págs. 22-23 (mujeres).

2. Estado civil, de acuerdo al XIV Censo de los Estados Unidos, 1920, Vol. II, págs. 391-392.

^aInterpolación gráfica.

Comparación con el número de hijos por madre viva. Puede ser conveniente introducir una observación de advertencia. El número de hijos por madre, calculado como un promedio para 1 000 mujeres nacidas, no es la misma cifra que el número de hijos por madre en la población viva. Debe recordarse que hay una cantidad de diferentes maneras de obtener un promedio. La distinción que debemos hacer aquí es en alguna medida similar a aquella entre la duración media de la vida y la edad media de los vivos. Estas dos sólo son iguales en una población estacionaria.

La cifra observada del número medio de hijos por madre viva ha sido notablemente constante desde hace algunos años, de acuerdo con las Estadísticas de Nacimientos de los Estados Unidos, 1922, pág. 23; 1921, pág. 19; 1920, pág. 15, a saber: 3,3 (para todas las razas) en 1920, 1921 y 1922. Para las madres blancas la cifra para 1922 es de 3,2.

RESUMEN

La tasa natural de crecimiento de una población, si se mide directamente mediante el

exceso de la tasa de natalidad sobre la tasa de mortalidad, da una impresión engañosa de su vitalidad reproductiva por causa de la interferencia de una distribución por edades condicionada por la historia anterior de la población. En los Estados Unidos, la gran inmigración y el rápido descenso de la tasa de natalidad, incrementaron desproporcionadamente la población en edades de procreación. Se ha descrito y se ha ilustrado mediante un ejemplo numérico un método para obtener una medida intrínseca de la tasa natural de crecimiento de una población, dada su constitución biológica en lo que concierne al patrón de fecundidad y de mortalidad por edades. Aplicando este método a la población de Estados Unidos, tal como estaba constituida de acuerdo con el Censo de 1920, se obtienen los siguientes resultados:

1. En lugar de la tasa real de crecimiento natural de 10,99 por mil al año, la conformación biológica (patrón de fecundidad y de mortalidad por edades) nos daría una tasa de sólo 5,47 por mil, tan pronto como hubiesen desaparecido las influencias de la inmigración y del descenso de la tasa de natalidad en el pasado, de manera que ya no tendríamos una población desproporcionadamente alta en el grupo de edades de reproducción.

Se obtuvieron varios resultados interesantes por sí mismos como subproductos de la investigación principal; ellos son:

2. Se encontró una medida precisa del intervalo medio entre dos generaciones. Contando de madre a hija, su valor es de 28,33 años (1920); de padre a hijo 32,98 años. La diferencia entre estas dos cifras se debe principalmente a la edad más tardía de los hombres al casarse; en menor grado, a la supervivencia algo disminuida de los hombres a esa edad más tardía.

3. La tasa intrínseca de crecimiento natural de 5,47 por mil al año, definida por la conformación biológica de la población, es la resultante de una tasa de natalidad de 20,9 y de una tasa de mortalidad de 15,4. Estas reemplazarían a la tasa de natalidad observada de 23,4 y a la tasa de mortalidad de 12,4¹⁵ cuando la distribución por edades se ajustara normalmente a la conformación biológica de la población.

4. Se ha determinado una serie de las tasas de natalidad en los Estados Unidos, 1870-1915,

construida retrospectivamente sobre la base de la población nativa considerada como supervivientes de los nacimientos pretéritos. Véanse detalles en el cuadro 5.

5. El estudio de la influencia del mejoramiento en las tasas de mortalidad sobre la tasa intrínseca de crecimiento de la población, muestra que la fecundidad actual (1920) de las mujeres, asociada con la mortalidad de 1910 y de 1901 dejaría una tasa natural residual de crecimiento de sólo 3,59 y 1,92 por mil al año, respectivamente. Los períodos correspondientes para una duplicación de la población son 127, 192 y 361 años, respectivamente, con las mortalidades de 1920, 1910 y 1901.

6. Un aplazamiento de cinco años en el ciclo femenino de reproducción, reduciría las tasas de crecimiento natural aproximadamente en igual medida que una regresión a las tasas de mortalidad de 1910.

7. El número de hijos por mujer casada, correspondiente a la conformación biológica de la población de 1920, es de 3,06. Sobre la base de que un sexto de todos los matrimonios no tienen descendencia, esto da 3,67 hijos por mujer casada fecunda. Sumando a esto el padre y la madre, tenemos las cantidades de 5,06 y 5,67, respectivamente, para la familia media completa.

8. Las cantidades correspondientes de hijos que se requieren sólo para mantener una población estacionaria, son 2,62 y 3,15, refiriéndolas, respectivamente, a todas las mujeres casadas o a las mujeres casadas fecundas (cinco sextos del total).

NOTA BIBLIOGRAFICA

Se han anotado las siguientes referencias que guardan relación con uno y otro punto del tema aquí examinado:

- Bowley, A. L.: "Births and Population in Great Britain" en *Economics Journal*, junio, 1924, pág. 191.
- Brownlee, J.: "Birth Control in Some of its Statistical Aspects" en *Lancet*, 1° de noviembre, 1924, pág. 927.
- Carr Saunders, A. M.: "Human Fecundity", en *The Population Problem*, pág. 103.
- Savorgnan, F.: "La fecondità della aristocrazie", en *Metron*, 1924, vol. 3, pág. 468.
- Brunner, C. T.: "Local Variations in the Birth-Rate", en *Economic Journal*, marzo 1925, pág. 60.

¹⁵ Esta cifra es 10,99 en el original, lo que parece un error, pues 10,99 es la Tasa de crecimiento efec-

tiva. En la página 8, segunda columna, sexta línea, figura 12,41. (T.)

APENDICE ¹

RAZONAMIENTO RIGUROSO Y METODOS DE CALCULO

1. *Las funciones demográficas de una población con distribución estable por edades.* La distribución estable por edades, que finalmente debe alcanzar una población con patrón fijo de fecundidad y mortalidad por edades, está dada por el sistema de ecuaciones:

$$c(a) = b e^{-ra} p(a) \quad (1)$$

$$1/b = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da \quad (2)$$

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da \quad (3)$$

en que los distintos símbolos tienen el siguiente significado:

$c(a)$ es el coeficiente de la distribución por edades, tal que, de un número total de personas N , un número $Nc(a)da$ están comprendidos entre los límites de edades a y $a + da$.

b es la tasa de natalidad por persona al año.

r es la "tasa natural de crecimiento", el exceso de la tasa de natalidad b sobre la tasa de mortalidad d .

$p(a)$ es la probabilidad, al nacer, de que un individuo tomado al azar alcance la edad a . Es la cantidad tabulada como l_x en la tabla de vida, si interpretamos ésta en el supuesto de que la raíz de la tabla de vida es la unidad.

$m(a)$ es la tasa de fecundidad anual de las mujeres de edad a .

El lector deberá recurrir a la literatura ² en lo que respecta a la derivación de estas fórmulas ³

¹Preparado por A.J. Lotka.

²*Phil. Mag.*, abril 1911, pág. 435; *Proc. Natl. Acad. Science*, 1922, Vol. 8, pág. 339; *Jl. Washington Acad. Science*, 1913, Vol. 3, pág. 241, 289; *Amer. Jl. Science*, 1907, Vol. 24, pág. 199; *Journal of the American Statistical Association*, 1918, pág. 121; 1921, pág. 997.

³Debe recalarse que las fórmulas (1), (2), (3) pueden aplicarse separadamente a ambos sexos, o a ambos combinados, pues en definitiva los dos sexos deben crecer a la misma tasa r , ya que de otra manera la razón entre ellos eventualmente excedería todo límite.

y a la demostración de que la distribución por edades indicada queda finalmente establecida en las condiciones enunciadas. Aquí bastará con mostrar cómo estas fórmulas conducen al cálculo de los valores exactos de las distintas cantidades citadas en el texto, por una parte; y, por la otra, cómo podemos derivar de ellas las fórmulas aproximadas dadas allí sin una demostración rigurosa.

La tasa natural de crecimiento. La ecuación (3) determina r , la tasa natural de crecimiento en la población con distribución estable por edades, cuando están dados $p(a)$ y $m(a)$, es decir, cuando se dispone de una tabla de vida suficientemente detallada y un registro estadístico de la fecundidad por edades.

En el presente ejemplo, las Tablas de Vida Abreviada de los Estados Unidos, 1919-20 (E. Foudray) de este período, dan los valores de $p(a)$ (es decir l_x) en las edades 0, 1, 2, 7, 12, 17, . . . , 92 y los valores de q_x en las mismas edades. De éstos puede obtenerse, por el método actuarial, los valores de $p(a)$ (esto es l_x) de las edades 12,5, 17,5, . . . , 52,5. Estos valores, como se verá luego, son necesarios para nuestros cálculos. Se decidió que era innecesario tener valores detallados de cada año de edad. En el presente estudio se emplearon las cifras de mujeres blancas del "conjunto" de todos los estados abarcados por estas tablas.

Para 1910 y 1901, las tablas de vida de Glover dan directamente valores de $p(a)$ de cada año de vida.

Los valores de $m(a)$, reunidos en grupos de cinco años, se encuentran en el *Sixth Annual Report of Birth Statistics* (1920, publicado en 1922), páginas 168 y siguientes. Abarcan 24 Estados, de los cuales uno (Maine), sin embargo, registra sólo nacimientos totales. Por consiguiente, los 23 Estados restantes forman la base de este estudio. Se emplearon las cifras referentes a las mujeres blancas, pues, por razones obvias, el interés se centraba principalmente en las razas blancas, en tanto que los datos de mujeres fueron elegidos por las razones que se señalan en el texto aludido, pág. 8.

Método de cálculo de r . La ecuación (3) es una expresión implícita para r , y no puede ser resuelta directamente mediante procedimiento aritmético alguno.

No obstante, podemos proceder de la siguiente manera: simbolicemos por y la integral del miembro derecho de (3), de manera que, dados $p(a)$ y $m(a)$, y es una función de r . Diferenciando con respecto a r , tenemos

$$\frac{dy}{dr} = - \int_0^{\infty} a e^{-ra} p(a) m(a) da \quad (4)$$

$$= -A \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da \quad (5)$$

$$= -Ay \quad (6)$$

Integrando, tenemos

$$y = y_0 e^{-\int A dr} \quad (7)$$

Ahora, cuando

$$r = 0$$

$$y = y_0 = \int_0^{\infty} p(a) m(a) da \quad (8)$$

Pero esta es la cantidad que en el texto hemos simbolizado por R_0 , la relación entre los nacimientos totales en dos generaciones sucesivas. Por tanto, tenemos

$$y = R_0 e^{-\int A dr} \quad (9)$$

Buscamos un valor de r tal que y sea igual a la unidad. Entonces, este valor está dado por

$$1 = R_0 e^{-\int A dr} \quad (10)$$

o

$$R_0 = e^{\int A dr} \quad (11)$$

Queda por determinar numéricamente el valor del exponente $\int A dr$.

De acuerdo con (4) y (5), la definición de A es

$$A = \frac{\int_0^{\infty} a e^{-ra} p(a) m(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da} \quad (12)$$

Desarrollando e^{-ra} por el Teorema de Taylor y escribiendo para abreviar

$$R_n = \int_0^{\infty} a^n p(a) m(a) da \quad (13)$$

encontramos

$$A = \frac{R_1 - r R_2 + \frac{r^2}{2} R_3 - \frac{r^3}{6} R_4 + \dots}{R_0 - r R_1 + \frac{r^2}{2} R_2 - \frac{r^3}{6} R_3 + \dots} \quad (14)$$

$$= \alpha + \beta r + \gamma r^2 + \delta r^3 + \dots \quad (15)$$

en que

$$\alpha = \frac{R_1}{R_0} \quad (16)$$

$$\beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} \quad (17)$$

$$\gamma = \alpha^3 - \frac{3}{2} \alpha \frac{R_2}{R_0} + \frac{1}{2} \frac{R_3}{R_0} \quad (18)$$

$$\delta = \alpha^4 - \alpha^2 \frac{R_2}{R_0} - \frac{1}{3} \alpha \frac{R_3}{R_0} + \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{R_0} - \frac{1}{6} \frac{R_4}{R_0} \quad (19)$$

Debe observarse, en particular, que la serie (15) converge muy rápidamente⁴, a causa de que las constantes R siguen aproximadamente la relación

$$\frac{R_n + 1}{R_n} = \text{const} = \frac{R_1}{R_0} \quad (20)$$

y la suma de los coeficientes numéricos de los distintos términos en las expresiones para β , γ , δ , ..., es cero, mientras que la substitución

$$R_n = R_0 \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n \quad (21)$$

convierte cada uno de los coeficientes literales en una expresión de igual exponente que α , tal que la expresión como un todo se anula. De hecho la relación (20) es válida sólo en forma aproximada, y los coeficientes β , γ , ..., no se anulan, pero son pequeños.

En realidad, como se muestra enseguida, los términos más allá de βr son despre-

⁴Es por esta razón que se desarrolló ésta de preferencia a la serie más lentamente convergente que se obtiene en forma directa de (3) por el desarrollo de la exponencial bajo la integral. Para un método alternativo de obtención de los coeficientes α , β , etc., véase Whitaker y Robinson, *Calculus of Observations*, pág. 170, ecuación (4) y el tema precedente.

ciables, de manera que tenemos finalmente: De modo que la ecuación cuadrática para r es

$$\int A dr = \alpha r + \frac{1}{2} \beta r^2 \quad (22) \quad 22,85 r^2 - 28,45 r + 0,1550 = 0$$

y $R_0 = e^{\alpha r + \frac{1}{2} \beta r^2} \quad (23)$

$$\frac{1}{2} \beta r^2 + \alpha r - \log_e R_0 = 0 \quad (24)$$

una ecuación cuadrática para r .

Valores numéricos. Empleando la información del Censo para 1920 y la tabla de vida de Foudray, 1919-20 (mujeres blancas), se obtuvieron los siguientes valores numéricos.⁵

n	R_n	$\frac{R_n}{R_{n-1}}$	Δ
0	1,168
1	33,230	28,450	1,607
2	998,790	30,057	1,563
3	31 581,340	31,620	1,480
4	1 045 342,000	33,100	

$\alpha = 28,45 \quad \beta = -45,71 \quad \log_e R_0 = 0,1550$

Y finalmente $r = 0,00547 = 5,47$ hijas por 1 000 mujeres de la población al año.

La exactitud de este valor fue controlada (como una garantía por la omisión de los términos de grado tres y superior en r), mediante el cálculo de la integral

$$\int_0^\infty e^{-ra} p(a) m(a) da = 1 \quad (3)$$

con $r = 0,00547$. El valor de la integral resultó ser 1,0002.

La relación entre el valor de r así encontrado y el valor aproximado dado en el texto resulta de la siguiente consideración:

Desarrollando la integral en (3) mediante el Teorema de Taylor, tenemos

$$1 = \int_0^\infty p(a) m(a) da - r \int_0^\infty a \dot{p}(a) m(a) da + \dots \quad (25)$$

$$= R_0 - r R_1 + \dots \quad (26)$$

$$= R_0 \left(1 - r \frac{R_1}{R_0} \right) + \dots \quad (27)$$

Una comparación con el texto muestra que R_1/R_0 es la cantidad allí denotada por T , la edad "centro de gravedad" de la curva de fecundidad.

Entonces

$$\left. \begin{aligned} 1 &= R_0 (1 - r T) \\ R_0 &= 1 + r T \quad \text{si } r \text{ es pequeño} \\ &= (1 + r)^T \quad \text{si } r \text{ es pequeño} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Esta es la fórmula aproximada dada en el texto.

La tasa de crecimiento modificada por la prolongación de la soltería. La tasa de crecimiento r_n , para el caso especial en que el ciclo de reproducción se pospone n años, puede encontrarse directamente por el método general; o, cuando se conoce r para el caso en que el ciclo está en su posición natural, el valor de r_n se encuentra prontamente como

⁵Se desarrolló un caso especial empleando, en la evaluación de la integral (3), una curva ajustada en lugar de la curva escalonada del gráfico 1. Se encontró que el valor resultante de r difería, pero poco, de aquel obtenido mediante la utilización mucho más conveniente de la curva escalonada, y conforme con esto se empleó esta última en los cálculos.

sigue: supongamos que un cambio en el intervalo medio entre dos generaciones de T a T' es acompañado por un cambio de r a r' y un cambio de R_0 a R'_0 . Tenemos, entonces

$$e^{rT} = R_0 \quad (29)$$

$$e^{r'T'} = R'_0 \quad (30)$$

$$\log_e \frac{R'_0}{R_0} = r' T' - r T \quad (31)$$

$$r' = \frac{1}{T'} \left(r T + \log_e \frac{R'_0}{R_0} \right) \quad (32)$$

Una breve reflexión muestra que podemos esperar que R'_0/R_0 esté dado, con gran aproximación, por la razón de $p(T')$ a $p(T)$, de manera que, con esta aproximación

$$r' = \frac{1}{T'} \left[r T + \log_e \frac{p(T')}{p(T)} \right] \quad (33)$$

El aplazamiento del ciclo de reproducción en n años incrementa T en muy cerca de n años, de modo que $T' = T + n$, y, si denotamos

el valor correspondiente por r_n , tenemos en consecuencia:

$$r_n = \frac{1}{T+n} \left[rT + \log_e \frac{p(T+n)}{pT} \right] \quad (34)$$

En el ejemplo numérico considerado aquí, en que $n = 5$ y T está en la vecindad de los 30 años de edad, se encuentra que $p(T+5)/p(T)$ es casi independiente de pequeños cambios en T y tiene el valor 0,9664.

Ahora, $\log_e 0,9664 = -0,03417$, de modo que

$$r_5 = \frac{1}{T+5} (rT - 0,03417) \quad (35)$$

Con $r = 0,00547$, esto da

$$r_5 = 0,00362.$$

La exactitud esencial de esta relación quedó establecida por el hecho de que el valor de r así obtenido daba el valor uno al ser substituido en la integral (3) y ser ésta sumada.

Intervalo medio entre dos generaciones. En vista de que (23) se puede escribir

$$R_0 = e^{r(\alpha + \frac{1}{2}\beta r)} \quad (36)$$

es evidente que el intervalo medio entre dos generaciones está dado por

$$T = \alpha + \frac{1}{2}\beta r \quad (37)$$

$$= 28,33 \text{ años}$$

El valor 28,45, dado en el texto, es la primera aproximación, obtenida omitiendo el segundo término en el exponente en (36) y escribiendo simplemente

$$T = \alpha \quad (38)$$

$$= \frac{R_1}{R_0} \quad (39)$$

Tasa de natalidad. Un razonamiento similar al desarrollado arriba con respecto al cálculo de r según la ecuación (3), se aplica también al cálculo de b según la ecuación (2). Escribiendo

$$L_n = \int_0^\infty a^n p(a) da \quad (40)$$

encontramos

$$b = \frac{e^{\int A' dr}}{L_0} \quad (41)$$

en que

$$A' = u + vr + wr^2 + \dots \quad (42)$$

y

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{L_1}{L_2} \\ v &= u^2 - \frac{L_2}{L_0} \\ w &= u^3 - \frac{3}{2}u^2 \frac{L_2}{L_0} + \frac{1}{2} \frac{L_3}{L_0} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Los valores numéricos de las distintas constantes son, en este caso

	$\frac{L_n}{L_{n-1}}$
$L_0 = 57,52$	
$L_1 = 2\,020$	35,11
$L_2 = 99,102$	49,00
$L_3 = 5\,653\,000$	56,70
$L_4 = 350\,937\,000$	62,20
$u = 35,11$	
$v = -490,2$	
$w = 1\,682,8$	

En consecuencia, encontramos, mediante (41), (42) y (43), empleando para r el valor previamente determinado, es decir, 0,00547,

$$\log_e bL_0 = 0,184816$$

$$b = \frac{1,2030}{57,52}$$

$$= 0,02091$$

Una comprobación de este cálculo de b se obtuvo por integración directa de (2) después de substituir allí el valor conocido de r . La integración se llevó a cabo (a) aritméticamente, empleando la fórmula del trapecio para las partes esencialmente rectas de la curva y la regla de Simpson para las partes más curvas. La integración se llevó a cabo también (b) con la ayuda del planímetro. Los resultados de estos distintos cálculos se muestran en el cuadro 7.

Distribución estable por edades. Puesto que r y b están ahora determinados, la distribución estable por edades resulta inmediatamente según (1). En el cálculo de los grupos de edades quinquenales se tiene la ventaja de contar con la integración ya realizada al determinar b ,

según (2). Los resultados de este cálculo de la distribución normal por edades han sido dados ya en la página 5 del texto y en el cuadro 1.

Tasa de natalidad calculada a partir de la fecundidad por edades. Estando dada ahora la proporción de mujeres en cada grupo de edades, se puede determinar la tasa de

natalidad mediante el tercer método (c), que consiste en multiplicar la población femenina en cada grupo de edades por la correspondiente tasa de fecundidad. Por cierto, la tasa de natalidad así encontrada debería concordar con la obtenida por los métodos (a) y (b) dados arriba. Los resultados efectivos obtenidos por los distintos métodos fueron los siguientes:

CUADRO 7

TASA DE NATALIDAD EN UNA POBLACION NORMAL, CALCULADA POR DISTINTOS METODOS

Método (a)	Solución directa de la ecuación (2), integración aritmética	0,02088
Método (b)	Idem., integración mediante planímetro	0,02092
Método (c)	Solución de la ecuación (41)	0,02091
Método (d)	A partir de la distribución por edades y de la fecundidad por edades	0,02089
Promedio		0,02090

Relación entre el valor exacto de b y la aproximación. La relación entre el valor exacto de b y el valor aproximado dado en el texto se hace manifiesta si multiplicamos entre sí las ecuaciones (2) y (3). Encontramos entonces, después de desarrollar las exponenciales por el Teorema de Taylor y empleando la notación de (13) y (40):

$$\frac{1}{b} = \frac{R_0 - rR_1 + \dots}{L_0 - rL_1 + \dots} \quad (44)$$

Si despreciamos los términos que contienen r, esto da

$$\frac{1}{b} = \frac{R_0}{L_0} \quad (45)$$

la fórmula dada en el texto, y desarrollada allí mediante un razonamiento que requería la corroboración de la deducción rigurosa entregada aquí.

Razón de hombres a mujeres vivos. Algunas de las cifras que aparecen en el cuadro 3 llevan implícita la razón de hombres a mujeres en la población normal. Por esto, se hace necesario calcularla de la siguiente manera:

La razón de hombres, N_m , a mujeres, N_f , en la población viviente difiere de la relación de masculinidad de las nacidas. En una población del tipo considerado aquí, la primera razón está dada por⁶

$$\frac{N_m}{N_f} = \frac{B_m L_m + rL'_m}{B_f L_f + rL'_f} \quad (46)$$

Aquí B_m y B_f denotan, respectivamente, los

nacimientos totales por año de hombres y mujeres. L simboliza la duración media de la vida y L' el primer momento de la curva de vida. El subíndice indica el sexo. La tasa de crecimiento es r , y debe, por cierto, ser finalmente la misma para ambos sexos. Se supone que $m(a)$ no es afectado muy notablemente por cambios moderados en la relación de masculinidad.

Aplicando la fórmula (17), encontramos, para la razón de hombres a mujeres en la población normal

$$\frac{N_m}{N_f} = 1.017; \quad \frac{N_m + N_f}{N_f} = 2.017 \quad (47)$$

Tasa de natalidad de ambos sexos combinados. Habiendo encontrado el número de hijas por mujer, es decir 0,02090, podemos ahora encontrar la tasa de natalidad (hijos de ambos sexos por población de ambos sexos). En 1920 la relación de masculinidad de los nacidos era 1,060. Tenemos, entonces

$$b = \frac{0,02090 \times 2,060}{2,017} = 0,02135$$

Esta es la relación utilizada en los cálculos que aparecen al final del cuadro 3.

METODO DE EMPLEO DE LAS TABLAS DE VIDA EN EL CALCULO RETROSPECTIVO DE LAS TASAS DE NATALIDAD NORTEAMERICANAS

El período abarcado (1872-1920), fue dividido en cinco intervalos, como se muestra en el cuadro siguiente:

⁶J. Washington Academy Science, 1913, pág. 289.

Período	Tabla de vida empleada como base
1870-1885	Estimada ^a , 1880
1885-1895	Estimada ^a , 1890
1895-1905	Glover, 1901
1905-1915	Glover, 1910
1915-1920	Foudray, 1919-20

^a Como se explica más abajo.

y los cálculos se realizaron sobre la base de que cada tabla de vida era válida para un período de diez años centrado en el año de la tabla de vida (excepto para la tabla de vida de 1901, que fue centrada por conveniencia en 1900).

El método de cálculo se explica mejor con ayuda de un ejemplo concreto.

Para encontrar la tasa de natalidad en 1872, dada la distribución por edades de la población en 1920:

1. Las personas comprendidas en el grupo de edades de 45 a 49 nacieron en los años 1870-1875. El punto central del grupo de edades 45-49 es la edad 47,5, y las personas de esta edad en 1920 nacieron en 1872.

Desde 1872-1885 hasta los 12,5 años de edad vivieron bajo el régimen de la tabla de vida de 1880. Por consiguiente, si denotamos por $l_{12,5}^{1880}$ la relación de supervivencia de los 12,5 años de edad de acuerdo a la tabla de vida de 1880, 1 000 personas nacidas dejarían un residuo de supervivientes de $1\ 000 \frac{l_{12,5}^{1880}}{l_{12,5}^{1880}}$ en el año 1885.

Estos supervivientes vivirían entonces durante 10 años bajo el régimen de la tabla de vida de 1890. Con una notación similar a la empleada arriba, al cabo de esos diez años sobrevivirían de los 1 000 originales, un número igual a

$$1\ 000 \frac{l_{12,5}^{1880}}{l_{12,5}^{1880}} \frac{l_{22,5}^{1890}}{l_{12,5}^{1890}}$$

Nuevamente, hasta 1900 sobreviviría un número

$$1\ 000 \frac{l_{12,5}^{1880}}{l_{12,5}^{1880}} \frac{l_{22,5}^{1890}}{l_{12,5}^{1890}} \frac{l_{32,5}^{1900}}{l_{22,5}^{1900}}$$

Finalmente, por una extensión obvia de esta operación, se encuentra que, de las 1 000 personas originalmente nacidas en 1872, sobrevive hasta 1920 el siguiente número:

$$1\ 000 \frac{l_{12,5}^{1880}}{l_{12,5}^{1880}} \frac{l_{22,5}^{1890}}{l_{12,5}^{1890}} \frac{l_{32,5}^{1900}}{l_{22,5}^{1900}} \frac{l_{42,5}^{1910}}{l_{32,5}^{1910}} \frac{l_{47,5}^{1920}}{l_{42,5}^{1920}} =$$

$$1\ 000 l_{47,5}^0 \text{, por ejemplo.}$$

Ahora, el número de mujeres blancas nativas

comprendidas en el grupo de edades 45-49 en 1920 era de 1 853 613. Imputando un quinto de este número a la edad central, 47 a 48, tenemos 370 723 mujeres de edad media 47,5 en 1920. Entonces, éstas son supervivientes de $370\ 723 / l_{47,5}^0 = 370\ 723 / 0,60356 = 614\ 226$ nacimientos en 1872.

Ahora, la población blanca total en 1870 era de 35 689 730 personas (de ambos sexos). Luego, la tasa de natalidad de las mujeres era $614\ 226 / 35\ 689\ 730 = 0,0172$. Igualmente, la tasa de natalidad de los hombres resultó ser 0,0201; así, la tasa de natalidad combinada para los dos sexos fue de 0,0373.

Puede observarse que este cálculo parece dar una relación de masculinidad (hombres/mujeres) de las nacidas excesivamente alta para el año 1872. Pero el ejemplo elegido es el más remoto en el tiempo de toda la serie; la tasa de natalidad combinada probablemente se acerca bastante más a la verdadera que las de cada sexo por separado. Como se ve por comparación con las cifras para Inglaterra, toda la serie aparece como totalmente verosímil.

PUNTOS ESTIMADOS EN LAS TABLAS DE VIDA

A partir de las cifras tabuladas disponibles, hubo que hacer dos tipos de interpolaciones y extrapolaciones.

(a) Para los puntos en la mitad del año, se tomó la media l_x y l_{x+1} .

(b) En el caso de la tabla de vida de Foudray, l_x está dado para las edades 2, 7, 12, etc., sin embargo, los valores para 3, 8, 13, etc., se obtienen fácilmente mediante la relación

$$l_{x+1} = p_x l_x$$

$$p_x = 1 - q_x$$

en que los valores de q_x para las edades 2, 7, 12, etc., también se dan en la tabla de Foudray.

ESTIMACION DE LAS TABLAS DE VIDA MAS ANTIGUAS

Anterior a 1900 no se dispone de tablas de vida de EE. UU. Se hizo una estimación de los valores requeridos de l_x para 1890 y 1880, averiguando la razón l_x^{1900} / l_x^{1910} a la edad específica y multiplicando el l_x de 1900 por este factor para obtener una estimación de l_x para 1890. Mediante una segunda multiplicación análoga se obtuvo l_x para 1880.

III. EL AJUSTE PROGRESIVO DE LA COMPOSICION POR EDADES A LA FECUNDIDAD¹

Se ha demostrado en otra parte² que dado un patrón fijo de fecundidad por edades, esto es, de frecuencia de maternidad entre las mujeres de una población, y dado también un patrón fijo de mortalidad por edades (tabla de vida), en ausencia de inmigración y emigración, la población se ajustará finalmente a cierta composición definida por edades³, no importando cual haya sido la distribución por edad inicial, la forma de esta composición final por edades también ha sido determinada.

Los sucesivos estados a través de los cuales pasa la población desde la composición por edades original hasta la final no han sido, sin embargo, determinados numéricamente⁴ con anterioridad, como tampoco ha sido discutido hasta ahora el período que es necesario para el ajuste. En lo que sigue se tratará un ejemplo numérico a fin de remediar esta omisión.

Como base para el cálculo, tomaremos la población femenina blanca de los Estados Unidos en 1920. La composición por edades aparece en grupos quinquenales en las columnas (2) y (3) del cuadro 1.

El primer paso en el cálculo es determinar la composición por edades de los supervivientes,

¹Recibido el 25 de septiembre de 1926.

²Lotka, A. J. *Phil. Mag.*, abril 1911, pág. 435; *Proc. Nat. Acad. Science* 8: 339, 1922. *Elements of Physical Biology*, 1925, pág. 10.

³Siempre que la composición inicial por edades no sea tan extremadamente anormal que cause un cese completo de la reproducción.

⁴No obstante, examínese E. Cannan: *Economic Journal*, 5, 21, 1895.

en 1925, de esta población de 1920. La población entre los 20 y 25 años de edad en 1925, por ejemplo, se obtuvo multiplicando la población entre 15 y 20 años en 1920⁵ por el factor $l_{22,5}/l_{17,5}$. De igual forma se calcularon todos los grupos de edades restantes desde los cinco años hasta el final de la vida, para 1925. El grupo de edades 0-5 no puede ser detectado por este método, y en cambio debe derivarse de los nacimientos en el quinquenio 1920-1925. Estos fueron estimados como sigue:

Para 1920 se conocía la tasa de natalidad de las mujeres blancas según las fuentes oficiales.

Para 1925 se calculó la tasa de natalidad de hijas, multiplicando la población femenina en cada grupo de edades desde 10 hasta 54 años en 1925, por la correspondiente⁶ frecuencia

⁵Los valores de l_x empleados aquí y a lo largo del trabajo son los que presenta E. Foudray en las *Tablas de Vida Abreviadas de EE. UU., 1919-1920*, para las mujeres blancas, "Compendio" de todos los Estados disponibles. Estas tablas dan l_x y q_x para las edades 2, 7, 12, etc. A partir de éstas, se obtienen fácilmente $l_{2,5}$, $l_{7,5}$, etc., mediante los métodos de cálculo usuales.

⁶Esto es, los totales de hijas nacidas por año y por persona de la población femenina blanca en cada grupo de edades. La información numérica requerida se encuentra en *Birth Statistics for the Registration Area of the United States 1920*, págs. 44 y siguientes (Población por Estados) y págs. 168 y sig. (nacimientos por sexo y por edad de la madre.) Los totales para 23 Estados se obtuvieron mediante suma, en lugar de emplear los totales dados en el "Resumen" en pág. 44, pues estos últimos incluyen el Estado de Maine, para el cual se dispone únicamente de la cifra bruta de nacimientos, sin clasificación por edad de la madre.

CUADRO 1
POBLACION FEMENINA BLANCA DE LOS ESTADOS UNIDOS SOBRE LA BASE DE LA COMPOSICION POR
EDADES Y LOS PATRONES DE FECUNDIDAD Y MORTALIDAD DE 1920

Grupo de edades	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955	
Todas las edades	46 390 260	49 077 859	51 727 182	54 346 986	56 909 865	59 351 934	61 639 132	63 786 216	
0-54	41 225 839	43 181 915	45 001 854	46 748 231	48 284 138	49 813 002	51 143 649	52 579 022	
Por ciento									
Todas las edades	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	
0-54	88,87	87,99	87,00	86,02	84,84	83,93	82,97	82,43	
0-4	5 118 209	11,03	10,21	10,08	10,00	9,91	9,78	9,62	9,51
5-9	4 992 920	10,76	10,19	9,52	9,40	9,33	9,29	9,19	9,09
10-14	4 638 706	10,00	10,06	9,58	8,98	8,88	8,86	8,85	8,81
15-19	4 176 406	9,00	9,33	9,46	9,01	8,45	8,39	8,42	8,46
20-24	4 170 841	8,99	8,32	8,52	8,79	8,40	7,93	8,00	7,97
25-29	4 051 348	8,73	8,24	7,66	8,00	8,15	7,82	7,40	7,42
30-34	3 566 009	7,69	7,98	7,56	7,05	7,38	7,53	7,27	6,92
35-39	3 303 693	7,12	7,01	7,31	6,95	6,50	6,75	7,01	6,80
40-44	2 770 843	5,97	6,49	6,43	6,71	6,40	6,00	6,35	6,54
45-49	2 411 222	5,20	5,41	5,91	5,86	6,14	5,89	5,54	5,89
50-54	2 025 642	4,37	4,66	4,87	5,33	5,31	5,58	5,37	5,08
55-59	1 566 541	3,38	3,85	4,10	4,30	4,72	4,72	4,98	4,82
60-64	1 311 095	2,83	2,87	3,26	3,50	3,69	4,06	4,08	4,33
65-69	926 422	2,00	2,27	2,32	2,63	2,85	3,01	3,33	3,36
70-74	643 451	1,39	1,47	1,68	1,71	1,96	2,12	2,25	2,51
75-79	410 696	0,89	0,89	0,95	1,09	1,11	1,28	1,39	1,48
80-84	201 199	0,43	0,46	0,47	0,50	0,57	0,59	0,68	0,74
85-89	80 306	0,17	0,17	0,18	0,18	0,20	0,23	0,24	0,27
90-94	19 880	0,04	0,05	0,04	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06
95-99	4 129	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
100 ó más	702								

CUADRO 1 (Continuación)

Grupo de edades	1960	1965	1970	1975	1980	1985	Final	
Todas las edades	65 835 001	67 835 461	69 828 865	71 828 216	73 849 716	75 901 902		
0-54	54 196 761	55 652 328	57 041 957	58 577 945	60 307 256	62 041 898		
	Por ciento					Por ciento		
Todas las edades	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00		100,00	100,00
0-54	82,32	82,04	81,69	81,55	81,66		81,74	81,61
0-4	9,46	9,46	9,47	9,47	9,46	7 165 646	9,44	9,48
5-9	9,01	8,96	8,98	8,99	9,00	6 824 434	8,99	8,98
10-14	8,71	8,65	8,62	8,74	8,67	6 583 237	8,67	8,64
15-19	8,41	8,34	8,29	8,28	8,30	6 319 177	8,33	8,31
20-24	8,01	7,99	7,94	7,88	7,88	5 994 555	7,90	7,91
25-29	7,48	7,54	7,53	7,48	7,44	5 644 290	7,44	7,47
30-34	6,94	7,01	7,08	7,07	7,04	5 313 738	7,00	7,03
35-39	6,47	6,50	6,58	6,64	6,65	5 016 417	6,61	6,59
40-44	6,34	6,06	6,10	6,17	6,24	4 734 655	6,24	6,16
45-49	6,07	5,90	5,64	5,68	5,76	4 416 970	5,82	5,74
50-54	5,40	5,58	5,43	5,19	5,24	4 028 779	5,31	5,30
55-59	4,57	4,86	5,03	4,90	4,69	3 587 295	4,73	4,79
60-64	4,19	3,98	4,24	4,39	4,28	3 112 638	4,10	4,19
65-69	3,56	3,46	3,29	3,51	3,64	2 690 630	3,54	3,50
70-74	2,52	2,68	2,61	2,48	2,65	2 088 417	2,75	2,64
75-79	1,65	1,67	1,78	1,73	1,65	1 334 255	1,76	1,76
80-84	0,79	0,89	0,89	0,95	0,93	672 759	0,89	0,95
85-89	0,30	0,32	0,36	0,36	0,39	284 612	0,37	0,41
90-94	0,07	0,07	0,09	0,10	0,10	78 575	0,10	0,11
95-99	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	10 129	0,01	0,04
100 ó más						694		0,01

de maternidad, como lo muestra el cuadro 2. sobre todos los grupos en edades reproductivas, La suma de los productos así obtenidos, tomada da el número total de hijas nacidas.

CUADRO 2

SUPERVIVIENTES, EN 1925, DE LA POBLACION FEMENINA BLANCA DE LOS ESTADOS UNIDOS EN 1920; ADEMAS, FRECUENCIA DE MATERNIDAD EN 1920 Y NACIMIENTOS RESULTANTES POR AÑO

(1)	(2)	(3)	(4) = (2) X (3)
Edad	Número	Frecuencia de maternidad Hijas por 100 000 mujeres por año ^a	
10-14	4 943 467	9	445
15-19	4 579 575	2 202	100 842
20-24	4 084 269	7 310	298 560
25-29	4 046 509	7 480	302 679
30-34	3 915 636	5 780	226 324
35-39	3 443 082	3 898	134 211
40-44	3 186 211	1 552	49 450
45-49	2 657 507	172	4 571
50-54	2 284 954	5	114
10-54	33 141 210		1 117 196

^aSegún *Birth Statistics for the Birth Registration Area of the United States*, Sexto Informe anual, Oficina del Censo, 1920, pág. 169; *United States Census Report*, 1920, 2 : 162, después de distribuir los "desconocidos".

Para los años intermedios, 1921-1924, el total de nacimientos fue estimado por interpolación lineal simple.

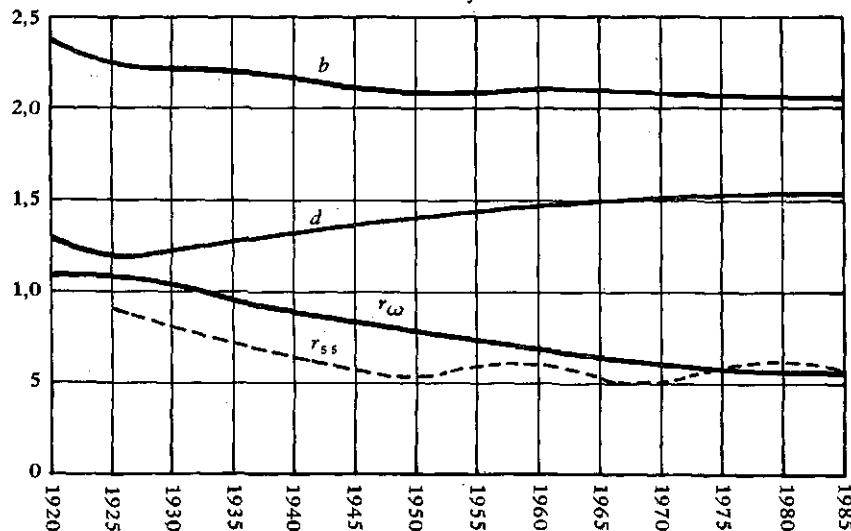
Habiendo así obtenido los valores de los nacimientos totales de hijas para los años 1920-1925,

los supervivientes en el grupo de edades 0-5 en 1925 se calcularon como sigue: Simbolizando por B_{1920} , B_{1921} , etc., los nacimientos totales en los años 1920, 1921, etc., los supervivientes en cuestión fueron determinados mediante la suma

$$B_{1920} l_{4,5} + B_{1921} l_{3,5} + B_{1922} l_{2,5} + B_{1923} l_{1,5} + B_{1924} l_{0,5}$$

GRAFICO 1

TASA DE NATALIDAD, TASA DE MORTALIDAD Y TASA DE CRECIMIENTO NATURAL 1920-1985, sobre la base de la fecundidad y la mortalidad de 1920



Tasa de natalidad, tasa de mortalidad y tasa de crecimiento natural, EE. UU. 1920-1985, calculadas sobre la base de la fecundidad y la mortalidad de 1920.

Habiendo quedado así determinada la composición completa por edades de la población blanca femenina en 1925, una simple repetición del proceso de la composición por edades para 1930, una segunda repetición de la composición para 1935, y así sucesivamente.

CUADRO 3

TASA DE NATALIDAD, TASA DE MORTALIDAD Y TASA DE CRECIMIENTO NATURAL DE LAS MUJERES BLANCAS DE ESTADOS UNIDOS, 1920-1985, CALCULADAS SOBRE LA BASE DE LAS TABLAS DE FECUNDIDAD Y MORTALIDAD DE 1920

	1920	1925	1930	1935	1940	1945			
Tasa de natalidad <i>b</i> (hijas por año y por persona de la población femenina)	2,340	2,276	2,247	2,232	2,200	2,156			
Tasa de mortalidad <i>d</i> (defunciones de mujeres por año y por persona de la población femenina)	1,241	1,191	1,228	1,277	1,319	1,358			
Tasa de crecimiento $r = b - d$	1,099	1,085	1,019	0,955	0,881	0,798			
	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	∞ ¹
<i>b</i>	2,120	2,100	2,094	2,097	2,098	2,094	2,089	2,087	2,091
<i>d</i>	1,400	1,442	1,479	1,508	1,526	1,534	1,537		1,544
<i>r</i>	0,720	0,658	0,615	0,589	0,572	0,560	0,552		0,547

¹ Calculado mediante las fórmulas (1), (2).

El cálculo fue realizado hasta el año 1985. Las cifras resultantes, y también la composición por edades final después del ajuste completo ("después de un lapso infinito de tiempo"), aparecen en columnas sucesivas del cuadro 1. Con el objeto de economizar en los gastos correspondientes a la tipografía, para estos años sólo se muestran los porcentajes, y no los números efectivos, aunque éstos fueron calculados para llevar a cabo el cómputo. Se verá que hacia 1985 se alcanza muy aproximadamente la composición estable o "final" por edades. El cuadro 3 y el gráfico 1 muestran las tasas de natalidad por persona y las tasas de crecimiento natural por persona; las primeras se obtuvieron por simple división del total de nacimientos entre la población total calculada como se indicó más arriba para los años del período abarcado. Las tasas de mortalidad correspondientes resultan de inmediato como exceso de la tasa de natalidad sobre la tasa de crecimiento natural. Estas tasas de mortalidad aparecen también en el cuadro 3 y en el gráfico 1. Los resultados así obtenidos se refieren sólo estrictamente a la "tasa de natalidad anual de hijas por persona de la población femenina". Pero esta cifra difiere en todo caso, aunque poco, de la tasa de natalidad que se calcula corrientemente sobre la base de los hijos de ambos sexos y de la población de

ambos sexos, y para nuestros propósitos actuales no vale la pena realizar una corrección.

Para el cálculo aquí presentado, sirve de comprobación el que el resultado final esté en muy buena concordancia con los valores de la tasa final de natalidad y de la tasa final de crecimiento natural calculadas mediante las fórmulas fundamentales:

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) m(a) da \quad (1)$$

$$1/b = \int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da \quad (2)$$

que aparecen en los artículos citados anteriormente. Los valores obtenidos por estas fórmulas aparecen, con fines de comparación, en la última columna del cuadro 3, junto con aquellos calculados para 1985 y 1980, de acuerdo a lo señalado anteriormente.

Debe entenderse que las cifras aquí presentadas no son propuestas de ningún modo como una predicción de las tasas de natalidad que pueden esperarse efectivamente en los años venideros. Aparte de la inmigración (de aquí en adelante fuertemente restringida), operarán dos factores para modificar la tasa efectiva en

comparación con la tasa calculada de natalidad, a saber: 1) El cambio (probablemente disminución) de las frecuencias de maternidad, y 2) el cambio (aumento) en la supervivencia en todas las edades, que encuentra su expresión general en el aumento de la vida media. El interés de las cifras presentadas descansa en el conocimiento que proporcionan de la composición final por edades y de las tasas de natalidad y de mortalidad resultantes que se seguirían si continuaran las condiciones *presentes* de fecundidad y supervivencia (mortalidad) y, además, en la información suministrada respecto al período que se requeriría para alcanzar el ajuste y los pasos sucesivos que hay que dar para lograrlo efectivamente.

Es también interesante comparar las cifras así obtenidas⁷ para la población total con la proyección dada por la fórmula de Pearl y Reed. En el gráfico 2 se muestra esta comparación. Como era de esperar, durante muchos años las cifras calculadas no logran alcanzar la población de Pearl y Reed, la cual corresponde a una ley de crecimiento que incluye la influencia de la inmigración. Si existen restricciones para la inmigración, la tasa de natalidad de la población nativa éva a

⁷En esta estimación, la población total se ha obtenido multiplicando la población femenina blanca por el factor 2,28, que representa el cociente entre la población total y la población femenina blanca en 1920.

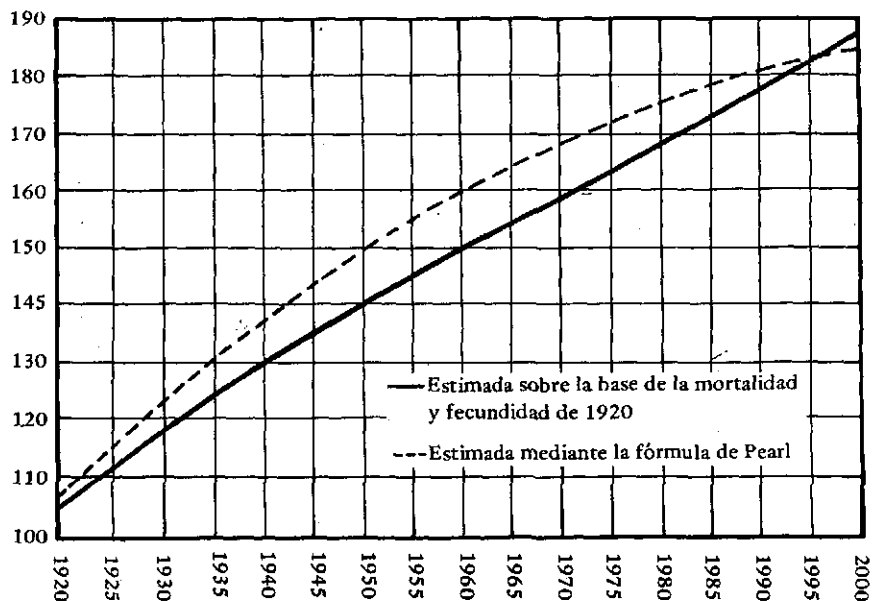
crecer para satisfacer la nueva "demanda"? Esta es una pregunta que la mayoría de las personas estaría dispuesta a contestar en forma negativa. Hay que hacer hincapié en que las cifras dadas aquí no deben interpretarse como un pronóstico de lo que efectivamente ocurrirá, sino como una indicación del curso que seguirían los acontecimientos si las condiciones actuales de mortalidad y fecundidad continuaran invariables. En estas condiciones, la curva de la población cortaría la curva de Pearl alrededor de 1995, y de allí en adelante la población sobrepasaría a la calculada según Pearl.

En la práctica, sin duda, la fecundidad continuará declinando en el futuro como lo hizo en el pasado, y la curva de crecimiento de la población se hará eventualmente menos pronunciada que la calculada según las condiciones existentes.

Otro aspecto puesto de relieve por el cálculo presentado aquí, es que la tasa final de crecimiento de la población es determinada enteramente por aquella parte de la población femenina en edades reproductivas, es decir, entre diez y cincuenta y cinco años. Si estamos interesados meramente en la determinación de la tasa final de crecimiento, es de hecho innecesario, excepto como curiosidad, llevar cualquiera de los cálculos descritos arriba más allá de los cincuenta y cinco años. Si hubiéramos

GRAFICO 2

POBLACION DE ESTADOS UNIDOS, 1920-2000



Población de EE. UU. 1920-2000 calculada: a) según la fórmula de Pearl y Reed; b) sobre la base de la fecundidad y la mortalidad de 1920.

omitido todas las cifras por sobre los cincuenta y cinco años, habríamos obtenido sólo los resultados que aparecen encima de la línea doble en el cuadro 1. Basándonos sólo en esto, deberíamos encontrar una serie de valores para r similar, en general, a aquellas obtenidas al considerar la población en conjunto. Esto se ve en el gráfico 1, que muestra la curva de r_{ω} calculada para la población total, y r_{55} , calculada sobre la base de la población menor de cincuenta y cinco años únicamente⁸. Se verá que, pese a que los valores individuales de r_{55} y r_{ω} difieren, y pese a que r_{ω} da una curva más suave que r_{55} , ambas curvas se acercan a la misma asíntota.

La aproximación gradual, desde la composición inicial por edades en 1920, a aquella de 1985 (casi idéntica a la composición final por edades), se ve mejor en un modelo de tres dimensiones como el, que se muestra en el gráfico 3. Los quinquenios consecutivos aparecen alternadamente en blanco y negro, como una manera de facilitar la identificación de los cortes quinquenales, que representan a la población por edades en 1920 (blanco) 1925 (negro), 1930 (blanco), etc. La última

división —blanca— se designa como "Infinito", y corresponde a la composición "final" por edades determinada mediante la mortalidad (tabla de vida) y el patrón de frecuencia de maternidad por edades de 1920.

El modelo pone de manifiesto claramente los siguientes aspectos:

1. El aumento de la proporción de personas de mayor edad desde 1920 hacia adelante. Nótese el comportamiento ascendente de izquierda a derecha de los bloques cercanos al primer plano del gráfico 3.

2. La disminución de la proporción de personas más jóvenes. Nótese la "silueta" en la cima. Esto indica también la reducción de la tasa de natalidad. Este gradual envejecimiento de la población queda también de manifiesto en el cuadro 4.

3. El alisamiento gradual de las sinuosidades de la composición original por edades (hacia la izquierda), hasta alcanzar por último la composición final "suavizada".

4. En los 65 años que van desde 1920 hasta 1985, prácticamente se llega a la composición "final" por edades.

CUADRO 4
EL "ENVEJECIMIENTO" DE LA POBLACION DE ESTADOS UNIDOS

(1) Año	(2) Proporción de la población de edad		(3)
	15-54 años	65 y más	
	1870 ^a	53,4	
1880	53,7	3,4	
1890	55,4	3,7	
1900	56,0	4,0	
1910	58,0	4,1	
1920 ^b	57,1	4,9	
1930 ^c	57,7	5,7	
1940	56,7	6,8	
1950	55,4	8,0	
1960	55,1	8,9	
1970	54,6	9,0	
1980	54,6	9,4	
Final	54,5	9,4	
Estacionaria	55,5	10,5	

^a 1870 a 1920, personas de ambos sexos, blancas y de color.

^b 1920 hasta el final, mujeres blancas de 23 Estados.

^c 1930 hasta el final calculado sobre la base del patrón de fecundidad por edades de 1920.

El "envejecimiento gradual de la población, a que se refieren los puntos 1 y 2 anteriores, aparece esencialmente como una continuación

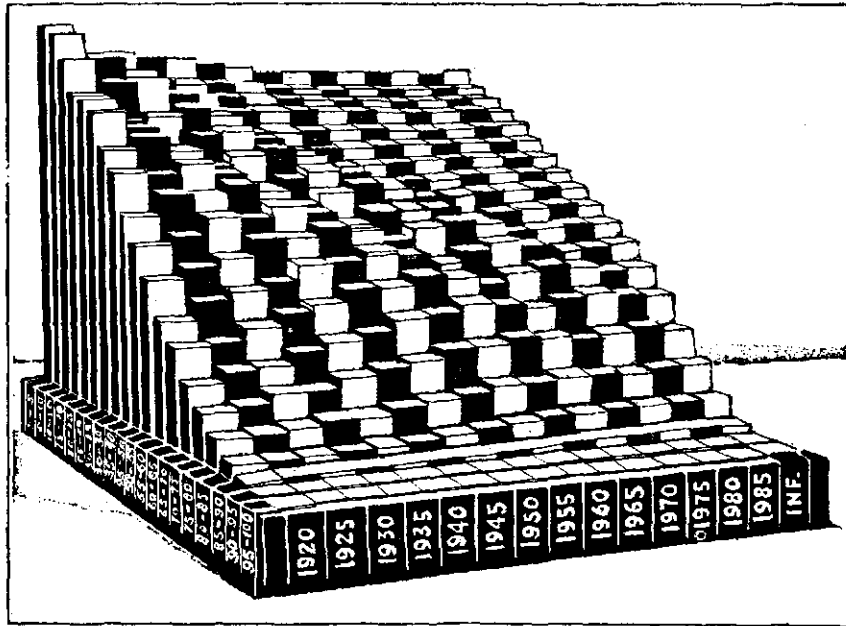
del proceso que ha venido ocurriendo efectivamente desde hace muchos años, como lo muestra la columna 3 del cuadro 4.

⁸Por supuesto, es imposible calcular correctamente el valor final de r sobre la base de una parte de la población, tales como las edades 0-30, que omite una porción esencial de la población reproductiva.

La columna 2 de este cuadro, por otro lado, muestra que debemos esperar cambios comparativamente pequeños en la proporción de la población comprendida entre los 15 y los

GRAFICO 3

MODELO DE LA COMPOSICION POR EDADES DE LA POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS (MUJERES BLANCAS) 1920-1985, CALCULADO SOBRE LA BASE DE LA FECUNDIDAD Y LA MORTALIDAD DE 1920



55 años, que es el período esencialmente productivo y reproductivo de la vida. Tenderá a haber menos niños, más ancianos (de 65 años y más), pero aproximadamente el mismo número de personas en los rangos medios de la vida.

IV. EL TAMAÑO DE LAS FAMILIAS NORTEAMERICANAS EN EL SIGLO DIECIOCHO¹

El significado de las constantes empíricas en la ley de Pearl-Reed, de crecimiento de la población

La ley de Pearl-Reed de crecimiento de la población puede escribirse

$$r = r_0 \left(1 - \frac{N}{N_\infty} \right) \quad (1)$$

en que r es la tasa de crecimiento por persona cuando la población es N , mientras r_0 es la tasa *inicial* de crecimiento, es decir, la tasa que prevalecería en la primera etapa de crecimiento a partir de un núcleo muy pequeño. El símbolo N_∞ denota la población *final*, el límite superior del crecimiento posible.

Expresada en palabras, la fórmula (1) indica que la tasa de crecimiento en cualquier época es igual a la tasa *inicial* de crecimiento disminuida por una fracción que expresa la población existente en términos de la final.

Para los Estados Unidos, la ecuación (1) en forma numérica es

$$r = 0,03134 \left(1 - \frac{N}{197\,273\,000} \right) \quad (2)$$

Así, la población norteamericana debió crecer en su curso inicial, según la ley de Pearl y Reed, y tal como se señala en forma numérica en la ecuación (2), con la tasa *inicial* de 3,134 por ciento al año. Por supuesto, no existe un registro de esta tasa *inicial* de crecimiento, pero utilizando las cifras

¹Este documento es la conclusión del artículo publicado en el número de septiembre de 1925 de *Journal of the American Statistical Association*, sobre "The True Rate of Natural Increase". El autor desea expresar su agradecimiento al Dr. Dublin por la oportunidad que se le ha dado para continuar una investigación comenzada en colaboración con él.

más antiguas disponibles, tenemos, para 1790

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{N_\infty} &= \frac{3\,929\,000}{197\,273\,000} = 0,01991. \\ \left(1 - \frac{N}{N_\infty} \right) &= 0,98009. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Entonces, la población en 1790 era de alrededor de un cincuentavo de la final, y la desviación con respecto a la tasa *inicial* no es muy grande. De hecho, calculando r mediante la fórmula de Pearl-Reed encontramos, para el año 1790, sobre la base de $N = 3\,929\,000$

$$\begin{aligned} r &= 0,0307 \\ \text{frente a } r &= 0,0301 \text{ observada para } \\ & \quad 1790-1800 \\ \text{y } r_0 &= 0,03134 \text{ (tasa inicial)} \end{aligned}$$

El crecimiento observado no se debió enteramente al exceso de los nacimientos sobre los fallecimientos. La inmigración durante el período 1790-1820 ha sido estimada en alrededor de 250 000,² de los cuales podemos asignar alrededor de 75 000 a la década de 1790-1800. Esto daría, para la tasa natural de crecimiento (exceso de la tasa de natalidad por persona sobre la tasa de mortalidad por persona)³

$$r = 0,0287$$

²C.B. Burr, *America's Race Heritage*, 1922, págs. 272, 274, 275.

³Es interesante comparar esta cifra con la estimación de Malthus de que una población que crece sin restricciones se duplica en 25 años. Esto corresponde a una tasa anual de crecimiento por persona de 0,0277.

Estas cifras —la tasa *inicial* de crecimiento de nuestra población y su gran aproximación con las observaciones antiguas efectivas— son de interés esencial como características de nuestra curva de crecimiento, y valdría la pena examinar sus implicaciones con un poco de mayor atención. Interpretada en términos de fecundidad, ¿qué representa esta tasa *inicial* de crecimiento de 3,134 por ciento al año? ¿Qué nos dice esta cifra respecto a cuestiones de interés común como la tasa de natalidad, el tamaño de la familia, el patrón de fecundidad entre las mujeres en edades reproductivas? En este sentido, ¿cuál es el límite superior de la fecundidad de las mujeres norteamericanas, que impuso un límite al crecimiento de la población en una época en que la presión de la población aún no se dejaba sentir del todo?

Encontramos alguna ayuda para nuestro enfoque al problema así planteado, en el hecho de que en las etapas tempranas la curva de Pearl-Reed corresponde muy aproximadamente al crecimiento en progresión geométrica. En estas circunstancias, los nacimientos totales también crecen de año en año en progresión geométrica a la tasa r . Entonces, si T es la duración media de una generación, y R es la razón de los nacimientos totales en dos generaciones sucesivas, aplicando el principio del interés compuesto continuo para T años, encontramos

$$R = e^{rT} \quad (4)$$

Entonces, en primer lugar, expresemos nuestro problema de la manera siguiente. Denotando por R_0 la razón de los nacimientos totales en dos generaciones sucesivas, de acuerdo a las condiciones de mortalidad y al patrón de fecundidad en 1920, ¿por cuánto tendríamos que multiplicar este patrón de fecundidad de 1920 para obtener un valor de r como el observado en la historia inicial de nuestra población? ¿Cuántas veces mayor que hoy día era la fecundidad de las mujeres en la época en que la tasa inicial de crecimiento era de 3,134 por ciento al año?

Sea k el factor multiplicador requerido. Entonces, en lugar de (4) tenemos

$$k R_0 = e^{rT} \quad (5)$$

Un análisis más exacto vendrá más adelante. En forma preliminar podemos obtener muy fácilmente una aproximación burda, trabajando numéricamente con (5), de la manera siguiente:

La duración media de una generación, T , (de madre a hija) es casi independiente de k y r y de la correspondiente tabla de vida;⁴ su valor es aproximadamente de 28 años.⁵ El valor de R_0 en 1920 era 1,168. Entonces, tenemos

$$1,168 k = e^{28r}$$

$$k = \frac{e^{28r}}{1,168}$$

Por consiguiente, puesto que $28 r_0 = 0,878$, con la tasa inicial de crecimiento r_0 tenemos

$$k = \frac{e^{0,878}}{1,168} = 2,06$$

Es decir, la fecundidad de las mujeres en el período inicial de nuestro crecimiento debe haber sido alrededor de dos veces mayor que la de hoy. Para el año 1790, con $r = 0,0287$, encontramos, análogamente:

$$k = \frac{e^{0,804}}{1,168} = 1,91$$

El expresar estos hechos de otra manera añade un rasgo concreto a la exposición, a saber, investigar cuántos hijos por mujer nacida y por mujer casada habrían nacido en cada uno de los casos considerados.

El número de *hijas* por mujer nacida es, ciertamente, igual a la razón de los nacimientos totales en dos generaciones sucesivas, $k R_0$, es decir, 2,41 para la tasa *inicial* de crecimiento y 2,23 para las condiciones de 1790. El número correspondiente de *hijos* por mujer se obtiene multiplicando por 2,06, puesto que nacen 1,06 hijos varones por cada 1,00 hijas. Así, encontramos para la tasa *inicial* de crecimiento 4,96 hijos por mujer, y 4,60 para 1790. Pero sólo una parte de todas las mujeres nacidas se casa. En 1920, como se muestra en el cuadro 1, esta fracción fue 0,782;⁶ para 1790, con una mortalidad mayor y, por lo tanto

⁴ Como se muestra más adelante, pág. 47.

⁵ *Journal of the American Statistical Association*, vol. 20, 1925, pág. 334.

⁶ Esta cifra recalculada difiere ligeramente en la tercera decimal de aquella dada (0,785) en *Journal of the American Statistical Association*, 1925, pág. 327. En el cuadro VI, pág. 326, de esa publicación, la cifra es 0,748, debido a una transposición accidental de dígitos que, no obstante, no se introdujo en los cálculos posteriores.

menos mujeres supervivientes para procrear; una estimación, que se explica más adelante, da una cifra de 0,620. Sobre la base de esta última cifra encontramos, para el número de hijos por mujer casada, 8,0 hijos en el período inicial y 7,4 hijos para 1790. Finalmente, si suponemos, para esa época, que siete por ciento de todos los matrimonios fueron estéri-

CUADRO 1

MUJERES QUE MUEREN SOLTERAS A DISTINTAS EDADES Y A TODAS LAS EDADES, DE ACUERDO CON DISTINTOS PATRONES DE RAZON DE NUPCIALIDAD Y DE MORTALIDAD, EN UNA COHORTE DE TABLA DE VIDA DE 100 000 MUJERES BLANCAS

Base de cálculo							
Mortalidad como en	1920	1920	1838-54	1838-54	1838-54
Razón de nupcialidad como en	1920	1920	1790	1790 Aumentada	1920
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Edad	Muertes según tabla de vida d_x 1920	Razón de nupcialidad. Porcentaje solteras ^a 1920	Muertes solteras 1920 (2) X (3)	Razón de nupcialidad. Porcentaje solteras ^a 1970	Muertes según tabla de vida d_x 1838-54	Muertas solteras ^a 1790 ^b (5) X (6)	Muertas solteras ^a 1790 ^c (3) X (6)
0-15	11 950	100,00	11 950	100,00	30 308	30 308	30 308
15	240	98,60	237	98,00	387	379	382
16	270	95,60	258	91,60	416	381	398
17	302	88,10	266	81,60	452	369	398
18	340	80,50	274	71,50	492	352	396
19	377	71,20	268	61,00	534	326	380
20	410	61,90	254	51,40	577	297	357
21	440	54,00	238	43,70	587	257	317
22	465	47,50	221	37,30	597	223	284
23	486	40,70	198	31,80	605	192	246
24	505	34,90	176	27,20	612	166	214
25	520	30,80	160	23,30	619	144	191
26	532	27,20	145	20,00	626	125	170
27	543	24,00	130	17,10	632	108	152
28	550	21,20	117	15,30	637	97	135
29	555	19,10	106	13,60	643	87	123
30	560	17,90	100	11,90	648	77	116
31	563	16,30	92	10,80	653	71	106
32	564	15,40	87	9,70	657	64	101
33	563	14,60	82	8,90	662	59	97
34	562	14,00	79	8,30	667	55	93
35-44	5 650	11,90	672	6,90	6 951	480	827
45-54	7 800	10,00	780	6,80	7 707	524	771
55-64	12 800	8,70	1 114	6,70	10 917	731	950
65 ∞	52 600	7,30	3 840	6,60	32 417	2 140	2 366
			21 844			38 012	39 878

$1 - 0,2184 = 0,7816$ muertas casadas^d

$1 - 0,3801 = 0,6199$ muertas casadas^d

$1 - 0,3988 = 0,6012$ muertas casadas^d

$1/0,7816 = 1,279$ hijas por mujer blanca casada

$1/0,619 = 1,613$ hijas por mujer blanca casada

$1/0,6012 = 1,663$ hijas por mujer blanca casada

^a Soltera significa aquí nunca casada y excluye viudas y divorciadas.

^b Tabla de vida de 1838-54 combinada con la razón de nupcialidad de 1790 estimada como se indica en el gráfico 1.

^c Tabla de vida de 1838-54 combinada con la razón de nupcialidad de 1920.

^d Casada significa aquí "alguna vez casada" e incluye viudas y divorciadas. Por conveniencia esta cifra se expresa aquí por unidad y no por 100 000 mujeres nacidas.

les,⁷ encontramos 8,6 hijos para el período inicial y 8,0 hijos por madre para 1790.

El método aproximado de cálculo dado arriba es sumamente ventajoso para facilitar la obtención de los resultados numéricos. Ahora falta fundar estos resultados sobre una base más rigurosa. Al hacer esto, estaremos al mismo tiempo capacitados para extraer conclusiones relativas al efecto de ciertas influencias particulares a las que no hemos prestado atención hasta ahora.

TRATAMIENTO MAS EXACTO

Ya se indicó que en las primeras etapas la curva de Pearl-Reed corresponde a crecimiento en progresión geométrica. Esto, en presencia de magnitudes despreciables de inmigración y emigración, implica una distribución por edades cercana a la fija, de la forma⁸

$$c(a) = b e^{-ra} p(a)$$

en que $c(a)$ es el coeficiente de la distribución por edades, tal que la proporción de personas entre las edades a y $a+da$ está dada por $c(a)da$. El símbolo $p(a)$ denota la probabilidad, en el nacimiento, de alcanzar la edad a , y b es la tasa de natalidad por persona. La fórmula (6) rige separadamente para cada sexo, y es conveniente en lo que sigue limitar nuestra atención a las mujeres.

El valor de la tasa proporcional de crecimiento r está determinado por la relación⁹

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-ra} \mu(a) m'(a) p(a) da \quad (7)$$

en que $\mu(a)$ es la proporción de mujeres casadas de edad a , y $m'(a)$ es la tasa específica de fecundidad de las mujeres casadas,¹⁰ esto

⁷Karl Pearson, en *Chances of Death*, 1897, vol. I, pág. 69, estima que la esterilidad involuntaria se presenta en alrededor del 6 al 8 por ciento de todos los matrimonios. Se supone aquí que en 1790 había un escaso o nulo control de natalidad en el sentido moderno o condiciones similares.

⁸Sharpe y Lotka, *Phil. Mag.*, abril 1911, p.435; Lotka, *Elements of Physical Biology*, pp. 110, 113, 116, 1925.

⁹A. J. Lotka, *loc. cit.*

¹⁰El símbolo $m'(a)$ se usa aquí para simbolizar la frecuencia de maternidad referida a la población femenina casada (de edad a), distinguiéndolo de $m(a)$, la frecuencia de maternidad referida a la población femenina total (de edad a); el símbolo y el concepto últimos sólo se emplearon en la primera publicación citada, y esta nota se adjunta aquí para prevenir equivocaciones.

es, el número de hijos (hijas, desde el momento que restringimos nuestras consideraciones a las mujeres) nacidos al año por mujer casada de edad a .

APLICACION NUMERICA

Ciertamente, no tenemos tabla de vida que nos entregue valores de $p(a)$ para el período 1790-1800. La aproximación más confiable a una tabla como esa la encontramos en la tabla de vida inglesa para el período 1838-1854, la que será empleada en los cálculos siguientes. También es desconocido para el período considerado el factor $\mu(a)$. Sin embargo, esta cantidad no está sujeta a variaciones muy amplias. Los cálculos se llevarán a cabo sobre dos bases distintas: 1) utilizando valores de $\mu(a)$ como los observados en 1920, y presentados en el cuadro 1, columna 3; 2) empleando valores *aumentados* obtenidos elevando arbitrariamente las cifras de 1920, como se indica en el cuadro 1, columna 5, para tener en cuenta la mayor frecuencia de los matrimonios en el período inicial considerado. Se descubrirá que esta modificación no afecta grandemente el resultado de los cálculos.

El método empleado para obtener la tasa de nupcialidad "modificada" o "aumentada" puede deducirse del cuadro 2. Así, por ejemplo, la frecuencia de maternidad por 100 000 mujeres en cualquier estado civil, en el grupo de edades 15-19, estimada para 1790, se obtiene dividiendo la cifra correspondiente para 1920, es decir, 2 202; por el porcentaje de casadas en 1920, o sea, 11,5, y multiplicando por el porcentaje de casadas en 1790, es decir, 18,0; entonces, $2\ 202 / 11,5 \times 18,0 = 3\ 447$.

Sobre esta base, investigaremos el carácter de la tasa específica de fecundidad $m'(a)$, que debe haber prevalecido para producir el valor observado $r = 0,0287$ en 1790; igualmente, determinaremos el límite superior de la tasa específica de fecundidad correspondiente a la tasa *irrestringida* o *inicial* de crecimiento de 3,134 por ciento, característica de nuestra población, según la fórmula de Pearl y Reed.

El problema está indeterminado a menos que adoptemos alguna convención respecto a la naturaleza del cambio en la forma de la función $m'(a)$. La convención más simple consiste en que el contorno de la curva o polígono de fecundidad permanezca geoméricamente similar¹¹ siendo

¹¹Además de su simplicidad, este supuesto encuentra apoyo también en lo que se conoce como "Ley de Talt", referente a la declinación lineal de la fecundidad con la edad. Véase Yule G.U., *Journal Royal Statistical Society*, 1906, pág. 115.

CUADRO 2

PATRON DE FECUNDIDAD POR EDADES (HIJAS SOLAMENTE) PARA "MUJERES BLANCAS" Y "MUJERES BLANCAS CASADAS", 1920 (OBSERVADAS) Y 1790 (CALCULADAS)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (2)/(3)	(6) = (5) x (4)/100
Edad	Tasas específicas de fecundidad por 100 000 mujeres en cualquier estado civil 1920	Por ciento, efectivamente ^a casadas 1920	Por ciento de efectivamente ^a casadas "aumentado" ^b para 1790	Tasas específicas de fecundidad por 100 000 mujeres casadas, 1920	Tasas específicas de fecundidad por 100 000 mujeres en cualquier estado civil, calculada, 1790
	$m(a)$	$\mu_1(a)$	$\mu_2(a)$	$m'(a)$	$\mu_2(a)m'(a)/100$
10-14	9	?	?	?	(9)
15-19	2 202	11,50	18,00	19 148	3 447
20-24	7 310	50,80	61,00	14 390	8 778
25-29	7 480	73,10	80,00	10 233	8 186
30-34	5 780	80,30	86,00	7 198	6 190
35-39	3 898	81,40	87,00	4 789	4 166
40-44	1 552	80,00	84,00	1 940	1 630
45-49	172	76,80	80,00	224	179
50-54	5	72,00	75,00	69	5

^a Excluye viudas y divorciadas.

^b Estimado como en el gráfico 1, con una estimación para las viudas y divorciadas basada en la diferencia entre el cuadro 1, columna (3), el complemento del cuadro 2, columna (3), diferencia que corresponde a las "viudas y divorciadas" observadas en 1920.

$m'(a)$ transformada simplemente en $km'(a)$; en que k es un factor independiente de a . En este caso, (7) se convierte en

$$1 = k \int_0^{\infty} e^{-ra} \mu(a) m'(a) p(a) da \quad (8)$$

una ecuación que nos permite calcular k para cada valor de r cuando están dados $\mu(a)$, $m'(a)$ y $p(a)$. De esta forma, se encuentra que, para $r = 0,0287$, lo que representa el estado de cosas en los Estados Unidos en 1790, $k = 2,1$, sobre la base de las razones de nupcialidad aumentadas de 1790. Esto significa que las tasas específicas de fecundidad en la fecha mencionada deben haber sido bastante más de dos veces superiores a las del presente. El correspondiente factor k , para la tasa inicial de crecimiento de 3,134 por ciento, es 2,30. Si, en lugar de las razones de nupcialidad aumentadas, utilizamos directamente las razones de 1920, encontramos $k = 2,5$ y 2,7, respectivamente, para $r = 0,0287$ como en 1790 y para la inicial $r = 0,03134$. (Véanse el cuadro 3 y los gráficos 1, 3 y 4.) Al examinar el cuadro y los gráficos debe notarse que el cuadro da únicamente hijas en la columna de "tasas específicas de fecundidad", mientras los gráficos están dibujados para "hijos e hijas", esto es, 2,06 veces las cifras sólo para hijas.

Los mismos hechos encuentran una expresión

algo más reveladora si calculamos el número de hijos nacidos por mujer casada, correspondiente a las condiciones indicadas. Sin embargo, es deseable, antes que nada, efectuar una transformación. La ecuación (8) no es conveniente cuando se va a calcular una serie de valores de k . Entonces, es mejor escribirla en la forma¹²

$$kR_0 = e^{\gamma(\alpha + \frac{1}{2}\beta r + \frac{1}{3}\gamma r^2 + \frac{1}{4}\delta r^3 + \dots)} \quad (9)$$

$$R_n = \int_0^{\infty} a^n \mu(a) m'(a) p(a) da \quad (10)$$

y

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{R_1}{R_0} \\ \beta &= \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} \\ \gamma &= \alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha \frac{R_2}{R_0} + \frac{1}{2} \frac{R_3}{R_0} \\ \delta &= \alpha^4 - 2\alpha^2 \frac{R_2}{R_0} + \frac{2}{3}\alpha \frac{R_3}{R_0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_0} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{R_4}{R_0} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

¹² Esencialmente como se presentó en *Journal of the American Statistical Association*, vol. 20, 1925, pág. 332.

CUADRO 3

FACTOR k POR EL CUAL HABRIA QUE MULTIPLICAR LA FECUNDIDAD DE 1920 PARA TENER DISTINTAS TASAS DE CRECIMIENTO r , EN DIFERENTES CONDICIONES DETERMINADAS. CONSTANTES EMPLEADAS EN EL CALCULO

Base del cálculo			
Mortalidad como en	1920	1838-54 (Tabla de vida inglesa)	1838-54 (Tabla de vida inglesa)
Patrón de fecundidad por edades como en	1920	1920	1920
Razón de nupcialidad como en	1920	1920	1920 "modificada" para representar a 1790
r		k	
- 0,03000	0,357	0,475	0,426
- 0,02500	0,416	0,552	0,488
- 0,02000	0,482	0,640	0,560
- 0,01500	0,557	0,740	0,646
- 0,01000	0,644	0,855	0,746
- 0,00500	0,744	0,988	0,856
0,00000	0,856	1,137	0,985
+ 0,00500	0,985	1,308	1,129
0,01000	1,135	1,507	1,296
0,01500	1,305	1,727	1,483
0,02000	1,500	1,987	1,698
0,02500	1,721	2,274	1,942
0,02866	1,899	2,511	2,138
0,03000	1,970	2,605	2,215
0,03134	2,045	2,699	2,296
<hr/>			
R_0	1,168	0,880	1,015
R_1	33,230	24,880	28,110
R_2	998,790	743,360	825,380
R_3	31,581	23,363	25,599
R_4	1 045,342	768,839	834,122
α	28,450	28,290	27,690
β	- 45,710	- 44,770	- 46,280
γ	54,320	59,460	68,830
δ	141,030	160,440	171,130

Ahora, kR_0 es la razón de los nacimientos totales de hijas en dos generaciones sucesivas, o, en otras palabras, es el número de hijas nacidas, en promedio, por cada mujer nacida. Si M es la fracción de las mujeres que eventualmente se casan de entre todas las mujeres, kR_0/M es el número de hijas nacidas, en promedio, por mujer casada. Y, puesto que nacen 1,06 hijos varones por cada 1,00 hijas, el número de hijos nacidos por mujer casada es $2,06kR_0/M$. La fracción M se determina fácilmente, como en el cuadro 1, cuando se conocen para cada edad la proporción de mujeres solteras y la tasa de mortalidad.

Aplicando estos principios, se descubre que, en las condiciones representadas por las pobla-

ciones de los Estados Unidos en 1790 y con los supuestos indicados anteriormente, el número de hijos nacidos, en promedio, por mujer casada fértil¹³ era de 7,76, a base de la razón de nupcialidad aumentada. El número medio de hijos correspondiente a la tasa inicial de crecimiento es, sobre la misma base, 8,33. Entonces, este representa el límite superior de la fecundidad de las mujeres norteamericanas en el siglo XVIII. Es interesante comparar estas cifras con las dadas por Whetham¹⁴ como resultado de un

¹³En cada caso se tiene en cuenta el 7 por ciento de esterilidad en los matrimonios.

¹⁴Whetham W. C. D. y G. D.: *The Family and the Nation*, pág. 139, 1909; repetido en Newshome A.: *Vital Statistics*, pág. 105, 1923.

GRAFICO 1

VALORES DEL COEFICIENTE k (ORDENADAS), POR EL CUAL DEBEN MULTIPLICARSE LAS TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD OBSERVADAS DE 1920 PARA REPRODUCIR LOS VALORES DADOS DE LA TASA "FINAL" DE CRECIMIENTO r (ABSCISAS)

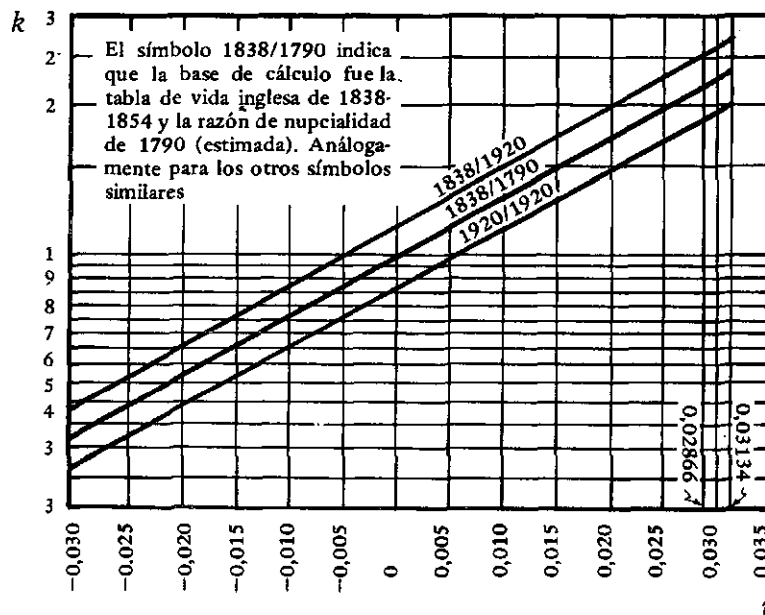


GRAFICO 2

RELACION ENTRE LA TASA DE NATALIDAD POR PERSONA, b , Y EL NUMERO DE HIJOS POR MADRE, N , BAJO DISTINTAS CONDICIONES

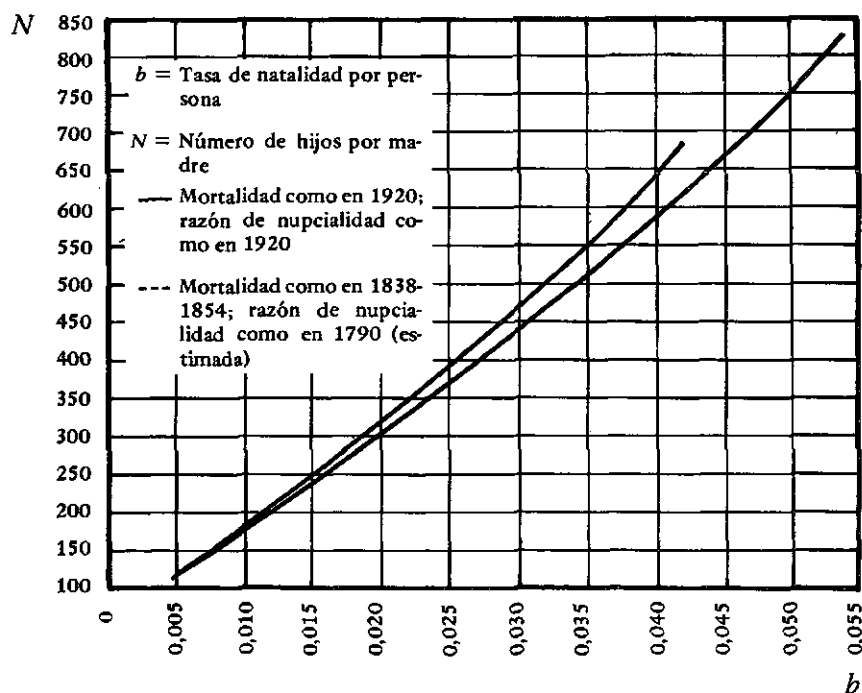


GRAFICO 3

HISTOGRAMA DE FRECUENCIA DE MATERNIDAD (CONTANDO HIJOS E HIJAS)
POR MIL CASADAS BLANCAS

a) Según se observó en 1920, es decir, con $k = 1$. b) Aumentada para dar la tasa *incipiente de crecimiento* $r = 3,134$ por ciento; $k = 2,045$. c) Reducida para dar $r = 0$ (población estacionaria); $k = 0,856$.

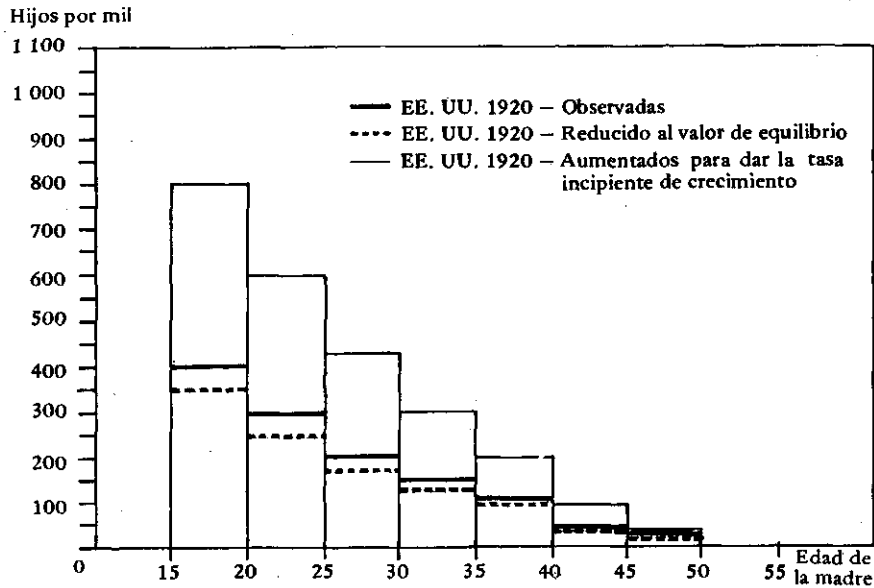
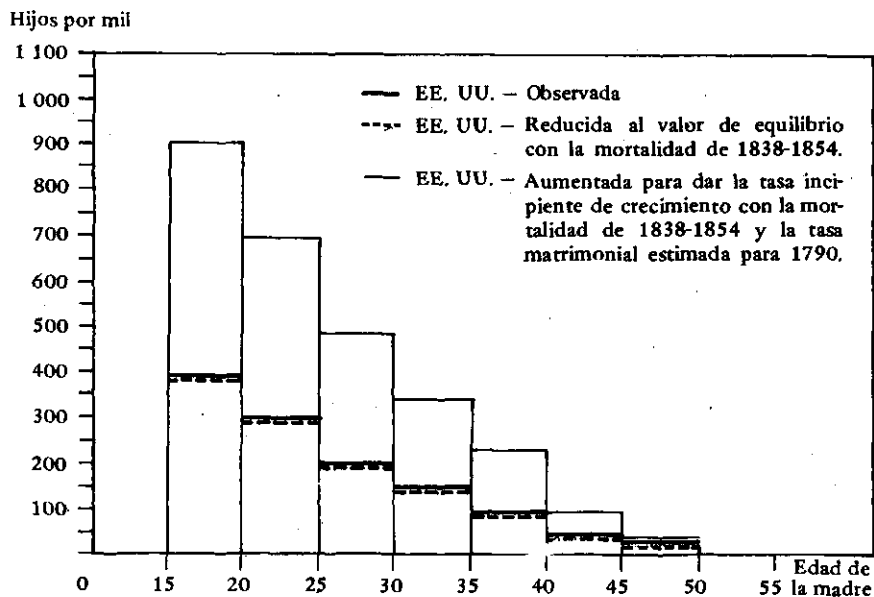


GRAFICO 4

HISTOGRAMA DE FRECUENCIA DE MATERNIDAD (HIJOS E HIJAS)
POR MIL CASADAS BLANCAS

a) Igual que el gráfico 3. b) Con la mortalidad según la tabla de mortalidad inglesa 1838-1854 y la frecuencia de maternidad aumentada, $k = 2,296$, para dar la tasa *incipiente de crecimiento* $r = 3,134$ por ciento. c) Igual que b), pero con la frecuencia de maternidad reducida, $k = 0,985$, para dar la población estacionaria.



CUADRO 4

RELACION ENTRE LA TASA DE CRECIMIENTO r , POR PERSONA DE LA POBLACION Y EL NUMERO DE HIJOS POR MUJER, POR MUJER CASADA, Y TAMBIEN POR MADRE, BAJO DISTINTAS CONDICIONES

Base de cálculo									
Mortalidad como en	1920			1838-54 (Tabla de vida inglesa)			1838-54 (Tabla de vida inglesa)		
Patrón de fecundidad por edades como en	1920			1920			1920		
Razón de nupcialidad como en	1920			1920			1920 "modificada" para representar a 1790		
r	Número de hijos por mujer								
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	Todas las mujeres	Mujeres casadas	Madres	Todas las mujeres	Mujeres casadas	Madres	Todas las mujeres	Mujeres casadas	Madres
- 0,03000	0,86	1,10	1,18	0,86	1,43	1,54	0,88	1,42	1,52
- 0,02500	1,00	1,28	1,38	1,00	1,66	1,78	1,02	1,64	1,76
- 0,02000	1,16	1,48	1,59	1,16	1,93	2,08	1,17	1,89	2,03
- 0,01500	1,34	1,71	1,84	1,34	2,23	2,40	1,35	2,18	2,35
- 0,01000	1,55	1,98	2,13	1,55	2,58	2,77	1,56	2,51	2,70
- 0,00500	1,79	2,29	2,46	1,79	2,98	3,20	1,79	2,89	3,11
0,00000	2,06	2,64	2,84	2,06	3,43	3,69	2,06	3,32	3,57
+ 0,00500	2,37	3,03	3,26	2,37	3,94	4,24	2,36	3,81	4,10
0,01000	2,73	3,49	3,75	2,73	4,54	4,88	2,71	4,37	4,70
0,01500	3,14	4,02	4,32	3,13	5,21	5,60	3,10	5,01	5,39
0,02000	3,61	4,62	4,97	3,60	5,99	6,44	3,55	5,73	6,16
0,02500	4,14	5,30	5,70	4,12	6,85	7,37	4,06	6,55	7,04
0,02866	4,57	5,85	6,29	4,55	7,57	8,14	4,47	7,22	7,76
0,03000	4,74	6,06	6,52	4,72	7,85	8,44	4,63	7,48	8,04
0,03134	4,92	6,30	6,77	4,89	8,13	8,74	4,80	7,74	8,33

estudio de 100 familias de la nobleza británica de 1831-1840, a saber, 7,1 hijos.¹⁵

Los resultados citados anteriormente, junto a una serie de otras cantidades conexas, aparecen reunidos en el cuadro 4.

DURACION MEDIA DE UNA GENERACION

La expresión

$$\alpha + \frac{1}{2}\beta r + \frac{1}{3}\gamma r^2 + \dots = T \quad (12)$$

que aparece en el exponente de (9), mide la duración media de una generación, T , de madre a hija, como se ha demostrado en otra ocasión.¹⁶

¹⁵ Debiera compararse también con las cifras obtenidas por el método abreviado presentado al comienzo de este artículo. Estas eran, 8,0 hijos para 1790, 8,6 hijos por madre para la tasa inicial de crecimiento, frente a 7,76 y 8,33 por el método más riguroso.

¹⁶ *Journal of the American Statistical Association*, vol. 20, 1925, pág. 384.

Por consiguiente, en primera aproximación

$$T = \alpha = \frac{R_1}{R_0} \quad (13)$$

Ahora, las integrales R_1 , R_0 contienen ambas a $p(a)$ como un factor del integrando. Como consecuencia de esto, la influencia de la tabla de vida específica empleada al formar el cociente R_1/R_0 tiende en gran medida a anularse, y, como se indicó antes, la duración media de una generación, T , es por consecuencia casi independiente de la tabla de vida correspondiente. También es casi independiente de r , porque el coeficiente α es numéricamente bastante mayor que $\frac{1}{2}\beta r$, para valores de r como los considerados. En consecuencia, es por esto que las cifras en las columnas (2) y (5) del cuadro 4 son casi idénticas, aunque están basadas en tablas de vida bastante diferentes. En términos concretos, esto significa que el número de hijos por mujer requerido

para producir una tasa dada de crecimiento por persona, r , es esencialmente independiente del patrón de mortalidad por edades (tabla de vida). El efecto de una disminución en la mortalidad se refleja en el número de hijos por mujer casada o por madre, porque, con una tabla de vida favorable, una proporción mayor de mujeres sobrevive hasta casarse y, por tanto, decrece la carga correspondiente a cada mujer casada. (Véanse las columnas (3), (4), (6), (7), (9) y (10) del cuadro 4).

TASA DE NATALIDAD

La tasa de natalidad correspondiente a la tasa inicial de crecimiento de 3,134 por ciento, puede calcularse muy adecuadamente en el supuesto de que la distribución por edades sea aquella correspondiente a la tasa geométrica de crecimiento, en vista de que el crecimiento en las etapas iniciales sigue muy de cerca esa ley. El mismo supuesto es también enteramente razonable para el valor $r = 0,0287$ correspondiente a 1790. La tasa de mortalidad resulta entonces de inmediato a partir de $b - d = r$. Los valores así obtenidos, sobre la base de la tabla de vida inglesa de 1838-1854, fueron

r	b	d
0,03134	0,0537	0,0224
0,02866	0,0508	0,0221

Para otros valores de r , los valores de b y d , calculados en el supuesto de crecimiento geométrico, representan normas artificiales más bien que cifras comparables con las efectivamente observadas, especialmente en los Estados Unidos, donde la influencia de la inmigración ha sido muy marcada. No obstante, como cuestión de interés aritmético, en el cuadro 5 y en los gráficos 2 y 5, se presentan los valores de la tasa de natalidad b y del número de hijos N por madre correspondientes a distintos valores de r .

INTERVALO ENTRE NACIMIENTOS

El recíproco de la tasa de fecundidad a cualquier edad da evidentemente el intervalo promedio entre nacimientos. Esta cifra es de especial interés en las edades de máxima fecundidad, 15 a 19 años, puesto que aquí el límite extremo lo impone una exigencia biológica obvia. Y, de hecho, el intervalo obtenido con la tasa inicial de crecimiento, es decir $13\frac{1}{4}$ meses, está claramente vinculado con el

CUADRO 5

RELACION ENTRE LA TASA DE NATALIDAD POR PERSONA, b , Y EL NUMERO DE HIJOS, N , POR MADRE^a, BAJO DISTINTAS CONDICIONES INDICADAS DE MORTALIDAD Y DE RAZÓN DE NUPCIALIDAD; EN CADA CASO CALCULADOS SOBRE LA BASE DE UNA DISTRIBUCION POR EDADES FIJA CORRESPONDIENTE A ESAS CONDICIONES INDICADAS Y A UN PATRON DE FECUNDIDAD IGUAL A k VECES EL OBSERVADO EN 1920

Para valores de k correspondientes a los valores de r en la columna (1); véase el cuadro 3

Base del cálculo						
Mortalidad como en	1920		1838-54		1838-54	
Razon de nupcialidad como en	1920		1920		1920 aumentada para 1790	
r	b	N	b	N	b	N
- 0,03000	0,0048	1,18	0,0072	1,54	0,0072	1,52
- 0,02500	0,0061	1,38	0,0091	1,78	0,0091	1,76
- 0,02000	0,0078	1,59	0,0013	2,08	0,0113	2,03
- 0,01500	0,0097	1,84	0,0139	2,40	0,0139	2,35
- 0,01000	0,0119	2,13	0,0169	2,77	0,0169	2,70
- 0,00500	0,0145	2,46	0,0202	3,20	0,0202	3,11
0,00000	0,0174	2,84	0,0239	3,69	0,0239	3,57
+ 0,00500 ^a	0,0206	3,26	0,0279	4,24	0,0279	4,10
0,01000	0,0241	3,75	0,0322	4,88	0,0322	4,70
0,01500	0,0279	4,32	0,0369	5,60	0,0369	5,39
0,02000	0,0320	4,97	0,0418	6,44	0,0418	6,16
0,02500	0,0362	5,70	0,0469	7,37	0,0469	7,04
0,02866	0,0394	6,29	0,0508	8,14	0,0508	7,76
0,03000	0,0406	6,52	0,0522	8,44	0,0522	8,04
0,03134	0,0418	6,77	0,0537	8,74	0,0537	8,33

^a Considerando un 7 por ciento de esterilidad en los matrimonios

CUADRO 6

INTERVALOS PROMEDIO ENTRE NACIMIENTOS A DISTINTAS EDADES DE LAS MADRES, DE ACUERDO A DISTINTOS PATRONES INDICADOS DE FECUNDIDAD COMBINADOS CON PATRONES INDICADOS DE MORTALIDAD Y LAS CORRESPONDIENTES TASAS DE CRECIMIENTO, r , DE LA POBLACION

Base del cálculo														
Mortalidad como en		1920		1920		1838-54			1838-54					
Razón de nupcialidad como en		1920		1920		1920			1920 aumentada para 1790					
Edad	Tasas específicas de fecundidad por 100 000 mujeres casadas por año. Observadas, 1920		$r = 0,00547^a$		$r = 0,00547^a$		$r = 0$		$r = 0,02866$		$r = 0,03134$		$r = 0$	
	Hijas	Hijos	Años		Años		Años		Meses		Meses		Meses	
10-14														
15-19	19 148	39 445	2,54	30,50	35,62	16,06	14,92	26,83	12,15	11,30	30,96	14,27	13,28	
20-24	14 390	29 643	3,37	40,40	47,19	21,27	19,76	35,53	16,09	14,96	41,00	18,90	17,60	
25-29	10 233	21 080	4,74	56,90	66,46	29,96	27,83	50,05	22,66	21,08	57,75	26,61	24,78	
30-34	7 198	14 828	6,74	68,90	80,48	36,28	33,69	60,60	27,44	25,53	69,93	32,23	30,01	
35-39	4 789	9 865	10,14	121,70	142,15	64,07	59,52	107,04	48,46	45,09	123,52	56,92	53,01	
Años														
40-44	1 940	3 996	25,03	29,24	13,18	12,24	22,02	9,97	9,28	25,40	11,71	10,90	
45-49	224	461	216,90	253,40	114,20	106,10	190,80	86,40	80,40	220,10	101,50	94,50	
50-54	5,9	14	7 143,00	8 368,00	3 761,00	3 493,00	6 283,00	2 844,00	2 647,00	7 249,00	3 341,00	3 111,00	

^a Tasa final de crecimiento natural, correspondiente al patrón de mortalidad y de fecundidad por edades de 1920. Véase Dublin y Lotka: "On the True Rate of Natural Increase" en *Journal of the American Statistical Association*, setiembre, 1925, pág. 333.

Nota: A medida que aumenta la edad, el intervalo promedio entre nacimientos evidentemente pierde significado al ser aplicado a una madre en forma individual. Su significado aquí reside en mostrar la extrema rareza de la maternidad a esas edades.

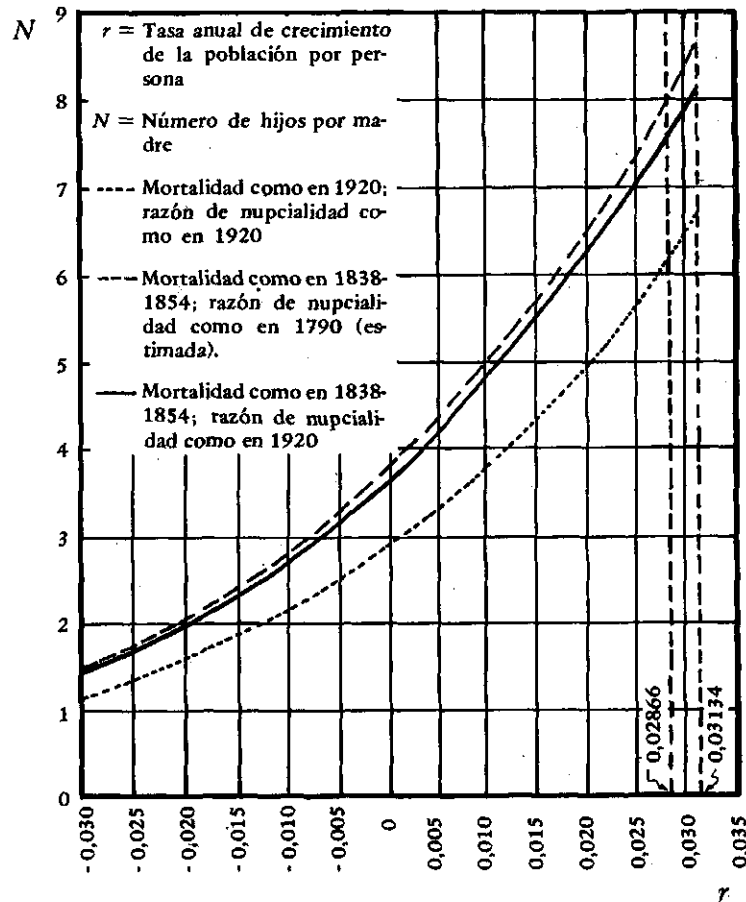
límite extremo de la frecuencia de embarazo.¹⁷ (Véase el cuadro 6).

Esto arroja una luz interesante sobre la base

biológica de la constante exponencial 0,03134 en la fórmula de Pearl-Reed para el crecimiento de la población norteamericana.

GRAFICO 5

RELACION ENTRE EL NUMERO DE HIJOS POR MADRE, N , Y LA TASA DE CRECIMIENTO ANUAL POR PERSONA, r , DE LA POBLACION, BAJO DIFERENTES CONDICIONES



SEGUNDO FACTOR LIMITANTE EN LA LEY DE PEARL-REED

El segundo factor limitante en la ley de Pearl-Reed, que encuentra su expresión en la constante N_{00} , puede ser concebido como de carácter principalmente económico. El límite de población que el país puede mantener depende evidentemente de las relaciones agrícolas y comerciales. Con todo, este factor tiene también su expresión biológica en el patrón de fecundidad que, en condiciones determinadas de morta-

lidad, procura el equilibrio de la población. El factor k_0 por el que deben multiplicarse las tasas específicas de fecundidad de 1920 para dar la fecundidad de equilibrio (en conjunto con el patrón de mortalidad de 1920) es 0,86. Así, el patrón de mortalidad de 1920 proporciona, en este sentido, un margen de seguridad de 14 por ciento en el lado positivo del equilibrio. Si en el curso del tiempo nuestras tasas de mortalidad mejoran aun, el margen de seguridad se incrementará en forma equivalente.

RESUMEN

La duración media de una generación no se ve muy afectada por cambios en la tabla de vida o en el patrón de fecundidad por edades.

¹⁷ Carr Saunders, *The Population Problem*, menciona 11 meses como el intervalo límite efectivo. Sin embargo, esto no representa un promedio. La cifra dada arriba, 13 1/4 meses, es el intervalo promedio en las condiciones enunciadas.

Su valor es de alrededor de 28 años. La tasa anual de crecimiento de la población norteamericana era de aproximadamente 3 por ciento anual alrededor de fines del siglo XVIII. De esto se desprende que la proporción de nacimientos totales en dos generaciones sucesivas era, en esa época, de 2,3 (resultantes a una tasa de interés compuesto de 3 por ciento aplicada en forma continuada por espacio de 28 años). Esto corresponde a una familia de 7,8 hijos por mujer casada, u 8,3 hijos por madre, calculada la última cifra en el supuesto de que el 7 por ciento de los matrimonios son naturalmente estériles.

La significación de estas cifras recibe un interés particular cuando se las considera a la luz de la ley de Pearl-Reed de crecimiento de la población. Se descubre entonces que la constante exponencial 0,03134, que aparece en la fórmula de Pearl-Reed, tiene la naturaleza de una constante biológica, característica de la población norteamericana. Representa la tasa *inicial* o *irrestricida* de crecimiento que corresponde a la expansión libre de un pequeño núcleo de población en un territorio amplio, antes de que se haga sentir la presión de las fronteras. La naturaleza biológica de este límite superior de la tasa de crecimiento aparece cuando la fecundidad de las mujeres, corres-

pondiente a esta tasa de crecimiento, se expresa en términos del intervalo promedio entre los nacimientos. Entonces se descubre que en el grupo de edades de 15 a 19 años, en que la fecundidad está en su máximo, el intervalo promedio entre los nacimientos correspondientes a la tasa límite de crecimiento es de $13\frac{1}{4}$ meses. Evidentemente, chocamos aquí con el factor limitante fundamental del crecimiento de la población humana.

Este límite superior de la capacidad de procreación irrestricta aparece excediendo a la fecundidad de 1920 en una relación de aproximadamente dos a uno. El límite inferior de la fecundidad correspondiente a un estado final de población estacionaria bajo las condiciones presentes de mortalidad es 0,86 del actual (1920); es decir, las condiciones presentes de fecundidad conceden un margen de 14 por ciento sobre la situación estacionaria. Esta última afirmación está basada en la tabla de vida de 1920. La baja de las tasas de mortalidad hará aumentar en algún grado el margen indicado.

Incidentalmente se presenta una relación entre el número de hijos por madre, la tasa de natalidad, y la tasa de crecimiento de la población, correspondientes a un patrón dado de mortalidad y de fecundidad por edades.

V. LA ORFANDAD EN RELACION CON LOS FACTORES DEMOGRAFICOS¹

Un estudio de análisis de población

INTRODUCCION

Desde el punto de vista del individuo, la orfandad es un asunto de profundas consecuencias personales. Pero también hay un aspecto nacional más amplio en los problemas que surgen de la muerte prematura de los padres. Especialmente cuando el jefe de familia desaparece por muerte, es necesario hacer algunos ajustes económicos, para lo cual se han desarrollado ciertas instituciones clásicas: seguros de vida, pensiones de viudez, compensación por accidentes industriales, asilos de huérfanos, y la "ubicación" organizada de huérfanos en familias.

A pesar de los adelantos que se han logrado en lo que respecta a la longevidad en todas las comunidades civilizadas modernas, el número de huérfanos en la población aún es desgraciadamente grande, y la tarea de proveer lo adecuado para ellos es hoy, y presumiblemente seguirá siéndolo siempre, uno de los mayores problemas nacionales. Frente a esto está el hecho singular de que en los Estados Unidos tenemos una muy reducida información estadística directa concerniente a la magnitud y características de nuestra población huérfana, esto es, su composición por sexo y edad, y en cuanto a pérdida del padre, la madre o ambos.

La ausencia de información directa sobre estos hechos es un desafío al ingenio del estadístico demógrafo. Debemos sacar el mejor

partido de la información disponible. Estando excluido en este caso el ataque frontal, ¿qué podemos lograr por métodos indirectos?

Estos son algunos de los principales resultados que aparecerán como alcanzables mediante tales métodos: En el año del último censo para el que la información es plenamente utilizable, es decir, 1920,² con una población blanca total de noventa y cinco millones de personas, había alrededor de cuatro millones de huérfanos de ambos sexos menores de diecisiete años. De éstos, poco más de dos millones habían perdido únicamente a su padre, más de un millón y medio habían perdido sólo a su madre, y más de trescientos cincuenta mil habían perdido a ambos. ¿Cuál ha sido la consecuencia, sobre la orfandad nacional, de la disminución de la mortalidad en las décadas recientes? La respuesta puede darse en los términos siguientes: si el patrón de mortalidad por edades de 1901 siguiera vigente en 1920, el número total de huérfanos habría sido superior a cuatro millones y medio, y de estos, cerca de dos millones y medio habrían perdido sólo a su padre; poco menos de dos millones habrían perdido únicamente a su madre, y cerca de medio millón habrían quedado huérfanos de ambos padres. Entonces, se puede decir que el mejoramiento de la mortalidad ha salvado de la orfandad parcial o completa a alrededor de medio millón de niños.

La palabra huérfano se emplea comúnmente

¹Basado en un documento leído ante la sección K (Ciencias Económicas y Sociales) de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, en la Reunión Anual en Nueva York, 1928. Un resumen muy reducido de este documento apareció en *Science*, 1^o de febrero de 1929, vol. 69, pág. 125.

²En la época en que se inició este estudio, el censo de 1930 estaba todavía en el futuro. Pasará todavía algún tiempo antes que la información primaria del censo de 1930, y especialmente la información elaborada a partir de éste, sea plenamente utilizable.

CUADRO 1

PORCENTAJE DE HUÉRFANOS EN EDADES ESPECÍFICAS, CALCULADO PARA DIFERENTES CONDICIONES
DE MORTALIDAD Y FECUNDIDAD

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Condición: Edad	Estados Unidos – blancos solamente									Inglaterra y Gales	
	Huérfanos maternos ^a					Huérfanos paternos ^a		Huérfanos absolutos ^a		Huérfanos maternos ^a	
Condición: Mortalidad como en Fecundidad como en Tasa intrínseca ^b	1920	1920	1920	1920	1901 1920	1920	1920	1920	1920	1871-80 Véase K	1871-80 Véase L
Observaciones: (véase abajo)	A, D	B, C, D	B, C, E	B, F	C, E, G	A	B, C	B, C, E, H	B, C, E, I	E, J, K	E, J, L
0	0,00	0,00	0,49	0,00	0,34	0,52	0,52	0,00	0,00	0,35	0,35
0-1	0,34	0,32	0,77	0,32	0,68	0,86	0,87	0,01	0,07	0,73	0,76
1-2	1,01	0,95	1,34	0,94	1,37	1,57	1,59	0,02	0,12	1,50	1,58
2-3	1,69	1,60	1,96	1,59	2,10	2,28	2,32	0,05	0,16	2,31	2,44
3-4	2,37	2,25	2,59	2,24	2,86	2,99	3,07	0,08	0,22	3,17	3,33
4-5	3,05	2,91	3,26	2,90	3,63	3,72	3,84	0,13	0,29	4,05	4,25
5-6	3,73	3,58	3,93	3,58	4,43	4,46	4,64	0,18	0,36	4,95	5,21
6-7	4,40	4,27	4,61	4,25	5,23	5,21	5,45	0,25	0,48	5,88	6,18
7-8	5,07	4,96	5,30	4,94	6,05	5,97	6,29	0,33	0,61	6,83	7,16
8-9	5,73	5,65	5,99	5,63	6,88	6,75	7,16	0,43	0,79	7,79	8,17
9-10	6,39	6,35	6,71	6,33	7,74	7,54	8,04	0,54	1,00	8,76	9,20
10-11	7,06	7,08	7,43	7,04	8,60	8,35	8,96	0,67	1,23	9,76	10,25
11-12	7,72	7,81	8,15	7,78	9,48	9,18	9,91	0,81	1,45	10,79	11,31
12-13	8,39	8,54	8,89	8,52	10,38	10,03	10,88	0,97	1,73	11,83	12,40
13-14	9,07	9,29	9,64	9,27	11,28	10,90	11,89	1,15	2,02	12,90	13,53
14-15	9,76	10,06	10,40	10,03	12,23	11,80	12,96	1,35	2,36	13,99	14,67
15-16	10,46	10,86	11,21	10,81	13,19	12,74	14,06	1,58	2,80	15,10	15,83
16-17	11,19	11,68	12,03	11,63	14,18	13,71	15,19	1,83	3,24	16,23	17,02

CUADRO 1 (Continuación)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Condición; Edad	Estados Unidos - blancos solamente									Inglaterra y Gales	
	Huérfanos maternos ^a				Huérfanos paternos ^a		Huérfanos absolutos ^a		Huérfanos paternos ^a		
Condición:	1920	1920	1920	1920	1901	1920	1920	1920	1920	1871-80	1871-80
Mortalidad como en											
Fecundidad como en				Véase F	1920					Véase K	Véase L
Tasa intrínseca ^b		0,0047	0,0047	0,0100	0,0012		0,0047	0,0047	0,0047	0,0137	0,0137
Observaciones: (véase abajo)		B, C, D	B, C, E	B, F	C, E, G	A	B, C	B, C, E, H	B, C, E, I	E, J, K	E, J, L
20-21	14,39	15,26	15,61	15,16	18,46	18,10	20,22	3,16		21,09	22,09
25-26	19,31	20,69	21,04	20,51	24,73	25,25	27,81	5,85		27,96	29,36
30-31	25,84	27,66	27,66	27,38	32,15	34,33	37,02	10,24		35,77	37,77
35-36	34,25	36,48	36,48	36,09	41,41	45,90	47,82	17,44		45,24	47,97
40-41	45,40	47,25	47,25	46,74	52,18	59,85	59,67	28,19		56,03	59,46
45-46	59,04	59,47	59,47	58,88	63,90	74,36	71,58	42,57		67,46	71,33
50-51	73,58	71,91	71,91	71,38	75,48	87,17	82,33	59,20		78,41	82,20
55-56	86,54	83,01	83,01	82,60	85,53	95,37	90,67	75,27		87,63	90,66
60-61	94,99	91,43	91,43	91,17	92,91	98,92	96,04	87,81		94,13	96,09
65-66	98,82	96,59	96,59	96,46	97,27	99,85	98,71	95,34		97,84	98,74
70-71	99,85	99,00	99,00	98,96	99,24	99,99	99,71	98,71		99,42	99,71

Observaciones:

- A. Huérfanos maternos calculados mediante la fórmula reducida (1). Huérfanos paternos calculados mediante la fórmula reducida (2). Véase págs. 56 y 57.
Todas las cifras de las otras columnas han sido calculadas mediante las fórmulas más rigurosas (20) y (97) del apéndice.
- B. *U. S. Abridged Life Tables 1919-20*. E. Foudray, Conjunto de 28 Estados, interpolados.
- C. Patrón de fecundidad legítima por edades basado en datos para el *Birth Registration Area* de 1920, excepto Maine, para el que no hay información disponible de nacimientos según edad de los padres.
- D. Orfandad no corregida por muertes puerperales entre las madres.
- E. Orfandad corregida por muertes puerperales entre las madres.
- F. Patrón de fecundidad por edades como en "c", incrementado por un factor constante 1,1613, para igualar a 0,01 por persona al año la tasa intrínseca de crecimiento natural.
- G. *Life Table for the Original Death Registration States of 1901*.
- H. Producto de las columnas (4) y (8), esto es, huérfanos absolutos, suponiendo que la muerte del padre y la madre son sucesos independientes.

I. Columna (9) corregida por los factores del cuadro 9, columna (11) aceptando la interdependencia de las muertes del padre y la madre.

J. *English Life Tables*, 45th Annual Report of Registrar-General, pág. vii.

K. Patrón de fecundidad por edades como en "C", incrementado por un factor constante 1,5970, para igualar la tasa intrínseca de crecimiento natural a 0,0137 por persona al año, que fue el exceso observado de la tasa de natalidad sobre la de la mortalidad.

L. Patrón de fecundidad por edades en Inglaterra y Gales, 1921 (véase cuadro 15, columna 8), incrementado por un factor constante, 1,8327, para igualar la tasa intrínseca de crecimiento natural a 0,0137 por persona al año.

^a Huérfanos maternos = personas de cualquier edad cuya madre ha muerto, incluyendo huérfanos absolutos. Los huérfanos paternos están definidos de manera similar. Huérfanos absolutos = personas de cualquier edad cuyos dos padres han muerto.

^b Para la definición y el método de cálculo de la tasa intrínseca de crecimiento natural, véase pág. 81.

en un sentido restringido, para designar a una persona de pocos años que ha perdido uno o ambos padres. Pero el método de análisis que se va a exponer aquí es muy general, y nos va a entregar información relativa a los "huérfanos" de cualquier edad, empleándose ahora la palabra huérfano en un sentido perfectamente general para designar a una persona que ha perdido a uno o ambos padres. A primera vista, información de esta especie parece ser de interés a lo sumo como una curiosidad estadística. Pero al pensarlo de nuevo se verá que la información conseguida respecto a lo que podríamos llamar "huérfanos adultos", tiene una estrecha relación con el problema eminentemente práctico de la dependencia de personas de edad avanzada. Entonces, la investigación en esta dirección no es sólo de interés académico.

Otra consecuencia de la investigación es el examen de la proporción de niños huérfanos desde el nacimiento, por muerte de su madre en el parto, o por muerte de su padre, en este último caso dejando huérfanos póstumos. Esta parte de la investigación surge muy naturalmente como un paso necesario en el tratamiento matemático y actuarial subyacente del problema general de la orfandad.

Entre otros tópicos relacionados, se pueden individualizar aquí los siguientes para una breve mención: la influencia de los cambios en la fecundidad sobre la orfandad; el tamaño de las familias como factor en el problema de la orfandad; la adición anual de nuevos huérfanos; la orfandad en Inglaterra y Gales, con especial énfasis en la confirmación, mediante información empírica, de los resultados calculados teóricamente. Finalmente, se señala la relación entre el estudio aquí presentado y la disciplina general del Análisis de Población.

En el apéndice se dan mayores detalles técnicos del análisis matemático.

Estas pocas indicaciones deben servir a modo de introducción. Otros muchos resultados irán apareciendo a medida que avancemos. Sin embargo, debe mencionarse en esta introducción un punto especialmente importante. Mientras que nosotros, en los Estados Unidos, sufrimos una carencia total de información estadística directa sobre la orfandad nacional, existe una situación más favorable en Inglaterra y Gales. La particular importancia de este hecho, para los propósitos del presente estudio, reside en que con esto estamos capacitados para confrontar los resultados del método indirecto con la observación directa. Como se verá, la comparación no sólo da mayor base a nuestra confianza en la validez general del método indirecto,

sino que al mismo tiempo pone de manifiesto muchos hechos por sí mismos de gran interés.

LA ORFANDAD EN RELACION CON LA MORTALIDAD DE LOS PADRES

Razonamiento. La proporción de huérfanos entre los niños (o, más en general "personas") de edad dada a , depende evidentemente de la mortalidad entre sus padres.³ Si ν es la edad promedio del padre al nacer el hijo, cuando éste tenga a años, el padre, si vive, tendrá $a + \nu$ años. La proporción de padres que sobrevivirán desde la edad ν hasta la edad $a + \nu$ es, según la notación actuarial convencional, $(l_a + \nu) / l_\nu$. Esto da, con gran aproximación, la proporción de niños entre los de edad a cuyos padres viven. Evidentemente, el complemento

$$\Theta = 1 - \frac{l_a + \nu}{l_\nu} \quad (1)$$

da la proporción de aquellos cuyos padres no viven. La fórmula se aplica a cada sexo separadamente, pero la edad promedio ν es diferente para los padres y las madres. Se puede demostrar⁴ que ν se acerca mucho a la edad media de la curva de fecundidad neta.⁵ La naturaleza de las cosas hace que esta edad media de la curva de fecundidad sea una cifra relativamente constante, incluso cuando la fecundidad experimenta cambios considerables. La razón estriba en que éstos son más bien cambios de amplitud que cambios en la posición de la curva de fecundidad a lo largo del eje de edad. Para los hombres blancos

³La proporción de huérfanos entre los niños de edad dada a , depende también, estrictamente, de la distribución por edades de la población, pero en condiciones corrientes la influencia de esto es despreciable. La proporción de huérfanos de edad a es independiente de la mortalidad entre los niños, siempre que no haya diferencia entre la mortalidad de los huérfanos y la de aquellos niños cuyos padres viven. Debería destacarse, sin embargo, que sólo la proporción de huérfanos entre los niños de una edad dada, y no su número total, es independiente de la mortalidad entre los niños. Se encontrará una discusión detallada en el apéndice, que toma debida cuenta de todos estos factores.

⁴Véase el apéndice.

⁵Hablando estrictamente, la edad media de la curva de fecundidad es ligeramente diferente según el sexo del niño. Así por ejemplo, la curva de fecundidad neta para las madres contando sólo las hijas, fue de 28,56 contra 28,52 con sólo los hijos (Estados Unidos, 1920). Esta diferencia es demasiado pequeña para tenerla en cuenta al usar la fórmula indicada arriba, que representa en cualquier caso una ligera aproximación. Para calcular las cifras presentadas en el cuadro 1 se empleó el valor 28,56.

(padres de hijos legítimos), la edad media de la curva de fecundidad en los Estados Unidos, a la fecha del último censo (1920), era de 32,9. Para las mujeres blancas (madres de hijos legítimos) Era de 28,6. Basados en estos valores y con ayuda de la fórmula indicada arriba, encontramos los porcentajes de huérfanos maternos y paternos presentados en las columnas (2) y (7) del cuadro 1.⁶ Las columnas (3) y (8) dan las cifras correspondientes obtenidas mediante el razonamiento más exacto desarrollado en el apéndice, página 80. La representación gráfica de estas cifras se encuentra en el gráfico 1.⁷ Se observará, que para las edades tempranas, la diferencia entre los resultados obtenidos mediante la fórmula reducida y los obtenidos a través del razonamiento más exacto es muy pequeña. La significación de esto aparece detalladamente expuesta en el apéndice.

En la exposición hecha arriba, con el propósito de simplificar, se dejó de lado una corrección secundaria, con el resultado de que con nuestra fórmula hubiéramos encontrado un porcentaje nulo de huérfanos paternos y maternos entre los niños de edad cero (recién nacidos). Evidentemente, esto requiere una corrección, pues algunos niños pierden a su padre incluso antes de nacer, y algunos a su madre al nacer.

Huérfanos póstumos. Antes de aplicar la fórmula $1 - [(l_a + \nu)/l_\nu]$ al caso de los recién nacidos, para encontrar la proporción de huérfanos paternos debemos introducir una modificación, pues en este caso el período de exposición al riesgo de muerte del padre, con el resultado de un hijo póstumo, comienza tres cuartos de año antes del nacimiento del niño. Entonces, si ν es la edad media del padre al nacer el hijo, el período de exposición empieza para el padre a la edad $(\nu - 3/4)$; para un recién nacido $a = 0$. Realizando estas sustituciones en nuestra fórmula reducida, encontramos, para la proporción de huérfanos póstumos entre los recién nacidos, la expresión

⁶Las cifras para los huérfanos paternos, que aparecen en el cuadro 1 y en el gráfico 1, están, sin embargo, corregidas por los nacimientos póstumos, como se indica en la sección siguiente.

⁷El gráfico muestra los huérfanos maternos corregidos por muertes puerperales (columna 4. del cuadro 1) como se indica en la sección siguiente.

⁸Para ser más exactos, q_x es la probabilidad, a la edad x , de morir en el plazo de un año.

$$1 - \frac{l_\nu}{l_\nu - \frac{3}{4}} = \frac{l_\nu - \frac{3}{4} - l_\nu}{l_\nu - \frac{3}{4}} =$$

$$\frac{\frac{3}{4}d_\nu - \frac{3}{4}}{l_\nu - \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}q_{\nu - \frac{3}{4}} \quad (2)$$

donde q_x , tal como en la notación actuarial usual, designa la tasa de mortalidad⁸ entre los hombres de edad x .

Si no hay diferencia de mortalidad entre estos niños póstumos, la proporción así encontrada para el momento de su nacimiento es también válida en edades posteriores de su vida.

Por lo tanto, concluimos que la proporción de huérfanos póstumos en la población es, con el grado de aproximación de nuestra fórmula, igual al efecto de la mortalidad por persona q_x , operando durante nueve meses en hombres de edad tres cuartos de año inferior a la edad media del patrón de paternidad por edades.

Valores numéricos. En los Estados Unidos en 1920, para hombres blancos, la edad media del patrón de paternidad por edades resultó ser de 32,9 años.

Entonces $\nu - 3/4 = 32,1$. A esta edad encontramos

$$q_{32,1} = 0,0069,$$

de modo que

$$\frac{3}{4} \cdot q_{32,1} = 0,0052$$

o sea 0,52 por ciento, lo que nos da la proporción de hijos póstumos entre los recién nacidos.

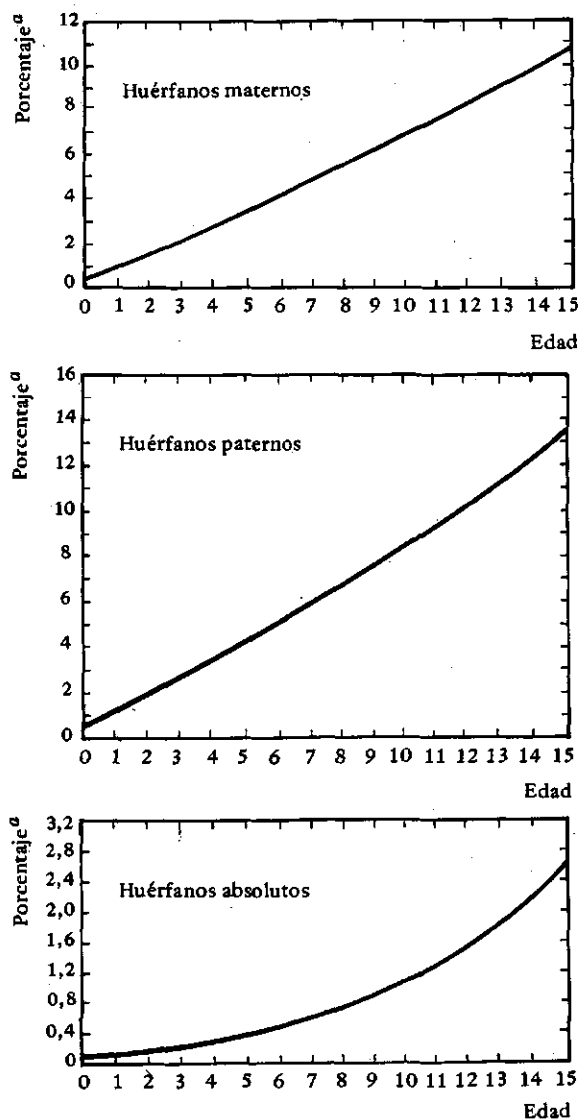
Sin embargo, esta estimación debe entenderse como un máximo. La cifra efectiva será seguramente menor. Hemos supuesto una mortalidad media para los padres de los niños póstumos. En realidad, su mortalidad debe ser inferior al promedio, puesto que es un grupo selecto. Los hombres que sufren de una marcada debilidad y de ciertas dolencias crónicas quedan prácticamente excluidos, puesto que no son aptos para convertirse en padres. En la mayoría de los casos, las muertes se deberán a accidentes o enfermedades de corta duración. El solo hecho que la lista de causas de muerte para estos hombres sea tan restringida, implica una tasa de mortalidad bajo la normal; así, nuestra estimación se desviará por exceso.

Los niños nacidos póstumamente sufren en la mayoría de los casos de una desventaja económica y, por tanto, tenderán a tener una mortalidad superior a la normal. Por consiguiente, cuando se considere la proporción de huérfanos póstumos, no en el momento del nacimiento, sino en su vida ulterior, las

cifras efectivas caerán aún más por debajo de nuestra estimación de 5,2 por mil.

Pese a que el método empleado para alcanzar este resultado es plausible, no es un razonamiento riguroso. Se encontrará una exposición detallada y rigurosa del resultado en el apéndice.

GRAFICO 1

ORFANDAD, ESTADOS UNIDOS
(Población blanca)

^a A la edad que aparece en la escala.

Corrección para huérfanos puerperales. Como ya se señaló, la fórmula dada antes no muestra en forma correcta la orfandad, causada por muertes puerperales. Esto queda de manifiesto de inmediato por el hecho que el cuadro 1 muestra, en las columnas (2) y (3), un porcentaje nulo de huérfanos de edad cero, cuando debe-

ría haber un cierto porcentaje positivo. La razón es, por supuesto, clara. El método de cálculo trata la tasa de mortalidad de las madres como una función simple de su edad, cuando, por el contrario, en el caso de un grupo de madres que han tenido un hijo recientemente, este hecho afecta notoriamente

su tasa de mortalidad, diferenciándolo de la tasa general de mortalidad de las mujeres de igual edad. Un análisis que tomara plenamente en cuenta este hecho sería complicado y de poca utilidad, desde el momento que careceríamos de la información estadística para efectuar una aplicación numérica. Más aún, en el mejor de los casos tendríamos resultados que, para la mayoría de las edades del niño, no diferirían mucho de las encontradas antes. Sólo en los años iniciales de la vida del niño, cuando la madre no ha sido expuesta por mucho tiempo a riesgos más amplios que los corrientes de cada día, la corrección por el riesgo especial en el nacimiento del niño es el aspecto dominante y su omisión da una imagen totalmente falsa. En vista de estos hechos, queda justificado un método aproximado de corrección por muertes puerperales, aun no siendo riguroso. Un método como éste es el que se entrega a continuación. Consta de varias etapas:

La tasa de mortalidad en el parto. En cierta proporción del total de casos, la madre muere cuando nace un niño vivo; podemos decir que tales niños son huérfanos puerperales.

No tenemos información directa respecto a la proporción de tales huérfanos entre los niños nacidos vivos, porque las estadísticas sobre muertes por causas puerperales no distinguen entre nacimiento de niños vivos, mortinatos o ausencia de nacimiento. Sin embargo, podemos obtener una estimación de la proporción de huérfanos puerperales como se indica a continuación: en los Estados Unidos, por ejemplo, el número de muertes por causas puerperales alcanzó en promedio a 6,6 por 1 000 nacidos vivos en el período 1915-1920.⁹ Esta manera de exponer los hechos es algo confusá. Esto *no significa* que las seis muertes puerperales tuvieron lugar entre las madres de los 1 000 niños nacidos vivos. En realidad, ocurrieron con mucha mayor frecuencia entre los mortinatos, pues la mortalidad puerperal entre éstos es alrededor de diez veces mayor¹⁰ que en los nacimientos de niños vivos. Entonces, si y es la tasa de mortalidad puerperal por 1 000 nacidos vivos, $10y$ es la tasa de mortalidad puerperal por 1 000 mortinatos y puesto que hay alrededor de 36 mortinatos por 1 000

⁹Antes de 1915 no es posible disponer de informes federales sobre las tasas de natalidad en los Estados Unidos.

¹⁰Entre los partos de término, la relación es aún más extrema, cerca de 24 a 1. (*Maternal Mortality*, U.S. Department of Labour, Children's Bureau Publications, N° 158 [1926], pág. 26).

nacimientos de niños vivos,¹¹ debemos tener

$$y + \frac{36 \times 10}{1000}y = 6,6$$

$$y = \frac{6,6}{1,36} = 4,9 \text{ por mil,}$$

o en otros términos, la proporción de muertes puerperales atribuibles a los nacimientos de niños vivos, sobre el número total de muertes puerperales, es $4,9/6,6 = 0,743$.

Corrección puerperal para los huérfanos de edad cero. Se ha encontrado así que la tasa de mortalidad puerperal entre los nacidos vivos es alrededor de 4,9 por mil y , por tanto, entre los recién nacidos alrededor de 4,9 por mil no tienen madre. Aquí la corrección a hacer en las cifras calculadas según la fórmula, consiste simplemente en agregar este 4,9 por mil a la cifra cero que da dicha fórmula para la proporción de huérfanos al nacer.

Corrección puerperal para edades superiores. Para edades superiores, la corrección no es tan sencilla. No podemos agregar simplemente 4,9 por mil a la proporción de huérfanos calculada mediante la fórmula (1), porque estaríamos contando dos veces las muertes puerperales, una en este término de corrección y otra en la mortalidad inherente a la tabla de vida. Parece impracticable una corrección exacta de este doble registro. Sin embargo, para nuestro propósito basta un método aproximado como el que sigue:

En el primer año después del nacimiento de un niño, prácticamente no habrá nunca para las madres una segunda exposición al riesgo del nacimiento¹². Por tanto, habiendo admitido ya 4,9 muertes por mil nacimientos entre estas mujeres en el primer año de exposición, no podemos admitir, en nuestro cálculo para estas mujeres, muertes adicionales debidas a causas puerperales. Pero, en el cálculo de la orfandad mediante la tabla de vida, hemos imputado de hecho a estas mujeres, en su primer año de exposición, las muertes puerperales implícitas en la tabla de vida. A los 28 años (la edad media del período reproductivo), las muertes puerperales constituyen el 14,5 por ciento de todas las muertes entre

¹¹Entre 1918 y 1927 el rango fue de 38 a 35 con un promedio de 36.

¹²Se omite aquí el caso de los nacimientos dobles.

las mujeres y, como se vio, alrededor de 0,743 de éstas, es decir el 10,8 por ciento, es atribuible a nacimientos de niños nacidos vivos. La tasa total de mortalidad entre las mujeres de 28 años es de 6,7 por mil anual. Tomando el 10,8 por ciento de esta cifra, tenemos 0,72 por mil para el número de muertes puerperales atribuible a los nacimientos de niños vivos contenidos en las defunciones anuales de la tabla de vida de mujeres de esa edad. Por esta razón, deberíamos deducir esta cifra del total obtenido mediante la suma de los "huérfanos de la tabla de vida"¹³ más la corrección puerperal de 4,9 por mil. O, lo que conduce a igual resultado, deberíamos agregar a los "huérfanos de la tabla de vida" no 4,9 sino $4,9 - 0,7 = 4,2$ por mil niños de un año.

Para el segundo año de exposición de las madres, no es correcto deducir el total de las muertes puerperales de la tabla de vida atribuible al nacimiento de niños vivos, puesto que en este segundo año cierta proporción desconocida de estas mujeres estará nuevamente expuesta a los riesgos de dar a luz otro hijo. En ausencia de datos al respecto, deberemos hacer el supuesto burdo de que el riesgo puerperal en este segundo año es un tercio del correspondiente riesgo total de la tabla de vida, esto es, $1/3 \cdot 0,72 = 0,24$ por mil niños de dos años. Por lo tanto, debemos deducir para el segundo año de exposición, no el total de 0,72 "huérfanos de la tabla de vida", sino sólo $2/3$ de éstos, esto es, 0,48. Por lo tanto, la corrección aplicable en el caso de los huérfanos de dos años de edad es $0,72 + 0,48 = 1,20$. Análogamente, supondremos que en el tercer año de exposición, el riesgo puerperal es $2/3$ del correspondiente riesgo total de la tabla de vida, de manera que nuestra corrección es ahora $4,9 - 0,72 - 0,48 - 0,24 = 3,5$. Supondremos que después del tercer año de exposición el riesgo puerperal es simplemente el riesgo total de la tabla de vida, por ejemplo, que una madre que no ha tenido hijos en tres años representa sencillamente el promedio general para una mujer de su edad en lo que se refiere al riesgo de tener un hijo. Por tanto, la corrección de 3,5 para los huérfanos puerperales se mantendrá constante de allí en adelante. Debe entenderse que esta es una aproximación algo burda, pero suficiente para nuestro propósito.

¹³ Este término apenas necesita explicación. Se emplea para designar a los huérfanos calculados, según la tabla de vida sin corrección alguna para los huérfanos puerperales.

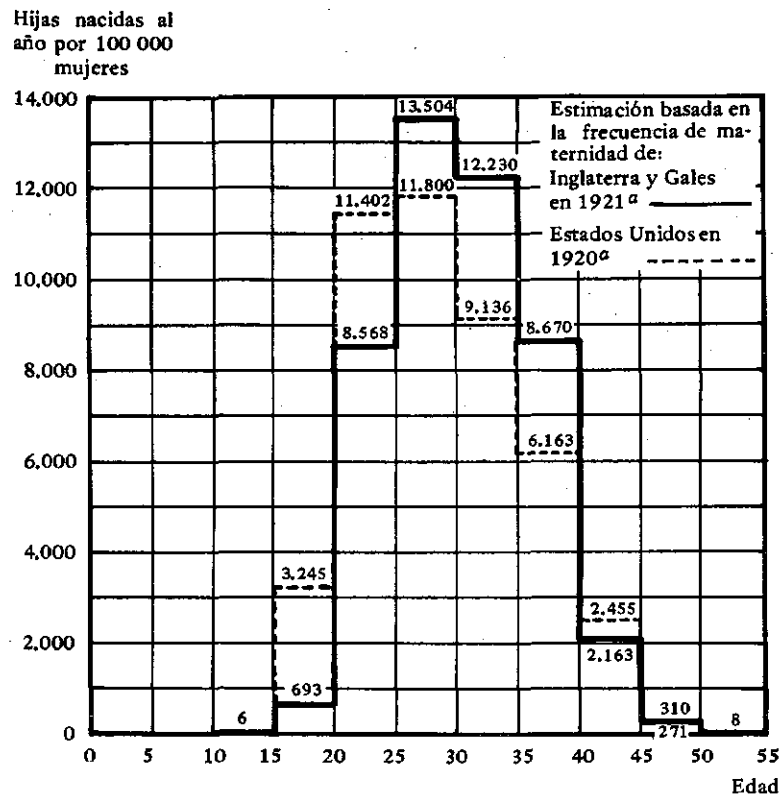
De este modo, se obtuvieron las cifras de la columna (4) del cuadro 1 a partir de aquéllas de la columna (3).

Debe destacarse que el resultado final de la corrección puerperal es un ligero incremento en el total de huérfanos por sobre la cifra de "huérfanos de la tabla de vida". Es tal como debería ser, puesto que estamos tratando con un conjunto de mujeres en que *todas* están expuestas al menos una vez al riesgo de tener un hijo, y que por tanto tendrán, sólo para efectos de este cálculo, una tasa de mortalidad algo superior a la de la población femenina en general, la que incluye algunas mujeres que nunca están expuestas a este riesgo. Verdad es que hay ciertas condiciones compensatorias que probablemente equilibran con exceso esta circunstancia, puesto que la tasa de mortalidad no puerperal de las mujeres casadas es probablemente inferior a la de las solteras. No tenemos manera de tomar en cuenta estos factores compensadores y, por tanto, el número total de huérfanos de todas las edades encontrado después de corregir por muertes puerperales, resulta un poco mayor que el calculado por la fórmula de la tabla de vida. Esto lleva consigo un pequeño error, que se distribuye ligeramente por todas las edades. Sin la corrección para huérfanos puerperales, habríamos tenido un error concentrado en las edades tempranas de la vida, que distorsionaría seriamente la imagen de la orfandad de esas edades.

Influencia de la fecundidad sobre la frecuencia de la orfandad: efecto de cambios sólo en la amplitud de la curva de fecundidad por edades. De acuerdo con la fórmula reducida para el porcentaje de huérfanos de edad a , a saber, $1 - [(l_a + v)/l_v]$, resulta que este porcentaje es independiente de cualquier cambio en la fecundidad (tamaño de las familias) de la población con la única condición de que permanezca invariable la edad promedio a la que los padres tienen sus hijos. En otras palabras, si la curva de fecundidad específica cambia solamente de amplitud, y no de forma, no tendrán lugar cambios (de acuerdo con la fórmula reducida) en el porcentaje de huérfanos a una edad determinada. Este resultado no es *estrictamente* efectivo; pero las cifras que figuran en el cuadro 1, columnas 2, 3 y 5, en que las dos últimas han sido calculadas mediante el razonamiento más exacto expuesto en el apéndice, muestran que con la fecundidad efectiva (columna 3) y con una fecundidad 16 por ciento superior a la efectiva (columna 5), la diferencia entre los cálculos realizados mediante la fórmula reducida y mediante el razonamiento más

GRAFICO 2

FRECUENCIA ESTIMADA DE MATERNIDAD, INGLATERRA Y GALES.
1871-1880



^aModificadas para dar la tasa de crecimiento natural observada en Inglaterra y Gales, 1871-1880.

exacto es absolutamente despreciable, siempre que cambie sólo la amplitud, no la forma, de la curva de fecundidad por edades y dentro de un rango verosímil para cualquier población real. La explicación analítica y la demostración de este hecho se encuentran en el apéndice.

Efecto de cambios en el perfil de la curva de fecundidad por edades. El caso es algo diferente cuando no sólo se altera la amplitud sino también la forma general o perfil de la curva de fecundidad por edades. Así por ejemplo, se ha hecho un cálculo para mostrar la situación de la orfandad en Inglaterra y Gales en la década 1871-1880. No se disponía de la información directa sobre la fecundidad por edades, esto es, la frecuencia de la maternidad $m(a)$ a edad a , y fue necesario construir una curva hipotética $m(a)$. Esto se hizo sobre dos bases diferentes, a saber: 1) empleando las cifras observadas para Inglaterra y Gales en

1921, y aumentándolas en una proporción constante para reproducir la tasa de incremento observada en 1871-1880, y 2) empleando como base las cifras para $m(a)$ en los Estados Unidos en 1920, igualmente aumentadas para reproducir la tasa de incremento observada en Inglaterra y Gales en 1871-1880. En el gráfico 2 aparecen las dos curvas fundamentales $m(a)$ esto es, la de 1921 para Inglaterra y Gales y la de 1920 para los Estados Unidos. Se ve que la curva inglesa está ubicada generalmente en edades superiores (la edad media de la madre al nacer los hijos es de 30,2 contra 28,6 en los Estados Unidos), y alcanza una cima más alta que la curva americana, para una tasa dada de incremento. Esta diferencia no deja de tener algún efecto sobre las cifras calculadas de orfandad; sin embargo, este efecto no es muy marcado en las cifras de orfandad a una edad dada (véase el cuadro 1, columnas 11 y 12, y el gráfico 3), especialmente para la orfandad en la infancia y la adolescencia, que es la

CUADRO 2

PORCENTAJE DE HUÉRFANOS CON EDADES INFERIORES A UNA EDAD DETERMINADA,
CALCULADO PARA DIFERENTES CONDICIONES DE MORTALIDAD Y FECUNDIDAD

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Condición: Edad	Estados Unidos - Blancos										Inglaterra y Gales
	Huérfanos maternos ^a				Huérfanos paternos ^a		Huérfanos absolutos ^a		Huérfanos maternos ^a		
Condición:											
Mort. como en	1920	1920	1920	1920	1901	1920	1920	1920	1920	1871-80	1871-80
Fec. como en	1920	1920	Véase F		1920		1920	1920	1920	Véase K	Véase L
Tasa intrínseca ^b		0,0047	0,0047	0,0100	0,0012		0,0047	0,0047	0,0047	0,0137	0,0137
Observaciones: (véase abajo)	A ^c	B, C, D	B, C, E	B, E, F	C, E, G	A ^c	B, C	B, C, E, H	B, C, E, I	E, J, K	E, J, L
Edad											
1		0,31	0,76	0,76	0,66		0,86	0,01	0,07	0,70	0,72
2		0,62	1,04	1,04	1,00		1,21	0,02	0,09	1,07	1,12
3		0,93	1,34	1,33	1,35		1,57	0,03	0,12	1,45	1,52
4		1,25	1,64	1,63	1,71		1,93	0,04	0,14	1,84	1,93
5		1,57	1,95	1,94	2,08		2,30	0,05	0,17	2,23	2,35
6		1,89	2,27	2,26	2,46		2,68	0,08	0,20	2,64	2,77
7		2,22	2,59	2,57	2,84		3,06	0,10	0,24	3,05	3,21
8		2,55	2,92	2,89	3,22		3,44	0,13	0,28	3,47	3,64
9		2,88	3,25	3,22	3,61		3,84	0,16	0,34	3,89	4,09
10		3,21	3,58	3,54	4,01		4,24	0,20	0,40	4,32	4,54
11		3,55	3,91	3,87	4,41		4,65	0,24	0,47	4,75	4,99
12		3,89	4,25	4,20	4,81		5,06	0,28	0,55	5,19	5,45
13		4,23	4,59	4,53	5,22		5,49	0,33	0,64	5,63	5,91
14		4,57	4,93	4,86	5,64		5,92	0,38	0,73	6,08	6,38
15		4,92	5,28	5,19	6,06		6,36	0,44	0,83	6,53	6,85
16		5,27	5,63	5,53	6,49		6,81	0,51	0,95	6,98	7,32
17		5,62	5,98	5,87	6,92		7,27	0,58	1,07	7,44	7,80
20		6,71	7,07	6,92	8,25		8,72	0,84		8,83	9,26
25		8,66	9,02	8,76	10,62		11,35	1,43		11,23	11,77
30		10,82	11,16	10,76	13,23		14,31	2,30		13,74	14,42
35		13,29	13,59	13,00	16,10		17,62	3,58		16,35	17,19
40		16,13	16,40	15,55	19,30		21,24	5,41		19,09	20,12
45		19,32	19,57	18,39	22,80		25,07	7,88		21,91	23,12
50		22,79	23,02	21,45	26,51		28,96	11,00		24,72	26,07
55		26,36	26,57	24,57	30,22		32,69	14,48		27,37	28,83
60		29,78	29,98	27,53	33,71		36,04	18,22		29,74	31,24
65		32,81	33,00	30,14	36,75		38,85	21,58		31,68	33,18
70		35,27	35,46	32,22	39,19		41,03	24,33		33,14	34,63

Observaciones:

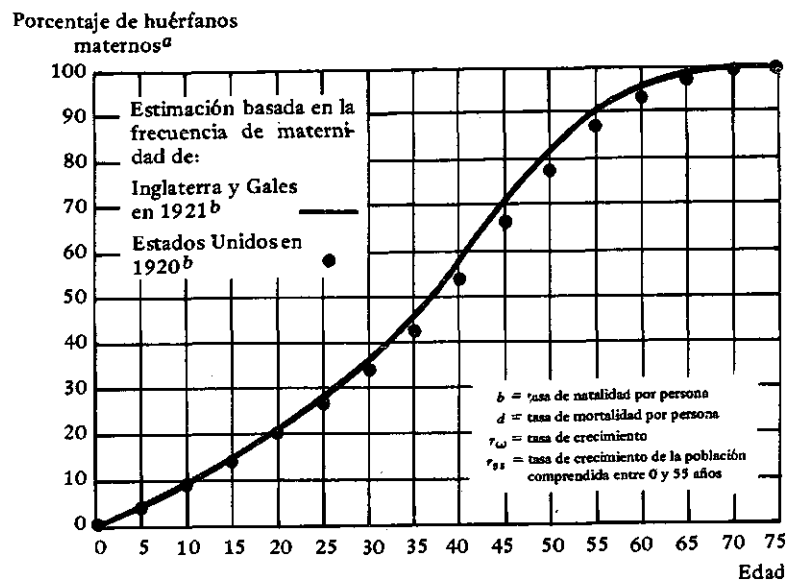
Véase cuadro 1 para A, B, C, D, E, F, G, J, K, L.

H. Huérfanos absolutos, basados en el supuesto que las muertes del padre y la madre son sucesos independientes.

I. Huérfanos absolutos, corregidos por la interdependencia de las muertes del padre y la madre. (Véase cuadro 1, observación 1.)

^a Huérfanos maternos = personas de cualquier edad cuya madre ha muerto, incluyendo huérfanos absolutos. Los huérfanos paternos están definidos de manera similar. Huérfanos absolutos = personas de cualquier edad cuyos dos padres han muerto.^b Para la definición y el método de cálculo de la tasa intrínseca de crecimiento natural, véase pág. 81.^c No calculado.

GRAFICO 3
ORFANDAD ESTIMADA. INGLATERRA Y GALES.
1871-1880



^a A la edad indicada en la escala

^b Modificada para dar la tasa de crecimiento natural observada en Inglaterra y Gales, 1871-1880.

única parte de la orfandad¹⁴ que corrientemente interesa en la práctica.

Influencia de la fecundidad en los huérfanos por debajo de una edad específica. Por supuesto, la proporción de huérfanos por debajo de una determinada edad será afectada por cualquier cambio en la fecundidad, esto es, en la forma o en la amplitud del patrón de fecundidad por edades, ya que cualquier cambio de esta naturaleza altera la distribución de edades de la población y, por lo tanto, la ponderación de las diferentes edades o grupos de edades en la cifra acumulada de huérfanos a las diferentes edades. Este efecto aparece reflejado en el cuadro 2. Las cifras de las columnas 4 y 5 muestran el efecto de un cambio limitado a la amplitud de la curva de fecundidad, dejando invariable su forma. Las cifras de las columnas 11 y 12, por otra parte, muestran el efecto de una diferencia en la forma de dos curvas de fecundidad, mientras

las amplitudes han sido ajustadas para dar la misma tasa de crecimiento natural. Se verá que, incrementando sólo la amplitud (de modo de producir una tasa más rápida de crecimiento de la población) se reduce el porcentaje de huérfanos por debajo de una edad determinada, especialmente para el conjunto de personas de edades superiores. Para las edades inferiores (que son las de más interés) el efecto es débil. La comparación concerniente al cambio de forma de la curva de fecundidad muestra un porcentaje más alto de huérfanos por debajo de una determinada edad para aquella curva que tiene su cima en una edad mayor, para una tasa dada de crecimiento natural.

Proporción de huérfanos en la población. Debe dejarse aquí muy en claro un punto. Hasta ahora al hablar de la proporción de huérfanos por debajo de una edad dada o en ella, nos hemos referido a su proporción entre los niños de edades correspondientes. Pero otra cifra de distinto interés es la proporción de huérfanos de edad determinada en la población de todas las edades. Por supuesto, esta proporción se verá fuertemente afectada por cualquier circunstancia que incremente la proporción de niños en la población. Esto es, a igualdad de

¹⁴La extensión, en este estudio, del término "huérfano" a personas de cualquier edad que han perdido un padre, apenas merece una justificación especial. En el lenguaje común, por supuesto, el término se limita a designar a las personas jóvenes, pese a que no se traza ninguna frontera definida.

otras condiciones, la proporción de huérfanos en la población total será mayor cuanto más rápido crezca la población.

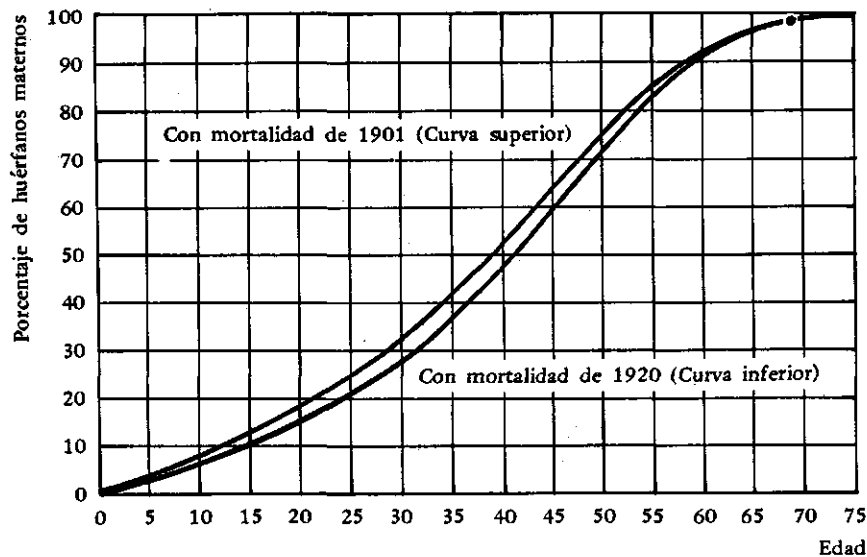
El tamaño de las familias como factor en el problema de la orfandad. Otro hecho importante es que mayor fecundidad, en igualdad de otras condiciones, implica familias más grandes. En particular, por esta razón las familias con huérfanos tenderán a ser mayores, y los padres viudos sobrevivientes tendrán que esforzarse mucho más para seguir proporcionando el sustento a sus familias, a pesar de que la proporción de huérfanos entre los niños de una edad determinada no se ve afectada por un aumento de tamaño de las familias con padres sobrevivientes, y al mismo tiempo por un aumento de las familias con huérfanos.

Efecto de la prolongación de la vida sobre la

frecuencia de la orfandad. A fin de averiguar el efecto de la tendencia al aumento de la duración media de la vida o, en forma más general, de una modificación en la tabla de vida, sobre la frecuencia de la orfandad, se llevó a cabo dos conjuntos de cálculos; primero, empleando la información efectivamente observada en los Estados Unidos en 1920 sobre fecundidad y probabilidad de sobrevivencia a una edad dada; y después, manteniendo la fecundidad constante y combinándola con la tabla de vida de los Estados Unidos para 1901. Los resultados aparecen en el cuadro 1, columnas 4 y 6, y en el gráfico 4. Se ve que la tabla de vida más reciente, con mayor sobrevivencia, determina una proporción menor de huérfanos, tanto a cada edad como también por debajo de cada edad, y esto a pesar del hecho de que más niños sobreviven relativamente; esto es, el ahorro de vidas ha tenido lugar principalmente en las edades tempranas.

GRAFICO 4

INFLUENCIA DEL DECRECIMIENTO DE LA MORTALIDAD SOBRE LA PROPORCION DE HUERFANOS A UNA EDAD DETERMINADA, POBLACION BLANCA DE ESTADOS UNIDOS CON LA FECUNDIDAD DE 1920

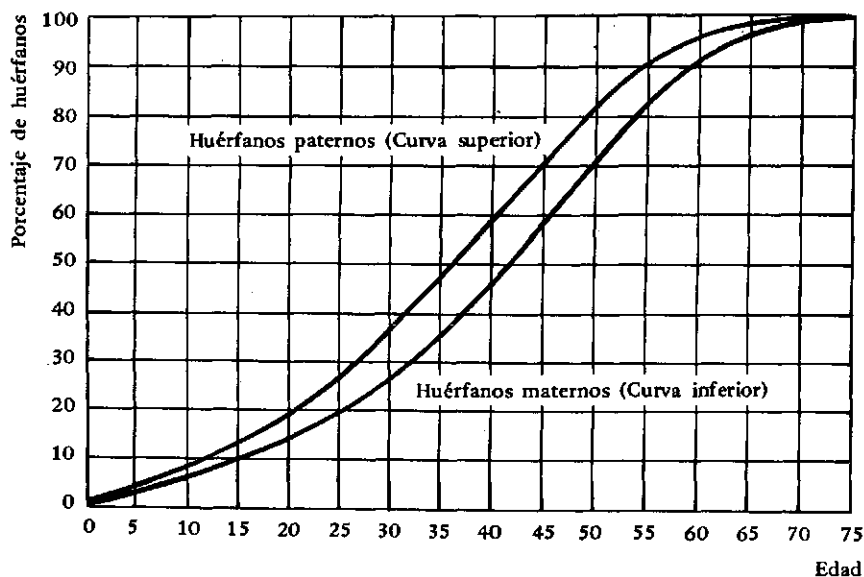


Comparación de la proporción de huérfanos paternos y maternos. En épocas normales, como la representada esencialmente por las cifras expuestas para los Estados Unidos, habrá siempre un exceso de huérfanos paternos sobre los maternos, y esto por dos razones: primera, porque en promedio los maridos son algo mayores que las esposas; y en segundo

lugar, porque a casi todas las edades los hombres tienen una mortalidad algo mayor (menor esperanza de vida) que las mujeres. De acuerdo con esto, hay más viudas que viudos, y más huérfanos paternos que maternos. Estos hechos quedan plenamente de manifiesto en el cuadro 1, columnas 4 y 8, y en el gráfico 5, el que muestra juntas, para comparar, las proporciones de

GRAFICO 5

COMPARACION DE LA FRECUENCIA DE LA ORFANDAD PATERNA Y MATERNA ENTRE PERSONAS DE EDAD DADA; ESTADOS UNIDOS, 1920, POBLACION BLANCA



huérfanos paternos y maternos calculadas para los Estados Unidos, 1920.

Huérfanos absolutos. Encontradas las proporciones de huérfanos maternos y paternos a cada edad, podemos calcular fácilmente la proporción de *huérfanos absolutos* (esto es niños que han perdido ambos padres), suponiendo que la probabilidad de morir del progenitor sobreviviente es únicamente función de su edad (o sea q_x tal como aparece dada en la tabla de vida). Entonces, la probabilidad de que un niño pierda a su padre y a su madre es simplemente el producto de la probabilidad de que pierda a su padre por la probabilidad de que pierda a su madre. Con este supuesto para edades hasta los diecisiete años, se obtuvieron los resultados que aparecen en el cuadro 1, columna 9.

Sin embargo, el suponer que la probabilidad de morir para uno de los padres es independiente de la muerte anterior del otro, no aparece respaldado por la teoría ni corroborado por la observación, cuando esta es posible. De hecho, se necesita un factor de corrección muy substancial para las cifras calculadas según el supuesto de probabilidades independientes, como veremos en otra sección al considerar las estadísticas para Inglaterra y Gales, 1921, para lo que se dispone de la información requerida sobre los huérfanos desde uno hasta catorce años de edad. No se sabe con certeza hasta qué punto difieren los correspondientes factores en los Estados Unidos de los de Inglaterra y Gales. Pero, por

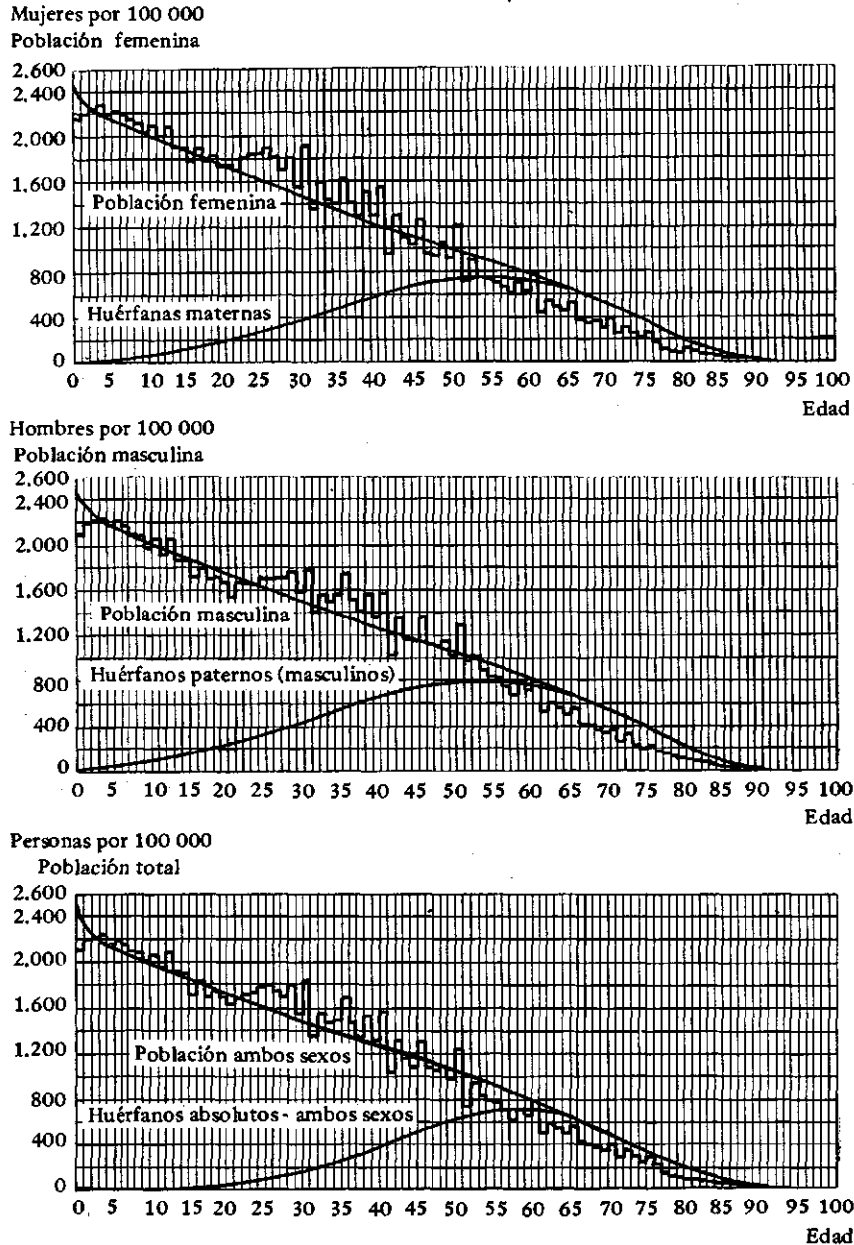
falta de mejor información, se han aplicado los factores ingleses a las cifras norteamericanas, con los resultados que aparecen en el cuadro 1, columna 10.

Conjunto de los huérfanos en la población de Estados Unidos. En el gráfico 6, en cada una de las tres partes, la línea quebrada superior representa a la población, reducida a una base de 100 000 y trazada según la distribución por edades *observada*. La línea suave que corta a esta línea quebrada es la representación de la composición por edad fija o "maltusiana",¹⁵ correspondiente a la tasa de crecimiento natural y a la mortalidad observadas en la población blanca de los Estados Unidos en 1920. La línea suave en forma de sombrero que aparece abajo, es la representación de la composición por edades de los huérfanos, obtenida al aplicar a la distribución por edades ajustada de la población el porcentaje de huérfanos de cada edad, tal como se determinó a través de los métodos descritos más arriba. La curva escalonada correspondiente, calculada con base en la población observada, no aparece, debido a que, con la escala del dibujo, casi coincidiría con la curva suave para las edades inferiores, que son las de mayor interés. La información numérica correspondiente, hasta la edad de 15 años, aparece más

¹⁵La fórmula para esta composición por edades se da en la ecuación (18a) pág. 81; debe prestarse particular atención a la nota al pie en pág. 82 y a la sección sobre la composición por edades maltusiana en pág. 93. Respecto a la bibliografía, véase la pág. 82.

GRAFICO 6

ORFANDAD. ESTADOS UNIDOS
POBLACION BLANCA, 1920



adelante en el cuadro 3. El diagrama está dividido en tres partes, de las cuales la primera muestra las huérfanas maternas y la población femenina blanca; la segunda, los huérfanos (masculinos) paternos y la población masculina blanca; y la tercera, los huérfanos absolutos y la población blanca de ambos sexos.¹⁶

¹⁶ Sin corrección por la correlación entre las probabilidades de muerte del marido y de la esposa. Esta corrección prácticamente no se notaría en la escala del dibujo.

Se ve, en la información numérica que se presenta en el cuadro 3, que para edades hasta quince años se obtiene la misma imagen general, si hacemos el cálculo con la composición por edades observadas o con la malthusiana. En números redondos, la proporción de huérfanos absolutos de ambos sexos, por debajo de los quince años de edad, es de 2,5 por mil de la población total.

Las cifras que aparecen en el cuadro 3 y en el gráfico 6 son por 100 000 de la población

CUADRO 3

HUÉRFANOS POR 100 000, POR SEXO, DE POBLACION DE IGUAL SEXO,
ESTADOS UNIDOS 1920

(Blancos)

a) En población con composición por edades observadas

b) En población con composición por edades maltusiana

Edad	Huérfanas maternas		Huérfanos paternos (masculinos)		Huérfanos absolutos ^a	
	Observada	Maltusiana	Observada	Maltusiana	Observada	Maltusiana
0-1	16,50	18,00	18,40	20,70	1,50	2,00
1-2	29,60	30,10	34,70	35,90	2,60	3,00
2-3	43,60	42,80	51,00	51,40	3,50	3,30
3-4	58,60	55,80	68,00	66,90	4,90	4,90
4-5	71,40	68,90	83,30	82,30	6,30	6,10
5-6	87,20	82,00	101,40	97,90	7,90	7,80
6-7	101,70	95,00	117,50	113,40	10,50	10,20
7-8	114,40	107,60	133,00	129,00	13,00	12,70
8-9	128,40	120,10	149,70	144,80	16,70	15,90
9-10	136,00	132,70	160,70	160,70	20,20	20,10
10-11	155,60	145,20	183,80	176,70	25,50	23,90
11-12	163,60	157,40	193,40	193,00	28,70	28,10
12-13	184,50	169,40	222,90	209,20	35,70	33,20
13-14	184,60	181,30	221,60	225,60	38,20	38,30
14-15	198,40	193,30	243,30	242,60	44,70	44,10
Por debajo de 1	16,50	18,00	18,40	20,70	1,50	2,00
Por debajo de 2	46,10	48,10	53,10	56,60	4,10	5,00
Por debajo de 3	89,70	90,90	104,10	108,00	7,60	8,30
Por debajo de 4	148,30	146,70	172,10	174,90	12,50	13,20
Por debajo de 5	219,70	215,60	255,40	257,20	18,80	19,30
Por debajo de 6	306,90	297,60	356,80	255,10	26,70	27,10
Por debajo de 7	408,60	392,60	474,30	468,50	37,20	37,30
Por debajo de 8	523,00	500,20	607,30	597,50	50,20	50,00
Por debajo de 9	651,40	620,30	757,00	742,30	66,90	65,90
Por debajo de 10	788,00	753,00	917,70	903,00	87,10	86,00
Por debajo de 11	943,60	898,20	1 101,50	1 079,70	112,60	109,90
Por debajo de 12	1 107,20	1 055,60	1 294,90	1 272,70	141,30	138,00
Por debajo de 13	1 291,70	1 225,00	1 517,80	1 481,90	177,00	171,20
Por debajo de 14	1 476,30	1 406,30	1 739,40	1 707,50	215,20	209,50
Por debajo de 15	1 674,70	1 599,60	1 982,70	1 950,10	259,90	253,60

^aCon corrección por la correlación entre las probabilidades de muerte del marido y de la esposa.

blanca del sexo especificado. En el cuadro 4 aparecen las cifras correspondientes a los totales efectivos de población. De esto inferimos que en el total de la población blanca de los Estados Unidos en 1920, que alcanzaba a 94 820 915 personas, había en números redondos, 1 964 000 huérfanos maternos de ambos sexos por debajo de diecisiete años de edad;

2 391 000 huérfanos paternos de ambos sexos, y 348 000 huérfanos absolutos. En total, 4 007 000 huérfanos.¹⁷

¹⁷Como se ha hecho presente, tanto las cifras de huérfanos maternos como las de huérfanos paternos incluyen también las de huérfanos absolutos. Así, el total de huérfanos se encuentra sumando los maternos y los paternos y restando los absolutos.

CUADRO 4

NUMERO ESTIMADO DE HUÉRFANOS EN LA POBLACION BLANCA DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1920,
PARA CADA AÑO DE EDAD INFERIOR A 17

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
Edad	Población blanca			Huérfanos paternos ^a			Huérfanos maternos ^a			Huérfanos absolutos ^a		
	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres
Todas las edades	94 820 915	48 430 655	46 390 260	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0-17	33 212 977	16 781 622	16 431 355	2 391 260	1 205 643	1 185 617	1 963 550	990 096	973 455	348 481	175 467	173 014
0-1	2 017 767	1 023 270	994 497	17 554	8 902	8 652	15 537	7 879	7 658	1 412	716	696
1-2	2 078 537	1 055 446	1 023 091	33 049	16 782	16 267	27 852	14 143	13 709	2 495	1 267	1 228
2-3	2 094 108	1 062 92	1 031 916	48 583	24 643	23 940	41 044	20 819	20 225	3 351	1 700	1 651
3-4	2 118 455	1 070 440	1 048 015	65 037	32 863	32 174	54 868	27 724	27 144	4 661	2 355	2 306
4-5	2 065 054	1 049 366	1 015 688	79 298	40 296	39 002	67 320	34 209	33 111	5 988	3 043	2 945
5-6	2 084 994	1 057 118	1 027 876	96 743	49 050	47 693	81 941	41 545	40 396	7 506	3 806	3 700
6-7	2 064 671	1 042 210	1 022 461	112 524	56 800	55 724	95 181	48 046	47 135	9 911	5 003	4 908
7-8	2 022 485	1 022 149	1 000 336	127 214	64 293	62 921	107 192	54 174	53 018	12 337	6 235	6 102
8-9	2 004 818	1 011 038	993 780	143 545	72 390	71 155	120 088	60 561	59 527	15 838	7 987	7 851
9-10	1 910 277	966 690	943 587	153 586	77 722	75 864	128 180	64 865	63 315	19 103	9 667	9 436
10-11	1 962 245	991 896	970 349	175 817	88 874	86 943	145 795	73 698	72 097	24 135	12 200	11 935
11-12	1 873 679	943 527	930 552	185 682	93 504	92 178	152 704	76 897	75 807	27 168	13 681	13 487
12-13	1 952 691	990 760	961 931	212 453	107 795	104 658	173 595	88 079	85 516	33 781	17 140	16 641
13-14	1 788 923	901 270	887 653	212 703	107 161	105 542	172 452	86 882	85 570	36 137	18 206	17 931
14-15	1 791 784	907 697	884 087	232 216	117 638	114 578	186 345	94 400	91 945	42 286	21 422	20 864
15-16	1 641 105	819 265	821 840	230 740	115 189	115 551	183 968	91 840	92 128	45 951	22 939	23 012
16-17	1 741 384	867 288	874 096	264 516	131 741	132 775	209 488	104 335	105 154	56 421	28 100	28 321

^a Véase la nota al pie en el cuadro 1.

Nota: Las cifras de este cuadro se obtienen haciendo el producto, a cada edad, de los porcentajes que aparecen en el cuadro 1, columnas (2), (6), (8), y las cifras correspondientes de población que se muestran en las columnas (3) y (4) de este cuadro.

CUADRO 5
DISMINUCION DE HUERFANOS MENORES DE 17 AÑOS DEBIDA AL DESCENSO DE LA
MORTALIDAD ENTRE 1901 Y 1920
Población blanca de los Estados Unidos

Condición de orfandad	1901		1920		Disminución de 1901 a 1920	
	Tabla de vida: Original Reg. States	Tabla de vida: Reg. States de 1920	Tabla de vida: Original Reg. States	Tabla de vida: Reg. States de 1920	Tabla de vida: Original Reg. States	Tabla de vida: Reg. States
Sólo padre muerto	2 438 520	2 042 779	2 160 422	395 741	278 098	
Sólo madre muerta	1 749 203	1 615 069	1 617 192	134 134	132 011	
Ambos padres muertos	485 295	348 487	371 942	136 814	113 353	
Total	4 673 018	4 006 329	4 149 556	666 689	523 462	

Efecto de la prolongación de la vida sobre el total de huérfanos en los Estados Unidos; comparación entre la mortalidad de 1901 y de 1920. En una sección anterior, examinamos el efecto de la prolongación de la vida sobre la frecuencia de la orfandad. Puesto que hemos estado considerando el total real de huérfanos en los Estados Unidos, es interesante ahora averiguar cual ha sido la reducción en la orfandad total efectiva de 1920, comparada con el número de huérfanos que habría en la misma población de haberse mantenido la mortalidad de 1901. Se efectuaron cálculos con este objeto, primero con base en la tabla de vida¹⁸ para 1901, y luego basados en la de 1920, aplicadas en los dos casos a la población blanca de 1920. Los resultados numéricos aparecen en el cuadro 5. Fue así como se llegó a las conclusiones mencionadas en la introducción, y que ahora repetimos con mayor detalle.

En el año del último censo para el cual hay información completa disponible, 1920, con una población blanca total de noventa y cinco millones de personas, los cálculos dan 4,15 millones de huérfanos de ambos sexos menores de diecisiete años. De éstos, 2,16 millones habían perdido sólo a su padre, 1,62 millones sólo a su madre, y 370 mil a ambos. ¿Cuál ha sido la

consecuencia, sobre la orfandad nacional, de la disminución de la mortalidad en las décadas recientes? La respuesta debe darse en los términos siguientes: si el patrón de mortalidad por edades de 1901 hubiera subsistido hasta 1920, el número total de huérfanos en la población blanca habría sido de 4,67 millones, y de éstos, 2,44 millones habrían perdido sólo a su padre, 1,75 sólo a su madre, y 485 mil habrían quedado huérfanos absolutos. Entonces, se puede decir que el mejoramiento de los niveles de mortalidad ha salvado a alrededor de medio millón de niños de una orfandad parcial o completa.

Orfandad a edades avanzadas. El término "huérfanos" se aplica comúnmente en forma restringida a los menores. En el caso de los adultos el interés reside más bien en el complemento de la orfandad, esto es, es interesante saber qué porcentaje de las personas de edad adulta tienen todavía uno o ambos padres vivos. El cuadro 6, calculado en lo esencial según los métodos indicados en las secciones precedentes, muestra, para personas por edades entre 30 y 60 años en tramos decenales, el porcentaje de aquéllos cuya madre, cuyo padre, o ambos, viven todavía. Sin embargo, al presentar estas cifras debe señalarse expresamente que han sido calculadas sobre la base de la tabla de vida de 1919-20, mientras que las personas mayores en las poblaciones existentes son los sobrevivientes de un régimen anterior con mortalidades más elevadas. De acuerdo con esto, nuestras estimaciones contendrán un error en el sentido optimista, exagerando el número de sobrevivientes. Teniendo presente esta reserva, se pueden analizar las cifras del cuadro 6.

Los hechos presentados en el cuadro 6 tienen un cierto interés como curiosidad meramente estadística. Pero tienen también una definida significación práctica en relación con el problema de la dependencia con respecto a

¹⁸Fue necesario, en este caso, emplear las tablas de vida para el *Original Registration States* de 1901, tanto para 1901 como para 1920, con el objeto de conservar una base uniforme de comparación. Como resultado de esto las cifras para los huérfanos que se citan más adelante en esta sección, calculadas sobre la base de 1920, difieren algo de aquéllas citadas en el párrafo precedente. Las diferencias no son grandes, y debe recordarse que nuestro propósito es hacer una comparación. Al calcular la diferencia entre las cifras para 1901 y 1920, el efecto de basar el cálculo en la mortalidad del *Original Registration States* de 1901 en lugar del *Registration States* de 1920, queda sobradamente anulado, de manera que la cifra encontrada para la ganancia no se ve seriamente afectada por este cambio menor en nuestro patrón.

CUADRO 6
PADRES SOBREVIVIENTES DE HIJOS DE EDADES ESPECIFICAS,
ESTADOS UNIDOS, POBLACION BLANCA, 1920

Edad del hijo	Sólo madre vive (por ciento)	Sólo el padre vive (por ciento)	Padre y madre viven (por ciento)
30	26,34	17,19	46,79
40	31,52	19,14	22,41
50	23,84	13,17	5,46
60	8,86	3,94	0,40

sus hijos de los padres en sus últimos años.

NUMERO DE HUERFANOS QUE OCURREN
ANUALMENTE

Se puede obtener por dos métodos alternativos una estimación del número de huérfanos que ocurren anualmente, como se explica con detalle en el apéndice, página 94. Para nuestro propósito aquí, nos limitaremos al método siguiente:

Determinamos primero el número promedio de hijos vivos de una mujer de edad específica. Aplicamos luego estos promedios a las muertes efectivas de las mujeres clasificadas por edad. A continuación se describen los detalles del proceso:

Número promedio de hijos vivos de una cohorte de mujeres de edad específica. Considérese una cohorte de mujeres de edad n en la actualidad; a años antes tenían $n - a$ años de edad y daban

a luz a razón de una tasa anual de $m(n - a)$ hijos. Los niños sobrevivientes tienen ahora a años, de manera que de los originariamente nacidos sobreviven en la actualidad una fracción l_a ; esto es, sobreviven $m(n - a)l_a$ niños de entre los $m(n - a)$ nacidos de esta cohorte de madres a años antes.

Para encontrar el número total de niños sobrevivientes a todas las edades entre 0 y 17 años, debemos sumar todos los términos $m(n - a)l_a$ formados al asignar a a todos los valores de 0 a 17, o más exactamente, en términos de cálculo integral, formamos la integral.

$$\int_0^{17} m(n - a)l_a da \quad (3)$$

Esto se llevó a cabo en forma numérica con los resultados que aparecen en la columna (2) del cuadro 7.

CUADRO 7
ESTIMACION DEL NUMERO DE HUERFANOS MATERNOS QUE OCURREN ANUALMENTE,
ESTADOS UNIDOS, POBLACION BLANCA, 1927

(1)	(2)	(3)	(4)
Edad de la madre a su muerte	Número de hijos sobrevi- vientes menores de 17 a- ños, por mujer Población blanca ^a	Muertes de mujeres 1927 Población blanca	(2) × (3) Huérfanos maternos anuales
15-19	0,05551	11 021	611
20-24	0,51297	15 028	7 709
25-29	1,20940	15 798	19 106
30-34	1,79175	17 125	30 684
35-39	1,96375	19 169	37 643
40-44	1,55234	20 853	32 371
45-49	0,95784	24 126	23 108
50-54	0,46197	29 007	13 400
55-59	0,13910	33 530	4 664
60-64	0,01647	40 241	663
65-69	0,00056	49 183	27
		Total	169 986

^a Esta es una cifra inclusiva que comprende a todas las mujeres de una edad determinada, esto es, los niños se distribuyen en la población femenina general, sin considerar la maternidad individual.

En el cuadro 7 aparecen también, en las columnas (3) y (4), las muertes de mujeres de la población blanca de los Estados Unidos,¹⁹ en 1927, clasificados por edad, y el producto formado al multiplicar esas muertes por el "número de hijos sobrevivientes por mujer blanca". Esto da 170 mil para el número de nuevos huérfanos maternos resultantes de las muertes de esas madres en 1927, en el supuesto de que estos niños sobreviven según la tabla de vida de 1919-20, y de que la natalidad tuvo lugar de acuerdo con el patrón de fecundidad por edades de 1920 para las mujeres de la población

blanca. Puesto que estamos tratando con niños entre 0 y 17 años de edad en 1927, este supuesto (planteado en principio por razones de conveniencia) es esencialmente satisfactorio, desde el momento que el año 1920 cae aproximadamente en el centro del período 1910-1927 durante el cual nacieron esos niños.

Se hizo un cálculo similar para los huérfanos paternos, con los resultados mostrados en el cuadro 8.²⁰ Se observará que el número de huérfanos paternos que ocurren anualmente es superior a un cuarto de millón, y excede en más de 80 mil a los huérfanos maternos.

CUADRO 8

ESTIMACION DEL NUMERO DE HUERFANOS PATERNOS QUE OCURREN ANUALMENTE, ESTADOS UNIDOS, POBLACION BLANCA, 1927.

(1)	(2)	(3)	(4)
Edad del padre a su muerte	Número de hijos sobrevivientes menores de 17 años, por hombre de la población blanca ^a	Muertes de hombres 1927 Población blanca	(2) × (3) Huérfanos paternos anuales
15-19	0,00570	12 624	72
20-24	0,17998	15 237	2 743
25-29	0,72972	15 907	11 608
30-34	1,34334	18 811	25 270
35-39	1,79180	24 418	43 753
40-44	1,75316	28 465	49 904
45-49	1,35602	33 044	44 809
50-54	0,89480	39 492	35 337
55-59	0,49794	45 997	22 903
60-64	0,22802	52 826	12 046
65-69	0,08316	61 017	5 074
70-74	0,02543	59 155	1 504
75-79	0,00568	50 868	288
		Total	255 311

^a Esta es una cifra inclusiva que comprende a todos los hombres de una edad determinada, esto es, los niños se distribuyen en la población masculina general, sin considerar la paternidad individual.

ORFANDAD EN INGLATERRA Y GALES

Las estadísticas sobre orfandad para Inglaterra y Gales están disponibles en forma más completa que para los Estados Unidos. El gobierno del Reino Unido publicó, para el año 1921, cuadros que muestran, para cada año de vida hasta la edad 14, el número de huérfanos maternos, paternos y absolutos en la población. Hay también una tabla de vida para el año 1921, y una tabla de vida separada para las mujeres casadas entre 16 y 85 años de edad. Por estas razones

¹⁹ Obtenidas multiplicando las muertes en el *Registration Area* por el factor 1,2020 para convertir la población femenina de los *Registration States* en 1920 en la población femenina total de los Estados Unidos en 1927 de la raza blanca. El factor correspondiente para los hombres blancos fue 1,2099.

el análisis que sigue, sobre las condiciones de la orfandad en Inglaterra y Gales, diferirá en varios aspectos del presentado antes respecto de los Estados Unidos. En ciertos aspectos la situación se puede estudiar en forma más completa; es particularmente satisfactorio contar con información empírica que permita contrastar los resultados de los cálculos. Por otro lado, la Guerra ha perturbado seriamente la relación normal entre las características demográficas de la población en Inglaterra —la perturbación en nuestro propio país es despreciable—, y esto introduce ciertos efectos especiales que serán destacados a su debido tiempo.

²⁰ Para una exposición detallada de la manera como se determinó el patrón de fecundidad paterna, véase el apéndice.

CUADRO 9

ORFANDAD EN INGLATERRA Y GALES, 1921. INFORMACION BASADA DIRECTAMENTE EN OBSERVACIONES CENSALES

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Edad	Hijos con información relativa a los padres	Número de nacimientos correspondientes a los niños de la col. 2 Col. (2) × 0,988 ^a	Total de huérfanos absolutos	Total de huérfanos maternos ^b	Total de huérfanos paternos ^b	Porcentaje de huérfanos absolutos	Porcentaje de huérfanos maternos ^b	Porcentaje de huérfanos paternos ^b	Porcentaje esperado ^c de huérfanos absolutos Cols. (8) × (9)	Razón de huérfanos absolutos observados/esperados ^d Cols. (7) ÷ (10)
0-15	10 362 244	10 237 897	55 245	316 339	786 090					
0-1	785 852	776 422	332	3 382	7 541	0,042	0,430	0,960	0,004	10,230
1-2	816 506	806 708	533	5 379	13 508	0,065	0,659	1,654	0,011	5,989
2-3	544 211	537 681	837	7 048	19 780	0,154	1,295	3,635	0,047	3,267
3-4	529 227	522 876	1 170	9 088	25 000	0,221	1,717	4,724	0,081	2,725
4-5	603 310	596 070	1 607	11 968	36 124	0,266	1,984	5,988	0,119	2,242
5-6	647 579	639 808	2 091	14 765	45 577	0,323	2,280	7,038	0,160	2,012
6-7	699 558	691 163	2 915	18 473	57 266	0,417	2,641	8,186	0,216	1,928
7-8	716 809	708 207	3 430	21 519	61 932	0,479	3,002	8,640	0,259	1,845
8-9	713 052	704 496	3 874	23 694	63 833	0,543	3,323	8,952	0,297	1,826
9-10	702 427	693 998	4 543	26 038	65 920	0,647	3,707	9,385	0,348	1,859
10-11	707 463	698 973	5 093	28 394	69 423	0,720	4,014	9,813	0,394	1,828
11-12	720 078	711 437	5 840	31 802	73 914	0,811	4,416	10,265	0,453	1,789
12-13	732 329	723 541	6 925	36 004	78 954	0,946	4,916	10,781	0,530	1,784
13-14	734 055	725 246	7 655	38 487	82 828	1,043	5,243	11,284	0,592	1,763
14-15	709 788	701 271	8 400	40 298	84 490	1,183	5,677	11,904	0,676	1,751

^a Esto considera 1,2 por ciento de nacimientos múltiples entre todos los nacimientos. La cifra de 1,2 por ciento proviene de las estadísticas de nacimientos de los Estados Unidos, 1918-1924. Como este ajuste es pequeño, puede aplicarse a Inglaterra y Gales.

^b Incluye huérfanos absolutos.

^c En la hipótesis de que las muertes del padre y la madre pueden tratarse como sucesos independientes.

^d Las cifras de esta columna fueron calculadas reteniendo más decimales que las mostradas en las columnas (7), (8), (9), (10), de cuyas cifras se derivan.

CUADRO 10

PORCENTAJE DE HUÉRFANOS A EDADES DETERMINADAS, INGLATERRA Y GALES, 1921.
COMPARACION ENTRE CIFRAS OBSERVADAS Y CALCULADAS ^a

(1) Edad	(2) Huérfanos paternos			(5) Huérfanos maternos			(8) Huérfanos absolutos		
	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	Observados	Calculados	Diferencia	Observados	Calculados	Diferencia	Observados	Calculados ^b	Diferencia
0-1	0,96	0,71	0,25	0,43	0,48	- 0,05	0,04	0,03	0,01
1-2	1,65	1,30	0,35	0,66	0,85	- 0,19	0,07	0,06	0,01
2-3	3,63	1,90	1,73	1,30	1,25	0,05	0,15	0,07	0,08
3-4	4,72	2,53	2,19	1,72	1,67	0,05	0,22	0,11	0,11
4-5	5,99	3,18	2,81	1,98	2,11	- 0,13	0,27	0,16	0,11
5-6	7,04	3,87	3,17	2,28	2,57	- 0,29	0,32	0,20	0,12
6-7	8,19	4,58	3,61	2,64	3,03	- 0,39	0,42	0,27	0,15
7-8	8,64	5,32	3,32	3,00	3,52	- 0,52	0,48	0,35	0,13
8-9	8,95	6,10	2,85	3,32	4,01	- 0,69	0,54	0,44	0,10
9-10	9,38	6,91	2,47	3,71	4,53	- 0,82	0,65	0,58	0,07
10-11	9,81	7,76	2,05	4,01	5,06	- 1,05	0,72	0,71	0,01
11-12	10,26	8,65	1,61	4,42	5,61	- 1,19	0,81	0,88	- 0,07
12-13	10,78	9,58	1,20	4,92	6,19	- 1,27	0,95	1,05	- 0,10
13-14	11,28	10,56	0,72	5,24	6,80	- 1,56	1,04	1,27	- 0,23
14-15	11,90	11,59	0,31	5,68	7,43	- 1,75	1,18	1,51	- 0,33

^a "Calculadas" con base en la tabla de vida inglesa n° 9 y al patrón de fecundidad por edades presentado en el cuadro 15, columna (9), pág. 92.

^b Las cifras "calculadas" se obtuvieron como el producto de las cifras de las columnas (3) y (6), multiplicado por el factor de corrección, por edad, por correlación entre la probabilidad de muerte del marido y de la esposa, encontrado en las cifras observadas. Véase pág. 74, sección "Huérfanos absolutos".

El estudio de la situación de la orfandad en Inglaterra y Gales se divide naturalmente en dos partes; una consiste esencialmente en un análisis de la información estadística directa disponible sobre la orfandad; la otra es un procedimiento sintético, similar en general al ya presentado para los Estados Unidos, que partiendo de información fundamental como los patrones de mortalidad y fecundidad por edades, conduce a una estimación de la orfandad, resultado de una elaboración.

TRATAMIENTO ANALITICO

Los resultados del análisis de las cifras publicadas no son muy satisfactorios. Se comprueba que ciertas relaciones que a priori se espera que se cumplan entre los datos demográficos, se dan en la práctica con una aproximación muy burda. Por lo tanto, bastará con una breve nota al respecto. Si ella sirve para poner de manifiesto la necesidad de alguna información adicional o de un mayor cuidado en el registro, habrá cumplido un propósito útil.

Examinemos, antes que nada, las cifras para los niños menores de un año. En el cuadro 9, columna 2, encontramos que el total de estos niños, con la información disponible respecto de los padres, era de 785 852. El correspondiente

número de madres, 776 422, es algo menor debido a los nacimientos múltiples.²¹ Ahora, sólo por muertes en el parto se esperaban alrededor de $776\ 422 \times 0,00408 \times 0,75 = 2\ 376$ huérfanos²² entre los hijos de estas madres (incluso sin tener en cuenta a los mellizos). El número de huérfanos efectivamente registrado es de 3 382, dejando un balance de sólo $3\ 382 - 2\ 376 = 1\ 006$ huérfanos debidos a la muerte de las madres por causas no puerperales, y en el curso de medio año, pues ésta es la exposición media de las madres de hijos menores de un año desde el momento del nacimiento de estos hijos. Esto correspondería a una tasa de mortalidad anual de las madres igual a 2,6 por mil, debida a causas no puerperales, lo que es evidentemente una cifra muy baja. En Inglaterra y Gales, la edad promedio de las mujeres

²¹ Se supuso que eran el 1,2 por ciento de todos los nacimientos de niños vivos, cifra observada en Estados Unidos. Basta aquí con una corrección aproximada.

²² La tasa anual de mortalidad debida a todas las causas puerperales en Inglaterra y Gales 1920-21 fue de 4,08 por mil nacimientos de niños vivos. Como se muestra en la página 59, se estima que alrededor del 75 por ciento de estas muertes puerperales ocurren en nacimientos de niños vivos, de manera que la tasa de mortalidad puerperal que efectivamente provoca orfandad es $4,08 \times 0,75$.

al tener un hijo es alrededor de 30 años, y a esta edad la tasa de mortalidad anual por cualquier causa es cercana al 3,9 por mil. Alrededor del 86,5 por ciento de ésta, se debe a causas no puerperales, esto es, 3,4 por mil. La discrepancia entre esta cifra y 2,6 parece demasiado amplia para adjudicarla a un error corriente de muestreo.

Cálculos similares realizados para los niños mayores arrojan también resultados insatisfactorios. Para los de edad más avanzada, el número de huérfanos registrado cae sistemáticamente por debajo de los números calculados. Existe para esto una explicación racional en el hecho de que cierta proporción de estos niños mayores tienen padrastros y no se registran como huérfanos.

El examen de estas cifras en tal sentido pone de manifiesto el hecho de que es deseable contar con mejor información respecto de:

1. Errores de registro; deberían reducirse a un mínimo.
2. Tasas de mortalidad diferentes para los huérfanos respecto de otros niños.
3. Incidencia de padrastros.
4. Relación entre muertes puerperales por 1 000 nacimientos de niños vivos y muertes puerperales efectivamente ocurridas con 1 000 nacimientos de niños vivos.

Comparación de la orfandad materna y paterna observadas. Incluso en condiciones normales hay más huérfanos paternos que maternos, debido a los matrimonios más tardíos y a la mayor mortalidad del hombre en comparación con la mujer. En el caso de Inglaterra y Gales, el contraste es, por supuesto, mucho más exagerado ante la merma de la población masculina con la Guerra Mundial. Esto resulta plenamente evidente en las cifras del cuadro 10, columnas 2 y 5, y en el gráfico 7.

Huérfanos absolutos. Las cifras para huérfanos absolutos son de especial interés, y esto es válido no sólo por razones prácticas obvias, sino también en el terreno teórico. Si la probabilidad de que un niño pierda a su madre fuera independiente de la supervivencia o de la muerte previa del padre y viceversa, cabría esperar (dentro de los límites de los errores de muestreo) que la frecuencia de la orfandad absoluta a cada edad de la vida fuera el producto de las frecuencias de las orfandades materna y paterna a esa edad. En el cuadro 9, columna (10), aparecen los porcentajes de huérfanos absolutos esperados en esta hipótesis simple. En la columna (7), para efectos de comparación, aparecen los porcentajes efectiva-

mente observados. Se ve que los *observados* son muy superiores a los porcentajes *esperados*. Incluso a la edad de catorce años el factor de corrección llega a 1,75, y crece regularmente a medida que se desciende en la escala de edades, hasta que, para aquellos niños menores de un año que han perdido a ambos padres, encontramos que los huérfanos absolutos son más de diez veces más frecuentes de lo que habrían sido si la muerte previa de un padre no tuviera influencia en la probabilidad de muerte del otro.

No puede pasarse por alto la gravedad de lo que esto implica. El padre y la madre viven en condiciones similares. Puesto que se ha descubierto que la muerte sucesiva de ambos padres en un corto intervalo de tiempo ocurre con mucha mayor frecuencia de lo que correspondería a la ocurrencia de ellas si fuesen dos sucesos independientes, se deduce que cuando se produce la muerte de ambos en el mismo año es, en la mayoría de los casos, un síntoma de condiciones insalubres o de una severa estrechez económica en el hogar. Cuando el intervalo entre las muertes de los dos padres es de dos, tres o más años, la situación es presumiblemente menos extrema, y de hecho puede haber sido normal en la época de la muerte del primero. Los problemas evidenciados por las cifras dadas aquí son probablemente, en gran medida, producto de la desaparición del padre muerto en primer lugar. Como ya se destacó, la naturaleza de las cosas explica que en la mayoría de los casos éste sea el padre, el jefe de familia.

El exceso de la frecuencia *observada* sobre la *esperada* de huérfanos absolutos es, por supuesto, nada más que otra expresión —aunque muy valiosa— de la ya conocida sobremortalidad entre las viudas y viudos que entre la población casada, para una edad dada.²³

TRATAMIENTO SINTETICO

El método general seguido en el estudio sintético de la orfandad en Inglaterra y Gales fue esencialmente el mismo aplicado al caso de los Estados Unidos, lo que hace innecesario repetirlo en detalle.

La información fundamental en que se basó el tratamiento sintético es la siguiente:

Mortalidad: Tabla de vida inglesa n° 9, relativa a los años 1920, 1921 y 1922.

Fecundidad: a) *Mujeres:* El número de

²³El exceso de huérfanos absolutos puede ser en parte aparente, y deberse a un mejor registro de los huérfanos absolutos en relación con los medio-huérfanos, producto de la mayor urgencia de la orfandad absoluta. Asimismo, los medio-huérfanos pueden llegar a tener un padrastro, lo que es imposible para los huérfanos absolutos.

hijos legítimos de ambos sexos, nacidos en 1921 por mujer casada, en grupos quinquenales de edades, aparece en la *Statistical Review* de Inglaterra y Gales para el año 1922 (publicada en 1925), página 138. La edad media de la curva de fecundidad de las mujeres (curva de fecundidad por edad) para Inglaterra y Gales, de acuerdo con esa información, es de 30,2 años. La cifra correspondiente para los hombres es de 33,6 años. Es ésta toda la información necesaria sobre la fecundidad para calcular la orfandad mediante la fórmula reducida $1 - [(l_a + v)/l_v]$. Para mayores detalles concernientes a la curva de fecundidad para Inglaterra y Gales, tal como aparece en el cálculo mediante el razonamiento más exacto, véase el apéndice, página 93.

Fecundidad: b) Hombres: La información respecto a los hombres se obtuvo del Censo de Inglaterra y Gales de 1921, volumen sobre Dependencia, Orfandad y Fecundidad, página 241.

A partir de esta información fundamental, las distintas características demográficas derivadas para Inglaterra y Gales fueron calculadas esencialmente de acuerdo con los principios y en la forma ya descrita para los Estados Unidos.

Huérfanos maternos. Los resultados del cálculo²⁴ de los porcentajes de huérfanos entre 0 y 15 años aparecen en el cuadro 10, columna 6, y en la primera parte del gráfico 7 representados por una curva suave junto a la curva escalonada de las cifras observadas. Se notará que hasta alrededor de los siete años hay más bien una estrecha concordancia entre las cifras calculadas y las observadas. Desde esta edad hasta los 15 años hay todavía una concordancia aproximada, pero la diferencia es creciente. El hecho de que las cifras observadas queden por *debajo* de las calculadas puede ser otra señal de que algunos huérfanos, al llegar a tener padrastros, no aparecen registrados como tales, suposición para la cual encontramos algún fundamento en nuestro análisis directo de la cifra observada de orfandad. Debe recordarse que esto indicaba la presencia de una mortalidad anormalmente baja entre las madres, a menos que algunos huérfanos no hubieran sido registrados como tales. El cuadro 11

²⁴En esta sección y las siguientes, los cálculos fueron llevados a cabo mediante la fórmula exacta dada en el apéndice, pero los resultados diferirían muy poco si se hubiera empleado la fórmula reducida.

CUADRO 11
NUMERO DE HUÉRFANOS, INGLATERRA Y GALES, 1921, COMPARACION DE CIFRAS OSERVADAS Y CALCULADAS

(1)	(2)	(3)			(4)			(5)		
Edad	Total de niños con información concerniente a los padres	Huérfanos paternos			Huérfanos maternos			Huérfanos absolutos		
		Observados	Calculados	Diferencia	Observados	Calculados	Diferencia	Observados	Calculados ^a	Diferencia
0-15	10 362 244	786 090	593 501	192 589	316 339	386 746	- 70 407	55 245	54 647	598
0-1	785 852	7 541	5 580	1 961	3 382	3 772	- 390	332	236	96
1-2	816 506	13 508	10 615	2 893	5 379	6 940	- 1 561	533	490	43
2-3	544 211	19 780	10 340	9 440	7 048	6 803	245	837	381	456
3-4	529 227	25 000	13 389	11 611	9 088	8 838	250	1 170	582	588
4-5	603 310	36 124	19 185	16 939	11 968	12 730	- 762	1 607	965	642
5-6	647 579	45 577	25 061	20 516	14 765	16 643	- 1 878	2 091	1 295	796
6-7	699 558	57 266	32 040	25 226	18 473	21 197	- 2 724	2 915	1 889	1 026
7-8	716 809	61 932	38 134	23 798	21 519	25 232	- 3 713	3 430	2 509	921
8-9	713 052	63 833	43 496	20 337	23 694	28 593	- 4 899	3 874	3 137	737
9-10	702 427	65 920	48 538	17 382	26 038	31 820	- 5 782	4 543	4 074	469
10-11	707 463	69 423	54 899	14 524	28 394	35 798	- 7 404	5 093	5 023	70
11-12	720 078	73 914	62 287	11 627	31 802	40 396	- 8 594	5 840	6 337	- 497
12-13	732 329	78 954	70 157	8 797	36 004	45 331	- 9 327	6 925	7 689	- 764
13-14	734 055	82 822	77 516	5 312	38 487	49 916	- 11 429	7 655	9 322	- 1 667
14-15	709 788	84 490	82 264	2 226	40 298	52 737	- 12 439	8 400	10 718	- 2 318

^a Las cifras "calculadas" incluyen la corrección por correlación entre las probabilidades de muerte del marido y de la esposa. Véase la nota al pie para la columna (9) del cuadro 10.

muestra los totales correspondientes a los porcentajes del cuadro 10.

Huérfanos paternos. La segunda parte del gráfico 7 y la columna 3 del cuadro 10 muestran un panorama muy característico, que difiere radicalmente del mostrado en la curva para los huérfanos maternos. Los efectos de la guerra se manifiestan con gran claridad en la forma de un fuerte exceso de los huérfanos observados sobre los calculados entre las edades de 2 y 14

años. Es también característico que los niños muy pequeños, nacidos después de la guerra, y los mayores, nacidos antes de la guerra, no participan en esta desviación de lo observado con respecto a lo calculado.

Huérfanos absolutos. Las cifras y las curvas relativas a éstos exigen un pequeño comentario por separado. Naturalmente, resultan de la situación correspondiente a la orfandad materna y paterna.

GRAFICO 7
ORFANDAD, INGLATERRA Y GALES, 1921

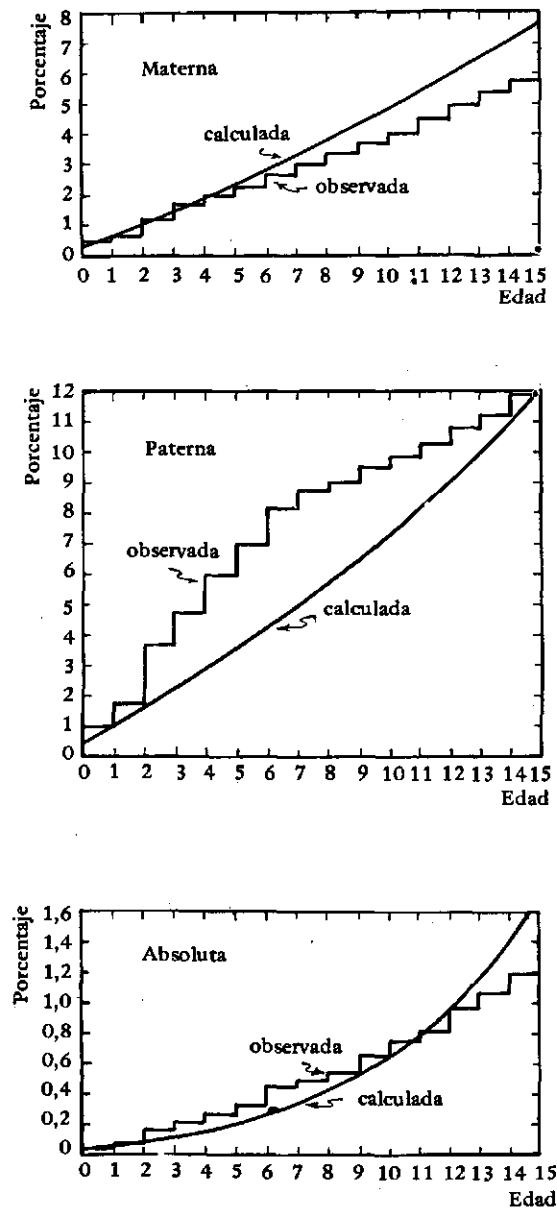
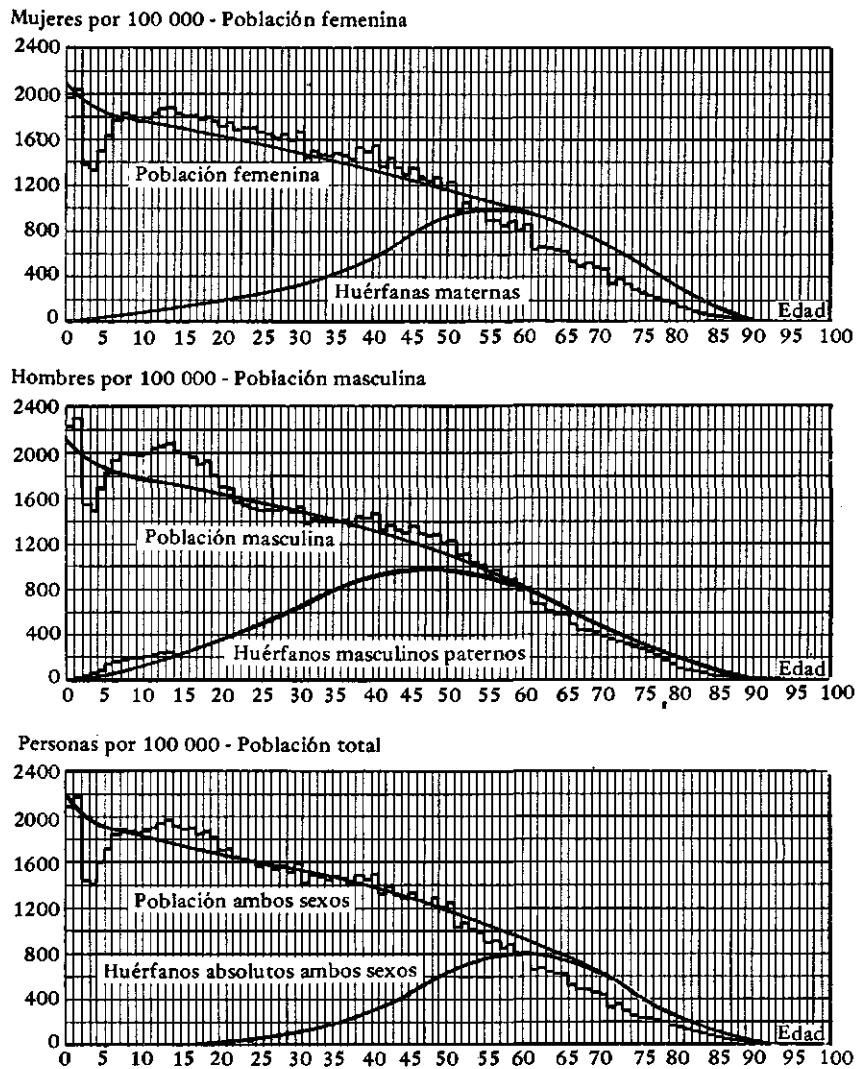


GRAFICO 8
ORFANDAD, INGLATERRA Y GALES, 1921



Conjunto de los huérfanos en la población de Inglaterra y Gales. En el gráfico 8, en cada una de las tres partes la línea quebrada superior representa a la población reducida a base de 100 000 y trazada de acuerdo a la composición por edades *observada*. La línea suave que corta a esta línea quebrada representa a la composición por edades "maltusiana" correspondiente a la tasa natural "intrínseca" de crecimiento calculada según la fecundidad y la mortalidad²⁵ masculinas observadas en la población de Inglaterra y Gales en 1921. La línea suave inferior en forma de sombrero es el dibujo de la composición por edades de los huérfanos, obtenida al aplicar el porcentaje de huérfanos, característico de cada edad, tal como fue calculado por los métodos descritos arriba, a la estructura por

edades *calculada* (línea suave) de la población. La curva escalonada correspondiente muestra la información observada sobre la misma base. El gráfico está dividido en tres partes, de las cuales la primera muestra las huérfanas maternas y la población femenina; la segunda, los huérfanos masculinos paternos y la población masculina, y la tercera, los huérfanos absolutos y la población de ambos sexos.²⁶

En lo que respecta a la estructura maltusiana por edades representada por la curva suave, resaltan ciertos hechos significativos. Mientras en general la tendencia de la distribución maltusiana por edades armoniza bastante bien con la observada, por lo menos hasta los cincuenta

²⁵ Véase el apéndice, página 81.

²⁶ Sin corregir por la correlación entre la probabilidad de muerte del marido y de la esposa. Esta corrección apenas aparecería en la escala del dibujo.

años de edad, es notorio que la proporción efectiva de niños de ambos sexos entre uno y cinco años de edad queda por debajo de la maltusiana. Claramente, esto se debe al efecto de la guerra sobre la tasa de natalidad en los correspondientes años calendario.

Nuevamente, la distribución observada por edades muestra para los hombres una marcada depresión que abarca desde alrededor de los 20 años hasta alrededor de los 40 años de edad. Esta es la representación gráfica de la reducción del número de hombres debida a las muertes en la guerra. En contraste con esto, la estructura maltusiana por edades, trazada en la curva suave, aparece, por supuesto, libre de esta depresión.

Se apreciará sin duda el interés de las tres partes del gráfico 8. Hay una muy buena concordancia entre las cifras calculadas y observadas en el caso de los huérfanos maternos, y es tan buena como podría esperarse, en vista de los efectos de la guerra, en el caso de los huérfanos paternos y absolutos. *Si no estuvieran disponibles las estadísticas directas sobre orfandad, la información obtenida indirectamente concierne a estos huérfanos sería una valiosa contribución a nuestro conocimiento.*

Esta es la situación real en Estados Unidos, y fue expresamente con el propósito de establecer estos hechos que se emprendió el presente estudio.

Comparación de la orfandad en los Estados Unidos y en Inglaterra y Gales. Un hecho notable, puesto de manifiesto por las cifras que aparecen en los cuadros 1, 4, 9 y 10, es que en los Estados Unidos hay un contingente mucho más importante de huérfanos que en Inglaterra, no sólo en términos absolutos sino también en proporción. A primera vista, este hecho es sorprendente, puesto que la tabla de vida inglesa para 1921, aunque algo superior a la de los Estados Unidos para 1919-20, no es apreciablemente diferente de ésta, al menos en lo que respecta a la esperanza de vida, que registra 57,52 para las mujeres de la población blanca en los Estados Unidos y 59,58 para las mujeres en Inglaterra. Para los hombres la diferencia es aún menor, 55,33 en los Estados Unidos y 55,62 en Inglaterra. Lo que origina el marcado exceso de huérfanos en los Estados Unidos con respecto a Inglaterra es un rasgo muy característico en las tablas de vida para los dos países: que la tabla de vida norteamericana debe su favorable duración media de la vida principalmente a las bajas tasas de mortalidad en las edades tempranas de la vida, mientras que para los adultos muestra tasas de mortalidad claramente menos favorables que Inglaterra y Gales, especialmente

a aquellas edades en que son padres de familia. Estos hechos quedan de manifiesto en los extractos de las tablas de vida norteamericana e inglesa dispuestas una al lado de la otra para efectos comparativos. (Véase el cuadro 12, pág. 79). El resultado de esta situación peculiar es que en los Estados Unidos sobreviven relativamente más niños y mueren relativamente más padres, con el efecto necesario de producir más huérfanos. La diferencia es muy marcada a pesar de que, por otra parte, no es muy fuerte la diferencia en las esperanzas de vida en los dos países.

CONCLUSION

Análisis de población

Para terminar, quiero llamar la atención sobre la relación entre estudios del tipo del presentado aquí y la disciplina general del Análisis de Población. Los hechos y las relaciones expuestos en las páginas anteriores han sido presentados originalmente en razón de su interés directo para el problema específico de la dependencia y la orfandad. Pero debería prestarse igual atención a estos desarrollos como ejemplo de un método general y una aproximación al problema del Análisis de Población. Es grande el número de variables diferentes con que tenemos que tratar en las estadísticas del estado civil. Nos atañen el número de personas, su edad y su relación por sexo, la tasa de natalidad, la tasa de mortalidad, el estado civil, la fecundidad como función de la edad y del sexo, las tasas de nupcialidad, frecuencia de segundas nupcias, la viudez, la orfandad, los divorcios, etc., para mencionar sólo algunos de los ejemplos más significativos. Ahora, estas distintas variables no son independientes. Existe entre ellas un sistema de relaciones, complicado no sólo por el gran número de variables involucradas, sino más bien por el hecho de que estas relaciones no son de la forma simple de las funciones matemáticas, por medio de las cuales el valor de una variable queda completamente determinado cuando se conocen todos los otros: las relaciones entre esta multitud de variables tienen el carácter de una correlación, de manera tal que sólo queda definida la *distribución de frecuencias* del valor de una variable cuando se conocen los valores de las restantes variables. El resultado de esta situación es que los estadísticos optan comúnmente, hasta donde los recursos lo permiten, por determinar cada característica mediante una observación independiente, prestando relativamente poca atención a las interrelaciones entre esas características, o a los

CUADRO 12

FUNCIÓN q_x POR MIL DE LAS TABLAS DE VIDA DE INGLATERRA Y GALES, 1921
Y DE LOS ESTADOS UNIDOS, 1920, COMPARADAS POR SEXO

(1) Edad	(2) Hombres		(4) Mujeres	
	(3) Inglaterra y Gales 1921	(3) Estados Unidos, 1920 blancos	(4) Inglaterra y Gales 1921	(5) Estados Unidos, 1920 blancos
	0	89,96	84,33	69,42
1	23,39	17,59	21,37	15,82
2	10,50	8,45	9,91	7,74
3	6,50	5,94	6,30	5,61
4	4,75	4,62	4,65	4,10
5	4,17	3,92	4,24	3,62
6	3,37	3,43	3,33	3,07
7	2,76	3,01	2,66	2,60
8	2,30	2,52	2,20	2,15
9	1,99	2,24	1,93	1,90
10	1,81	2,13	1,80	1,81
11	1,73	2,13	1,80	1,82
12	1,75	2,20	1,87	1,89
13	1,84	2,39	2,00	2,05
14	1,99	2,74	2,14	2,33
15	2,18	3,16	2,27	2,69
20	3,49	4,58	3,06	4,67
25	3,98	5,44	3,50	6,18
30	4,34	6,45	3,92	6,85
35	5,53	7,28	4,51	6,98
40	6,88	8,16	5,32	7,23
45	8,81	9,53	6,68	8,45
50	11,79	12,16	9,15	10,93
55	17,55	17,42	13,19	15,42

métodos indirectos que permiten determinar al menos los valores aproximados de ciertas características, como cantidades *derivadas*, cuando otras han sido determinadas directamente. Con todo tales métodos indirectos merecen nuestra atención, porque son adecuados a veces para producir información que de otra manera está enteramente fuera de nuestro alcance, por ejemplo, en el caso de observaciones realizadas en el pasado, no susceptibles de ser reconstruidas y que escapan a la posibilidad de reunir información suplementaria. Pero incluso para estadísticas presentes o futuras, consideraciones prácticas y económicas, sin considerar las omisiones y los errores de criterio, introducen un límite muy rígido al número y a la variedad de las características para las cuales puede recogerse informaciones directas. Los métodos indirectos en estos casos son todavía una ayuda aceptable cuando hay problemas. Cuando los métodos directos fallan por comple-

to, incluso la información aproximada obtenida en forma indirecta puede ser de gran valor.

Junto a esta utilidad práctica obvia de los métodos indirectos como medios para procurarse información que de otra manera es inaccesible, el estudio del *Análisis de Población* como un sistema de interrelaciones entre las características de una población cumple una importante función como ayuda para pensar. La variedad de estas características con las que tenemos que tratar corrientemente, se nos presenta como un caos desconcertante destinado a agobiar nuestra memoria y a confundir nuestro entendimiento, a menos que veamos estas características como unidas por nexos de relación causal. Sólo desde este punto de vista es eminentemente deseable el estudio del *Análisis de Población* en su sentido racional, en contraposición con el estudio meramente empírico de las estadísticas del estado civil.

APENDICE

En consideración a aquellos lectores que están interesados más bien en los resultados presentados que en los detalles del método, se ha eludido en el texto precedente la exposición altamente técnica, y se ha separado en este Apéndice el trabajo analítico más pesado.

PROPORCION DE HUÉRFANOS ENTRE PERSONAS DE EDAD DETERMINADA²⁷

Huérfanos maternas. (Hijas que han perdido a su madre). Se calculan indirectamente, encontrando primero la proporción de hijas vivas, a una edad determinada, cuyas madres también viven. Restando ésta del total de hijas vivas a esa edad, encontramos el número de aquéllas cuya madre no vive, esto es, que son huérfanos maternas.

El principio que está detrás del cálculo es el siguiente:

En ausencia de inmigración o emigración, el número de personas de edades comprendidas entre a y $a + da$, en la población total de N_0 personas está dado por

$$N_0 c(a) da = B(t_0 - a) p(a) da \quad (4)$$

en que $B(x)$ es el número total de nacimientos por unidad de tiempo en el momento $t = x$, y $p(a)$ es la probabilidad al nacimiento de alcanzar la edad a .²⁸ Consideraremos aquí sólo el caso en que esta probabilidad $p(a)$ es independiente de t dentro de los límites de tiempo que afectan sensiblemente la situación. La relación (4) se puede aplicar por separado, *mutatis mutandis*, a cada sexo y, cuando sea necesario, esto puede indicarse asignando los subíndices

m o f a los distintos símbolos; así,

$$N_f c_f(a) da = B_f(t_0 - a) p_f(a) da \quad (5)$$

Cuando no hay confusión posible estos subíndices se pueden omitir.

Simbolicemos por $m(n)$ la tasa media de fecundidad de mujeres de edad n , de manera que $m_f(n)$, por ejemplo, simboliza el número de hijas nacidas por mujer²⁹ de edad n y por unidad de tiempo. Entonces, el número de hijas nacidas por unidad de tiempo, en el momento t_0 , de madres en edades comprendidas entre n y $n + dn$, está dado por

$$B_f(t_0 - n) p_f(n) m_f(n) dn \quad (6)$$

y la fracción resultante para el momento t_0 por unidad de tiempo del total de hijas nacidas, es

$$\frac{B_f(t_0 - n)}{B_f(t_0)} p_f(n) m_f(n) dn \quad (7)$$

Considerando ahora las $B_f(t_0 - a) p_f(a) da$ hijas de edades entre a y $a + da$ nacidas en el período $(t_0 - a)$, la proporción de éstas que proviene de madres de edades entre n y $n + dn$ es, evidentemente

$$\frac{B_f(t_0 - a - n)}{B_f(t_0 - a)} p_f(n) m_f(n) dn \quad (8)$$

y su número es

$$\begin{aligned} B_f(t_0 - a) p_f(a) da \frac{B_f(t_0 - a - n)}{B_f(t_0 - a)} p_f(n) m_f(n) dn = \\ = p_f(a) da B_f(t_0 - a - n) p_f(n) m_f(n) dn \end{aligned} \quad (9)$$

Pero, si estas hijas tienen ahora a años de edad, sus madres deben tener $a + n$ años. La proporción de esas madres que aún sobrevive

es por lo tanto, $p_f(a + n)/p_f(n)$. Luego, de las hijas que tienen entre a y $a + da$ años de edad, en el momento t_0 aquellas que viven y tienen a sus madres vivas son,

$$p_f(a) da B_f(t_0 - a - n) p_f(a + n) m_f(n) dn \quad (10)$$

²⁷Como el caso de los hijos ilegítimos constituye un problema separado del de la orfandad, todos los cálculos se han basado sólo en la fecundidad legítima.

²⁸El símbolo $p(a)$, que se emplea a lo largo de este apéndice, es el equivalente del l_x de la notación actuarial, en el entendido que $l_0 = l$.

²⁹En cualquier situación matrimonial.

Y de estas niñas, cuyas edades fluctúan entre a y $a + da$ años en el momento t_0 , aquellas nacidas de madres de todas las edades, que viven y cuyas madres viven también, son

$$p_f(a) da \int_0^\infty B_f(t_0 - a - n) p_f(a + n) m_f(n) dn \quad (11)$$

y de esas mismas niñas, pero cuyas madres han muerto, sobreviven:

$$B_f(t_0 - a) p_f(a) da \left[1 - \int_0^\infty \frac{B_f(t_0 - a - n)}{B_f(t_0 - a)} p_f(a + n) m_f(n) dn \right] \quad (12)$$

y la proporción de estas huérfanas maternas entre las mujeres de edades entre a y $a + da$ es

$$1 - \int_0^\infty \frac{B_f(t_0 - a - n)}{B_f(t_0 - a)} p_f(a + n) m_f(n) dn \quad (13)$$

Habiendo encontrado, para cada edad, el

número de niñas de edades entre a y $a + da$ cuya madre ha muerto (huérfanas maternas), podemos sumar para encontrar el número de niñas que a una edad o por debajo de una edad determinada a_2 , o en forma más general, entre dos edades determinadas a_1 y a_2 , han perdido a su madre. Esto se reduce simplemente a formar la integral doble

$$\int_{a_1}^{a_2} B_f(t_0 - a) p_f(a) \left[1 - \int_0^\infty \frac{B_f(t_0 - a - n)}{B_f(t_0 - a)} p_f(a + n) m_f(n) dn \right] da \quad (14)$$

Finalmente, la proporción de éstas dentro de la población femenina total comprendida

entre las edades a_1 y a_2 será

$$\frac{\int_{a_1}^{a_2} B_f(t_0 - a) p_f(a) \left[1 - \int_0^\infty \frac{B_f(t_0 - a - n)}{B_f(t_0 - a)} p_f(a + n) m_f(n) dn \right] da}{\int_{a_1}^{a_2} B_f(t_0 - a) p_f(a) da} \quad (15)$$

La distribución temporal de la tasa de natalidad: la función $B(t)$. En ausencia de inmigración y emigración, en una población con un patrón fijo por edad de fecundidad y mortalidad, el número de nacimientos por unidad de tiempo puede representarse a través de una serie exponencial

$$B(t) = B_0 e^{r_0 t} + B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} + \dots \quad (16)$$

en que r_0, r_1, \dots son las raíces de la ecuación trascendental³⁰ para r

$$\int_0^\infty e^{-ra} p(a) m(a) da = 1 \quad (17)$$

mientras que las constantes B están determinadas por las condiciones iniciales. De las raíces r sólo una es real, aquella simbolizada por r_0 . Todas las demás raíces son complejas y sus partes reales son algebraicamente menores que

r_0 . Como consecuencia de esto, después de un cierto lapso, el número de nacimientos sigue esencialmente la ley simple de crecimiento en progresión geométrica.

$$B(t) = B_0 e^{r_0 (t-t_0)} \quad (18)$$

mientras que se demuestra fácilmente que la distribución por edades es

$$c(a) = b e^{-r_0 a} p(a) \quad (18 a)$$

donde $c(a)$ es el coeficiente de la distribución por edades y b es la tasa constante de natalidad por persona. La tasa de crecimiento natural r_0 , definida por la ecuación (17), puede denominarse apropiadamente tasa intrínseca de crecimiento natural, esto es, la tasa determinada por el patrón de fecundidad y mortalidad por edades característico de la población. Respecto a un método conveniente para calcular r_0 y las raíces complejas de (17), véase la referencia de 1928 en la nota al pie.

La distribución por edades (18 a) puede considerarse como la norma para una población

³⁰F.R. Sharpe y A.J. Lotka: "Phil. Mag.", abril 1911, pág. 435; A.J. Lotka: "Proceedings National Academy of Science", 1922, vol. 8, pág. 339; "American Journal of Hygiene", 1928, vol. 8, pág. 888. Véase también la bibliografía al pie de la página siguiente.

con un patrón fijo de fecundidad y mortalidad por edades. La norma estable a que tiende espontáneamente esta población, y a la que vuelve cuando ha sido desviada de allí temporalmente en cualquier sentido. A menos que las desviaciones iniciales respecto a esta norma

³¹En un sentido más amplio, es a veces conveniente denominar maltusiana a una distribución por edades de la forma general $be^{-ra}p(a)$, sin considerar el valor particular (constante) de r . Así, en el gráfico 6 (véanse la página 66 y también los cuadros 1 y 2), se dibujó una curva suave de la distribución por edades empleando para r la tasa *observada* de crecimiento natural, que en general difiere de la tasa *intrínseca* r_0 definida por la ecuación (17). Véase también la página 81. La que sigue es una bibliografía que incluye algunas de las principales publicaciones del autor respecto a la población *normal* o maltusiana y al tema anexo de la aplicación de las ecuaciones integrales a los problemas de población.

LOTKA, A.J.: 1907. *Relation between Birth Rates and Death Rates*, "Science", vol. 26, pág. 21.

1907. *Studies on the Mode of Growth of Material Aggregates*, "Amer. J. Science", vol. 24, págs. 199, 375.

SHARPE F.R. y LOTKA, A.J.: 1911. *A Problem in Age Distribution*, "Phil. Mag.", vol. 21, pág. 435.

LOTKA, A.J.: 1913. *A Natural Population Norm*, "J. Washington Acad. Sciences", vol. 3, págs. 241, 289.

1918. *The Relation between Birthrate and Deathrate in a Normal Population, and the Rational Basis of an Empirical Formula given by WILLIAM FARR*, "Quart. Publication Amer. Statistical Association", vol. 13, pág. 121.

1922. *The Stability of the Normal Age Distribution*, "Proc. Natl. Acad. Science", vol. 8, pág. 339.

DUBLIN, L.I. y LOTKA A.J.: 1925. *On the True Rate of Natural Increase*, "Jl. Amer. Statistical Assoc.", vol. 30, pág. 305.

LOTKA, A.J.: 1926. *The Progressive Adjustment of Age Distribution to Fecundity*, "J. Wash. Acad. Science", vol. 16, pág. 505.

1927. *The Size of American Families in the Eighteenth Century*, "Jl. Amer. Statistical Assoc.", pág. 154.

LOTKA, A.J.: 1927. *The Actuarial Treatment of Official Birth Records*, "The Eugenics Review", vol. 19, pág. 257.

1928. *The Progeny of a Population Element*, "Amer. J. Hygiene" vol. 8, n.º 6, pág. 875.

1929. *The Spread of Generations*, "Human Biology", vol. 1, n.º 3, págs. 305-320.

1929. *Biometric Functions in a Population Growing in Accordance with a Prescribed Law*, "Proceed. National Acad. Science", vol. 15, n.º 10, págs. 793-798.

1925. *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, Baltimore Md. Véase en especial las páginas 110 y siguientes.

DUBLIN, L.I. y LOTKA, A.J.: 1930. *The True Rate of Natural Increase of the Population of the United States. Revision based on recent data: "Metron"*, vol. 8, pág. 107.

LOTKA, A.J.: 1931. *Some Elementary Properties of*

sean muy acentuadas, esto es, las constantes $B_1 B_2 \dots$, muy grandes, este acercamiento a la normal se logrará en general muy pronto, pues las desviaciones constituyen estados *transitorios*. Entonces, la población *normal*, o, como podemos llamarla, *maltusiana*,³¹ cuya distribución

Moments of Frequency Curves, "Jl. Washington Acad. Sci.", vol. 21, pág. 17.

BORTKIEWICZ, L.V.: 1911. *Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der stationären und der in progressiven Bevölkerung*. "Bulletin of the International Institute of Statistics", vol. 19, pág. 63.

MOSER, C.: 1921. *Ueber Gleichungen für eine sich erneuernde Gesellschaft mit Anwendung auf Sozialversicherungskassen*, "Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft".

1922. *A propos d'équations se rapportant a une association qui se renouvelle, avec application aux Caisses d'assurances Sociales*. "L'enseignement Mathématique", pág. 68.

1928. *Bevölkerungstatistische Grundlagen zur Alters und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz*, Berna.

1926. *Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit*, "Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker".

SCHOENBAUM, EMIL.: 1924. *Anwendung der Volterra'schen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik*, "Skandinavisk Aktuarietidskrift", pág. 241.

NORTON, H.T.J.: 1926. *Natural Selection and Mendelian Variation*, "Proceedings of the London Mathematical Society", vol. 28, part. 1, pág. 1.

FRIEDLI, W.: 1927. *Ueber die Stabilität der gegenseitigen Hilfskassen*, "Zeitschrift für Schweizerische Statistik und Volkswirtschaft", vol. 63, part. 3.

MEIDELL, BIRGER: 1928. *On damping effects and approach to equilibrium in certain general phenomena*, "Journal of the Washington Acad. of Sciences", vol. 18, pág. 437.

FRISCH, RAGNAR: 1929. *On approximation to a Certain Type of Integrals*, "Skandinavisk Aktuarietidskrift", pág. 129.

WYSS, HANS: 1929. *Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse*, "Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker", pág. 39.

ZWINGGI, ERNST: 1929. *Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen*, "Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker", part. 24.

WESTERGAARD, H. y NYBOLLE H.C.: 1928. *Grundzüge der Theorie der Statistik*. Jena, pág. 405.

HALDANE, J.B.S.: 1927. *A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection*. "Proceedings Cambridge Philosophical Soc.", vol. 23, pág. 607.

CONNOR, L.R.: 1926. *Fertility of Marriage and Population Growth*. "Journal of the Royal Statistical Society", pág. 557.

TRICOMI, F.: 1927. *Risoluzione di un problema demografico*. "Accademia delle Scienze di Torino", vol. 62, pág. 22.

por edades está definida por (18a), tiene un interés especial.

Las fórmulas generales desarrolladas arriba son aplicables de inmediato al caso de la población maltusiana haciendo la sustitución

$$B(t_0 - a - n) = N_0 b e^{-r_0(a+n)} \quad (19)$$

donde b es la tasa de natalidad por persona y por año, y N_0 es la población en el momento t_0 , y en que la fórmula es aplicable a cada sexo por separado. Por sustitución en (13), esto da para la proporción de huérfanas maternas entre las mujeres de edad a ,

$$1 - \int_0^\infty e^{-r_0 n} p_f(a+n) m_f(n) dn \quad (20)$$

Para una evaluación exacta debe emplearse esta expresión. Pero de ésta podemos derivar una fórmula mucho más simple que, en realidad, rige con buena aproximación para todas las edades en que la orfandad tiene un interés práctico; para conseguir esto escribimos (20) en la forma

$$1 - \frac{\int_0^\infty e^{-r_0 n} p_f(a+n) m_f(n) dn}{\int_0^\infty e^{-r_0 n} p_f(n) m_f(n) dn} \quad (21)^{32}$$

en que la integral del denominador de la fracción es igual a la unidad, de acuerdo con (17). Ahora, en esta fracción el factor que aparece tanto en el numerador como en el denominador tiende aproximadamente a anularse. De hecho, procederemos a demostrar que el valor de la expresión (20), y de allí también el de (21), está dado aproximadamente por

$$1 - \frac{p_f(a+\bar{n})}{p_f(\bar{n})} \quad (22)$$

donde \bar{n} es la edad media definida por

$$\bar{n} = \frac{\int_0^\infty n e^{-r n} p(n) m(n) dn}{\int_0^\infty e^{-r n} p(n) m(n) dn} \quad (23)$$

o, más simplemente y con un poco menos de exactitud³³

$$\bar{n} = \frac{\int_0^\infty n p(n) m(n) dn}{\int_0^\infty p(n) m(n) dn} = \frac{\int_0^\infty n m(n) dn}{\int_0^\infty m(n) dn} \quad (\text{aprox.}) \quad (23 a)$$

Para demostrar que las fórmulas (22, 23) son equivalentes a (21) es conveniente plantear el problema en forma algo más general.

Un Teorema relativo a ciertas medias

Considérese la media \bar{x} definida por

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\infty x \varphi(x) e^{-rx} f(x) dx}{\int_0^\infty e^{-rx} f(x) dx} \quad (24)$$

en que la función $f(x)$ define a una distribución de frecuencias.³⁴ Entonces se puede demostrar que aproximadamente

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\infty x e^{-rx} f(x) dx}{\int_0^\infty e^{-rx} f(x) dx} \quad (25)$$

Escribamos

$$\int_0^\infty x^K e^{-rx} f(x) dx = \int_0^\infty x^K F(x) dx = S_K \quad (26)$$

Desarrollemos en serie de Taylor $\varphi(x)$ en torno al punto $x = S_1/S_0$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_0^I \left(x - \frac{S_1}{S_0} \right) + \frac{\varphi_0^{II}}{2!} \left(x - \frac{S_1}{S_0} \right)^2 + \dots \quad (27)$$

en que φ_0 es el valor de φ en el punto $x = S_1/S_0$. Sustituyamos este desarrollo en (24)

$$\bar{x} = \varphi_0 + \frac{\varphi_0^{II}}{2!} \left[\frac{S_2}{S_0} - \left(\frac{S_1}{S_0} \right)^2 \right] + \dots \quad (28)$$

$$= \varphi_0 + \frac{\varphi_0^{II}}{2!} \mu_2 + \frac{\varphi_0^{III}}{3!} \mu_3 + \dots \quad (29)$$

donde μ_2, μ_3, \dots , son los momentos de $F(x)$ con respecto al punto S_1/S_0 (esto es, respecto a la media). En lugar de estos momentos introduciremos los correspondientes seminvariantes

³²Para simplificar la notación se omitirá el subíndice de r_0 en todo lo que resta de esta sección. No es probable que se cometa una equivocación como resultado de esta omisión.

³³Se ha comprobado que numéricamente las fórmulas (23 a) son aproximadamente equivalentes a (23). Esto se debe al hecho de que $a^{-rn} p(n)$ cambia lentamente al acercarse al máximo de $m(n)$ para aquellos valores de r que se dan en la práctica, y a que $m(n)$ es aproximadamente simétrico respecto a su modo en las cercanías de ella.

³⁴Sujeta a ciertas restricciones concernientes a los seminvariantes λ , que garantizan la convergencia de la serie (45).

de Thiele $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ de la función $F(x) = e^{-rx} f(x)$.³⁵

Entonces tenemos

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(\Lambda_1) + \frac{\varphi^{II}(\Lambda_1)}{2!} \Lambda_2 + \frac{\varphi^{III}(\Lambda_1)}{3!} \Lambda_3 + \frac{\varphi^{IV}(\Lambda_1)}{4!} (\Lambda_4 + 3\Lambda_2) + \frac{\varphi^V(\Lambda_1)}{5!} (\Lambda_5 + 10\Lambda_2\Lambda_3) + \dots \quad (30)$$

Procedemos ahora a expresar esto en términos de los seminvariantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de la función $f(x)$. Con este propósito, consideramos la función

$$= -\frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{\partial^K \log_e \Phi}{\partial \rho^K} \right)_{\rho=0} \quad (35)$$

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-\rho x} F(x) dx = \int_0^\infty e^{-(\rho+r)x} f(x) dx \quad (31)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} \Lambda_K \quad (36)$$

Por diferenciaciones sucesivas se llega rápidamente a que

Además

$$S_K = (-1)^K \left(\frac{\partial^K \Phi(x)}{\partial \rho^K} \right)_{\rho=0} \quad (32)$$

$$\Lambda_1 = \frac{S_1}{S_0} = \frac{\int_0^\infty x e^{-rx} f(x) dx}{\int_0^\infty e^{-rx} f(x) dx} \quad (37)$$

$$\Lambda_K = (-1)^K \left(\frac{\partial^K \log_e \Phi(x)}{\partial \rho^K} \right)_{\rho=0} \quad (33)$$

$$= \lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{\lambda_3}{2!} r^2 - \dots \quad (38)^{36}$$

$$= \xi \quad \text{para abreviar} \quad (39)$$

De la segunda de estas ecuaciones se deduce que

$$\Lambda_{K+1} = - \left(\frac{\partial \partial^K \log_e \Phi}{\partial \rho \partial \rho^K} \right)_{\rho=0} \quad (34)$$

en que λ_k denota el k -ésimo seminvariante de $f(x)$.

Entonces, por (36) encontramos

$$\Lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_3 r + \frac{\lambda_4}{2!} r^2 - \dots = -\frac{\partial \xi}{\partial r} = \xi^I \quad (40)$$

$$\Lambda_3 = \lambda_3 - \lambda_4 r + \frac{\lambda_5}{2!} r^2 - \dots = \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = \xi^{II} \quad (41)$$

$$\Lambda_K = \lambda_K - \lambda_{K+1} r + \frac{\lambda_{K+2}}{2!} r^2 - \dots = (-1)^{K+1} \frac{\partial^K \xi}{\partial r^K} = \xi^{(K)} \quad (42)$$

Sustituyendo estos resultados en (30) tenemos

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(\xi) + \frac{\xi}{2!} \varphi^{II}(\xi) + \frac{\xi^{II}}{3!} \varphi^{III}(\xi) + \frac{(\xi^{III} + 3[\xi^I]^2)}{4!} \varphi^{IV}(\xi) + \dots \quad (43)$$

Si $\varphi''(\xi)$ y las derivadas superiores son suficientemente pequeños, tenemos finalmente, con este grado de aproximación

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(\xi) = \varphi \left(\lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{\lambda_3}{2!} r^2 - \dots \right) \quad (44)$$

³⁵ El primer seminvariante λ_1 se toma aquí con respecto al punto 0. Como bien se sabe, los seminvariantes superiores son independientes del origen.

³⁶ Véase *American Journal of Hygiene*, 1928, vol. 8, pág. 888, 889, ecuaciones (68), (70), (19). Aquellas cantidades que allí aparecen simbolizadas por μ corresponden a las aquí simbolizadas por λ .

$$\bar{x} = \xi = \lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{\lambda_3}{2!} r^2 - \dots \quad (45) \quad (21), (22, 23) \text{ en que } \varphi(x) \text{ está representado por } p(a+n)/p(n).$$

$$= \frac{\int_0^\infty x e^{-rx} f(x) dx}{\int_0^\infty e^{-rx} f(x) dx} \quad \text{pgr (37), (38)} \quad (45 a)$$

Aplicación numérica. Para tomar como ejemplo un caso previsto en el texto, podemos considerar la proporción de huérfanas maternas en los Estados Unidos en las condiciones de 1920. Con este propósito escribiremos (21) en la forma

lo que prueba el toerema enunciado anteriormente, con lo que se justifica las ecuaciones

$$\Theta = 1 - \frac{\int_0^\infty e^{-rn} \frac{p_f(a+n)}{p_f(n)} p_f(n) m_f(n) dn}{\int_0^\infty e^{-rn} p_f(n) m_f(n) dn} \quad (46)$$

lo que podemos escribir, con un cambio obvio de notación, en conformidad con (25)

$$\Theta = 1 - \frac{\int e^{-rx} \varphi(x) f(x) dx}{\int e^{-rx} f(x) dx} \quad (47)$$

con $\varphi(x)$ simbolizando a la función $p(a+n)/p(n)$ a $p_f(n) m_f(n)$. Nuestro resultado (43) nos dice que

$$\begin{aligned} \Theta = 1 - \varphi(\bar{x}) = 1 - \varphi\left(\lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{\lambda_3}{2!} r^2 - \dots\right) \\ - \frac{1}{2} \left(\lambda_2 - \lambda_3 r + \frac{\lambda_4}{2!} r^2 - \dots\right) \varphi''\left(\lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{\lambda_3}{2!} r^2 - \dots\right) \end{aligned} \quad (48)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ son los seminvariantes de Thiele de la función $f(x)$, esto es, de $p_f(n) m_f(n)$, mientras φ'' es la segunda derivada de esta función con respecto a n .

Para continuar, debemos conocer no sólo los valores numéricos de los seminvariantes λ , sino también de la segunda derivada φ'' .

Las derivadas con respecto a n de $\varphi(x) = p(a+n)/p(n)$. Para determinar el orden de magnitud de los términos despreciados en (44), debemos saber algo respecto a la función $p(a+n)/p(n)$ y a sus derivadas con respecto a n .

Ahora se comprueba que esta función puede ser representada con suficiente aproximación, entre los 0 y 15 años de edad para a y entre

los 15 y los 45 para n , por un polinomio de tercer grado.

$$\frac{p(a+n)}{p(n)} = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 \quad (49)$$

en que los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, son funciones de a , la edad del niño. Se comprobó que β, γ, δ , quedaban satisfactoriamente representados por expresiones cúbicas en a , con los coeficientes numéricos indicados en el cuadro 13. El término independiente α no puede representarse de esta forma, pero se constató que podía quedar representado muy ajustadamente mediante una sección de una curva normal (de Gauss).

$$\alpha = 0,8 + 0,314 \times 10^{-0,00144(a-11,7)^2} \quad (50)$$

$$\log_{10} \left(\frac{\alpha - 0,8}{0,314} \right) = -0,00144(a-11,7)^2 \quad (51)$$

El cuadro 13 muestra los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, calculados primero directamente para las edades 2, 5, 7, 10, 12, 15, y luego según las

funciones de a en la forma indicada arriba. Volvemos ahora a la fórmula (48) para observar la magnitud relativa de los términos segundo

CUADRO 13

POLINOMIO PARA LA FUNCION DE SOBREVIVENCIA, ESTADOS UNIDOS,
MUJERES BLANCAS (TABLA DE VIDA DE FOUFRAY) 1919-20

$$\frac{p(a+n)}{p(n)} = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 \quad (49)$$

Coeficientes	Edad a del niño, años					
	2		5		7	
	Directo ^a	Ajustado ^b	Directo ^a	Ajustado ^b	Directo ^a	Ajustado ^b
α	1,029800	1,029800	1,072900	1,070600	1,093300	1,091800
β	-0,003800	-0,003850	-0,009930	-0,009730	-0,013470	-0,013400
γ	0,000110	0,000120	0,000310	0,000310	0,000440	0,000440
δ	-0,000001	-0,000001	-0,000003	-0,000003	-0,000005	-0,000005

Coeficientes	Edad a del niño, años					
	10		12		15	
	Directo ^a	Ajustado ^b	Directo ^a	Ajustado ^b	Directo ^a	Ajustado ^b
α	1,110500	1,111000	1,113700	1,113100	1,103700	1,1029000
β	-0,017680	-0,017930	-0,019730	-0,019960	-0,021200	-0,0209500
γ	0,000600	0,000610	0,000690	0,000700	0,000770	0,0007600
δ	-0,000007	-0,000007	-0,000008	-0,000008	-0,000010	-0,0000100

^a Ajuste por mínimos cuadrados según (49) a los valores de $[p(a+n)/p(n)]$ de la tabla de vida, para valores quinquenales de n desde 5 a 45, permaneciendo a constante.

^b Curva ajustada a algunos valores "directos" de los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, con a variando entre 2 y 15, de la siguiente manera:

$$\alpha = 0,8 + 0,314 \times 10^{-0,00144(a-11,7)^2} \quad (50)$$

$$\beta = -1,8588 \times 10^{-3} a - 4,1716 \times 10^{-5} a^2 + 4,8352 \times 10^{-6} a^3 \quad (52)$$

$$\gamma = 5,3216 \times 10^{-5} a + 2,5972 \times 10^{-6} a^2 - 1,832 \times 10^{-7} a^3 \quad (53)$$

$$\delta = -5,8012 \times 10^{-7} a - 2,5652 \times 10^{-8} a^2 + 1,3848 \times 10^{-9} a^3 \quad (54)$$

y tercero. Para esto necesitamos también los valores numéricos de los seminvariantes de la función $p(n) m(n)$ en este ejemplo, que son los siguientes:

$$\lambda_1 = 28,55 \quad \lambda_2 = -44,96 \quad \lambda_3 = 114,23 \quad \lambda_4 = -990 \quad (55)$$

Podemos considerar, por ejemplo, el caso sobre la tasa de mortalidad, es igual a 0,01. en que r , el exceso de la tasa de natalidad. Entonces

$$\lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{\lambda_3}{2!} r^2 = 28,55 - 0,45 + 0,0057 = 28,11 \quad (56)$$

Obsérvese que el término en r^2 es prácticamente despreciable.

Tenemos, además

$$\frac{1}{2} \left(\lambda_2 - \lambda_3 r + \frac{\lambda_4}{2!} r^2 \right) = \frac{1}{2} (44,96 - 1,14 - 0,05) = 21,88 \quad (57)$$

y

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{\text{II}}(28,11) &= 2\gamma + 6\delta n \\ &= 0,00154 - 0,00006 \times 28,11 \\ &= 0,00154 - 0,00169 \\ &= -0,00015 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{de acuerdo con (49)} \\ \text{para los niños de 15} \\ \text{años de edad.} \end{array} \quad (58)$$

Por último,

$$\left. \begin{aligned} \varphi \left(\lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{\lambda_3}{2!} r^2 \right) &= \varphi(28,11) = \\ &= \alpha + 28,11\beta + (28,11)^2 \gamma + (28,11)^3 \delta \\ &= 1,1037 - 0,5959 + 0,6084 - 0,2221 \\ &= 0,8941 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{para los niños de 15} \\ \text{años.} \end{array} \quad (59)$$

De manera que tenemos finalmente, de acuerdo con (48), (57), (58) y (59)

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= 1 - 0,8941 + (0,00015 \times 21,88) \\ &= 1 - 0,8941 + 0,0033 \\ &= 1 - 0,8908 \\ &= 0,1092 \text{ ó } 10,92 \text{ por ciento} \end{aligned} \right\} (60)$$

Obsérvese que el último término, $0,00015 \times 21,88$, es relativamente pequeño y no afecta grandemente el resultado. Entonces, en esta medida está justificado el empleo de la fórmula reducida

$$\Theta = 1 - \varphi \left(\lambda_1 - \lambda_2 r + \lambda_3 \frac{r^2}{2!} - \dots \right) \quad (61)$$

Para justificarlo plenamente es necesario investigar los términos de orden superior del desarrollo en serie. Sin embargo, el propósito de este análisis no era tanto justificar la omisión de los términos superiores como considerar el hecho de que el cálculo directo demostró que eran esencialmente despreciables y que, por lo tanto, la fórmula reducida da esencialmente los mismos resultados en el cálculo numérico que el método largo.

Generalización. En la práctica, la representación de la función $p(a+n)/p(n)$ no es una curva suave. Pero incluso así, las conclusiones alcanzadas antes continúan teniendo validez, con las modificaciones siguientes. Incluso si $\varphi(x)$ no es apta para ser desarrollada en serie de Taylor, y en cambio es una curva irregular con sinuosidades, el resultado obtenido arriba aún rige con gran aproximación. Sólo es necesario que $\varphi(x)$ sea representable en la forma

$$\varphi(x) = \Psi \left(x - \frac{S_1}{S_0} \right) + \epsilon \left(x - \frac{S_1}{S_0} \right) \quad (62)$$

donde $\Psi \left(x - \frac{S_1}{S_0} \right)$ es una serie de Taylor, en tanto que $\epsilon \left(x - \frac{S_1}{S_0} \right)$ es una función pequeña cuando $(x - S_1/S_0)$ es pequeño, esto es, al

acercarse a la media (y, por lo tanto, en muchos casos, al acercarse al modo) de $f(x)$. No es ni siquiera necesario que ϵ sea pequeño fuera de un intervalo de, digamos, $3\sqrt{\lambda_2}$ a cada lado de esta media, en caso que $f(x)$ sea una curva de frecuencias que se aproxime a la normal. Por esta razón, sólo debemos sumar a la serie (28) un término residual,

$$\frac{\int_0^\infty \epsilon \left(x - \frac{S_1}{S_0} \right) e^{-rx} f(x) dx}{\int_0^\infty e^{-rx} f(x) dx} \quad (63)$$

y éste será pequeño si la función ϵ tiene las propiedades mencionadas. En el hecho, no es ni siquiera necesario que ϵ sea pequeño si toma valores alternativamente positivos y negativos que tienden a anularse en la integral.

Método alternativo de análisis. El siguiente método alternativo presenta ciertos puntos de interés especial. Simbolizando nuevamente por Θ la proporción de huérfanos entre los niños de edad a , tenemos, de acuerdo con (21)

$$\begin{aligned} 1 - \Theta &= \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn \\ &= z, \text{ por ejemplo.} \end{aligned} \quad (64) \quad (65)$$

Entonces

$$\frac{dz}{dr} = - \int_0^\infty n e^{-rn} p(a+n) m(n) dn \quad (66)$$

$$= - \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn \quad (67)$$

$$= - \frac{1}{n} z \quad (68)$$

$$\therefore z = z_0 e^{-\int_0^r \frac{dr}{n}} \quad (69)$$

donde

$$\frac{1}{n} = \frac{\int_0^\infty n e^{-rn} p(a+n) m(n) dn}{\int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_1 - r Q_2 + \frac{r^2}{2!} Q_3 - \dots}{Q_0 - r Q_1 + \frac{r^2}{2!} Q_2 - \dots} \end{aligned} \quad (71)$$

$$= \mu_1 - \mu_2 r + \mu_3 \frac{r^2}{2!} - \mu_4 \frac{r^3}{3!} + \dots \quad (72)$$

el símbolo Q_k denota el k -ésimo momento

$$\int_0^\infty n^k p(a+n) m(n) dn \quad (73)$$

y el símbolo μ_k el correspondiente k -ésimo

seminvariante de Thiele, definido como sigue:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \mu_1 Q_0 \\ Q_2 &= \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_0 \\ Q_3 &= \mu_1 Q_2 + 2\mu_2 Q_1 + \mu_3 Q_0 \end{aligned} \right\} (74)$$

Cuando $r = 0$, $z = z_0$, así

$$z_0 = \int_0^\infty p(a+n) m(n) dn = Q_0 \quad (75)$$

De manera que, finalmente,

$$z = Q_0 e^{-\mu_1 r + \mu_2 \frac{r^2}{2!} - \mu_3 \frac{r^3}{3!} + \dots} \quad (76)$$

ó

$$\log_e z = \log_e Q_0 - \mu_1 r + \frac{\mu_2 r^2}{2!} - \frac{\mu_3 r^3}{3!} + \dots \quad (77)$$

Por otro lado,

$$Q_k = \int_0^\infty n^k \frac{p(a+n)}{p(n)} p(n) m(n) dn \quad (78)$$

$$= \int_0^\infty n^k (\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \dots) p(n) m(n) dn \quad (79)$$

$$= \alpha R_k + \beta R_{k+1} + \gamma R_{k+2} + \delta R_{k+3} + \dots \quad (80)$$

en que $R_k = \int_0^\infty n^k p(n) m(n) dn \quad (81)$

Ahora, para una población malthusiana³⁷

$$\int_0^\infty c^{-rn} p(n) m(n) dn = 1 \quad (17)$$

o, como puede verse mediante un proceso similar a aquel según el cual se obtuvo (77) a partir de (64), (65) y (66)

$$0 = \log_e R_0 - \lambda_1 r + \lambda_2 \frac{r^2}{2!} \dots \quad (82)^{38}$$

al paso que, por (77)

$$\log_e z = \log_e Q_0 - \mu_1 r + \mu_2 \frac{r^2}{2!} - \dots$$

³⁷En el sentido más restringido, como fue definida en la ecuación (18a). Véase también notas al pie en páginas 80 y 82, donde se señala que en esta sección se escribe r en lugar de r_0 para simplificar la notación.

³⁸Véase *American Journal of Hygiene*, 1928, vol. 8, pág. 888 y siguientes.

$$\begin{aligned} \text{Luego } \log_e z &= \log_e \frac{Q_0}{R_0} - (\mu_1 - \lambda_1) r + \\ &+ (\mu_2 - \lambda_2) \frac{r^2}{2!} - \dots \end{aligned}$$

en que λ_k es, tal como se la definió arriba, el k -ésimo seminvariante de la función $p(n) m(n)$, mientras que μ_k es el seminvariante de la correspondiente función "aumentada" $p(a+n) m(n)$. En realidad, los μ difieren, aunque poco, de los λ , como se ve en el ejemplo numérico que sigue y como se muestra analíticamente en una sección posterior. Luego, tenemos, con buena aproximación.

$$z = \frac{Q_0}{R_0} \quad (84)$$

$$= \alpha + \beta \frac{R_1}{R_0} + \gamma \frac{R_2}{R_0} + \delta \frac{R_3}{R_0} \quad (85)$$

$$\Theta = 1 - z = 1 - \frac{Q_0}{R_0} = \frac{R_0 - Q_0}{R_0} \quad (86)$$

Nótese que R_0 es el índice de reproducción (relación del total de nacimientos en dos generaciones sucesivas) con el patrón actual de mortalidad y fecundidad por edades, mientras Q_0 es el índice de reproducción en una población que tiene igual fecundidad, pero con una razón de supervivencia "aumentada" en a años, esto es, $p'(n) = p(a+n)$. Por lo tanto, el resultado contenido en la ecuación

$$z = \frac{Q_0}{R_0} \quad \text{ó} \quad 1 - z = \frac{R_0 - Q_0}{R_0} \quad (84), (86)$$

puede expresarse en palabras de la manera siguiente:

La proporción de huérfanos entre los niños de edad a es igual al cociente cuyo numerador es el exceso del índice efectivo de reproducción sobre el de una población con una razón de supervivencia aumentada en a años, mientras el denominador es el índice efectivo de reproducción.

Además, debe destacarse que en la relación

$$\frac{Q_0}{R_0} = \alpha + \beta \frac{R_1}{R_0} + \gamma \frac{R_2}{R_0} + \delta \frac{R_3}{R_0} \quad (84), (85)$$

los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dependen solamente de la tabla de vida, mientras que los momentos R de la función $p(n) m(n)$ aparecen sólo como razones en que la amplitud de esta función se anula. De todo esto logra desprenderse que

La proporción de huérfanos de edad a es (con este grado de aproximación) independiente de la amplitud del patrón de fecundidad por edades.

Finalmente, puede demostrarse que

$$\frac{R_k}{R_0} = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^k = \lambda_1^k \text{ aproximadamente (87)}$$

de manera que, con este grado de aproximación, se puede escribir (85)

$$\frac{Q_0}{R_0} = \alpha + \beta\lambda_1 + \gamma\lambda_1^2 + \delta\lambda_1^3 + \dots \text{ (88)}$$

y así se ve que, con este grado de aproximación:

*La proporción de huérfanos entre las personas de edad a depende solamente de la tabla de vida y de la duración media de una generación λ_1 , y es, por otra parte, independiente del patrón particular de fecundidad por edades.*³⁹

Ilustración numérica. Empleando el patrón de fecundidad legítima por edades observado entre las mujeres blancas en los Estados Unidos en 1920, en combinación con la tabla de vida para las mismas en 1919-20, tenemos los siguientes valores para las distintas constantes que entran en la discusión anterior:

CUADRO 14

SINOPSIS DE LAS CONSTANTES CARACTERISTICAS. ESTADOS UNIDOS, MUJERES BLANCAS, 1920

Constante característica	Edad del niño, años			
	0	5	10	15
α	1,00000	1,0729000	1,1110000	1,1037000
β	0,00000	-0,0099300	-0,0176800	-0,0212000
γ	0,00000	0,0003140	0,0006010	0,0007710
δ	0,00000	-0,0000034	-0,0000070	-0,0000098
Q_0	1,14320 = R_0	1,1053000	1,0660000	1,0227000
Q_1	32,64800 = R_1	31,5330000	30,3780000	29,0830000
Q_2	938,77000 = R_2	949,2200000	913,3500000	872,3100000
Q_3	31 161,00000 = R_3	34 362,0000000	37 768,0000000	39 960,0000000
Q_4	1 032 646,00000 = R_4			
Q_5	35 615 630,00000 = R_5			
μ_1	28,55840 = λ_1	28,5287000	28,4973000	28,4368000
μ_2	44,95660 = λ_2	44,9001000	44,7077000	44,2806000
μ_3	114,23000 = λ_3			
μ_4	-990,00000 = λ_4			
$\log_e Q_0$	0,13383	0,1001200	0,0639100	0,0224700
$\log_e z$	0,00006	-0,0335100	-0,0695800	-0,1107400
$z = 1 - \Theta$		0,9670000	0,9328000	0,8952000
Θ	0,00000	0,0330000	0,0672000	0,1048000

Con base en las constantes que aparecen en los cuadros 13 y 14, podemos ahora examinar los resultados obtenidos de acuerdo con las distintas fórmulas aproximadas y exactas entregadas en los párrafos precedentes.

Comenzando con la fórmula más simple, encontramos, para la porción de huérfanos entre los niños de quince años de edad, por ejemplo

$$\begin{aligned} \Theta &= 1 - \frac{Q_0}{R_0} = 1 - \frac{1,0227}{1,1432} \\ &= 1 - 0,8946 = 0,1054 = 10,54 \text{ por ciento} \end{aligned} \tag{89}$$

Empleando ahora la fórmula más exacta

$$\log_e z = \log_e \frac{Q_0}{R_0} - (\mu_1 - \lambda_1)r + (\mu_2 - \lambda_2)\frac{r^2}{2} - \dots \tag{83}$$

tenemos, por ejemplo cuando la tasa anual de crecimiento natural $r = 0,01$ por persona

³⁹Para ser más exacto, la duración media de una generación es $\lambda_1 - \lambda_2 r + \lambda_3 r^2 / 2! \dots$ y no λ_1 . Pero,

para valores corrientes de r , la duración media de una generación está dada en forma aproximada por el primer término solo.

$$\begin{aligned}
 \log_e z &= -0,11136 - (28,44 - 28,56) \\
 &\quad \times 0,01 + (44,28 - 44,96) \\
 &\quad \times 0,00005 \\
 &= -0,11136 + 0,0012 \\
 &\quad - 0,000034 \\
 &= -0,11019 \\
 z &= 0,8957 \\
 \Theta &= 1 - z = 0,1043 = 10,43 \\
 &\quad \text{por ciento}
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

Obsérvese que la corrección proveniente de los términos en r es pequeña, y aquélla del término en r_2 prácticamente despreciable. Esto se debe al hecho de que los μ y los λ son casi iguales, como se indicó en un párrafo anterior.

También es interesante observar el aspecto numérico de la relación

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_0}{R_0} &= \alpha + \beta \frac{R_1}{R_0} + \gamma \frac{R_2}{R_0} + \delta \frac{R_3}{R_0} + \dots \tag{85} \\
 &= 1,1037 - 0,02120 \times 28,56 + 0,00071 \times \\
 &\quad 860,54 - 0,0000098 \times 27,258 \\
 &= 1,1037 - 0,6055 + 0,6635 - 0,26713 = \\
 &= 0,8946
 \end{aligned}
 \tag{91}$$

Esto debe compararse con (59) y (60).

Los *seminvariantes de Thiele* μ y λ . Ha quedado de manifiesto numéricamente que los *seminvariantes* μ , de $p(a+n)m(n)$, y λ , de $p(n)m(n)$, son casi iguales. La *raison d'être* analítica de este hecho puede explicarse como sigue:

El *seminvariante* μ_1 se define como

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \frac{Q_1}{Q_0} \tag{74} \\
 &= \frac{\alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3 + \delta R_4}{\alpha R_0 + \beta R_1 + \gamma R_2 + \delta R_3} \text{ por (80) } \tag{92}
 \end{aligned}$$

Ahora, $p(a+n)/p(n)$ es una función de n que varía más bien lentamente o, lo que es lo mismo, los coeficientes β, γ, δ son más bien pequeños en comparación con α .

Por otro lado, la naturaleza de los momentos R explica que la razón entre momentos sucesi-

vos sea aproximadamente constante, esto es

$$\frac{R_1}{R_0} = \lambda_1 \text{ (exacto)} \tag{93}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} = \lambda_1 \text{ (aprox.)} \tag{94}$$

En vista de estos hechos, μ_1 está dado con mucha aproximación por

$$\mu_1 = \frac{R_0 (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_1^2 + \gamma \lambda_1^3 + \delta \lambda_1^4)}{R_0 (\alpha + \beta \lambda_1 + \gamma \lambda_1^2 + \delta \lambda_1^3)} \tag{95}$$

$$= \lambda_1 \tag{96}$$

Análogamente, se puede demostrar que los *seminvariantes superiores* μ, λ del mismo orden son casi iguales.

Conviene destacar que la gran aproximación de λ respecto a μ se debe a la combinación de dos circunstancias; a saber, primero, los valores relativamente pequeños de β, γ, δ , en comparación con α ; y segundo, la igualdad aproximada $(R_{n+1}/R_n) \lambda_1$. Cada una de estas condiciones por sí sola no produciría el grado de aproximación observado aquí, pero en conjunto se refuerzan recíprocamente con el resultado numérico señalado.

Huérfanos póstumos. En el texto se ha presentado un método conciso para determinar la proporción de huérfanos póstumos en la población; queda por verificar el resultado sobre una base rigurosa.

En una población *maltusiana*, la proporción de huérfanos paternos de edad a está dada, evidentemente, por la fórmula desarrollada en página 65 para los huérfanos maternos, con la ligera modificación que se indica a continuación; los símbolos p y m se refieren ahora a la tabla de vida para los hombres y a la fecundidad masculina referida solo a los hijos varones.⁴⁰

$$\Theta = 1 - \int_0^\infty e^{-rn} \frac{p(a+n)}{p\left(n - \frac{3}{4}\right)} p(n)m(n) dn \tag{97}$$

⁴⁰El caso de las hijas nacidas póstumamente puede tratarse esencialmente de la misma manera, con las modificaciones menores señaladas en la página 75, y que se refieren a los huérfanos maternos y a las huérfanas paternas.

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) \left[1 - \frac{3}{4} q \left(n - \frac{3}{4} \right) \right] dn \quad (98)^{41}$$

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn + \frac{3}{4} q \left(\bar{n} - \frac{3}{4} \right) \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn \quad (99)$$

en que \bar{n} ; de acuerdo con el teorema general de la pág. 66 está dado por

$$\bar{n} \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn = \int_0^\infty n e^{-rn} p(a+n) m(n) dn \quad (100)$$

$$\bar{n} = \mu_1 - \mu_2 r + \dots \quad (72)$$

$$= \mu_1 \quad \text{aproximadamente, para valores moderados de } r \quad (101)$$

De manera que

$$\Theta = 1 - \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn + \frac{3}{4} q \left(\mu_1 - \frac{3}{4} \right) \int_0^\infty e^{-rn} p(a+n) m(n) dn \quad (102)$$

En el caso de los niños recién nacidos $a = 0$, y la integral en la expresión anterior se hace igual a la unidad de acuerdo con (17), para una población maltusiana, mientras μ_1 se acerca a λ_1 . De modo que, finalmente

$$\Theta = \frac{3}{4} q \left(\lambda_1 - \frac{3}{4} \right) \quad (103)$$

Esto es, entre los niños nacidos (vivos), la proporción de aquéllos que han perdido a su padre antes del nacimiento es igual a la probabilidad anual de muerte por persona, $q(n)$, a lo largo de nueve meses entre los hombres de edad tres cuartos de año inferior a la edad media de

la distribución de fecundidad masculina por edades.

Huérfanos masculinos maternos. (Hijos varones que han perdido a su madre). El razonamiento sobre el cual se basa este cálculo se desarrolla en forma aproximadamente paralela al presentado en el caso de las huérfanas maternas. Sin embargo, el factor de sobrevivencia $p(a)$, concerniente al niño, es ahora $pm(a)$ en lugar de $p_f(a)$. El símbolo $m_f^1(n)$ significa ahora tasa de fecundidad femenina referida sólo a los *hijos varones*. Los símbolos $p_f(n)$ y $p_f(a+n)$, relativos a la madre, no cambian. Entonces, encontramos para el número de hombres de edades entre a y $(a+da)$ cuya madre no vive,

$$N_m b_m e^{-ra} p_m(a) da \left[1 - \frac{N_f b_f}{N_m b_m} \int_0^\infty e^{-rn} p_f(a+n) m_f^1(n) dn \right] \quad (104)$$

y, para la proporción de hombres de edades entre a y $(a+da)$ cuya madre no vive

$$1 - \frac{1}{1,0595} \int_0^\infty e^{-rn} p_f(a+n) m_f^1(n) dn \quad (106)$$

$$1 - \frac{N_f b_f}{N_m b_m} \int_0^\infty e^{-rn} p_f(a+n) m_f^1(n) dn \quad (105)$$

Huérfanos paternas. (Hijas que han perdido a su padre). Parece apenas necesario reproducir aquí por entero el razonamiento correspondiente. Sigue en lo esencial las mismas líneas que el concerniente a los huérfanos masculinos maternos, y conduce obviamente a la expresión (107) para la proporción de huérfanas paternas de edades comprendidas entre a y $(a+da)$.

Pero $(N_f b_f / N_m b_m) = (B_f / B_m)$ es simplemente la relación de masculinidad (mujeres respecto a hombres) al nacer, que en Estados Unidos en 1920 era de 1/1,0595. Entonces, tenemos finalmente para la proporción de hijos de edades entre a y $(a+da)$ cuya madre no vive

⁴¹El símbolo $q(n)$ se emplea aquí en el sentido de la notación actuarial para denotar la probabilidad de morir en el plazo de un año a la edad n .

$$1 - 1,0595 \int_0^{\infty} e^{-rn} \frac{p_m(a+n)}{p_m\left(n-\frac{3}{4}\right)} p_m(n) m_m^1(n) dn \quad (107)$$

en que $m_m^1(n)$ denota la tasa de fecundidad masculina a la edad n , referida sólo a las hijas.

Fecundidad masculina. Los informes de la Oficina del Censo de los Estados Unidos entregan

estadísticas sobre fecundidad femenina por edad de las mujeres de la población blanca, no obstante no se cuenta con estadísticas directas similares relativas a la población masculina (fecundidad masculina). Para propósitos de los

CUADRO 15
ESTIMACION DEL PATRON DE FECUNDIDAD POR EDADES PARA PADRES Y MADRES.
INGLATERRA Y GALES, 1921, POR SEXO DEL HIJO

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Mujeres; edad	Porcentaje de casados ^a	Tasa de fecundidad, hijos (ambos sexos)		Relación por sexo al nacer hombres respecto a mujeres ^c	Tasas de fecundidad no ajustada, hijas por 100 000 mujeres	Población	Hijas nacidas, con base en la columna (6), y a la población femenina por edades	Tasas de fecundidad ajustada, hijas por 100 000 mujeres ^d	Tasas de fecundidad ajustada, hijos varones por 100 000 mujeres
		por 1 000 mujeres casadas ^b	por 100 000 mujeres						
15-19	1,75	447	782	1,062	379	1 775 231	6 732	380	402
20-24	27,00	359	9 693	1,069	4 685	1 703 067	79 792	4 698	4 995
25-29	56,84	268	15 233	1,063	7 385	1 620 290	119 662	7 405	7 828
30-34	69,72	197	13 735	1,054	6 688	1 519 649	101 628	6 706	7 029
35-39	74,00	131	9 694	1,045	4 741	1 471 913	69 782	4 754	4 940
40-44	75,11	32	2 404	1,033	1 183	1 378 121	16 296	1 186	1 218
							393 892		
Hombres; edad	Porcentaje de casados ^a	Tasa de fecundidad, hijos (ambos sexos)		Relación por sexo al nacer, mujeres respecto a hombres ^c	Tasa de fecundidad no ajustada, hijos varones por 100 000 hombres	Población	Hijos varones, nacidos, con base en la columna (6), y a la población masculina por edades	Tasa de fecundidad ajustada, hijos varones por 100 000 hombres ^f	Tasa de fecundidad ajustada, hijas por 100 000 hombres
		por 1 000 hombres casados ^b	por 100 000 hombres						
15-19	0,40	500	200	0,946	103	1 727 823	1 775	101	99
20-24	17,67	383	6 768	0,937	3 495	1 448 385	50 618	3 441	3 327
25-29	54,77	284	15 555	0,939	8 024	1 339 960	107 521	7 901	7 654
30-34	75,57	210	15 870	0,945	8 161	1 281 320	104 570	8 036	7 834
35-39	81,82	146	11 946	0,950	6 128	1 273 321	78 023	6 033	5 913
40-44	83,68	88	7 364	0,950	3 777	1 223 054	46 191	3 719	3 645
45-49	83,66	43	3 597	0,956	1 839	1 162 158	21 377	1 811	1 786
50-54	82,42	18	1 484	0,950	761	971 021	7 391	749	735
55-59	80,16	8	641	0,967	326	781 608	2 547	321	320
60-64	75,81	5	379	0,970	192	601 235	1 157	189	190
65-69	68,85	3	207	0,975	105	449 363	471	103	104
70-74	59,92	1	60	0,980	30	280 491	85	30	30
							421 726		

^a Inglaterra y Gales, Censo de 1921, Cuadros Generales, cuadro 33, pág. 138.

^b Inglaterra y Gales, Report of Registrar-General, 1922, pág. 138.

^c U. S. Birth Registration Area, 1920, excepto Maine, tomando sólo nacimientos legítimos.

^d Factor de ajuste; razón entre las hijas legítimas efectivamente nacidas y las estimadas, 1921, (394 955/393 892) = 1,0027

^e Inglaterra y Gales, Censo de 1921; Dependencia, Orfandad, Fecundidad, cuadro 2, pág. 62.

^f Factor de ajuste; razón entre los hijos legítimos efectivamente nacidos y los estimados, 1921, (415 241/421 726) = 0,9846.

cálculos incluidos aquí, se obtuvieron valores aproximados de la fecundidad masculina por grupos quinquenales de edades, distribuyendo los hijos varones de madres blancas, clasificadas por edad, entre los padres blancos de edad correspondiente. Con este fin se empleó la tabla de correlación de edades de maridos y esposas que tenían un hijo en 1920, entregada en el Informe sobre Estadísticas de Nacimientos de la Oficina del Censo, 1920, cuadro 6, página 193.

Se comprobó con las estadísticas de Inglaterra y Gales, que permiten emplear tanto el cálculo directo como indirecto, que el método indirecto produce resultados esencialmente correctos para la proporción de huérfanos a una edad dada. Así por ejemplo, para los diez años de edad el método indirecto dio 7,09 por ciento de orfandad, mientras el método directo dio 7,32 por ciento. Para los cuarenta años de edad el método indirecto dio 59,53 por ciento, y el método directo 60,11 por ciento. Las cifras indicadas en el texto y en los cuadros para Inglaterra y Gales son las obtenidas por el método directo.

Datos sobre fecundidad para Inglaterra y Gales. En una breve referencia en el texto, página 74, se señaló la fuente de esta información. Es conveniente indicar aquí con mayor detalle cómo se elaboró, para los propósitos de la presente investigación, la información primaria presentada en la *Statistical Review* de Inglaterra y Gales para el año 1922 (página 138).

a) Mujeres. La fuente citada da el número de hijos legítimos de ambos sexos nacidos el año 1921 por mujer casada, clasificados según grupos quinquenales de edades de las madres. Estas cifras se reproducen en la columna (3) del cuadro 15. En los cuadros generales del Censo de 1921 de Inglaterra y Gales, página 138, aparecen el número de personas casadas y el número total de personas según los grupos quinquenales de edades correspondientes, de manera que se pueden calcular directamente las proporciones de casados. Aparecen en la columna (2). Dividiendo las cifras de la columna (3) por las de la columna (2), obtenemos la fecundidad legítima referida a todas las mujeres, prescindiendo de su situación matrimonial. Estas se indican en la columna (4) del cuadro 15, expresadas por 100 000 mujeres. Ahora es necesario descomponer estas cifras de acuerdo con el sexo del hijo. La razón de masculinidad (hombres respecto a mujeres) al nacer, para los hijos de madres de edad determinada, aparece en la columna (5), con base en las estadísticas americanas. Aplicando estas razones a las cifras de la columna (4), se obtiene la fecundidad

femenina referida sólo a las hijas, que aparece en la columna (6). Las cifras así obtenidas fueron luego multiplicadas por un factor de corrección, 1,0027,⁴² tal que la suma de los productos de las tasas de fecundidad por la población femenina clasificada por grupo de edades, dé el número efectivo de hijas legítimas nacidas.

b) Hombres. La información relativa a los hombres se obtuvo del Censo de Inglaterra y Gales, de 1921, volumen sobre Dependencia, Orfandad y Fecundidad, pág. 241. Por otra parte, el método de cálculo de la fecundidad masculina (referida únicamente a los hijos varones) siguió el mismo curso que el descrito para la fecundidad femenina (frecuencia de maternidad).

Distribución malthusiana por edades resultante. A partir de esta información fundamental se hizo el cálculo de las distintas características demográficas resultantes para Inglaterra y Gales, en lo esencial de acuerdo con los principios y la forma ya descritos para los Estados Unidos.

Sin embargo, en el cálculo de la distribución por edades representada por la curva suave en las tres partes del gráfico 8, el plan seguido fue diferente al que se empleó en el caso de la población americana. En este último caso se empleó la tasa de crecimiento natural efectivamente observada, ya que se comprobó que ésta daba una curva suave que armonizaba suficientemente bien con la distribución por edades observada. En el caso de Inglaterra y Gales se calculó la curva suave de la distribución malthusiana por edades con base en la tasa "intrínseca" de crecimiento natural, esto es, la tasa finalmente resultante, y compatible con el patrón observado de fecundidad y mortalidad por edades. Esta tasa está definida por la raíz real r_0 de la ecuación (17), y su valor resultó ser $r_0 = 0,0072$ por persona al año, con base en la fecundidad y mortalidad masculinas. Debe destacarse que se obtiene un valor algo diferente para r_0 si basamos el cálculo en la fecundidad y la mortalidad de los hombres o de las mujeres; probablemente, la diferencia entre estos dos valores resulte algo exagerada en el caso de Inglaterra y Gales, debido a que la razón de masculinidad en la población se aleja de la normal a causa de las bajas de guerra entre los hombres. En la práctica se empleó la fecundidad y la mortalidad masculinas de preferencia a las femeninas, porque los hombres estaban en

⁴² El hecho de que este factor se acerque mucho a la unidad puede considerarse como una indicación de que el uso de las estadísticas americanas en el cálculo de la razón de masculinidad sólo afecta el resultado final en un grado despreciable.

minoría, y en estas circunstancias era de esperar que ellos impusieran el ritmo a la tasa de crecimiento. Puede encontrarse una justificación adicional a posteriori de esta elección en el hecho de que la distribución maltusiana por edades calculada sobre esta base armoniza bien con la observada (véase el gráfico 8).

ESTIMACION DEL NUMERO DE HUÉRFANOS QUE OCURREN ANUALMENTE

Para una población con un patrón fijo de fecundidad y mortalidad por edades y con una distribución fija por edades (una población maltusiana), la proporción de huérfanos entre los a_1 y a_2 años de edad en la población total en el momento t , esta dada por⁴³

$$\Omega_{12} = \int_{a_1}^{a_2} b e^{-ra} p(a) [1 - \int_0^{\infty} e^{-rn} p(a+n) m(n) da] da \quad (108)$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \omega(a) da, \quad \text{para abreviar,} \quad (109)$$

$$= \int_{t-ta_1}^{t-ta_2} \omega(t-ta) d(t-ta) \quad (110)$$

en que t_a es la fecha de nacimiento de una persona cuya edad es a en el momento t .

proporción en el total de la población de huérfanos en edades en un tramo determinado es constante, esto es

Pero, en una población maltusiana, esta

$$\frac{d\Omega_{12}}{dt} = \omega(t-ta_1) - \omega(t-ta_2) - \int_{t-ta_1}^{t-ta_2} \frac{d\omega(t-ta)}{d(t-ta)} d(t-ta) = 0 \quad (111)$$

$$\omega(a_2) - \omega(a_1) - \int_{a_1}^{a_2} \frac{d\omega(a)}{da} da = 0 \quad (112)$$

o, volviendo a la notación detallada original,

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{12}}{dt} = 0 &= b e^{-ra_2} p(a_2) \left[1 - \int_0^{\infty} e^{-rn} m(n) p(n+a_2) dn \right] \\ &- b e^{-ra_1} p(a_1) \left[1 - \int_0^{\infty} e^{-rn} m(n) p(n+a_2) dn \right] + r\Omega - \\ &- \int_{a_1}^{a_2} b e^{-ra} \left[1 - \int_0^{\infty} e^{-rn} m(n) p(n+a) dn \right] \frac{dp(a)}{da} da \\ &+ \int_{a_1}^{a_2} b e^{-ra} p(a) \left[\int_0^{\infty} e^{-rn} m(n) \frac{dp(n+a)}{da} dn \right] da \end{aligned} \quad (113)$$

De los cinco términos en el miembro del lado derecho en (113), el primero representa claramente a los huérfanos por persona de la población total, considerando los mayores de a_2 años, por unidad de tiempo, y eliminando así los comprendidos entre a_1 y a_2 años de edad. Nótese que ésta es simplemente igual a la proporción, $\omega(a_2)$, de huérfanos de edad⁴⁴ a_2 en la población total.

Análogamente, el segundo término representa a los huérfanos (por persona de la población total) que entran por unidad de tiempo desde edades inferiores al grupo cuyas edades fluctúan entre a_1 y a_2 . Este término es simplemente $\omega(a_1)$, la proporción de

huérfanos de edad⁴⁴ a_1 en la población total.

El tercer término $r\Omega_{12}$, representa la tasa de crecimiento natural (por persona de la población total) de los huérfanos comprendidos en el grupo de edades entre a_1 y a_2 .

En el cuarto término, observamos que

$$- \int_{a_1}^{a_2} b e^{-ra} \frac{dp(a)}{da} da = d_{12} \quad (114)$$

⁴³ Véase en la página 81, fórmula 14, haciendo $B(t) = N_0 b e^{rt}$ y $t_0 = 0$.

⁴⁴ "De edad a_k " significa aquí comprendido entre las edades a_k y a_{k+1} , en que el intervalo de un año se trata como una diferencial.

es la tasa de mortalidad por unidad de tiempo en la población de edades entre a_1 y a_2 . En consecuencia este término puede escribirse $-d_{12} \Omega_{12}$.

Finalmente, el quinto término, aunque con el signo cambiado, da evidentemente la tasa por persona de la población total, a que van surgiendo nuevos huérfanos de edades entre a_1 y a_2 por las muertes de madres de todas las edades. Simbolicemos esta tasa por $g_{12} \Omega_{12}$.

Entonces, la ecuación (113) puede escribirse

$$g_{12} \Omega_{12} = \omega_2 - \omega_1 + r\Omega_{12} + d_{12} \Omega_{12} \quad (115)$$

Es decir, el nuevo contingente anual de huérfanos de edades entre a_1 y a_2 , representa el exceso de los huérfanos que superan los a_2 años de edad sobre los que superan los a_1 años, más aquellos que mueren entre los a_1 y los a_2 años de edad más el incremento natural resultante del exceso de la tasa de natalidad sobre la tasa de mortalidad. Sintetizada en esta forma, la ecuación (115) puede aparecer trivial. Pero especificada analíticamente, la ecuación nos da la medida cuantitativa de cada uno de estos términos y también medios operativos para calcular este contingente anual, una vez que se ha determinado la proporción de huérfanos de cada edad entre a_1 y a_2 años.

Obsérvese que para el caso especial en que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty b e^{-rN} \frac{dp(N)}{dN} b_{12}(N) dN &= \\ &= \int_0^\infty b e^{-rN} \frac{dp(N)}{dN} \left[\int_{a_1}^{a_2} (m(N-a) p(a) da) \right] dN \quad (119) \end{aligned}$$

Esta fórmula constituye una útil verificación del cálculo realizado por el primer método.

Queda por demostrar que los dos métodos son enteramente equivalentes. Para esto, en lugar de N , la edad actual de la madre, introducimos n , su edad cuando nació un hijo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty b e^{-r(n+a)} \frac{dp(n+a)}{d(n+a)} \left[\int_{a_1}^{a_2} m(n) p(a) da \right] d(n+a) &= \\ = \int_{a_1}^{a_2} b e^{-ra} p(a) \left[\int_0^\infty e^{-rn} m(n) \frac{dp(n+a)}{da} dn \right] da \quad (121) \end{aligned}$$

que establece la identidad de las dos expresiones para el contingente anual de nuevos huérfanos.

Generalización. También puede generalizarse fácilmente el segundo método para calcular la ocurrencia anual de nuevos huérfanos. No

$a_1 = 0$, tenemos $\omega_1 = 0$, y la ecuación (115) se convierte en

$$g_{02} \Omega_{02} = \omega_2 + r\Omega_{02} + d_{02} \Omega_{02} \quad (116)$$

Estimación del número de huérfanos que ocurren anualmente: método alternativo de determinación. Sin embargo, hay otro camino directo para determinar la ocurrencia anual de nuevos huérfanos, que es el siguiente:

El número promedio de niños sobrevivientes entre los a_1 y a_2 años de edad por mujer de edad actual N en la población, está dado evidentemente por

$$b_{12}(N) = \int_{a_1}^{a_2} m(N-a) p(a) da \quad (117)$$

en que $(N-a)$ es la edad de la madre en el momento en que nació un hijo que ahora tiene a años de edad. En vista de que la tasa de mortalidad por persona de las mujeres de edad N está dada por

$$b e^{-rN} \frac{dp(N)}{dN} \quad (118)$$

el número total de nuevos huérfanos con edades entre a_1 y a_2 por unidad de tiempo será

que ahora tiene a años de edad, de manera que

$$N = n + a \quad (120)$$

Entonces, (119) se convierte en

necesitamos restringirnos a una población con distribución maltusiana por edades. Si $c(N)$ es el coeficiente de distribución por edades de las personas que mueren cada año, de manera que $c(n) dN$ da la proporción de muertos comprendidos entre N y $N + dN$ años

CUADRO 16

ESTIMACION DEL NUMERO DE HUERFANOS MATERNOS QUE OCURREN ANUALMENTE
EN UNA POBLACION MALTUSIANA, DE ACUERDO CON LA TABLA DE VIDA DE LOS ESTADOS
UNIDOS 1919-20, MUJERES BLANCAS, CON FECUNDIDAD COMO EN 1920

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Edad	Distribución maltusiana por edades, por 100 000 de la población total de todas las edades	Muertos en la distribución maltusiana por edades	Hijas sobrevivientes menores de 17 años por 100 000 mujeres de edad indicada	Huérfanos maternos resultantes de las muertes en columna (3)
14	1 870,20	4,36	10	0,00
15	1 846,00	4,97	87	0,00
16	1 821,40	5,61	481	0,03
17	1 796,50	6,20	1 600	0,10
18	1 771,20	6,78	3 861	0,26
19	1 745,70	7,42	7 458	0,55
20	1 719,80	8,03	12 306	0,99
21	1 693,50	8,59	18 140	1,56
22	1 667,00	9,04	24 648	2,23
23	1 640,30	8,37	31 546	2,64
24	1 613,60	9,62	38 615	3,71
25	1 586,90	9,81	45 691	4,48
26	1 560,30	9,92	52 646	5,22
27	1 533,90	10,02	59 401	5,95
28	1 507,70	10,06	65 889	6,63
29	1 481,70	10,03	72 062	7,23
30	1 456,00	9,97	77 900	7,77
31	1 430,60	9,90	83 395	8,26
32	1 405,60	9,80	88 468	8,67
33	1 381,00	9,67	92 916	8,98
34	1 356,70	9,50	96 369	9,16
35	1 332,90	9,30	98 430	9,15
36	1 309,50	9,15	98 887	9,05
37	1 286,50	9,03	97 785	8,83
38	1 263,80	8,95	95 335	8,53
39	1 241,50	8,86	91 795	8,13
40	1 219,60	8,82	87 407	7,71
41	1 197,80	8,82	82 361	7,26
42	1 176,40	8,88	76 827	6,82
43	1 155,10	9,01	70 967	6,39
44	1 133,90	9,18	64 925	5,96
45	1 112,70	9,40	58 850	5,53
46	1 091,60	9,66	52 875	5,11
47	1 070,40	9,95	47 095	4,69
48	1 049,20	10,28	41 575	4,27
49	1 027,90	10,62	36 351	3,86
50	1 006,40	11,00	31 444	3,46
51	984,80	11,43	26 846	3,07
52	963,10	11,94	22 555	2,69
53	941,00	12,52	18 591	2,33
54	918,60	13,15	14 969	1,97
55	895,80	13,81	11 713	1,62
56	872,60	14,49	8 859	1,28
57	849,00	15,15	6 435	0,97
58	825,00	15,76	4 462	0,70
59	800,60	16,32	2 935	0,48
60	775,90	16,88	1 821	0,31
61	751,00	17,54	1 062	0,19
62	725,70	18,33	583	0,11
63	699,80	19,26	301	0,06
64	673,30	20,26	147	0,03
65	646,10	21,29	70	0,01
66	618,20	22,29	31	0,01
67	589,60	23,21	11	0,00
			Total	205,00

de edad, evidentemente la ocurrencia anual de nuevos huérfanos está dada por

$$\int_0^{\infty} c(N) b_{12}(N) dN \quad (122)$$

De hecho, este es el método seguido en el texto.

Ejemplo numérico. Para ilustrar los dos métodos de cálculo del número de huérfanos que ocurren anualmente, descritos antes, se les aplicó a una población maltusiana sujeta a la mortalidad de la tabla de vida de las mujeres blancas en los Estados Unidos en 1919-1920, con la tasa de crecimiento natural efectivamente observada, $r = 0,0107$ por persona al año. Esta población maltusiana, cuya distribución por edades aparece en el gráfico 6, corresponde a 1,1843 veces la fecundidad efectiva de 1920.

Primer método. En este caso, aplicando la ecuación (116), tenemos, para una población femenina blanca total de 100 000,

$$\Omega_{0,17} = 1898,4 \begin{cases} \text{huérfanas blancas} \\ \text{menores de 17 años.} \end{cases} \quad (123)$$

$$r\Omega_{0,17} = 20,3 \quad (124)$$

$$\omega_{17} = 217,2 \quad (125)$$

$$\omega_0 = 0 \quad (126)$$

$$d_{0,17}\Omega_{0,17} = 4,8 \begin{cases} \text{(calculado aplicando} \\ q_x \text{ de la tabla de vida} \\ \text{a cada elemento} \\ \text{por edad de la población} \\ \text{de huérfanos} \\ \text{menores de 17 años).} \end{cases} \quad (127)$$

de manera que

$$\begin{aligned} g_{0,17}\Omega_{0,17} &= \omega_{17} + r\Omega_{0,17} + d_{0,17}\Omega_{0,17} \\ &= + 217,2 + 20,3 + 4,8 \\ &= 242,3 \begin{cases} \text{contingente anual de} \\ \text{nuevas huérfanas ma-} \\ \text{ternas blancas por} \\ \text{100 000 de pobla-} \\ \text{ción femenina blan-} \\ \text{ca total.} \end{cases} \quad (128) \end{aligned}$$

Segundo método. Los distintos pasos que implica el uso de este método aparecen en el cuadro 16. La primera columna de este cuadro presenta las edades entre 14 y 67 años de la población femenina blanca. La columna (2) de la correspondiente distribución maltusiana por edades según la tasa natural observada de crecimiento, 0,0107, para una población total (de todas las edades) de 100 000. La columna (3) muestra las muertes anuales correspondientes, calculadas de acuerdo con la tabla de vida de los Estados Unidos para 1919-20. La columna (4) presenta el número de hijas menores de 17 años sobrevivientes por 100 000 mujeres de edad determinada.⁴⁵ La columna (5) muestra el producto cruzado de las columnas (3) y (4); su suma acumulada, igual a 205,00, da el número estimado de huérfanos que ocurren anualmente con base en la fecundidad de 1920. Pero, como ya se indicó, una tasa de crecimiento de 0,0107 corresponde a una fecundidad igual a 1,1843 veces la de 1920. Luego finalmente, $205,00 \times 1,1843 = 242,8$, da el número de huérfanas maternas menores de 17 años que ocurren anualmente por 100.000 de la población femenina blanca, bajo las condiciones de nuestro ejemplo. Como se ve, esto concuerda prácticamente en forma perfecta con el resultado de 242,3 obtenido por el primer método.

Aplicación a la distribución efectiva por edades de las mujeres blancas de los Estados Unidos, 1920. Como se indicó en la página 94, los métodos para determinar el número de huérfanos que ocurren anualmente, ejemplificados arriba, pueden ser generalizados y aplicarse no sólo a una población maltusiana sino también a una población con una distribución por edades arbitraria. De hecho, éste es el método que se empleó en el texto y que constituye la base de los cuadros 7 y 8.

⁴⁵ Sin considerar la maternidad individual; véase también la nota al pie del cuadro 7.



VI. EL TAMAÑO PROMEDIO DE LA FAMILIA EN UNA POBLACION ESTACIONARIA Y EN UNA POBLACION DECRECIENTE

En un documento reciente sobre "La perspectiva de la tasa de natalidad norteamericana",¹ uno de nosotros mostró cuál sería la población de Estados Unidos y la composición por edades asociada a ella, en dos supuestos diferentes relativos a la caída esperada de la tasa de natalidad. Con el primer supuesto, la tasa de natalidad caería hasta estar prácticamente en equilibrio con la mortalidad, en el régimen de una tabla de vida que da una duración a éstas de 70 años. Con el otro supuesto más radical, la tasa de natalidad caería gradualmente hasta un nivel muy bajo de 10 por mil hacia el año 2100.

Si continúa la tendencia actual, es sólo cuestión de tiempo el que se haga evidente la incapacidad de la población para reproducir su propio tamaño actual. En el momento presente y en el porvenir cercano, el panorama seguirá siendo confuso debido a los efectos residuales de la alta fecundidad y de la gran inmigración del pasado. Cuando estos efectos se hayan borrado, la cuestión del tamaño de la familia promedio, que hemos discutido previamente para el caso de una población creciente², adquirirá un interés renovado para el caso de una población decreciente.

De acuerdo con esto, se han llevado a cabo cálculos para determinar el número promedio de hijos por mujer, como también el número promedio de hijos por madre, correspondiente: i) esencialmente el primer supuesto, esto es, de una población estacionaria; y ii) al segundo

supuesto, de una población decreciente desde 1975 en adelante.

TAMAÑO DE LAS FAMILIAS EN UNA POBLACION ESTACIONARIA

Con el fin de mantener a la población en un nivel estacionario, con un sexto de las mujeres que por una razón u otra³ no tienen descendencia, cada madre debe tener en promedio 13,15 hijos frente a una tasa de mortalidad como la que prevalecía en 1920, o 2,97 hijos ante una tasa de mortalidad como la que prevalecía en 1927 (un año de excepcional buena salud), ó 2,92 con la tasa de mortalidad de la tabla de vida de Nueva Zelanda para 1921-22 (que subsiste como la de mayor longevidad para todas las tablas nacionales de vida disponibles a la fecha) o, por último, 2,88 de acuerdo con una tabla de vida hipotética que representa lo mejor que podemos razonablemente alcanzar mediante la aplicación del más avanzado conocimiento moderno en medicina y en la práctica de la salud pública. Se ve así que ulteriores progresos en la longevidad no pueden materialmente sostener la reducción en el tamaño de las familias requerido para mantener la población en un nivel constante.

Un incremento en la esterilidad a partir de un sexto, que aparece ahora tendiendo hacia un cuarto, puede calificarse casi como catastrófico. Pero esta situación no parece enteramente fuera de los límites de lo posible en el ³Esto no implica necesariamente esterilidad fisiológica. Una mujer puede no tener descendencia debido a que la muerte o el divorcio cortan el matrimonio antes que ello suceda, bajo condiciones restantes normales. Esto cubre también aquellos casos de mujeres fértiles en general que no tienen descendencia a causa de interferencias contraceptivas.

¹Trabajo presentado por Louis I. Dublin ante la Segunda Asamblea General de la Unión Internacional para la Investigación Científica de los problemas de población, Londres, junio, 1931.

²Dublin y Lotka: "On the true rate of natural increase", en *Journal of the American Statistical Association*, setiembre 1925, pág. 325.

futuro cercano, en vista del hecho que el control de la natalidad se emplea más y más y con creciente efectividad. Semejante incremento haría necesaria, para una población estacionaria, una familia promedio por madre de 3,30 hijos en lugar de 2,97, con base en la tabla de vida de 1927. Sobre la base de nuestra tabla de vida hipotética óptima, la cifra de 2,88 sería reemplazada por 3,20.

TAMAÑO DE LAS FAMILIAS EN UNA POBLACION DECRECIENTE

El cuadro que sigue muestra el tamaño de las familias calculado de acuerdo con el segundo supuesto, de una tasa de natalidad declinando más bien en forma rápida y la población disminuyendo desde el año 1975 en adelante. En cada caso, el cálculo del número de hijos por madre se hizo suponiendo una esterilidad de uno en seis, uno en cinco, dos en nueve, y uno en cuatro. La primera de ellas correspon-

de aproximadamente a las condiciones actuales. Una esterilidad de una en cuatro mujeres casadas representa un supuesto más bien extremo que, sin embargo, puede llegar a ser una realidad en el futuro. El cuadro muestra también una columna que indica los hijos por madre al suponer una infecundidad nula. La utilidad de esta cifra reside en que puede tanto ser interpretada directamente tal como se la presenta, como, lo que es de mayor importancia práctica, dar el número de hijos por mujer cualquiera que sea la cifra de infecundidad. La razón para esto es que si la infecundidad fuera nula, el número de hijos por mujer y el número de hijos por madre serían iguales.

A través de todo el cálculo se ha supuesto que los nacimientos son legítimos. El efecto de los nacimientos ilegítimos sería el de reducir un tanto la tasa de declinación de la población, o, mirando el asunto de otra manera, de reducir algo el tamaño requerido de las familias legítimas para alcanzar una tasa dada de disminución.

CUADRO 1

TAMAÑO DE LA FAMILIA PROMEDIO DE UNA POBLACION DECRECIENTE, BASADO EN CONDICIONES HIPOTETICAS DE MORTALIDAD Y FECUNDIDAD PARA ESTADOS UNIDOS, 1980-2100

Año	Tasa intrínseca de crecimiento natural ‰	Tasa intrínseca de natalidad ‰	Hijos por madre, con esterilidad de				
			0	1/6	1/5	2/9	1/4
1980	5,4	11,4	2,05	2,46	2,56	2,64	2,74
2000	6,4	11,0	1,99	2,39	2,49	2,56	2,66
2020	7,1	10,7	1,95	2,34	2,44	2,51	2,60
2040	7,7	10,5	1,92	2,30	2,40	2,47	2,56
2060	8,1	10,2	1,90	2,28	2,37	2,44	2,53
2080	8,5	10,0	1,88	2,25	2,34	2,41	2,50
2100	9,0	9,8	1,85	2,22	2,31	2,38	2,46

Al final del cuadro encontramos una tasa de disminución de 9 por 1000, con una tasa efectiva de natalidad de 9,8 por 1000. Esta es una situación extrema que correspondería a una reducción de la población a la mitad cada 77 años, o a la reducción a un cuarto en poco menos de 150 años, o a un octavo en 230 años. Sin embargo, aun esta condición implica 2,5 hijos por madre suponiendo que una de cuatro mujeres no tiene descendencia. Tan catastrófica disminución es difícilmente imaginable para la población en conjunto, pero es instructiva para mostrar que cada grupo o contingente de la población para el cual es característica la familia promedio de 2,5, debe inevitablemente decrecer a esta tasa, o más rápido si su mortalidad está bajo el óptimo. Es interesante anotar que esta cifra

de 2,5 corresponde casi exactamente al número promedio de hijos en la clase profesional y de "cuello blanco", como lo señala Ellsworth Huntington en su "Builders of America". Es por supuesto un hecho familiar para quienes han estudiado estas materias, que las clases económica y educacionalmente mejor dotadas, en su mayor parte, y desde hace tiempo, no se autoconservan y, en cambio, han sido reclutadas en gran medida de los estratos menos favorecidos.

LA FAMILIA DE DOS HIJOS

Con propósitos ilustrativos, vale la pena considerar el caso extremo de la familia de dos hijos, es decir, el caso en que la descendencia iguala numéricamente a los padres. Si no

hubiera defunciones hasta que tuviera efecto la reproducción, y si cada mujer se convirtiera en madre, sería suficiente, para el equilibrio poblacional, que cada madre tuviera en promedio un hijo y una hija. ¿Cuál sería la consecuencia de una familia promedio con dos hijos por madre, en condiciones naturales de mortalidad, y con una acertada estimación de la probabilidad de que algunas

mujeres no se casen o no se conviertan en madres? De nuevo con la mortalidad óptima y con un sexto de los matrimonios sin descendencia, semejante tamaño promedio de las familias estaría acompañado por una tasa anual de disminución de 13 por mil, o por una reducción a la mitad de la población o del grupo de población cada 53 años, y una reducción a un cuarto prácticamente dentro de una centuria.

VII. ANALISIS DE POBLACION: UN TEOREMA RELATIVO A LA DISTRIBUCION ESTABLE POR EDADES¹

El autor ha enunciado en otra parte², sin demostración, todo lo que concierne esencialmente al teorema que se expone más adelante. Como la demostración es un poco intrincada, parece conveniente presentarla de la siguiente manera:

Teorema. Una población cerrada, que crece a una tasa constante por persona r en un régimen del patrón de mortalidad y fecundidad constante por edad, sólo puede tener la distribución por edades estable. (Esto es, no puede ser tan sólo una aproximación a la distribución estable, sino que ésta debe verificarse de hecho.)

Concentrando la atención exclusivamente en la población femenina, o sea, tratando únicamente con madres e hijas,³ sean $N(t)$, $b(t)$ y $d(t)$, respectivamente, el tamaño de la población (femenina), su tasa de natalidad por persona y su tasa de mortalidad por persona en el tiempo t .

Sea $p(a)$ la probabilidad en el nacimiento de alcanzar la edad a , y sea $p'(a)$ la derivada

$dp(a)/da$, siendo estas magnitudes independientes de t .

Sea $m(a)$ la frecuencia de nacimientos femeninos por mujer de edad a , independiente de t .

Cabe hacer notar que, por su naturaleza, $p(a)$ y $m(a)$ no pueden ser negativos, mientras $p'(a)$ no puede ser positivo.

Escribiendo

$$B(t) = b(t) N(t) \quad (1)$$

y

$$D(t) = d(t) N(t) \quad (2)$$

tenemos las relaciones muy conocidas y esencialmente obvias

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) da \quad (3)$$

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) m(a) da \quad (4)$$

$$D(t) = - \int_0^{\infty} B(t-a) p'(a) da. \quad (5)$$

Por consiguiente

$$\frac{B(t) - D(t)}{N(t)} = \frac{\int_0^{\infty} B(t-a) [p(a) m(a) + p'(a)] da}{\int_0^{\infty} B(t-a) p(a) da} = \quad (6)$$

$$= \text{constante (independiente de } t) = r \quad (7)$$

por hipótesis, entonces este cociente es la tasa de crecimiento natural por persona.

Primero pueden exponerse dos casos triviales

1. La condición (7) sería satisfecha si

¹Recibido el 18 de mayo de 1937.

²*Human Biology* 9, 104, 1937.

³Como fue explicado en anteriores publicaciones, por ejemplo: *Jour. American Statistical Association* 20, 307, 329, 1925.

$$p(a) m(a) + p'(a) = \text{constante} \quad (\text{independiente de } a) \quad (8)$$

Pero esto es contrario a la realidad biológica.

2. La condición (7) es satisfecha también si se anula el numerador para todo valor de t . Pero en ese caso $r = 0$ y entonces

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) da = \text{constante} \quad (9)$$

esto es,

$$B(t) = \text{constante} \quad (10)$$

y tenemos simplemente el caso de una población estacionaria en las condiciones de una tabla de vida constante.

Además la ecuación

$$B(t) = \int_0^\infty B(t-a)p(a)m(a)da \quad (4)$$

se convierte aquí en

$$1 = \int_0^\infty p(a)m(a)da \quad (11)$$

de manera que

$$r = 0 \quad (12)$$

satisface la condición de estabilidad de la composición por edades⁴

$$1 = \int_0^\infty e^{-ra}p(a)m(a)da \quad (13)$$

3. Queda por considerar el caso general, cuando el numerador de (6) no se anula y $r \neq 0$.

Si, en estas condiciones, el cociente (6) debe ser constante, $B(t-a)$ debe ser el producto de un factor que sólo contenga t y un factor que sólo contenga a , esto es, debemos tener

$$B(t-a) = QF(t)f(a) \quad (14)$$

en que Q es una constante arbitraria. Podemos entonces elegirla de manera que

$$f(0) = 1 \quad (15)$$

Entonces

$$QF(t) = B(t) \quad (16)$$

y

$$B(t-a) = B(t)f(a) \quad (17)$$

Además

$$B(t-a_1-a_2) = B(t-a_1)f(a_2) \quad (18)$$

esto es

$$B(t-[a_1+a_2]) = B(t)f(a_1)f(a_2) \quad (19)$$

$$= B(t)f(a_1+a_2) \quad (20)$$

Luego

$$f(a_1+a_2) = f(a_1)f(a_2)\dots \quad (21)$$

y análogamente

$$f(a+a+a+\dots) = f(na) = [f(a)]^n \quad (22)$$

$$= [f(n)]^n \text{ por simetría} \quad (23)$$

⁴Lotka, A. J.: *Jour. American Statistical Association* 20, 329. 1925.

Por otra parte,

$$f(1 \times a) = [f(1)]^a \quad (24)$$

Pero $f(1)$ es una constante. Escribamos

$$f(1) = e^{-s} \quad (25)$$

en que s es una constante por determinar. Entonces, por (24)

$$f(a) = e^{-sa} \quad (26)$$

y por (17)

$$B(t-a) = B(t)e^{-sa} \quad (27)$$

esto es, los nacimientos por unidad de tiempo crecen en progresión geométrica con tasa s .

Además, esta es también la tasa de crecimiento natural por persona de la población por lo que de acuerdo a (5), (6) y (27) tenemos

$$\frac{B(t) - D(t)}{N(t)} = \frac{B(t) + B(t) \int_0^\infty e^{-sa} p'(a) da}{B(t) \int_0^\infty e^{-sa} p(a) da} \quad (28)$$

$$= \frac{1 - [1 - s \int_0^\infty e^{-sa} p(a) da]}{\int_0^\infty e^{-sa} p(a) da} \quad (29)$$

$$= s \quad (30)$$

Pero por hipótesis este cociente es igual a la tasa constante de crecimiento de la población r . Por consiguiente

$$s = r \quad (31)$$

Ahora, de acuerdo con (4), (27) y (31)

$$B(t) = B(t) \int_0^\infty e^{-ra} p(a) m(a) da \quad (32)$$

$$1 = \int_0^\infty e^{-ra} p(a) m(a) da \quad (33)$$

Por esta razón r es una raíz de (33). Pero r , la tasa de crecimiento natural, es constante por hipótesis. Por lo tanto, debe ser una raíz real de (33), puesto que las raíces complejas introducirían oscilaciones. Pero (33) tiene sólo una raíz real, porque $p(a)m(a)$ no es nunca negativo. Si simbolizamos esta raíz real por ρ , tenemos

$$r = \rho \quad (34)$$

y el coeficiente de la distribución por edades está dado por

$$c(a) = \frac{B(t-a)}{N(t)} pa \quad (35)$$

$$= \frac{B(t) e^{-\rho a}}{N(t)} p(a) \quad (36)$$

$$= b e^{-\rho a} p(a). \quad (37)$$

Así, las condiciones del teorema satisfacen por completo la distribución por edades (37) y ninguna otra es posible.

El teorema enunciado al principio queda, por lo tanto, probado.

Pero esta es la distribución estable por edades.

VIII. PUNTOS DE CONTACTO DEL ESTUDIO DE LA POBLACION CON RAMAS CONEXAS DE LA CIENCIA¹

Presidente Morris:

Antes de comenzar formalmente el programa de esta noche, quisiera dirigirme expresamente a usted y a los funcionarios y Miembros de la Sociedad Norteamericana de Filosofía. Se cuenta que un joven con aspiraciones literarias encontró a un autor famoso y le solicitó consejo. ¿Qué es lo esencial para adquirir riqueza de estilo? "Mi amigo", fue la respuesta, "el primer requisito es tener algo que decir que no deba quedar sin decir". Presidente Morris, tengo que decir a usted eso que no debe quedar sin decir. Quiero expresarle en nombre de los miembros de la Asociación de Población de Norteamérica y en el mío propio, cuán profundamente hemos apreciado la espléndida hospitalidad que nos han ofrecido en esta ocasión. Respecto a mí mismo puedo decir, y sé que mis colegas se unirán a mí, que recordaré por largo tiempo esta reunión como una de las más auspiciosas en mi experiencia de asambleas científicas.

Y ahora torno a dirigirme en general a los miembros de las dos sociedades aquí reunidas.

Cuando se sugirió que yo me dirigiera a ustedes en esta ocasión, y pensé en un tópico que pudiera elegir para su entretenimiento y provecho, me encontré enfrentado a un problema, no un problema de hecho, sino un problema de gramática. "Puntos de Contacto del Estudio de la Población con otras Ciencias" fue mi primera idea. Pero luego me pregunté: ¿Es una ciencia el Estudio de la Población? Una cuestión delicada que preferí eludir. De modo que transé: Puntos de Contacto del

Estudio de la Población con ramas conexas de la Ciencia, según el principio de que uno puede estar relacionado con un rey sin ser rey.

Pero el título es aún una cuestión peligrosa. Puesto que, con palabras tomadas de Longfellow, sugiere una tarea y un esfuerzo sin límites, y esta noche algunos de nosotros anhelamos un descanso. Pero permítanme tranquilizarles. Sólo les propongo sorber de la copa de la sabiduría, no agotarla.

Todas las ramas de la ciencia están necesariamente vinculadas con observaciones o acontecimientos ubicados en el espacio y en el tiempo; pero hay una variación característica en el énfasis de la función que desempeña el tiempo en esas observaciones y en el conocimiento organizado que se funda en ellas. En un extremo tenemos una ciencia como la dinámica, en que estamos interesados en relaciones que involucran sólo un período $t_2 - t_1$, sin considerar la fecha particular de las observaciones.

En el otro extremo, tenemos ciencias históricas, tal como la geología, en que se otorga un interés esencial a las épocas o fechas particulares en que acaecen hechos o en que existieron situaciones específicas.

Es a esta última clase de ciencia a la que está más estrechamente vinculado el estudio de la población. Estamos interesados principalmente en situaciones concretas, poblaciones reales en lo pasado, presente y futuro.

En el estudio de la población, nuestro lazo más íntimo con el pasado reciente es la genealogía. Cuando consideramos cuán simple es, salvo para un analfabeto, mantener adecuadas crónicas familiares, es notable que sean escasos los buenos registros genealógicos. No conozco estadística sobre el tema, y por ello

¹ Conferencia pronunciada el 18 de noviembre de 1938 en el Simposio sobre Crecimiento de la Población.

sólo puedo preguntar: ¿Qué proporción de la población, en general, puede hacer con relativa exactitud una relación de sus antepasados en seis o más generaciones? Aunque así haya sido hasta ahora, podemos esperar que los futuros estudiosos de la genética cuenten con mejor información de esta clase que en el pasado. Ciertamente, esto es de desear, puesto que hasta cierto punto se puede decir que el período de una generación es la unidad de tiempo natural en la biología de una población; evidentemente que las oportunidades de operar para la evolución orgánica son proporcionales al número de generaciones transcurridas.

Esta idea merece ser ampliada. Corrientemente nos sentimos un tanto impresionados, por no decir abrumados, por la inmensidad del tiempo requerido por el proceso de la evolución orgánica. Pero comprometámonos en un pequeño ejercicio de imaginación constructiva. Digo constructiva, porque voy a pedirles que capten, con la percepción de su inteligencia, no caracteres ficticios, sino personas reales.

Les invito a una reunión de hombres en el Franklin Field Stadium. Está lleno a plena capacidad, con 85 000 varones sentados. Cada uno de ustedes tiene el privilegio de invitar a sus propios huéspedes a esta reunión; pero para cada uno de ustedes es una fiesta distinta y particular, una tertulia de hombres solos, como dije, excepto por su presencia, si usted pertenece al bello sexo. Porque, estos hombres reunidos en el Stadium son sus antepasados masculinos en línea de descendencia directa. Muy cerca, a su derecha, está sentado su padre, su abuelo, su bisabuelo, y así sucesivamente. Al recorrer con la vista la primera fila, usted ha alcanzado hasta la 1 000-ésima generación, sus antepasados de 20 000 ó 30 000 años atrás. De hecho, si los asientos se extienden por todo alrededor del estadio, él se sienta a su lado, a su izquierda. Espero que no le incomode. Pero hay una segunda fila, y una tercera, y así sucesivamente, hasta el 85 000-ésimo ascendiente en línea directa. Su antigüedad es difícil de estimar, pues las generaciones de su época eran quizá más bien cortas. Pero es bastante seguro que el calendario hubiera registrado el año de su nacimiento como un número de siete dígitos antes de Cristo. Y al mirar a esa criatura allá en la fila más alta, usted dudará en decir que aquellos eran los días en que los *hombres eran hombres*.

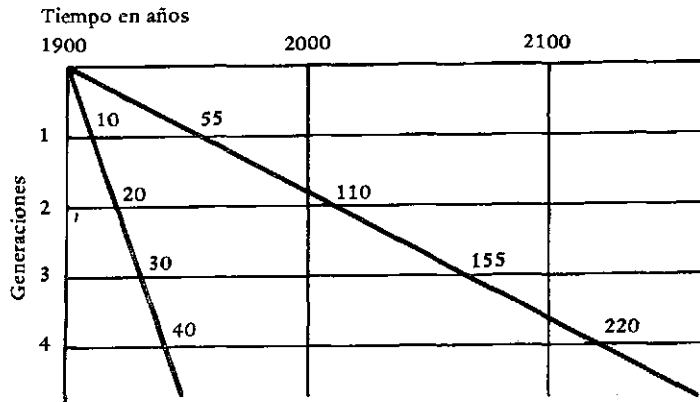
Pero permítanme recordarles de nuevo que ésta no es una reunión de seres hipotéticos, o de fantasmas fingidos. Estas figuras sentadas en el estadio (en su imaginación) son objetos reales, cada uno y todos tan definidos, tan

reales como usted y como yo. Mirados así, los eslabones en la cadena que nos une con el pasado aparecen casi demasiado íntimos; dispuestos en generaciones los evos se acortan, y el comienzo de los tiempos parece menos remoto.

Pero el incierto foco de la imaginación no satisface al científico. El etnólogo, el arqueólogo, el antropólogo, el paleontólogo, el cosmólogo, todos contribuyen, mediante evidencias concretas, al esfuerzo por dar perfiles más definidos a nuestra concepción sobre los orígenes próximo y remoto de nuestra población humana.

Aunque en muchos aspectos la generación es la unidad apropiada y verdaderamente natural en la escala temporal biológica, tiene el defecto de ser un tanto elástica, si puedo decir esto sin contradicción en los términos. Permítanme ilustrar lo anterior. En un día cualquiera, aquí, en los Estados Unidos, nacen algo más de 5 000 criaturas, de las cuales alrededor de la mitad son niñas. Fijemos nuestra atención en esta cohorte de un día, nacida, digamos, a la hora cero (0), para simplificar las cosas; consideremos 1 000 niñas recién nacidas (la generación "cero") y sigamos a su prole a lo largo de la vida. Sus hijas —que llamaremos la primera generación— nacerán en algún momento entre los 10 y los 55 años después de la hora cero, o digamos entre los tiempos $t = 10$ y $t = 55$. Sus nietas nacerán entre $t = 20$ y $t = 110$; sus bisnietas entre $t = 30$ y $t = 165$, y así sucesivamente (véase el gráfico 1). Hay así, por lo tanto, una siempre creciente superposición de generaciones, con algunos resultados bastante singulares. En el momento $t = 200$ pueden estar coexistiendo personas de 16 generaciones diferentes de descendientes de nuestra cohorte de la hora cero. En realidad, debido al gran adelgazamiento de la curva de distribución de nacimientos en los dos extremos, es posible que sólo estén representadas cuatro generaciones. Aun esto es notable. Si ustedes pudieran dibujar todo el árbol genealógico hacia atrás, digamos, hasta el sexto antepasado en línea directa, encontrarían que las fechas de nacimiento de sus parientes de su misma generación podrían perfectamente desperdigarse a través de un período de 70 años o más. Esto es, ustedes podrían estar recibiendo durante toda su vida, a intervalos, anuncios del nacimiento de lo que podrían denominar sus primos de la sexta generación, si los padres de éstos se tomaran la molestia de informarles. Otro aspecto de esta cuestión es que, sentada junto a su lado en esta sala puede estar una persona que es, por decirlo así, cinco o seis generaciones mayor o menor que usted. Puesto que una generación de madre a hija mide 28

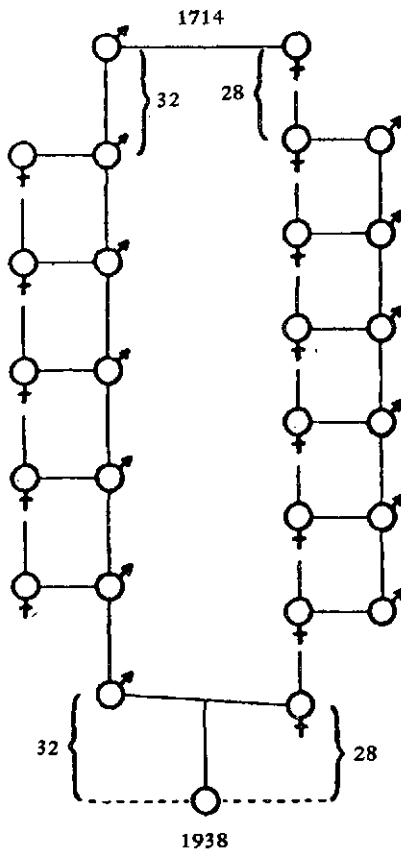
GRAFICO 1



años en promedio, y 32 años de padre a hijo, surge una suerte de desajuste entre las generaciones de ambos sexos. En el curso de 224 años hay espacio para ocho de sus antepasados femeninos en línea directa, pero sólo para siete de sus ascendientes masculinos tam-

GRAFICO 2

GENERACIONES DE SIETE HOMBRES Y OCHO MUJERES EN 224 AÑOS



bién en línea directa, si los consideramos en términos de cifras promedio. Esto puede parecer un tanto desconcertante, puesto que cada uno de sus antepasados masculinos estuvo casado con uno de sus ascendientes femeninos, y a primera vista es difícil parear ocho mujeres con siete hombres. La respuesta a este enigma puede explicarse mejor mediante un diagrama.

En el gráfico 2 vemos, a la izquierda una fila de siete antepasados masculinos sucesivos que, para nuestra ilustración, están distanciados exactamente en 32 años. A la derecha está la fila correspondiente de ocho ascendientes femeninos, distanciados en 28 años. Ahora, en general, cada una de estas personas se habrá casado con algún cónyuge, convenientemente indicado en el diagrama, que no nos atañe más allá de eso. Consideremos el caso en que tanto los dos últimos como los dos primeros de la cadena son una pareja casada. Al trazar las sucesiones en este diagrama se ve que, en estas condiciones, el número uno en la cadena masculina es un antepasado masculino de séptimo orden a lo largo de la línea masculina de descendencia hasta el hijo nacido de la última pareja mientras que es un ascendiente de octavo orden del mismo hijo a través de su matrimonio con la mujer número uno.

En algún lugar de toda la línea uno de sus antepasados puede haber desempeñado un papel doble. Es como si su bisabuelo fuera al mismo tiempo su tatarabuelo, excepto que esta notable actuación doble de un antepasado en dos papeles está algo más allá que las generaciones tercera o cuarta. Si ocurre que mi diagrama se aplica a ustedes, significa que su bisabuelo, trasladado siete veces en la línea de descendencia masculina directa era al mismo tiempo su bisabuelo trasladado ocho veces, en virtud del hecho de haber estado casado con su bisabuela de ocho grados más atrás.

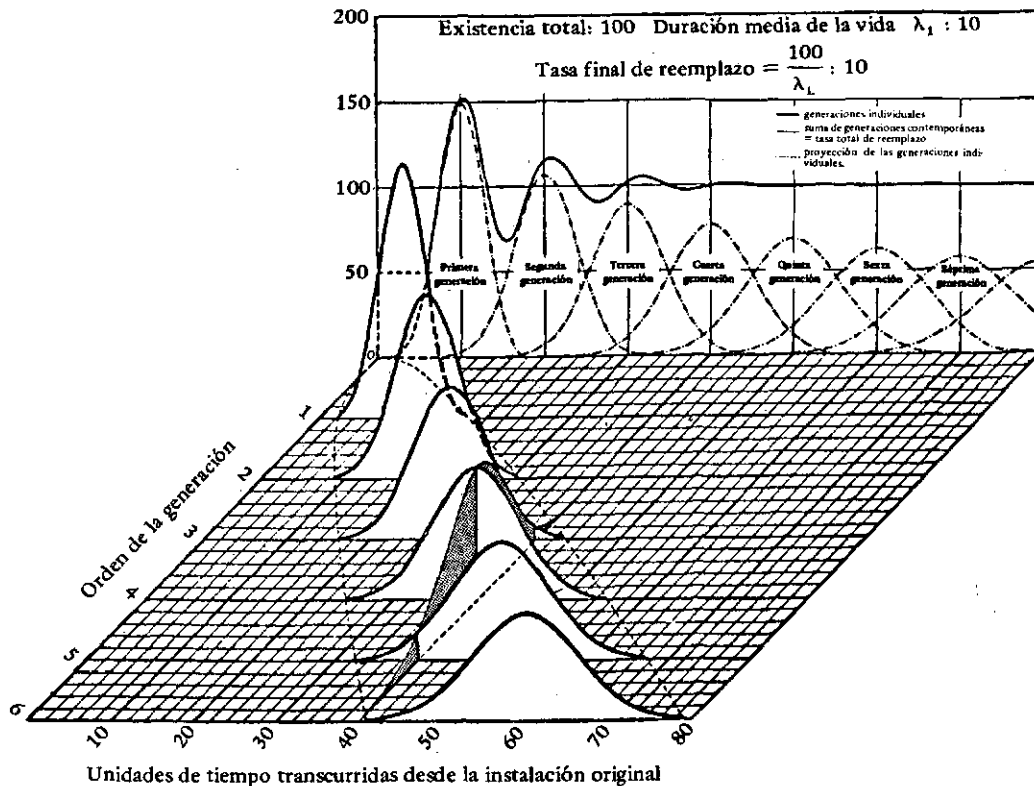
Puedo entrar en mayor detalle con una repre-

sentación gráfica de algunas de las relaciones pertinentes entre generaciones sucesivas, tal como se desenvuelven en el tiempo. Pero ahorraremos pasos si entro inmediatamente en otra cuestión, en que se ilustrarán principios similares.

El hombre moderno, como apuntó Emerson hace años, "no cabe en su piel". La unidad de la sociedad industrial no es una persona, sino una persona más una cantidad de accesorios. Estos accesorios tienen, por su parte, un "período de vida útil" propio. Esto nos pone en contacto con dos clases de problemas en economía: en particular, para aquellos accesorios que tienen un período de vida más corto que la vida humana, existe el problema de la reposición periódica. Para aquellos accesorios cuyo período de vida excede al lapso de la vida humana, surge el problema de la herencia y de la distribución y redistribución resultante de la propiedad personal. No me propongo discutir aquí el último problema. El primero tiene un interés peculiar para nosotros como estu-

diosos de la población, a causa de su cercana analogía con ciertos problemas del crecimiento poblacional. Supongamos, por ejemplo, que una flota de 1 000 camiones es puesta en servicio al comienzo de un período determinado que llamaremos época cero. A medida que pasa el tiempo, algunos de los camiones quedarán inutilizados por accidentes o desgaste. Supongamos que cada uno de estos camiones es reemplazado inmediatamente por uno nuevo, Si se quiere mantener constante el equipo, ¿cuál será la tasa de reposición a medida que pasa el tiempo? El problema es en rigor idéntico a uno considerado hace muchos años (1909) por el actuario francés Herbelot, esto es, la tasa de reemplazo en un conjunto de tenedores de póliza de seguro, cuyo número debe ser mantenido constante mientras que los miembros participantes disminuyen por muerte. La naturaleza del problema y el tipo de análisis mediante el cual se resuelve quedan ilustrados en el gráfico 3. Las curvas en forma de sombrero

GRAFICO 3
TASA TOTAL DE REEMPLAZO
COMO SUMA DE LAS GENERACIONES SUCESIVAS SUPERPUESTAS



en este dibujo muestran la distribución en el tiempo de los "reemplazos" de artículos en desuso en generaciones sucesivas, calculados con base en las observaciones compiladas por

E. B. Kurtz en su *Life Expectancy of Physical Property* (Ronald Press, 1930).

Sin entrar en detalles de análisis matemático, puedo advertir brevemente que la relación

entre las curvas de distribución de generaciones sucesivas toman la forma simple en la que el n -ésimo seminvariante de la j -ésima generación es igual al j -ésimo múltiplo del n -ésimo seminvariante de la primera generación.²

Hemos destacado así un punto de contacto entre el estudio de la población y la economía. Señalaremos otros a medida que avancemos. La mera referencia, al pasar, al seguro de vida, orienta de inmediato nuestros pensamientos a la relación económica del asalariado con quienes participan del beneficio de sus ingresos. Por esta circunstancia, y enteramente aparte de cualquier sentimiento, él se convierte en un bien económico para su familia. Es una cuestión relativamente simple y directa, desde este punto de vista, el calcular su valor de capital para su familia, si basamos nuestros cálculos en una mortalidad promedio y en una escala de ingresos y gastos elegida adecuadamente. Como este tema ha sido explicado con detalle en un volumen³ publicado hace pocos años por el Dr. Dublin y yo, no ahondaré más en él aquí. No obstante, hay un aspecto del problema que exige una mención. En forma no poco frecuente se ha discutido acerca del valor de un hombre, no para su familia en particular, sino para la comunidad como un todo. Ahora bien, ésta es una cosa muy diferente del valor de un hombre para su familia. Esto es suficientemente claro en casos extremos, en que un hombre se asegura, mediante medios inmorales y antisociales, de amplios beneficios para sí y para su familia en detrimento de la comunidad. Pero la dificultad surge no sólo en estos casos extremos y, esperémoslo, raros, sino que es más profunda que esto.

El sentido general del bienestar en una comunidad, a igualdad de otras cosas, oscila con la proporción de bienes disponibles por persona, esto es, con el cociente

$$\frac{\text{bienes económicos}}{\text{número de personas en la población}}$$

Ahora bien, este cociente se incrementa cuando aumenta el numerador mientras el denominador

²Para detalles véase Lotka, A.J.: "The Progeny of a Population Element", *American J. Hygiene*, 1928, 8, pág. 875; "The Spread of Generations", *Human Biology*, 1929, 1, pág. 305; "Industrial Replacement", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1933, pág. 51; "The Application of Mathematical Analysis to Self-Renewing Aggregate, with Special Reference to Industrial Replacement", aparecida en la edición de marzo de 1939 de los *Annals of Mathematical Statistics*.

³L.I. Dublin y A.J. Lotka: "The Money Value of a Man", Ronald Press, 1930.

es constante. Pero decrece si el denominador aumenta mientras es constante el numerador. Esto muestra de inmediato que no podemos discutir en forma tan general el valor de un individuo para la comunidad como lo hacemos al considerar el valor de los bienes económicos corrientes. Debe recordarse que el individuo es tanto un productor como un consumidor. El que la adición de un individuo más a la comunidad sea al activo o al pasivo depende de que su contribución por medio de la producción sea mayor o menor que su consumo. Aun cuando no se adelanta esta breve explicación para tratar por entero la cuestión, ciertamente serviría para apuntar muy claramente el hecho de que el problema de estimar el valor de un individuo para la comunidad es algo muy diferente del de estimar su valor para sus dependientes inmediatos, y exigiría, si pudiera ser resuelto, métodos completamente diferentes.

Pero estas son aplicaciones un tanto especiales, a las que hemos sido conducidos principalmente por las semejanzas formales entre el crecimiento de la población viviente y el de sus accesorios inorgánicos, más que por similitud en los principios pertinentes fundamentales. Ahora les pediré que consideren conmigo una visión más amplia de nuestro tópico, en el curso de la cual nos encontraremos nuevamente entrando en contacto con la economía.

Cuando se fundó nuestra Asociación, consideramos oportunamente si se limitaría al estudio de las poblaciones humanas o si incluiría también el de las poblaciones de organismos vivos en general. Se decidió que el objeto principal de estudio, debería ser, al menos, las poblaciones humanas. Pero creo que en una ocasión como esta es apropiado adoptar una posición más amplia y otorgar mayor atención al tópico más vasto, el tema que podría designarse mediante el término *Demografía general*. Creo que esto es lo más justificado, desde el momento que la población humana depende de las especies animales y vegetales coexistentes, en lo referente a artículos o materias alimenticias, vestuario, vivienda y otros. Al mismo tiempo, algunas otras especies aparecen en nuestro esquema como perjudiciales, tanto porque compiten honestamente con nosotros por el alimento, como porque, con menos respetabilidad, roban de nuestros graneros lo que hemos sembrado y cultivado. Otras aun nos amenazan mediante ataque directo a nuestras vidas; en las comunidades civilizadas modernas, raramente a través de un honesto ataque frontal; por lo común mediante una invasión solapada al abrigo de dimensiones microscópicas y ultramicroscópicas.

El estudio descriptivo de las interrelaciones entre las especies coexistentes y, en forma más general, su medio es de incumbencia de la Ecología. Desde el momento que en la Naturaleza la destrucción de una especie por otra desempeña una función tan importante, una parte no despreciable de los estudios de los ecólogos está dedicada a las *cadena alimentarias* y a las redes de cadenas intermedias. C. Elton ha señalado el interesante hecho de que tales cadenas alimentarias no pasan por lo habitual de cinco eslabones sucesivos, puesto que corrientemente un animal depredador debe ser de gran dimensión en comparación con su presa.

El hombre constituye una notable excepción a esta última regla, al menos si estimamos su fuerza sólo por su energía corporal. En su dieta incluye cualquier cosa que satisfaga su paladar, sin considerar el tamaño, desde la ballena hasta la sardina. El problema práctico de su abastecimiento de comida concierne, por una parte, al economista agrario y, por la otra, al ecólogo económico. En el último recae, entre otras cosas, la tarea de censar a las poblaciones animales y vegetales en estado salvaje. Diversos métodos han sido desarrollados para la investigación de este problema y otros conexos. Si me prometen no tomarlo demasiado en serio, les revelaré a ustedes un método moderno que podría aplicarse a ciertos casos especiales que me han ocurrido recientemente.

Mientras daba un paseo en coche durante una estadía reciente en Bermuda, fui agradablemente distraído por el canto melodioso de los sapos arbóreos. Pensé que, por medio de los modernos instrumentos de registro del sonido, sería posible obtener una medida de la densidad de la población de sapos. Este es el lado experimental del problema. Análíticamente, el problema más bonito surge en la determinación de la intensidad del sonido en un punto en particular, en un campo tachonado con fuentes individuales de una intensidad y una distribución determinadas. La idea apela a nuestro sentido del humor. Demos a este esquema el beneficio de la duda de si tal vez pueda tener verdadero interés.

Esto me conduce lógicamente a hablar del análisis matemático de los problemas ecológicos; en particular de la interrelación entre las cantidades de organismos de diferentes especies que habitan en una localidad determinada. Este análisis es un desarrollo muy reciente, al que han contribuido hasta ahora, de hecho, sólo un puñado de autores.⁴ El primer desarrollo

sistemático del tema data de 1925, aunque estuvo precedido por una cantidad de publicaciones dispersas durante los primeros años del presente siglo. Contribuciones notables han venido de V. Volterra desde 1927, quien se interesó por este campo ante un problema práctico que le planteó el Profesor U. D'Ancona en relación con las pesquerías italianas. Ya señalé la relación de este tema general con las pesquerías marinas en mi libro *Physical Biology*, 1925. G. F. Guase ha publicado muy recientemente un trabajo experimental realizado con estos estudios analíticos como antecedente.

Pero las interrelaciones de las especies de organismos vivos con su medio va más allá de los límites de su propia naturaleza. El anciano que nos recordaba: "Polvo eres y en polvo te convertirás" puede haber simplificado algo heroicamente su química, pero ha aprendido un hecho de profunda significación fundamental. La geoquímica y la cosmología modernas han servido sólo para destacar su significado, precisando el cuadro con un enfoque más exacto. Puesto que ahora sabemos que es estricta y literalmente efectivo que somos partículas de tierra, partes selectivamente sublimadas, es cierto, de composición peculiar y de propiedades mecánicas aun más peculiares, pero, con todo, partículas de tierra que se mueven en torno a la tierra.

Para nuestra perspectiva inmediata, como espectadores que se confunden libremente con la acción en el escenario, algunos de los pasos individuales en el proceso por el cual adquirimos esta extraña movilidad se muestran en forma tan prominente que perdemos de vista el fenómeno básico y debe sernos recordado. Como ha señalado Keyser: "El hombre ha estado acostumbrado por largo tiempo a mirarse a sí mismo como un ser absolutamente separado y no como parte del cosmos que le rodea. Se ha separado así en el pensamiento, ha independizado y objetivado al mundo y perdido el sentido de que es parte de él. Y esta antigua costumbre y punto de vista, que ha modelado su vida y controlado su pensamiento, dándole su marca y fisonomía características a toda su filosofía y su arte y su conocimiento, se mantiene aún, en la esencia misma de las posibilidades más fuertes de la ciencia biológica, sin duda en parte debido a su conveniencia, y en parte por la fuerza de la inercia y de un consumado conservantismo. Probablemente ninguna otra hipótesis individual sea menos aconsejable, y, no obstante, ninguna otra domine tan completamente la mente humana".

Por lo que respecta a las "probabilidades más fuertes de la ciencia biológica" a que se refiere Keyser, resultan apropiadas las palabras

⁴Este desarrollo se originó independientemente en Estados Unidos (Lotka, 1907, 1925), Italia (Volterra, 1927) y Australia (Bailey y Nicholson, 1931).

de Vernadsky: "El organismo real está indisolublemente ligado al medio y no podemos aislarlo más que en nuestro pensamiento".

Sería interesante, si el tiempo lo permitiera, citar pasajes pertinentes de muchos escritores. Lo que es en particular significativo es que los investigadores científicos y los hombres de letras que abordan los hechos desde ángulos por entero diferentes, llegan al mismo punto de vista.

Es lamentable que corrientemente seamos incapaces de conseguir una comprensión vívida de nuestra unidad con la naturaleza, pues su conocimiento completo depara una profunda satisfacción estética, que se eleva en algunas personas y en determinadas ocasiones a las alturas del éxtasis.

Pero para la mayoría de nosotros, éstos no son más que humores transitorios, y el duro trabajo de la ciencia debe realizarse a la luz más serena de la razón controlada. Para nuestras facultades críticas el mundo de los organismos vivientes aparece como un estrato especial de la tierra, la biósfera, extremadamente delgado en comparación con los estratos geológicos,⁵ pero compensando esto con creces mediante su extraordinaria actividad, de escala planetaria. Alguna indicación de ello la dan las cantidades de materia que participan en el ciclo orgánico. La respiración de los animales arroja a la atmósfera anualmente algo así como 3 ó 4 mil millones de toneladas,⁶ de dióxido de carbono, del cual alrededor de 500 millones constituye la contribución de la especie humana. Pero el hombre solo, mediante la combustión de carbón y otros combustibles en el hogar y en la industria, añade otros 3 mil millones de toneladas. En conjunto, estas descargas alcanzan cada año a una fracción muy apreciable, quizá alrededor de 1/300, de todo el dióxido de carbono contenido en la atmósfera, de manera que estamos, ciertamente, en presencia de operaciones a escala planetaria. Una parte del dióxido de carbono descargado⁷ es reducida de nuevo y asimilada por las plantas bajo la influencia del sol, que mantiene en movimiento los ciclos de esta gran máquina del mundo.

Los procesos en la biósfera no son sólo en vasta escala, sino también inmensamente

complicados. Pero la complicación está en la variedad de detalles; en lo fundamental se percibe un modelo sistemático.

Lo que tenemos ante nosotros es un sistema compuesto de conjuntos (poblaciones) de transformadores de energía. Cada conjunto o especie consiste en una multitud de unidades esencialmente similares construidas con materias perecibles, reunidas en una estructura actuante de manera que cada unidad, mediante su funcionamiento, recoge para sí las sustancias que le son necesarias para su reparación y crecimiento, incluyendo reposiciones periódicas, y la energía necesaria para su funcionamiento.

El transformador toma los materiales para su reparación y crecimiento de su medio incluyendo, muy a menudo, individuos de otra especie. Y así, en forma continua, sucede un intercambio de materia entre las distintas especies, experimentando la materia del sistema, como un todo, los correspondientes cambios de distribución entre sus especies componentes.

Pero existen límites para esta interconvertibilidad. Todos estamos familiarizados con el entretenido espectáculo de la paciente vaca dedicada sistemáticamente al beneficioso y muy agradable pasatiempo de convertir pasto en carne, y el asegurar que éste será un fenómeno continuo es de sobra sabido por nuestros agricultores. Pero aun nuestro mayor experto en explotación ganadera no puede, hoy en día, conseguir una conversión análoga de cualquier tipo de hierba en un mamut, pese a que no hace mucho esto debe haber sido un acontecimiento diario.

En este punto de nuestras reflexiones, podemos beneficiarnos con la experiencia adquirida en otro campo de la ciencia, en que también el estudio atañe a la distribución y redistribución de materia entre componentes específicos de un sistema material, a saber, la físico-química, y más en particular la dinámica química, incluyendo la estática y la cinética. En ese caso, los componentes en cuyos términos está definido el estado del sistema, se denominan elementos compuestos y químicos. Las leyes fundamentales de la química, aunque permiten una legión de posibles transformaciones, las limitan no obstante mediante lo que analíticamente toma la forma de ecuaciones de reacción, o ecuaciones de restricción. Ahora bien, para los sistemas físico-químicos, estas ecuaciones de restricción se fijan de una vez por todas, y la evolución de un sistema tal, al menos en los casos más simples considerados habitualmente, tiene lugar,

⁵ Se ha estimado que si toda la materia viviente se espaciera uniformemente sobre la tierra, formaría una película de alrededor de media pulgada de espesor.

⁶ Las cifras mencionadas en este párrafo son necesariamente aproximaciones burdas que sólo buscan indicar el orden de magnitud involucrado.

⁷ Otra fuente importante de dióxido de carbono atmosférico es la descarga volcánica.

por decirlo así, a través de movimientos hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una única senda. Esto se debe a que la multitud de elementos y compuestos químicos forman una multiplicidad de entidades discretas, separadas unas de otras por un vacío salvado sólo por situaciones totalmente inestables.

En contraste con esto, las distintas especies de organismos que componen el sistema de la biósfera difieren mucho más en estructura que en composición química. Y la estructura es infinitamente variable. Esto no significa que no haya en absoluto ecuaciones de restricción en el esquema analítico de la evolución orgánica. Tales ecuaciones provienen de las leyes de la herencia y del cambio. Pero las ecuaciones de restricción tienen aquí una cierta elasticidad. Un águila no se incuba en un huevo de pato, pero un pato blanco puede muy bien tener una nidada de patitos semicoloreados.

Ahora bien, la ley de la evolución de los sistemas fisicoquímicos puede establecerse, dadas ciertas condiciones, en términos muy precisos y concisos, aunque algo técnicos. Es en el sentido que las transformaciones dentro de sistema son tales que su potencial termodinámico, en condiciones determinadas, tiende hacia un mínimo. No resultaba extraño que, al volcarse hacia estos problemas los pensamientos de los estudiosos de la evolución orgánica que habían tenido contacto con las ciencias físicas, ellos contemplaran la posibilidad de una ley "mínima" similar para expresar la ley de la evolución de un sistema orgánico. Por cierto que ya se ha señalado, primero por mí en 1920⁸ y más tarde, con mayor detalle y perfección, por Vito Volterra, que en un sentido puramente formal, se puede construir tal "ley", para sistemas que tienen ciertas propiedades prescritas, características de conjuntos de organismos. Pero me parece desafortunado denominar *potenciales*⁹ a estas

funciones derivadas de manera puramente formal. La palabra potencial ya no es un candidato de libre adopción en el lenguaje de la ciencia. Se ha usado por mucho tiempo en un sentido definido e importante, para denotar una cantidad de la dimensión de *energía*, en el sentido estricto en que el físico emplea este término. Y no hay mención ni implicación definida de *energía*, en este sentido exacto, en la derivación de las funciones mínimas introducidas en el tratamiento analítico que hace Volterra de estos problemas.¹⁰ Existe el peligro de que, al dar precipitadamente este nombre de "potencial" a un hijo expósito, podamos tentarnos de desistir de mayores esfuerzos para encontrar el verdadero heredero. Debemos cuidarnos de los arrullos verbales que, mediante frases melodiosas y ritmos sedantes, cantan para adormecer nuestra curiosidad.

Cuando la curiosidad duerme, la ciencia se estanca.

No, para una comprensión más cabal de la ley de la evolución en la biósfera tenemos que mirar en otra dirección. Estamos tratando con agregados de transformadores de energía y este hecho debe encontrar finalmente una adecuada expresión en nuestro análisis, en el que

¹⁰ Las relaciones que deduce Volterra, muy análogas a ciertas propiedades importantes de los sistemas dinámicos (principio del mínimo esfuerzo, etc.), surgen del hecho de que sus *supuestos* fundamentales conducen a ecuaciones diferenciales que contienen variables dependientes en forma cuadrática. Estos supuestos son plausibles como primera aproximación a la verdad, pero ciertamente son sólo una aproximación y probablemente muy burda.

Esta situación es muy diferente de la que existe en el caso de las ecuaciones que expresan los principios formalmente correspondientes de la dinámica. Estos se basan en *observaciones*, con las cuales concuerdan dentro de los límites de error de los procedimientos experimentales más refinados. Lo que descubrió Volterra no es una propiedad de los sistemas biológicos, sino una propiedad de un determinado conjunto de ecuaciones, y no se justifica denominar al resultado "el principio de mínimo esfuerzo en *biología*". Es a lo sumo "el principio del mínimo esfuerzo (hablando en forma figurada) en un sistema matemático determinado.

El hecho es que la biodinámica real, la relación efectiva de energía del organismo y de los agregados de organismos —la oxidación como fuente de energía libre, etc.— no aparece para nada en el análisis de Volterra; tampoco considera las propiedades estructurales y psicológicas fundamentalmente importantes del organismo, de las cuales dependen su eficacia variable para allegar energía y conjurar las influencias nocivas.

Estas observaciones se hacen con cabal apreciación de la gran elegancia del análisis de Volterra y del interés muy real que este tiene. Pero no va a la raíz del problema y no debe permitirse que cree la impresión de que el problema fundamental de la biodinámica queda con eso resuelto. Ni siquiera ha sido tocado.

⁸ Lotka, A. J.: "Evolution and Irreversibility", en *Science Progress*, 1920, pag. 406.

⁹ Véase en especial las siguientes referencias: Volterra, V., *L'enseignement mathématique*, 1937, pp. 297 a 330, y en particular p. 312; *Comptes Rendus*, Acad. Sci., París, 1936, 202, pp. 1953, 2023, 2133; 1936, 203, pp. 417, 480.

El empleo por parte de R. N. Chapman, *Animal Ecology*, 1926, p. 145, de la palabra potencial en otro sentido adicional ("potencial biótico"), está sujeto a la misma objeción. Chapman repara en el uso, por mi parte, del término "fuerza de mortalidad" para denotar la mortalidad a una edad específica. Pero este es un asunto diferente. Yo no introduje el término; se lo ha empleado por mucho tiempo en los escritos actuariales, y concuerdo plenamente en que no ha sido bien elegido. No tiene analogía con la "fuerza" familiar en física, y yo nunca he sobrentendido tal analogía.

deberán tener un lugar apropiado los siguientes principios.

Puede decirse que el éxito de cualquier especie particular de tales transformadores de energía depende de tres factores fundamentales:

1. La reserva de energía a disposición del individuo.
2. Su patrón de comportamiento, esto es, la proporción en que gasta su energía en diferentes aspectos.
3. Su grado de perfección y destreza en las distintas actividades de su patrón de comportamiento.

Respecto al hombre, estos tres factores pueden expresarse de la siguiente forma: 1) *Cuán fuerte es*; 2) *Cuán sensato es para seleccionar los objetivos a perseguir*; 3) *Cuán hábil es para alcanzar estos objetivos*.

En la lucha por la dominación entre las numerosas especies de organismos, la victoria recaerá evidentemente en aquellos en que el ajuste entre estos tres factores sea más adecuado *en las condiciones existentes*, esto es, en aquellos que, en su calidad de transformadores de energía, orienten en forma más efectiva la energía a su disposición por canales favorables a la supervivencia y al crecimiento de la especie. Es desde este ángulo, con nuestra vista puesta en los efectos colectivos producidos por la totalidad de las unidades componentes del sistema, que debemos estudiar la relación entre las distintas especies y su medio, si esperamos desarrollar un análisis adecuado de la evolución de la biósfera como un sistema que comprende una variedad de especies de organismos vivientes.

Pero para nosotros el interés principal reside en la población humana. Ahora bien, en la especie humana el desarrollo de los tres factores principales de éxito asume una forma muy especial. En cuanto al primero, bastará aquí señalar que, poniendo a su servicio máquinas movidas por una fuerza externa, el hombre ha incrementado enormemente su fuerza efectiva, como lo evidencian parcialmente las cifras mencionadas relativas a las cantidades de dióxido de carbono descargadas en la atmósfera. Inventando ingeniosos instrumentos y máquinas, el hombre ha multiplicado en forma *inconmensurable* sus habilidades. Hace ya tiempo se comprendió y a menudo se ha comentado que estos instrumentos y máquinas son funcionalmente, y en este sentido literalmente, extensiones de los propios sentidos y órganos motores del hombre. Pero aun ahora, es probable que pocas personas se den cuenta de hasta dónde se extiende la asociación entre el soma

compuesto fisiológicamente y la máquina manufacturada. Es efectivo que hacemos las máquinas, pero es igualmente cierto, aunque menos comúnmente comprendido, que las máquinas nos hacen a nosotros. La razón para esta ceguera de nuestra parte es que las etapas individuales a través de las cuales fabricamos nuestras máquinas están plenamente a la vista, mientras que la participación de las máquinas en las operaciones de las que nuestro cuerpo es el resultado final es menos obvia, porque está distribuida más amplia y difusamente en el espacio y en el tiempo. En algún lugar de esta mano que pongo a la vista, no lo dudo, hay algunos átomos de nitrógeno que fueron traídos aquí en barcos de vapor desde Chile. Tractores de gasolina, locomotoras de vapor, segadoras mecánicas y no se qué otros artefactos mecánicos han desempeñado su parte para lograr la metamorfosis de la que mi cuerpo es el resultado final. Pero aunque conozco estos hechos, no están vívidamente en mi conciencia, porque no son observados en forma directa.

Respecto al origen fisiológico del cuerpo de los organismos, a menudo contrastado con el tipo de origen en apariencia muy diferente de las máquinas hechas por el hombre, debe señalarse que las circunstancias un tanto espectaculares que rodean la procreación y el nacimiento nos inducen a poner demasiado énfasis al papel de estos acontecimientos, pasando por alto la contribución más prosaica, pero realmente más esencial, del acto de la alimentación. La población no crece mediante los nacimientos, sino a través de la asimilación. Un nacimiento únicamente proporciona una boca adicional para la entrada del alimento. No los nacimientos, sino la comida hace al hombre. Y si él está para comer, debe tener un suministro adecuado de alimentos que lleguen hasta él; en la comunidad moderna mediante todo un ejército de máquinas.

Pero las máquinas no tan sólo hacen hombres, se hacen en gran parte a sí mismas —un punto comúnmente descuidado por quienes encuentran distracción en puntualizar propiedades supuestamente características de la materia viva. Una determinada máquina *A*, no puede producir otra máquina *A*; sino un equipo de máquinas $A + B + C + \dots$, todo nuestro equipo industrial, reproduce su equivalente,¹¹ es

¹¹Estos son los hechos en la contingencia. El asunto podría haber sido abordado por el lado teórico, deductivo. Parecería ser un problema de mecánica geométrica el que se pudiera o no construir una máquina capaz de reproducirse enteramente a sí misma. Hasta donde yo sé este aspecto del problema jamás ha recibido atención alguna. Parece estar relacionado con la teoría matemática de los grupos.

decir, otro equipo $A + B + C + \dots$. Lo que es más, si por alguna catástrofe quedara repentinamente destruido todo el equipo industrial existente, su reconstrucción sería un lento proceso de evolución: lento por la misma causa que la evolución orgánica ha sido lenta, esto es, porque a causa de que cada paso hacia adelante está condicionado al cumplimiento previo de un paso necesariamente anterior, en que el progreso se efectúa a través de la acumulación de avances tremendamente pequeños.

Se puede señalar que nuestras máquinas todavía requieren de supervisión humana. ¡Estemos agradecidos de eso! Ya somos suficientemente esclavos de ellas. Si comenzaran con una campaña incontrolada de auto-reproducción nos encontraríamos en serios aprietos.

Ustedes habrán observado que hasta aquí mis consideraciones se han referido sólo al primer y tercer factores de éxito en la lucha por la supervivencia, nuestras fuerza y habilidad inmensamente acrecentadas. Nos abocaremos ahora a la consideración del segundo factor, hasta aquí sólo mencionado.

El maravilloso progreso técnico característico del período moderno es esencialmente el resultado del conocimiento que nos llega a través de nuestros sentidos naturales y a través de nuestros órganos sensitivos artificiales de nuestra propia invención. Al organizar el conocimiento así adquirido en un cuerpo de ciencia inductivo y deductivo, hemos incrementado aun inconmensurablemente más su alcance y su fuerza. *Pero existe conocimiento de otra clase.*

Este enunciado puede ser impugnado; por esta razón lo probaré mediante un experimento.

Sé que un determinado hecho físico ocurrirá en esta sala dentro de pocos minutos. Sólo yo lo sé. Ninguno de ustedes, en mi audiencia, puede saberlo, porque este conocimiento me llega, no a través de mis sentidos, sino a través de canales absolutamente inaccesibles para ustedes.

Aquí, en mi escritorio, hay un objeto físico, una moneda de cinco centavos. Dentro de menos de un minuto va a cambiar de posición y quedará en el piso. (En ese momento el conferenciante empujó la moneda del escritorio y ésta cayó al suelo).

Ustedes ven que tenía un conocimiento previo de un cierto cambio que acaba de suceder entre objetos puramente físicos. Ahora bien, es un hecho singular, y realmente muy notable, que esta clase de conocimiento, conocimiento previo de acontecimientos deliberados, superlativamente importante como es en las cuestiones humanas, en apariencia puede ser ignorado impunemente en campos enteros de la ciencia.

En las ciencias físicas no se dice nada de propósitos y deseos. Estamos tan acostumbrados a esta actitud de omitir toda referencia a éstos en la discusión, que corrientemente ni siquiera notamos su ausencia. Pero incluso gran parte de la economía puede tratarse sin referencia a propósitos y deseos. Cuornot, en su clásico *Researches into the Mathematical Theory of Wealth*, señala que los deseos que no se concretan en una compra o venta no figuran en las transacciones económicas, y por consiguiente no es necesario incluirlos en su discusión.

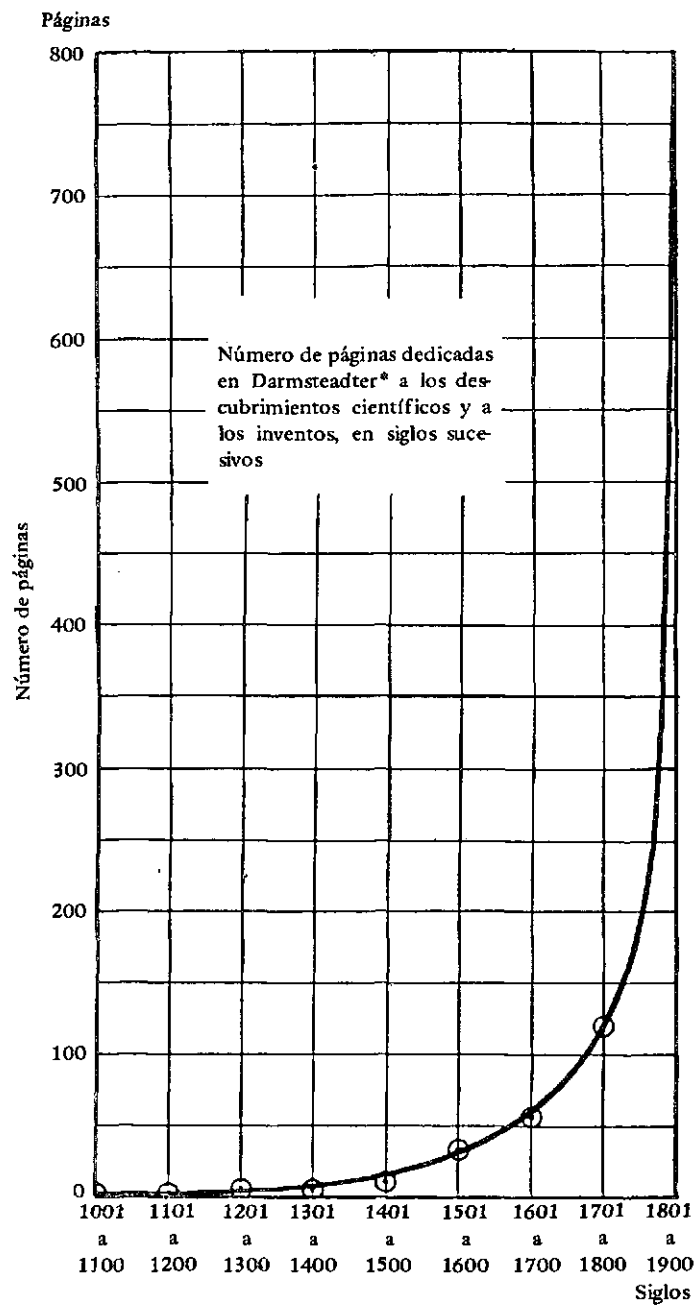
El punto de vista de Cournot, que excluye así de las consideraciones económicas los "intangibles" propósitos y deseos humanos, tiene un fuerte atractivo para cierto tipo de pareceres, y tiene innegablemente un gran interés para todos los estudiosos serios. Pero algunos de nosotros sentimos que el término "intangible" describe pobremente nuestros deseos, y estamos influidos por el hecho de que los propósitos desempeñan un papel demasiado importante en los asuntos humanos para ser así sumariamente descartados. Observamos, siguiendo a Herbert Spencer, que una variedad convenientemente compuesta de deseos es una necesidad para la supervivencia de la especie, y que una colección apropiada en un conjunto de condiciones puede no ser ya adecuada cuando las condiciones se alteran radicalmente. Los cambios revolucionarios que han tenido lugar en nuestros poderes y en nuestra destreza para alcanzar nuestros objetivos pueden haber sacado malamente del equilibrio al conjunto de propósitos mismos. En la situación presente de la sociedad, nuestras demandas por las necesidades primarias de la vida son satisfechas con tal facilidad, que una gran parte del tiempo disponible para el trabajo se dedica, en épocas normales, a la fabricación de bienes más o menos definitivamente suntuarios. Esto da origen a ciertos problemas especiales de los cuales estamos hoy muy conscientes. Primero, el simple hecho de que una parte tan importante del tiempo de trabajo pueda dedicarse a la manufactura de mercancías que no son indispensables, abre posibilidades para períodos de relativa inactividad, sin ninguna perturbación seria de la satisfacción de las necesidades. Esto no sería en sí mismo penoso si, en los momentos en que surge esta situación, la relativa desocupación así ocasionada estuviera distribuida en forma equilibrada. En realidad, sabemos demasiado bien que esta distribución equitativa no ocurre, de modo que el resultado es una situación tal que parte de la población está ocupada y parte desocupada. Hay otro problema relacionado con éste. La demanda

por las necesidades básicas de la vida —alimento y vestuario—, es relativamente inelástica. Después que el hombre ha sido bien alimentado, su deseo por más comida, para decir lo menos, disminuye mucho. La demanda de bienes suntuarios es mucho más elástica. El hombre que posee un automóvil frecuentemente piensa que es conveniente un segundo. Con todo

generalmente suponemos que para los bienes suntuarios también rige la ley de las utilidades decrecientes, aún cuando en forma menos apremiante. En realidad, acaso el principio más frecuentemente aplicable en este terreno sea aquel del proverbio francés *l'appetit vien en mangeant*. Y el resultado del exceso es la indigestión.

GRAFICO 4

CURVA DE CRECIMIENTO DEL CONOCIMIENTO HUMANO



* *Handbuch der Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik.*

Pero donde la dislocación de nuestro sentido de los valores, en relación con las exigencias de las condiciones modernas, queda más agudamente en evidencia, es en lo que atañe a la perpetuación de nuestra especie. Una vez que se ha sometido a control arbitrario la reproducción, se otorga una importancia superlativa al deseo de procrear. Las estadísticas, cuando se interpretan en forma correcta, muestran muy claramente que, en las civilizaciones modernas, es imperfecta la satisfacción de los instintos adaptables. Y hay otros desajustes de los propósitos y esfuerzos humanos que, en el estado actual de las fuerzas del hombre, tanto destructivas como constructivas, amenazan remecer las bases mismas de la humanidad civilizada.

¿Hay algún remedio para este desequilibrio entre nuestras destrezas y nuestras inclinaciones, entre nuestro conocimiento de cómo hacer y nuestra falta de discernimiento para elegir qué hacer?

No es probable que el remedio se encuentre con facilidad, y esto por una razón precisa: el conocimiento adquirido a través de los sentidos es transmitido muy fácilmente, también a través de los sentidos. Pero en cuanto a nuestras inclinaciones hay algo incommunicable. Como lo expuso Pareto, si a un hombre no le gusta la espinaca, usted no puede probarle, como demostraría un teorema en geometría, que la espinaca sabe bien. El mismo principio es válido en cuestiones más importantes.

Con todo, hay manera de influir en los gustos, de implantar anhelos, pero no son las maneras a través de las cuales se imparte el conocimiento común. Un método consiste en administrar drogas y extractos. En el pasado nuestro interés en ese método ha sido principalmente negativo, limitada su aplicación al control de la venta de narcóticos y otras drogas dañinas, por no mencionar el recientemente fracasado "experimento doble". En su aplicación positiva, los desarrollos modernos sugieren la posibilidad de efectos sorprendentes, que no pretendemos evaluar aquí.

El segundo método para influir en los deseos es el de la *sugestión*. Cuando un grupo de personas deba realizar una acción concertada, sus deseos deben ser orientados, como son

orientadas las moléculas de una barra de acero para darle polaridad magnética. La situación actual de la raza humana requiere algo de esta clase para la revisión de nuestros patrones de valuación.

He abarcado esquemáticamente un campo un poco extenso y variado, pensando que esto resultaría de mayor interés general que un análisis más cabal de un problema más limitado. Permítanme resumir brevemente, a modo de conclusión, aquellos puntos que me interesaría, en particular, fijar en nuestras mentes.

El hombre se ha tornado extremadamente poderoso. Si no una medida, al menos una indicación de esto, son los miles de millones de toneladas de dióxido de carbono que su población arroja a la atmósfera.

Ha ganado en conocimiento y destreza a un ritmo que en los tiempos modernos puede ser comparado solo al ascenso de un cohete. De esto también se puede dar un indicador numérico. En el gráfico 4, las abscisas son años calendario; las ordenadas representan el número correspondiente de páginas en el catálogo Darmstaedter, que incluye los acontecimientos salientes en la ciencia y la tecnología.

Nos hemos tornado así, maravillosamente fuertes y diestros en cuanto a nuestros medios para alcanzar nuestros propósitos. Pero en cuanto a la madurez de nuestra elección de los propósitos por alcanzar, a lo sumo, hemos marcado el paso, cuando con el avance de nuestros poderes para el bien y el mal, el problema de ajustar nuestros patrones de valoración a las nuevas condiciones se ha hecho extraordinariamente urgente.

Podemos con justicia preguntar: ¿Se ha encontrado una raza humana inmadura con un juguete peligroso? ¿Somos niños jugando con un arma cargada? ¿Aumentará nuestra madurez antes que la tragedia nos ahogue? ¿Es éste el enigma de la Esfinge, en que el error significa la destrucción? ¿O podemos quizá mirar hacia un porvenir en que se produzca un despertar del juicio, proporcional al ascenso con ritmo de cohete del conocimiento? Si esto aconteciera, la Utopía de un sueño vano se convertiría en una situación real.

IX. EL LUGAR DE LA TASA INTRINSECA DE CRECIMIENTO NATURAL EN EL ANALISIS DE POBLACION

Una audiencia mixta, como ésta a la que tengo el privilegio de dirigirme hoy, ilustra de un modo peculiar una característica fundamental de toda intercomunicación entre los hombres y sus colegas, esto es, que la herramienta con que opera es el reflejo condicionado. Porque aquí, en que se llevan a cabo intercambios en distintos lenguajes, muchos de nosotros tenemos momentos en que nos damos cuenta, quizá demasiado claramente, de que la comprensión de las palabras habladas depende de que hayamos sido debidamente "condicionados", de manera que nuestras mentes tengan esa respuesta adecuada al ruido que oímos, que llamamos "entendimiento". Cuando oímos nuestro propio lenguaje familiar, este reflejo actúa con tan vertiginosa velocidad que generalmente no tenemos conciencia de los pasos intermedios entre la audición y la comprensión de las palabras. Digo generalmente, porque todos nosotros, en una u otra oportunidad, hemos tenido la experiencia de que una explicación que al oírla o leerla por primera vez nos parecía sin "sentido", después de un proceso de incubación se ha convertido en una proposición que "sólo necesitaba ser enunciada para reconocerla como verdadera".

Ahora, este condicionamiento de la mente para hacerla responder a ciertas situaciones, tan tremendamente importante como es en el comportamiento en la vida diaria, tiene que desempeñar también un papel importante en el avance de la ciencia a través del contacto de una inteligencia con otra. Indudablemente es por esta razón que a menudo encontramos una nueva tendencia de pensamiento, una nueva dirección de investigación, que surgen aproximadamente al mismo tiempo en lugares diferentes.

Esta situación es evidente en el desarrollo

moderno del análisis de población, o si se prefiere el término, de la demografía cuantitativa general. Decir que ciertas tendencias críticas en la población humana del globo fueron la ocasión "condicionante" para este desarrollo, es enunciar sólo una verdad parcial. Como sucede a menudo, la curiosidad, este útil rasgo de la mente humana, ha preparado el terreno antes que una necesidad reconocida provea el estímulo para un estudio de los hechos y las relaciones implicadas en algunos de nuestros primordiales problemas de población. Es interesante observar cómo diversas mentes derivaron, por muy distintos caminos, al estudio de la demografía cuantitativa general o análisis de población —general en el sentido de incluir en su campo el estudio de poblaciones mixtas que comprenden diferentes especies de organismos en interdependencia mutua. Algunos entraron por una puerta lateral, al ser atraída su atención por la similitud entre los problemas de la dinámica fisicoquímica y el problema de la lucha por la dominación o el equilibrio entre las diferentes especies de organismos. Los geólogos han hecho su contribución al reconocer en la "biósfera" un estrato especial de la tierra, que compensa su delgadez microscópica (hablando en escala cósmica), con su extraordinaria actividad y su superlativa importancia para nosotros los seres humanos. Este estrato, como advirtió Vernadsky, es un sistema heterogéneo compuesto por componentes relativamente homogéneos —las distintas especies biológicas cuyas acciones e interacciones presentan un fenómeno que, en escala planetaria, recuerda, para la escala del tubo de ensayo y el laboratorio, las reacciones entre elementos, compuestos, y aspectos homogéneos estudiados por el fisicoquímico.

Entre los biólogos, son los ecólogos quienes han desarrollado naturalmente una inquietud por las relaciones cuantitativas entre diferentes especies de organismos, dirigiendo particularmente su atención a esos problemas a causa de las variaciones notablemente cíclicas y aparentemente periódicas en las cantidades de ciertos animales en ciertas localidades. Un aspecto sumamente práctico de estos problemas ecológicos es la variación en la cogida o recolección de las flotas pesqueras, variaciones relacionadas sin duda, recíprocamente como efecto y como causa, con las cantidades de las distintas especies de peces que frecuentan las regiones. Fue una investigación realizada por el oceanógrafo italiano D'Ancona, relativa a estos problemas pesqueros, la que "condicionó" a Volterra en 1927 para que entrara en el campo, en esa época recientemente abierto por otros, del análisis matemático aplicado a asociaciones de organismos vivos.

Como es por cierto inevitable, dadas las circunstancias del caso, tanto el trabajo de Volterra como los de los autores anteriores en este campo, se apoyan definitivamente en conceptos propios de la dinámica fisicoquímica. De hecho, los problemas de ambas disciplinas tienen una gran parte en común, aunque también algunas diferencias manifiestas.

Entre otras cosas que tienen en común, es que en ambos casos estamos tratando con sistemas constituidos por componentes principales, cada uno de los cuales es a su vez un conjunto muy numeroso de unidades menores o individuos; todas las unidades del componente son esencialmente similares, pero diferentes de los individuos de los otros componentes.

De los principales puntos de diferencia entre el sistema fisicoquímico y el sistema biofísico, uno que obviamente debe afectar nuestros métodos de estudio es que en el primero, el sistema fisicoquímico los componentes principales son directamente observables sin ayuda de nuestros sentidos, mientras las extraordinarias unidades individuales, las moléculas y átomos, sólo pueden ser estudiadas como regla general mediante métodos indirectos. En los sistemas biofísicos se presenta la situación exactamente inversa. Por consiguiente, es natural que deseemos saber más acerca del individuo en las poblaciones de organismos vivos, y particularmente en las poblaciones humanas, que acerca de los fenómenos que se presentan en tales poblaciones en conjunto. Nuestro conocimiento de las relaciones entre el comportamiento de los individuos y los efectos colectivos de tales acciones es también muy

imperfecto. Es probable que quede por delante un campo muy importante de investigación, casi virgen en el estado actual de la ciencia. No es improbable que la experiencia y el conocimiento adquiridos en el estudio de los sistemas fisicoquímicos señalen rumbos que nos guíen en tales investigaciones.

Pero esto es respecto al futuro. Hoy día, en el análisis de población, nos movemos todavía a niveles más modestos. Aún así, la perspectiva fisicoquímica ha sido en este campo, al menos para uno de nosotros, el punto de partida que nos ha conducido a una valuación significativa del crecimiento potencial de la población. Al pasar de la observación de agregados de átomos y moléculas a la de poblaciones de seres vivos, una de las primeras cosas que uno se encontrará en el análisis matemático es el hecho que la "mortalidad" de las moléculas en ciertas reacciones químicas es, a cualquier tasa, independiente de su edad; cuando se entra en el estudio de conjuntos comparables de individuos vivos, debe introducirse un elemento nuevo, una estimación relativa al hecho que la mortalidad está en este caso muy ligada a la edad, y, por tanto, la tasa de mortalidad a través de todo el conjunto es una función de la distribución por edades prevaeciente. Con todo, al mismo tiempo se siente que esta influencia de la composición por edades sobre las tasas de mortalidad y, debiera agregar, sobre las tasas de natalidad y sobre la tasa de crecimiento natural, es en cierto sentido un factor extraño, adventicio. Nuestro principal interés está en la capacidad potencial, fundamental, de crecimiento, basada en las características más específicas, inherentes, de la población. Entonces, ¿cómo podremos medir esta capacidad potencial inherente de crecimiento?

La respuesta es que, si se deja a la población evolucionar por sí misma, en un régimen dado de fecundidad y mortalidad, alcanzará una determinada composición estable por edades con el transcurso del tiempo, sin importar cuán irregular haya sido la distribución por edades inicial y de ahí en adelante, en las condiciones establecidas, la población crecerá (o disminuirá) a una tasa constante, la tasa intrínseca de crecimiento natural, r_0 . Sin duda, esto lo comprendió Malthus, entre otros, en forma intuitiva y más bien general. Euler intentó hace años una demostración, pero basado en supuestos muy artificiales e irreales. Fueron los métodos modernos, con el empleo de ecuaciones integrales, los que permitieron establecer (1911) la demostración y contar con los medios para calcular numéricamente la tasa

intrínseca, o como se la denomina a veces, la verdadera tasa de crecimiento natural.¹

Entretanto, el problema de la despoblación, apenas considerado al comenzar el presente siglo (cuando, por cierto, la preocupación giraba más bien en torno a la sobrepoblación), amenazaba con agudizarse en la mayoría de las naciones civilizadas. Así, las investigaciones originalmente impulsadas, en las mentes de algunos, por una especie de curiosidad puramente científica, pasaron a tener un sentido inmediato en una de las cuestiones más prácticas que se pueda imaginar: el futuro de las poblaciones civilizadas. Y, de acuerdo con esto, en los años recientes se han presentado y empleado medidas alternativas del crecimiento potencial de una población. Una de éstas es la resurrección del índice de Boeckh, R_0 , apropiadamente denominado por Kuczynski "tasa neta de reproducción", que no es otra cosa que la razón de los nacimientos totales en dos generaciones sucesivas, en el régimen de un patrón fijo de fecundidad y mortalidad por edades, razón que en realidad surge como

resultado intermedio en el cálculo de la tasa intrínseca de crecimiento natural. Para la reproducción neta, se puede obtener una buena aproximación, comparando la razón entre los niños menores de cinco años y las mujeres en edad reproductiva en la población real, con la razón correspondiente en la población de la tabla de vida, que representa la mortalidad prevaleciente. Esta medida, el Índice de Reemplazo J , introducida por W. S. Thompson y empleada por Lorimer y Osborne en su libro *The Dynamics of Population Growth*, tiene la ventaja de que puede emplearse incluso cuando no existe información relativa a la fecundidad por edades determinadas. Tiene la desventaja de no ser una cifra única, pues varía en alguna medida de acuerdo a los grupos de edades particulares que se seleccionen para formar la razón de hijos respecto a mujeres.

Si ordenamos los distintos índices de crecimiento potencial de la población según sus propiedades más importantes, nos encontramos con el panorama expuesto en el cuadro 1.

CUADRO 1
COMPARACION DE LOS MERITOS RELATIVOS DE LAS TRES MEDIDAS PRINCIPALES DE CRECIMIENTO POTENCIAL DE LA POBLACION

Rango superior = 1

	R_0	J	r
1. Simplicidad de cálculo	1	3	2
2. Disponibilidad de información.....	2	1	2
3. Unicidad	2	3	1
4. Conveniencia y precisión de las unidades empleadas.....	2 ^a	3 ^a	1 ^b
5. Relación con el análisis general de población.....	2	3	1
6. Comparabilidad directa con las estadísticas reales primarias.....	2	2	1
7. Alcance de la información entregada por el índice.....	2	3	1 ^c
<i>Total de grados</i>	13	18	9

^a La unidad es una generación, que está sujeta a variaciones menores.

^b La unidad es un año.

^c El método por el cual se obtiene r , entrega también una tasa de natalidad b y una tasa de mortalidad, d correspondiente. Los cálculos de R_0 y J no entregan indicaciones sobre los valores brutos de b y d , salvo que $R_0 < 1$ implica siempre que r bruto > 0 .

¹ Sharpe, F. R., y Lotka, A. J.: "A problem in Age Distribution. Phil. Mag.", vol. 21, pág. 435, 1911. El primer cálculo basado en información numérica se publicó en 1925, por Dublin, L. I., y Lotka, A. J., "The true rate of natural increase." *Journ. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 20, pág. 305, 1925. La afirmación, que se encuentra en la literatura (Kuczynski, R., *Fertility and Reproduction*, Falcon Press, 1932), en el sentido de que esta proposición fue establecida por Bortkiewicz, se basa en una equivocación. Bortkiewicz nunca introdujo en su examen la fecundidad por edades determinadas, y sin esto no se podía demostrar la convergencia del crecimiento de la población hacia una tasa intrínseca fija de crecimiento natural, y menos aún podía calcularse esta tasa.

El "total de grados" que aparece al final del cuadro debe considerarse sólo como una medida aproximada del valor relativo de los distintos índices, puesto que este total no pondera los distintos renglones 1 a 7 de acuerdo con su importancia. En realidad, los tres últimos renglones en que la tasa intrínseca de crecimiento natural ocupa rangos claramente superiores, tienen particular importancia. De hecho, quizá el mayor interés de la tasa intrínseca r_0 es el papel que desempeña en el esquema del análisis

de población, donde aparece como uno de un grupo de parámetros conexos y no como una cifra aislada. Debe recordarse que se inserta en el análisis como una de las raíces de la ecuación característica, esto es, en compañía de una serie de otras raíces (complejas) significativas por sí mismas. Como la raíz real r_0 de la ecuación característica

$$\int_0^{\omega} e^{-ra} \varphi(a) da - 1 = 0$$

da la tasa constante final de crecimiento natural y la tendencia de crecimiento a largo plazo de una población sujeta por un período prolongado a un patrón constante dado de fecundidad neta por edades $\varphi(a)$, las raíces complejas r_1, r_2, \dots de la misma ecuación definen las oscilaciones u ondas alrededor de esa tendencia.²

Esto se ilustra en los gráficos 1 y 2, basados en la composición por edades y en la fecundidad y mortalidad por edades específicas de la población femenina blanca de Estados Unidos en 1920, para la cual se conocían las raíces de la ecuación característica dadas a conocer en una publicación anterior.³

De estos gráficos, el 1 muestra cómo, sobre la tendencia a largo plazo (la curva de crecimiento geométrico o de interés compuesto), se encuentra superpuesta una onda de amplitud decreciente. Esta onda es realmente el resultado de una serie de oscilaciones, de las cuales las tres primeras aparecen en detalle en el gráfico 2. El ciclo del primer componente oscilatorio fundamental es (con gran aproximación) la duración media de una generación considerada de madre a hija, esto es, alrededor de 29 años.⁴

²Debe entenderse claramente que esta tendencia y estas oscilaciones, calculadas para el caso de una fecundidad neta constante, no representan de manera alguna un pronóstico para una población real cuya fecundidad neta es variable, como en muchos países civilizados en que ha experimentado una marcada tendencia decreciente.

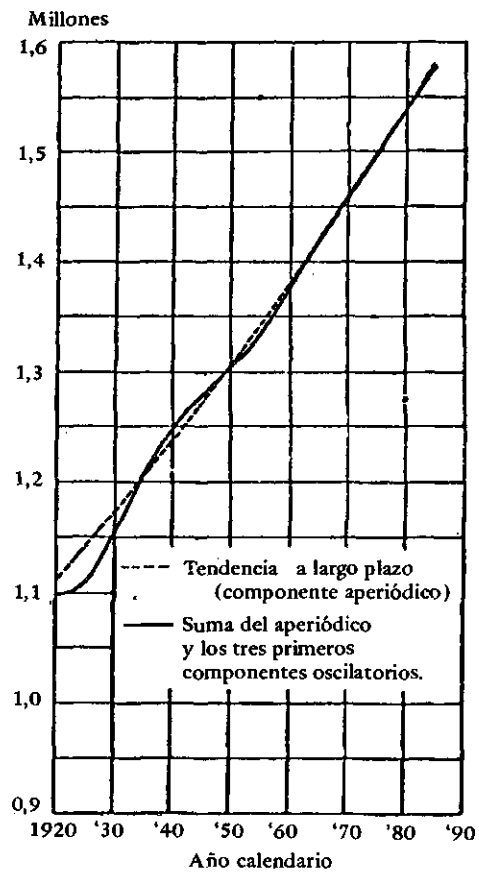
³En esta ocasión, demostré como nuestro análisis nos permite seguir la pista, a través de un período ulterior, de la prole de un elemento de población compuesto por personas nacidas en el mismo período, y que, por tanto, tienen igual edad. En la presente comunicación estoy dando ahora un ejemplo de la aplicación de los mismos principios a una población inicial compuesta por personas de todas las edades. Esto requiere una mayor elaboración del análisis y del procedimiento de cálculo, como se pone de manifiesto en el Apéndice. En la solución (9) aplicada en este caso, los exponentes r son, como antes, las raíces de (10). El cambio, en este nuevo caso, consiste solamente en la determinación de un nuevo conjunto de constantes Q .

⁴Para una confrontación de los resultados así obtenidos con un cálculo mediante otro método, véase el gráfico 5 y el texto correspondiente en el Apéndice.

He recalado en la introducción que el punto de partida conducente al desarrollo de la medición de la tasa intrínseca de crecimiento natural, fue un análisis generalizado aplicado a poblaciones mixtas compuestas por diferentes especies biológicas. Como conclusión, quiero volver brevemente a este aspecto del análisis de población en su concepción más amplia. Podemos abocarnos a este análisis desde un punto de vista puramente teórico, pero puede muy bien consagrarse a aplicaciones prácticas esenciales que trasciendan el alcance de las concepciones ecológicas cuantitativas simples de hoy en día.

GRAFICO 1

GRAFICO DE LA TENDENCIA A LARGO PLAZO DE LOS NACIMIENTOS ANUALES (COMPONENTE APERIODICO) Y SUMA DE LA TENDENCIA MAS LOS TRES PRIMEROS COMPONENTES OSCILATORIOS (BASADOS EN DATOS PARA LOS ESTADOS UNIDOS, 1920).



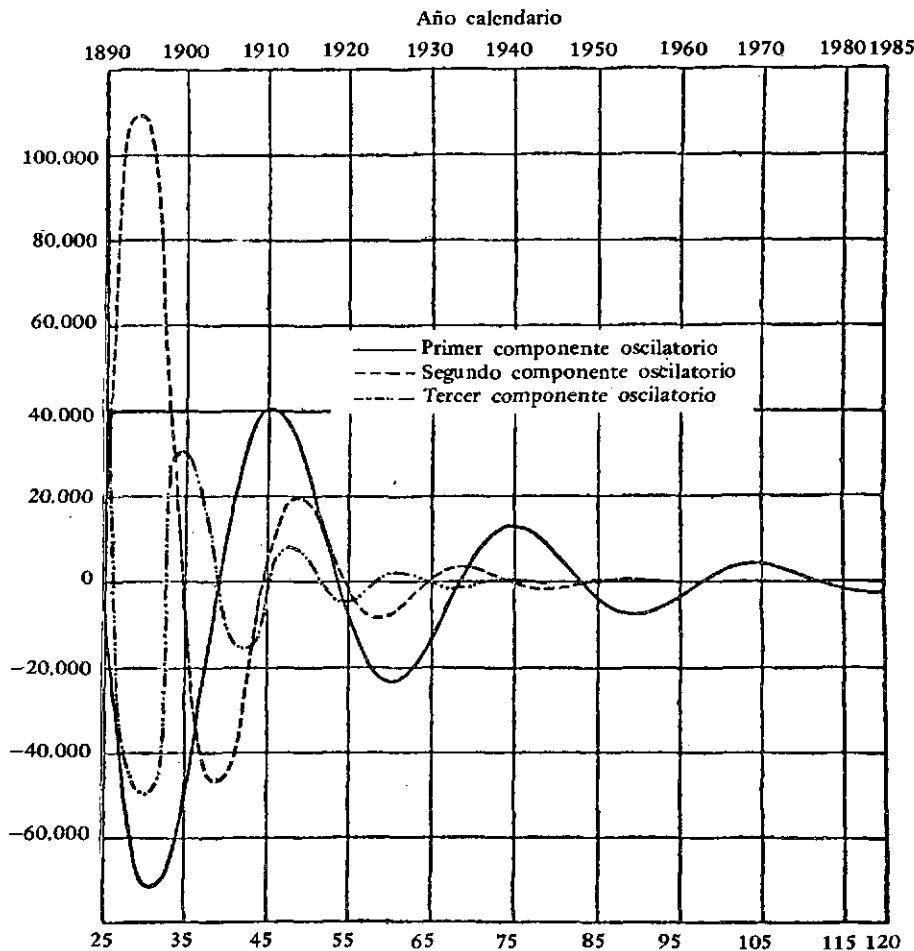
El organismo individual es un transformador de energía que extrae el suministro de las variadas fuentes distribuidas a su alrededor, y finalmente del sol. Gasta parte de esta energía en múltiples actividades, que a primera vista parecen ser seguidas de una desconcertante diversidad y complejidad. No obstante, en toda esta maraña

de actividades se puede distinguir un principio fundamental simple. Ese particular conjunto de tales organismos, de tales transformadores de energía, estará más favorecido para crecer (a costa de otros organismos similares, posiblemente), mientras sus actividades, en las condiciones pre-alecientes, estén mejor adaptadas para tener bajo su control la energía requerida para manejarlas. Para el estudio de los fenómenos involucrados en esta relación recíproca del organismo, por una parte recolector y por la otra gastador de energía, se presentan dos aspectos de un problema fundamental. El primero induce a examinar las propiedades del organismo, como un transformador de energía autosuficiente, que comprende órganos sensoriales y motores interconectados en su acción por un sistema correlacionado de reflejos, o de control consciente, o de ambos. El segundo aspecto del problema

conduce a examinar los efectos colectivos o masivos producidos en sistemas compuestos por conjuntos de aquellos transformadores. Ya hemos destacado que en los sistemas fisicoquímicos estos efectos masivos son los más accesibles a la observación directa, mientras que en los sistemas biológicos la situación es inversa, y presumiblemente los efectos masivos tienen que deducirse en gran medida a partir de nuestro conocimiento del comportamiento de las unidades últimas, los organismos individuales. No es improbable descubrir que estos efectos colectivos de los transformadores de energía que los componen desempeñan un papel importante en la física de los sistemas biológicos. Hay aquí un campo para la investigación científica que parece estar esperando el necesario "condicionamiento" de la mente indagadora que lo ponga en movimiento.

GRAFICO 2

PRIMEROS TRES COMPONENTES OSCILATORIOS DE LOS NACIMIENTOS TOTALES ANUALES. (BASADO EN DATOS PARA LOS ESTADOS UNIDOS, 1920)



APENDICE

UNA RELACION FUNDAMENTAL EN EL ANALISIS DE POBLACION

El total anual de nacimientos femeninos $B(t)$ en el tiempo t , es la suma de todas las hijas de mujeres de cada edad a que procrean a una tasa de $m(a)$ hijas por año. Estas mujeres de edad a nacieron en el momento $t-a$, cuando los nacimientos femeninos anuales ascendían a $B(t-a)$, y de ellas sobrevive hasta la edad a una proporción $p(a)$.

En símbolos matemáticos y con alguna mayor precisión, esta proposición se expresa en la forma

$$B(t) = \int_a^{\omega} B(t-a) p(a) m(a) da \quad (1)$$

Los límites de la integral son a , el límite inferior de edad del período reproductivo femenino (alrededor de 10 años), y ω , su límite superior (alrededor de 55 años). Puesto que $m(a)$ es nulo fuera de estos límites, podemos escribir en lugar de (1), cuando parezca conveniente

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) p(a) m(a) da \quad (2)$$

o, para abreviar

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a) \varphi(a) da \quad (3)$$

Separando la integral en dos partes, podemos escribir, con $0 < t < \omega$,

$$B(t) = \int_t^{\omega} B(t-a) \varphi(a) da + \int_0^t B(t-a) \varphi(a) da \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} &= B_1(t) + \int_0^t B(t-a) \varphi(a) da \\ &B_1(t) = 0 \text{ para } t > \omega \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Una breve reflexión muestra que el signifi-

cado físico de esta separación de la integral es que hemos dividido los nacimientos anuales $B(t)$ en el tiempo t en dos partes, la segunda integral da las hijas cuyas madres nacieron después de $t=0$, y la primera integral, denominada también $B_1(t)$, las hijas cuyas madres nacieron antes de $t=0$. Nótese que $B_1(t)$ se anula para $t > \omega$, porque $\varphi(a)$ se anula para $a > \omega$.

Hasta aquí hemos supuesto tácitamente que la ley de natalidad expresada por la ecuación (1), o por (3), rige a lo largo de todo el rango de tiempo t . El planteamiento (5) sugiere una modificación aplicable cuando la ley de natalidad (1) rige sólo a partir de un cierto momento ω , pero no antes; esto es,

$$B(t) = \int_a^{\omega} B(t-a) \varphi(a) da \quad t > \omega \quad (6)$$

mientras que para $0 < t < \omega$ tenemos, en lugar de (5), la condición más amplia

$$\left. \begin{aligned} B(t) &= F(t) + \int_0^t B(t-a) \varphi(a) da \\ &0 < t < \omega \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

en que $F(t)$ es una función arbitraria sujeta a la condición

$$F(t) = 0 \quad \text{para } t > \omega \quad (8)$$

Aquí nos interesa el curso de los acontecimientos sólo bajo el régimen de un patrón constante de fecundidad y mortalidad por edades para las madres nacidas después de $t=0$, de manera que en la integral (7) $p(a)$ y $m(a)$, en consecuencia $\varphi(a)$, son independientes de t . En este caso, se puede escribir una solución de la ecuación (7) en la forma

$$B(t) = \sum \varphi_n e^{r_n t} \quad (9)$$

donde r_0, r_1, r_2 , etc., son las raíces de la ecuación característica

$$\int_{\alpha}^{\omega} e^{-ra} \varphi(a) da - 1 = 0 \quad (10)$$

y las constantes Q están definidas por

$$Q_n = \frac{\int_0^{\omega} e^{-rn^t} F(t) dt}{\int_{\alpha}^{\omega} a e^{-rn^a} \varphi(a) da} \quad (11)$$

la función $F(t)$ está dada para $0 < t < \omega$

Aplicación. Se mostrará ahora cómo estas fórmulas nos permiten expresar analíticamente y obtener una imagen gráfica del desarrollo posterior de una población con una distribución por edades dada para las mujeres en $t = \omega$ ⁽⁵⁾ y sujeta de allí en adelante a una ley fija de reproducción $\varphi(a)$. No es necesario que esta ley rija antes de $t = \omega$ para las madres nacidas antes del período $t = 0$, y en general, la distribución por edades dada es incompatible con la vigencia de esta ley antes de $t = \omega$, aunque es compatible con las ecuaciones más generales (6) y (7) en que $F(t)$ es arbitraria, esto es, no encuadrada en las condiciones iniciales.

Para aplicar nuestro análisis a este caso, es necesario antes que nada expresar $F(t)$ en términos de la distribución por edades dada, que constituye el dato real, puesto que $F(t)$ es una función auxiliar derivada de este dato. Tenemos

$$F(t) = B(t) - \int_0^t B(t-a) p(a) m(a) da \quad (12)$$

de modo que se conoce $F(t)$ para todos los valores de t en el intervalo $0 < t < \omega$ siempre que se conozca $B(t)$ en este intervalo. Pero en este caso, las $N(t) c_t(a)$ personas de edad a en el período t son los sobrevivientes de las $B(t-a)$ nacidas en el tiempo $t-a$, esto es

$$N(t) c_t(a) = B(t-a) p(a) \quad (13)$$

de manera que, dada la distribución por edades $N(\omega) c_{\omega}(a)$ en el tiempo ω , para $0 < a < \omega$, podemos encontrar de inmediato los valores de $B(\omega-a)$ para $0 < (\omega-a) < \omega$, o sea, de $B(t)$ para $0 < t < \omega$. En realidad, se lleva a cabo de manera más conveniente el cálculo de la integral directamente en términos de la distribución por edades en el período ω , sobre la base siguiente:

Aquellas personas de edad a en el tiempo t , tenían $a + (\omega - t)$ años en el tiempo ω y habían

⁵Desde el punto de vista del problema, la distribución por edades dada para el tiempo ω aparece como una condición inicial, pero el razonamiento y la notación se simplifican al situar el tiempo cero ω años antes de esta condición inicial.

nacido en el tiempo $t-a$, de manera que

$$\frac{N(t) c_t(a)}{p(a)} = \frac{N(\omega) c_{\omega}(a + \omega - t)}{p(a + \omega - t)} = B(t-a) \quad (14)$$

en que el subíndice del símbolo c indica que éste se refiere a la distribución por edades en el tiempo señalado por el subíndice.

Entonces, podemos escribir (12) en la forma

$$F(t) = B(t) - \int_{\alpha}^t \frac{N(\omega) c_{\omega}(a + \omega - t)}{p(a + \omega - t)} p(a) m(a) da \quad (15)$$

$$= B(t) - \beta(t), \quad (\text{por ejemplo}) \quad (16)$$

Nótese que al calcular la integral para cualquier valor particular de t , el término simbolizado para abreviar $\beta(t)$ en (16) es, por supuesto, lo mismo que el último término en (5) y (7) y, como se señaló en el párrafo siguiente a la ecuación (5), este término da exclusivamente las hijas de aquellas madres nacidas después de $t = 0$, o sea, después de 1865 en el ejemplo numérico que sigue. Así obsérvese que al calcular la integral en (15) para cualquier valor particular de t , el argumento de la función c varía entre $(a + \omega - t)$ y ω . Así, por ejemplo, si el tiempo cero es 1865 y $t = \omega$ en 1920, al calcular $F(25)$, esto es, el valor de F para 1890, el intervalo para el argumento de c en la integral estará entre $10 + 55 - 25$ y 55 , o sea, entre 40 y 55.

Ejemplo numérico. Estos principios se aplicarán ahora a un caso concreto mediante un ejemplo numérico. Comenzaremos con la distribución por edades de la población femenina blanca de los Estados Unidos tal como estaba constituida en 1920, para lo cual contamos con parte de la información necesaria, proveniente de publicaciones anteriores, incluidos la raíz real y los primeros tres pares de raíces complejas de la ecuación característica. Algunos de los principales coeficientes involucrados en estos cálculos aparecen en el cuadro 2. Para mayores detalles el lector deberá dirigirse a mis publicaciones anteriores.⁶

⁶ Particularmente, "The Progeny of a Population Element", *American Journ. Hygiene*, 1928, vol. 8, págs. 875-901; "The Progressive Adjustment of Age Distribution to Fecundity", *Journ. Washington Academy of Science*, 1926, vol. 16, pág. 505. Quizá debiera recordarse al lector que no se trata aquí de una proyección, en que deberíamos tomar en cuenta las variaciones en la fecundidad neta. Véase nota 2.

A partir de esta distribución por edades "inicial" en 1920, es necesario, antes que nada, calcular la función auxiliar $F(t)$ para los 55 años anteriores a 1920, o sea, hasta 1865. El primer término, $B(t)$, que aparece en el miembro derecho de (12), se calcula

con gran facilidad, para valores sucesivos de t , a partir de la relación (13), que expresa simplemente el hecho de que las personas de a años de edad en 1920 son los sobrevivientes de las $B(t-a)$ personas nacidas en 1920-a.

CUADRO 2
CONSTANTES DE LA SOLUCION EN LA SERIE (9) DE LA ECUACION INTEGRAL (6), (7),
HASTA EL TERCER COMPONENTE OSCILATORIO INCLUSIVE^a

Función	Componente aperiódico	Componentes oscilatorios		
		Primero	Segundo	Tercero
u	0,00543	- 0,03860	- 0,08731	- 0,09804
v	0	0,21448	0,31542	0,48849
G	28,22571	25,76754	51,22475	37,00770
H	0	14,93783	- 18,63705	17,26560
R	23 261 652	- 1 786 325	- 37 195 629	11 684 211
S	0	- 3 150 822	16 826 827	- 16 543 128
U	824 160	- 104 943	- 746 787	88 014
V	0	61 442	- 56 787	488 081

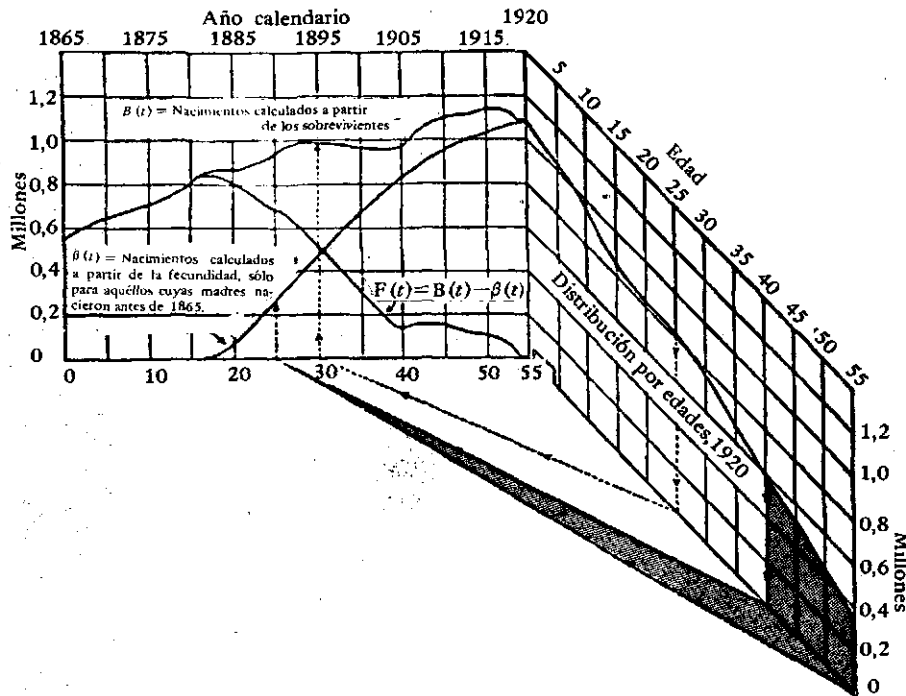
^a El número de cifras significativas en algunos de estos renglones excede con mucho a la precisión de los resultados. Se han conservado únicamente por conveniencia para el cálculo mecánico.

$$G = \int_0^{\omega} a e^{-ua} \cos va \varphi(a) da \quad S = \int_0^{\omega} e^{-ut} \sin vt F(t) dt$$

$$H = \int_0^{\omega} a e^{-ua} \sin va \varphi(a) da \quad U = \frac{(RG + SH)}{G^2 + H^2}$$

$$R = \int_0^{\omega} e^{-ut} \cos vt F(t) dt \quad V = \frac{(RH - SG)}{G^2 + H^2}$$

GRAFICO 3
GRAFICO ILUSTRATIVO DEL CALCULO DE LA FUNCION AUXILIAR $F(t)$ A PARTIR DE LA DISTRIBUCION POR EDADES "INICIAL"



En el gráfico 3, dibujado en proyección estereográfica, se representa la distribución por edades (mujeres blancas) de la población de los Estados Unidos en 1920 en un plano extendido en ángulo recto respecto al plano del papel. Los puntos sucesivos de $B(t)$, calculados como se indicó, han sido representados como una curva en el plano del papel en la parte "posterior" del gráfico. Las flechas en las tres líneas punteadas indican, para un punto determinado, por ejemplo los 25 años de edad en 1920, la trayectoria del cálculo de acuerdo a la ecuación (13).

El segundo término en la expresión (12), o su equivalente en (15), para $F(t)$ se calculó a partir de la distribución por edades en 1920, las tasas de sobrevivencia desde años anteriores hasta 1920⁷ y la fecundidad por edades de 1920 para cada edad en el período reproductivo, 10 a 55. Por ejemplo, las mujeres que en 1920 tenían entre 10 y 25 años. Estas eran las mujeres que en 1890 estaban procreando y que habían nacido con posterioridad a $t = 0$, esto

es, con posterioridad a 1865. Es éste el grupo cuyas hijas constituyen los nacimientos anuales, $\beta(t)$, indicados simbólicamente en el gráfico y mencionados ya en el párrafo inmediato a la ecuación (15).

Los resultados para el segundo término de la expresión para $F(t)$, calculados por quinquenios de calendario desde 1920 hacia 1875 e interpolados para los años intermedios,⁸ se representaron también como una curva en el plano posterior del gráfico. El área sombreada en la curva de la distribución por edades en 1920 y las flechas que van desde esta área sombreada hasta la curva

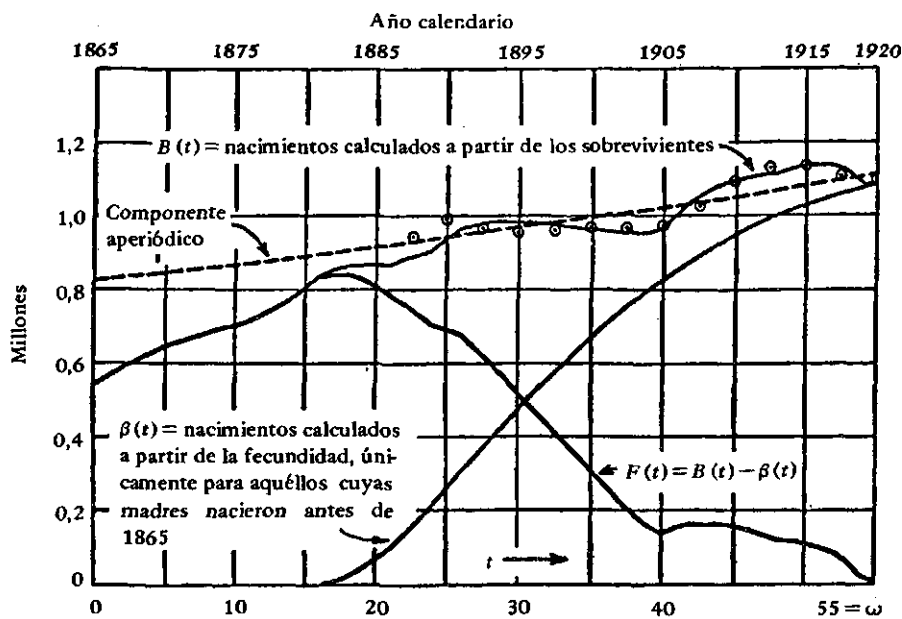
$$\beta(t) = \int_a^t B(t-a) \varphi(a) da \quad (17)$$

indican en este caso la trayectoria del cálculo de acuerdo con la ecuación (15).

A partir de estas dos curvas, tomando las diferencias, se representó la curva de $F(t)$ tal como se muestra en el gráfico 4.

GRAFICO 4

GRAFICO DE LAS FUNCIONES $B(t)$, $\beta(t)$ Y $F(t)$ PARA $t < \omega$, O SEA, ANTES DE 1910, JUNTO CON EL COMPONENTE APERIODICO; TAMBIEN SUMA DE LOS COMPONENTES APERIODICO Y PRIMEROS TRES OSCILATORIOS, INDICADA POR PEQUEÑOS CIRCULOS.



© Suma de los primeros cuatro componentes.

Con los valores así obtenidos para $F(t)$, podemos calcular, mediante las fórmulas (9), (10), (11), los valores de $B(t)$ para todos los

valores de $t > 0$. En lo que concierne al período comprendido entre 1865 y 1920, correspondiente a $0 < t < \omega$, esto significa tan sólo que

⁷ Empleando la tabla de vida de Foudray para las mujeres blancas en 1919-1920.

⁸ Este término se anula para $t < 10$, o sea para años anteriores a 1875.

tenemos una expresión analítica que nos permite disponer de aquello que es esencialmente un dato fundamental del problema. Para valores $t > \omega$, la fórmula nos da una continuación de la función $B(t)$ para todos los períodos por venir, mientras sigan vigentes la fecundidad y la mortalidad por edad específica dadas.

Los resultados finales de este cálculo aparecen en los gráficos 2, 4 y 5. De éstos, el gráfico 2, al que ya se ha hecho mención, muestra el primer, segundo y tercer componentes oscilatorios para el período de 1890 adelante. Se verá que las ondas se amortiguan considerablemente, de manera que después de un plazo relativamente corto el componente aperiódico domina el curso de los acontecimientos.

El gráfico 4 muestra, para los años que van de 1865 a 1920, o sea, para el período $0 < t < \omega$, el componente aperiódico (línea de segmentos) y, señalada por pequeños círculos, la suma de este componente más los tres componentes oscilatorios. Se ve que desde 1890, aproximadamente, en adelante, los puntos así obtenidos siguen muy de cerca a los valores de $B(t)$ derivados de los sobrevivientes a partir de la distribución por edades en 1920.

Antes de 1890, aproximadamente, resulta inapropiado considerar sólo cuatro componentes, y por tanto, los puntos correspondientes han sido omitidos en el gráfico. La falta de concordancia, con estos componentes tan limitados, no tiene consecuencias en esta parte de las series, puesto que la finalidad de esta parte del trabajo era únicamente calcular la función auxiliar $F(t)$, y la representación obtenida para $B(t)$ en este intervalo, hasta donde llega, es meramente un subproducto, ya que el interés principal reside en el decurso de $B(t)$ para $t > \omega$, o sea, en los años siguientes a 1920.

Esta trayectoria está representada en el gráfico 5, en que los puntos obtenidos mediante la solución en series trigonométricas (9) de (7) se muestran nuevamente en la forma de pequeños círculos, mientras la curva de línea continua proviene de mi publicación anterior "The Progressive Adjustment of Age Distribution to Fecundity". Los nacimientos anuales se obtuvieron en este caso "paso por paso", calculando las distribuciones por edades mediante los sobrevivientes para períodos quinquenales sucesivos,⁹

⁹ Empleando, como antes, la tabla de vida para las mujeres de Estados Unidos, de 1919 a 1920; y empleando para el primer grupo quinquenal de edades los siguientes valores de $p(a)$, obtenidos mediante interpolación gráfica:

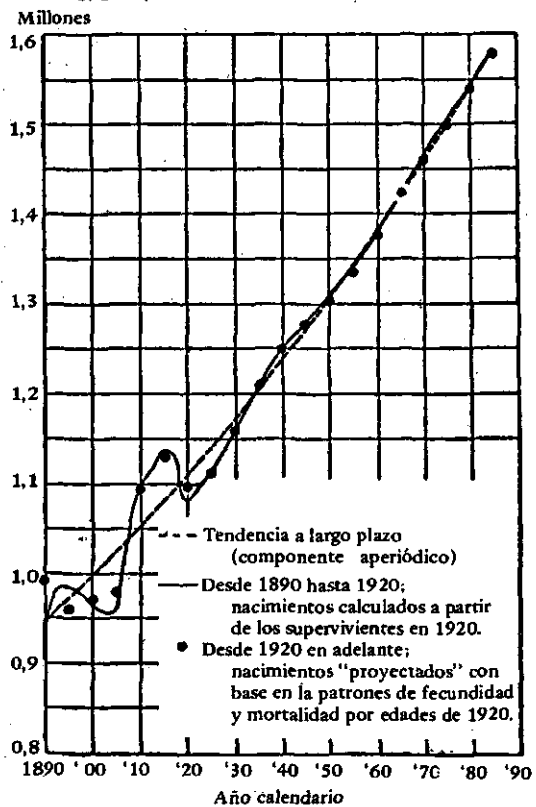
$$\begin{aligned} p(0,5) &= 0,9460 & p(1,5) &= 0,9235 \\ p(3,5) &= 0,9080 & p(4,5) &= 0,9040 \\ & & p(2,5) &= 0,9135 \end{aligned}$$

y aplicando, en cada caso, los valores de $m(a)$ a los grupos en edad reproductiva.

Se ve que a partir de 1920 en adelante, los puntos obtenidos mediante la solución trigonométrica (9) siguen muy de cerca a aquéllos calculados "paso por paso", aunque en el cómputo de estos últimos se hizo una aproximación, empleando valores pivotaes de $p(a)$ para los distintos grupos de edades quinquenales. Un pequeño error introducido en esta forma tendería a ser acumulativo, y quizá explique el hecho de que hacia el final del período abarcado (1985) los dos conjuntos de valores diverjan ligeramente. Aun así, la divergencia es sólo de alrededor de 0,4 por ciento en 1985.

GRAFICO 5

COMPARACION DE LOS NACIMIENTOS ANUALES CALCULADOS MEDIANTE LA SOLUCION (9) (PEQUEÑOS CIRCULOS), Y MEDIANTE EL METODO "PASO POR PASO", PARA 1820 ADELANTE, Y MEDIANTE LA SUPERVIVENCIA DE 1890 A 1920 (CURVA DE TRAZO CONTINUO)



El gráfico 5 repite también, en escala muy ampliada, los puntos desde 1890 hasta 1920 ya mostrados en el gráfico 4. Es interesante ver cómo, incluso en este período y particularmente desde 1900 en adelante, es aún notablemente buena la concordancia (utilizando tres componentes oscilatorios), aunque esto es de menor interés práctico, puesto que en esta región

estamos trabajando con la función auxiliar $F(t)$.

La solución de las series trigonométricas tiene, por supuesto, la ventaja de dar directamente el resultado para cualquier punto particular en el tiempo, mientras que el método "paso por paso" exige el cálculo de los nacimientos anuales para todos los puntos anteriores si se quiere obtener el resultado para el punto del tiempo elegido. Además, las series trigonométricas nos dicen de inmediato que el curso de los acontecimientos tiene el carácter

de una tendencia que avanza en progresión geométrica y sobre la que se superponen series de oscilaciones moderadas, de las cuales la fundamental tiene una longitud de onda aproximadamente igual a la duración media de una generación desde la madre hasta la hija, o sea, de alrededor de 29 años.

(El autor ha publicado en los *Annals of Mathematical Statistics*, 1942, vol. 13, pág. 115, una ampliación del desarrollo presentado en este apéndice. Este artículo contiene también una bibliografía.)

X. EL ANALISIS DE POBLACION COMO UN CAPITULO DE LA TEORIA MATEMATICA DE LA EVOLUCION

La evolución orgánica es esencialmente un proceso de crecimiento diferenciado y competitivo. En el alimenticio terreno de materias primas que se les presenta en la Naturaleza, la multitud de seres vivientes se extiende sobre la superficie de la tierra como una película relativamente delgada de composición variable. La definición que damos a esta composición es, hasta cierto punto, arbitraria. La definición relevante para el estudio de la evolución biológica es aquella que considera el sistema evolutivo como constituido, por una parte, del medio inorgánico, y por la otra, de un número de componentes separados y *desiguales*, las especies biológicas, divididas a su vez en partes esencialmente *similares*, los organismos individuales.

Considerados así este sistema de naturaleza orgánica y su medio inorgánico, la evolución biológica aparece como la historia de las sucesivas distribuciones y redistribuciones de la masa total del sistema entre sus distintos componentes. Desde el punto de vista de cada especie, la evolución es su crecimiento relativo o su decadencia en la competencia con otras especies, y el crecimiento relativo o decadencia de los distintos tipos distinguibles dentro del campo de su propia composición *relativamente* homogénea.

La evolución del sistema como un todo presenta entonces dos aspectos: evolución inter-especies, cambios en la distribución de la masa entre los componentes brutos heterogéneos; evolución intraespecies, cambios en la distribución de la masa entre las subdivisiones más finas de las especies *relativamente* homogéneas.

Es característica de la evolución inter-grupos la capacidad, a veces concretada, de producirse a ritmo rápido, como en el caso de la especie humana, que se ha incrementado enormemente en los últimos siglos —por ejemplo, la población de los Estados Unidos, ha aumentado más de treinta veces en los últimos 150 años—, mientras se estima que la población del mundo se ha duplicado en la última centuria.

Por otra parte, la evolución intra-grupos

ocurre habitualmente a una tasa que parece muy lenta, medida según nuestros patrones usuales, aunque esto es producto de un punto de vista contingente.

De los dos aspectos de la evolución, el que ha recibido probablemente más atención de los biólogos como de los legos instruidos, es el de intra-grupos, más que nada a causa de su relación con el problema del origen y extinción de las especies. En la concepción matemática, podemos pensar en representar cualquier especie determinada como una nube móvil de puntos en un espacio n -dimensional. Cada punto representa un individuo y las n coordenadas representan las n características en cuyos términos está definido. Cada parte de la nube tiene una cierta densidad, que varía en el rango de la nube de acuerdo con la distribución de frecuencias de los distintos tipos que componen la especie. Tiene límites más allá de los cuales no se encuentra punto alguno perteneciente a la nube. A medida que pasa el tiempo, cambian las densidades locales y la posición de toda la nube, de manera que tras un lapso suficiente su nueva posición puede quedar enteramente fuera de la considerada primero. La naturaleza del conjunto de organismos puede cambiar a tal punto que se lo considere como una especie nueva, habiéndose extinguido entonces la especie original correspondiente a la posición primitiva de la nube. El lapso requerido para un cambio completo como éste es tan grande que no tenemos oportunidad, con el conocimiento actual, de seguir este proceso como un todo. Sólo vemos instantáneas tomadas a largos intervalos, las especies vivas, nuestras contemporáneas, frente al panorama de las especies extintas y en su mayor parte fósiles.

Nuestra relación con los procesos de evolución inter-grupos es completamente diferente. Los vemos en activo desarrollo a nuestro alrededor. Una rama especial de la biología —la ecología—, ha hecho de ellos su campo particular de estudio.

Fundamental para nuestra concepción matemática de esta división del tópico, es un sistema de ecuaciones diferenciales que exprese el hecho de que la tasa de crecimiento (o decrecimiento) de la masa de cualquier especie es en general una función de las masas m_i de las distintas especies coexistentes y de ciertos parámetros que podemos simbolizar en general por P, Q ; entonces

$$\frac{dm_i}{dt} = F(m_1, m_2, \dots, P, Q) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Los parámetros P son tales que definen la naturaleza (composición de frecuencias) de las distintas especies y son en general, por tanto, funciones del tiempo; se ha utilizado el símbolo Q para denotar otro conjunto de parámetros que define "condiciones externas", tales como, por ejemplo, el clima, los rasgos topográficos, etc.

Como regla general, la variación de los parámetros P será muy lenta en comparación con las tasas de cambio dm/dt , y en la discusión de la evolución inter-especies pueden ser considerados normalmente como constantes. Los Q también pueden ser esencialmente constantes en muchas de las situaciones consideradas.

Los sistemas de ecuaciones de esta forma han sido estudiados en su aspecto puramente matemático por Poincaré (1885) y por Picard (1928). Conducen a soluciones en series exponenciales de la forma

$$m_i - C_i = \left. \begin{aligned} &G_1 e^{r_1 t} + G_2 e^{r_2 t} + \dots \\ &+ G_{11} e^{2r_1 t} + G_{12} e^{(r_1+r_2)t} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

y en general algunos de los coeficientes exponenciales r serán complejos de la forma $u + iv$. El curso de los sucesos en el sistema a que se refieren las ecuaciones, envuelve en general fluctuaciones moderadas en las masas de los componentes, que conducen a un estado estacionario en que la proporción de los distintos componentes es constante.

El estudio de ecuaciones de esta índole aplicado a sistemas en evolución inter-especies, tal como fue desarrollado por el autor (1923, 1925) y posteriormente con mayor detalle por Vito Volterra (1931), es sugestivo como indicación del carácter general de la secuencia de sucesos que puede esperarse en un sistema tipificado mediante tal modelo matemático. Entre otras cosas, las fluctuaciones provenientes de las condiciones inherentes al modelo son reminiscencias de las fluctuaciones observadas entre especies depredadoras y depredadas

mutuamente interdependientes. Por lo demás, no se oculta el hecho de que las ecuaciones constituyen una representación altamente idealizada —un biólogo la ha llamado ingenua— de aquello que en la naturaleza son situaciones enormemente complicadas.

Un aspecto que las ecuaciones, en su forma más simple, dejan enteramente excluido, es la influencia de la distribución por edades de la población de organismos. En una primera aproximación al problema, la omisión de esto se justifica en alguna medida por la consideración de que la distribución por edades de una población no es una circunstancia enteramente arbitraria o accidental, sino que presumiblemente tenderá a acercarse a cierta norma. Pero éste es un asunto que requiere mayor examen.

Por cierto que, en el caso de poblaciones humanas, en que se cuenta con información amplia y detallada, el examen muestra que la relación entre la distribución por edades y la tasa de crecimiento y otras características conexas desempeña un papel de primera importancia. De la apreciación de esto depende la comprensión inteligente de las tendencias de la población. En el desarrollo moderno del análisis de población predomina abiertamente la elucidación de los hechos pertinentes.

Si bien por último el crecimiento de una población de organismos depende necesariamente de la presencia de fuentes adecuadas de sustento, del cual deriva su substancia, los factores inmediatos que determinan la tasa de crecimiento son los contingentes en edad reproductiva de la población, de la siguiente manera:

Los nacimientos femeninos anuales $B(t)$ en el momento t son la descendencia (hijas) de las mujeres comprendidas entre los límites α y ω del período reproductivo femenino. Si $N(t)$ es la población femenina total y $N(t)c(a)da$ es el número de aquellas mujeres cuyas edades fluctúan entre a y $a + da$, y si $m(a)$ es la tasa anual con que las mujeres de edad a tienen hijas, entonces, evidentemente

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\omega} N(t)c(a)m(a)da. \quad (3)$$

Si se conocen la distribución por edades entre 0 y ω en el momento t , simbolizada por $N(t)c(a)$, y las tasas de fecundidad por edades $m(a)$, los valores correspondientes de $B(t)$ resultan de (3). En un caso concreto de una población "cerrada" (esto es, en ausencia de inmigración y emigración), se conoce en una época inicial la distribución por edades $N(t)c(a)$ de todas las edades, y en particular del intervalo de edades entre α y ω , y la de períodos sucesivos ulteriores se obtiene aplicando

las tasas de supervivencia a la población existente. Por ejemplo, las personas que están en el grupo de edades reproductivas, digamos entre 15 y 55 años, en 1941 son las sobrevivientes de aquéllas que estaban en 1940 en el grupo de edades entre 14 y 54 años, y así correlativamente en los sucesivos años civiles, tal como requiere el cálculo de la integral en (3) entre los límites 15 y 55. Entonces, si se conoce la distribución por edades en 1940, se puede calcular la de 15 a 55 años en los años civiles sucesivos hasta 1955. Más allá de esta fecha, no bastará con los sobrevivientes para el cálculo, porque los que en 1956 tenían entre los 15 y los 16 años —esto es, formaban parte del grupo reproductivo de 15 a 55 años— no habían nacido aún en 1940. Pero los valores de $B(t)$ encontrados mediante la aplicación de la ecuación (3) a la distribución por edades de 1940, 1941, etc., intervienen ahora para entregarnos, a través de los sobrevivientes, la información necesaria para calcular la distribución por edades dentro de las edades reproductivas en los años siguientes a 1955. Y así continúa el proceso paso por paso. De esta manera, se puede proyectar en el tiempo el desarrollo de una población cerrada a partir de una época inicial con una distribución por edades dada, siempre que se conozcan las tasas de supervivencia y el patrón de fecundidad por edades.

Esencialmente sobre la base de este procedimiento,¹ distintos autores han realizado cálculos para diferentes países y con distintos supuestos respecto a los patrones de fecundidad y mortalidad por edades, que, en general, son funciones del tiempo.

Sin embargo, tiene cierto interés el cálculo en el caso especial en que el patrón de mortalidad y fecundidad por edades se mantiene constante en los valores prevalecientes en el estado "inicial". En este caso el resultado muestra la *capacidad intrínseca* de crecimiento de la población *tal como está constituida en ese momento*. Al mismo tiempo, pone de manifiesto algunos otros aspectos característicos de una población que se desarrolla sujeta a las condiciones prescritas. Como ya se insinuó, una población semejante tiende hacia una cierta norma sin considerar la distribución inicial por

¹ En esta descripción del cálculo, la integral que aparece en la ecuación (3) ha sido tratada como una suma de un número finito de términos. Este es necesariamente el procedimiento seguido en la práctica, y el cálculo puede realizarse en unidades de cinco años y grupos de cinco edades, con cualquier interpolación que sea necesaria.

edades. Su distribución por edades se acerca a una cierta forma específica "estable", y su crecimiento sigue finalmente la ley exponencial, la ley de Malthus.

El autor entregó en 1926² un cálculo como éste, realizado en Estados Unidos sobre la base de la información censal de 1920. Desde entonces se han publicado muchos cálculos basados en este mismo principio, pero habitualmente con estimaciones de la variación de la fecundidad neta. Ciertamente, éstos se han propuesto como proyecciones tentativas de la población, realistas en la medida en que los supuestos relativos a la supervivencia y a la fecundidad probaran estar en concordancia con los hechos. Entre las proyecciones más cuidadosas y amplias de este tipo están las de Thompson y Whelpton (1943) de la población de Estados Unidos, basadas, en lo que respecta a la información "inicial", en el censo de 1940. F. W. Notestein y sus colaboradores en la Oficina de Investigaciones sobre Población de la Universidad de Princeton³ han publicado (1944) un conjunto de proyecciones similares, que contienen, sin embargo, algunas técnicas nuevas, especialmente para la proyección de la mortalidad y la fecundidad futuras.

El método "paso por paso" de cálculo aritmético directo con base en el principio contenido en la ecuación (3), tiene la ventaja práctica de su flexibilidad, pues permite introducir cualquier supuesto que se desee respecto a las tendencias en el tiempo de $p(a)$ y $m(a)$.

Tiene la desventaja de que si se quiere averiguar la situación de la población en algún período futuro t , es necesario calcular todas las etapas intermedias desde el estado inicial hasta el período t . No se adapta bien para poner de relieve clara y distintamente ciertas características típicas de las tendencias en los nacimientos anuales y en la población definidas mediante fórmulas tales como (3). Para examinar estos aspectos retornaremos a un tratamiento más analítico.⁴

² La aproximación a la distribución estable por edades fue posteriormente ilustrada también en el caso de una distribución inicial arbitraria por edades (principalmente la de "población de la tabla de vida") por R. Kuczynski (1932), quien aparentemente ignoraba que el principio de la aproximación a una distribución estable por edades había sido detalladamente ejemplificado con anterioridad mediante la exposición basada en el caso de Estados Unidos en 1920.

³ En su libro se encontrará también una amplia bibliografía sobre proyecciones de población y otros temas conexos.

⁴ El proceso paso por paso puede también desarrollarse analíticamente mediante la aplicación del álgebra ma-

Podemos ver, antes que nada, que en una población cerrada, esto es, sin inmigración ni emigración, las mujeres de edades entre a y $a + da$ en el momento t son las sobrevivientes de las nacidas en el momento $(t - a)$ en un intervalo de tiempo da . Entonces

$$N(t) c(a) da = B(t - a) p(a) da, \quad (4)$$

en que $p(a)$ es la probabilidad al nacer de alcanzar la edad a .

Introduciendo (4) en (3) tenemos

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\omega} B(t - a) p(a) m(a) da \quad (5)$$

$$= \int_{\alpha}^{\omega} B(t - a) \phi(a) da, \quad (6)$$

ecuación⁵ que establece simplemente que las mujeres nacidas en el momento t son las hijas de las sobrevivientes en edades reproductivas de las mujeres nacidas en años anteriores.

En esta interpretación tan general, la ecuación evidentemente deja en extremo indeterminado el curso de los acontecimientos. Sin embargo, estamos especialmente interesados en el caso en que desde una cierta época "inicial" en adelante, hacia el "futuro", los patrones de mortalidad y fecundidad por edades, $p(a)$ y $m(a)$, son independientes del tiempo. Pero no podemos suponer simplemente que $\phi(a)$ es constante en la integral en (6), porque esta integral se extiende para valores de $B(t - a)$ anteriores a la época inicial, hacia el "pasado", y el estado inicial de la población, su distribución inicial por edades, no será compatible, en general, con un $\phi(a)$ constante en el pasado.

Sin embargo, podemos proceder de la manera siguiente:

Dividimos la integral (6) en dos partes, indicando mediante un subíndice que en general $\phi(a)$ es una función de t ; así

$$B(t) = \int_t^{\omega} B(t - a) \phi_t(a) da + \int_{\alpha}^t B(t - a) \phi_t(a) da. \quad (7)$$

Debe observarse que la primera integral se anula para $t > \omega$ de manera que a partir de

tricial, como lo demostró H. Bernadelli (1941) en un documento publicado desafortunadamente en una fuente más bien inaccesible (el *Journal of the Burma Research Society*). Es de esperar que en algún momento aparezca en nuestras publicaciones occidentales una presentación más completa del método de Bernadelli.

⁵ Puesto que $\phi(a)$ se anula fuera de los límites α y ω , los límites de la integral pueden escribirse 0 a ∞ sin afectar su valor.

$t = \omega$, si $\phi(a)$ tiene un valor constante $\phi_{\omega}(a)$,

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\omega} B(t - a) \phi_{\omega}(a) da \quad (t > \omega). \quad (8)$$

Esto sugiere que, al tratar el caso en que $\phi(a)$ debe ser constante a partir de una cierta época "inicial", es conveniente elegir el cero (arbitrario) en el tiempo de manera que la época inicial corresponda a $t = \omega$. Entonces, en todos los momentos posteriores a la época inicial (para el "futuro") $B(t)$ está dado por (8). Para los períodos anteriores (para el "pasado"), en que no podemos suponer que $\phi_t(a)$ es independiente de t , podemos, no obstante, escribir (7) en la forma

$$B(t) = F(t) + \int_{\alpha}^t B(t - a) \phi_{\omega}(a) da, \quad (9)$$

definiendo una función auxiliar $F(t)$ que se anula para $t > \omega$.

Substituyendo en (9) la solución tentativa

$$B(t) = \sum Q_h e^{r_h t}; \quad (10)$$

se comprueba que ésta satisface formalmente⁶ (9) siempre que r_h sean las raíces de

$$\int_{\alpha}^{\omega} e^{-ra} \phi_{\omega}(a) da = 1 \quad (11)$$

y que las constantes Q_h estén definidas por

$$Q_h = \frac{\int_0^{\omega} e^{-r_h t} F(t) dt}{\int_{\alpha}^{\omega} a e^{-r_h a} \phi_{\omega}(a) da} \quad (12)$$

Para que el problema esté determinado, es necesario tener como dato no sólo $\phi_{\omega}(a)$ sino también los valores de $F(t)$ en el intervalo $0 < t < \omega$. Estos se obtienen indirectamente a partir de

$$F(t) = B(t) - \int_{\alpha}^t B(t - a) \phi_{\omega}(a) da, \quad (9a)$$

mientras los valores de $B(t)$ en el intervalo $0 < t < \omega$ están dados directa o indirectamente como datos⁷ fundamentales del problema.

LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA (11)

Estas raíces desempeñan evidentemente un pa-

⁶ Para una discusión sobre las condiciones de validez de esta solución, véase W. Feller (1941).

⁷ Para los detalles concernientes a la determinación de las constantes Q en el caso general, el lector debe remitirse a la literatura original; en particular, véase Lotka A. J.: 1939a, 1940 y 1942.

pel importante en la determinación del carácter de la curva definida por la solución (10), en cuanto ésta representa el curso de los nacimientos anuales. Para valores reales de r , la función

$$R(r) = \int_0^{\infty} e^{-ra} \phi(a) da$$

decrece monótonamente a medida que r crece, puesto que, por su naturaleza, $\phi(a) \geq 0$ para todos los valores de a . Por tanto, (11) tendrá sólo una raíz real r_0 , y tendremos,

$$r_0 \geq 0 \quad \text{según que} \quad R(0) \leq 1. \quad (13)$$

Si $u + iv$ es una raíz compleja de (11), entonces

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \int_0^{\infty} e^{-ua} \cos va \phi(a) da \\ 0 &= \int_0^{\infty} e^{-ua} \sin va \phi(a) da \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

y es evidente, de (14), que $u < r_0$, ya que $\cos va \leq 1$ para todos los valores de a . La parte real de cualquier raíz compleja de (11) es, por esto, algebraicamente menor que la raíz real r_0 .

Se sigue que, para valores altos de t , el término $Q_0 e^{r_0 t}$, que contiene a la raíz real r_0 predomina sobre todos los otros términos en (10), y entonces los nacimientos anuales (y, de acuerdo con (4), también la población) finalmente crecen o decrecen esencialmente según la ley exponencial, la ley de Malthus.

Antes de llegar a esta situación, el curso de los nacimientos tendrá, en general, el carácter de una tendencia aperiódica (crecimiento o decrecimiento geométrico), sobre la cual se superponen oscilaciones cuya amplitud se hace finalmente despreciable en comparación con el componente aperiódico.

RELACION ENTRE LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA (11) Y LAS SEMINVARIANTES DE THIELE DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION $\phi(a)$

Podemos escribir la ecuación característica en la forma

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-ra} \phi(a) da = R_0 e^{-\lambda_1 r + \frac{\lambda_2}{2!} r^2 - \frac{\lambda_3}{3!} r^3 + \dots} \quad (15)$$

Lucgo

$$\log_e 1 = 2\pi ni =$$

$$\log_e R_0 - \lambda_1 r + \frac{\lambda_2}{2!} r^2 - \frac{\lambda_3}{3!} r^3 + \dots \quad (16)$$

$$(n = \pm 0, 1, 2, 3, \dots),$$

en que R_0 es el momento de orden cero y λ_j es la j -ésima seminvariante de la función $\phi(a)$.

La raíz real r_0 de (16), si es suficientemente pequeña, está dada por la raíz de la forma cuadrática (17).

$$\frac{\lambda_2}{2} r^2 - \lambda_1 r + \log_e R_0 = 0, \quad (17)$$

que se anula para $R_0 = 1$, es decir

$$r_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{2 \log_e R_0}{\lambda_2} \right]} \quad (18)$$

La naturaleza y el significado de las raíces complejas quizá quedan mejor ilustrados si se considera un caso especial.

Caso especial. Si la distribución $\phi(a)$ sigue la curva normal (gaussiana), todas las seminvariantes de orden superior a 2 son cero. Entonces, la raíz real está dada exactamente por (18). Para las raíces complejas introducimos en (16) $r = u + iv$ y separamos las partes real e imaginaria.

Obtenemos así

$$\frac{\lambda_2}{2} (u^2 - v^2) - \lambda_1 u + \log_e R_0 = 0, \quad (19)$$

$$\left(u - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) v = \mp \frac{2\pi n}{\lambda_2}, \quad (20)$$

o haciendo

$$U = \left(u - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right), \quad (21)$$

$$U^2 - v^2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 - 2 \log_e R_0 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - r_0 \right)^2 = K^2 \quad (22)$$

$$Uv = \mp \frac{2\pi n}{\lambda_2} = \pm k^2, \quad (23)$$

en que se ve que si U y v se representan en coordenadas rectangulares, las raíces complejas $u + iv$ quedan representados por las intersecciones, en los dos cuadrantes inferiores,⁸ de la hipérbola (22) con la familia de hipérbolas (23).

Efectivamente, resolviendo (22) y (23) para U y v , encontramos

$$U^2 = \frac{1}{2} [K^2 \pm \sqrt{K^4 + 4k^4}] \quad (24)$$

⁸ Las intersecciones en los dos cuadrantes superiores no corresponden a raíces de la ecuación característica.

$$v^2 = \frac{1}{2} [-K^2 \pm \sqrt{(K^4 + 4k^4)}] \quad (25)$$

de donde se desprende que

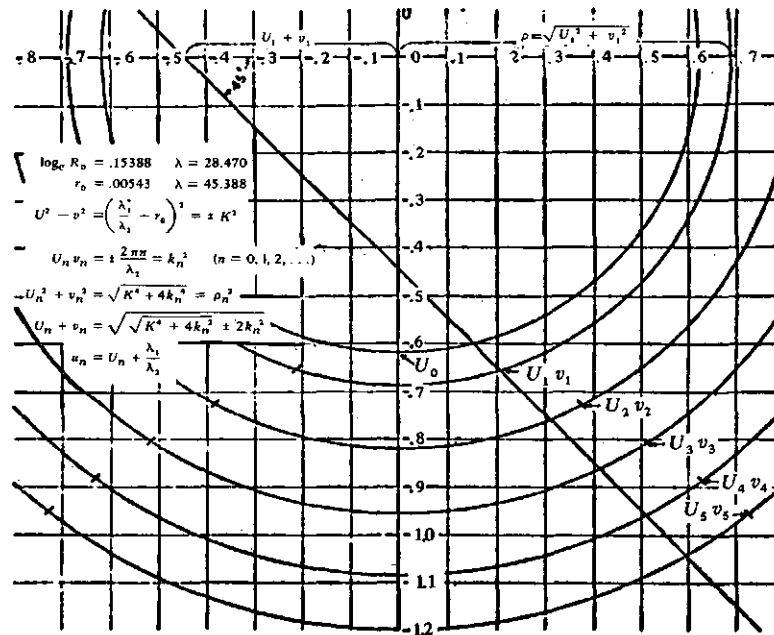
$$U^2 + v^2 = \sqrt{(K^4 + 4k^4)} = \rho^2, \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} U + v &= \sqrt{(U^2 + v^2 + 2Uv)} \\ &= \sqrt{[\sqrt{(K^4 + 4k^4)} \pm 2k^2]} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

de manera que se puede construir un gráfico de las raíces, sólo con regla y compás, como la

intersección de la familia de circunferencias (26) y la familia de rectas (27) inclinadas en 45° respecto a los ejes de U y v . La construcción para $n = 1$ aparece en el gráfico 1, empleando datos basados en las estadísticas del estado civil de la población de los Estados Unidos en 1920. Para valores mayores de n la recta no aparece enteramente dibujada, pues se limita a la intersección con la circunferencia correspondiente.

GRAFICO 1
REPRESENTACION GRAFICA DE LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA (11)
EN LA FORMA DE INTERSECCIONES ENTRE LAS CIRCUNFERENCIAS
CONCENTRICAS Y LAS LINEAS RECTAS



Caso más general. Si las seminvariantes de orden superior a dos no son despreciables —y en general no lo serán—, podemos pensar que las circunferencias del gráfico 1 se distorsionan más o menos hasta convertirse en curvas correspondientes, cuyas intersecciones seguirán representando las raíces de (15) y (16). Puede demostrarse que esto corresponde a una representación de la función $\phi(a)$ mediante una serie de Charlier que se desarrolla en derivadas sucesivas de la función de distribución de frecuencias normal (gaussiana) (véase Rhodes, 1940). Para valores pequeños de r_2 y u , algunas de las relaciones desarrolladas sobre la base de la curva gaussiana de $\phi(a)$ pueden seguir constituyendo buenas aproximaciones. Esto es efectivo para los datos que se dan en la práctica, en lo que concierne a la expresión (18)

para r_0 . Igualmente, para u suficientemente pequeño, la ecuación (20) da, para $n = 1$,

$$v = \mp \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad (28)$$

que nos dice que la longitud de onda del primer componente oscilatorio de los nacimientos es la media de la función de reproducción neta $\phi(a)$.

Para raíces de orden superior, correspondientes a $n > 1$, puede hacerse discutible la adecuada convergencia de la serie en el miembro del lado derecho de la ecuación (1).⁹

⁹ Respecto a estas limitaciones del método, véase W. Feller (*loc. cit.*); véase también S. D. Wicksell (1931, 1934).

Pueden surgir otras dificultades, especialmente si se ha ajustado con ciertas expresiones analíticas la información numérica para la función $\phi(a)$. Estas dificultades pueden evitarse empleando la información sin corregir, que da los valores promedio de $\phi(a)$ en la forma de un histograma, habitualmente en grupos de edades quinquenales. En lugar de la integral en la ecuación (11) aparece entonces una suma finita, y una solución formalmente similar a la de (10), pero con un número finito de términos, de manera que no se plantea la cuestión de la convergencia. En lo que se refiere a la raíz real y al primer par de raíces complejas, este método, aplicado al ejemplo concreto de este texto, da esencialmente, los mismos resultados numéricos que la ecuación integral (9) y su solución en la forma (10), (18).

LA TASA INTRINSECA DE CRECIMIENTO NATURAL Y OTRAS MEDIDAS CONEXAS DEL CRECIMIENTO POTENCIAL DE LA POBLACION

La raíz real de la ecuación característica tiene un interés particular, porque tiene la llave para, y da una medida de, la capacidad potencial de crecimiento de la población correspondiente al patrón prevaleciente de fecundidad y mortalidad por edades. A pesar de que la tasa de crecimiento natural, como se la mide corrientemente, esto es, el exceso de la tasa de natalidad sobre la tasa de mortalidad, depende de la distribución por edades prevaleciente, la solución (10) de la ecuación (9) muestra que, en definitiva, de la fecundidad y mortalidad prevalecientes resultaría una tasa de crecimiento r_0 independiente de la distribución por edades inicial. Es ésta la tasa final o intrínseca de crecimiento la que determina el destino de una población con un régimen de fecundidad y mortalidad dadas. De esto resulta que el exceso predominante de la tasa de natalidad sobre la tasa de mortalidad no sirve como criterio; en muchos casos, realmente, dará indicaciones engañosas. Esto se mostró primero (Dublin, y Lotka, 1925) con las estadísticas del estado civil de los Estados Unidos en 1920, en que la tasa de natalidad registrada fue de 23,4 y la tasa de mortalidad de 12,4, lo que daba una tasa observada de crecimiento natural de 11 por mil, mientras la tasa intrínseca r_0 alcanzaba sólo a 5,4 por mil.

Quizá deba señalarse que la tasa intrínseca de crecimiento natural r_0 se presenta como una señal de diagnóstico de las tendencias prevale-

cientes, sin valor como pronóstico para el futuro, puesto que en su cálculo la fecundidad neta se mantiene constante en los valores existentes, mientras que en la actualidad tanto la fecundidad como la mortalidad muestran desde hace años en los países civilizados una tendencia declinante.

Medidas conexas de la capacidad de crecimiento. Las restantes medidas que han sido empleadas profusamente para medir la capacidad potencial de crecimiento de la población, están necesariamente relacionadas con la tasa intrínseca r_0 . Una de éstas, la tasa de reproducción neta, es la razón R_0 de los nacimientos totales correspondientes a un sexo (mujeres, por ejemplo) en dos generaciones sucesivas, en el régimen de la fecundidad y mortalidad prevalecientes, que se supone permanece constante; esto es,

$$R_0 = \int_0^{\infty} p(a) m(a) da. \quad (29)$$

Como se destacó, entre R_0 y r_0 rige la relación

$$r_0 \gtrless 0 \quad \text{según que} \quad R_0 \gtrless 1.$$

La tasa neta de reproducción R_0 . Originalmente introducida por Boeckh y recientemente resucitada por Kuczynski, tiene sobre r_0 la ventaja de su cálculo un poco más simple. (De hecho, se calcula necesariamente como una etapa en el cálculo de r_0). Tiene la desventaja de que su valor depende en alguna medida de la duración media de la generación (desde la madre hasta la hija), de manera que dos poblaciones pueden tener la misma procreatividad neta y no obstante pueden diferir sus tasas intrínsecas de crecimiento natural, o viceversa.

El Índice de Reemplazo J . Otra medida de la capacidad de crecimiento de la población, que ha sido empleada por algunos autores, es realmente una aproximación¹⁰ a la tasa de reproducción neta R_0 . Se obtiene comparando la razón entre los niños menores de 5 años (o en alguna otra edad apropiada) y las mujeres en edades reproductivas en la población real, con la razón equivalente en la población de la tabla de vida que representa la mortalidad prevaleciente. Esta medida, el denominado Índice de Reemplazo J , introducido por W. S. Thompson y utilizado por Lorimer y

¹⁰ Para un análisis de la relación de esta medida con r_0 y R_0 , véase Lotka A. J., (1936 a).

Osborne en su libro *The Dynamics of Population*, tiene la ventaja de que puede usarse incluso cuando no se cuenta con información relativa a la fecundidad por edades. Tiene la desventaja de no ser una cifra única, pues varía en alguna medida en una población dada

de acuerdo a los grupos de edades particulares elegidos para formar la razón de niños a mujeres.

En el cuadro 1 aparecen algunos ejemplos seleccionados de valores de R_0 , r_0 y la tasa bruta de crecimiento natural.

CUADRO 1

TASA NETA DE REPRODUCCION, TASA INTRINSECA DE CRECIMIENTO NATURAL Y TASA BRUTA DE CRECIMIENTO NATURAL DE PAISES SELECCIONADOS EN DISTINTAS EPOCAS

País; año	Tasa neta de reproducción	Tasa de crecimiento natural por 1 000		País; año	Tasa neta de reproducción	Tasa de crecimiento natural por 1 000	
		Intrínseca r_0	Bruta r			Intrínseca r_0	Bruta r
	R_0				R_0		
Alemania				Grecia			
1881-90	1,45	12,2	11,7	1931-2	1,25	7,1	11,8
1933	0,70	-12,2	3,5	Hungría			
1940	0,98	a	7,3	1930-2	0,99	-0,3	7,5
Australia				Inglaterra y Gales			
1932-4	0,96	-1,5	7,8	1921	1,09	2,8	10,3
1941	1,05	a	8,9	1933	0,73	-10,2	2,1
Austria				1938	0,81	a	3,5
1931-2	0,71	-10,5	1,6	Italia			
Bulgaria				1930-2	1,22	6,7	10,6
1930-2	1,27	8,3	14,3	1935-7	1,13	a	8,9
Canadá				Noruega			
1930-2	1,30	8,8	13,0	1930-1	0,89	2,7	5,9
1938	1,09	a	11,0	1939	0,86	a	5,7
Checoslovaquia				Nueva Zelandia			
1930-1	0,95	-1,8	7,9	1925-7	1,21	6,4	12,4
1935	0,79	a	4,4	1941	1,27	a	13,0
Dinamarca				Polonia			
1931-5	0,93	-2,7	6,8	1931-2	1,25	7,2	14,2
1941	0,96	a	8,2	1934	1,11	a	12,1
Egipto				Rusia (Ucrania)			
1937	1,4	12,4	16,3	1926-7	1,68	17,5	23,3
España				Suecia			
1928-30	1,24	7,0	11,0	1816-40	1,41	10,9	9,7
Estados Unidos (blancos)				1933-4	0,73	-10,6	2,5
1936	0,95	-2,0	5,5	1940	0,79	a	3,6
1939-41	1,01	0,4	7,3	Suiza			
Francia				1932	0,85	-5,3	4,6
1898-1903	0,98	-0,7	0,3	1941	0,90	a	5,8
1935	0,87	-5,1	-0,4				
1939	0,90	a	-0,7				

Fuentes: A. J. Lotka (1936 b); e información anónima publicada por la Population Association of America en su *Population Index*, Vol. 10 (abril, 1944), pág. 137.

Nota: La anotación a significa que no se han obtenido estimaciones relevantes.

Méritos comparativos de las medidas de crecimiento potencial. Si ordenamos las distintas medidas de la capacidad potencial de creci-

miento de la población de acuerdo con sus cualidades más importantes, encontramos la situación que se presenta en el cuadro 2.

CUADRO 2
 COMPARACION DE LOS MERITOS RELATIVOS DE LAS TRES MEDIDAS PRINCIPALES
 DE CRECIMIENTO POTENCIAL DE LA POBLACION
 Rango superior = 1

	R_0	J	R_0
1. Simplicidad de cálculo	1	3	2
2. Disponibilidad de información	2	1	2
3. Unicidad	2	3	1
4. Conveniencia y precisión de las unidades empleadas	2 ^a	3 ^a	1 ^b
5. Relación con el análisis general de población	2	3	1
6. Comparabilidad directa con las estadísticas reales primarias	2	2	1
7. Alcance de la información entregada por el índice	2	3	1 ^c
Total de rangos	13	18	9

a La unidad es una generación que está sujeta a variaciones menores.

b La unidad es un año.

c El método por el cual se obtiene r_0 entrega también una tasa de natalidad b_0 y una tasa de mortalidad d_0 , correspondientes. R_0 y J no previenen contra indicios engañosos de los valores brutos de b y d , a menos que $R_0 < 1$ y r (bruta) sea todavía > 0 .

El "total de rangos" que aparece al final del cuadro debe considerarse sólo como una medida aproximada del valor relativo de los distintos índices, puesto que este total no pondera los distintos renglones 1 a 7 de acuerdo a su importancia. En realidad, los tres últimos renglones, en que la tasa intrínseca de crecimiento natural ocupa rangos claramente superiores, tienen particular importancia. De hecho, quizá el mayor interés de la tasa intrínseca r_0 es el papel que desempeña en el esquema general del análisis de población, donde aparece como uno de un grupo de parámetros conexos, y no como una cifra aislada. Debe recordarse que se inserta en el análisis como una de las raíces de la ecuación característica, esto es, en compañía de una serie de otras raíces (complejas) significativas por sí mismas. Como la raíz real r_0 , de la ecuación característica de la tasa constante final de crecimiento natural y la tendencia de crecimiento a largo plazo de una población sujeta por un período prolongado a un patrón constante dado de fecundidad neta por edades $\phi(a)$, las raíces complejas r_1, r_2, \dots de la misma ecuación definen las oscilaciones u ondas alrededor de esa tendencia.

La importancia relativa de estas ondas en el desarrollo de una población existente depende de la relativa importancia de las distintas constantes Q en la solución (10), y ésta a su vez depende de la naturaleza de la población inicial a la que se aplican los cálculos.

En un extremo tenemos una *distribución estable por edades* si la población crece durante

muchos años a la tasa constante r_0 con una tabla de vida constante, por tanto, de acuerdo a (4) tenemos

$$N(t)c(a) = B(t-a)p(a) \quad (4)$$

$$= B(t)e^{-r_0 a}p(a); \quad (30)$$

$$c(a) = \frac{B(t)}{N(t)}e^{-r_0 a}p(a). \quad (31)$$

Puesto que $c(a)$ es una distribución de frecuencias relativas, tenemos

$$\int_0^{\infty} c(a) da = 1. \quad (32)$$

Luego

$$B(t)/N(t) = 1 / \int_0^{\infty} e^{-r_0 a}p(a) da \quad (33)$$

$$= b_0, \quad (34)$$

entonces, según (31), la distribución estable por edades es

$$c(a) = b_0 e^{-r_0 a}p(a), \quad (35)$$

en que b_0 es la tasa de natalidad constante por persona correspondiente a la tasa intrínseca constante de crecimiento por persona r_0 , en la población que tiene la distribución por edades estable. La correspondiente tasa de mortalidad por persona d_0 , resulta directamente como $d_0 = b_0 - r_0$.

Las tasas intrínsecas b_0, d_0 y r_0 pueden diferir substancialmente de las tasas brutas observadas. Así, por ejemplo, en Estados Unidos en 1920, las tasas observadas e intrínsecas fueron las que figuran en el cuadro 3.

Se notará que la tasa de natalidad observada

CUADRO 3
COMPARACION DE TASAS BRUTAS INTRINSECAS Y OBSERVADAS POR 1 000 NACIMIENTOS,
DEFUNCIONES Y CRECIMIENTO NATURAL; ESTADOS UNIDOS, 1920

	Intrínseca	Observada
Tasa de natalidad, b	20,88	23,40
Tasa de mortalidad, d	15,45	12,41
Tasa de crecimiento natural, r	5,43	10,99

es engañosamente alta y la tasa de mortalidad observada, engañosamente baja.

Cuando la distribución inicial por edades es estable, con una tasa de natalidad por persona b_0 , constante, los nacimientos anuales y la población total crecen a la misma tasa r_0 . Entonces la serie (10) se reduce al término único

$$B(t) = Q_0 e^{r_0 t}, \quad (36)$$

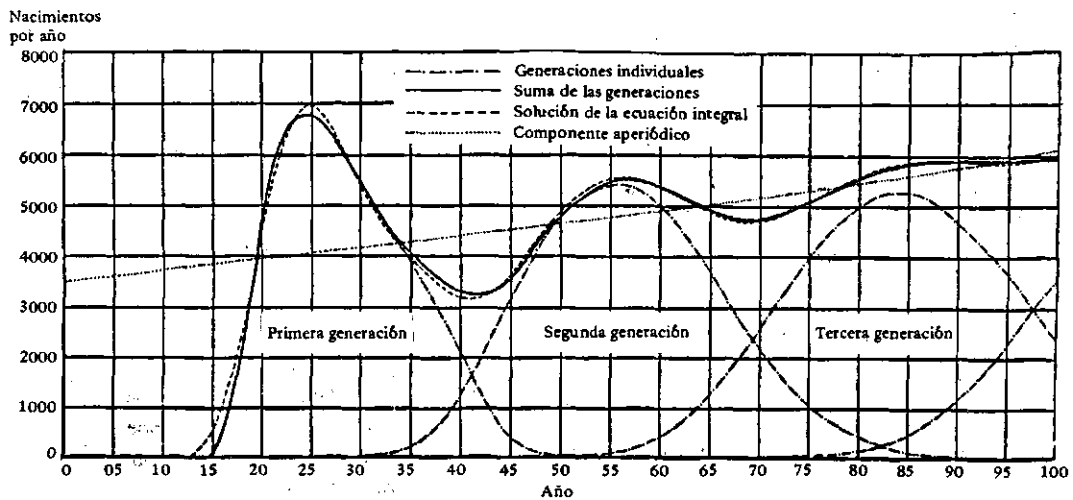
pues las restantes constantes Q son nulas y no hay oscilaciones.

En el otro extremo, aparecen ondas pronunciadas si seguimos a la prole de un elemento de la población constituido por personas nacidas todas al mismo tiempo (Lotka, 1928, 1929, 1942). En el gráfico 2 aparece un ejemplo,

calculado con base en las estadísticas del estado civil en los Estados Unidos de 1920, en donde se muestra el curso de los nacimientos anuales totales y también las contribuciones de las sucesivas generaciones descendientes de la generación inicial o "cero", cuyo nacimiento de ha ubicado en un cero arbitrario en el tiempo. Entonces, la distribución de los nacimientos en la primera generación es, evidentemente $\phi(t)$. Generaciones sucesivas de nacimientos se extienden, y se superponen, a lo largo de períodos cada vez mayores. Para cada par de generaciones sucesivas rige, evidentemente, una ecuación semejante a (6); así, para las generaciones n -ésima y $(n + 1)$ -ésima.

$$B_{n+1}(t) = \int_{\alpha}^{\omega} B_n(t-a) \phi(a) da. \quad (37)$$

GRAFICO 2
DISTRIBUCION EN EL TIEMPO DE LOS NACIMIENTOS TOTALES Y GENERACIONES SUCCESIVAS DE NACIMIENTOS EN LA PROLE DE UN ELEMENTO DE POBLACION (GENERACION CERO) CUYOS MIEMBROS HAN NACIDO TODOS EN EL PERIODO CERO



A partir de esto se puede demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ son las seminvariantes de la distribución en el tiempo de la primera generación, las seminvariantes para la n -ésima generación son $n\lambda_1, n\lambda_2, n\lambda_3, \dots$. Esto significa a su vez que las distribuciones de

las generaciones sucesivas se acercan más y más a la forma gaussiana,¹¹ de manera que

¹¹ Porque los coeficientes de los términos sucesivos en la serie de Charlier correspondiente se dividen por potencias sucesivamente mayores de n . Véase Lotka (1933); Thiele (1903; pág. 35, ecuación 31).

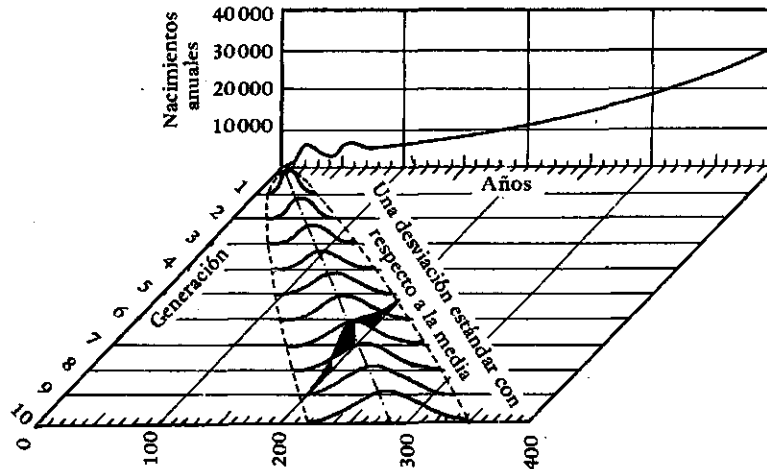
incluso si $\phi(t)$, la distribución en la primera generación se aparta substancialmente de la forma normal, se alcanza muy pronto una distribución cercana a la normal en las generaciones superiores. Entonces, el curso de los nacimientos depende finalmente casi por entero sólo de las dos primeras seminvariantes, λ_1 y λ_2 , de la tasa neta de reproducción $\phi(a)$.

Además, en general, en cualquier período

un cierto número de generaciones superpuestas de nacimientos contribuyen al total de nacimientos, y puede demostrarse que las contribuciones relativas de las distintas generaciones coexistentes también se acercan más y más a la distribución gaussiana (aunque discontinua, por supuesto). Esto se indica en el gráfico 3 mediante la curva oscura que cruza el plano del papel.

GRAFICO 3

DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS DE LOS NACIMIENTOS EN GENERACIONES SUCESIVAS, REPRESENTADA LA PROLE DE UNA GENERACION CERO DE 100 000 NACIMIENTOS ACAECIDOS EN EL PERIODO CERO MEDIANTE UNA CONSTRUCCION TRI-DIMENSIONAL. LA CURVA EN LA PARTE POSTERIOR ES LA RESULTANTE, QUE DA LOS NACIMIENTOS TOTALES DE TODAS LAS GENERACIONES COEXISTENTES. LA SECCION TRANSVERSAL SOMBRADA ILUSTRA LA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS DE LAS CONTRIBUCIONES DE LAS GENERACIONES COEXISTENTES EN EL PERIODO 200



Las distribuciones por edades reales tienden a asemejarse, al menos en términos burdos, a la distribución estable por edades, y según esto, la curva de los nacimientos anuales, calculada mediante (9) de la prole total de esta población, mostrará habitualmente sólo oscilaciones muy ligeras en torno al componente aperiódico, como se ve, por ejemplo, en el gráfico 4. Para mostrar todas las desviaciones con respecto a la tendencia aperiódica, fue necesario emplear una escala muy aumentada de las ordenadas.

Hemos apuntado que la distribución por edades en una población real tiende a asemejarse a la forma maltusiana, que tendría vigencia efectiva en una población que hubiera crecido durante muchos años según la ley exponencial o de interés compuesto. La semejanza puede ser claramente cercana, como ocurre en los ejemplos mostrados en el cuadro 4. Pero sabemos que el crecimiento maltusiano no puede continuar por largo tiempo, puesto que

implicaría crecimiento sin límites. De hecho, la forma maltusiana de crecimiento aparece en algunos casos reales únicamente como el estado inicial para otro tipo, la ley logística de crecimiento.

El hecho es que tanto la ley maltusiana como la logística pueden considerarse como los casos más simples de la relación general expresada por la ecuación (1). Si esto es aplicable a una especie única que crece como si fuera independiente de todas las otras especies, tenemos

$$\frac{dN}{dt} = aN + bN^2 + cN^3 + \dots \quad (38)$$

Si los términos de grados superior a uno en N son despreciables, esto da

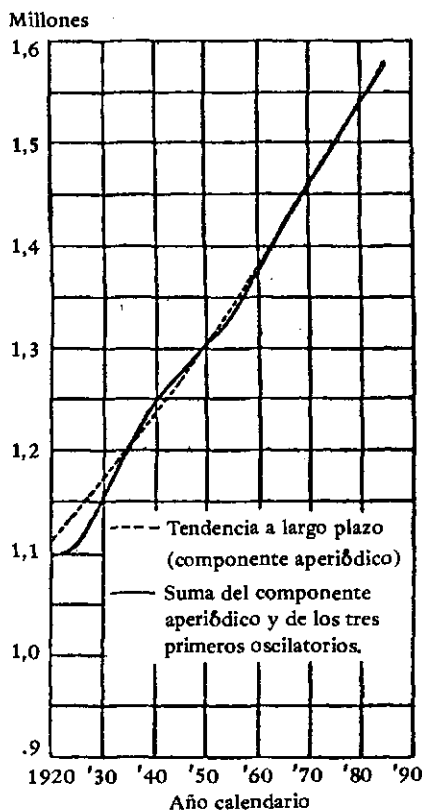
$$\frac{dN}{dt} = aN, \quad (39)$$

$$N(t) = N_0 e^{at}, \quad (40)$$

la ley de Malthus.

GRAFICO 4

GRAFICO DE LA TENDENCIA A LARGO PLAZO DE LOS NACIMIENTOS ANUALES (COMPONENTE APERIODICO) Y DE LA SUMA DE LA TENDENCIA MAS LOS TRES PRIMEROS COMPONENTES OSCILATORIOS (BASADO EN LA INFORMACION PARA LOS ESTADOS UNIDOS, 1920)



Si son despreciables los términos de grado superior a dos

$$\frac{dN}{dt} = N(a + bN) \quad (41)$$

$$N(t) = \frac{N_{\infty}}{1 + e^{-at}}, \quad (42)$$

donde t se mide a partir del período en que $N(t) = 1/2 N_{\infty}$.

Con $b < 0$, ésta es la ley logística de crecimiento.¹²

Aun cuando la ley logística representa, sin duda una convencionalización de las tendencias reales, es más realista que la maltusiana; primero, en cuanto implica y asigna cuantitativamente un límite final finito al crecimiento de la población, y segundo, en cuanto a que un cierto

número de poblaciones han seguido de cerca efectivamente la ley logística por largos períodos. El crecimiento de la población de los Estados Unidos, por ejemplo, queda representado muy satisfactoriamente, hasta el último censo¹³ inclusive, por la ley logística, como lo muestra el gráfico 5. (Véase Pearl, Reed, y Kish, 1940).

Como la tendencia real de crecimiento se asemeja más a la fórmula logística que a la maltusiana, la distribución por edades tenderá a asemejarse más al tipo correspondiente que lo que se asemeja a la distribución por edades maltusiana simple. En realidad, en las primeras etapas del crecimiento, la distribución por edades logística es prácticamente maltusiana. A medida que pasa el tiempo, en una población que crece de acuerdo con la ley logística, la distribución por edades experimenta un cambio gradual, y finalmente se funde con la distribución simple por edades de la tabla de vida a medida que la logística se aproxima a su asíntota. En el gráfico 6 se muestra la secuencia en el desarrollo de la distribución por edades logística desde la maltusiana hasta la estacionaria (tabla de vida), calculada con base en las estadísticas de mortalidad para los Estados Unidos en 1920.

En el gráfico 7 se muestra una comparación entre la distribución por edades logística y la efectiva de la población autóctona de los Estados Unidos, habiéndose realizado una estimación sobre el mejoramiento de la mortalidad a través de los años. Como se ve, la concordancia es muy satisfactoria.

Se puede demostrar (Lotka, 1939 b) que en una población logística bajo el régimen de una tabla de vida constante, los nacimientos anuales también siguen aproximadamente un curso logístico, en que el punto de inflexión precede al de la curva de la población en Λ_1 años, siendo Λ_1 la primera seminvariante de $\rho(a)$. En realidad, con la tendencia declinante en la mortalidad, los nacimientos anuales pueden alcanzar un máximo. Esto es lo que ocurrió en los Estados Unidos, donde se alcanzó en 1921 un máximo de casi 3 millones de nacimientos. La situación bélica reciente ha trastornado por completo el orden regular de los acontecimientos, con una serie excepcionalmente alta de nacimientos en 1941-3, de manera que nuevamente se excedió el máximo de 1921 con más de 3 millones de nacimientos en 1943.¹⁴ Por supuesto, esta es sólo una

¹³ Se refiere al censo de 1940. [T.]

¹² Como se sabe, los nombres de Verhulst, Pearl, y Reed están asociados con esta ley.

¹⁴ Las cifras citadas aquí están corregidas por omisión de los nacimientos registrados de Estados Unidos.

CUADRO 4
DISTRIBUCION POR EDADES DE TIPO MALTUSIANO, DISTRIBUCION POR EDADES Y
TASAS DE NATALIDAD, MORTALIDAD Y CRECIMIENTO NATURAL, POR MIL

Grupo de edades	Inglaterra y Gales, 1871-80 ^a					
	Hombres		Mujeres		Ambos sexos	
	Calculada	Observada	Calculada	Observada	Calculada	Observada
0-5	142	139	135	132	138	136
5-10	118	123	114	117	116	120
10-15	107	110	104	104	106	107
15-20	98	99	95	95	96	97
20-25	88	87	86	91	87	89
25-35	150	144	148	149	149	147
35-45	117	112	117	115	117	113
45-55	84	84	87	87	86	86
55-65	57	59	63	61	60	59
65-75	29	31	36	35	32	33
75-00	11	12	13	15	12	13
Tasa de natalidad, <i>b</i>	36,47	36,92	33,74	33,72	35,08	35,28
Tasa de mortalidad, <i>d</i>	22,16	22,61	20,01	19,99	21,07	21,27
Tasa de crecimiento, <i>r</i>	14,31	14,31	13,73	13,73	14,01	14,01

Grupo de edades	Alemania, 1891-1900 ^b		Suecia, 1910 ^c	
	Ambos sexos		Ambos sexos	
	Calculada	Observada	Calculada	Observada
0-10	244	244	218	218
10-20	198	198	185	192
20-30	170	164	155	156
30-40	131	134	129	125
40-50	101	105	107	102
50-60	78	78	86	88
60-70	51	50	65	66
70-80	23	22	40	40
80-00	5	4	15	13
Tasa de natalidad, <i>b</i>	35,90	36,2	-	-
Tasa de mortalidad, <i>d</i>	22,01	22,3	-	-
Tasa de crecimiento, <i>r</i>	13,89	13,9	-	-

^a A. J. Lotka (1907, 1913, 1918, 1921).

^b L. von Bortkiewicz (1911).

^c H. Cramér (1935).

situación transitoria atribuible en gran medida a la racha de matrimonios durante la guerra.

Mientras la curva de los nacimientos en una población logística es en su totalidad creciente, como la curva de la población, la curva de las tasas de natalidad por persona es decreciente. En el régimen de una tabla de vida constante se aproximaría mucho a una logística invertida. En realidad, ante el constante mejoramiento en la mortalidad, es más acentuadamente des-

cedente que la logística en la parte central de su trayectoria.

Una tasa de natalidad declinante aparece entonces en concomitancia natural con la curva logística de crecimiento, y no tiene en sí misma implicaciones peligrosas. En realidad, se puede ver muy propiamente como una modificación aplicable para evitar los efectos adversos de la sobrepoblación. Sin embargo, este es el punto de vista exclusivamente cualitativo. Cuantitativamente el problema se plantea,

GRAFICO 5

CURVA LOGISTICA AJUSTADA A LOS COMPUTOS DEL CENSO (CIRCULOS) DE LA POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS DESDE 1790 HASTA 1940, AMBOS INCLUSIVE. (R. PEARL, L.J. REED Y J.F. KISH, 1940)

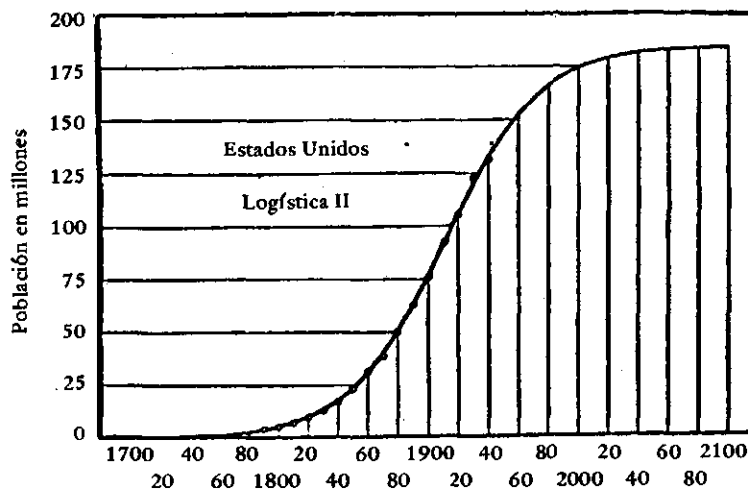
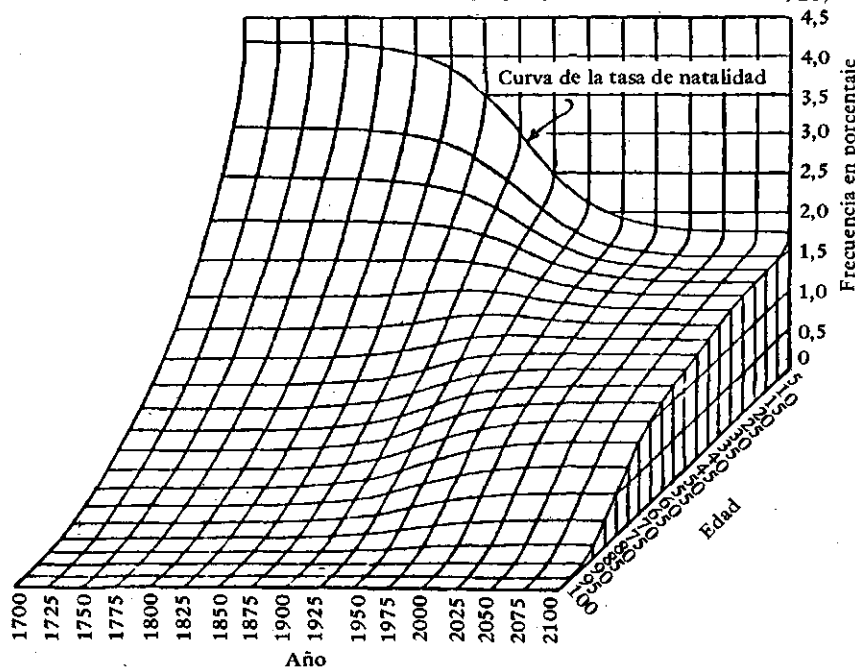


GRAFICO 6

DISTRIBUCION POR EDADES EN UNA POBLACION LOGISTICA, MOSTRANDO LA TRANSICION DESDE EL TIPO MALTUSIANO AL ESTACIONARIO (CALCULADA CON INFORMACION DE LA TABLA DE VIDA DE LOS ESTADOS UNIDOS CORRESPONDIENTE A 1920)



y es hoy una cuestión candente, en términos de una sobre-compensación, no expresada en un equilibrio confortable—tal como el que implica quizá la asíntota de la logística— sino en una declinación inminente de la población. Asimismo, el solo hecho de que la tasa intrínseca de crecimiento, r_0 , caiga por debajo de la tasa

bruta observada no es en sí mismo motivo de ansiedad. Es una concomitancia inherente al crecimiento logístico, como se muestra en el gráfico 8. Pero de un examen del cuadro 1, se deduce que la mayoría de los países civilizados resultan deficitarios, sea que la estimación se haga a través de r_0 o de su equivalente

GRAFICO 7

DISTRIBUCION POR EDADES EN UNA POBLACION LOGISTICA. COMPARACION CON LA POBLACION FEMENINA BLANCA NATIVA DE ESTADOS UNIDOS, 1920

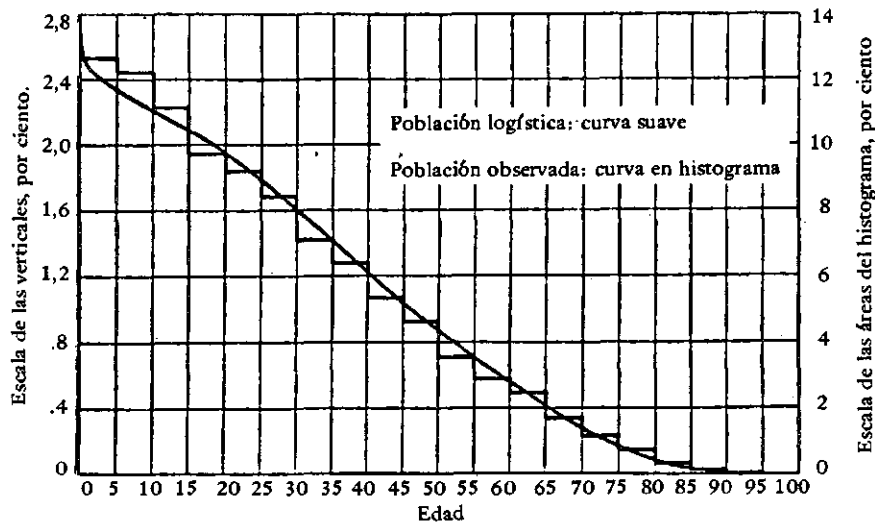
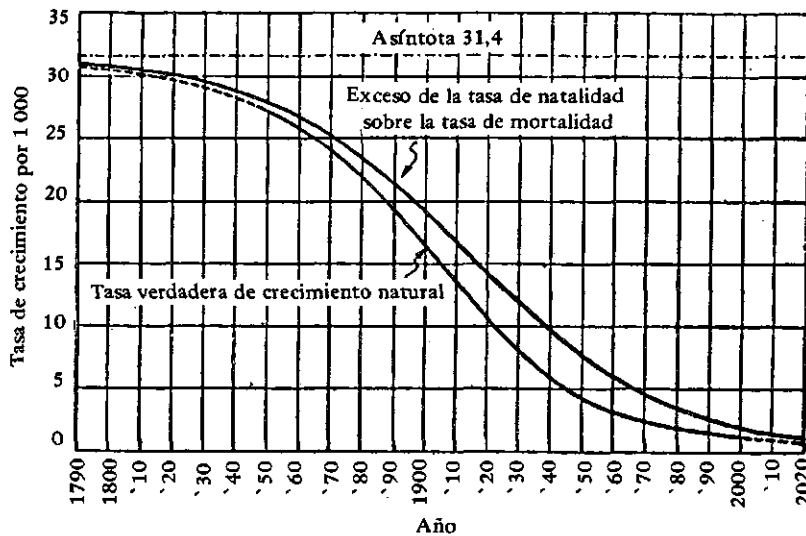


GRAFICO 8

COMPARACION DE LA TASA VERDADERA DE CRECIMIENTO NATURAL CON EL EXCESO DE LA TASA DE NATALIDAD SOBRE LA TASA DE MORTALIDAD EN UNA POBLACION QUE CRECE EN FORMA LOGISTICA



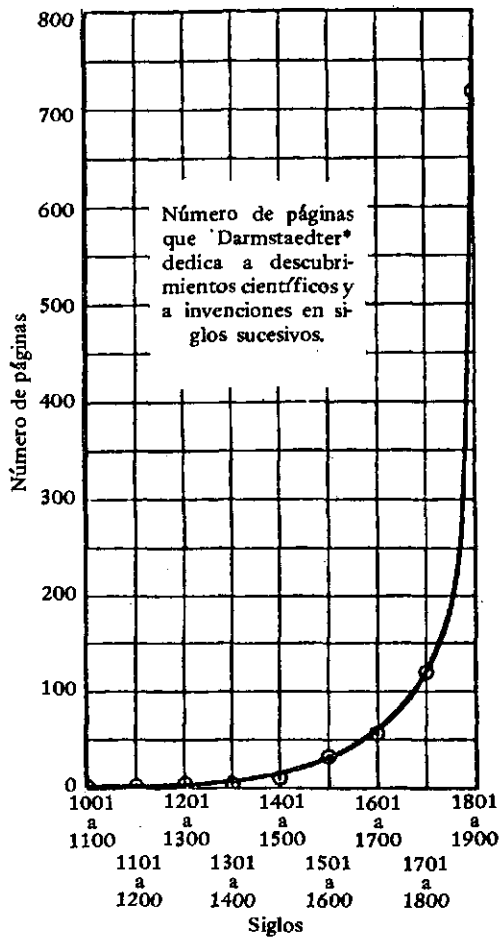
aproximado R_0 , pues el primero es negativo y el otro menor que la unidad.

Pero estamos en presencia de anuncios aún más amenazantes. La vida de la especie depende de un exceso de los nacimientos sobre las defunciones, o al menos de un equilibrio entre ellos. En cuanto a las defunciones, la historia del hombre civilizado moderno parece presentar un ejemplo resplandeciente de triunfo sobre las especies rivales hostiles a la vida del individuo. En el curso de los últimos cien años, aproxima-

damente, la duración media de la vida se ha incrementado desde alrededor de 40 hasta alrededor de 64 años en los Estados Unidos, e incluso desde el comienzo del presente siglo el aumento ha alcanzado casi a un 13 por ciento. Este logro es nada más que una expresión de un fenómeno en la historia humana enteramente sin paralelo en las restantes extensiones de la evolución orgánica: el repentino florecimiento y fructificación de la ciencia y la tecnología. En escala cósmica, este desarrollo puede des-

cribirse como explosivo. El gráfico 9 permite obtener una expresión cuantitativa burda de este repentino "estallido" de la evolución del hombre en los tiempos recientes.

GRAFICO 9
CURVA DE CRECIMIENTO DEL
CONOCIMIENTO HUMANO



Alguien puede objetar quizá que esto muestra la evolución del conocimiento humano y no del hombre, y de los refuerzos artificiales de que se vale para enfrentar los problemas de la vida y la lucha por ella. Pero ambos, el hombre y sus accesorios, no deben ser separados en un examen sistemático de la evolución de esta extraña especie, que se ha apoderado de partes de su medio y las ha adaptado como órganos artificiales enormemente más eficientes que sus prototipos "naturales" (esto es, fisiológicamente compuestos). En el campo de batalla de la naturaleza la victoria favorece a los mejor equipados, sin considerar en absoluto el origen del equipo, tanto si ha "crecido" con el organismo como parte de su cuerpo, por la asimilación de alimento, como si ha sido "construido"

en el taller como instrumentos separados a partir de materiales extraños. El hombre emprende la lucha no desnudo y solo sino ampliamente equipado, como una unidad de combate, con todos sus accesorios, cualquiera que sea su fuente.

Existe, por cierto, la evidencia manifiesta de que estos accesorios adquiridos y las facultades del hombre le han otorgado una ventaja abrumadora sobre sus enemigos y competidores en la lucha por la supervivencia, pues éstos tienen que confiar en su equipo "original" de medios de defensa y agresión. En las zonas más densamente pobladas de todos los países civilizados, las bestias salvajes peligrosas para el hombre son, si no completamente exterminadas, por lo menos reducidas a una magnitud relativamente inocua. Y el triunfo del hombre sobre sus adversarios microscópicos queda confirmado por la gran reducción, ya señalada, de la morbilidad y la mortalidad.

Pero, obviamente, hay un flanco débil en el armamento: tan efectivo como es contra nuestros simples adversarios de la naturaleza, en las luchas entre los hombres se ha convertido en una terrible arma de doble filo.

Mientras las guerras fueron problemas relativamente locales, entre dos o, en todo caso, un número pequeño de tribus o naciones, la amenaza latente para toda la raza humana permaneció inadvertida. Además, se esperaba, no sin razón, que las guerras entre dos rivales limitados dejaran un saldo beneficioso para el vencedor, con un costo sufragado en gran medida por el vencido. La opinión pública, al menos en lo que el asunto le concernía, era muy indulgente al juzgar éticamente la guerra como una empresa justificada.

Pero los mismos adelantos técnicos que han proporcionado el terrible equivalente moderno de la espada, han superado al mismo tiempo tan efectivamente las barreras de la distancia, que en nuestro empequeñecido planeta cada guerra amenaza ser una guerra mundial y cualquier lucha entre naciones tiene alcance universal para toda nuestra especie. No es coincidencia que en nuestros días vaya ganando aceptación general la idea de que la guerra agresiva es una empresa éticamente indefendible. La guerra se ha hecho desventajosa tanto para el vencedor como para el vencido, al comprometer a todo el mundo civilizado.

Hace años se hizo sonar una alarma para la raza humana. Se hablaba a menudo de la cercana extinción de los recursos naturales. La advertencia de Sir William Crooke sobre el inminente agotamiento de nuestras fuentes de nitrógeno asimilable no dejaba de tener fundamento,

pero los requerimientos han sido satisfechos plenamente por la moderna industria sintética. Pero en el libro de Edward M. East, *Mankind at the Crossroads*, publicado en 1923, la nota dominante era la ansiedad relativa a la escasez de alimentos para una población siempre creciente.

En efecto estamos en la encrucijada, aunque en un sentido muy diferente. La amenaza no proviene de una carencia de abastecimiento ni de causas externas. Algunas especies se han extinguido bajo el asalto de sus enemigos. Pero para nosotros la amenaza viene de dentro. Una fecundidad inferior al nivel necesario para conservar la población no es una excepción sino la regla en la mayoría de las naciones civilizadas, e inclusive aquéllas que aún muestran un balance favorable en el recuento vital se mueven en la dirección seguida ya durante períodos más largos por las otras naciones. Si bien se reconoce ahora abiertamente la amenaza en los medios responsables, hay ciertos aspectos de la cuestión que inducen a mencionarlos nuevamente.

Se ha señalado antes que se puede aceptar con ecuanimidad una cierta reducción de la fecundidad como una evolución compensadora para equilibrar el efecto de la declinación en la mortalidad. Ciertamente, es mucho mejor que ese equilibrio de la población se establezca mediante la coexistencia de tasas decrecientes de mortalidad y de natalidad, en lugar de imponérsenos mediante una mortalidad creciente acompañada de una alta tasa de natalidad, innecesaria e improductiva; sin duda, el método corriente en la "naturaleza salvaje". Sí; pero aquí reside el peligro: el método de la naturaleza salvaje conduce a un equilibrio estable. La tasa de mortalidad, si *hay sobrepoblación*, presumiblemente crece hasta que se alcanza el equilibrio, y allí se detiene. Pero con el método que la especie humana ha adoptado no hay garantía, ni tampoco indicación alguna, de que la declinación de la fecundidad cesa cuando se alcanza el nivel de equilibrio. Por cierto que una vez que se ha puesto bajo control consciente la procreatividad, se hace igualmente necesario controlar el proceso estabilizador, asunto que no sólo involucra problemas de hecho, problemas vinculados con la concepción de una adecuada política de población, sino también problemas mucho más complicados respecto a razones del control y valoración a escala demográfica; en otras palabras, el problema de inducir a adoptar la política aprobada.

La reproducción controlada, podemos darlo por seguro, ha venido para quedarse. En su

etapa constructiva asume la forma de una "paternidad planeada". Hay mucho que decir en favor de este movimiento y, ciertamente, debemos aceptarlo como inevitable. Pero hay algo inquietante en la tranquila confianza con que algunos de sus defensores parecen dar por supuesto que el control cesará justo alrededor del nivel adecuado para mantener la población. Esto implica un supuesto doblemente gratuito, a saber: primero, que los padres estarán bien informados respecto a los requerimientos numéricos (que presumiblemente estarán planteados en términos de promedios que resultarán engañosos al referirlos al individuo); y segundo, que si están adecuadamente informados, los padres o los padres potenciales orientarán sus acciones en consonancia con ello.

Otro hecho que no parece haber sido debidamente apreciado por algunos, es que un déficit en el balance entre fecundidad y mortalidad (que puede presentarse incluso aunque la tasa de natalidad exceda temporalmente a la de mortalidad), no significa únicamente una tendencia *temporal* hacia la declinación de la población, sino el presagio de un decrecimiento continuo e ilimitado, durante tanto tiempo como exista el déficit.

Pero en los medios responsables no se desconoce la seriedad de la situación que afronta la raza humana y más en particular aquellas partes de ella que por propia admisión son civilizadas. La crisis ha surgido de un cierto desequilibrio en el ajuste entre las facultades del hombre y sus impulsos instintivos. Pues, como lo ha destacado T. Veblen (1914): "Los fines de la vida, los propósitos por alcanzar, son determinados por las tendencias instintivas del hombre; pero los caminos y los medios para conseguir esas cosas que las tendencias instintivas valoran son una cuestión de la inteligencia... Los hombres piensan, pero el espíritu humano, es decir, la dotación racial de tendencias instintivas, decide sobre qué pensarán, y cómo, y con qué objeto".

No le vale de nada al hombre el ser siempre tan ingenioso para discurrir medios, si carece de algún principio orientador adecuado —presumiblemente reemplazado por impulsos instintivos— para determinar con qué fines empleará sus hábiles recursos. Y, desde el punto de vista de la evolución de la especie, un principio adecuado es aquel que persigue la supervivencia. Esto implica, como mínimo, que el principio debe procurar de alguna manera la adecuada reproducción y la evitación de la sangüinaria lucha.

El incremento del conocimiento, de la ciencia y de las artes técnicas es un caso claro de

aquello que los biólogos han denominado, en otro campo, "ortogénesis". Es una tendencia sesgada en cierta dirección, sin considerar su efecto favorable o desfavorable sobre la especie. Si es favorable, entrega la oportunidad para una evolución particularmente rápida, mediante una sección singularmente acelerada de las formas apropiadas. Pero si es desfavorable, contiene la amenaza de un descenso igualmente rápido hacia la extinción.

Por cierto, sería una sorprendente trampa del destino si nosotros, el producto más avan-

zado de la evolución orgánica, fuéramos la primera de todas las especies vivientes tan hábil como para prever su propia sentencia.

Like some bold seer in a trance
Seeing all his own mischance

Hemos probado la fruta del Arbol de la Sabiduría, y se ha convertido en veneno. ¿Hay algún remedio? No intentaré contribuir a la discusión de este proceso de la vida y la muerte. Las generaciones venideras aprenderán la respuesta.

ESTE LIBRO SE TERMINO DE IMPRIMIR EN NOVIEMBRE
DE MIL NOVECIENTOS SETENTA Y TRES; EN LOS
TALLERES GRAFICOS FIORANI, DIEGO POMBO 948
SAN MARTIN, PROV. DE BS. AS., REPUBLICA ARGENTINA



1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

