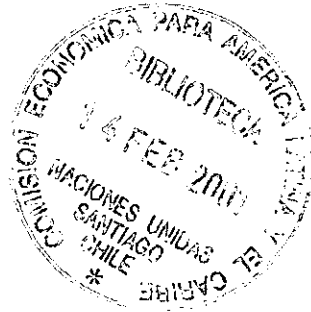


Albino Bocaz S.



COMPATIBILIDAD ENTRE POBLACION
Y MORTALIDAD



CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA



Serie A, N° 165

Santiago de Chile

Agosto de 1979

Las opiniones y datos que figuran en este trabajo son responsabilidad del autor, sin que el Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE) sea necesariamente partícipe de ellos.

I N D I C E

	<u>Página</u>
Introducción	1
Relaciones usadas	2
Aplicación de la Forma 1 al caso de una población estacionaria ..	9
Aplicación de la Forma 5 al caso de una población estacionaria ..	11
Aplicación de las Formas 3 y 6 al caso de una población estable modelo	13
Aplicación de las Formas 3 y 6 al caso de una población estable <u>mo</u> <u>delo sesgada</u>	18
Aplicación de las Formas 2 y 6 al caso de México (censos 1930, 1940 y 1950) y mortalidad 1950	21
Aplicación de las Formas 1 y 5 a regiones geográficas chilenas <u>pa</u> <u>ra el año 1970</u>	26
a) Aplicación al área metropolitana (año 1970)	27
b) Aplicación a la región I	30
c) Aplicación a la región IX (Malleco-Cautín)	33
Aplicación de las Formas 1 y 5 a datos históricos	34
Conclusiones y recomendaciones	37
ANEXO	39



Introducción

En numerosas ocasiones la información sobre mortalidad de una población, dada en la forma de una distribución de las defunciones por sexo y grupos de edades, adolece de importantes subregistros de los hechos y de declaración sesgada de la edad de los fallecidos.

Esta falta de cobertura de los hechos de mortalidad en los diferentes grupos de edades hace que tanto el cálculo de la tasa bruta de mortalidad (d) como de las tasas específicas por edad (m_x) no representa adecuadamente la mortalidad tanto a nivel general como en esos grupos de edades.

Por otra parte, la información censal acerca de la distribución de la población por sexo y grupos de edades presenta sesgos de tipo parecido. Es notable, en muchos casos, el importante grado de subenumeración de los menores de edad y la declaración errónea de la edad para las personas mayores. Ciertas edades presentan una mayor preferencia de declaración que otras, haciendo que la distribución por edades simples presenten fluctuaciones con oscilaciones impresionantes frente a ciertas edades particulares.

Pese a estas circunstancias negativas se hace necesario determinar el nivel general más probable de la mortalidad, como asimismo la incidencia de la mortalidad por sexo y edad.

Haciendo uso de ciertas relaciones entre diversos parámetros demográficos, que es posible deducir para poblaciones ideales (poblaciones teóricas), se puede solucionar este tipo de deficiencia surgido con la información censal y vital y lograr estimaciones plausibles tanto para indicadores de mortalidad de orden general como para aquellos más específicos.

En este artículo se indica cómo usar estas relaciones para información demográfica censal de tipo corriente y de estadísticas vitales incompletas. Es posible ver en las aplicaciones numéricas que no siempre el uso de estas relaciones conduce a los mismos resultados y que la deficiencia de la información sobre mortalidad puede en algunos casos llevar a estimaciones muy diferentes según sea el tipo de relación usada.

Además, la aplicación numérica de las relaciones exige una breve revisión del tipo de cálculo numérico que debe usarse para determinar adecuadamente los valores de las variables que aparecen en las relaciones usadas, de modo que ello conduzca a estimaciones insesgadas de los parámetros demográficos.

Podremos ver cómo ciertas relaciones, válidas para poblaciones estables, pueden ser usadas aun en situaciones en que la población no solamente no es cerrada, sino que la mortalidad y la fecundidad pueden estar cambiando en el tiempo. Sin duda que el uso de dichas relaciones teóricas en estos casos da una idea aproximada de ciertos parámetros demográficos con un grado de confiabilidad menor debido al apartamiento según categorías que tienen las distribuciones empíricas de las teóricas.

Relaciones usadas

Las relaciones que pueden usarse para establecer el grado de compatibilidad entre la distribución por sexo y edad de una población y las correspondientes distribuciones de fallecidos se apoyan en algunas relaciones deducidas de la estructura de una población estable.

De esa manera si

$N(x)$ = número de personas de edad exacta (x)

$N = \sum_x^{\omega} N(x)$ = total de personas, todas las edades

$c(x) = N(x)/N$ = distribución relativa de la población en la edad exacta (x) en una población estable se tiene que

$$N(x) = N b e^{-rx} l_x \quad (1)$$

siendo

b = tasa bruta de natalidad

r = tasa de crecimiento

l_x = sobrevivientes a la edad exacta (x).

Cualquiera que sea la población de referencia, la distribución de los fallecidos de edad exacta (x) está dada por la relación

$$D(x) = N(x) \mu(x) \quad (2)$$

siendo

$$\mu(x) = -d(\ln l_x) / dx = -l'_x / l_x \quad (3)$$

la tasa instantánea de mortalidad frente a la edad (x).

De allí que tomando logaritmos (naturales) de la relación (1) se puede escribir

$$\ln(N(x)) = \ln(Nb) - rx + \ln(l_x) \quad (4)$$

que luego de derivar con respecto a (x) nos da

$$N'(x) / N(x) = -r - \mu(x)$$

y tomando en cuenta la relación (2), luego de reemplazar llegamos a

$$N'(x) / N(x) = -r - D(x) / N(x) \quad (5)$$

que denominaremos la *Forma 1*.

Esta forma nos indica que si una población es "estable" la tasa de cambio de la estructura ($-N'(x)/N(x)$) mantiene una diferencia constante con la tasa de mortalidad local ($D(x)/N(x)$) igual a la tasa (r) de crecimiento. En símbolos

$$-N'(x) / N(x) - D(x) / N(x) = r \quad (6)$$

forma alternativa de escribir la relación (5).

La relación (5) puede considerarse como el caso particular de una regresión lineal simple

$$-N'(x) / N(x) = \alpha + \beta D(x) / N(x) \quad (7)$$

en que para el caso en que la población de referencia es estrictamente estable, los parámetros (α) y (β) valen (x) y (1), respectivamente.

Frente a una población teórica definida (población estacionaria modelo o población estable modelo) es posible verificar numéricamente la relación (6) usando algunas fórmulas aproximadas para determinar las primeras derivadas de $N(x)$ si se dispone de grupos de edades como información básica.

Más adelante se indicarán los tipos de fórmulas aproximadas que pueden usarse para verificar la calidad de esas formas aplicándolas a los tipos de poblaciones teóricas recién mencionadas.

En las aplicaciones a poblaciones reales de la relación (6) no es posible que ésta se cumpla estrictamente. Si la población en referencia se asemeja bastante a una población estable se cumplirá más cercanamente la relación (6), lo que se puede verificar gráfica y analíticamente. Se supone que tanto la distribución de la población como la de las defunciones por edad tienen sesgos relativos iguales en los grupos correspondientes. Si esto no ocurre y se tiene, por ejemplo, que la distribución de la mortalidad está más sesgada que la de la población censada, el parámetro (β) reflejará esta situación adquiriendo valores distintos de 1. Corrientemente se puede esperar que el citado coeficiente de regresión (β) sea mayor que 1 indicando ello que el subregistro de la mortalidad por edad es mayor que la subenumeración censal. La estimación de la tasa bruta de mortalidad, en este caso, estará dada por $d\beta$, siendo (d) = D/N y D = total de las defunciones registradas; N = población total censada.

Dado que las fórmulas para el cálculo de las derivadas primeras estiman aproximadamente esta variable y que el resultado de ellas se deteriora por la insuficiente calidad de los datos $N(x)$ y $D(x)$ usados, es que se debe ser cauteloso en darle excesiva confiabilidad al valor del parámetro (β) cuando discrepa de (1). Es posible aceptar que mientras el valor del parámetro tenga una fluctuación del 5 por ciento alrededor de (1), o sea varíe entre 0,95 y 1,05, se puede considerar que tanto la información de población como la de la mortalidad tienen igual cobertura.

Para obviar esta situación de grados de cobertura diferentes para la población censada y los hechos de mortalidad podemos cambiar levemente la relación (5) usando las distribuciones relativas de población y de defunciones.

$$\text{De modo que si} \quad N(x) / N = c(x) \quad (8)$$

$$D(x) / D = d(x) \quad (9)$$

representan respectivamente la distribución relativa de la población y de las muertes, luego de reemplazar estas relaciones en (5) se tiene

$$-c'(x) / c(x) = r + D d(x) / N c(x)$$

de modo que

$$-c'(x) / c(x) = r + d d(x) / c(x) \quad (10)$$

que denominaremos la *Forma 2*.

La relación (10) adquiere, igual que antes, la estructura de una regresión lineal simple entre las variables $(-c'(x)/c(x))$ y $d(x)/c(x)$, con coeficientes de regresión (α, β) iguales respectivamente a (r) y (d) las tasas de crecimiento y bruta de mortalidad de la población.

Al aplicar la relación (10) a una información determinada se puede llegar a valores de (d) que a juicio del investigador son muy diferentes a los valores probables de las poblaciones. Pueden resultar demasiado bajos lo que, obviamente, estará explicado por subregistros importantes de las defunciones. La *Forma 2* no permite, sin embargo, aclarar este asunto como lo permite la *Forma 1*, lo que nos da inmediatamente la ventaja de la *Forma 1* con respecto a esta segunda forma.

Si se elabora un gráfico de puntos usando como abscisas los valores $(d(x)/c(x))$ y como ordenadas los valores $(-c'(x)/c(x))$ estos puntos se alinean aproximadamente, en una línea ascendente cuya pendiente (inclinación positiva) es parecida a (d) .

En lugar que (r) sea la intersección y la inclinación de una línea recta, podemos invertir la función de esos parámetros haciendo que (r) pase a ser la inclinación de una línea y (d) la intersección con el eje de las ordenadas.

Para lograr esto multiplicamos -miembro a miembro- la relación (10) por la razón $c(x)/d(x)$, de modo que se tiene

$$-c'(x) / d(x) = d + r c(x) / d(x) \quad (11)^{1/}$$

relación sobre la cual llamó la atención J. Bourgeois-Pichat^{2/} hace algunos años y que denominaremos *Forma 3* y que aplicó a México en que analizó la compatibilidad de la distribución relativa media de la población femenina en el período 1930-1950 con la distribución relativa de las defunciones observadas para el año 1950. Este ejemplo se analizará usando la *Forma 3* y la *Forma 5* que se pasará a deducir inmediatamente.

Tomando en cuenta las relaciones (2) y (3) se tiene que en una población

$$D(x) = N(x) \left(-l'_x / l_x \right)$$

y si la población es estable, o sea si $N(x)$ tiene la forma dada por la relación (1)

$$D(x) = -N b e^{-rx} l'_x \quad (12)$$

de modo que el número de defunciones $D(z+)$ de personas de edades iguales o superiores a (z) está dado por

$$\int_z^w D(x) dx = -N b \int_z^w e^{-rx} l'_x dx$$

relación que puede integrarse por parte, originando la relación

$$\begin{aligned} D(z+) &= -N b \left[e^{-rx} l_x \right]_z^w - rN \int_z^w b e^{-rx} l_x dx \\ &= N b e^{-rz} l_z - r \int_z^w N(x) dx \end{aligned}$$

1/ Si en lugar de usar las distribuciones relativas $c(x)$ y $d(x)$ se usan los valores absolutos $N(x)$ y $D(x)$ la relación (11) pasa a $-N'(x)/D(x) = 1+r N(x)/D(x)$, que se denominará *Forma 4*.

2/ Bourgeois-Pichat, J., *El concepto de Población Estable*, ST/SOA/Serie A, N° 39, Naciones Unidas, Nueva York, págs. 63-66, 1970.

de manera que en definitiva se tiene

$$D(z+) = N(z) - r N(z+) \quad (13)$$

siendo $N(z)$ = número de personas de edad "exacta" z .

$N(z+)$ = número de personas de edades iguales o superiores a (z)

w = edad límite de vida; $l_w = 0$

La relación (13) puede escribirse en la forma

$$N(z) / N(z+) = r + D(z+) / N(z+) \quad (14)$$

que denominaremos *Forma 5*. Sobre este tipo de relación ha llamado la atención W. Brass como método alternativo al de Bourgeois-Pichat para analizar el posible grado de compatibilidad entre la distribución de la población y el de las defunciones.

Se puede anticipar que el uso de las acumulaciones sugeridas por W. Brass permite llegar en las aplicaciones a estimaciones adecuadas de (r) y del grado diferencial de cobertura de los dos tipos de información usada.^{3/}

Cuando existen diferencias de coberturas por edades en la población censada y de las muertes la relación (14) adquiere la forma

$$N(z) / N(z+) = \alpha + \beta D(z+) / N(z+) \quad (15)$$

midiendo el coeficiente (β) de regresión el grado diferente de cobertura de los dos tipos de información usados en el análisis de la compatibilidad. Si (β) resulta mayor a (1) esto indica que la mortalidad tiene una cobertura menor que las cifras de población y que la tasa bruta de mortalidad es por lo menos igual a $(d\beta)$, siendo $d=D/N$ la tasa bruta de mortalidad dada por los datos.

^{3/} También es posible demostrar con algunos ejemplos numéricos que la aplicación de la forma sugerida por W. Brass puede conducir a resultados inadecuados.

Se verá más adelante, no obstante, que la aplicación del método de W. Brass implica que el registro de la mortalidad esté igualmente deficitario en los diferentes grupos de edades. Si esta condición no se cumple, el uso de las *Formas 4 y 5* afecta no solamente a la estimación de (r) , sino de manera importante al valor del parámetro (β) originando una estimación inadecuada del sesgo en el registro de las defunciones. (Caso de México, como se verá más adelante).

En otras aplicaciones (caso de Chile) la *Forma 4* resulta muy adecuada a pesar que no es admisible la estabilidad de las estructuras de la población por regiones consideradas como correspondientes a las de una población estable, debido al efecto de la migración geográfica interna.

La relación (14) puede escribirse en otra forma alternativa cuando se tiene una mayor confiabilidad en las distribuciones relativas de la población y de las muertes que en sus valores absolutos. Usando las relaciones (8) y (9) se puede escribir

$$N c(z) / N c(zt) = r + D d(zt) / c(Nc(zt))$$

o sea

$$c(z) / c(zt) = r + d d(zt) / c(zt) \quad (16)$$

que se denominará como la *Forma 6*.

Esta relación es de tipo muy parecido a la relación (10) que se ha denominado *Forma 2*.

Se puede ver que la tasa de cambio de la estructura $(-c'(x)/c(x))$ ha sido cambiada por la proporción de personas de edad exacta (x) dentro del grupo de personas de edad (x) o mayores y que la tasa "local" de mortalidad $(d(x)/c(x))$ por la mortalidad "relativa" de las personas de edad (x) o mayores.

Más adelante, en las aplicaciones, se podrá ver el grado de confiabilidad que se puede prestar a la *Forma 5* para determinar en especial y en forma adecuada la tasa bruta de mortalidad (d) .

Resumiendo: bajo el supuesto que una población real pueda asimilarse a una población estable es posible analizar el grado de compatibilidad entre la población censada por sexo y grupos de edades con la correspondiente al registro de las muertes.

Pueden adoptarse 6 Formas alternativas:

$$\text{Forma 1} \quad -N'(x)/N(x) = r+d D(x)/N(x) \quad (17)$$

$$\text{Forma 2} \quad -c'(x)/c(x) = r+d d(x)/c(x) \quad (18)$$

$$\text{Forma 3} \quad -c'(x)/d(x) = d+r c(x)/d(x) \quad (19)$$

$$\text{Forma 4} \quad -N'(x)/D(x) = 1+r N(x)/D(x) \quad (20)$$

$$\text{Forma 5} \quad N(x)/N(x+) = r+d D(x+)/N(x+) \quad (21)$$

$$\text{Forma 6} \quad c(x)/c(x+) = r+d d(x+)/c(x+) \quad (22)$$

Aplicación de la Forma 1 al caso de una población estacionaria

Con el objeto de revisar la bondad del uso de algunas fórmulas de cálculo numérico en la determinación de la primera derivada de la función $N(x)$ se aplicará la Forma 1 al caso de una población estacionaria modelo. Las poblaciones modelo que se usarán serán las correspondientes a las poblaciones estacionarias indicadas en el Manual 4 de las Naciones Unidas para el sexo femenino en los Niveles: Nivel 1 ($e_0^0 = 20$ años); Nivel 7 ($e_0^0 = 35$ años); Nivel 13 ($e_0^0 = 50$ años) y Nivel 19 ($e_0^0 = 65$ años).

Para la determinación de los valores de $(-N'(x)/N(x))$ se usarán las dos aproximaciones siguientes:

$$\text{Aproximación 1:} \quad -N'(x) / N(x) = (5 N_{x-5}) / 10 (N_x) \quad (23)$$

$$\text{Aproximación 2:} \quad -N'(x) / N(x) = (\ln N_{x+} / N_{x-5}) / 10 \quad (24)$$

que se denotarán por (T_1) y (T_2) , respectivamente, para distinguirlos de los valores observados que se denotarán por (0) .

Los resultados son los siguientes:

Edad	Nivel 1 ($e_0^0 = 20,0$ años)			Nivel 7 ($e_0^0 = 35,0$ años)		
	0	T_1	T_2	0	T_1	T_2
5-9	15,17	33,35	30,52	8,45	16,30	15,64
10-14	11,77	13,53	13,51	6,57	7,57	7,57
15-19	15,35	15,24	15,36	8,58	8,65	8,69
20-24	19,24	18,68	18,80	10,93	10,65	10,69
25-29	21,61	21,59	21,69	12,31	12,32	12,36
30-34	24,51	24,22	24,32	13,95	13,84	13,88
35-39	26,84	26,60	26,66	15,39	15,30	15,34
40-44	28,55	28,51	28,53	16,68	16,69	16,73
45-49	30,25	31,65	31,92	18,28	19,08	19,22
50-54	39,24	38,61	39,30	23,98	23,84	24,16
55-59	49,87	50,88	52,43	31,09	31,97	32,69
60-64	74,31	70,17	72,98	46,21	44,65	46,07
65-69	98,82	97,76	101,68	63,69	63,10	65,68
70-74	143,65	137,86	144,28	94,16	90,47	95,41

Edad	Nivel 13 ($e_0^0 = 50,0$ años)			Nivel 19 ($e_0^0 = 65,0$ años)		
	0	T_1	T_2	0	T_1	T_2
5-9	4,32	7,69	7,55	1,38	2,12	2,11
10-14	3,35	3,89	3,90	1,07	1,29	1,29
15-19	4,57	4,57	4,58	1,64	1,65	1,65
20-24	5,85	5,71	5,72	2,23	2,18	2,18
25-29	6,64	6,65	6,67	2,62	2,64	2,63
30-34	7,55	7,53	7,55	3,06	3,10	3,11
35-39	8,48	8,48	8,49	3,69	3,75	3,76
40-44	9,51	9,60	9,62	4,60	4,74	4,75
45-49	11,05	11,51	11,58	6,15	6,37	6,41
50-54	14,87	14,97	15,12	8,78	9,00	9,07
55-59	20,01	20,71	21,06	12,69	13,21	13,38
60-64	30,12	29,88	30,64	19,73	20,21	20,65
65-69	43,95	44,00	45,66	31,39	31,86	32,97
70-74	68,31	65,87	69,47	51,82	50,76	53,47

Esto nos indica que los dos tipos de aproximaciones conducen, a partir del grupo 15-19, a valores muy semejantes a los de la tabla de origen. De esa manera la secuencia de valores $-N'(x)/N(x)$ estimados con el uso de esas dos aproximaciones es adecuada desde la edad $x=17,5$ en adelante.

Se puede recurrir al uso de relaciones de mayor complejidad empleando los valores acumulados de las $({}_5N_x)$ desde la edad límite de vida hacia la edad (0). En el Anexo se indica el uso de una función bilogística para este propósito y la gran calidad reproductiva de esta fórmula, tanto para los valores $N(x)$ como para las razones $N'(x)/N(x)$.

Aplicación de la Forma 5 al caso de una población estacionaria

Esta es una de las formas sugeridas por W. Brass aplicables en los casos en que se presume que existe un registro diferencial de la población $N(x)$ y de las defunciones $D(x)$.

En la aplicación de esta Forma, el problema numérico básico está en la estimación de los valores $N(x)$ apoyándose en los valores quinquenales $({}_5N_x)$.

Entre las aproximaciones que pueden usarse están las siguientes:

$$\text{Aproximación 1: } ({}_5N_{x-5} + {}_5N_x) / 10 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{Aproximación 2: } & (0,0619 {}_5N_{x-5} + 0,1692 {}_5N_x - 0,0123 {}_5N_{x+5} - 0,0306 {}_5N_{x+10} + \\ & + 0,0118 {}_5N_{x+15}) \quad (25) \end{aligned}$$

en que la primera aproximación supone una variación lineal de las N_x . La segunda aproximación que se discutirá en el Anexo se basa en un principio de interpolación de suavidad óptima introducido por Greville.^{4/}

^{4/} Bocaz, A. *Interpolación*, CELADE, Serie B, N° 5, Rev. 1, Santiago de Chile, abril 1971.

En el caso de aplicación que luego se indica, se ha requerido el uso de la segunda aproximación por considerar una variación más real de las (N_x), con los siguientes resultados

Sexo femenino				
Edad	Nivel 1		Nivel 7	
	N_x / N_{xt}	D_{xt} / N_{xt}	N_x / N_{xt}	D_{xt} / N_{xt}
10-14	29,34	29,21	23,05	22,99
15-19	32,06	32,09	25,07	25,08
20-24	35,10	35,15	27,35	27,38
25-29	38,36	38,36	29,90	29,91
30-34	42,07	42,08	32,88	32,89
35-39	46,41	46,43	36,45	36,47
40-44	51,88	51,83	40,94	40,96
45-49	59,50	59,32	46,94	46,91
50-54	70,29	70,40	55,09	55,18
55-59	85,37	85,08	66,23	66,16
60-64	105,88	106,50	81,40	81,70
65-69	133,59	132,74	102,54	102,21

Edad	Nivel 13		Nivel 19	
	N_x / N_{xt}	D_{xt} / N_{xt}	N_x / N_{xt}	D_{xt} / N_{xt}
10-14	19,25	19,22	16,64	16,64
15-19	20,89	20,90	18,04	18,04
20-24	22,76	22,78	19,65	19,66
25-29	24,91	24,92	21,55	21,55
30-34	27,46	27,47	23,81	23,82
35-39	30,55	30,57	26,59	26,60
40-44	34,44	34,46	30,07	30,08
45-49	39,50	39,51	34,50	34,53
50-54	46,21	46,28	40,29	40,34
55-59	55,28	55,31	48,04	48,10
60-64	67,76	67,92	58,78	58,87
65-69	85,73	85,37	74,72	74,13

pudiendo verse que al aplicar este procedimiento se logra una diferencia muy reducida entre los valores (N_x / N_{xt}) y (D_{xt} / N_{xt}).

Sexo masculino				
Edad	Nivel 1 ($e_0^o=18,03$ años)		Nivel 2 ($e_0^o=32,48$ años)	
	N_x/N_{x+}	D_{x+}/N_{x+}	N_x/N_{x+}	D_{x+}/N_{x+}
10-14	30,27	30,12	24,01	23,94
15-19	33,61	33,60	26,38	26,39
20-24	37,39	37,52	29,07	29,13
25-29	41,48	41,48	32,08	32,08
30-34	46,28	46,28	35,66	35,68
35-39	52,08	52,08	40,05	40,06
40-44	59,09	59,16	45,45	45,50
45-49	67,87	67,72	52,29	52,28
50-54	79,24	79,35	61,17	61,28
55-59	94,53	94,02	73,03	72,93
60-64	115,46	115,57	89,13	89,31
65-69	144,08	143,05	111,39	111,15

Edad	Nivel 13 ($e_0^o=47,11$ años)		Nivel 19 ($e_0^o=61,23$ años)	
	N_x/N_{x+}	D_{x+}/N_{x+}	N_x/N_{x+}	D_{x+}/N_{x+}
10-14	20,13	20,10	17,51	17,50
15-19	21,99	21,99	19,05	19,05
20-24	24,10	24,13	20,82	20,83
25-29	26,53	26,53	22,90	22,90
30-34	29,46	29,47	25,44	25,45
35-39	33,08	33,10	28,61	28,63
40-44	37,61	37,65	32,62	32,65
45-49	43,39	43,42	37,77	37,80
50-54	50,93	51,01	44,47	44,53
55-59	60,99	61,02	53,39	53,47
60-64	74,67	74,81	65,51	65,62
65-69	93,94	93,73	82,90	82,53

Aplicación de las Formas 3 y 6 al caso de una población estable modelo

Usando la población estacionaria modelo, sexo femenino, Nivel 11 ($e_0^o=45$ años) del modelo regional Oeste de Coale-Demeny, cuya estructura y mortalidad es la siguiente:

Edad	${}_h L_x$	$1000, {}_h m_x$	Edad	${}_h L_x$	$1000, {}_h m_x$
0	90 502	161,15	40-44	291 388	11,57
1-4	320 442	24,96	45-49	273 969	13,13
5-9	381 683	5,51	50-54	253 884	17,48
10-14	372 430	4,29	55-59	229 493	23,18
15-19	363 207	5,76	60-64	198 946	34,68
20-24	351 543	7,32	65-69	161 882	49,52
25-29	338 115	8,28	70-74	119 112	75,74
30-34	323 525	9,39	75-79	75 083	114,39
35-39	307 872	10,47	80 y +	47 125	227,52

se puede construir una población estable modelo^{5/} adoptando una tasa de crecimiento arbitraria. Usando una tasa de crecimiento $r=24$ por mil se logra la siguiente estructura relativa de la población y de las defunciones:

Edad	${}_5 c_x$	${}_5 d_x$	Edad	${}_5 c_x$	${}_5 d_x$
0	38 684	326 278	40-44	45 454	27 474
1-4	128 993	168 202	45-49	37 904	26 000
5-9	137 916	39 700	50-54	31 154	28 449
10-14	119 356	26 750	55-59	24 977	30 246
15-19	103 237	31 065	60-64	19 204	34 792
20-24	88 623	34 168	65-69	13 842	35 809
25-29	75 599	32 464	70-74	9 044	35 787
30-34	64 157	31 472	75-79	5 056	30 216
35-39	54 149	29 618	80 y +	2 651	31 510
			Total	1 000 000	1 000 000

$$\underline{5/} \quad {}_5 c_x = b e^{-r(x+2,5)} \quad {}_5 L_x; \quad {}_5 d_x = c_x \cdot m_x$$

Al aplicar la *Forma 3* se encuentra

y	$-c'_y$	c_y	d_y	$1000c_y/d_y$	$-1000c'_y/d_y$
7,5	802,45	27 464	7 822	3,5111	102,59
12,5	673,84	23 849	5 153	4,6282	130,77
17,5	616,54	20 637	6 190	3,3339	99,60
22,5	553,56	17 713	6 899	2,5675	80,24
27,5	489,32	15 108	6 479	2,3318	75,52
32,5	428,85	12 821	6 300	2,0351	68,07
37,5	372,99	10 820	5 918	1,8283	63,03
42,5	323,16	7 575	5 139	1,6462	58,58
47,5	284,97	6 226	5 730	1,4740	55,45
52,5	258,30	6 226	5 730	1,0866	45,08
57,5	240,09	4 992	5 995	0,8327	40,05
62,5	224,79	3 838	7 013	0,5473	32,05
67,5	203,38	2 777	7 165	0,3876	28,39

en que las ordenadas y primeras derivadas de (c_y) y (d_y) se han calculado con las siguientes fórmulas de aproximación:

Ordenadas frente a (y) - para $y = 7,5; 12,5, \dots 67,5$

$$c_y = c_{x+25} = 0,0119 \ c_{x-5} + 0,2310 \ c_x - 0,0298 \ c_{x+5} + 0,0143 \ c_{x+10} - 0,0036 \ c_{x+15} \quad (26)$$

Primera derivada de (c_y) frente a $y = 7,5$

$$c'_{7,5} = -0,0717 \ c_5 + 0,1152 \ c_{10} - 0,0552 \ c_{15} + 0,0117 \ c_{20} \quad (27)$$

Primera derivada de c_y para $y = 12,5; 17,5; \dots 67,5$

$$c'_y = c'_{x+25} = 0,0148 \ c_{x-10} - 0,0126 \ c_{x-5} + 0,0264 \ c_x + 0,0041 \ c_{x+5} - 0,0031 \ c_{x+10} \quad (28)$$

relaciones cuya deducción puede verse en el Anexo. Como podrá ahí comprobarse estas relaciones se apoyan en arcos parabólicos de interpolación usando criterios de osculación (Sprague) o de suavidad óptima (Greville).

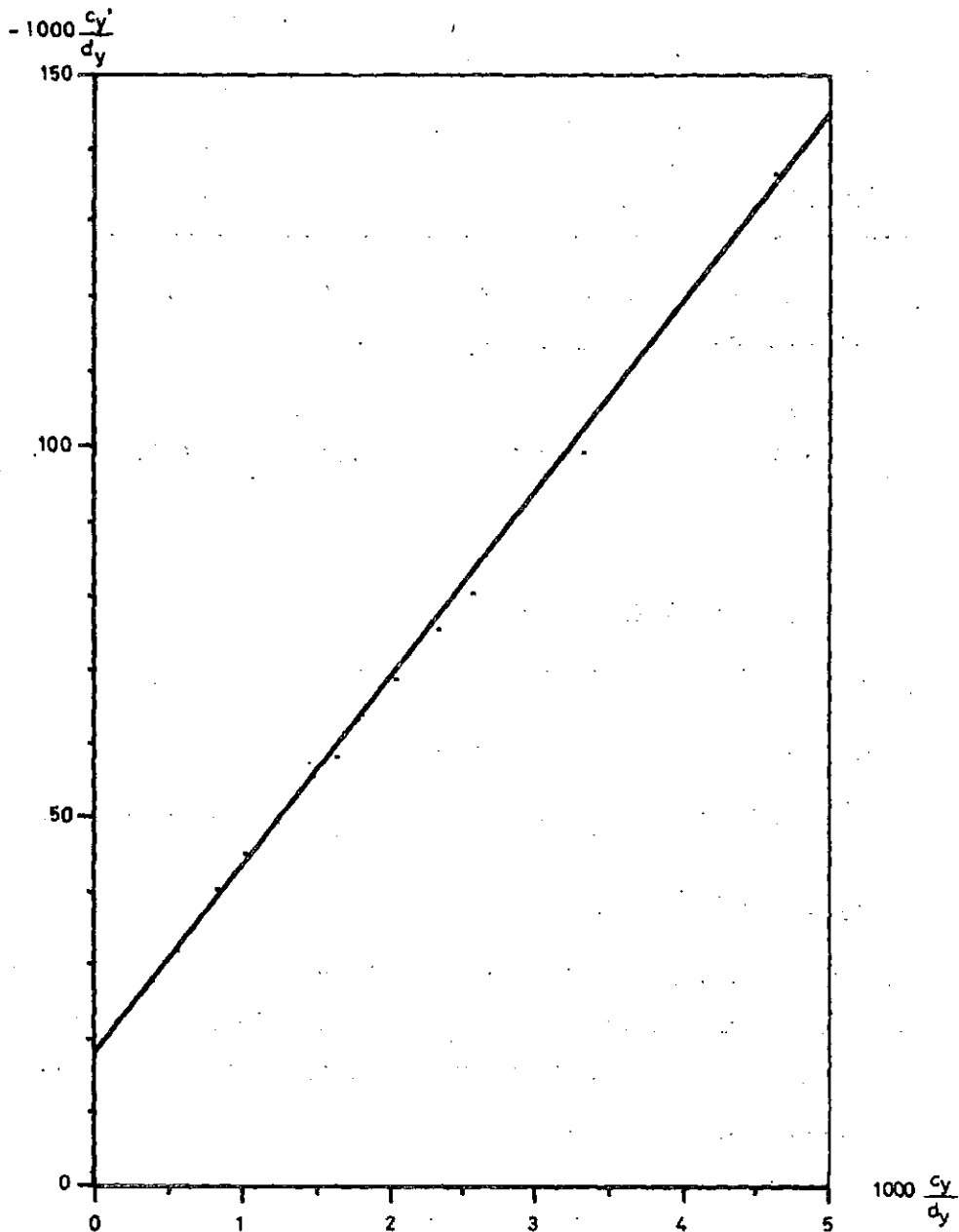
$$\text{Si se denota por} \quad x_1 = 10^3 \ c_y/d_y \quad (29)$$

$$x_2 = -10^3 \ c'_y/d_y \quad (30)$$

es posible dibujar un diagrama de puntos usando (x_1) como abscisa y (x_2) como ordenada.

Esta representación puede verse en el gráfico 1, en donde puede apreciarse que los puntos (x_1, x_2) se encuentran sobre una línea recta de pendiente igual a (r) y una intersección sobre el eje de las (x_2) igual a (d) .

GRAFICO 1

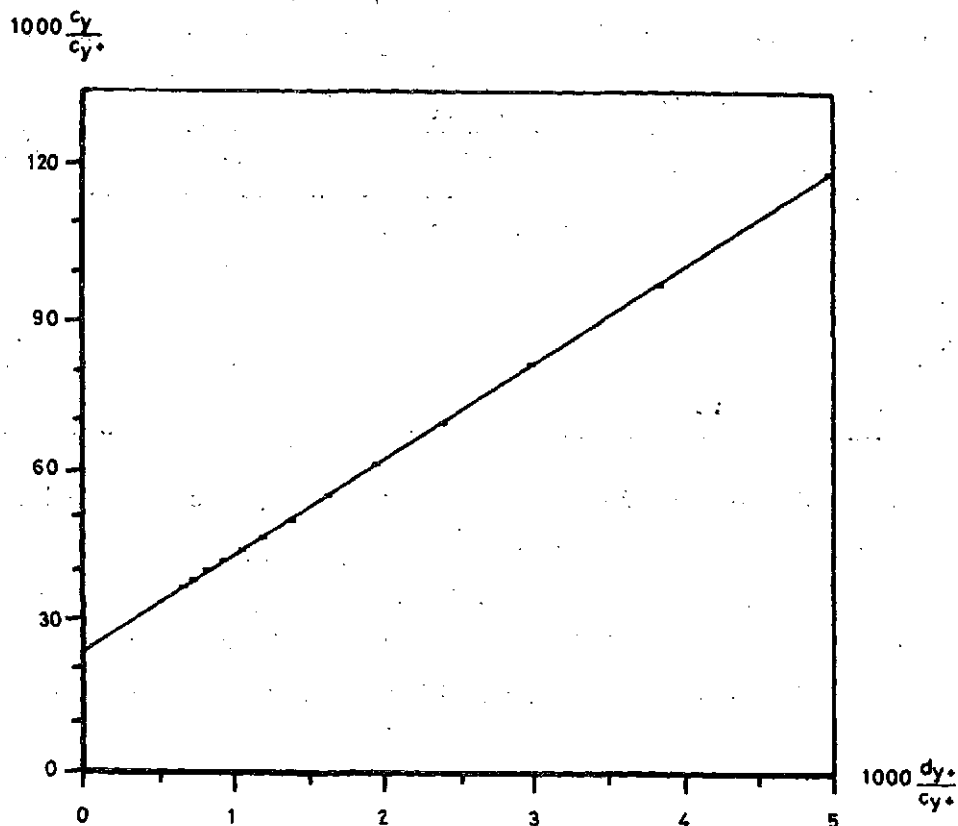


La aplicación de la *Forma 6* nos da

y	c_y	c_{y+}	d_{y+}	x_1 $1000 \frac{c_y}{c_{y+}}$	x_2 $1000 \frac{d_{y+}}{c_{y+}}$
7,5	27 464	760 956	482 385	36,09	633,92
12,5	23 849	632 669	452 341	37,70	714,97
17,5	20 637	521 587	424 063	39,57	813,03
22,5	17 713	425 844	390 881	41,60	917,90
27,5	15 108	343 927	357 478	43,93	1 039,40
32,5	12 821	274 229	325 454	46,75	1 186,80
37,5	10 820	215 242	294 831	50,27	1 369,77
42,5	9 082	165 592	266 256	54,85	1 607,90
47,5	7 575	124 027	239 992	61,08	1 935,00
52,5	6 226	89 579	212 763	69,50	2 375,14
57,5	4 992	61 568	183 758	81,08	2 984,63
62,5	3 838	39 509	151 466	97,14	3 833,71
67,5	2 777	23 151	115 541	119,95	4 990,76

la que puede representarse en un sistema cartesiano de coordenadas (x_1, x_2) tal como se indica en el siguiente gráfico

GRAFICO 2



Puede constatarse que se logra una mayor alineación de los puntos que en el caso del uso de la Forma 3. La razón fundamental de esto es que en la aplicación de la Forma 6 no existe tanto problema en el cálculo de las coordenadas (x_1, x_2) como sucede en la aplicación de la Forma 3 en donde el problema numérico "crucial" está en la determinación adecuada de la primera derivadas de $c(x)$.

A través del gráfico 2 puede constatarse que se logra una línea recta de pendiente del orden de $d=19$ por mil con una intersección en el eje de las (x_2) igual a $r=24$ por mil; tasa de crecimiento con que fue construida la población estable modelo.

Aplicación de las Formas 3 y 6 al caso de una población estable modelo sesgada

Se va a considerar ahora el caso de una población estable modelo en que la distribución por grupos de edades tiene sesgos de enumeración variables por edad y la distribución de la mortalidad está afectada por subregistros diferentes de los hechos vitales según esa misma variable. Se considerarán los dos siguientes tipos de sesgos

Edad	Sesgo	Tipo 1	Sesgo	Tipo 2
(Porcentajes)				
0-4	15	25	15	30
5-14	0	20	0	25
15-39	5	20	5	25
40-49	5	5	5	5
50 y +	2,5	5	2,5	5

suponiendo además que 1/3 de las defunciones de mujeres de edades 60-79 se hallan incluidas en el grupo de defunciones de 80 años y más. La población estable modelo a la que se aplicarán estos sesgos ha sido construida con una tasa de crecimiento de $r=24$ por mil y adoptando como nivel de la mortalidad femenina el Nivel 11 al modelo Oeste de Coale-Demeny.

a) Caso del sesgo tipo 1

Para este caso se tiene:

Edad	h^c_x	h^d_x	$-c'_y/d_y$	c_y/d_y	d_{y+}/c_{y+}	c_y/c_{y+}
0	34 657	299 404	-	-	-	-
1-4	115 567	154 348	-	-	-	-
5-9	145 368	38 859	62,84	3,74	675,34	34,66
10-14	125 804	26 183	160,39	4,80	773,70	39,53
15-19	103 373	30 407	121,89	3,40	888,89	39,23
20-24	88 740	33 443	82,75	2,65	1 011,27	41,32
25-29	75 699	31 776	77,10	2,38	1 156,03	43,58
30-34	64 242	30 806	69,72	2,08	1 333,47	46,28
35-39	54 221	28 990	64,60	1,87	1 559,90	49,62
40-44	45 514	31 934	50,94	1,43	1 836,96	54,00
45-49	37 954	30 221	44,66	1,26	2 195,00	59,56
50-54	32 016	33 068	37,15	0,97	2 688,51	69,60
55-59	25 669	35 156	34 93	0,73	3 353,43	81,08
60-64	19 736	26 960	42,45	0,73	4 473,39	97,10
65-69	14 225	27 748	37,63	0,51	6 528,64	119,81
70-74	9 294	27 731	-	-	-	-
75-79	5 196	23 414	-	-	-	-
80 y +	2 725	89 552	-	-	-	-
Total	1 000 000	1 000 000				

en que para la obtención de los valores de c_{y+} y d_{y+} se han usado las siguientes fórmulas:

$$c_{7,5+} = 0,2824 c_{5+} + 1,0704 c_{10+} - 0,5256 c_{15+} + \\ + 0,2104 c_{20+} - 0,0376 c_{25+} \quad (31)$$

$$c_y = c_{x+7,5} = -0,0376 c_{x+} + 0,4704 c_{(x+5)+} + 0,6944 c_{(x+10)+} - \\ - 0,1406 c_{(x+15)+} + 0,0224 c_{(x+20)+} \quad (32)$$

para $y = 12,5, 17,5, \dots$ Para las derivadas primeras se han usado las relaciones (27) y (28) y para los valores (c_y) y (d_y) la relación (26).

Aplicando el método de A. Wald para la estimación de los componentes de regresión para las diferentes formas se tiene:

Forma 3
(Bourgeois-Pichat)

$r = 24,3$ por mil

$d = 18,5$ por mil

Forma 6
(W. Brass)

$r = 24,3$ por mil

$d = 15,3$ por mil

pudiendo constatarse que las dos Formas -tanto la de Bourgeois-Pichat como la de Brass- conducen a la misma tasa de crecimiento ($r=24,3$ por mil). En cambio, puede verse que la Forma 3 nos lleva a una tasa bruta de mortalidad de 18,5 por mil muy vecina de 19 por mil que corresponde efectivamente a esta población. El método de Brass dándonos una tasa $d=15,3$ por mil en lugar de 19,0 por mil conduce a una discutible subestimación del nivel general de la mortalidad (20 por ciento).

b) *Caso del sesgo tipo 2*

Para este caso se tiene

Edad	h^c_x	h^d_x	Forma 3		Forma 6	
			$1000-c_y/d_y$	$1000c'_y/d_y$	$1000d_{y+}/c_{y+}$	$1000c_y/c_{y+}$
0	34 657	293 313				
1-4	115 567	150 691				
5-9	145 368	38 108	3,81	64,08	689,77	37,67
10-14	125 804	25 678	4,90	163,54	792,10	39,53
15-19	103 373	29 819	3,47	124,30	912,30	39,23
20-24	88 740	32 798	2,71	84,38	1 041,36	41,23
25-29	75 699	31 162	2,43	78,62	1 195,05	43,58
30-34	64 242	30 210	2,13	71,10	1 384,33	46,28
35-39	54 221	28 431	1,91	65,87	1 628,34	49,62
40-44	45 514	33 404	1,36	48,70	1 922,00	54,00
45-49	37 954	31 613	1,20	42,70	2 296,00	59,56
50-54	32 016	34 591	0,93	35,52	2 812,37	69,60
55-59	25 669	36 776	0,70	33,39	3 507,90	81,08
60-64	19 736	28 202	0,70	40,58	4 679,43	97,10
65-69	14 225	29 026	0,70	35,98	6 829,33	119,81
70-74	9 294	29 008				
75-79	5 196	24 493				
80 y +	2 725	93 667				
<i>Total</i>	<i>1 000 000</i>	<i>1 000 000</i>				

las que conducen a las siguientes estimaciones

Forma 3
(Bourgeois-Pichat)

$r = 24,8$ por mil

$d = 17,3$ por mil

Forma 5
(W. Brass)

$r = 26,6$ por mil

$d = 14,6$ por mil

pudiendo comprobarse que en esta nueva situación, los dos métodos conducen a sobre-estimaciones de la tasa de crecimiento, siendo menor la dada por el método de Bourgeois-Pichat.

En cuanto a la estimación de la tasa bruta de mortalidad puede constatarse que la aplicación de las dos formas conducen a sub-estimaciones relativas apreciables. El método de W. Brass en este caso subestima la mortalidad general en un 23 por ciento frente a un 9 por ciento de subestimación de la aplicación de la Forma 3.

Omo se verá a continuación ésta es aproximadamente la situación que se presenta cuando se aplican las Formas 3 y 6 al caso de México.

Aplicación de las Formas 2 y 6 al caso de México
(censos 1930, 1940 y 1950) y mortalidad 1950

En este ejemplo se pretende contrastar la bondad del uso de las *Formas 1 y 5* para determinar el nivel general de la mortalidad (d) y el valor de la tasa de crecimiento (r). Aunque el caso que se considera ha sido analizado por J. Bourgeois-Pichat^{6/} a través del uso de la *Forma 3*, en la aplicación numérica que se considera se recurrirá al uso de la *Forma 1* como procedimiento alternativo. Además se usará la *Forma 5* (método de W. Brass) para indicar que existen casos en que debido al desigual registro de la mortalidad por edades, la aplicación de esta Forma conduce a valores de los parámetros demográficos (d y r) significativamente distintos de los valores que probablemente tienen en ese momento.

^{6/} Naciones Unidas, *El Concepto de Población Estable*, ST/SOA/Serie A/39, cuadros IV.10 y IV.12.

La información sobre distribución relativa de la población y de la mortalidad, es la siguiente:

Grupos de edades	Años del censo				Defunciones femeninas (1950)
	1930	1940	1950	Ajustado	
0	29 772	26 278	30 830	35 796	256 964
1-4	117 442	115 992	119 929	125 921	221 823
5-9	133 338	139 361	138 465	135 521	40 466
10-14	95 335	116 107	115 558	117 193	17 141
15-19	105 799	103 136	105 875	103 624	22 245
20-24	99 863	81 141	94 320	90 714	27 877
25-29	91 695	84 317	79 433	77 745	28 168
30-34	68 903	68 743	56 082	65 707	23 396
35-39	62 710	70 407	61 097	55 950	31 107
40-44	50 661	48 971	47 634	46 621	26 139
45-49	38 067	39 699	41 235	40 358	28 861
50-54	34 326	31 818	32 359	31 672	27 922
55-59	19 261	22 054	20 411	24 027	24 320
60-64	23 457	21 571	22 106	18 633	38 411
65-69	10 175	11 583	12 967	12 691	35 025
70-74	8 866	8 446	9 735	9 528	38 391
75-79	4 014	4 500	5 049	4 942	29 329
80-84	3 831	3 363	3 941	2 603	31 524
85 y +	2 396	2 510	2 974	804	50 890
<i>Total</i>	<i>1 000 000</i>	<i>1 000 000</i>	<i>1 000 000</i>	<i>1 000 000</i>	<i>1 000 000</i>

Al aplicar la *Forma 2* se logran los siguientes valores:

y	$-c'_y$	c_y	d_y	$1000(c'_y/c_y)$	$1000(d_y/c_y)$
7,5	863,48	27 044	7 891	31,93	291,78
12,5	615,75	23 388	3 449	26,33	147,47
17,5	530,21	20 714	4 422	25,60	213,48
22,5	258,05	18 143	5 558	29,10	306,34
27,5	502,82	15 553	5 829	32,33	374,78
32,5	436,74	13 109	4 412	33,32	336,56
37,5	378,72	11 205	6 441	33,80	574,83
42,5	293,92	9 232	5 120	31,84	554,59
47,5	321,61	8 101	5 733	39,70	707,69
52,5	325,00	6 386	5 805	50,89	909,02
57,5	257,08	4 765	4 505	53,95	945,23
62,5	231,59	3 759	7 983	61,61	2 123,70
67,5	171,94	2 487	6 796	69,14	2 732,61

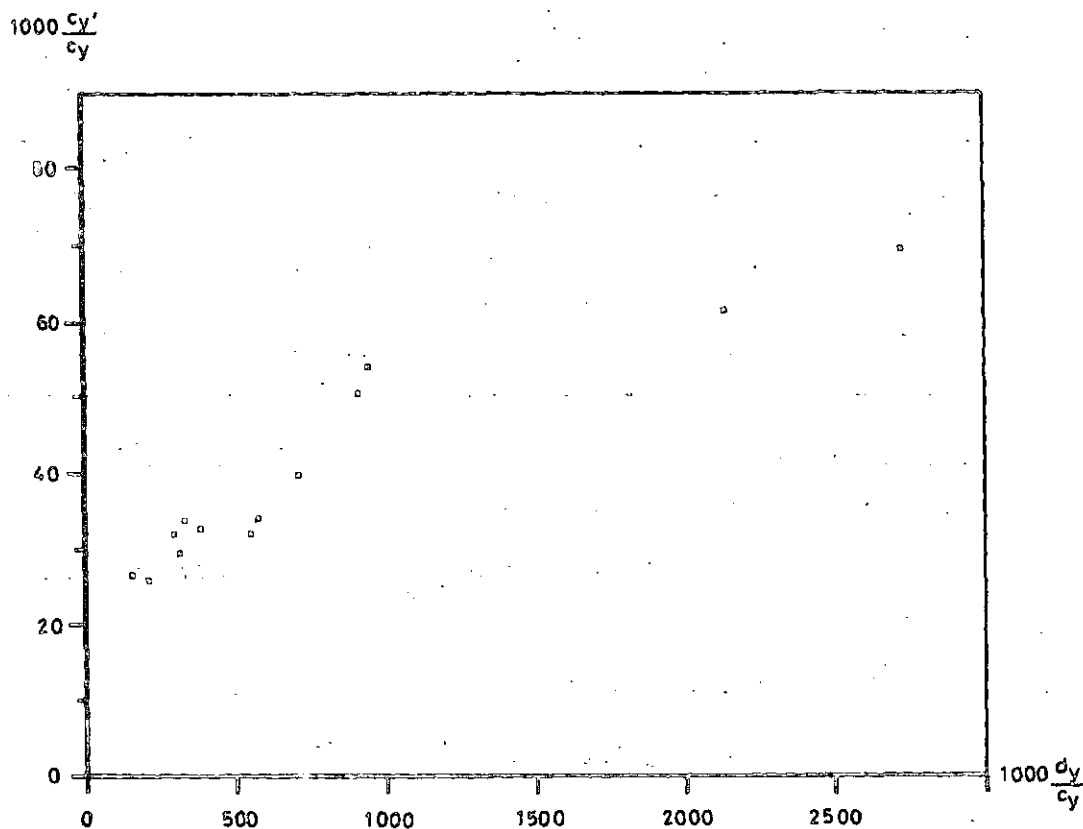
Usando como coordenadas los valores de las dos últimas columnas:

$$x_1 = 1000 \cdot d_y / c_y \quad (31)$$

$$x_2 = 1000 \cdot c'_y / c_y \quad (32)$$

se puede ver que estos puntos se alinean, aproximadamente, sobre una recta de pendiente $d=20,6$ por mil e intersección $r=23,7$ por mil (véase el gráfico 3), lo que nos da una tasa bruta de natalidad de 44,4 por mil ($r+d$).

GRAFICO 3



Estos valores pueden considerarse razonables para México en el período considerado y nos indica además que la estructura de la mortalidad (d_x) registrada en 1950 es compatible con la población de ese año.

El cálculo de los parámetros (d y r) de la línea de regresión puede calcularse usando el principio ordinario de mínimos cuadrados (OLS) o bien recurrir a un proceso más sencillo de estimación conocido como método de A. Wald

Pasemos a considerar ahora la aplicación de la Forma 6 o método de W. Brass. Los resultados son los siguientes:

y	c_{y+}	c_y	d_{y+}	$1000c_y/c_{y+}$	$1000d_y/c_{y+}$
7,5	767 883	27 044	495 426	35,22	645,18
12,5	642 344	23 388	471 708	36,41	734,35
17,5	532 814	20 714	435 259	38,88	850,69
22,5	435 013	18 143	427 772	41,71	983,35
27,5	350 829	15 553	398 738	44,33	1 136,56
32,5	279 360	13 109	374 358	46,93	1 340,06
37,5	218 628	11 205	346 075	51,25	1 582,94
42,5	167 758	9 232	317 863	55,03	1 894,77
47,5	124 104	8 101	290 328	65,28	2 339,39
52,5	88 057	6 386	261 124	72,52	2 965,40
57,5	60 495	4 765	237 148	78,77	3 920,17
62,5	39 130	3 759	204 465	96,06	5 225,27
67,5	23 770	2 487	168 076	104,63	7 070,93
72,5	12 566	1 937	130 067	154,15	10 350,71

en que se han usado las fórmulas (31) y (32) para la interpolación de valores de acumulación a mitad de los intervalos.

Para el cálculo de los valores ($c_y = (c_{x+2,5})$) se han usado la relación (26) al aplicar la Forma 3.

Tomando como coordenadas los valores de las variables

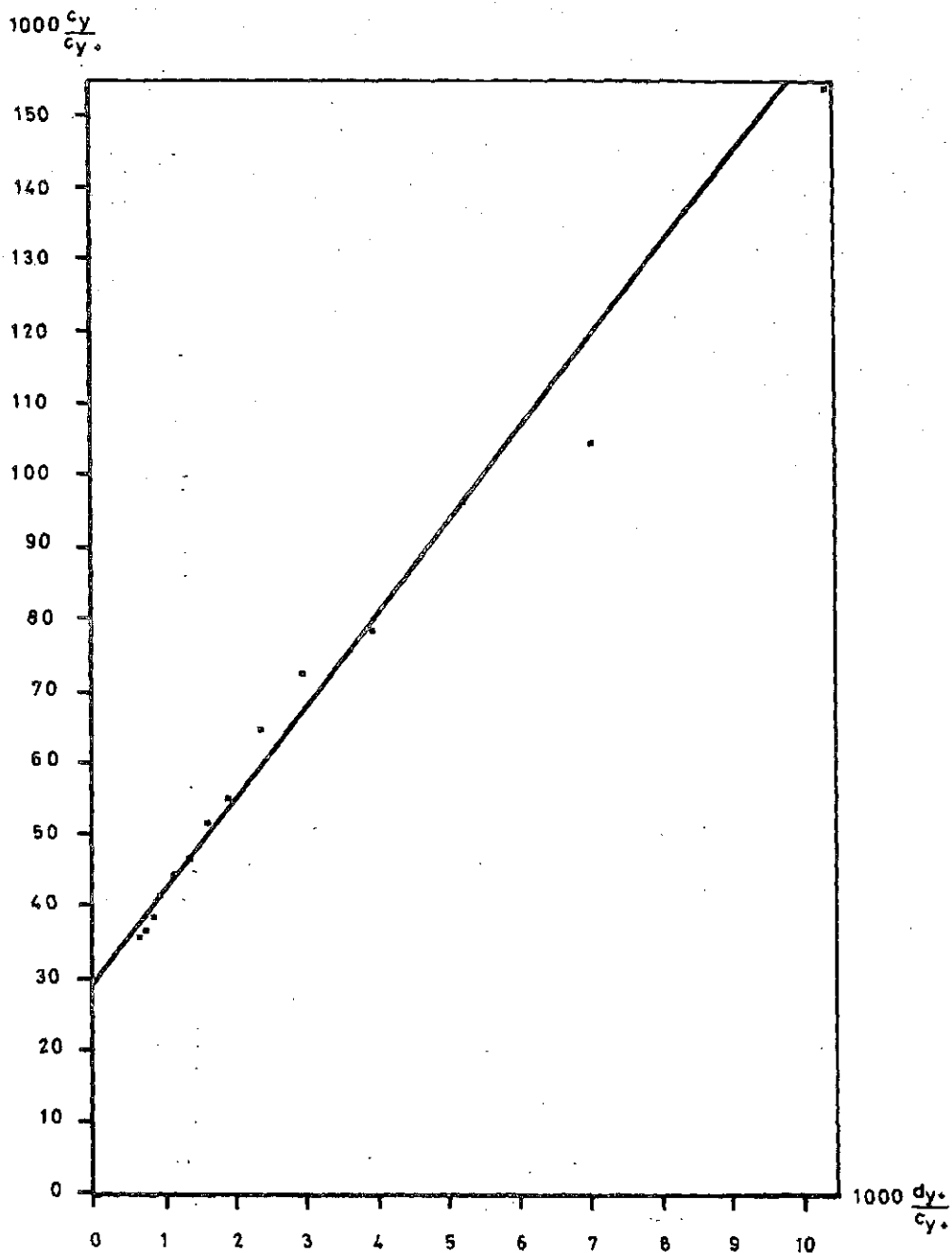
$$x_1 = 1000 d_{y+}/c_{y+} \quad x_2 = 1000 c_y/c_{y+}$$

se puede elaborar el gráfico 4.

Se puede notar que los puntos de coordenadas (x_1, x_2) se apartan sensiblemente de una línea recta. Descartando los 3 últimos puntos, o sea, si no se consideran las edades superiores a 60 años, la aplicación del método de A. Wald conduce a

$$r = 26,2 \text{ por mil} \quad d = 15,1 \text{ por mil}$$

GRAFICO 4



valores muy diferentes a los encontrados al aplicar la Forma 2 de $r=23,7$ por mil, $d=20,6$ por mil, que a juicio de J. Bourgeois-Pichat parece representar adecuadamente la tasa de crecimiento y el nivel general de la mortalidad femenina en México alrededor de 1950.

La razón fundamental porque la Forma 6 conduce a una estimación inadecuada de la tasa bruta de mortalidad es por la presencia de sesgos diferenciales en el registro de las defunciones. Ya se vio en el caso de una población estable modelo que si la distribución de la población como la de las muertes, según la edad, tiene sesgos de registro variables con la edad, ello afecta en forma importante la estimación de la tasa bruta de mortalidad. A través de los ejemplos numéricos se ha podido comprobar, que pese a esos sesgos, la aplicación de la Forma 3 (método de Bourgeois-Pichat) o la de la Forma 2 conducen a estimaciones más adecuadas que las que se obtienen si se aplica la Forma 6 (método de W. Brass).

En definitiva puede decirse que siempre será conveniente aplicar 2 Formas: 3 y 5 ó 2 y 5 para ver el grado de discrepancia de las estimaciones logradas y decidir a cuál de ellas se le puede dar mayor confiabilidad o usar un valor medio conjunto.

*Aplicación de las Formas 1 y 5 a regiones geográficas
chilenas para el año 1970*

Se ha podido ver que las relaciones de compatibilidad entre población y mortalidad presumen que la población es estrictamente estable. De esa manera cuando se aplican las Formas 1 a 6 de compatibilidad y éstas no se cumplen adecuadamente no solamente ello se debe a la calidad de la información usada (sesgos en los levantamientos censales y en el registro de los hechos vitales) sino a que no se cumple la presupuesta estabilidad (invariabilidad en el tiempo) de la natalidad y de la mortalidad.

Pese a estas circunstancias las relaciones aplicables a poblaciones estables pueden ensayarse en poblaciones en que están cambiando las condiciones de la natalidad y la mortalidad y la región está sujeta a movimientos migratorios. Se aplicarán las Formas 1 y 5 a las regiones geográficas chilenas observando en qué medida éstas se siguen cumpliendo y a qué medidas generales de crecimiento, natalidad y mortalidad conducen.

Como sería demasiado largo aplicar las Formas indicadas (1 y 5) a todas las regiones geográficas, se hará solamente a 3 regiones del país:

- Área metropolitana
- Región I: Tarapacá
- Región IX: Malleco y Cautín

considerando el sexo femenino únicamente.

a) *Aplicación al área metropolitana (año 1970)*

La información que se usará es la siguiente^{7/}

Edad	$\frac{N}{s} x$	$\frac{D}{s} x$	Edad	$\frac{N}{s} x$	$\frac{D}{s} x$
0-4	191 636	2 402	45-49	69 811	394
5-9	206 913	120	50-54	61 868	541
10-14	185 591	84	55-59	53 200	672
15-19	167 113	140	60-64	43 422	878
20-24	159 303	175	65-69	33 355	1 055
25-29	128 991	184	70-74	23 471	1 130
30-34	104 169	226	75-79	13 967	1 104
35-39	103 365	279	80-84	8 449	948
40-44	89 994	360	85 y +	6 514	
			<i>Total</i>	<i>1 651 132</i>	<i>11 734</i>

Usando la *Forma 1* para la información dada, se tiene

y	$-1000 \frac{N'_y}{N_y}$	$1000 \frac{D_y}{N_y}$
17,5	157,31	8,38
22,5	239,30	10,99
27,5	427,43	14,26
32,5	246,00	21,70
37,5	137,14	26,99
42,5	372,85	40,00
47,5	402,89	56,44
52,5	268,49	87,44
57,5	346,73	126,32
62,5	457,03	202,20
67,5	598,14	316,29
72,5	826,04	481,45
77,5	1 075,54	790,43

^{7/} Pujol, J.M., *Chile: Tablas Abreviadas de Mortalidad a Nivel Nacional y Regional 1969-1970*, CELADE, Serie A, N° 141, pág. 26-27.

que luego de aplicar el método de A. Wald nos da

$$-N'_y/N_y = 0,025 + 1,0585 D_y/N_y$$

indicándonos que la población femenina del Area Metropolitana estaría creciendo a una tasa anual de 25 por mil. El valor del coeficiente β de regresión (1,0585) nos indicaría -bajo la hipótesis que no hay subenumeración censal- que la tasa "verdadera" de mortalidad sería:

$$\begin{aligned} d^p &= 1,0585 (11734/1651132) \\ &= 1,0585 (7,11) = 7,53 \text{ por mil} \end{aligned}$$

La aplicación de la *Forma 5* se hará previo suavizamiento de los grupos quinquenales de edades 10 en adelante y ajuste del grupo 0-4 por subenumeración.

Usando una función logística de 2 asíntotas a la acumulación de (T_x) grupos quinquenales es posible estimar una probable subenumeración del grupo 0-4 y proceder a la redistribución de los grupos quinquenales. La estructura de población corregida N^c_x es la siguiente:

Edad	N_x	Edad	N_x
0-4	220 658	45-49	74 774
5-9	207 781	50-54	61 552
10-14	180 138	55-59	53 530
15-19	172 557	60-64	43 221
20-24	155 777	65-69	33 552
25-29	132 518	70-74	22 894
30-34	111 628	75-79	14 543
35-39	95 911	80-84	9 298
40-44	85 024	85 y +	5 665
		<i>Total</i>	<i>1 681 021</i>

que implica una corrección general por subenumeración censal del 1,8 por ciento.

Aplicando la *Forma 5* se llega a los siguientes valores

x	N_x	N_{x+}	D_{x+}	$1000N_x/N_{x+}$	$1000D_{x+}/N_{x+}$
10	38 679	1 252 582	9 212	30,88	7,35
15	35 098	1 072 444	9 128	32,73	8,51
20	33 091	899 887	8 988	36,77	9,98
25	28 891	744 110	8 813	38,83	11,84
30	24 286	611 592	8 629	39,71	14,11
35	20 585	499 964	8 403	41,17	16,81
40	18 010	404 053	8 124	44,57	20,11
45	16 020	319 029	7 764	50,21	24,34
50	13 588	244 255	7 270	55,63	29,76
55	11 462	182 703	6 829	62,74	37,38
60	9 699	129 173	6 157	75,09	47,86
65	7 683	85 952	5 279	89,39	61,12
70	5 620	52 400	4 224	107,25	80,61
75	3 652	29 506	3 094	123,77	104,96

que luego de aplicar el método de A. Wald nos da

$$N_x/N_{x+} = 0,025 + 1,0071 D_{x+}/N_{x+}$$

lo que nos indica que el crecimiento de la población femenina es del orden de $r=25$ por mil y que esta estructura "ajustada" es totalmente compatible con el registro de la mortalidad.

Se puede ver que la aplicación de las Formas 1 y 5 conducen al mismo resultado en cuanto a la tasa de crecimiento y puede probarse que éste se corresponde bien al crecimiento observado en el período intercensal 1960-1970.

La Forma 1 no obstante (datos sin corregir) conduce a la conclusión que no serían compatibles las distribuciones de población y de las defunciones por presentar sesgos diferentes. Al aplicar la Forma 5 en que se ha corregido la estructura por subenumeración de menores de un año, esencialmente se logra una total compatibilidad entre los dos tipos de información.

Es interesante indicar que la Forma 1 se ha aplicado a la estructura censal corregida pero los resultados obtenidos son "prácticamente" análogos a los obtenidos sin usar la corrección por subenumeración censal. El problema que tiene la aplicación de la Forma 1 está en la determinación

del cambio relativo de la población ($-N'_x/N_x$) cuando la distribución de la población por edades, aunque es descendente, no es regular. El suavizamiento usando la función logística de 2 asíntotas no logra llegar a adecuados valores de las primeras derivadas de (N_x).

Como corolario, se puede decir que en este caso el uso de la Forma 5 (método de W. Brass) conduce a un resultado satisfactorio.

b) *Aplicación a la región I*

La información usada es la siguiente:

REGION I: DISTRIBUCION DE LA POBLACION Y DE LAS DEFUNCIONES DE MUJERES EN EL AÑO 1970, SEGUN EDAD

Grupos de edades	N_{5x}	D_{5x}	Grupos de edades	N_{5x}	D_{5x}
0-4	10 654	168	45-49	3 324	23
5-9	11 622	7	50-54	2 723	19
10-14	9 896	4	55-59	2 202	32
15-19	8 739	10	60-64	1 870	40
20-24	7 930	17	65-69	1 496	38
25-29	6 773	11	70-74	962	51
30-34	5 456	14	75-79	643	56
35-39	5 231	12	80-84	379	45
40-44	4 756	14	85 y +	290	39
			<i>Total</i>	<i>85 046</i>	<i>600</i>

La aplicación de la Forma 1 nos lleva a los valores

y	$+1000D_y/N_y$	$-1000N'_y/N_y$	y	$1000D_y/N_y$	$-1000N'_y/N_y$
7,5	0,602	6,522	47,5	6,919	61,61
12,5	0,404	29,133	52,5	6,978	41,205
17,5	1,144	22,497	57,5	14,532	34,196
22,5	2,144	24,792	62,5	20,305	35,838
27,5	1,624	36,527	67,5	25,401	67,380
32,5	2,566	28,262	72,5	53,015	88,669
37,5	2,294	13 382	77,5	87,092	90,669
42,5	2,944	40,097	82,5	118,734	93,140

que luego de aplicar el método de A. Wald, para la estimación de los coeficientes de regresión, se llega a

$$-N'_y/N_y = 0,0235 + 0,9743 D_y/N_y$$

que desde el punto de vista del grado de comparabilidad de los sesgos de registro (0,9743) estaría bien pero que desde el punto de vista de la estimación del crecimiento ($r=23,5$ por mil) está mal, ya que el crecimiento "real" es del orden de 36 por mil.

La aplicación de la *Forma 5* nos lleva a los siguientes valores:

x	N_x	N_{x+}	D_{x+}	$1000N_x/N_{x+}$	$1000D_x/D_{x+}$
5	2227,6	74 392	432	29,94	5,81
10	2151,8	62 770	425	34,28	6,77
15	1863,5	52 874	421	35,24	7,96
20	1666,9	44 135	411	37,77	9,31
25	1470,3	36 205	394	40,61	10,88
30	1222,9	29 432	383	41,55	13,01
35	1068,7	23 976	369	44,57	15,39
40	998,7	18 745	357	53,28	19,05
45	808,0	13 989	343	57,76	24,52
50	604,7	10 665	320	56,70	30,00
55	492,5	7 942	301	62,01	37,90
60	417,2	5 740	269	72,68	46,86
65	346,6	3 770	229	91,94	60,74
70	245,8	2 274	191	108,09	83,99
75	160,5	1 312	140	122,33	106,71
80	102,2	669	84	152,77	125,56

y a la siguiente ecuación de regresión lineal

$$N_x/N_{x+} = 0,0294 + 0,9453 D_{x+}/N_{x+}$$

Si la población es estrictamente estable y la enumeración censal fue ra completa como asimismo el registro de las defunciones, se tendría

$$N_x^v / N_{x+}^v = \alpha + D_{x+}^v / N_{x+}^v \quad (35)$$

siendo

N_x^v = el valor "verdadero" de (N_x)

D_x^v = valor "verdadero" de (D_x)

Aceptando que los valores "observados" N_x^o y D_x^o tienen subregistros relativos de " e_1 " y de " e_2 " respectivamente tendremos

$$N_x^v = (1+e_1) N_x^o \quad (36)$$

$$D_x^v = (1+e_2) D_x^o \quad (37)$$

y la relación (35) pasa a

$$N_x^0 / N_{x+}^0 = x + \left(\frac{1+e_2}{1+e_1} \right) \frac{D_{x+}^0}{N_{x+}^0} \quad (38)$$

lo que permite identificar el coeficiente de regresión (β) con los errores relativos de la información de población y de defunciones. De ese modo el coeficiente de regresión (β) es igual a

$$\beta = (1+e_2) / (1+e_1) \quad (39)$$

Si el subregistro general de la mortalidad en la región I hubiese sido de 2,5 por ciento, la regresión encontrada (luego de aplicar la *Forma 5*) nos daría

$$1+e_1 = 1,025/0,9453 = 1,0843$$

indicándonos una subenumeración censal de 8,4 por ciento, que puede considerarse elevada.

Aun suponiendo que el registro de la mortalidad fuese "completo" o sea que $e_2 = 0$ se tendría $1+e_1 = 1,058$ o sea que el Censo tendría una subenumeración de 5,8 por ciento. Esta cifra puede considerarse más probable aunque todavía -por la larga experiencia censal chilena- una cifra alta. La conclusión final a que puede llegarse es que el registro de la mortalidad es completo y que el Censo tiene una subenumeración del orden de 2,6 por ciento (resultado con la *Forma 2*).

Además la aplicación de las Formas 1 y 5, en este caso, indica que esta Forma da un resultado más adecuado (Método de W. Brass) para la tasa de crecimiento (29,4 por mil) ya que el crecimiento observado -sin corregir los totales censales de 1960 y 1970- es del orden de 36 por mil.

c) *Aplicación a la región IX (Malleco-Cautín)*

La información usada es la siguiente:

Grupos de edades	$\frac{N}{5x}$	$\frac{D}{5x}$	Grupos de edades	$\frac{N}{5x}$	$\frac{D}{5x}$
0-4	40 843	1 118	45-49	12 324	93
5-9	43 627	53	50-54	11 053	112
10-14	39 072	39	55-59	9 620	143
15-19	31 819	59	60-64	7 803	160
20-24	23 618	70	65-69	6 323	210
25-29	18 381	66	70-74	4 063	206
30-34	15 659	79	75-79	2 397	198
35-39	16 730	78	80-84	1 639	166
40-44	14 245	80	85 y +	1 346	214
			<i>Total</i>	<i>300 562</i>	<i>3 144</i>

Aplicando la Forma 1 se tienen los siguientes valores

y	$1000\frac{D}{y} \frac{N}{y}$	$-1000\frac{N'}{y} \frac{N}{y}$	y	$1000\frac{D'}{y} \frac{N}{y}$	$-1000\frac{N'}{y} \frac{N}{y}$
22,5	2,964	56,897	52,5	10,13	24,464
27,5	5,045	10,543	62,5	20,51	42,253
32,5	5,045	10,543	62,5	20,51	42,253
37,5	4,662	8,452	67,5	33,21	59,149
42,5	5,616	30,930	72,5	50,70	96,628
47,5	7,546	25,901	77,5	82,60	101,126

y usando el método de Wald para la estimación de los parámetros de la regresión lineal entre $(-\frac{N'}{N_y})$ y $(\frac{D}{N_y})$ se llega a

$$-\frac{N'}{N_y} = 24,47 + 0,9934 \left(\frac{D}{N_y} \right)$$

lo que nos indica que el subregistro de la mortalidad y la subenumeración censal son del mismo orden. La tasa de crecimiento que se encuentra siendo de 24,47 por mil correspondería a la situación que la población fuese cerrada. La tasa de crecimiento intercensal entre 1960 y 1970 para la región es del orden del 6 por mil, lo que nos indica que esta región es de una gran salida de personas a otras regiones del país.

En la aplicación de la Forma 5 (método de Brass) encontramos

x	$\frac{D'}{x+} \frac{N}{x+}$	$\frac{N'}{x} \frac{N}{x+}$	x	$\frac{D'}{x} \frac{N}{x+}$	$\frac{N'}{x} \frac{N}{x+}$
20	12,91	32,53	50	31,85	49,96
25	14,85	30,24	55	39,08	59,97
30	16,85	30,35	60	48,96	66,21
35	18,96	38,22	65	63,04	80,20
40	22,34	40,23	70	83,01	86,03
45	26,55	43,57	75	107,40	89,07

que luego de aplicar el método de Wald nos da la ecuación de regresión

$$\frac{N_x}{N_{x+}} = 20,46 + 0,8215 \frac{D_x}{N_{x+}}$$

lo que conduce -bajo la hipótesis que el registro de la mortalidad es completo- a una cifra muy alta de subenumeración censal (18 por ciento).

Se puede ver entonces que la Forma 1 conduce a un resultado muy adecuado -tanto los datos de mortalidad como los de población tienen errores relativos semejantes-, en cambio la Forma 5 de Brass nos lleva a un resultado impropio. Se puede argumentar que en aplicaciones a poblaciones abiertas o bien poblaciones cerradas no estables no deben aplicarse ninguna de estas formas. Sin embargo, siempre será útil saber si las tasas centrales de mortalidad deducidas suponiendo que tanto el numerador como el denominador de estas tasas tienen errores relativos semejantes son aceptables en primera instancia. La Forma 1 da una respuesta favorable en ese sentido con lo cual se puede argumentar que sería un procedimiento más robusto que el de la Forma 5.

Aplicación de Las Formas 1 y 5 a datos históricos

Como dato histórico, consideraremos todo tipo de información estadística sobre distribución de la población y de hechos vitales referente a un tiempo pretérito en que no existía aún un registro rutinario de información demográfica.

Así por ejemplo, en el CELADE se ha tratado de determinar los niveles de mortalidad y de crecimiento de la población chilena, de hace más de un siglo atrás, para ciertas áreas geográficas o grupos especiales de población. En el caso que se analiza luego, se considera la información sobre población y mortalidad registrada en San Felipe alrededor del año 1785.^{8/}

^{8/} Arretx, C., Mellafe, R., Somoza, J., *Estimación de la Mortalidad Adulta a partir de Información sobre la Estructura por Edades de las Muertes. Aplicación a Datos de San Felipe en Torno a 1787*, CELADE, Serie A, N° 150, Santiago de Chile, febrero 1977.

En el caso de datos históricos se puede constatar que los hechos vitales registrados en el área (ciudad, por ejemplo) no se correspondan a la población que "habitualmente" reside en ella. En el caso de registro de las defunciones puede suceder que la ciudad tenga hospitales en los cuales fallecen personas no residentes (habituales) de la ciudad, lo que contribuye a abultar el registro de hechos vitales y originándose de ese modo tasas de mortalidad, específicas por edad, que no corresponden a la población residente.

Si se supone que

e_1 = subenumeración relativa del Censo de Población

e_2 = subregistro relativo de las defunciones para residentes

e_3 = sobre-registro relativo de defunciones debido a no residentes.

Al aplicar la Forma 1, debido a estos errores, debemos escribir la relación

$$-N_x^o/N_x^o = r + (1+e_2 - e_3) / (1+e_1) D_x^o/N_x^o \quad (41)$$

en que los valores (N_x^o) y (D_x^o) son valores "observados".

Los datos tomados del trabajo de Arretx, Mellafe y Somoza, son los siguientes:

Grupos de edades	Muertes registradas 1783-1787	Promedio anual	Población censada 1787
0-9	54	10,8	539
10-19	32	6,4	363
20-29	70	14,0	277
30-39	36	7,2	260
40-49	35	7,0	184
50-59	49	9,8	124
60 y +	86	17,2	71
<i>Total</i>	<i>362</i>	<i>72,4</i>	<i>1 818</i>

luego de desglosar los grupos decenales en quinquenales se tiene

Edad	$\frac{N}{5} x$	$\frac{D}{5} x$	Edad	$\frac{N}{5} x$	$\frac{D}{5} x$
0-4	298,2	17,7	45-49	84,2	3,8
5-9	240,8	3,1	50-54	71,6	4,3
10-14	197,4	2,4	55-59	52,4	5,0
15-19	165,6	4,0	60-64	31,5	4,9
20-24	142,0	7,4	65-69	19,2	4,4
25-29	135,0	6,6	70-74	11,9	3,6
30-34	137,6	4,0	75-79	5,8	2,6
35-39	122,4	3,2	80 y +	2,6	1,7
40-44	99,8	3,2	<i>Edad</i>	1 818,0	72,4

Para la aplicación de las Formas 1 y 5 se debe tener

x	$\frac{D}{x+} / \frac{N}{x+}$	$\frac{N}{x} / \frac{N}{x+}$	y	$\frac{D}{y} / \frac{N}{y}$	$\frac{N'}{y} / \frac{N}{y}$
10	33,42	51,45	12,5	38,10	12,16
15	33,26	57,87	17,5	33,45	24,15
20	33,56	61,19	22,5	21,65	52,11
25	37,92	62,54	27,5	3,26	48,89
30	48,66	68,52	32,5	9,16	29,07
35	56,22	81,35	37,5	30,88	26,14
40	69,87	99,11	42,5	38,28	32,06
45	71,37	123,09	47,5	33,49	45,13
50	91,60	157,12	52,5	44,41	67,04
55	110,99	208,25	57,5	76,53	95,42
60	116,32	275,80	62,5	105,40	155,56

Puesto que la alineación de puntos ($\frac{D}{x+} / \frac{N}{x+}$; $\frac{N}{x} / \frac{N}{x+}$) o bien ($\frac{D}{y} / \frac{N}{y}$; $\frac{N'}{y} / \frac{N}{y}$) no es suficiente para aplicar el método de Wald en la determinación de los coeficientes de regresión, se usará el principio de mínimos cuadrados, que no depende de la jerarquización de las abscisas.

Usando el intervalo 10-55, la aplicación de la Forma 6 conduce a

$$\frac{N}{x} / \frac{N}{x+} = 7,98 + 0,513 \frac{D}{x+} / \frac{N}{x+}$$

lo que indicaría que, si se supone $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, o sea que el Censo de Población hubiera sido completo al igual que el registro de defunciones residentes

$$1 - e_3 = 0,513$$

estaría indicando que el registro de las defunciones de San Felipe, alrededor del año 1785 contiene un 48,7 por ciento de defunciones de no-residentes.

Usando el intervalo 10-54 en la aplicación de la Forma 1, o sea los valores desde $y=12,5$ hasta $57,5$ se obtiene

$$-N'_y/N_y = 8,30 + 0,584 D_y/N_y$$

dando un registro de defunciones para no residentes de 41,6 por ciento un poco inferior al obtenido por aplicación del método de Brass.

Se debe hacer notar que el uso de estas relaciones de las poblaciones estables deben considerarse simplemente como guías para proceder al ajuste de datos demográficos que no son compatibles. El resultado que aquí se ha logrado, significa en términos gruesos que las defunciones registradas corresponden a una población de tamaño doble que no resuelve el problema de cómo ajustar la distribución de las defunciones por edad. Como una primera aproximación se puede reducir todas las defunciones en 41,6 por ciento (resultado obtenido con la aplicación de la Forma 1). Comparar las tasas centrales de mortalidad con tasas de población reales para proceder a un segundo ajuste diferencial por edad, si es posible.

Conclusiones y recomendaciones

A través de las aplicaciones numéricas realizadas pudo verse que, en general, las formas 1 a 6 de compatibilidad entre población y mortalidad condujeron en la mayoría de las aplicaciones a resultados relativamente semejantes.

Que en la medida en que la información de distribución de la población por edad es irregular (inadecuada información censal o población abierta) la determinación de la variación relativa de la estructura (N'_y/N_y) se hace difícil, y los valores determinados no guardan una adecuada correlación con los valores (D_y/N_y).

Por otra parte, ciertos tipos de tendencias en la variación de los sesgos de registro de la edad para las muertes influyen poderosamente en los resultados al aplicar la Forma 5 (método de Brass). Esto pudo verse muy claramente cuando se "desajustó" una población estable modelo y se

aplicaron las Formas 3 y 6. Se pudo constatar que la Forma 3 resistió bien los sesgos impuestos y que en cambio la Forma 6 condujo a resultados muy inadecuados para el nivel general de la mortalidad.

Los ensayos realizados conducen a recomendar la conveniencia del uso de dos relaciones, de distinta estructura, simultáneamente. Si conducen al mismo resultado no existe problema en qué valores tomar para (r) y (d) . Si los 2 métodos usados conducen a valores (r) y (d) muy diferentes, el analista podrá descartar ambos resultados o adoptar el resultado que a su juicio le parezca más razonable.

Otra conclusión que se logra de estos ensayos es que si el coeficiente (β) al aplicar las Formas 1 y 5 no difiere significativamente de 1 por ejemplo si varía entre 0,95 y 1,05, las tasas de mortalidad (D_x/N_x) estarán bien o, lo que es lo mismo, no se debe hacer ajustes a la mortalidad. Sin embargo, es conveniente comparar las tasas encontradas con las de otras poblaciones reales, ya que ese 5 por ciento puede deberse, esencialmente, a que sea impropia la tasa para la población menor (menores de 1 año, 1-4 años).

A N E X O

En el presente anexo se indican los diversos procedimientos numéricos seguidos para encontrar las diversas relaciones usadas en el cálculo de ordenadas y derivadas de las funciones $N(x)$ y $D(x)$ para las aplicaciones de las formas 1 a 6.

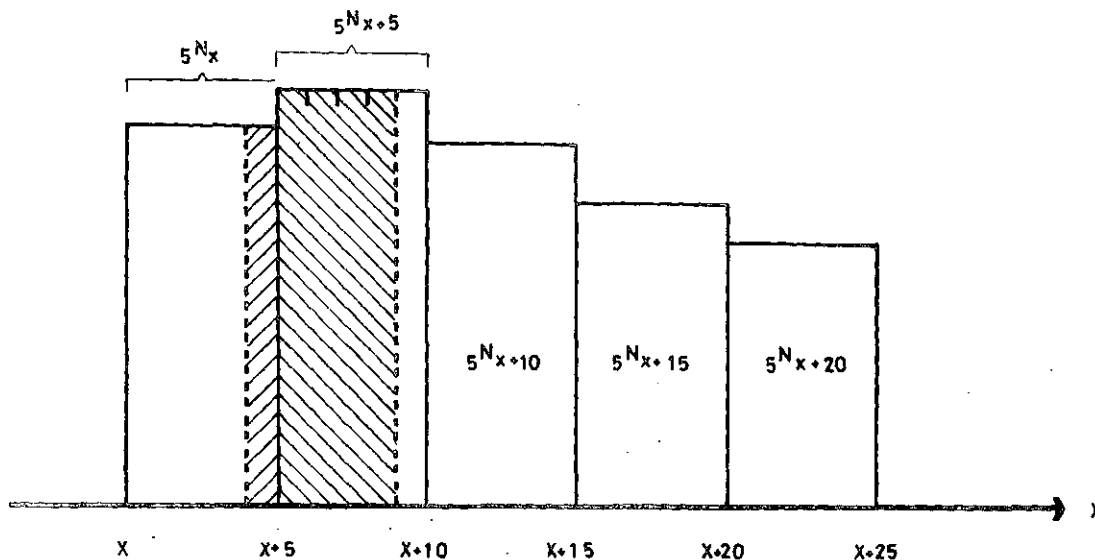
Cálculo de $N(x)$ usando grupos quinquenales de edades

Disponiendo de los grupos quinquenales

$$y_1 = {}_5N_x \quad y_2 = {}_5N_{x+5} \quad y_3 = {}_5N_{x+10} \quad y_4 = {}_5N_{x+15} \quad y_5 = {}_5N_{x+20}$$

tal como se indica en el gráfico siguiente:

GRAFICO 1



es posible aislar del grupo ${}_5N_x$ el grupo ${}_5N_{x+4}$ de edades $(x+4)$ y los 4 primeros grupos individuales de $({}_5N_{x+5})$, usando la matriz de multiplicadores de Greville que se indica:

$$\begin{pmatrix} N_{x+4} \\ N_{x+5} \\ N_{x+6} \\ N_{x+7} \\ N_{x+8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0851 & 0,1380 & 0,0034 & -0,0412 & 0,0147 \\ 0,0420 & 0,1936 & -0,0248 & -0,0192 & 0,0084 \\ 0,0094 & 0,2264 & -0,0396 & 0,0024 & 0,0014 \\ -0,0114 & 0,2296 & -0,0284 & 0,0136 & -0,0034 \\ -0,0205 & 0,2020 & 0,0130 & 0,0100 & -0,0045 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Puede reducirse la dimensión de esta matriz aceptando que en forma aproximada $\Delta^3 y_2 = 0$ con lo que se llega a la matriz de Grabill siguiente:

$$\begin{pmatrix} N_{x+4} \\ N_{x+5} \\ N_{x+6} \\ N_{x+7} \\ N_{x+8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0851 & 0,1527 & -0,0407 & 0,0029 \\ 0,0420 & 0,2020 & -0,0500 & 0,0060 \\ 0,0094 & 0,2278 & -0,0438 & 0,0066 \\ -0,0114 & 0,2262 & -0,0182 & 0,0034 \\ -0,0205 & 0,1975 & 0,0265 & -0,0035 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Apoyándose en estos 5 grupos de edades individuales (N_{x+4}, \dots, N_{x+8}) es posible proceder a la participación en quintos de ellos, de modo que es posible encontrar franjas de ancho 0,2 para los grupos N_{x+4} y N_{x+5} . (Véase el gráfico 2). A ambos lados de ($x+5$) y a una distancia de 0,2 se tiene

$$\begin{aligned} 5(0,0851 N_{x+4} + 0,1527 N_{x+5} - 0,0407 N_{x+6} + 0,0029 N_{x+7}) = \\ = 0,0662 y_1 + 0,1761 y_2 - 0,0468 y_3 + 0,0045 y_4 \end{aligned}$$

para la franja anterior (amplificada en 5) y

$$\begin{aligned} 5(0,0420 N_{x+4} + 0,2020 N_{x+5} - 0,0500 N_{x+6} + 0,0060 N_{x+7}) = \\ = 0,0576 y_1 + 0,1859 y_2 - 0,0486 y_3 + 0,0051 y_4 \end{aligned}$$

para la franja posterior (amplificada en (5)).

Dada la vecindad a que se encuentran estas franjas es posible tomar un promedio de estos dos valores como estimación para (N_{x+5}), con lo cual se llega a

$$N_{x+5} = 0,0619 y_1 + 0,1810 y_2 - 0,0477 y_3 + 0,0048 y_4 \quad (\text{A.3})$$

Cálculo de $N_{x+2,5}$ usando grupos quinquenales

Usando para ($N_{x+2,5}$) el valor central de la descomposición del grupo quinquenal (N_x) podemos aplicar los multiplicadores de Grabill o de Greville

a) usando multiplicadores de Grabill, para tramo semi-externo

$$N_{x+2,5} = -0,0080 N_{x-5} + 0,2160 N_x - 0,0080 N_{x+5} \quad (A.4)$$

b) usando multiplicadores de Greville, para tramo semi-externo

$$N_{x+2,5} = -0,0114 N_{x-5} + 0,2296 N_x - 0,0284 N_{x+5} + \\ + 0,0136 N_{x+10} - 0,0034 N_{x+15} \quad (A.5)$$

Cálculo de $N'_{x+7,5}$ usando los grupos quinquenales, desde N_x hasta N_{x+15}

Disponiendo de los grupos quinquenales

$$Q_1 = N_x \quad Q_2 = N_{x+5} \quad Q_3 = N_{x+10} \quad Q_4 = N_{x+15}$$

es posible descomponer el grupo quinquenal (Q_2) en sus (5) componentes de edad detallada usando los multiplicadores semi-extremos de Grabill, de modo que

$$\begin{pmatrix} N_{x+5} \\ N_{x+6} \\ N_{x+7} \\ N_{x+8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0336 & 0,2272 & -0,0752 & 0,0144 \\ 0,0080 & 0,2320 & -0,0480 & 0,0080 \\ -0,0080 & 0,2160 & -0,0080 & 0,0000 \\ -0,0160 & 0,1840 & 0,0400 & -0,0080 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

Usando los valores (N_{x+i}) como valores pivotaes de una parábola de cuarto grado es posible encontrar el valor de la derivada al centro del intervalo ($x+5, x+9$).

Para una parábola de cuarto grado apoyada en los pivotes

$$(y_{-2} \ y_{-1} \ y_0 \ y_1 \ y_2)$$

el valor de la derivada frente a y_0 es igual a

$$y'_0 = (y_{-2} - 8 y_{-1} + 8 y_1 - y_2) / 12 \quad (A.7)$$

de modo que se tiene

$$N'_{x+7,5} = -0,0117 N_{5x} - 0,0248 N_{5x+5} + 0,0448 N_{5x+10} - 0,0083 N_{5x+15} \quad (\text{A.8})$$

Usando los multiplicadores de Greville, se llega a

$$\begin{aligned} N'_{x+7,5} = & -0,0148 N_{5x} - 0,0126 N_{5x+5} + 0,0264 N_{5x+10} + \\ & + 0,0041 N_{5x+15} - 0,0031 N_{5x+20} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

y adoptando la hipótesis que $(\Delta^4 N_x) = 0$ se cae en la relación deducida con los multiplicadores de Grabill.

Cálculo de $N_{x+2,5}$ usando los grupos quinquenales desde N_x hasta N_{x+15}

Para descomponer el grupo quinquenal extremo (N_x) usamos los multiplicadores para tramo extremo de Grabill, con el resultado

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ N_{x+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3616 & -0,2768 & 0,1488 & -0,0336 \\ 0,2640 & -0,0960 & 0,0400 & -0,0080 \\ 0,1840 & 0,0400 & -0,0320 & 0,0080 \\ 0,1200 & 0,1360 & -0,0720 & 0,0160 \\ 0,0704 & 0,1968 & -0,0848 & 0,0176 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

y el valor de la derivada de $N_{x+2,5}$ usando los multiplicadores de la cuarta indicada anteriormente, nos da

$$N'_{x+2,5} = -0,0717 N_{5x} + 0,1152 N_{5x+5} - 0,0552 N_{5x+10} + 0,0117 N_{5x+15} \quad (\text{A.11})$$

Si se usan los multiplicadores de Greville necesitando para ello el grupo quinquenal (N_{x+20}) .

Si en esta relación suponemos que $(\Delta^4 N_x) = 0$ caemos en la relación anterior, deducida directamente usando los multiplicadores de Grabill.

Cálculo de $T_{x+2,5}$ conociendo acumulaciones T_x

Casos: Intervalo semi-externo

Conociendo las acumulaciones

$$y_{-1} = T_{x-5} \quad y_0 = T_x \quad y_1 = T_{x+5} \quad y_2 = T_{x+10} \quad y_3 = T_{x+15}$$

se pueden determinar las acumulaciones

$$y_{0,2} = T_{x+1}; \quad y_{0,4} = T_{x+2}; \quad y_{0,6} = T_{x+3}; \quad y_{0,8} = T_{x+4}$$

Mediante el uso de una parábola de quinto grado apoyada en los pivotes

$$y_0; \quad y_{0,2}; \quad y_{0,4}; \quad y_{0,6}; \quad y_{0,8}; \quad y_{1,0}$$

se puede determinar el valor de $(y_{0,5})$ que corresponde a $T_{x+2,5}$.

Los valores de interpolación en el intervalo (0,1) están dados por la siguiente matriz de Grabill de multiplicadores semi-extremos:

$$\begin{pmatrix} y_{0,2} \\ y_{0,4} \\ y_{0,6} \\ y_{0,8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0336 & 0,8064 & 0,3024 & -0,0896 & 0,0144 \\ -0,0416 & 0,5824 & 0,5824 & -0,1456 & 0,0224 \\ -0,0336 & 0,3584 & 0,8064 & -0,1536 & 0,0224 \\ -0,0176 & 0,1584 & 0,9504 & -0,1056 & 0,0144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

El valor para $(y_{0,5})$ está dado por

$$\begin{aligned} y_{0,5} = & 0,011719 y_0 - 0,097656 y_{0,2} + 0,585938 y_{0,4} + \\ & + 0,585938 y_{0,6} - 0,097656 y_{0,8} + 0,011719 y_1 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

lo que conduce a:

$$\begin{aligned} T_{x+2,5} = & - 0,0391 T_{x-5} + 0,4688 T_x + 0,7031 T_{x+5} - \\ & - 0,1562 T_{x+10} + 0,0234 T_{x+15} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

que no difiere mucho de la obtenida por interpolación lineal entre $(y_{0,4})$ e $(y_{0,6})$

$$\begin{aligned} T_{x+2,5} = & 0,0376 T_{x-5} + 0,4704 T_x + 0,6944 T_{x+5} - 0,1406 T_{x+10} \\ & + 0,0224 T_{x+15} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

que es la que ha sido usado en las aplicaciones.

Caso 2. Intervalo extremo

En este caso disponemos de las acumulaciones

$$y_0 = T_x; y_1 = T_{x+5}; y_2 = T_{x+10}; y_3 = T_{x+15}; y_4 = T_{x+20}$$

y podemos determinar las acumulaciones

$$y_{0,2} = T_{x+1}; y_{0,4} = T_{x+2}; y_{0,6} = T_{x+3}; y_{0,8} = T_{x+4}$$

usando la matriz de Grabill de multiplicadores para tramo extremo

$$\begin{pmatrix} y_{0,2} \\ y_{0,4} \\ y_{0,6} \\ y_{0,8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6384 & 0,6384 & -0,4256 & 0,1824 & -0,0336 \\ 0,3744 & 0,9984 & -0,5616 & 0,2304 & -0,0416 \\ 0,1904 & 1,1424 & -0,4896 & 0,1904 & -0,0336 \\ 0,0704 & 1,1264 & -0,2816 & 0,1024 & -0,0176 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

y la interpolación con la parábola de quinto grado con los valores pivotaes

$$(y_0; y_{0,2}; y_{0,4}; y_{0,6}; y_{0,8}; y_1)$$

nos da para $y_{0,5}$

$$T_{x+2,5} = 0,2734 T_x + 1,0938 T_{x+15} - 0,5469 T_{x+10} + 0,2188 T_{x+15} - 0,0391 T_{x+20} \quad (\text{A.17})$$

que no difiere mucho de la obtenida por interpolación lineal entre $y_{0,4}$ e $y_{0,6}$,

$$T_{x+2,5} = 0,2824 T_x + 1,0704 T_{x+5} - 0,5256 T_{x+10} + 0,2104 T_{x+15} - 0,0376 T_{x+20} \quad (\text{A.18})$$

Cálculo de N_x y N'_x usando una función bilogística modificada.

Se han demostrado^{1/} que una función bilogística modificada es un modelo adecuada para describir la variación, según edad, de proporciones o tasas específicas

Se verá ahora como una bilogística modificada por una función de la edad puede ser usada como forma adecuada para describir la variación de

^{1/} Bocaz, A., *Tasas de Fecundidad por Edad. Un Modelo Bilogístico de Resumen*, CELADE, (inédito).

una estructura de población (N_x) o de su primera derivada.

Denotemos por (T_x) el total de personas de edades iguales o superiores a (x). Aceptando que el límite de vida (en años) sea (w) x se pueden definir 2 funciones bilogísticas modificadas:

Forma 1

$$\ln (T_0/T_x - 1) = a + bx + m \ln (x/(w-x)) \quad (\text{A.19})$$

Forma 2

$$\ln (T_0/T_x - 1) = a + b e^x + m \ln (x/(w-x)) \quad (\text{A.20})$$

en que la segunda forma puede considerarse una forma un poco más general que la forma 1.

Veamos cómo se pueden calcular los parámetros de estas 2 formas bilogísticas para algunos casos concretos de disponibilidad de información demográfica.

Caso de la Forma 1

Se dispone de los valores

$$T_0, T_1, T_5$$

y se desea determinar los valores: N_1, N_2, N_3, N_4 para las edades individuales 1, 2, 3 y 4 del grupo cuatrienal N_{1-4}

Las condiciones que debe satisfacer la bilogística -Forma 1- son

$$\begin{aligned} y_1 &= a + b + m v_1 \\ y_5 &= a + 5b + m v_5 \\ y_{10} &= a + 10b + m v_{10} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

siendo $y_x = \ln (T_0/T_x - 1)$; $v_1 = \ln(1/109)$; $v_5 = \ln(1/21)$; $v_{10} = \ln(1/10)$ con $w=110$.

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} b &= (\Delta_5 - \Delta_1) / (5/w_5 - 4/w_1) \\ m &= \Delta_1 - 4/w_1 \quad a = y_1 - b - mv_1 \\ \text{siendo } \Delta_1 &= (y_5 - y_1) / w_1; \Delta_5 = (y_{10} - y_5) / w_5 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

cuyo programa para una Hewlett-Packard 25 es:

```
RCL6 RCL5-STO6 RCL5 RCL4 -STO5 RCL3 RCL2 -RCL6÷ RCL2 RCL1
-RCL5÷ STO7-(5) RCL6÷ 4 RCL5÷- ÷STO3 (4x) RCL5÷ CHS RCL7 +
+ STO7 RCL4 x CHS RCL3 - RCL 1 + GTO 00
```

(45)

con almacenamientos en STO

$0 T_0$ $1 \ln(T_0/T_1 - 1)$ $2 \ln(T_0/T_5 - 1)$ $3 \ln(T_0/T_{10} - 1)$	$STO 4 v_1 = \ln(1/109)$ $STO 5 v_5 = \ln(1/21)$ $STO 6 v_{10} = \ln(1/10)$
--	---

resultados en GTO 00 → a
 RCL3 → b
 RCL7 → m

Para el cálculo de los grupos (N_x) de edades individuales aplicamos la relación

$$N_x = \Delta T_x = T_{x+1} - T_x \quad (\text{A.23})$$

y para la primera derivada de la función (N_x) -tratándose del cambio infinitesimal-

$$N'_x = n_x = -T_x (T_x/T_0 - 1) (b+mw/x(w-x)) \quad (\text{A.24})$$

lo que puede llevarse al siguiente programa en HP-25:

```
RCL4 RCL1x RCL3 + gex RCL2 RCL1÷1-RCL5 fyx÷ 1 + g1/x STO6 RCL0 x
STO7 RCL5 RCL2 x RCL1÷ RCL2 RCL1-÷ RCL4+RCL7x RCL6 (1) STO+1
-x GTO ∞
```

(40)

con los almacenamientos en:

$STO 0 T_0$ $1 x$ $2 w=110$ $3 a$ $4 b$ $5 m$	
--	--

y los resultados en GTO 00; $N'_x = n_x$
 STO7 : T_x

con un programa en que se aumenta automáticamente en (1) el valor de (x) de modo que basta pulsar sucesivamente la tecla R/S para obtener los diferentes valores de (T_x) y ($N'_x = n_x$) a medida que (x) aumenta de 1 en 1.

Ejemplo 1

Poblaciones estacionarias femenina y masculina. Chile 1952-1953^{2/}

Mujeres		Hombres	
T_0	= 5 683 539	T_0	= 5 295 301
T_1	= 5 591 718	T_1	= 5 204 783
T_5	= 5 246 791	T_5	= 4 865 345
T_{10}	= 4 822 673	T_{10}	= 4 448 260
a	= 0,392385	a	= 0,442097
b	= 0,009876	b	= 0,011047
m	= 0,961656	m	= 0,960263

con los siguientes valores del modelo bilogístico modificado (BIM)

CHILE: MUJERES 1952-1953

x	T_x	L_x		l_x	
		BIM	OBS	BIM	OBS
0	5 683 539	91821	91821	100060	100060
1	5 591 718	87535	87720	88563	88765
2	5 504 183	86326	86263	86780	86675
3	5 417 857	85713	85640	85961	85850
4	5 332 144	85352	85304	85504	85447
5	5 246 792			85220	85170

CHILE: HOMBRES 1952-1953

x	T_x	L_x		l_x	
		BIM	OBS	BIM	OBS
0	5 295 301	90518	90518	100000	100000
1	5 204 783	86165	86252	87202	87204
2	5 118 618	84953	84898	85406	85301
3	5 033 665	84340	84304	84588	84495
4	4 949 325	83980	83984	84132	84113
5	4 865 345				

^{2/} Somoza, J. y Tacla, O., *La Mortalidad en Chile según las Tablas de Vida de 1920, 1930, 1940, 1952-1960*, CELADE, Serie A, N° 17.

Caso de la Forma 2

Como la función tiene 4 parámetros: a , b , c y m debemos usar 4 valores (y_x) como pivotes.

Para el tramo 0-15 podemos establecer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bc + m \ln(1/109) \\ y_5 &= a + bc^5 + m \ln(1/21) \\ y_{10} &= a + bc^{10} + m \ln(1/10) \\ y_{15} &= a + bc^{15} + m \ln(3/19) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

siendo

$$y_x = \ln(T_0/T_x - 1); w = 110$$

El valor de (c) se calcula resolviendo por iteración la ecuación

$$r = (\Delta_{10} - \Delta_5) / (\Delta_5 - \Delta_1) = 0 (c^5/w_{10} - -1/w_5) / \lambda \quad (\text{A.26})$$

siendo

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (y_5 - y_1) / w_1 & w_1 &= \ln(1/21) - \ln(1/109) \\ \Delta_5 &= (y_{10} - y_5) / w_5 & w_5 &= \ln(1/10) - \ln(1/21) \\ \Delta_{10} &= (y_{15} - y_0) / w_{10} & w_{10} &= \ln(3/19) - \ln(1/10) \\ \Theta &= c^4 (c^5 - 1) / (c^4 - 1) & \lambda &= \Theta / w_5 - 1 / w_1 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

y usando el siguiente programa HP 25:

```
RCL0 (5) f yx STO4(1)- RCL4 RCL0; STO 5 x RCL 5 (1)- : STO5 RCL2÷
RCL 1 g1/x -STO6 g1/x RCL4 RCL3÷ RCL2 g1/x -x RCL5 x RCL7 - GTO 00
(35 instrucciones)
```

colocando en: STO 0: c STO7: r (razón conocida)

1: w_1
2: w_5
3: w_{10}

Para el cálculo de (c) se coloca un (c) arbitrario -alrededor de 1- y se modifica hasta que el resultado sea una cantidad muy vecina de 0.

Ejemplo 1

Poblaciones estacionarias -femenina y masculina- para los Estados Unidos en el año 1901^{3/}

Mujeres		Hombres	
x	T_x	x	T_x
0	5 324 150	0	4 787 531
1	5 231 438	1	4 696 858
5	4 885 249	5	4 367 098
10	4 463 619	10	3 969 411
15	4 047 193	15	3 578 223
$a = -0,07829$		$a = -0,184739$	
$b = 0,557654$		$b = 0,684573$	
$c = 1,015615$		$c = 1,014827$	
$m = 0,963690$		$m = 0,950126$	

con los siguientes valores bilogísticos modificados (BIM)

x	T_x	L_x		l_x	
		BIM	JWG4/	BIM	JWG4/
<i>Mujeres</i>					
0	5 324 150	92712	92712	100000	100000
1	5 231 438	88233	88227	89395	89623
2	5 143 205	86756	86719	87342	87257
3	5 056 449	85892	85901	86261	86242
4	4 970 557	85308	85342	85567	85587
5	4 885 249	84883	84923	85076	85117
6	4 800 366	84553	84570	84705	84730
7	4 715 813	84285	84278	84411	84410
8	4 631 528	84057	84034	84166	84145
9	4 547 471	83852	83825	83952	83922
10	4 363 619				
<i>Hombres</i>					
0	4 787 531	90673	90673	100000	100000
1	4 696 858	84663	84633	86204	86426
2	4 612 195	82712	82673	83484	83386
3	4 529 483	81575	81598	82060	82041
4	4 447 908	80810	80856	81149	81189
5	4 367 098	80255	80301	80506	80548
6	4 286 843	79828	79850	80024	80054
7	4 207 015	79482	79475	79644	79645
8	4 127 533	79190	79163	79329	79306
9	4 048 343	78933	78898	79057	79021
10	3 969 410				

BIM = Bilogística modificada

JWG = J.W. Glover

3/ Department of Commerce, Bureau of the Census, *United States Life Tables 1890, 1901, 1910 and 1901-1910*. Table 6, pág. 62.

4/ Glover, J.W., *United States Life Tables (1890, 1901, 1910 and 1901-1910)* Dept. of Commerce, Bureau of the Census, 1921.

Ejemplo 2

Poblaciones estacionarias -femenina y masculina- para Chile en 1960-1961.

Mujeres		Hombres	
x	T_x	x	T_x
0	5 991 417	0	5 467 653
1	5 898 958	1	5 376 464
5	5 550 016	5	5 033 236
10	5 119 246	10	4 609 883
$a = 3,916122$		$a = -6,660714$	
$b = 3,564072$		$b = 7,084026$	
$c = 0,99729$		$c = 1,00153$	
$m = 0,962937$		$m = 0,961558$	

con la siguiente comparación entre valores bilogísticos y valores indicados por los autores:

x	T_x	L_x		L_x	
		BIM	S-T	BIM	S-T
<i>Mujeres</i>					
0	5 991 417	92459	92459	100000	100000
1	5 898 958	88385	88390	89341	89281
2	5 810 573	87293	87214	87693	87499
3	5 723 280	86773	86789	86977	86930
4	5 636 507	86491	86549	86605	86648
5	5 550 016	86329		86397	86450
6	5 463 687	86225		86270	
7	5 377 462	86147		86184	
8	5 291 315	86074		86110	
9	5 205 241	85995		86036	
10	5 119 246			85949	85834
<i>Hombres</i>					
0	5 467 653	91189	91189	100000	100000
1	5 376 464	86999	86932	87985	87776
2	5 289 465	85869	85811	86285	86089
3	5 203 596	85327	85375	85541	85533
4	5 118 269	85033	85110	85152	85217
5	5 033 236	84860		84932	85004
6	4 948 376	84748		84797	
7	4 863 628	84664		84704	
8	4 778 964	84584		84624	
9	4 694 380	84497		84543	
10	4 609 883			84447	84297

BIM = Bilogística modificada
S-T = Somoza-Tacla

pudiendo verse que la función bilogística describe bien la variación de la población estacionaria en el intervalo 1-9 años usando la situación conocida frente a las edades 1, 5, 10 y 15 años.

La derivada segunda de las funciones bilogísticas modificadas pueden escribirse en la forma general

$$n'_x = T_x q_T [(1-2p_T) k^2 + m(1-2p_x) / (p_x q_x)^2] \quad (\text{A.28})$$

siendo

$$p_T = T_x / T_0 \quad q_T = 1 - p_T$$

$$p_x = x/w \quad q_x = 1 - p_x$$

$$k = b + mw/x(w-x); \text{ para la forma 1}$$

$$k = bc^x (\ln c)^2 + mw/x(w-x); \text{ para la forma 2}$$

Para el caso de una población estacionaria la razón $(-n'_x/n_x)$ representa la tasa instantánea de mortalidad. Por otra parte, el valor de (n'_x) se usa en la aplicación de las Formas 2 y 3, sugeridas por J. Bourgeois-Pichat.

**CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CELADE**

Edificio Naciones Unidas
Avenida Dag Hammarskjöld
Casilla 91, Santiago, CHILE
300 mts. Sur y 125 Este de la
Iglesia San Pedro, Montes de Oca
Apartado Postal 5249
San José, COSTA RICA