

---

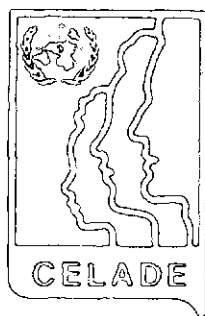
TEORIA ANALITICA  
DE LAS  
ASOCIACIONES  
BIOLOGICAS

---

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

---

*Santiago*



*de Chile*







**Teoría analítica  
de las  
asociaciones biológicas**



**CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA**  
**CELADE: J.M. Infante 9. Casilla 91. Teléfono 257806**  
**Santiago (Chile)**  
**CELADE: Ciudad Universitaria Rodrigo Facio**  
**Apartado Postal 5249**  
**San José (Costa Rica)**

La edición original de esta obra fue publicada por  
**HERMANN ET CIE., Editeurs, París,**  
en dos volúmenes de la serie  
"Actualités scientifiques et industrielles":

Volumen I:

**Théorie analytique des associations biologiques.**  
**Première Partie: PRINCIPES, ASI, N° 187.**

Volumen II:

**Théorie analytique des associations biologiques.**  
**Deuxième Partie: ANALYSE DEMOGRAPHIQUE**  
**AVEC APPLICATION PARTICULIERE**  
**A L'ESPECE HUMAINE, ASI, N° 780.**

La presente versión, primera en lengua española,  
consta de un solo volumen, dividido en dos partes  
que se corresponden con las originales.

Primera edición, 1969  
Segunda edición, 1976

Traducido por **GUILLERMO A. MACCIO**  
Revisión de la traducción por **JORGE L. SOMOZA y CARMELO SORIA**

© Centro Latinoamericano de Demografía, 1976  
Serie E, N° 5

E/5  
c.5

**Alfred J. Lotka**

**TEORIA ANALITICA  
DE LAS  
ASOCIACIONES BIOLÓGICAS**



**CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA**

SANTIAGO DE CHILE, 1976

16192



El Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE), se complace en publicar la primera versión en idioma español de la fundamental obra del demógrafo Alfred J. Lotka, "Teoría Analítica de las Asociaciones Biológicas".

La gran influencia que esta obra ha ejercido y ejerce en el pensamiento contemporáneo relacionado con modelos teóricos de población, es por demás conocida, para que necesite destacarse de nuevo. Desde su aparición en 1939, ha servido como fuente de inspiración a las investigaciones realizadas sobre la materia; y como punto de partida, que de hecho es, para toda generalización posible sobre el tema, merece ser difundida y necesita ser conocida por las nuevas generaciones de demógrafos.

En la "Teoría Analítica de las Asociaciones Biológicas", se estudia con gran rigor lógico diversos aspectos teóricos ligados al comportamiento de las poblaciones desde el punto de vista demográfico; y los problemas que examina se han convertido en instrumentos de incalculable valor para quienes tienen la tarea de elaborar estimaciones de parámetros, tanto en nivel como en tendencia, a partir de datos insuficientes, ya sea en calidad como también en disponibilidad.

Si bien es cierto que los estudios posteriores a la obra de Lotka han ampliado el panorama que su "Teoría..." nos dejó, mantiene plena vigencia.

Dado que la edición original en francés se encuentra agotada desde hace varios años, CELADE estima que la presente traducción constituye un valioso aporte al conocimiento de las bases mismas de la teoría matemática de la población.



## PRIMERA PARTE

### PRINCIPIOS

#### I

El orden de ideas que ha dado origen a la teoría moderna de la evolución orgánica es de naturaleza esencialmente cuantitativa. Es sabido que Darwin llegó, del mismo modo que Wallace, al enunciado del principio de supervivencia del más apto reflexionando sobre el problema abordado por Malthus: ¿de qué manera el total de los seres vivos se mantiene entre los límites que observamos efectivamente? Parece que este aspecto del problema de la evolución debió ser el primero en llamar la atención de los biólogos predispuestos al análisis matemático; mas por un azar bastante singular, sólo muy recientemente ha recibido una dedicación seria. Es cierto que determinada escuela aprovechando, entre otros, los trabajos geniales de Gregor Mendel se ha ocupado desde hace años del análisis biométrico aplicado a los problemas de supervivencia y de reproducción, en relación con el problema de la evolución orgánica. Pero en sus investigaciones, los discípulos de esta escuela se han limitado, casi completamente, a la discusión de las características de una sola especie y a las consecuencias de esas características en lo que tiene que ver con su supervivencia. La interacción de las diversas especies entre sí y con su medio ha recibido, cuando mucho, una consideración pasajera e incidental por parte de dichos autores. Los ecólogos, por el contrario, se han circunscrito, casi por completo, a estudios empíricos sobre este tema.

Queda entonces en la ciencia biométrica una laguna. Vemos en la actualidad un grupo todavía reducido ocupado en llenarla. Parece que asistimos al nacimiento de una rama de las ciencias biológicas; completamente nueva, que podría llamarse *demología general* y que se

10 ocupa del estudio analítico de las agregaciones formadas por poblaciones de diversos seres vivos.

Ahora bien, hay razones muy particulares que confieren a esta rama de la biometría una importancia decisiva. No es una insistencia exagerada el afirmar que la evolución de un sistema que comprende un determinado número de especies, debe concebirse como un todo. No es esta especie o aquella la que evoluciona, sino el sistema en tanto que sistema total. Al lado de algunas especies que han adquirido organismos de ataque muy perfeccionados, existen, y es preciso que existan, otras especies cuya defensa consiste en gran parte en una fecundidad elevada e incluso pródiga. He dicho que es preciso que existan esas otras especies, pues sin ellas las primeras no podrían subsistir por falta de alimento. Son grupos en dependencia mutua, en cuanto grupos, los que evolucionan, y cualquier estudio sobre el problema fundamental de la evolución que ignorase este hecho estaría por anticipado condenado al fracaso. Sería inútil, por ejemplo, plantear el problema en estos términos: ¿La evolución de una especie tiende hacia un desarrollo cada vez más perfecto de los medios de defensa contra los ataques provenientes de otras especies, o tiende más bien a una fecundidad bastante elevada para garantizar, a pesar de dichos ataques, la supervivencia de un número suficiente? El problema está mal planteado; lo cierto es que se han dado una y otra de esas tendencias. La dirección del proceso que llamamos *evolución*, no podría definirse en términos de una sola especie.

Es útil aprovechar en estas reflexiones los conocimientos más avanzados que poseemos sobre la evolución de determinados sistemas inanimados. La dirección de esta evolución puede definirse de manera precisa, pero entendiéndola siempre, en términos de algunas características del sistema *total*. Dada por ejemplo, una ampolla cerrada, con un volumen  $v$  y una temperatura  $t$  que contiene una cierta cantidad  $m_1$  de hidrógeno, una cantidad  $m_2$  de oxígeno y otra cantidad  $m_3$  de agua, es posible preguntar: ¿Cuál será el curso de los acontecimientos de ese sistema, es decir, su evolución? Sabemos, en efecto, que en ese sistema ocurrirá una transformación reversible según el esquema:



hasta un punto perfectamente definido. Pero su definición se efectúa en términos de una determinada función del sistema *total*, a saber: su potencial termodinámico. Sería inútil pretender indicar la dirección de la evolución de ese sistema, hablando solamente de uno u otro de sus componentes, por ejemplo,  $\text{H}_2\text{O}$ . Y no obstante ello, los biólogos en su mayoría han procurado darse cuenta de la evolución del mundo orgánico por medio de estudios concentrados en una sola especie considerada aisladamente. Primero aprovechemos el modelo físico-químico: ¿Cómo vamos a concebir la marcha evolutiva del mundo orgánico?

Estamos frente a un sistema, vasto es cierto, pero, sin embargo, con dimensiones finitas. Ese sistema comprende algunas cantidades de diversas especies de seres vivos, así como componentes inanimados, por ejemplo, el oxígeno del aire, etc. El estado de ese sistema en un instante  $t$  se definirá indicando las cantidades  $X_1$ ,  $X_2$ , ... de los diversos componentes, como también el valor de determinados parámetros  $P$  adecuados para completar su descripción en lo que se refiere, por ejemplo, al clima, la topografía, etc. También, para completar el cuadro, será preciso en general, conocer otros parámetros  $Q$ , adecuados para definir el carácter de las especies que componen el sistema, siendo este carácter susceptible de modificaciones con el transcurso del tiempo.

Ahora bien, los cambios que ocurrirán en la composición de la parte animada del sistema, se ordenarán en dos categorías: en primer término habrá cambios en la distribución de la materia del sistema entre las cantidades  $X_1$ ,  $X_2$ , ... de diferentes especies de seres vivos y de los otros componentes. Esos cambios constituirán lo que llamaremos la evolución *interespecífica* del sistema.

Al lado de esas alteraciones interespecíficas, habrá otras, que constituyen una segunda categoría de cambios, y que se realizarán en el seno mismo de cada especie. Esas alteraciones, podrían traducirse en modificaciones de los parámetros  $Q$  por medio de los cuales se ha efectuado la descripción de las especies. Con todo, conservaremos mejor nuestro orden de ideas si interpretamos los cambios de

12 la segunda categoría del mismo modo que en la primera; esto es, como cambios en la distribución de la materia del sistema, pero en este caso, entre los componentes de cada especie ya que resulta evidente que la especie no es completamente homogénea, sino que, por el contrario, consiste en una agregación de tipos que se ordenan de una manera más o menos continua entre los límites extremos de la especie. En efecto, una descripción completa de la especie exigiría la indicación de la ley de distribución (de frecuencias) de sus diversas características. Por ejemplo, para el caso de la especie humana, la descripción completa exigiría la indicación de una función  $f(h)$  tal que la magnitud  $f(h)dh$  nos diese la proporción de todos los hombres cuya talla estuviera comprendida entre los límites  $h$  y  $h + dh$ , digamos entre 1,30 y 1,31 mts., entre 1,31 y 1,32, etc. Y lo mismo para todas las otras características de la especie. Los cambios de la segunda categoría se traducirán entonces, en alteraciones de los parámetros que caracterizan las funciones de distribución  $f$ . Los llamaremos alteraciones *intraespecíficas* y su totalidad será la evolución *intraespecífica* del sistema.

Ahora bien, hay un gran contraste entre las velocidades dentro de las cuales puede ocurrir la evolución interespecífica y la intraespecífica, respectivamente. La primera puede dar pasos enormemente rápidos, como en el caso de una catástrofe de la naturaleza que de un golpe aniquilara toda una población; o en el caso de invasión de tierras vírgenes por una especie desconocida hasta entonces en ese territorio, destruyendo casi por completo una especie vernácula.

La evolución intraespecífica, al contrario, se produce casi siempre, si no siempre, a través de cambios que son o muy graduales o muy escasos. Esta evolución se caracteriza entonces, por su lenta marcha en comparación con la de la evolución interespecífica. En efecto, en la discusión de esta última se permitirá omitir los cambios intraespecíficos, cambios en los parámetros  $Q$  o las funciones  $f$ , toda vez que sea breve el tiempo transcurrido durante el período de observación, en comparación con el tiempo necesario para que ocurran cambios intraespecíficos notables. De esta circunstancia resulta, desde un punto de vista práctico, una situación muy

cómoda; podremos a menudo tratar la evolución interespecífica y la 13  
intraespecífica como dos asuntos aislados, aunque, en verdad, ambos  
fenómenos tengan lugar simultáneamente y se influyan en forma  
mutua.

Tal es, por consiguiente, nuestra concepción cuantitativa sobre  
el problema de la evolución del mundo animado: no nos preguntamos  
simplemente cuáles son los seres que sobreviven; sino cuál es, den-  
tro del sistema, la cantidad de cada especie y de cada uno de los  
tipos que la componen que se encuentra con vida en un instante  
determinado. Dicho de otra manera, ¿cuál es la composición bioló-  
gica del sistema dado, la distribución de la materia entre sus com-  
ponentes en un instante determinado?; y además, ¿cuáles serán los  
cambios que sobrevendrán a esa distribución? Esos cambios, ¿tende-  
rán hacia un estado particular? y si ello es así, ¿cuáles serán las  
características de dicho estado?

Aún no es posible indicar en términos precisos la ley de evolu-  
ción del sistema orgánico; pero podemos estar seguros que una vez  
formulada esta ley ella se enunciará diciendo que una determinada  
función característica del sistema, en tanto que sistema *total*,  
varía en un sentido definido, que, por ejemplo, tiende a un máximo.

Hemos observado una determinada analogía entre un sistema en  
evolución biológica, por una parte, y un sistema en transformación  
físico-química, por la otra. No debe suponerse que sea ésta una ana-  
logía superficial por medio de la cual vamos a extraer conclusiones  
atrevidas con un "razonamiento" sin razón. No es una analogía acci-  
dental la que nos interesa en este caso, sino que nos ocupamos de  
lo esencial de un problema, cuyo análisis, en su forma general, es  
idéntico al análisis del problema que plantea un sistema en trans-  
formación físico-química. Tanto en un caso como en el otro, buscamos  
las leyes que rigen la distribución de la materia entre los compo-  
nentes del sistema. Si los componentes han sido definidos de modo  
diferente en los dos casos, sin duda, ello influirá en forma consi-  
derable en los métodos que deberemos seguir al desarrollar nuestro  
análisis, pero no modificará en nada el hecho de que la base sobre  
la cual partimos será idéntica en ambos casos.

Algunas fórmulas sencillas serán de utilidad para esclarecer el

14 planteamiento. Diremos de manera muy general, que la velocidad de crecimiento de la cantidad  $X_i$  de un componente  $S_i$ , dependerá en todo momento de las cantidades  $X_1, X_2, \dots$  de todos los componentes, así como también de los parámetros  $Q$  que definen el carácter de cada componente y de los parámetros  $P$  que sirven para completar la definición del estado del sistema. Si, por consiguiente, en la notación usual, representamos por el símbolo  $\frac{dX_i}{dt}$  la velocidad de crecimiento de la cantidad  $X_i$ , pondremos:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, \dots, X_n, P, Q). \quad (2)$$

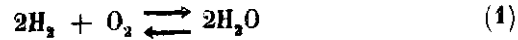
Esta ecuación no es otra cosa que la expresión, en símbolos matemáticos, del hecho que la velocidad  $\frac{dX_i}{dt}$  está determinada por las (es función de las) cantidades escritas entre paréntesis. Además, para cada  $X$  la función  $F$  tomará, por lo general, una forma particular.

Ahora bien, en esta fórmula general, la expresión analítica se aplica por igual tanto al caso de un sistema en transformación físico-química como al de un sistema en cuyo seno se desarrolla la evolución biológica. El análisis para ambos problemas será divergente sólo cuando demos a la función  $F$  sus formas particulares, propias del caso considerado. En el caso de una transformación físico-química, la ecuación (2) tomará, por ejemplo, la forma de la ley de acción de las masas. En el caso de la evolución biológica, será necesario buscar formas completamente nuevas para las funciones  $F$ . No obstante, la fórmula fundamental del análisis es la misma en ambos casos y la identidad en la forma de los dos problemas se extiende también a otros aspectos importantes que es útil examinar, aunque deben señalarse algunas diferencias particulares y muy características que se sobreponen a la identidad de los principios fundamentales.

*Ecuación de enlace.* Los cambios en la distribución de la materia de un sistema entre sus diversos componentes se producen mediante lo que llamamos *transformaciones* de la materia. Por ejemplo, en un sistema que comprende una determinada cantidad (masa) de hidrógeno,  $H_2$ , otra de oxígeno,  $O_2$ , y una tercera de agua,  $H_2O$ , la distribu-



ción de la materia total del sistema entre esos tres componentes es susceptible de alteración, mediante una transformación producida de acuerdo con el esquema: 15



Esquema que no nos da ninguna información para saber si la transformación se realiza efectivamente. Todo lo que nos dice es que, si se produce, puede desarrollarse únicamente de conformidad con ese esquema. Por consiguiente, podría decirse que dicho esquema separa las transformaciones posibles de todas las imposibles. El agua, por ejemplo, no podría hacerse mediante una transformación físico-química en un sistema desprovisto completamente de hidrógeno.

El esquema, sin decirnos qué transformaciones se realizarán efectivamente, pone de ese modo determinadas condiciones, las que deberá satisfacer toda transformación físico-química para que se produzca. Una ecuación, como la del esquema (1), que impone determinadas condiciones a las transformaciones posibles y que expresa determinados enlaces entre las cantidades de los diversos componentes que toman parte en la transformación, se llamará *ecuación de enlace*.

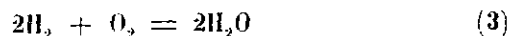
*Enlaces de los sistemas en evolución biológica.* Nuestro ejemplo de la ecuación de enlace se ha tomado de la química-física. ¿Cuál será la naturaleza de los enlaces en un sistema en evolución biológica?

Es claro que en nuestro sistema biológico algunas transformaciones son posibles y otras imposibles. La hierba se transforma en vaca o en oveja, etc., de acuerdo con ciertos procesos mecánicos y fisiológicos más o menos familiares. La hierba no se transforma hoy en mamut aunque en determinada época de la historia del mundo, esta transformación o alguna otra muy análoga, fue un acontecimiento no sólo posible sino cotidiano. Por consiguiente, en una propiedad característica de la materia viva reside una fuente de enlaces que, en el mundo orgánico, limitan las transformaciones posibles: la formación de una nueva cantidad de materia de una especie determinada puede producirse sólo en presencia de una cantidad preformada de la misma especie. Una vez dada esta presencia,

16 la formación de una nueva cantidad de materia viva puede ocurrir de dos maneras diferentes. La nueva cantidad puede agregarse al cuerpo de un individuo, el que conserva esencialmente su identidad y su funcionamiento característicos. Es lo que sucede cada vez que digerimos nuestra comida. Pero en determinadas circunstancias el procedimiento de asimilación toma una dirección muy particular. En lugar de agregarse simplemente al cuerpo del individuo, el que conserva su identidad y su funcionamiento, la nueva sustancia suministra los materiales necesarios para el crecimiento de una parte especial del individuo padre, parte que se desarrolla más o menos separadamente como copia de ese individuo padre. Los detalles de este procedimiento se conocen bastante bien y para el fin que nos proponemos aquí no hay necesidad de recordarlos. Basta con comprobar que el resultado es una copia, que se parece al padre, pero que no es idéntico. Hay aquí una diferencia importante entre los enlaces en la evolución biológica y los enlaces en la evolución físico-química. Estas últimas tienen un carácter rígido, inalterable, independiente del tiempo. Por el contrario, los enlaces en la evolución biológica tienen determinada elasticidad. Es cierto que de un huevo de pato no saldrá nunca un aguilucho. Pero un pato blanco puede muy bien tener patitos bicolores. El carácter del hijo no está completamente definido por el de los padres. Es verdad que entre los padres y sus descendientes inmediatos se excluyen determinados desvíos extremos; y esto porque, según hemos dicho ya, la formación de una nueva cantidad de materia viva sólo es posible en presencia de una cantidad preformada de la misma especie. Pero entre determinados límites los descendientes de padres comunes varían de acuerdo con leyes de herencia sobre las cuales hoy tenemos todavía un conocimiento fragmentario. Cualesquiera que sean, es cierto que los enlaces en la evolución biológica se representan no ya por simples ecuaciones parecidas al esquema (1), sino por *frecuencias*, es decir, por ciertas funciones que indican la probabilidad de observar un determinado desvío entre las características de los padres y las de sus descendientes. Y, aunque nuestros conocimientos sobre esas funciones continuas o discontinuas todavía son muy imperfectos, sabemos, a través de las observaciones de los paleontólogos, que dichas fun-

ciones tienen una forma que permite a los enlaces cambiar lentamente con el tiempo. Es por esto que una transformación de la hierba (o alguna sustancia análoga) en mamut, enteramente posible antes, hoy ya no lo es, mientras que otras transformaciones que hoy se efectúan en cualquier parte, hubieran resultado imposibles en una época geológica anterior.

Podemos, dentro de este orden de ideas, precisando que se dijo más arriba, sobre cierta limitación en los trabajos de los biómetros de la escuela tradicional. Diremos ahora que esos autores se han ocupado casi por completo de los *enlaces* a los que está sometida la evolución biológica. La situación es análoga a la que existía en la química cuando aún se ocupaba exclusivamente del estudio de los esquemas de reacción tales como,



sin abordar el problema de saber hasta qué punto la reacción se desarrollaría efectivamente en las condiciones prescritas, y, *a fortiori*, sin buscar las leyes que determinan ese punto de equilibrio.

Los enlaces en la evolución biológica son funciones del tiempo, mientras que los de la evolución físico-química son fijos; y de ese hecho resulta una consecuencia importante. La evolución físico-química es un proceso *que se termina*. La evolución biológica, por el contrario, es casi seguramente un proceso *sin fin*. Del estado  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$  al estado  $2\text{H}_2\text{O}$  existe, por así decir, un único camino sobre el cual puede irse y volver de un extremo al otro, en línea recta. Existen pues, en ese caso, dos límites entre los cuales están comprendidos todos los estados posibles. Es muy distinto lo que pasa con los sistemas en evolución biológica. Mientras que la diferenciación de los elementos y de los compuestos químicos es una diferenciación *en sustancia*, la diferenciación de los seres vivos es esencialmente una diferenciación *en estructura*. Ahora bien, las diferenciaciones en sustancia que pueden ocurrir en el cuadro de los elementos y los compuestos químicos, aunque muy numerosas, están sin embargo definitivamente limitadas. Las diferenciaciones

18 en estructura, por el contrario, no están, en principio, sujetas a ninguna restricción. Hay que suponer, por consiguiente, que mientras existan las condiciones que posibilitan la vida en nuestro planeta, la evolución biológica continuará sin interrupción. Si un día se establece un límite, no será a causa del carácter intrínseco de la evolución, sino debido a cambios cósmicos que sobrevendrán para extinguir los últimos destellos de la vida terrestre.

Mientras tanto, como los cambios intraespecíficos son muy lentos en comparación con los interespecíficos, es comprensible que los sistemas biológicos se encuentren con frecuencia en un estado cuasi-estacionario, cuando los cambios interespecíficos correspondientes al carácter instantáneo de las especies han llegado casi a su fin; y esta finalización cambia en sí misma a medida que avanza la evolución intraespecífica. También se producirán otros estados cuasi-estacionarios<sup>1/</sup> cuando un cambio interespecífico lento ponga de manifiesto otros cambios interespecíficos, que sean susceptibles de un ajuste mucho más rápido.

De acuerdo con lo que precede, concebimos la evolución de un sistema material como un cambio progresivo en la distribución de la materia entre sus diversos componentes. Será también este concepto el que colocaremos, en lo sucesivo, como fundamento del tratamiento analítico del fenómeno. Esta forma, que podríamos llamar pasiva, de considerar el fenómeno es, sin embargo, completamente insuficiente para su estudio crítico. La distribución efectiva y las alteraciones que en ella se producen no son seguramente estados o efectos pasivos. Al contrario, van acompañados de determinadas manifestaciones energéticas de una importancia extraordinaria. Todo ser vivo es, en efecto, un transformador de energía que posee ciertas propiedades, las que tienen un interés y una importancia de primer orden. El estudio de los fenómenos que presenta una asociación biológica deberá por consiguiente comprender determinados capítulos dedicados al análisis de las relaciones energéticas de una asociación de ese tipo.

<sup>1/</sup> Algunas veces dichos estados se han denominado "equilibrios móviles". No obstante, no se trata aquí de equilibrios verdaderos.

También es útil señalar algunas analogías, así como algunos contrastes, entre los datos energéticos que poseemos sobre los sistemas físico-químicos por un lado y sobre los sistemas biológicos, por el otro. En el estudio de los primeros son conjuntos de moléculas los que se presentan fácilmente a la observación directa y por consiguiente, al análisis. Los individuos mismos, es decir las moléculas y los átomos, sólo se ponen de manifiesto indirectamente o mediante observaciones más refinadas. Asimismo, los principios energéticos aplicables a esos sistemas se han formulado, la mayoría de las veces, directamente en términos de propiedades de conjuntos. En el caso de los sistemas biológicos este orden está invertido. Generalmente los individuos se presentan a nuestra observación y a nuestro análisis sin mayor dificultad. Al procurar comprender los efectos colectivos de las acciones de los individuos, es cuando encontramos un problema cuya solución exigirá todos los recursos de nuestro espíritu científico. Y con todo en la discusión de esos efectos colectivos deberemos buscar muy probablemente, el enunciado de la ley de la evolución orgánica, que al igual que la ley de la evolución físico-química se expresa con mayor facilidad en términos de los efectos colectivos de las moléculas que toman parte en las susceptibles transformaciones del sistema.



## II

La palabra "evolución" es un vocablo incorporado tan sólidamente al lenguaje vulgar como a la jerga científica que en forma habitual lo aceptamos sin sentir la necesidad de analizarlo en su sentido exacto. Es así que en lo que precede lo hemos usado, admitiendo que el lector sabrá bastante bien de qué se trata.

Sin embargo, el concepto de evolución no es seguramente uno de los que deben considerarse como imposibles de analizar y definir con la ayuda de otros conceptos más primitivos. Estaríamos tratando muy superficialmente el tema si omitiéramos establecer con la mayor claridad posible las ideas fundamentales y no destacáramos algunas dificultades muy sensibles que alcanzan a las bases mismas de todas nuestras discusiones.

Cuando examinamos cuál es nuestro pensamiento al hablar de la evolución de un sistema cualquiera, encontramos en primer lugar que la evolución de un sistema es su historia, es decir, la sucesión de los diversos estados por los cuales pasa a lo largo del tiempo. Con todo, a esta descripción del significado de la palabra evolución le falta evidentemente algo esencial. Apenas si se podría llamar evolución la historia de un sistema en movimiento exclusivamente periódico, que repitiese hasta el infinito sus recorridos alrededor de una misma órbita. Hemos dicho más arriba que la evolución consiste en cambios *progresivos* del sistema. ¿Qué quiere decir entonces el término *progresivo*? Este es un asunto muy delicado. Bertrand Russell, con su humor característico, nos señala que "un proceso que conduce de la amiba al hombre, por su misma naturaleza, parece ser, en opinión de los filósofos, un progreso -es

22 cierto que no sabemos si la amiba estaría de acuerdo con esta opinión-". Para hablar seriamente, la idea de progreso se basa fundamentalmente en sentimientos subjetivos, como ya lo reconoció Herbert Spencer. Enseguida vamos a examinar los fundamentos objetivos de la idea del progreso, si en verdad existen tales fundamentos. Pero señalemos también al pasar que, aun desde un punto de vista ingenuo, no siempre es cierto que la evolución de los seres vivos se haya producido en la dirección de lo que llamaríamos progreso. Las especies parásitas a menudo se han adaptado a su medio con mucha comodidad mediante modificaciones que nos parecen decididamente retrógradas.

Pero hay una razón mucho más profunda para desconfiar de una fácil definición de la evolución en términos de "progreso". La idea del progreso implica otra idea más primitiva: la idea del transcurso del tiempo caracterizada por una determinada dirección única, la dirección de lo pasado hacia lo futuro. Ahora bien, cuando buscamos una base objetiva para esta caracterización, nos encontramos frente a dificultades inesperadas y singulares.

En la mecánica clásica una determinada variable  $t$ , que se ha convenido en identificar con el tiempo, entra en los cálculos de forma tal que nada cambia en las leyes del movimiento si en lugar de  $t$ , escribimos  $-t$ . Desde este punto de vista, la mecánica no distingue entonces entre lo pasado y lo futuro. En cambio, sería más justo decir que el tiempo, tal como lo entendemos corrientemente, no entra en absoluto en la mecánica clásica, y es sólo por un error pedagógico que seguimos enseñando este tema como si el tiempo desempeñase allí un papel esencial. Por ejemplo, es un error bastante claro desarrollar las leyes del movimiento con la ayuda de una máquina de Atwood usando un reloj o un metrónomo para marcar el "tiempo"; puesto que tenemos las siguientes alternativas:

O bien no explicamos la acción del reloj, que es de por sí un mecanismo, y entonces el alumno siente que hay algo que falta en nuestra explicación, resultando de ello una confusión que no tiene nada que ver con el tema que teníamos la intención de aclarar.

O bien decimos que el mecanismo del reloj, un reloj de péndulo por ejemplo, será explicado más tarde, cuando se llegue al punto



adecuado en el desarrollo del tema. Entonces caemos en un círculo vicioso, pues pretendemos desarrollar en primer lugar, las leyes del movimiento con la ayuda de cierto mecanismo y luego, con posterioridad, pretendemos explicar ese mecanismo mediante las leyes desarrolladas gracias a él. 23

Lo cierto es que el reloj no se necesita para nada y, lo que es peor, oscurece la verdadera naturaleza de las leyes que se van a desarrollar y que, en verdad, no contienen el tiempo tal como lo entendemos corrientemente.

El dispositivo que se ha de emplear consistiría en *dos* máquinas de Atwood independientes: la primera se instalaría con las dos masas suspendidas iguales, de forma tal que el movimiento se ejecutara bajo el régimen de una fuerza resultante cero, mientras que la otra máquina se manejaría como de costumbre, desarrollando las leyes del movimiento. Se obtendrían ecuaciones parecidas a aquellas a las que estamos habituados, pero en lugar del símbolo  $t$ , con el que creíamos representar el tiempo, encontraríamos un símbolo  $x$  que no sería otra cosa que la *distancia* recorrida por las masas de la primera máquina de Atwood. Todo el sistema de mecánica que se basa en las leyes fundamentales sería examinado como un sistema de relaciones entre las *posiciones* de determinados puntos. Entonces se vería claramente que no se hizo ningún uso de la idea de lapso.<sup>1/</sup>

El hecho es que, en verdad, poseemos una facultad que nos permite asociar, con mayor o menor exactitud, lapsos iguales a los desplazamientos iguales de las masas de la primera máquina de Atwood. Pero esta observación pertenece a la psicología y no a la física, siendo, sin embargo, muy importante, ya que coordina definitivamente a ciertos datos subjetivos -como son nuestras impresiones sobre la *longitud* de un lapso-, datos objetivos, -tales

<sup>1/</sup> No obstante, es preciso acordar lo siguiente: 1) que tenemos los medios, o la facultad, de distinguir la simultaneidad de las posiciones de los diversos puntos de que se trata; 2) que tenemos los medios, o la facultad, de reconocer la identidad de esos puntos en sus diversas posiciones, y 3) que tenemos medios independientes para juzgar la igualdad de dos masas. Tal medio se da en la práctica por la igual deformación de un cuerpo elástico, como es el caso de una balanza de resorte.

24 como las longitudes correspondientes de los desplazamientos de cierta masa-. Es un servicio análogo al que nos presta la óptica cuando coordina nuestras sensaciones subjetivas de violeta, azul, verde, amarillo, etc., con datos objetivos, como son determinadas longitudes de ondas luminosas.

Pero cuando buscamos una base objetiva para la dirección de lo pasado hacia lo futuro, la mecánica clásica resulta deficiente. Y, sin entrar en detalles, señalemos brevemente que la mecánica relativista tampoco da indicaciones satisfactorias sobre este tema.

Por el contrario, a primera vista parece que la termodinámica provee un criterio objetivo que distingue la dirección en el transcurso del tiempo, y no han faltado autores que atribuyen el significado que damos a esta dirección a la existencia de procesos *irreversibles* en el sentido de la termodinámica.<sup>1/</sup> Conforme a la ley de la disipación de la energía (la *segunda ley de la termodinámica*) cada vez que se considera una simple transmisión de calor por conducción, el calor pasa siempre de un cuerpo más cálido a otro con temperatura más baja, y nunca en sentido contrario. La misma ley establece que cuando dos ampollas, cada una de las cuales contiene un gas determinado, se ponen en comunicación, ambos gases se mezclan y en el estado final cada ampolla contiene una determinada cantidad de los dos gases.

Nunca, dice la ley, se dará este proceso a la inversa; nunca dos ampollas conteniendo una mezcla de dos gases cada una, puestas en comunicación se encontrarán finalmente, mediante un simple proceso de separación por difusión, conteniendo cada una uno sólo de los gases. Dicho en otra forma, la difusión es siempre un proceso de desunión nunca de selección.

¿Tenemos aquí un criterio objetivo de la dirección positiva del

<sup>1/</sup> G.N. Lewis en su obra *The Anatomy of Science* (Yale University Press, 1926), atribuye a W.S. Franklin (1910) el mérito de haber sido el primero que formuló esta idea, lo cual es un error. La idea tiene sin duda un origen muy anterior. W. Ostwald, en su libro *Die Energie* (J.A. Barth, Leipzig, 1908), pág. 86, la atribuye a Descoudres. Era muy conocida por todos aquellos que estuvieron presentes en las conferencias de Ostwald, quien también la menciona en sus *Vorlesungen über Naturphilosophie*, Leipzig, 1902, pág. 275.

transcurso del tiempo? A primera vista parece que sí, pues podemos decir que el instante donde los dos gases se mezclan es posterior a aquél donde están separados.

Desde un punto de vista práctico eso está bien así, y no hemos dudado en líneas anteriores de hablar de la segunda ley de la termodinámica como ley de la evolución físico-química. Pero, en principio, este criterio aún nos resulta insuficiente, pues la teoría nos dice que es altamente improbable que se produzca la separación espontánea de los dos gases; pero no imposible.

Con un modelo fácil de construir tendremos información sobre este punto, y mediante un artificio, podremos también con su ayuda demostrar positivamente esta separación milagrosa muy improbable, pero captada a pesar de todo en el momento que se desarrolla.

No podemos seguir el juego de las moléculas que se mezclan o se apartan; pero el principio será el mismo si las sustituimos, por ejemplo, con un mazo de naipes o una cantidad de bolillas numeradas. A primera vista, parece también que en este caso tendremos un criterio sobre la dirección del transcurso del tiempo. Si se nos dan dos listas de naipes siguiendo el orden en que han sido encontradas en dos ocasiones diferentes al momento de barajar, no dudaremos en decir que la lista donde aparecen todas en orden, separadas por color, es la perteneciente al arreglo anterior y que la otra, donde los naipes están mezclados sin orden aparente, corresponde a la de su arreglo ulterior. El transcurso del tiempo se traduce por el pasaje de las cartas de un ordenamiento improbable (todas en orden) a un arreglo más probable (mezcladas).

¿Hemos encontrado realmente un criterio objetivo sobre la dirección del transcurso del tiempo? Voy a probar que no, que nuestro criterio es una ilusión. En lugar de un juego de naipes utilizaremos un conjunto de bolillas negras y blancas. Cincuenta bolillas negras se encuentran en una urna A, y cincuenta blancas en otra B. Tomamos al azar una bolilla de la urna A y otra de la urna B; colocamos en la urna B la bolilla proveniente de A y viceversa. Mezclamos bien los contenidos de ambas urnas, y repetimos la operación de sacar al azar una bolilla de cada una de ellas y colocarla en la contraria. Después de cada extracción anotamos los conte-

26 nidos de las urnas. El gráfico 1 representa el número de bolillas negras en la urna A después de las sucesivas extracciones. Como es natural, se observa que el número de esas bolillas decrece en forma bastante sistemática al comienzo de las operaciones. Sin embargo, ese descenso se interrumpe por un instante en la décimo tercera extracción a causa del reingreso de una bolilla negra en la urna A. Esto debe esperarse debido a que ahora la urna B contiene numerosas bolillas negras. Con posterioridad la curva se adapta fundamentalmente a un nivel estacionario que corresponde a 25 bolillas negras, la mitad del primitivo contenido. Pero alrededor de esta media observamos fluctuaciones tanto hacia el lado negativo como hacia el positivo; a veces, el número de bolillas negras es inferior a 25, y a veces excede dicha cifra. ¿Será posible acaso que una de esas fluctuaciones alcance el número 25 por encima de la media, de forma tal que las 50 bolillas se reencuentren en la urna A de donde salieron al principio?

Se observaría entonces que todas las bolillas negras se reúnen gradualmente en la urna A, y nuestro gráfico indicará esta extracción milagrosa con una curva que sube en forma de escalera, desde el nivel medio de 25 al nivel primitivo de 50. Ahora bien, esta extracción milagrosa, se produjo efectivamente en la experiencia registrada en el gráfico 2.

En el párrafo precedente hemos comenzado el relato de nuestra experiencia diciendo que "cincuenta bolillas negras se encuentran en la urna A". Hemos guardado un discreto silencio con referencia a la forma en que esas cincuenta bolillas negras se introdujeron en la urna A. Lo cierto es que ellas se introdujeron en el curso de cien jugadas semejantes a la serie ya descrita, constituyendo esta última simplemente la continuación de una serie anterior. Tan sólo que, antes de comenzar la primera serie, todas las bolillas se numeraron de 1 a 100, y a lo largo de las dos series se confeccionó un registro de los números de las bolillas contenidas en cada urna. Fue posible de esta forma disponer en cada instante del contenido detallado de cada una de ellas. Las bolillas en la urna A se tiñeron de negro al finalizar la centésima extracción, es decir, inmediatamente antes de iniciar la segunda serie. Pero el registro

CURVA REPRESENTATIVA DEL NUMERO DE BOLILLAS NEGRAS QUE HAY EN LA URNA A DESPUES DE  $n$  EXTRACCIONES, A PARTIR DE UNA EPOCA CERO Y HASTA LA CENTESIMA EXTRACCION

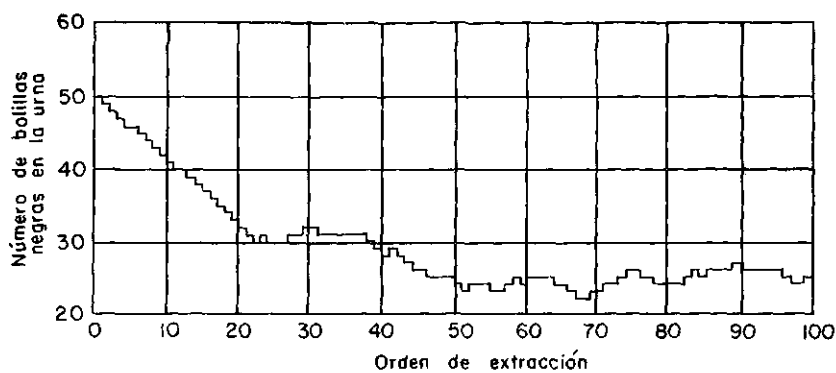
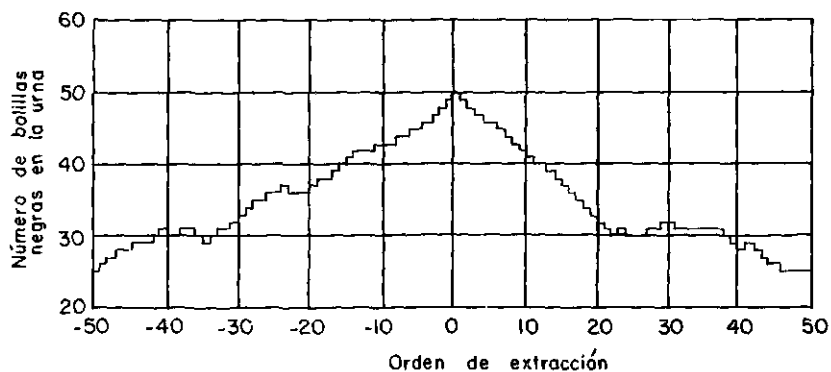


Gráfico 2

CURVA REPRESENTATIVA DEL NUMERO DE BOLILLAS NEGRAS EN LA URNA A DESPUES DE  $n$  EXTRACCIONES A PARTIR DE LA QUINCUAGESIMA EXTRACCION ANTES DE LA EPOCA CERO, HASTA LA QUINCUAGESIMA EXTRACCION DESPUES DE DICHA EPOCA



28 de los números de las bolillas nos permite igualmente individualizar sus peregrinaciones e informarnos así del lugar donde se encontraban las 50 bolillas negras en el momento de cada jugada, aun antes de teñirse. Si construimos de nuevo la curva representativa, esta vez de la serie completa vemos en el gráfico 2<sup>1/</sup> que esta curva en efecto se inicia cerca del nivel medio de 25 bolillas negras y que aumenta luego en forma escalonada hasta el punto donde todas las bolillas negras se han reunido en la urna A. En consecuencia, hemos asistido en realidad a esa extracción milagrosa que conduce al arreglo "altamente improbable" en el cual las bolillas blancas y las negras se encuentran agrupadas y alojadas por separado, cada una en su propia urna. La curva que representa la sucesión de las jugadas y que parecía tan asimétrica cuando comenzamos a trazarla a partir del momento en que todas las bolillas negras estaban en la urna A, adquiere ahora un comportamiento esencialmente simétrico tanto hacia la izquierda como a la derecha de su cúspide, cuando la completamos con el propósito de conocer los acontecimientos gracias a los cuales las bolillas negras se reunieron en A. No podría decirse, observando esta curva completa, si los hechos que representa se desarrollaron de izquierda a derecha o a la inversa. En consecuencia nuestro modelo no nos facilita, después de todo, un criterio objetivo sobre la dirección del transcurso del tiempo.

Se requiere una enajenación muy singular capaz de arrancar la facultad de distinguir lo pasado de lo futuro; y es difícil, si no imposible, entender la extraña confusión que resultaría si perdiéramos nuestro sentido subjetivo del tiempo. En cambio nuestro modelo o su representación gráfica, nos permite colocar a una persona que no haya asistido a las jugadas en una situación análoga; es decir, en la necesidad de juzgar el orden cronológico de dos instantes por un pretendido criterio objetivo, el contenido de las dos urnas en esos dos instantes. Por ejemplo, si le indicamos que

<sup>1/</sup> Con el propósito de adaptar el diagrama al formato del libro la curva del gráfico 2 sólo se ha trazado desde la quincuagésima a la sesquicentésima jugada, habiéndose colocado la época cero en la centésima.

en un determinado instante, durante la serie de extracciones al azar, la urna A contenía 50 bolillas negras, y en otro 30, determinará ingenuamente, que las 50 bolillas corresponden a un instante anterior al de las 30. Los que hemos asistido a las jugadas sabemos que tanto antes como después de la reunión de las 50 bolillas negras en A, hubo un momento en que se encontraban 30 bolillas negras y que es imposible establecer, basándose únicamente en las cifras mencionadas, cuál era en realidad el instante anterior. Si, en cambio, a la persona que debe formular el juicio le decimos que las bolillas se tiñeron de negro sólo *después* de la centésima jugada, entonces su juicio deja de ser objetivo puesto que se basa en una declaración "posterior" suministrada por un juicio que nos es subjetivo. En resumen, el modelo es incapaz de dar un criterio objetivo sobre la dirección positiva del tiempo. Sucede lo mismo con las indicaciones que los fenómenos llamados irreversibles en termodinámica debían darnos sobre la dirección del tiempo. Estos fenómenos son en esencia de la misma naturaleza que las disociaciones. La ilusión de que ellos nos dan la dirección positiva del tiempo se debe al hecho de comenzar nuestras observaciones en un momento en que el sistema sobre el cual se opera está en un estado muy alejado de la media (del equilibrio), y a que las fluctuaciones suficientemente amplias capaces de restablecer más o menos el estado inicial, son contadas; al extremo de no producirse nunca en un período, *commensurable con la vida humana o incluso con la vida total de la raza en su conjunto.*

Las fluctuaciones muy reducidas que ocurren a ambos lados del nivel medio, tienen efectivamente su representante en el fenómeno térmico. La teoría mecánica del calor, lo mismo que la física experimental, conocen esas fluctuaciones, esas desviaciones mínimas a partir de la situación media, las que se descubren por observación en determinadas condiciones muy especiales. Veremos enseguida qué importancia pueden tener esas fluctuaciones, por lo común a escala ultra microscópica, para la filosofía de la materia viva y el problema del libre arbitrio.

Hemos visto que un procedimiento de desunión no es capaz de suministrarnos un criterio objetivo sobre la dirección del transcurso

30 del tiempo y es esencialmente por esta razón que, en principio, la segunda ley de la termodinámica no basta para hacerlo. Queda entonces, en el momento actual, un cierto misterio en los fundamentos mismos de toda discusión sobre el fenómeno de la evolución. ¿La impresión que tenemos en cuanto a una dirección específica del transcurso del tiempo, es una ilusión puramente subjetiva? Si ello fuera así ¿qué sentido podría darse a la idea de una evolución progresiva? Todavía hoy no tenemos la respuesta a esta pregunta. Está sin duda íntimamente ligada al problema clásico de la causalidad.



### III

El modelo del cual nos hemos ocupado sirve también para aclarar otros principios que tienen importancia en nuestro estudio. En cierto sentido el proceso de extracciones al azar es *irreversible*. Sería inútil continuar las jugadas siguiendo el procedimiento indicado a la espera de encontrar a las bolillas negras reunidas otra vez en la urna B, tal como se encontraban después de la centésima jugada. No quiere decir que el acontecimiento resulte imposible, pero es de una improbabilidad tan grande que sería insensato esperar su realización en un tiempo razonable. Ahora bien, sabemos que si nos dejan mirar en las urnas y elegir con ayuda visual las bolillas, con gran facilidad podemos reunir en la urna A todas las de color negro. La operación de "extracción" resulta por consiguiente irreversible o reversible según los medios permitidos en la elección de las bolillas que sacamos de las urnas. El proceso de difusión molecular resulta irreversible en termodinámica porque no tenemos los medios de actuar sobre las moléculas individuales. Pero en las operaciones sobre masas de tamaño macroscópico, los seres vivos se encuentran también, con frecuencia, frente a una especie de irreversibilidad prácticamente tan insuperable como la de la termodinámica. Si una sustancia de gran valor económico, por ejemplo, el oro, se encuentra en un lugar cualquiera en un estado de dispersión extrema, mezclado con materiales sin valor, su dispersión resulta para nosotros prácticamente un proceso irreversible, en el sentido que no puede invertirse (para concentrar el oro) sin emplear medios que se excluyen por razones económicas. Así pues, las fuerzas inorgánicas de la naturaleza son en gran

32 parte fuerzas que tienden a la dispersión. Los seres vivos, por el contrario, dependen para su existencia de fuentes materiales y energéticas con un determinado estado de concentración. Poseen por esta razón, órganos y facultades más o menos perfeccionados mediante los cuales concentran las materias que requieren. Esta concentración toma a menudo la forma de una "selección" de las materias requeridas que se encuentran dispersas entre otras materias u objetos sin valor para el organismo. Que esta dispersión sea irreversible o reversible para una especie cualquiera dependerá entonces del grado de perfeccionamiento de sus órganos y de sus facultades de selección. Vemos, además, que en este caso ya no se alcanza a distinguir de manera absoluta entre la reversibilidad y la irreversibilidad; hay que considerar diferentes grados de irreversibilidad, que corresponden a diferentes grados de perfeccionamiento de los órganos y de las facultades de selección de las diversas especies animadas. Una dispersión irreversible para un ser de escasa inteligencia, que depende casi por completo de encuentros aleatorios con las materias necesarias, puede ser reversible (es decir, capaz de reconcentración), para un ser como el hombre que reconoce claramente la situación y que dispone de medios más o menos refinados mediante los cuales obtener provecho.

Es precisamente su riqueza en facultades de selección lo que ha dado al hombre su posición dominante y su magnitud a lo largo del globo terráqueo. Todo nuestro sistema agrícola, minero, manufacturero y de transportes no es otra cosa que un vasto dispositivo capaz de asegurar a cada uno la concentración suficiente, en la vecindad inmediata, de materias y energías que son indispensables o ventajosas.

Aquí tenemos una prueba de la dirección en la cual deberá desarrollarse la energética de los sistemas en evolución orgánica. Todos los seres vivos, al igual que los de la raza humana, son transformadores de energía y poseen propiedades que les permiten dirigir la energía recogida por medios propios hacia la conservación de su vida o a multiplicarse en ese estado. Desde el punto de vista de la física, vemos entonces en la evolución orgánica un proceso de distribución y de redistribución de la materia entre

una cantidad de transformadores de ese tipo. Esta distribución dependerá, por lo tanto, del grado de perfeccionamiento de los dispositivos que permiten a cada uno de los tipos de transformadores recoger la energía y orientarla de modo conveniente para su existencia. En la parte inferior de la escala encontraremos seres que todavía dependen mucho del azar para obtener las energías y materiales necesarios. A medida que se sube en la escala biológica, la probabilidad de obtener lo necesario se hace mayor y el organismo supera al simple azar, con sus dispositivos de selección cada vez más perfeccionados, tales como el tacto, el olfato y sobre todo la vista, que están al servicio de las facultades de una inteligencia más o menos desarrollada. La energética de la evolución orgánica deberá en consecuencia examinar la distribución y redistribuciones de la materia en un sistema que incluye dichos transformadores, en relación con las propiedades que permiten a cada uno de esos tipos de transformadores dirigir la energía en forma adecuada para garantizar su existencia continua o su crecimiento. En esta dirección deberá desarrollarse el análisis matemático del problema. Es probable que este análisis recurra a un artificio que puede parecer extraño. No es necesario que los transformadores motivo de estas discusiones, sean seres vivos efectivamente consumados. Bastará solamente con que tengan las cualidades características que un ser vivo pueda poseer. Para reducir el problema a sus elementos fundamentales será probablemente ventajoso ocuparse de transformadores ideales mucho más simples que los que encontramos en la naturaleza. Este será un procedimiento de abstracción semejante a los que han probado ser tan fecundos en resultados dentro de otras ramas de la ciencia.

Aunque es muy cierto que el ser vivo es capaz de invertir los procesos "irreversibles en sentido macroscópico", ¿le es posible también, hacer lo mismo con los procesos irreversibles en la escala molecular, "irreversible en el sentido de la termodinámica"? Este asunto, muy discutido,<sup>1/</sup> tiene un alcance considerable en la filosofía de la ciencia.

<sup>1/</sup> Véase, por ejemplo, la correspondencia entre Sir James Jeans y los Sres. F.G. Donnan y E.A. Guggenheim, en *Nature*, 1934, páginas 99, 174, 530, 612, 869, 986.

Encontramos alusiones a este problema desde los primeros días de la historia del concepto de irreversibilidad termodinámica. Sir William Thomson (Lord Kelvin) formuló en 1852 el principio de la segunda ley<sup>1/</sup> con estas palabras: "Es imposible mediante agentes materiales *inanimados*, obtener trabajo mecánico de una cantidad de materia enfriándola hasta una temperatura inferior a la del objeto más frío que la rodea". Desde esta primera sugerencia de Kelvin, la cuestión de saber si los seres vivos están fuera del alcance de la segunda ley, ha sido abordada con carácter más o menos definitivo por numerosos autores. En toda esta discusión hay que cuidarse mucho del error. Es cierto que la acción de los organismos vivos presenta a menudo la propiedad de introducir el orden donde reinaba el desorden, mientras que las acciones inorgánicas, por lo general, tienden a destruir el orden para reemplazarlo por el caos, como debe ocurrir de acuerdo con la ley de disipación. Pero este establecimiento del orden por agentes animados, no exige de ningún modo una infracción a la ley. Como hace tanto que la tierra recibe del sol un flujo de energía utilizable (es decir, a un nivel superior al de las energías terrestres), es posible, sin violar la segunda ley, que determinadas partes del sistema terrestre sufran cambios destinados a establecer el orden, la organización.

No estamos por consiguiente forzados a invocar de los organismos una facultad extraordinaria que los pondría en condiciones de descuidar la ley de la disipación; queda sin embargo la posibilidad de que posean tal facultad, mas es necesario decir que si la poseen, parecen servirse de ella en forma y medida muy limitadas. No obstante, a causa de determinadas e importantes consecuencias que eso implicaría, no podemos ignorar totalmente esta posibilidad. Porque aquí estamos muy cerca del clásico problema del libre albedrío.

La intuición nos impone una convicción irresistible de que somos la *causa* de los acontecimientos que hemos *intentado* con éxito. Confiere por lo tanto a nuestra voluntad un papel importante en la determinación del curso efectivo de las cosas. Sin embargo, esta

<sup>1/</sup> Esta ley puede expresarse bajo diversas formas que son sin embargo, equivalentes.

convicción de un cierto poder voluntario en el control del mundo, no concuerda con la impresión tan generalizada que nos han dado los estudios clásicos de las ciencias físicas.

Las leyes de la física no dejaban al parecer ninguna libertad. En nuestras fórmulas, que no contienen ningún término representativo de la intervención de la *voluntad*, cierto estado actual del mundo tendría determinada totalmente su historia hasta el infinito, y esto sin alternativa.

Sin embargo, esta forma de ver no es completamente lógica. Porque decir que las fórmulas bastan para describir el curso de los acontecimientos *tal como los observamos*, no excluye la posibilidad de que sean incapaces para describir al genuino fenómeno *integral* que, como se puede imaginar, abarca importantes elementos que escapan a nuestra observación. Decir que los elementos que sistemáticamente se escapan a la observación no tiene ninguna importancia práctica, es hablar a la ligera. Los pensamientos, emociones y deseos del prójimo tienen seguramente importancia práctica, aunque sea por completo imposible observarlos, o aun establecer positivamente su existencia. El filósofo, y no el hombre práctico, es quien se atreve a dudar de estas cosas.

Ahora bien, los recientes desarrollos de las ciencias físicas han ampliado aún más la duda sobre la capacidad de nuestras fórmulas para describir enteramente los fenómenos fundamentales del mundo. Estos progresos modernos no sólo han llamado la atención sobre el hecho de que nuestras toscas observaciones lo son únicamente de los efectos globales, medios y estadísticos, sino que han demostrado además que todas nuestras vías de observación, todos nuestros dispositivos experimentales, son por su misma naturaleza, y en principio, incapaces de informarnos de modo exacto y completo sobre los datos últimos y fundamentales de los sistemas físicos. El famoso "principio de incertidumbre" nos dice que *ningún dispositivo material* permite obtener una medida exacta de la posición y al mismo tiempo de la velocidad de un punto material. Una u otra de esas magnitudes puede observarse con una precisión que aumentará sin límites a medida que perfeccionemos el instrumental. Pero habiendo determinado una de las dos, sólo podemos conocer a la otra

36 con aproximación, y esto no en razón de la imperfección de los aparatos o de los experimentadores, sino en virtud de una cualidad primitiva e intrínseca de las cosas.

Desde el punto de vista práctico, el principio de incertidumbre tiene, por lo común, escasa importancia en la medida que consideremos a la materia a través de dimensiones aproximadas. Es cuando nuestras experiencias o reflexiones se hacen sobre fenómenos a escala atómica o sub-atómica, cuando no basta con tratar los efectos medios. En tal caso nos vemos obligados a considerar los desvíos que sufren las partículas individuales en las fluctuaciones mínimas alrededor de la media admitida por el pretendido *equilibrio* termodinámico. También en este caso, el principio de incertidumbre hace imposible la previsión exacta de los acontecimientos, y debe introducir en la cuestión del mundo algo que nos parecerá caprichoso.

Ahora bien, como nos lo ha hecho ver M.R.S. Lillie, ésta es precisamente una característica de los seres vivos: que su acción depende de su estructura verdadera, de detalles microscópicos y ultra microscópicos de sus cuerpos. Determinados efectos que se desarrollan a escala microscópica o aún más pequeña, se traducen, a través de una organización dispuesta precisamente para ese propósito, en efectos macroscópicos, como el movimiento de los miembros a través de los cuales el ser vivo actúa sobre lo que le es inmediato. Resulta así que el elemento mudable que, por lo común, sólo se hace sentir en los acontecimientos atómicos o sub-atómicos, emerge, por acción del organismo, a la esfera de los fenómenos observados a simple vista. Debemos estar dispuestos a admitir esta idea, por lo menos a título de hipótesis.

Según esta manera de ver, lo que distingue a los organismos de la materia inanimada, no es la presencia en ellos y ausencia en ésta de una cualidad especial, sino la presencia de un dispositivo que traduce a escala macroscópica determinados efectos que, en la materia inanimada, para nuestras observaciones demasiado burdas, se anulan entre ellos.

En principio, no hay nada misterioso en la emergencia que aquí tratamos. Es simplemente la emergencia fuera de las regiones, que

por su escala minúscula, escapan a nuestra observación, a la esfera de las cosas cognoscibles mediante nuestros sentidos. He dicho esto porque ciertos autores han atribuido a la idea de emergencia,

*evolución emergente*, un significado místico, según el cual tendríamos en esta idea algo que caracteriza ciertas relaciones, ciertos procesos exclusivos de los seres vivos. La emergencia de que estamos hablando se encuentra cada vez que nos ocupamos de observaciones o relaciones que franquean los límites entre lo visible y lo invisible, lo sensible y lo insensible.<sup>1</sup> En cuanto a la emergencia mística, introduce un nuevo vocablo en nuestro razonamiento sin introducir nuevos hechos. Hay que desconfiar de esos verbalismos. Con la palabra disimulamos nuestra ignorancia. Extinguimos nuestra curiosidad sin satisfacerla. Energía nerviosa, fuerza vital, entelequias, *et hoc genus omne*, son nombres que vagan por el mundo en busca de un sujeto al cual aplicarse. No es así como progresa la ciencia. Es preciso encontrar el sujeto y probar la necesidad de darle un nombre antes de celebrar el bautismo. ¿No resulta extraño que una verdad captada hábilmente por el espíritu extravagante de un Moliere haya escapado al pensamiento severo de determinados filósofos?

#### RESUMEN

Antes de considerar en forma más definitiva los problemas particulares que serán tratados a continuación, será útil recapitular brevemente los principios generales que hasta aquí hemos señalado.

La evolución de un sistema material ha sido tratada como la redistribución progresiva de la materia entre sus componentes. Según que estos últimos se definan en términos físico-químicos (elementos, compuestos, fases) o en términos biológicos (especies de seres vivos y su medio) estaremos tratando, por una parte, con la evolución físico-química o, por la otra, con la evolución orgánica. En un sistema en evolución físico-química, los enlaces tienen forma fija, invariable con el tiempo. El estudio de sistemas de esta categoría comprende por un lado la estoquiometría, que se ocupa de

<sup>1/</sup> No hay nada oculto cuando M. Jourdain "emerge" de la calle Cambon en el momento que paso por la esquina de esta calle al pasearme a lo largo de la calle Rivoli. Simplemente; los edificios me habían obstruido la vista.

38 las relaciones entre las cantidades de materia (masas) que participan en las transformaciones físico-químicas y comprende por otro, la dinámica, o más exactamente, la energética química, que se encarga de las relaciones entre las transformaciones de energía que acompañan las transformaciones de la materia. Además, podemos en general interesarnos por las *velocidades* con que ocurren las transformaciones, o también podemos poner atención especialmente sobre el caso en que las velocidades se anulan, de tal forma que se produce un estado estacionario. Dicho de otra manera, podemos considerar la *cinética* o la *estática* de sistemas en evolución físico-química. Por último, estudiando estos sistemas, podemos ocuparnos de las agregaciones moleculares como un todo, como lo hace por lo general la termodinámica, o podemos llevar el análisis más lejos y tener en cuenta acontecimientos a escala molecular, atómica y aun sub-atómica.

Quando los componentes del sistema considerado se definen en términos biológicos, en contraste con la situación anterior los enlaces se caracterizan por ser variables, funciones del tiempo. En consecuencia, en ese caso distinguimos dos aspectos diferentes de la evolución del sistema: 1) la evolución intraespecífica, que se ocupa de los cambios en las características de las especies biológicas, considerada como una distribución de la materia entre los diversos tipos que componen cada especie, y 2) la evolución inter-específica, que se ocupa de los cambios en la distribución de la materia del sistema entre las diversas especies biológicas y su medio. Además, un estudio de este tema que pretenda ser enteramente completo deberá comprender una discusión sobre: a) las relaciones entre las cantidades de materias (masas) que entran en juego, y b) las relaciones entre las transformaciones de energía que acompañan el proceso de evolución. También aquí, como en el caso de los sistemas físico-químicos, será obvio dividir las discusiones sistemáticas en dos partes, una cinética y una estática, según que nos ocupemos en particular de las *velocidades* de los cambios, o de los *estados estacionarios* o cuasi estacionarios hacia los cuales tienden los cambios del sistema en evolución y que algunas veces se implantan más o menos definitivamente en un sistema. Por último,



hemos comprobado que los efectos globales son los que en los sistemas físico-químicos se prestan con mayor facilidad a la observación, los individuos en cuanto tales (moléculas, átomos, etc.) escapan a nuestra percepción; que por el contrario en los sistemas integrados con seres vivos, esos individuos constituyen por lo general los objetos de nuestra observación directa, mientras que los efectos globales, las acciones colectivas de esos individuos, deben aprehenderse con métodos especiales.

Hemos observado indudables dificultades relacionadas con el concepto de cambios *progresivos*, no sólo porque nos falta una definición objetiva y satisfactoria de lo que constituye el progreso, sino también en razón de una incertidumbre fundamental que existe sobre el tema de la dirección en el transcurso del tiempo, acerca del cual, en estos momentos, no poseemos ningún criterio objetivo completamente satisfactorio. Estamos forzados, por lo tanto, a desarrollar mediocrementemente el análisis, basándonos mientras en nuestro juicio subjetivo sobre la naturaleza asimétrica del transcurso del tiempo. La variable  $t$  entrará en nuestras discusiones con el sentido que intuitivamente damos a la palabra "tiempo". En esto, seguimos por otra parte una costumbre aceptada comúnmente sin discusión en el análisis de los fenómenos naturales. No obstante, sería necesario aclarar, para un estudio sistemático y racional de los sistemas en evolución, determinadas dificultades que afectan a las bases mismas del tema.

Hay un asunto quizá más esencial que se introduce en el análisis del problema de la evolución y que se origina en el "principio de incertidumbre", según el cual la propia naturaleza de los fenómenos hace imposible siempre el conocimiento del estado de un sistema físico con bastante detalle como para poder deducir de este conocimiento el curso de los sucesos ulteriores. Este tipo de incertidumbre se hace sentir en particular en los fenómenos a escala molecular o más reducida; y del hecho que las acciones de los seres vivos dependan en gran parte de fenómenos a esta escala, hemos sacado la conclusión provisional de que el libre albedrío podría incluirse definitivamente en el orden de la naturaleza por medio del "principio de incertidumbre".

40      Habiendo resumido así los conceptos y los principios fundamentales, estamos listos para abordar definitivamente el análisis de la evolución de un sistema biológico; dicho de otra forma, para desarrollar la teoría analítica de las asociaciones biológicas. Comenzaremos este análisis por la estequiometría biológica, es decir, por la discusión de las relaciones entre las cantidades de *materia* (las masas) contenidas en las diversas especies que componen el sistema. La discusión de la energética de tales sistemas, de la cual poseemos hoy sólo los rudimentos, constituirá el tema de capítulos futuros.

IV

ESTOQUIOMETRIA BIOLOGICA

Admitiendo que en todo instante la velocidad de crecimiento de cada especie en el sistema considerado depende de la magnitud de esta especie y de todas las restantes especies presentes, así como de los parámetros  $P$  y  $Q$ , hemos señalado antes que la expresión analítica de esta proposición muy general toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= F_1 (X_1, X_2, \dots X_n; P, Q) \\ \frac{dX_2}{dt} &= F_2 (X_1, X_2, \dots X_n; P, Q) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dX_i}{dt} &= F_i (X_1, X_2, \dots X_n; P, Q) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dX_n}{dt} &= F_n (X_1, X_2, \dots X_n; P, Q). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

También se ha señalado que cuando nos ocupamos de un período de observación relativamente corto, podemos con frecuencia despreciar las modificaciones en los parámetros  $Q$  que reflejan los cambios intraespecíficos de evolución muy lenta.<sup>1/</sup> Vamos a consi-

<sup>1/</sup> Al lado de estos cambios *esenciales* en la naturaleza íntima de las especies, vamos a considerar también, algunos cambios que podríamos llamar *adventicios*, es decir, más o menos superficiales, como son los cambios en la distribución por edad de los individuos de la especie. Más tarde veremos que en algunos casos el efecto de estos cambios entra sin dificultad en nuestro análisis. Es necesario decir que, en otros, introduce complicaciones bastante serias. Por el momento despreciaremos ese factor.

42 derar entonces lo que llamaremos "evolución interespecífica pura". Además, podemos interesarnos particularmente por el caso especial donde las condiciones generales del sistema (clima, topografía, etc.) permanecen constantes. En cuyo caso los parámetros  $P$  también son invariables, y escribimos simplemente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= F_1 (X_1, X_2, \dots X_n) \\ \frac{dX_2}{dt} &= F_2 (X_1, X_2, \dots X_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dX_i}{dt} &= F_i (X_1, X_2, \dots X_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dX_n}{dt} &= F_n (X_1, X_2, \dots X_n). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

La naturaleza precisa de las funciones  $F$  deberá investigarse mediante observaciones experimentales. Sin embargo, como veremos más tarde, algunas consideraciones muy generales nos permiten extraer de esas ecuaciones fundamentales conclusiones de considerable alcance. Nuestra investigación toca aquí la rama especial de la biología llamada *ecología*, ciencia que se ocupa de reunir tanta información cuantitativa como sea posible sobre la dependencia de las especies entre sí y con su medio. Los métodos que sirven para este propósito se han implantado, en la actualidad, satisfactoriamente. La simple estadística agrícola, del capital vivo actual, de la producción y del consumo provee datos fundamentales para las especies domésticas en su relación con la raza humana. Igualmente, cuando se trata de colonias experimentales de organismos de cualquier especie, la observación presenta sólo escasas dificultades. Para las especies salvajes, el problema es más difícil. Las plantas, que por su naturaleza permanecen prendidas a un lugar fijo, se prestan mejor para un censo, existiendo para ello métodos adecuados. Entre los animales, son quizá las especies acuáticas las

que ofrecen mayor facilidad para la investigación ecológica. Basta con examinar los contenidos de la red de los pescadores para obtener una primera indicación de la frecuencia relativa de algunas especies. Mejoramientos de este método primitivo, el uso de redes pequeñas y otros instrumentos especiales, suministran incluso datos cuantitativos sobre la flora y fauna acuática y del fondo del mar. La disección de estómagos de peces y de otros seres acuáticos, provee informaciones sobre la distribución de las especies devoradas en el alimento de las especies devoradoras. Este método se aplica muy bien, por otra parte, a las especies terrestres y a los pájaros. Los estudios ecológicos de este género tienen una gran importancia económica por las informaciones que nos dan sobre el carácter útil o dañino de los animales que nos rodean. También en este campo los trabajos han sido impulsados activamente, de manera que existe hoy sobre el tema considerable literatura.<sup>1</sup>

Desde un punto de vista cualitativo la dependencia mutua de las especies biológicas (que se expresa en nuestro análisis por las funciones F), toma formas muy variadas. Esta dependencia puede ser de tipo *coordinado* o *subordinado*. La primera categoría comprende todos los casos en los cuales dos especies se encuentran en competencia, ya sea por una fuente de alimentos o por cualquier otra conveniencia común, por ejemplo, el lugar que habitan. Esta competencia puede ser pasiva: cada una de las especies influye en la otra directamente disminuyendo el alimento o cualquier comodidad que se ofrece a sus requerimientos comunes. Puede ser activa cuando las dos especies se disputan, en un combate que puede resultar mortal, los bienes que ambas intentan aprovechar. No hay necesidad de decir que en muchos casos ocurrirá una competencia de carácter mixto, pasiva y más o menos activa.

La dependencia de tipo *subordinado* es aquella donde una de las dos es útil a la otra. El caso más común de este tipo es aquél donde la especie víctima, o un producto de esta especie, sirve de

<sup>1</sup>/ Indicaciones muy detalladas sobre esta literatura se encontrarán en las notas bibliográficas de la obra de R.N. Chapman, *Animal Ecology* (Burgess-Roseberry Co., Minneapolis, 1926, 1927).

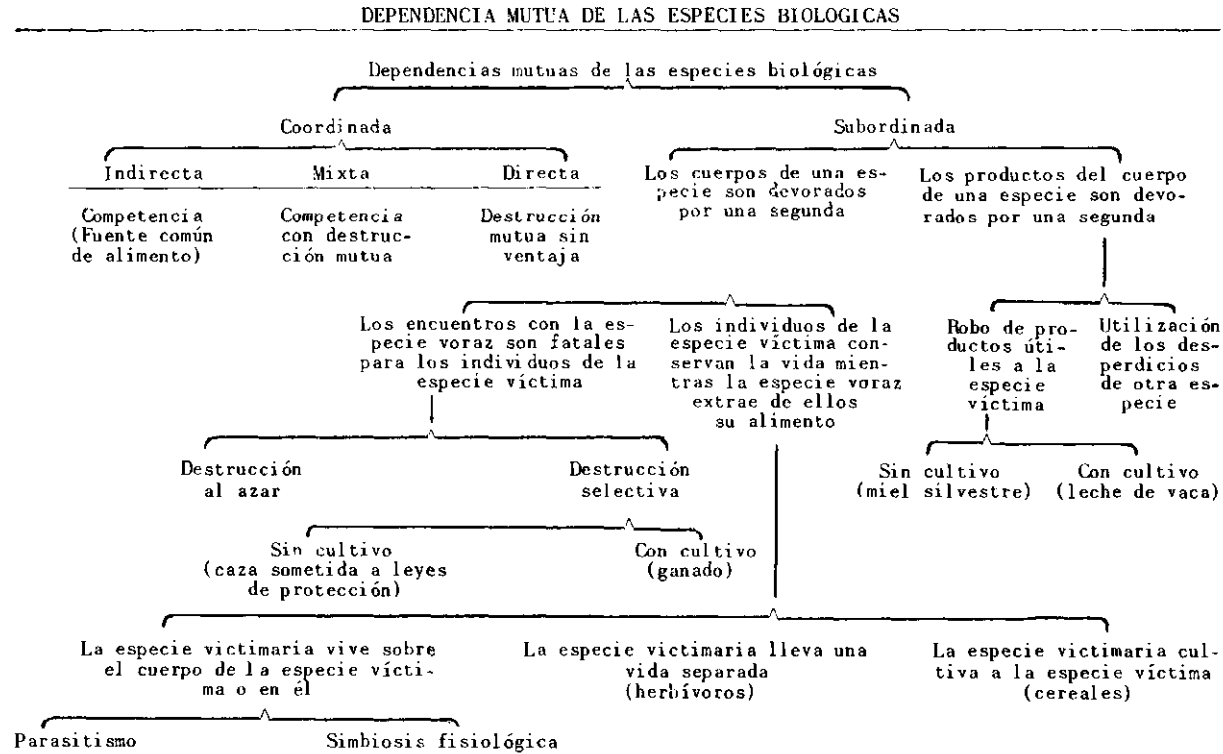
44 alimento a una segunda. Si los mismos individuos de la especie víctima son explotados por la especie voraz, se distinguirán dos casos: en el primero, la víctima conserva la vida, más o menos estropeada, mientras que el victimario se alimenta de la sustancia o de los productos de digestión incompleta de la víctima. El daño causado a la especie víctima puede ser relativamente escaso, como ocurre con algunos parásitos irritantes, pero poco dañinos, o el de las plantas, algunas de cuyas partes las consumen los animales herbívoros. El daño puede ser grave, como en el caso de los parásitos que debilitan su huésped, en ocasiones muy considerablemente hasta el punto de amenazar su vida.

El segundo caso de interdependencia subordinada es aquél, muy característico de los carnívoros, en el cual el victimario mata a su víctima inmediatamente y la devora. Generalmente las víctimas están determinadas más o menos por el azar, una vez que el individuo atrapado resulta aceptado por el victimario. Sin embargo, la especie humana ha desarrollado un sistema muy particular: elige sus víctimas, no ya al azar, sino cuidando de dejar con vida, sea en libertad o en cautiverio, un "rebaño" que asegure la existencia continua, en cantidad suficiente, de la especie víctima.

Estos diferentes modos de dependencia mutua entre las especies de los seres vivos, así como algunos más, se han resumido en el cuadro 1, que el lector podrá ampliar a su gusto.

*Encadenamiento de especies.* Las relaciones entre las diversas especies se vuelven muy complicadas en la naturaleza dado que la mayoría de ellas come un alimento mixto que contiene un gran número de otras especies, y además, muchas especies no tienen un solo enemigo sino varios que las devoran. Resulta así un encadenamiento complejo, en el cual cada forma se encuentra entrelazada con un determinado número de especies que le son superordenadas y otro determinado número que le son subordenadas. Tan sólo, para algunos grupos de animales, tales como el arenque y las especies que directa o indirectamente le sirven de alimento, se han hecho estudios bastante completos. El cuadro 2, tomado de las investigaciones de A.C. Hardy, ilustra acerca de las complicadas relaciones que debemos considerar.

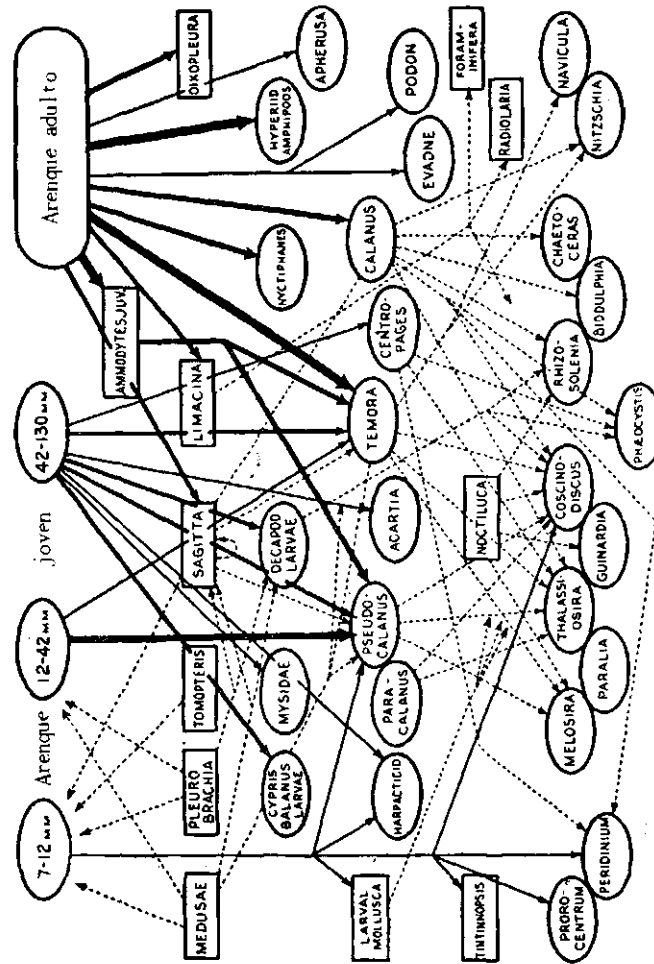
Cuadro 1



Si, en el esquema del encadenamiento general, aislamos una línea particular, uniendo a una primera especie una segunda que la devora, una tercera que devora a la segunda y así sucesivamente, obtenemos lo que se ha llamado una cadena alimenticia (food chain). M.C. Elton ha hecho reflexiones muy interesantes de carácter general con referencia a estas cadenas. Dicho autor ha puesto de mani-

Quadro 2

EL ARENQUE Y LAS ESPECIES QUE DIRECTA O INDIRECTAMENTE LE SIRVEN DE ALIMENTO<sup>a/</sup>



a/ Se observa la influencia del tamaño del pez joven y adulto en la elección de su alimento. (Segun A. C. Hardy, The Herring in Relation to its Animate Environment, Part. I Ministry of Agriculture and Fishery Investigations, 1924, Series 2, Vol. 7, No. 3, Repro- ducido con autorización del Controller of his Britannic Majesty's Stationery Office).



fiesto que no es puramente el azar quien regula el carácter y longitud de tales cadenas: "Hay límites bien definidos, tanto inferiores como superiores en el tamaño de la víctima de la cual un carnívoro puede alimentarse. No puede atrapar y devorar un animal por encima de un cierto tamaño, porque le falta la fuerza y la agilidad. Tampoco puede alimentarse de animales por debajo de determinada talla, ya que en el curso del día le sería imposible obtener una cantidad suficiente". De aquí resulta que una cadena alimenticia sólo puede comprender un determinado número de miembros; número que muy raramente será superior a cinco.

El cuadro 1 sugiere una observación adicional. La interacción entre las diversas especies es mutua, pero no es, en general, recíproca. Es decir, aunque hay excepciones notables, una de las especies que está en relación mutua es por lo general útil a la otra, mientras que la segunda es perjudicial a la primera. Las excepciones son casos de simbiosis con beneficios recíprocos. Lo que nos interesa aquí, y que deberá interesarnos más posteriormente, en los capítulos sobre la dinámica biológica, es que reencontramos aquí, en la discusión de relaciones biológicas completamente generales, un concepto -el concepto de utilidad positiva y negativa- que a primera vista parece especialmente económico.

El hecho es que las necesidades económicas nacen naturalmente de nuestras necesidades biológicas y que la economía política referida a la raza humana, en el fondo, no es más que una economía política muy particular. La teoría del valor debe buscar sus principios fundamentales en la biología, y en especial, en la teoría analítica de las asociaciones biológicas. Tendremos ocasión de volver sobre este tema.

Después de haber reseñado algunas de las relaciones más características entre los seres vivos de diversas especies, volvemos a la representación analítica de estas relaciones, el sistema de ecuaciones (5).

Buscamos los valores de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  que corresponden a un estado estacionario, es decir aquellos valores para los cuales se anulan todas las velocidades  $\frac{dX}{dt}$ . Ponemos entonces:

$$F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F_n = 0 \quad (6)$$

y obtenemos un<sup>1/</sup> conjunto de valores:

$$X_1 = C_1 \quad X_2 = C_2 \quad X_n = C_n. \quad (7)$$

Introducimos las nuevas variables:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 - C_1 \\ x_2 &= X_2 - C_2 \\ x_n &= X_n - C_n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

de modo que las ecuaciones (5) toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ahora bien, no conociendo la forma precisa de las funciones  $f$ , y contentándose con suponer que es posible desarrollarlas en series de Taylor, pueden extraerse algunas conclusiones importantes de las ecuaciones.

Según Taylor, entonces colocamos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + a_{i11} x_1^2 + \\ &+ a_{i12} x_1 x_2 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>1/</sup> Pueden, en general, existir cero, uno o varios conjuntos de valores que satisfagan la ecuación (6) y correspondan a otros tantos estados estacionarios. En lo que sigue fijaremos nuestra atención en uno cualquiera de éstos.

de modo que si damos a  $i$  todos los valores de 1 a  $n$ , tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales simultáneas. 49

Se conoce la siguiente solución *formal* del sistema (9):

$$\left. \begin{aligned} x_i = & G_{i1} e^{\lambda_1 t} + G_{i2} e^{\lambda_2 t} + \dots \\ & + G_{i11} e^{\lambda_1 t} + G_{i12} e^{(\lambda_1 + i\alpha)t} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

es decir, de la forma de una serie ordenada según las potencias crecientes de  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ , ... siendo los coeficientes  $\lambda$  raíces de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = D(\lambda) = 0 \quad (12)$$

Cuando las series (11) son convergentes representan el curso del crecimiento o decrecimiento de las cantidades  $x$  (y en consecuencia de las  $\dot{X}$ ). Pero de cualquier manera las raíces  $\lambda$  nos dan informaciones importantes sobre la naturaleza del estado estacionario con el cual se relacionan. Siendo las  $x$  suficientemente pequeñas, podemos despreciar, en la cercanía inmediata a este estado, los términos no lineales en las series de Taylor (10) y en ese caso la solución (11) se reduce a los términos lineales:

$$x_i = G_{i1} e^{\lambda_1 t} + G_{i2} e^{\lambda_2 t} + \dots \quad (13)$$

Queda entonces claro que si todas las raíces  $\lambda$  son negativas, o complejas con su parte real negativa, estamos frente a un estado estacionario estable, ya que en ese caso, cada  $x_i$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

Al contrario, y por igual razonamiento, si uno solo de los  $\lambda$  es positivo o tiene una parte real positiva, el estado estacionario no puede ser estable.

50 Generalizando, la naturaleza del estado estacionario depende de las raíces  $\lambda$ . Aun cuando el número de especies, y por consiguiente el número de raíces  $\lambda$ , sea sólo dos, es posible obtener una cantidad de combinaciones diferentes que dan nacimiento a otros tantos caracteres distintos de estados estacionarios. Los criterios analíticos que corresponden a esos diversos tipos de estados estacionarios han sido discutidos en detalle en otro título de esta serie<sup>1/</sup> por M.V.A. Kostitzin, me conformo con reproducir aquí (gráfico 3) una lámina tomada de mis *Elements of Physical Biology* (1925) que ilustra varios de esos tipos. Los diagramas de esta lámina deben interpretarse así:

Para destacar claramente las características de los diferentes tipos posibles de estados estacionarios en el caso de dos especies biológicas, conviene eliminar la variable  $t$  de las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

de manera que se tiene:

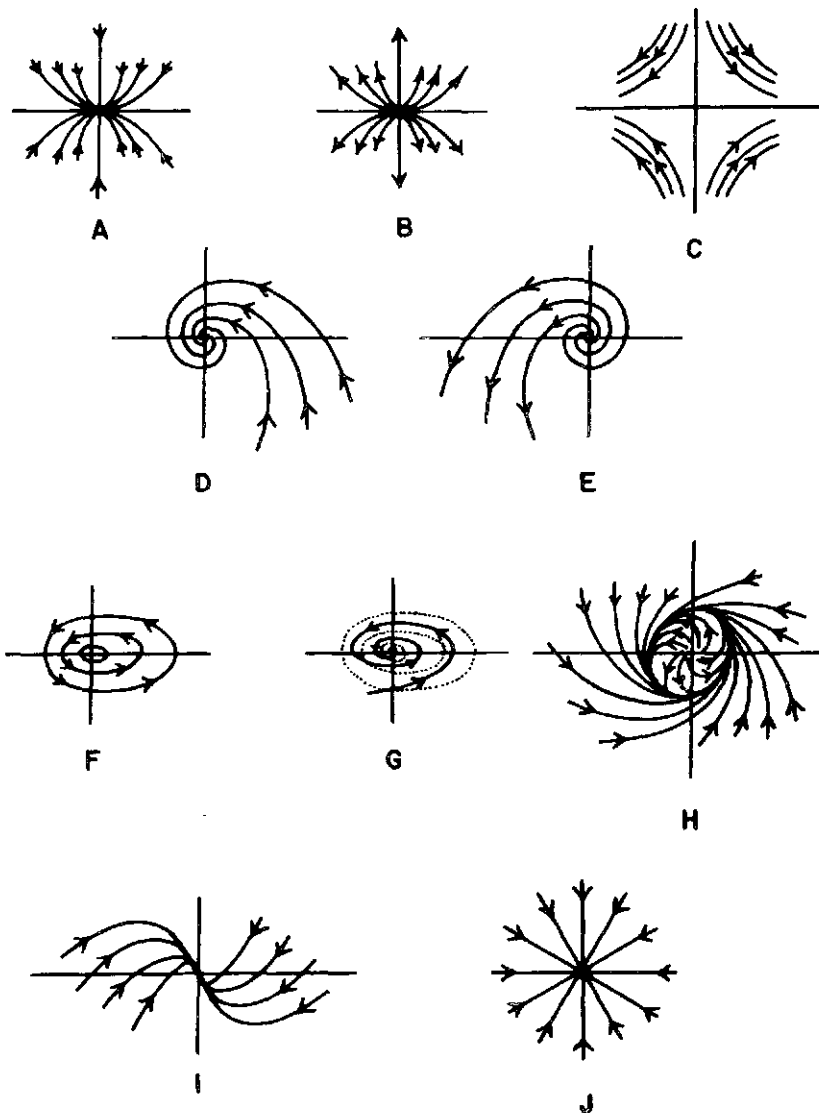
$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} \quad (15)$$

Representamos las variables  $x_1$  y  $x_2$  por las abscisas y ordenadas de un sistema rectangular (véase el gráfico 3). La ecuación (15) define entonces una familia de curvas integrales donde todas pasan por el origen, es decir, por un punto especial:

$$f_1 = f_2 = 0 \quad (16)$$

<sup>1/</sup> N° 96 - Symbiose, Parasitisme et Evolution, 1934.  
N. del T. Se refiere aquí a la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles" de la Editorial Hermann y Cie. Paris.

DIAGRAMAS REPRESENTATIVOS DE VARIOS TIPOS DE ESTADOS ESTACIONARIOS EN UN SISTEMA QUE COMPRENDE DOS ESPECIES BIOLÓGICAS



52 el cual representa un estado estacionario. El comportamiento de las curvas integrales depende, en la proximidad de ese punto especial, de las raíces de la ecuación característica (12). Partiendo de un estado inicial cualquiera, los tamaños  $x_1$ ,  $x_2$  de las dos especies biológicas sufren alteraciones (crecimiento o disminución), de manera que el punto que representa el estado del sistema en cada instante traza una curva sobre el diagrama. Diremos que el sistema recorre el camino indicado por una u otra de las "curvas integrales" que aparecen en la ilustración, donde la dirección del movimiento se indica con una flecha.

Se puede presentar un cierto número de casos. Cuando las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son ambas reales y negativas, las curvas integrales van directamente al origen, las flechas están dirigidas hacia él (véase el gráfico 3 A). Se presenta un caso similar si las dos raíces son reales y positivas (véase el gráfico 3 B); pero aquí el estado estacionario es inestable, las flechas se alejan del origen. Cuando las dos raíces  $\lambda$  son reales, pero una positiva y la otra negativa, se da el caso representado en el gráfico 3 C. El estado estacionario es inestable. El caso del gráfico 3 D corresponde a dos raíces  $\lambda$  complejas conjugadas, cuya parte real es negativa. En ese caso las curvas integrales son espirales que giran alrededor del origen, aproximándose a él indefinidamente, pero sin alcanzarlo nunca. Evidentemente, aquí también se da un caso de estado estacionario estable, pero las  $x_1$  y  $x_2$ , en lugar de aproximarse a dicho estado por un camino directo, sufren oscilaciones amortiguadas, que convergen indefinidamente hacia ese estado sin alcanzarlo jamás exactamente. El caso E es parecido, pero el origen representa un estado inestable; las raíces  $\lambda$  son complejas, con la parte real positiva y las espirales toman una dirección que se aleja del origen.

El diagrama F se encuentra en algunos casos cuando las raíces son cantidades imaginarias puras. En esas circunstancias se producen oscilaciones periódicas, no amortiguadas, que continúan hasta el infinito. Constituye un caso excepcional, pero de un especial interés en teoría y también en la práctica. Por lo general, cuando las dos raíces  $\lambda$  son cantidades imaginarias puras se producen es-

pirales del tipo G o H.<sup>1/</sup> Los casos I y J se presentan cuando la ecuación característica tiene una raíz doble.

*Casos particulares.* Tanto en lo que precede, como en mis publicaciones anteriores, el análisis se ha desarrollado desde un punto de vista general para el caso de  $n$  especies, siendo  $n$  un número cualquiera.<sup>2/</sup> Muchos casos particulares entran en el general, con la sola precaución de dar a  $n$  su valor especial, y a las otras características la forma conveniente para el caso del cual se trate. Hay, no obstante, casos excepcionales que requieren un tratamiento mediante métodos especiales. Son aquéllos para los cuales determinados coeficientes  $a_{ij}$  se anulan en las series de Taylor (10). La consideración de dichos casos, que por otra parte presentan a menudo un interés particular, debe reservarse para un fascículo ulterior.

Para concluir y preparar la Segunda Parte de este estudio, vamos a señalar aquí brevemente el caso donde una sola especie se desarrolla en apariencia en forma independiente de sus contemporáneas. En efecto, aunque en verdad ninguna especie es realmente independiente, la observación nos dice que en determinadas circunstancias el crecimiento de la población de una especie determinada sigue una curva que puede definirse por completo en términos de esa misma especie, sin mención explícita de otras. En este caso, el sistema de ecuaciones fundamental (5) se reduce por consiguiente, a una sola:

<sup>1/</sup> Para una discusión más detallada remitimos al lector al examen crítico de los puntos especiales de esas curvas integrales, que han desarrollado, particularmente, H. Poincaré y E. Picard. Un ejemplo del tipo G se encuentra en A. J. Lotka, *Contribution to Quantitative Parasitology, Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1923, página 152.

<sup>2/</sup> A causa de un malentendido, cuya explicación se me escapa, varios autores (véase, por ejemplo, V. Volterra, *Leçons sur la Théorie de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, 1931, p. 4; R. Risser, *Applications de la Statistique et la Démographie à la Biologie*, Gauthier-Villars, 1932, p. IX) han difundido la impresión de que sólo he tratado el caso para dos especies. Sin embargo, he basado toda la discusión desde mis publicaciones de 1912, y, más en detalle, en mi libro *Elements of Physical Biology*, 1925, en forma muy clara, sobre el caso general de  $n$  especies.

$$\frac{dX}{dt} = F(X). \quad (17)$$

Admitamos que  $F(X)$  puede desarrollarse según Taylor, colocamos:

$$\frac{dX}{dt} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \dots \quad (18)$$

Como se requiere por lo menos una hembra para crear una población, es evidente que la constante  $a_0$  debe anularse.

El caso más simple sería entonces:

$$\frac{dX}{dt} = a_1 X \quad (19)$$

$$X = X_0 e^{a_1 t}. \quad (20)$$

Es decir, un crecimiento de acuerdo con la ley del interés compuesto, la llamada ley "de Malthus". Se sabe, en efecto, que en determinadas condiciones una población crece, al menos durante un período limitado, según esta ley.

La ley de Malthus, evidentemente, no puede traducir en forma indefinida el crecimiento de una población, puesto que los valores que da sobrepasan por último todos los límites. Debe haber de hecho, por lo menos, un valor de  $X$ , distinto de cero, para el cual la velocidad de crecimiento se anula. La expresión  $\frac{dX}{dt}$  debe, por consiguiente, tener un factor  $(C-X)$ . La expresión más simple que satisface esta condición, al mismo tiempo que se anula con  $X$ , es:

$$\frac{dX}{dt} = KX (C - X) \quad (21)$$

$$X = \frac{C}{1 + Q e^{-Kt}} \quad (22)$$

Esta es la ley de Verhulst (1844), resucitada independientemente por Pearl y Reed en 1920, y reconocida por Lotka, en 1925, como un caso especial de su sistema fundamental (2); reconocida también como un caso especial de expresiones generales por Volterra en 1926.



Existe una literatura bastante extensa sobre fórmulas adecuadas para describir el crecimiento de una población. Se encuentra indicada en G. Teissier, *Croissance des populations et croissance des organismes: Examen historique et critique de quelques théories*, *Annales de Physiologie et de Biochimie Biologique*, 1928, p. 342. Para nuestro propósito actual estas indicaciones serán suficientes. Puesto que el caso de una especie considerada en sí misma ofrece un campo de estudio de una extensión tan vasta, será necesario consagrarle una o quizá varias monografías especiales. Y esto ocurre porque existe determinada especie sobre la cual poseemos una abundancia de información que no tiene rival: la especie humana.



## SEGUNDA PARTE

### ANALISIS DEMOGRAFICO CON ESPECIAL APLICACION A LA ESPECIE HUMANA

" Dans les questions compliquées le bon sens a besoin d'être guidé par les résultats du calcul; les formules ne créent pas l'esprit de finesse, mais en facilitent l'usage. "

Emile Borel.

## INTRODUCCION

Las especies de los seres vivos se encuentran en relación mutua, de manera que en verdad, sería imposible un estudio completo de una especie cualquiera sin tener en cuenta un número considerable de otras especies que influyen sobre aquella de una forma u otra.

Sin embargo, entre los factores internos de una población de seres vivos (tales como su natalidad, mortalidad, su crecimiento, etc.), existe un gran número de relaciones que permiten, y aun requieren, un estudio especial, sin que sea necesario tener presente a cada paso, en forma explícita, la influencia de otras especies que habitan el mismo lugar. Tal estudio, en efecto, constituye un conjunto bien definido de investigaciones y resultados, el cual abordamos en el presente fascículo, ocupándonos en particular de la especie humana, acerca de la cual se poseen abundantes datos de observación.

Ahora bien, hay que destacar que el estudio demográfico y sociológico de la especie humana comprende un número de relaciones que, en las otras especies, o bien no existen en absoluto o bien desempeñan un papel secundario. Es así que un número de problemas estadísticos y sociológicos particulares de la especie humana derivan,

58 por ejemplo, de las leyes esencialmente monógamas de los pueblos civilizados y de la adolescencia tardía del hombre. Las estadísticas sobre el estado civil, la esterilidad y la fecundidad de los matrimonios, la familia, los huérfanos, etc., y los problemas que de allí surgen, solamente existen, por así decir, para nuestra especie, aunque sean en el fondo aspectos particulares del fenómeno general de la reproducción biológica. La posición central que ocupa para nosotros el género humano en el cuadro de la naturaleza, da a las aplicaciones de esos problemas familiares una importancia de primer orden, aunque las limitemos a una sola especie. Debemos, por lo tanto, ocuparnos de ella.

*La estadística demográfica.* Sería ocioso desarrollar el análisis teórico de cualquier situación de la naturaleza, si se careciese de datos de observación. Por el contrario, una vez que la observación nos ha suministrado datos empíricos, surge el problema, mejor dicho la necesidad, de analizar las relaciones que existen entre ellos para comprender esos datos. Dicho análisis puede aún considerarse como fruto de la experiencia, por ejemplo, en lo que respecta al examen puramente aritmético de la relación entre las variaciones de la densidad y de la tasa de mortalidad de una población. No puede negarse la gran importancia de estudios de este género, los cuales están comprendidos esencialmente en la ciencia denominada *Estadística Demográfica*.

Sin embargo, admitiendo la importancia de tales estudios puramente empíricos, producirá mayor satisfacción al espíritu el conocimiento más completo, o al menos más profundo, que se obtiene cuando conseguimos darnos cuenta no sólo de las relaciones empíricas, cuyas causas físicas o sus razones lógicas se nos escapan, sino además, y en particular, de las relaciones necesarias (impuestas por leyes lógicas y físicas) entre las cantidades que permiten describir el estado de una población y los cambios que experimenta.

El estudio de tales relaciones necesarias constituye una rama de la ciencia llamada *Análisis Demográfico* ("Population Analysis").

*El análisis demográfico.* Podría parecer a primera vista que estudiar las relaciones necesarias fuere una ocupación estéril, puesto que no puede revelarnos ningún hecho cuya verdad no esté ya

implícita en los datos básicos del estudio. Pero si una verdad permanece "implícita" en nuestro espíritu sin habérsela reconocido, carece de valor práctico; por otra parte, nuestro espíritu es más exigente: requiere no sólo conocer un conjunto de hechos, sino también reconocer su encadenamiento. Y es precisamente este encadenamiento lo que constituye el objeto del análisis demográfico, es decir, el examen de la demografía general, según el método deductivo.<sup>1/</sup>

Ahora bien, el método deductivo presupone hipótesis precisas, ya sea expresadas definitivamente con palabras o bien contenidas implícitamente en los términos de las proposiciones. Para ponernos a cubierto de errores, del modo más completo, sería deseable que todas nuestras hipótesis se declararan en forma explícita. No obstante, la evidencia de algunas de ellas haría superflua su especial enunciación.

Se admitirá, por ejemplo, que el crecimiento anual  $\frac{\Delta N}{\Delta t}$  del total N de una población de seres vivos es igual al de nacimientos<sup>2/</sup> B, menos las defunciones D, más los inmigrantes I, menos los emigrantes anuales E, es decir:

$$(1) \quad \frac{\Delta N}{\Delta t} = B - D + I - E.$$

<sup>1/</sup> Desde luego que es totalmente innecesario excusarse por el estudio del análisis demográfico ante quienes justifican la ciencia por las aplicaciones prácticas de ella. A menudo, dicho estudio nos permite obtener indirectamente, gracias a las relaciones encontradas entre los factores de una población, informaciones cuyas bases directas faltan en los empadronamientos estadísticos. Además, uno de los negocios más importantes, el de los seguros de vida, basa sus cálculos y sus actividades en relaciones que si no han sido tomados del análisis demográfico, lo tocan de cerca.

<sup>2/</sup> A lo largo de estos estudios será necesario recurrir a un número considerable de símbolos. He decidido, no sin vacilación, conservar aquí la notación de mis publicaciones inglesas antes que multiplicar aún más la diversidad de los caracteres. El símbolo B corresponde, pues, a la palabra inglesa *births*. Afortunadamente los símbolos N, t, D, I, E, representan, con su letra inicial tanto en francés como en inglés, cada una de las magnitudes en cuestión. (Aunque la mencionada correspondencia no existe para el español, se mantienen los mismos símbolos. N. del T).

Esta proposición contiene ya una hipótesis implícita: que la población de un lugar determinado aumenta solamente por los nacimientos o por la inmigración y sólo disminuye por las defunciones o la emigración. Pero esta hipótesis será entendida para cada caso sin que sea necesario mencionarla en particular. No obstante, las hipótesis sobrentendidas entrañan un peligro, siendo conveniente o bien su exclusión total o reducirlas a un mínimo..

Aquí, se plantea de nuevo el problema: ¿No será de dudoso valor práctico el tratamiento de temas demográficos basado en hipótesis de las que se saquen conclusiones necesarias? El adoptar este punto de vista inducirá a muchos errores. Las condiciones que se presentan en una población concreta son siempre excesivamente complicadas. Aquél que no haya captado claramente las relaciones necesarias entre las características de una población teórica sujeta a hipótesis simples, no sabrá desenvolverse con las relaciones mucho más complicadas que existen en una población real. Si se ha vacilado en el ataque del problema más simple, seguramente se tropezará con complicaciones muy serias. Es así como los autores que demuestran poco respeto por la aplicación del análisis matemático a los problemas demográficos, son los mismos que en sus trabajos nos presentan ejemplos nefastos de la confusión que resulta cuando se esfuerzan por resolver con un cúmulo de palabras, problemas cuya complicación nos impone el uso del condensado lenguaje de la matemática.

Por el contrario, como se verá en lo que sigue, el análisis matemático no sólo nos aclara las relaciones fundamentales entre algunas características de la población, sino que también nos sirve de guía para sistematizar nuestra investigación. La necesidad de tal guía se hace sentir en razón de cierta particularidad del tema. El estudio del análisis demográfico presenta algunas dificultades que no conviene exagerar, pero sobre las cuales, de todas maneras, se debe estar advertido. Son dificultades totalmente diferentes de las que se presentan, por ejemplo, en el estudio de las ciencias físicas. En éstas es preciso asimilar conceptos completamente nuevos ajenos a la vida cotidiana, tales como los de entropía, espacio-tiempo, cuanta, etc.; tipo de dificultades que no perturbará

nuestros problemas demográficos. Los conceptos de los que nos ocuparemos son ideas familiares de la vida diaria: volumen de una población, nacimientos, edad, número de descendientes en la primera generación, en la segunda, etc. Las dificultades que nos presentan estos conceptos fundamentales no provienen pues de su propia naturaleza; en cambio, dos circunstancias ocasionarán una dificultad real: 1) su gran número, y 2) el complicado carácter de las relaciones que los ligan. Expliquémosnos: en la física racional clásica<sup>1/</sup> es posible formular relaciones funcionales entre las variables. Por ejemplo, el período  $T$  de un simple péndulo es función de su longitud  $L$  y de la aceleración  $g$  de la fuerza de gravedad.

$$(2) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dada, pues, una longitud  $L$ , y la constante  $g$  de la fuerza de gravedad, el período  $T$  queda completamente determinado, y tiene un sólo valor.<sup>2/</sup> Las relaciones que dominan el campo del análisis demográfico son de otro género. Informan por ejemplo, sobre el peso de un individuo que tiene cierta talla  $h$ , pero no dicen que a cada talla  $h$  le corresponda un determinado peso único  $p$ ; cuando mucho nos indican que entre un gran número de individuos cuya talla está comprendida entre los extremos  $h$  y  $h + dh$  se encontrará una proporción  $f(h, p)dh dp$  de individuos, cuyos pesos estarán comprendidos entre los extremos  $p$  y  $p + dp$ . No tenemos ya una simple relación funcional, sino lo que llamaremos una relación *aleatoria*;

<sup>1/</sup> Estas observaciones se aplican con reserva en los desarrollos más recientes de la física de las magnitudes extremas. Incluso en la física clásica, las variables que se tienen en cuenta son en verdad valores medios de un número de observaciones, distribuidos alrededor de sus medias. Esta distribución, sin embargo, tiene una concentración generalmente mucho más reducida que en los problemas de los cuales nos ocuparemos aquí. En efecto, el propósito del método experimental es reducir las variaciones a un mínimo con el fin de despreciarlas; mientras que en el tipo de estudios como el que nos ocupa interesan a menudo las variaciones mismas.

<sup>2/</sup> Entendiéndose la raíz cuadrada con signo positivo.

62 es decir, la relación que expresa la probabilidad de encontrar un determinado valor de una variable entre un gran número de ejemplares que poseen una característica dada.

Las dos circunstancias, el elevado número de variables y el carácter aleatorio de las relaciones que las conectan, dan al análisis demográfico un carácter particular.<sup>1/</sup> Entre los obstáculos que se presentan uno muy incómodo tiene que ver con la representación gráfica de los fenómenos estudiados. Eso no quiere decir que este método de representación sea completamente defectuoso, y de hecho recurriremos a él en muchas ocasiones. Pero para representar el fenómeno demográfico en su conjunto, los métodos gráficos usuales son insuficientes. Veremos más tarde cómo se sale del paso.

El arreglo sistemático de la materia, que es objeto de nuestro estudio, saldrá naturalmente del análisis mismo, si comenzamos por la consideración de las relaciones más simples, las cuales comprenden un mínimo de variables, y si a medida que avanzamos introducimos las variables y las relaciones más complicadas. En nuestra exposición seguiremos esencialmente este plan.

<sup>1/</sup> Es verdad que las relaciones aleatorias desempeñan un papel muy importante en las teorías modernas sobre los cuanta y la materia.



## RELACIONES QUE COMPRENDEN LA MORTALIDAD Y LA NATALIDAD

La estadística demográfica se ocupa en primer lugar de las poblaciones humanas y particularmente de algunas poblaciones más o menos aisladas; como, por ejemplo, las poblaciones de un estado o de una ciudad. Los problemas prácticos que se presentan a propósito de una población que ocupa un territorio muy limitado, tal como una ciudad o un barrio, se complican por el papel importante que desempeña, en esos casos, la migración a través de las fronteras. Estas complicaciones se reducen cada vez más a medida que se amplía el territorio comprendido en el estudio, ya que la emigración y la inmigración son evidentemente funciones de la periferia de las fronteras territoriales, mientras que los nacimientos y las defunciones son más bien funciones del área del territorio, y la relación entre la periferia y el área contenida va en disminución a medida que esta última, el área del territorio, aumenta. Las circunstancias políticas y comerciales tienden también a acentuar este efecto, de manera que para un país, en su totalidad, la migración puede ser en ciertos casos casi despreciable como factor determinante del crecimiento de su población.

Por una abstracción natural el análisis demográfico considera en primer lugar el caso de una población cerrada, es decir, una población cuyo efectivo recibe nuevas incorporaciones sólo por nacimientos y sufre pérdidas sólo por defunciones. Están excluidas la inmigración y la emigración.

Nuestra proposición (1) (véase la página 59) se reduce entonces simplemente a la fórmula

$$(3) \quad \frac{\Delta N}{\Delta t} = B - D.$$

convendrá también escribir

$$(4) \quad \frac{\Delta N}{N \Delta t} = b - d = r$$

en donde las letras minúsculas:  $b$ ,  $d$ , y  $r$  significan tasas relativas de natalidad, de mortalidad y de crecimiento, respectivamente.

En las poblaciones humanas para las cuales conocemos los valores numéricos de estas tres cantidades, la tasa de natalidad a veces alcanza un valor de alrededor de 0,05 *per capita*, es decir 50 por mil. Hoy, en los países civilizados, esta tasa ha bajado a los valores 0,017 (Estados Unidos), 0,015 (Inglaterra), 0,015 (Francia), etc.

Anteriormente la tasa de mortalidad debe haber sido muy alta. En los archivos del siglo XVIII encontramos en muchos lugares tasas de 0,025 a 0,030; durante los años en que el mundo fue azotado por una epidemia de cólera, de fiebre amarilla, etc., la tasa de mortalidad se elevaba a cifras inusitadas, tales como 0,045 y más y, en realidad, los decesos deben haber superado las cifras registradas. Hoy, entre los pueblos civilizados, la tasa de mortalidad ha bajado hasta valores de alrededor de 0,010; pero esto no es más

que una condición pasajera. Veremos más adelante<sup>1/</sup> que es necesario, en lo sucesivo, esperar un aumento, ya que no puede suponerse que tenga un carácter permanente una tasa de mortalidad inferior a un valor de alrededor de 0,014, el inverso de una vida media hipotética de 70 años. 65

La tasa de crecimiento  $r$  ha tenido probablemente un valor máximo de 0,03 o a lo más de 0,04. Veremos más tarde<sup>2/</sup> que este valor máximo tiene un interés teórico particular. Destaquemos al pasar que cuando la tasa de crecimiento natural no excede en demasía un valor de alrededor de 0,01 *per capita* podemos sin error serio poner  $\frac{dN}{dt}$  en lugar de  $\frac{\Delta N}{\Delta t}$  en nuestras fórmulas (3) y (4); es lo que haremos en los que sigue, escribiendo:

$$(5) \quad \frac{dN}{dt} = B - D$$

$$(6) \quad \frac{dN}{Ndt} = \frac{d \log N}{dt} = b - d = r.$$

En efecto, admitiendo para el excedente  $r$  de la tasa de natalidad sobre la de mortalidad el valor de 0,01, el efectivo de la población  $N$  sería al cabo de un año:

$$(7) \quad N' = N(1 + r) = 1,01 N$$

mientras que según la fórmula (6), sería

$$(8) \quad N' = Ne^r = 1,01005 N$$

que es esencialmente el mismo resultado.

*Relación entre la población, los nacimientos anuales y la tabla de vida.* Sea  $N(t)$  la población y  $B(t)$  el número de nacimientos anuales en la época  $t$ . Sea  $p(a, t)$  la probabilidad, en el momento de su nacimiento, de que un individuo cualquiera nacido en la época  $t-a$  esté con vida en la época  $t$ , teniendo entonces la edad  $a$ . En general, esta probabilidad depende no sólo de la edad  $a$  sino tam-

<sup>1/</sup> Véase la página 118

<sup>2/</sup> Véase la página 106

66 bién de la época  $t$ . En la presente discusión, sin embargo, la supondremos independiente del tiempo, de manera que puede escribirse más simplemente  $p(a)$ .

Evidentemente, el número  $N(t)$  de individuos que llegan con vida al instante  $t$ , está formado por la suma de todos aquellos individuos que habiendo nacido en el instante  $t-a$  han sobrevivido hasta la edad  $a$ ; esta suma se obtiene dando a  $a$  todos los valores posibles desde cero hasta  $\omega$  que es la edad más elevada posible para la especie considerada. Se encuentra así:

$$(9) \quad N(t) = \int_0^{\omega} B(t-a)p(a)da.$$

La función  $p(a)$  es muy utilizada en los cálculos de los actuarios; su notación usual es  $l_x/l_0$ , en donde el símbolo  $l_x$  designa el número de sobrevivientes a la edad exacta  $x$ , a partir de un número  $l_0$  de recién nacidos. Una tabla de valores  $l_x$  ordenados según los valores sucesivos de  $x$ , se llama "tabla de vida" y el número  $l_0$ , arbitrariamente elegido, se llama "raíz de la tabla". Se emplea para  $l_0$  una potencia de 10, tal como 100 000; con esta elección de la raíz,  $p(a)$  se obtiene de  $l_x$  simplemente mediante un desplazamiento de la coma. Dicho de otra manera  $p(a)$  corresponde a  $l_x$  en una tabla cuya raíz es la unidad.

Desde el siglo XVIII<sup>1/</sup> se han confeccionado múltiples tablas de vida para diversas épocas y para toda clase de grupos del género humano, tales como los principales pueblos civilizados, considerados en total o por divisiones geográficas (estados, circunscripciones, ciudades, etc.); un grupo importante de tablas de vida representa la experiencia de las grandes compañías de seguros de vida.

Para otras especies distintas de la raza humana es evidentemente más difícil obtener los datos necesarios para confeccionar una tabla de vida, y en especial esta dificultad es sobre todo notoria

<sup>1/</sup> Para una exposición sobre la tabla de vida el lector debe remitirse a obras especiales; por ejemplo, Dublin y Lotka, "Length of Life. A Study of the Life Table", Ronald Press, Nueva York, 1936.

donde más se querría tener conocimientos de los hechos, es decir, para las especies salvajes que viven en su medio natural. No obstante, de cuando en cuando, en las publicaciones periódicas de biología se encuentran algunas referencias sobre este tema, para seres en cautiverio; como por ejemplo en los trabajos de Pearl sobre la mosca *drosophila*.<sup>1/</sup>

Por otra parte, para cualquier especie, los valores de  $p(a)$  se escalonan en una serie continuamente decreciente de  $p(0) = 1$  a  $p(\omega) = 0$ . En cuanto a  $\omega$ , la edad extrema para los individuos de la especie, no puede ser, evidentemente, definida con exactitud.<sup>2/</sup> Sin embargo, para las aplicaciones de la fórmula (9) esto no significa ningún inconveniente, pues la función  $p(a)$  es nula para todo valor de  $a$  superior a  $\omega$ , de manera que podemos escribir:

$$(10) \quad N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a)p(a)da$$

sin preocuparnos del valor de  $\omega$ .

*Distribución por edad.* La fórmula (9) nos informa sobre el número de la población total, la que comprende a los individuos de todas las edades. Por un simple cambio de los límites de la integral, obtenemos también el número de individuos de un grupo de edades cualesquiera, por ejemplo, el grupo de individuos comprendido entre las edades  $a_1$  y  $a_2$  es:

$$(11) \quad N_{1,2}(t) = \int_{a_1}^{a_2} B(t-a)p(a)da.$$

El grupo de individuos cuya edad está comprendida entre las edades  $a$  y  $a+da$  se representa simplemente por la expresión bajo el signo de la integral,  $B(t-a)p(a)da$ .

<sup>1/</sup> La idea de una tabla de vida se ha aplicado también a algunos artículos industriales y comerciales, que deben reemplazarse cada cierto tiempo. Véase a este respecto: E. B. Kurtz, "Life Expectancy of Physical Property", Ronald Press, Nueva York, 1930; E. B. Kurtz y R. Winfrey, "Life Characteristics of Physical Property", 1931, Bulletin 103 of the Iowa Engineering Experiment Station, Iowa State College, Ames, Iowa; A. J. Lotka, "Industrial Replacement", Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1933, pág. 51.

<sup>2/</sup> Sobre este tema véanse los trabajos de J. F. Steffensen y de E. J. Gumbel.

68 Es útil representar este número con relación al efectivo  $N(t)$  de la población. Con este propósito introducimos un coeficiente de distribución por edad  $c(a, t)$ , tal que el número de individuos comprendidos entre las edades  $a$  y  $a+da$  sea  $N(t) c(a, t) da$ .

Se deduce que

$$\begin{aligned} N(t)c(a, t)da &= B(t-a)p(a)da \\ (12) \quad c(a, t) &= \frac{B(t-a)}{N(t)}p(a). \end{aligned}$$

Destaquemos al pasar que todos los individuos de la población están comprendidos entre las edades 0 y  $\omega$ . Dicho de otra manera, la proporción de la población comprendida entre esas edades es la unidad.

$$(13) \quad \int_0^{\omega} c(a, t)da = 1.$$

*La tasa de natalidad.* Si sustituimos en la fórmula (12)

$$(14) \quad a = 0;$$

se obtiene

$$(15) \quad c(0, t) = \frac{B(t)}{N(t)}p(0)$$

Pero si

$$(16) \quad p(0) = 1$$

tenemos

$$(17) \quad c(0, t) = \frac{B(t)}{N(t)} = b(t)$$

Luego, si la función  $c(a, t)$  se representa por una curva en un sistema de coordenadas rectangulares, la ordenada correspondiente a la abscisa cero representa la tasa de natalidad.

*Defunciones anuales.* Siguiendo un razonamiento análogo al que nos condujo a la fórmula (9) se obtiene para las defunciones anuales la expresión

$$(18) \quad D(t) = - \int_0^{\omega} B(t-a) \frac{dp(a)}{da} da$$

*Tasa de mortalidad.* Los sobrevivientes  $p(a)$  a la edad  $a$  se reducen a  $p(a) + \frac{dp(a)}{da} da$  a la edad  $a+da$ . La tasa de mortalidad *per capita* entre esos  $p(a)$  individuos es, por lo tanto,

$$(19)^* \quad \begin{cases} \mu(a) = -\frac{1}{p(a)} \frac{dp(a)}{da} \\ \quad = -\frac{d \log p(a)}{da} \end{cases}$$

En la población total, que tiene una distribución por edad  $c(a, t)$ , la tasa de mortalidad será

$$(20) \quad d(t) = - \int_0^{\omega} c(a, t) \frac{d \log p(a)}{da} da.$$

*Caso particular. Distribución constante por edad: Población malthusiana.* Si  $c(a, t)$  es independiente de  $t$ , podemos escribir simplemente  $c(a)$ . Entonces, la tasa de natalidad se transforma en

$$(21) \quad b = c(0) = \text{constante}$$

y

$$(22) \quad d = - \int_0^{\omega} c(a) \frac{d \log p(a)}{da} da$$

$$(23) \quad = \text{constante}$$

$$(24) \quad r = b - d = \text{constante}$$

Es decir, la tasa de crecimiento de la población es constante

$$(25) \quad \frac{dN}{N dt} = r = \text{constante}$$

$$(26) \quad N = N_0 e^{rt},$$

la población crece (o decrece) según la ley del interés compuesto, la ley de Malthus.

\* Como la derivada de  $p(a)$  es negativa, se pone signo negativo en el miembro derecho de esta ecuación con el propósito de expresar la mortalidad  $\mu(a)$  por una cantidad positiva.

Además, se tiene

$$\begin{aligned} (27) \quad B(t) &= bN(t) \\ (28) \quad &= bN_0 e^{rt} \\ (29) \quad &= B_0 e^{rt}, \end{aligned}$$

los nacimientos anuales obedecen también a la misma ley.

Además, la fórmula (12) se puede transformar en

$$(12) \quad c(a) = \frac{B(t-a)}{N(t)} p(a)$$

$$(30) \quad = \frac{bN_0 e^{rt} e^{-ra} p(a)}{N_0 e^{rt}}$$

$$(31) \quad = b e^{-ra} p(a)$$

y en virtud de la relación

$$\int_0^{\omega} c(a) da = 1$$

se tiene

$$(32) \quad 1 = b \int_0^{\omega} e^{-ra} p(a) da$$

$$(33) \quad b = 1 / \int_0^{\omega} e^{-ra} p(a) da$$

Conocidos los coeficientes  $b$  y  $r$ , la tasa de mortalidad se obtiene inmediatamente por la relación

$$(34) \quad d = b - r = \text{constante}$$

Las defunciones anuales son en tal caso

$$(35) \quad D(t) = N(t)d = N_0 e^{rt} d = D_0 e^{rt}$$

De este modo, la población total, los nacimientos anuales y las defunciones anuales se expresan por la misma ley de Malthus, la ley del interés compuesto. Es útil contar con un nombre para designar la población que tiene una distribución fija por edad

$$(31) \quad c(a) = b e^{-ra} p(a)$$

y se desarrolla según la ley de Malthus, siendo  $r$  una constante



arbitraria de cualquier valor y cumpliendo  $b$  con la condición

71

$$(33) \quad \frac{1}{b} = \int_0^{\omega} e^{-ra} p(a) da$$

Tal población, calculada sobre la base de un valor arbitrario de  $r$  se llamará una población *maltusiana* y sus características (distribución por edad, tasas de crecimiento, de natalidad, mortalidad, etc.) serán las características maltusianas. Un especial interés, como veremos más tarde, proviene de la población maltusiana que tiene una tasa de crecimiento  $\rho$  no ya arbitraria, sino definida para una cierta condición de estabilidad.<sup>1/</sup>

*Expresión directa de la tasa de mortalidad  $d$ .* Hemos obtenido la expresión (33) para la tasa de natalidad maltusiana; una expresión análoga para la tasa de mortalidad resulta igualmente de la fórmula general (22), que en el presente caso da la expresión

$$(36) \quad d = -b \int_0^{\omega} e^{-ra} p'(a) da$$

$$(37) \quad = - \frac{\int_0^{\omega} e^{-ra} p'(a) da}{\int_0^{\omega} e^{-ra} p(a) da}$$

donde el símbolo  $p'(a)$  representa la derivada  $\frac{d p(a)}{da}$

*Índice vital.* El cociente  $b/d$  fue introducido por R. Pearl bajo el nombre de índice vital. Según las expresiones (33) y (37) se ve que en una población maltusiana su valor es

$$(38) \quad \frac{b}{d} = -1 / \int_0^{\omega} e^{-ra} p'(a) da$$

*Población estacionaria.* En el caso particular de una población estacionaria bajo el régimen de una tabla de vida y una distribu-

<sup>1/</sup> Es importante observar que dada una función de supervivencia  $p(a)$  se puede calcular inmediatamente la distribución maltusiana cualquiera sea el valor de  $r$  arbitrariamente elegido. Por el contrario, para calcular una distribución estable, es preciso conocer el valor de  $\rho$ , cuya determinación presenta un problema especial (véanse las páginas 124, 126).

72 ción por edad constantes, se tiene  $r = 0$ , y las fórmulas (31), (33) y (34) se transforman en

$$(39) \quad c(a) = b_0 p(a)$$

$$(40) \quad b_0 = 1 / \int_0^{\omega} p(a) da = 1 / L_0$$

$$(41) \quad d_0 = b_0 = 1 / L_0$$

La integral

$$(42) \quad L_0 = \int_0^{\omega} p(a) da$$

expresa evidentemente la vida media de  $N$  individuos (siendo  $N$  un número suficientemente grande) que desde su nacimiento hasta su muerte se encuentran constantemente bajo el régimen de la mortalidad definida por la tabla de vida (función de supervivencia)  $p(a)$ . En la notación actuarial se designa con  $e_0^o$  esta vida media, llamada también "esperanza de vida a la edad cero", y con  $e_x^1$  la vida media o esperanza de vida a la edad  $x$ . Esta última indica el número de años que le queda todavía por vivir, en promedio, a un individuo de edad  $x$ , es decir, en la notación actuarial<sup>2/</sup>

$$(43) \quad e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{j=\omega-x} l_{x+j}$$

o en la notación que hemos adoptado

$$(44) \quad L_0(a_1) = \frac{\int_{a_1}^{\omega} p(a) da}{p(a_1)}$$

La vida media a la edad cero es de un interés especial. Según

- 1/ Sería más exacto decir la supervivencia media a la edad  $x$ . Sin embargo, se ha adoptado el término vida media a la edad  $x$ .
- 2/ La notación actuarial distingue la vida media completa  $e_x^o$  de la vida media abreviada. Esta última indica los años *enteros* todavía por vivir (en promedio) a la edad  $x$ , es decir, no toma en cuenta la fracción de año que se viviría después del último cumpleaños. Para nosotros esta distinción no tiene ningún interés y nos ocuparemos solamente de la vida media completa que llamaremos simplemente vida media o esperanza de vida a la edad  $x$ .

la notación de la expresión (44) deberíamos escribirla  $L_0(0)$ . Sin embargo, cuando no entrañe ningún malentendido, escribiremos simplemente  $L_0$  como en la fórmula (42). Será cómodo también, algunas veces, servirse de la notación actuarial  $\bar{e}_0$  y en general  $\bar{e}_x$ . Las fórmulas (39) y (41) muestran que en una población estacionaria bajo el régimen de una tabla de vida  $p(a)$  constante, la distribución por edad es proporcional a las cifras  $l_a = l_0 p(a)$  de la tabla de vida, y que las tasas de natalidad y de mortalidad, siendo necesariamente iguales entre ellas, son al mismo tiempo iguales al valor inverso de la vida media.

Volvamos, sin embargo, a las fórmulas más generales (31) y (33). Estos resultados tienen un interés particular como tendremos ocasión de comprobarlo en varias oportunidades. Será útil, por lo tanto, repasarlos brevemente.

*Recapitulación.* Bajo el régimen de una tabla de vida  $p(a)$  constante, y una distribución por edad  $c(a)$  constante, el total de una población, así como el número de los nacimientos, aumenta (o decrece) según la ley de Malthus, y la tasa de natalidad y también las de mortalidad y de crecimiento, son constantes, y en particular

$$(31) \quad c(a) = be^{-ra}p(a)$$

$$(33) \quad b = 1 / \int_0^{\omega} e^{-ra}p(a)da$$

*Es importante destacar que las dos relaciones (31) y (33) no son independientes, y en consecuencia son insuficientes para determinar por completo las cantidades  $b$  y  $r$ . Conviene recordar que hemos elegido expresamente para nuestro punto de partida relaciones que comprenden un mínimo de variables. Veremos más tarde cómo se deduce una relación complementaria que sirve para determinar completamente los valores de  $b$  y de  $r$  en ciertas condiciones. Pero quedan todavía varias observaciones por hacer sobre el caso que aquí nos ocupa, y cuyos resultados analíticos se expresan por las fórmulas (31) y (33).*

74 *Aplicación estadística.* Las fórmulas (31), (33) deducidas a partir de algunas hipótesis abstractas, ¿son capaces de representar la situación en una población concreta? Se señalan efectivamente, tres casos de aplicación de esas fórmulas. En 1907 el autor<sup>1/</sup> hizo notar que la población de Inglaterra y Gales concordaba esencialmente con estas fórmulas. Cuatro años más tarde, en 1911, partiendo de las mismas hipótesis, L. Bortkiewicz<sup>2/</sup> desarrolló las mismas fórmulas y las encontró aplicables a la población de Alemania durante el período de 1890 a 1900. Por último, más recientemente, H. Cramér las aplicó a la población de Suecia en 1910.<sup>3/</sup> El cuadro 1 muestra la concordancia, muy satisfactoria, entre las cifras observadas y las calculadas de acuerdo con las fórmulas (31) y (33).

*Edad media de la población.* Siendo la distribución por edad

$$(31) \quad c(a) = be^{-ra}p(a)$$

en una población del tipo como el que nos ocupamos aquí, la edad media será

$$(45) \quad A_r = \frac{b \int_0^{\omega} ae^{-ra}p(a)da}{b \int_0^{\omega} e^{-ra}p(a)da}$$

Esta cantidad, como tendremos ocasión de observarlo en lo que sigue, se encuentra en numerosas relaciones características de la población malthusiana. Si el valor de  $A_r$  debe calcularse para un valor particular de  $r$  la fórmula en su expresión (45) puede emplearse directamente, recurriendo al uso de cualquier método conveniente de integración numérica aplicable a una función arbitraria.<sup>4/</sup> Por el

<sup>1/</sup> A.J. Lotka: "Relation between Birth Rates and Death Rates", *Science*, 1907, vol. 26, pág. 21; id. "Studies in the Mode of Growth of Material Aggregates", *Am.J. of Science*, 1907, vol. 24, págs. 199, 375.

<sup>2/</sup> *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, vol. 19, 1, págs. 63-138.

<sup>3/</sup> *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1935, pág. 39.

<sup>4/</sup> Es decir, una función que no está definida por una expresión analítica, sino por una tabla de valores, como en el caso presente la función  $p(a)$  definida por la tabla de vida. En los manuales se encuentra (por ejemplo, Whittaker y Robinson, "Calculus of Observations") una variedad de métodos para estimar integrales de este género. El artículo de Bortkiewicz ya citado, también da indicaciones sobre ese cálculo.

POBLACIONES DE TIPO MALTUSIANO  
Distribución por edad y tasas de natalidad, mortalidad y  
crecimiento natural, por mil

Grupos de edades	Inglaterra y Gales, 1871 <sup>a</sup> 1880 <sup>a1</sup>					
	Sexo masculino		Sexo femenino		Ambos sexos	
	Calculado	Registrado	Calculado	Registrado	Calculado	Registrado
0 - 5	142	139	135	132	138	135
5 - 10	118	123	114	117	116	120
10 - 15	107	110	104	104	106	107
15 - 20	98	99	95	95	96	97
20 - 25	88	87	86	91	87	89
25 - 35	150	144	148	149	149	147
35 - 45	117	112	117	115	117	113
45 - 55	84	84	87	87	86	86
55 - 65	57	59	63	61	60	59
65 - 75	29	31	36	35	32	33
75 - ∞	11	12	13	15	12	13
Tasa de:						
Natalidad <i>b</i>	36.47	36.92	33.74	33.73	35.08	35.28
Mortalidad <i>d</i>	22.16	22.61	20.01	19.99	21.07	21.27
Crecimiento <i>r</i>	14.31	14.31	13.73	13.73	14.01	14.01
Grupos de edades	Alemania 1891-1900 <sup>b2</sup>		Suecia 1910 <sup>c</sup>			
	Ambos sexos		Ambos sexos			
	Calculado	Registrado	Calculado	Registrado		
0 - 10	244	244	218	218		
10 - 20	198	198	185	192		
20 - 30	170	164	155	156		
30 - 40	131	134	129	125		
40 - 50	101	105	107	102		
50 - 60	78	78	86	88		
60 - 70	51	50	65	66		
70 - 80	23	22	40	40		
80 - ∞	5	4	15	13		
Tasa de:						
Natalidad <i>b</i>	35.90	36.2				
Mortalidad <i>d</i>	22.01	22.3				
Crecimiento <i>r</i>	13.89	13.9				

a/ A.J. Lotka: Relation between Birth Rates and Death Rates. *Science*, 1907, v. 26, págs. 21-22; A Natural Population Norm. *J. Washington Ac. Sc.*, 1913, v. 3, págs. 241-289; The Relation between Birth Rate and Death Rate and an Empirical Formula for the Mean Length of Life given by William Farr. *Quart. Pub. Am. Statist. Assn.*, 1918, pág. 121; Farr's Relation between Birth Rate, Death Rate and Mean Length of Life. *Quart. Pub. Am. Statist. Assn.*, dic. 1921, pág. 998.

b/ L. von Bortkiewicz: Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der stationären und in der progressiven Bevölkerung. *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 1911, tomo 19-1<sup>c</sup> Fascículo, pág. 63.

c/ H. Gramér: Über die Vorausberechnung der Bevölkerungsentwicklung in Schweden. *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 1935, pág. 35.

76 contrario, cuando se trata de calcular toda una serie de valores de la edad media  $A_r$  correspondientes a otros tantos valores de  $r$ , la fórmula (45) resulta incómoda y es preferible la transformación siguiente.

Desarrollemos la función  $e^{-ra}$  en serie de Taylor, poniendo

$$(46) \quad \int_0^w a^n p(a) da = L_n;$$

se obtiene

$$(47) \quad A_r = \frac{L_1 - rL_2 + \frac{r^2}{2!} L_3 - \dots}{L_0 - rL_1 + \frac{r^2}{2!} L_2 - \dots}$$

$$(48) \quad = \lambda_1 - \lambda_2 r + \lambda_3 \frac{r^2}{2!} - \dots$$

En las cantidades  $L$  de estas fórmulas se reconocen los momentos de la función de supervivencia  $p(a)$  y en los  $\lambda$  las semiinvariantes (de Thiele) de la misma función. Estas últimas son evidentemente funciones de las  $L$ , y se comprueba fácilmente que

$$(49) \quad \begin{cases} L_1 = \lambda_1 L_0 \\ L_2 = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_0 \\ L_3 = \lambda_1 L_2 + 2\lambda_2 L_1 + \lambda_3 L_0 \\ L_4 = \lambda_1 L_3 + 3\lambda_2 L_2 + 3\lambda_3 L_1 + \lambda_4 L_0 \text{ etc.} \end{cases}$$

Se reconoce con facilidad la ley según la cual se forman las ecuaciones sucesivas; los coeficientes numéricos son los del desarrollo

Cuadro 2

EDAD MEDIA DE LA POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS

	1800	1850	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1950	2000
1. Sexo masculino			25,30	26,29	26,93	27,79	28,62	29,89		
2. Sexo femenino			25,01	25,91	26,47	27,27	28,11	29,69		
3. Tipo maltusiano	22,18	23,12	24,70	25,46	26,35	27,34	28,38	29,41	31,31	34,06
4. Tipo maltusiano			24,06	24,79	25,67	26,96	28,38	30,17		

Nota 1 y 2. Valores observados. 3. Valores calculados según la fórmula (48) sobre la base a) del valor de  $r$  correspondiente a la fecha indicada, según la curva de crecimiento de los Estados Unidos (véase la pág 106) y b) de la tabla de vida para mujeres, raza blanca, 1919-1920. 4. Valores calculados en forma similar, pero sobre la base de una tabla de vida para una fecha lo más aproximada posible a la indicada arriba. Las cifras para los años 1950 y 2000 se han calculado sobre la base de una población con tasa de crecimiento según la hipótesis de Verhulst-Pearl.

del binomio. Reservamos para más adelante la discusión de los valores numéricos de  $L$  y de  $\lambda$ .

En cuanto a los valores de la edad media  $A_r$  calculados según la fórmula (48), puede verse en el cuadro 2 que son bastante sugestivos aun en el caso de poblaciones que se alejan considerablemente del tipo malthusiano. Dicho cuadro pone en evidencia un fenómeno cuya importancia práctica es igual a su interés teórico: el envejecimiento sistemático de esta población.

Destaquemos también que para

$$(50) \quad r = 0$$

se obtiene

$$(51) \quad A_0 = \lambda_1$$

de modo que  $\lambda_1$  es la edad media de una población estacionaria.

*Cambios en la distribución por edad.* Para comprender correctamente el sentido de la fórmula (33) es útil construir algunas curvas usando dicha fórmula y eligiendo convenientemente  $r$  y la función  $p(a)$ .

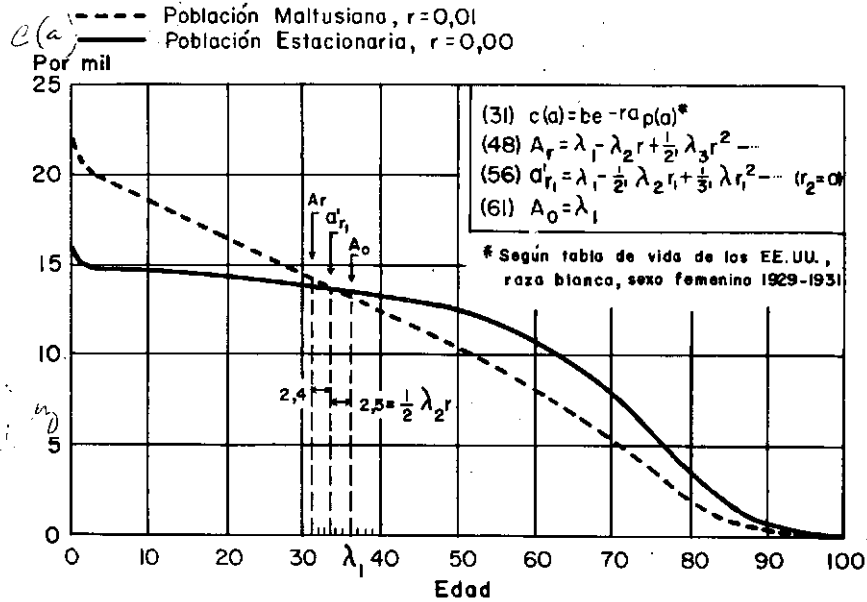
Tomando los valores de  $p(a)$  de la tabla de vida estadounidense para 1929-1931, y dando a  $r$  los valores 0,00 y 0,01 sucesivamente, se obtienen las dos curvas representadas en el gráfico 1. Es evidente el predominio relativo de los niños en la población creciente y por el contrario, en la población estacionaria, el predominio relativo de personas mayores. Pasando de  $r = r_1$  a  $r = r_2$  la curva oscila, por así decir, sobre un pivote cuya posición, edad  $a'$ , la encontramos calculando la edad  $a'$  que verifica la ecuación

$$(52) \quad b_1 e^{-r_1 a'} p(a') = b_2 e^{-r_2 a'} p(a'),$$

en consecuencia

$$(53) \quad \frac{e^{-r_2 a'}}{e^{-r_1 a'}} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\int_0^{\omega} e^{-r_2 a} p(a) da}{\int_0^{\omega} e^{-r_1 a} p(a) da}$$

DISTRIBUCION POR EDAD



después, en vista de la expresión (64), página 81

$$(54) \quad e^{-(r_2 - r_1)a'} = \frac{e^{-(\lambda_1 r_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 r_2^2 + \dots)}}{e^{-(\lambda_1 r_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 r_1^2 + \dots)}}$$

$$(55) \quad = e^{-(r_2 - r_1)\lambda_1 + \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\lambda_2 - \dots}$$

lo que da la edad  $a'$

$$(56) \quad a' = \lambda_1 - \frac{1}{2!} (r_2 + r_1)\lambda_2 + \frac{1}{3!} (r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)\lambda_3 - \dots$$

correspondiente a la intersección de las curvas de distribución por edad,  $b_1 e^{-r_1 a} p(a)$  y  $b_2 e^{-r_2 a} p(a)$ .

Centro instantáneo de oscilación. En lugar de saltar bruscamente de  $r_1$  a  $r_2$ , veamos lo que ocurre cuando  $r$  pasa de  $r_1$  a  $r_2$  tomando sucesivamente todos los valores intermedios. El centro instantáneo

$$a = \dots$$



del movimiento de oscilación cambia en tal caso a cada instante. 79  
 Es posible encontrar la posición  $a'$  de ese centro, correspondiente a un valor dado de  $r$ , poniendo

$$(57) \quad \frac{\partial c(a)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (be^{-ra} p(a)) = 0$$

o bien, de modo directo, usando la fórmula (56). Evidentemente, el centro instantáneo de oscilación es el valor límite de  $a'$  cuando  $r_2$  se aproxima indefinidamente a  $r_1$ . Este valor límite se obtiene simplemente haciendo  $r_2 = r_1$  en la fórmula (56), lo que da

$$(58) \quad a' = \lambda_1 - \lambda_2 r + \frac{1}{2} \lambda_3 r^2 - \dots$$

$$= A_r$$

En consecuencia, el centro instantáneo del movimiento de oscilación de la curva  $c(a)$  tiene como abscisa la edad media  $A_r$  de la población malthusiana cuya tasa de crecimiento es  $r$ . A medida que  $r$  pasa de un valor  $r_1$  a otro  $r_2$  el centro instantáneo avanza a lo largo de una curva que es el lugar geométrico de  $A_r$ .

Estos resultados tienen un indudable interés práctico. El recorrido completo de  $A_r$  entre sus valores extremos correspondientes a  $r_1 = 0,01$  y a  $r_2 = 0$ , se extiende solamente de los 30 a los 40 años. El centro de oscilación permanece así entre los límites del período productivo de la vida.

Cualquier disminución del valor de  $r$  implica pues, en una población malthusiana, una disminución de los grupos de edad inferior y un aumento de los grupos de edad superior. Resulta de esto, como puede verse en el cuadro 3, que el segmento de población malthusiana comprendido entre los límites del período productivo es relativamente estable.

Esta estabilidad relativa del grupo de edades productivas es también una propiedad de las poblaciones no malthusianas como lo demuestran las observaciones.

## POBLACION MALTUSIANA

Distribución por edad (por ciento) calculada para cuatro valores de  $r$  y cuatro tablas de vida

Tasas de crecimiento per capita $r$	Inglaterra y Gales <sup>a/</sup>	Estados Unidos <sup>b/</sup>		
	1838-1854	1901	1919-1920	1929-1931
	Edades 0 - 20			
- 0,010	27,40	24,82	23,68	22,28
0,000	35,10	32,33	31,11	29,58
+ 0,010	43,22	40,54	39,11	37,52
+ 0,019			46,48	
	Edades 20 - 50			
- 0,010	41,35	40,78	39,95	39,68
0,000	41,43	41,52	41,05	41,07
+ 0,010	39,92	40,73	40,45	40,76
+ 0,019			38,60	
	Edades 20 - 65			
- 0,010	59,56	60,04	59,76	60,18
0,000	55,98	57,18	57,32	58,04
+ 0,010	51,04	52,91	53,19	54,17
+ 0,019			48,40	
	Edades 65 - ∞			
- 0,010	13,10	15,18	16,62	17,62
0,000	8,92	10,49	11,57	12,38
+ 0,010	5,81	6,93	7,70	8,31
+ 0,019			5,12	

*Edades 0-20*  
*Edades 20-50*  
*Edades 20-65*  
*Edades 65-∞*

a/ Sexo femenino.

b/ Sexo femenino, raza blanca.

*Relación entre la tasa de natalidad  $b$  y la tasa de crecimiento  $r$ .* La fórmula (33), que expresa la relación entre  $b$  y  $r$ , es engañosa para hacer cálculos. Si sólo se trata de un caso, habiéndose dado un valor cualquiera de  $r$ , el valor de  $b$  se obtiene estimando la integral por alguno de los métodos conocidos para integrar funciones arbitrarias. Por el contrario, si se desea establecer la forma de la relación entre  $b$  y  $r$  calculando toda una serie de valores de  $b$  correspondientes a una serie de valores de  $r$ , los cálculos, debido a la forma de la relación (33), resultarán muy laboriosos. Un procedimiento más práctico es el que resulta de la relación que ya conocemos

$$(45) \quad A_r = \frac{\int_0^{\omega} ae^{-ra}p(a)da}{\int_0^{\omega} e^{-ra}p(a)da}$$

Dándole la forma

$$(60) \quad A_r = -\frac{1}{1/b} \frac{\partial}{\partial r} 1/b$$

$$(61) \quad = \frac{\partial}{\partial r} \log_e b$$

se obtiene

$$(62) \quad \log_e \frac{b_r}{b_0} = \int_0^r A_r dr$$

$$(63) \quad = \lambda_1 r - \frac{1}{2!} \lambda_2 r^2 + \frac{1}{3!} \lambda_3 r^3 - \dots$$

y finalmente

$$(64) \quad b_r = b_0 e^{\lambda_1 r - \frac{1}{2} \lambda_2 r^2 + \dots}$$

*Momentos  $L$  de la curva de supervivencia: Valores numéricos.* Las integrales  $L_n$  definidas por la expresión (46) son los llamados momentos de orden  $n$  de la función  $p(a)$ , es decir, de la curva de supervivencia.

## VIDA MEDIA EN DIVERSOS PAISES PARA DIVERSAS EPOCAS

País, época	Vida media en años		País, época	Vida media en años	
	Sexo masculino	Sexo femenino		Sexo masculino	Sexo femenino
<b>Francia</b>			<b>Italia</b>		
1817-1831	33,30	40,80	1876-1887	35,08	35,40
1840-1859	39,30	41,00	1881-1882	35,16	35,65
1861-1865	39,10	40,55	1891-1900	42,83	43,17
1877-1881	40,83	43,42	1899-1902	42,59	43,00
1898-1903	45,74	49,13	1901-1910	44,24	44,83
1908-1913	48,50	52,42	1910-1912	46,57	47,33
1920-1923	52,19	55,87	1921-1922	49,27	50,75
<b>Alemania</b>			1930-1932	53,8	56,0
1871-1880	35,58	38,45	<b>Nueva Zelandia</b>		
1881-1890	37,17	40,25	1931	65,04	67,88
1891-1900	40,56	43,97	<b>Suecia</b>		
1901-1910	44,82	48,33	1755-1776	33,20	35,70
1910-1911	47,41	50,68	1816-1840	39,50	43,56
1924-1926	55,97	58,82	1841-1845	41,94	46,60
1933	59,8	62,6	1846-1850	41,38	45,59
<b>Inglaterra y Gales</b>			1851-1855	40,51	44,64
1838-1854	39,91	41,85	1856-1860	40,48	44,15
1930-1932	58,74	62,88	1861-1870	42,80	46,40
<b>Estados Unidos</b>			1871-1880	45,30	48,60
1901	48,23	51,08	1881-1890	48,55	51,47
1910	50,23	53,62	1891-1900	50,94	53,63
1919-1920	55,33	57,52	1901-1910	54,55	57,00
1929-1931	59,31	62,83	1911-1920	55,60	58,33
1936	60,18	64,36	1921-1925	60,72	62,95
			1926-1930	61,19	63,33

Cuadro 5

## VALORES DE LAS CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE ALGUNAS TABLAS DE VIDA

Tabla de vida	Momentos					
	$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$
<i>Inglaterra y Gales, sexo femenino</i>						
1838-1854	41,875	$1,3528 \times 10^3$	$6,3298 \times 10^4$	$3,4827 \times 10^6$	$2,1067 \times 10^8$	$1,3581 \times 10^{10}$
1871-1880	44,624	$1,4666 \times 10^3$	$6,9005 \times 10^4$	$3,8018 \times 10^6$	$2,3003 \times 10^8$	$1,4808 \times 10^{10}$
1881-1890	47,187	$1,5680 \times 10^3$	$7,3947 \times 10^4$	$4,0712 \times 10^6$	$2,4559 \times 10^8$	$1,5761 \times 10^{10}$
1930-1932	62,884	$2,2931 \times 10^3$	$11,5669 \times 10^4$	$6,7214 \times 10^6$	$4,2425 \times 10^8$	$2,8314 \times 10^{10}$
<i>Estados Unidos<sup>a/</sup> raza blanca, sexo femenino</i>						
1901	51,102	$1,7406 \times 10^3$	$8,4027 \times 10^4$	$4,7318 \times 10^6$	$2,9169 \times 10^8$	$1,9113 \times 10^{10}$
1910	53,641	$1,8452 \times 10^3$	$8,9253 \times 10^4$	$5,0193 \times 10^6$	$3,0859 \times 10^8$	$2,0150 \times 10^{10}$
1919-1920	57,518	$2,0149 \times 10^3$	$9,9179 \times 10^4$	$5,6712 \times 10^6$	$3,5407 \times 10^8$	$2,3455 \times 10^{10}$
1929-1931	62,829	$2,2607 \times 10^3$	$11,2857 \times 10^4$	$6,5086 \times 10^6$	$4,0864 \times 10^8$	$2,7177 \times 10^{10}$
Tabla de vida	Semi-invariantes					
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	
<i>Inglaterra y Gales, sexo femenino</i>						
1838-1854	32,305	$4,6801 \times 10^2$	$4,1001 \times 10^3$	$- 1,7558 \times 10^5$	$- 8,3911 \times 10^6$	
1871-1880	32,865	$4,6623 \times 10^2$	$3,7270 \times 10^3$	$- 1,7535 \times 10^5$	$- 8,0022 \times 10^6$	
1881-1890	33,229	$4,6293 \times 10^2$	$3,4382 \times 10^3$	$- 1,8135 \times 10^5$	$- 6,9177 \times 10^6$	
1930-1932	36,468	$5,2016 \times 10^2$	$2,7057 \times 10^3$	$- 2,6151 \times 10^5$	$- 6,2276 \times 10^6$	
<i>Estados Unidos, raza blanca, sexo femenino</i>						
1901	34,061	$4,8415 \times 10^2$	$3,6069 \times 10^3$	$- 2,0275 \times 10^5$	$- 7,7690 \times 10^6$	
1910	34,398	$4,8064 \times 10^2$	$3,2790 \times 10^3$	$- 2,0382 \times 10^5$	$- 6,8588 \times 10^6$	
1919-1920	35,031	$4,9712 \times 10^2$	$3,3647 \times 10^3$	$- 2,2339 \times 10^5$	$- 7,4241 \times 10^6$	
1929-1931	35,981	$5,0159 \times 10^2$	$2,8655 \times 10^3$	$- 2,3562 \times 10^5$	$- 6,2887 \times 10^6$	

<sup>a/</sup> 1901 y 1910, representa los 10 estados comprendidos en el territorio primitivo de registro.  
 1919-1920, corresponde a los 27 estados comprendidos en su territorio, según Foudray.  
 1929-1931, se excluyen los estados de Texas y Dakota del Sur, de acuerdo con Dublin y Lotka, "Length of Life", 1936, Ronald Press, Nueva York, págs. 16-17.

84 El momento de orden cero

$$(42) \quad L_0 = \int_0^{\omega} p(a) da = \bar{e}_0$$

como ya lo hemos comprobado, es la *vida media* que viene dada en la mayoría de las tablas de vida. El valor de  $L_0$ , por lo tanto, puede encontrarse directamente sin necesidad de calcularlo.

El valor actual de la vida media  $L_0$ , de acuerdo con las tablas de vida de los principales pueblos civilizados, es alrededor de 60 años. En Nueva Zelandia alcanza el notable valor de 65,04 para los hombres y 67,88 para las mujeres. En el cuadro 4 que contiene cifras correspondientes a otros países, puede verse el progreso realizado en los últimos cien años.

En el cuadro 5 se indican los momentos de orden más elevado según varias tablas de vida. Observemos que el cociente entre dos momentos consecutivos crece en forma bastante rápida para los primeros términos de la serie y después en forma cada vez más lenta. Evidentemente ese cociente nunca puede sobrepasar la edad extrema  $\omega$ , que debe ser su límite.<sup>1/</sup> Damos a título de ejemplo, los valores del cociente  $L_{n+1}/L_n$  tomados de algunas tablas de vida (véase el cuadro 6).

*Semi-invariantes de la curva de supervivencia: Valores numéricos.* Las cantidades  $\lambda_n$  en la fórmula (48) son los llamados semi-invariantes de orden  $n$  de la función  $p(a)$ , es decir, de la curva de supervivencia.

El semi-invariante de primer orden,

$$(49) \quad \lambda_1 = \frac{L_1}{L_0}$$

como ya lo hemos comprobado, es la edad media de una población estacionaria. Gracias a una determinada propiedad que posee la tabla de vida, podemos obtener de ella, del mismo modo que el momento  $L_0$  de orden cero, un valor aproximado del primer semi-invariante. Damos en primer lugar el enunciado y la verificación

<sup>1/</sup> Véase A.J. Lotka, "Some Elementary Properties of Moments of Frequency Distributions." *Jl. Washington Acad. Sci.*, 1931, vol. 21 pág. 17.

Cuadro. 6

COCIENTES DE LOS MOMENTOS SUCESIVOS DE LA  
FUNCION DE SUPERVIVENCIA

		$\frac{L_{n+1}}{L_n}$								
$n+1$	$n$	Estados Unidos				Inglaterra y Gales				
		1919 1920	1929 1931	1838 1854	1871 1880	1891 1900	1901 1910	1910 1912	1920 1922	1930 1932
1	0	35,0	36,0	32,3	32,9	33,5	34,6	35,2	36,0	36,5
2	1	49,2	49,9	46,8	47,1	47,4	48,5	49,2	50,0	50,4
3	2	57,2	57,7	55,0	55,1	55,2	56,3	56,9	57,8	58,1
4	3	62,4	62,8	60,5	60,5	a/	a/	a/	a/	63,1
5	4	66,2	66,5	64,5	64,4	a/	a/	a/	a/	66,7

a/ Estos valores no se han calculado.

86 empírica de esta propiedad; después, indicaremos la base racional.

La propiedad en cuestión se expresa ya sea por la fórmula

$$(65) \quad \lambda_1 = e^{\circ}_{\lambda_1}$$

o bien por la fórmula más exacta

$$(66) \quad \lambda_1 = e^{\circ}_{\lambda_1 - 1}$$

Como ejemplo de la aplicabilidad de esas dos fórmulas, de las cuales la segunda es un poco más exacta que la primera, se presentan en el cuadro 7 resultados de cálculos basados en algunas tablas vida.

En consecuencia, dada una tabla de vida se tiene la siguiente regla empírica para encontrar aproximadamente el valor  $\lambda_1$  de la edad media de la población estacionaria:

Observando la columna de edades y la de las vidas medias se encuentra el lugar donde los valores correspondientes a esas dos columnas son iguales. Sea  $a$  la edad donde se observa esta concordancia, entonces

$$\lambda_1 = a$$

lo que nos da un valor aproximado de  $\lambda_1$ .

Se obtiene un valor más exacto buscando en la tabla, en la columna de edades, el lugar donde la cifra es igual a la de la línea inmediatamente precedente en la columna de las vidas medias, se pone entonces

$$\lambda_1 = a'$$

siendo  $a'$  el número así determinado en la columna de edades.

En general, por este método directo y sin cálculo, sólo puede establecerse el lugar de concordancia con aproximación a la unidad. No obstante, si se desea, puede determinarse con mayor exactitud ese lugar, por interpolación lineal. Un ejemplo, tomado de la tabla de vida estadounidense, 1919-1920, servirá de ilustración. En la



parte de la tabla que representa al sexo femenino, raza blanca, se 87 encuentran las siguientes cifras:

<i>Edad</i>	<i>Vida media</i>
34	35,27
35	34,51
36	33,76

Cuadro 7

COMPARACION DE LOS VALORES DE  $\lambda_1$  (EDAD MEDIA DE LA POBLACION ESTACIONARIA) CON LOS VALORES CALCULADOS POR LAS FORMULAS APROXIMADAS (65) Y (66)

Tabla de vida	Edad que es igual a su esperanza de vida $a = \frac{e}{a}$	Edad que es igual a la esperanza de vida un año antes $a = \frac{e}{a-1}$	Edad media de la población estacionaria $\lambda_1$
<i>Inglaterra y Gales</i>			
Sexo femenino 1838-1854	32,32	32,71	32,34
1871-1880	32,59	33,00	32,87
1881-1890	32,76	33,18	33,23
1891-1900	33,03	33,47	33,54
1901-1910	34,06	34,51	34,61
1910-1912	34,65	35,10	35,20
1920-1922	35,57	36,03	36,00
1930-1932	36,00	36,47	36,47
<i>Estados Unidos</i>			
Sexo masculino 1901	32,83	33,25	33,25
1910	32,76	33,19	33,35
1919-1920	34,06	34,49	34,48
1929-1931	34,11	34,22	34,25
Sexo femenino 1901	33,73	34,15	34,06
1910	33,92	34,36	34,40
1919-1920	34,72	35,15	35,03
1929-1931	35,40	35,86	35,98
<i>Francia</i>			
Sexo masculino 1920-1923	33,10	33,54	33,48
Sexo femenino 1920-1923	34,87	35,31	35,12

88 Se ve inmediatamente, de acuerdo con la primera regla, esto es

$$\lambda_1 = a$$

que el valor de  $\lambda_1$  debe estar entre 34 y 35. Para determinarlo con mayor exactitud ponemos

$$34 + x = 35,27 - x(35,27 - 34,51)$$

$$x = \frac{1,27}{1,76} = 0,72$$

$$\lambda_1 = 34,72$$

De acuerdo con la segunda regla el valor de  $\lambda_1$  debe estar entre 35 y 36. Para determinarlo ponemos

$$35 + x = 35,27 - x(35,27 - 34,51)$$

$$x = \frac{0,27}{1,76} = 0,15$$

$$\lambda_1 = 35,15$$

El cálculo directo del valor de  $\lambda_1$  da

$$\lambda_1 = \frac{L_1}{L_0} = \frac{2.015}{57,52} = 35,03$$

Se ve pues que en este caso la segunda regla da un resultado cuyo error es solamente 0,12 de año. Aplicando la primera regla se obtiene un valor demasiado bajo, pero aún así el error es sólo de 0,31 de año.

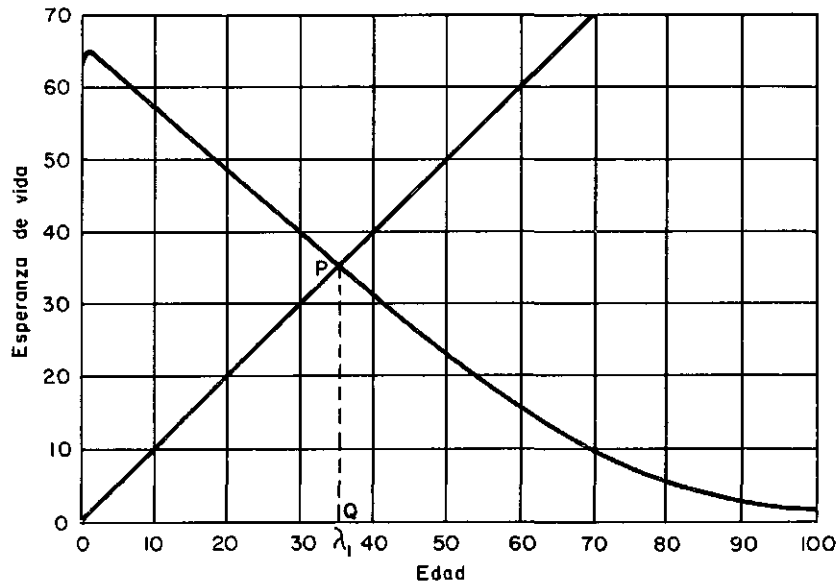
*Construcción gráfica de  $\lambda_1$ .* La representación que sigue pone de manifiesto con toda claridad la relación que da fundamento a los dos métodos citados para determinar de manera aproximada el valor de  $\lambda_1$ . En el gráfico 2 se encuentra la curva de  $\ell_x$ , esperanza de vida a la edad  $x$ , según la tabla de vida estadounidense para 1929-1931. Se ha trazado un radio por el origen  $O$  con una inclinación de  $45^\circ$ . Este radio corta la curva de  $\ell_x$  en el punto  $P$ . De acuerdo con la primera regla, la abscisa  $OQ$  del punto  $P$ , da el valor de  $\lambda_1$ , la edad media de la población estacionaria.

De igual modo, si en el gráfico 2 se trazase el radio  $O'P'$  que pasara por un punto  $O'$  situado en el eje de las  $x$  a la distancia  $l$  a la izquierda del origen, la abscisa  $O'Q'$  del punto de intersec-

ción P' daría el valor de  $\lambda_1$  calculado de acuerdo con la segunda 89  
 regla.

Gráfico 2

CONSTRUCCION GRAFICA  
 Para un valor aproximado de  $\lambda_1$  según la Tabla de Vida  
 de los Estados Unidos, sexo femenino, raza blanca, 1929-1931



*Base racional de las reglas para encontrar el valor de  $\lambda_1$ .* Es muy satisfactoria la concordancia que hay entre los resultados obtenidos por las dos reglas empíricas con los resultados del cálculo directo. ¿De dónde viene esta concordancia? No es por cierto accidental. ¿Cuál es su razón lógica?

Encontraremos la explicación considerando en primer lugar el caso correspondiente a la hipótesis más simple sobre la función de

90 supervivencia  $p(a)$ , "la hipótesis de De Moivre", según la cual esta función sería lineal:

$$(67) \quad p(a) = 1 - ka$$

Obtenemos la vida extrema  $\omega$  colocando

$$(68) \quad p(\omega) = 1 - k\omega = 0$$

$$(69) \quad \omega = \frac{1}{k}$$

por consiguiente la vida media será

$$(70) \quad L_0 = \dot{e}_0 = \int_0^{1/k} (1 - ka) da$$

$$(71) \quad = \frac{1}{2} \frac{1}{k}$$

Por el contrario, la edad media de la población estacionaria será

$$(72) \quad A_0 = \lambda_1 = \frac{\int_0^{1/k} a(1 - ka) da}{\int_0^{1/k} (1 - ka) da} = \frac{1}{3} \frac{1}{k} = \frac{2}{3} L_0 = \frac{2}{3} \dot{e}_0$$

Por cierto que este resultado presenta sólo una concordancia muy mediocre con las características de la tabla de vida de los Estados Unidos 1919-1920, ya que el valor

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2}{3}(57,52) \\ &= 38,35 \end{aligned}$$

es muy diferente del verdadero valor de  $\lambda_1 = 35,03$ . Pero no es esta concordancia la que buscamos. Nos es preciso encontrar en la hipótesis de De Moivre, el valor de  $\dot{e}_{\lambda_1}$ , igual a

$$(73) \quad \dot{e}_{\lambda_1} = \dot{e}_{1/3k} = \frac{\int_{1/3k}^{1/k} p(a) da}{p(1/3k)} = \frac{\int_{1/3k}^{1/k} (1 - ka) da}{1 - k(1/3k)}$$

(74)

$$= \frac{1}{3k} = \lambda_1$$

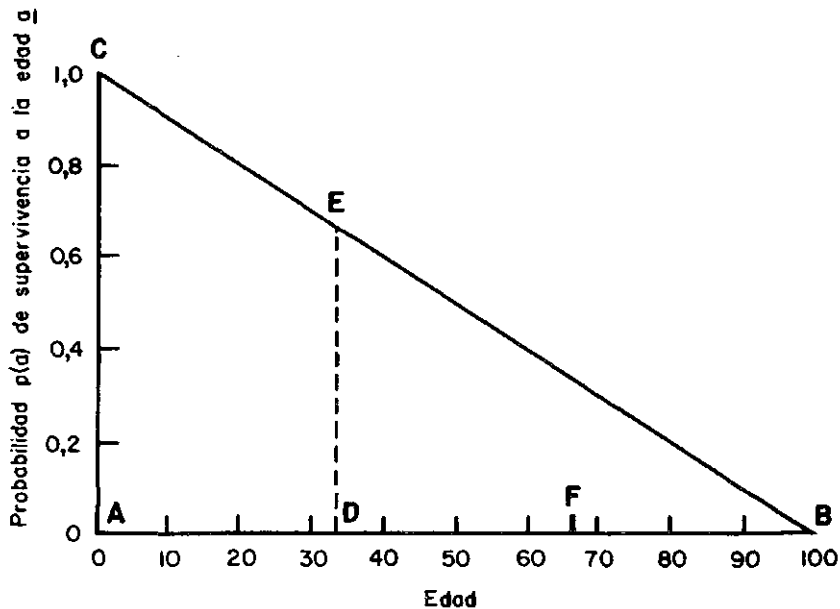
91

Según la hipótesis de De Moivre, por lo tanto, la fórmula exacta es la (65). En el caso de tablas de vida reales, se acepta también que dicha fórmula da una aproximación bastante satisfactoria pues topológicamente las propiedades geométricas de la función de supervivencia  $p(a)$  no difieren demasiado de la curva de De Moivre.

En el gráfico 3 se representa la curva de supervivencia de De Moivre en coordenadas rectangulares, las abscisas indican la edad, las ordenadas el valor de  $p(a)$ . La vida límite  $\omega$  constituye la base del triángulo ABC, cuya altura AC correspondiente a  $p(0)$  es igual a 1 en la escala adoptada para las ordenadas.

Gráfico 3

CURVA DE SUPERVIVENCIA DE ACUERDO CON LA  
HIPOTESIS DE DE MOIVRE



92 La abscisa correspondiente al centro de gravedad del triángulo representa la edad media de la población estacionaria, puesto que esta edad está definida por la fórmula

$$(75) \quad A_0 = AD = \frac{\int_0^{\omega} ap(a)da}{\int_0^{\omega} p(a)da}$$

Ahora bien, la distancia del centro de gravedad de un triángulo a su base es igual a  $1/3$  de la altura. Entonces

$$AD = \frac{1}{3} AB = \lambda_1$$

El mismo diagrama da la representación de la vida media a la edad  $\lambda_1$ , puesto que de acuerdo con su definición se tiene:

$$(76) \quad \frac{1}{p(\lambda_1)} \int_{\lambda_1}^{\omega} p(a)da = \frac{EDB}{ED}$$

$$(77) \quad = \frac{1}{2} DB$$

$$(78) \quad = \frac{1}{3} AB$$

$$(79) \quad = \lambda_1$$

y esa es la interpretación geométrica de la relación

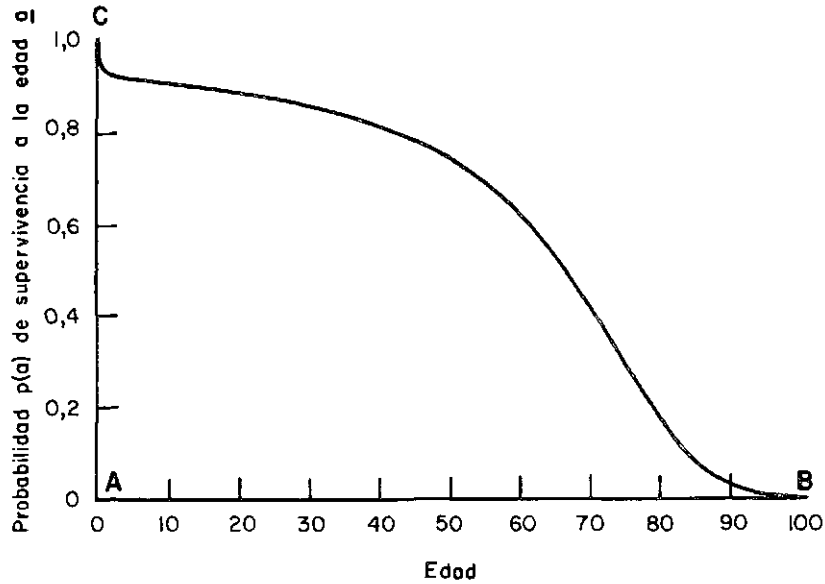
$$e_{\lambda_1} = \lambda_1$$

según la hipótesis de De Moivre. Comparando el gráfico 3 con el 4 se comprende por qué esta relación también se aplica de manera aproximada cuando  $p(a)$  se define con una tabla de vida efectiva.

La modificación introducida en la fórmula (65) escribiendo  $\lambda_1 - 1$  en lugar de  $\lambda_1$ , como se ha hecho en la fórmula (66), tiene el carácter de una corrección puramente empírica, válida en el caso de un desvío considerable entre la curva observada y la forma hipotética de  $p(a)$  según De Moivre.

Gráfico 4

CURVA DE SUPERVIVENCIA EFECTIVA,  
ESTADOS UNIDOS, 1919-1920



Reparemos también en una propiedad análoga a (65). Para una población estacionaria con la distribución por edad proporcional a la tabla de vida, se sabe que

$$\bar{e}_x = \bar{x}$$

es decir, que la media de las vidas medias de todos los individuos de la población es igual a su edad media.<sup>1/</sup>

*Semi-invariantes de orden superior.* Hemos visto que los valores de  $L_0$  y de  $\lambda_1$  pueden tomarse de una tabla de vida sin necesidad de cálculo, o cuando mucho haciendo una interpolación muy simple. ¿Es también aplicable esta observación a los semi-invariantes  $\lambda_2$ ,

<sup>1/</sup> Véase por ejemplo E.F. Spurgeon, *Life Contingencies*, 1929, págs. 210-211.

94  $\lambda_3, \dots$  etc.? En efecto, también en este caso se puede salir adelante sin necesidad de nuevos cálculos, una vez que se conocen los valores de esas constantes para una tabla de vida que no se aparta demasiado de aquella para la cual se buscan los  $\lambda$ . Es preciso recordar que los  $\lambda$  de orden superior están asociados con las potencias más elevadas de  $r$  y que en consecuencia basta remplazar esos valores exactos de  $\lambda_2, \lambda_3 \dots$  de la tabla de vida en cuestión, por los valores correspondientes de otra tabla convenientemente elegida para la cual se han calculado los  $\lambda$ . He aquí un ejemplo concreto. Busquemos el valor de  $b$ , la tasa de natalidad, de acuerdo con la fórmula (64) aplicándolo a la tabla de vida del sexo femenino de los Estados Unidos en 1929-1931 para la cual se han determinado directamente los valores de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ . Encontramos

$$b = 0,02226 \quad \text{para } r = +0,01$$

$$b = 0,03023 \quad \text{para } r = +0,02$$

¿Cuál será el resultado si en lugar de valores calculados directamente para 1929-1931, empleamos para  $\lambda_1$  el valor obtenido con la regla aproximada (66) y para  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$  los valores tomados de una tabla de vida diferente?

Empleando los valores calculados para  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$  de acuerdo con la tabla de vida de 1901, se encuentra:

$$b = 0,02225 \quad \text{para } r = +0,01$$

$$b = 0,03050 \quad \text{para } r = +0,02$$

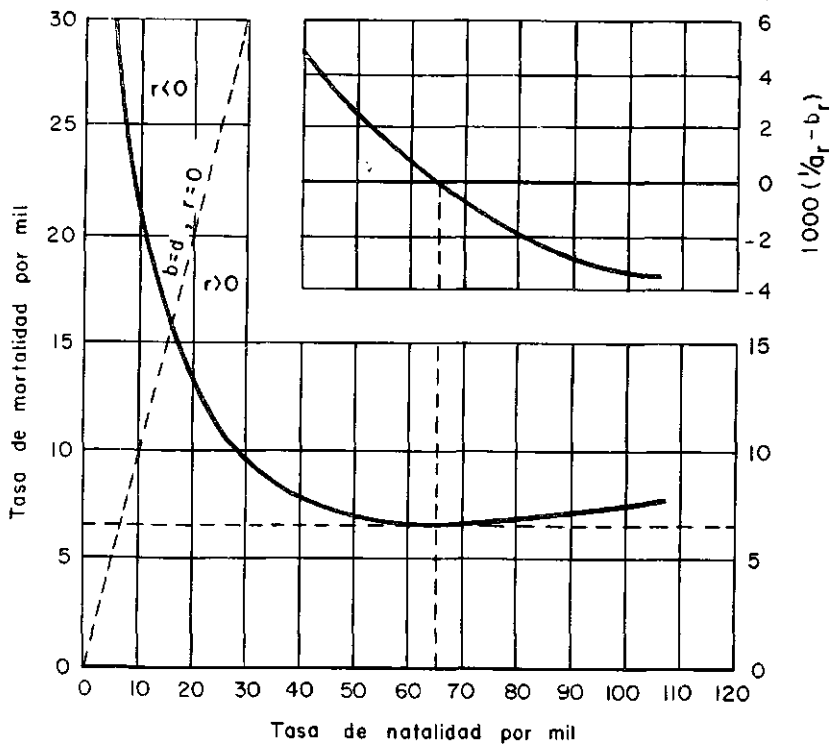
Se ve que incluso para el valor extremo de  $r$ , +0,02 (que casi no se encuentra en la estadística de las poblaciones civilizadas modernas, con excepción de la Unión Soviética) el desvío entre el valor de  $b$  calculado con valores exactos de los  $\lambda$  y el calculado con sus valores aproximados, alcanza solamente a un 1 por ciento de la tasa de natalidad. Para un  $r = +0,01$ , que siempre es un valor muy considerable, el error que se comete calculando  $b$  por medio de los  $\lambda$  aproximados es inferior al 1/2 por mil.



Relación entre la tasa de natalidad  $b$  y la tasa de mortalidad  $d$  en una población malthusiana. Una vez conocidos los valores de  $L_0$  y los  $\lambda$ , la fórmula (64) nos pone en condiciones de calcular una serie de valores de  $b$  correspondientes a una serie de valores de la tasa de crecimiento  $r$ , y en consecuencia una serie de valores de  $d = b - r$ . ¿Cuál será el comportamiento de la curva así definida? ¿El aumento de la tasa de natalidad en una población malthusiana conduce a un aumento o a una disminución de la tasa de mortalidad?

Gráfico 5

POBLACION MALTHUSIANA  
Tasa de mortalidad como función de la tasa de natalidad con indicación del mínimo



96 Las curvas del gráfico 1 nos dejan en la duda respecto a este punto, pues nos dicen que en dicha población habrá un exceso relativo de niños si la tasa de natalidad es elevada y un exceso relativo de ancianos si esa tasa es baja o sobre todo si  $r$  es negativo. Ahora bien, la tasa de mortalidad es muy elevada en ambos extremos de la vida, tanto en la primera infancia como en la vejez. En consecuencia, sin un examen más profundo de los hechos no sabemos cuál es el factor que domina en la constitución de la tasa de mortalidad para la población total comprendiendo todas las edades; y en consecuencia no sabemos, sin ese examen, si la tasa de mortalidad en la población malthusiana variará en el mismo sentido de las variaciones de la tasa de natalidad o en sentido opuesto. Solamente el cálculo puede informarnos sobre este tema. Y ese cálculo,<sup>1/</sup> da las curvas representadas en el gráfico 5.

*Valor mínimo de la tasa de mortalidad.* Al comienzo se ve que la función  $d = f(b)$  se asemeja a una hipérbola, disminuyen los valores de  $d$  al aumentar los de  $b$ , e inversamente. Sin embargo, para valores más grandes de  $b$  la función  $d = f(b)$  se vuelve creciente. Luego, para un valor particular de  $b$  la función  $d$  pasa por un mínimo; busquemos ese valor. Es necesario poner

$$(80) \quad 0 = \frac{dd}{db} = \frac{d(r-b)}{db} = \frac{dr}{db} - 1$$

de ese modo

$$(81) \quad \frac{db}{dr} = 1$$

Ahora bien, de acuerdo con (61)

$$(82) \quad \frac{d \log_e b}{dr} = A_r$$

de modo que

$$(83) \quad \frac{db}{dr} = A_r b$$

<sup>1/</sup> Efectuado por medio de la fórmula modificada de acuerdo con las indicaciones de la página 81 y basado en la tabla de vida de los Estados Unidos, raza blanca, sexo femenino, 1930.

y finalmente, la condición para un mínimo de  $\frac{C}{b}$  toma la forma

$$(84) \quad A_r b = 1$$

$$(85) \quad A_r = 1/b.$$

Este interesante resultado nos dice que cuando la tasa de mortalidad de una población malthusiana ha alcanzado un mínimo, la edad media de la población es igual al valor recíproco de la tasa de natalidad.

Sin embargo, es preciso decir que esa es una condición que no se observará nunca en una población moderna, ya que la tasa de crecimiento correspondiente a ese estado sería demasiado elevada. Para determinar dicha tasa debemos expresar  $A_r$  y  $b$  en (85) por las fórmulas (48, 41) y (64), lo que da

$$(86) \quad \lambda_1 - \lambda_2 r + \lambda_3 \frac{r^2}{2!} - \dots = L_0 e^{-\lambda_1 r + \lambda_2 \frac{r^2}{2} - \dots}$$

No obstante, esas fórmulas no sirven con facilidad para los cálculos, debido a la convergencia demasiado lenta de las series para los valores de  $r$  en los cuales estamos interesados. Conviene entonces establecer

$$(87) \quad r = r' + \epsilon$$

$r'$  es una solución aproximada del problema de modo que  $\epsilon$  es una magnitud pequeña. Una solución más exacta se encuentra escribiendo

$$(88) \quad \Delta_1 - \Delta_2 \epsilon + \Delta_3 \frac{\epsilon^2}{2!} - \dots = L_0' e^{-\Delta_1 \epsilon + \Delta_2 \frac{\epsilon^2}{2} - \dots}$$

los  $\Delta$  son los semi-invariantes y  $L_0'$  el momento de orden cero de la función

$$(89) \quad f(a) = e^{-r'a} p(a)$$

completamente análogos a los semi-invariantes  $\lambda$  de  $p(a)$ .

*Fórmula empírica que relaciona las tasas de natalidad y mortalidad.* Es sabido que para  $r = 0$  (población estacionaria) la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad y ambas iguales al valor recíproco de la vida media

$$(41) \quad b = d = \frac{1}{L_0}$$

o, lo que es lo mismo

$$(90) \quad \frac{1}{2} \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \frac{1}{d} = L_0.$$

Por lo general, en todos los problemas prácticos  $b$  y  $d$  varían en sentido opuesto, y puede esperarse que la fórmula del tipo (90) sea válida también en el caso en que  $b \neq d$ . En efecto, una fórmula de ese tipo ha sido propuesta por B. Dunlop,<sup>1/</sup> desconociendo evidentemente una fórmula parecida

$$(91) \quad \frac{1}{3} \frac{1}{b} + \frac{2}{3} \frac{1}{d} = L_0$$

citada por Newsholme y atribuida por él, a William Farr.<sup>2/</sup>

*Base analítica de la fórmula de Farr.* La fórmula de Farr tiene evidentemente un fundamento lógico más profundo que el que se ha citado líneas arriba. Observemos en primer lugar que una relación lineal entre  $\frac{1}{b}$  y  $\frac{1}{d}$  del tipo (90), (91) equivale a una relación hipérbolica entre  $b$  y  $d$ ; esto recuerda la observación hecha con anterioridad de que para  $b$  inferior a  $\frac{1}{A_r}$  la función  $d = f(b)$  se parece a una hipérbola. Planteado de este modo el asunto, nos preguntamos ¿cuál es entonces el significado de los coeficientes  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  de las fórmulas empíricas mencionadas? Evidentemente, sus valores se han elegido de manera arbitraria. ¿Hay una elección óptima? y ¿cuál sería su naturaleza?

En efecto, para el caso de una población malthusiana es posible establecer una fórmula parecida a la de Farr; en la cual, sin embargo, los coeficientes no sean arbitrarios. Desarrollando en la ecuación (33), la función  $e^{-ra}$  según las potencias de  $ra$ , obtenemos

$$(92) \quad \frac{1}{b} = L_0 - rL_1 + \dots$$

y la ecuación (37) permite escribir

$$(93) \quad \frac{1}{d} = L_0 + r(L_0^2 - L_1) + \dots$$

<sup>1/</sup> *British Medical Journal*, 1924, pág. 788.

<sup>2/</sup> No he conseguido encontrar la publicación original.

Si pueden despreciarse los términos en  $r^2$  etc., eliminando  $r$  de las 99 ecuaciones (92), (93), se obtiene

$$(94) \quad \left(1 - \frac{L_1}{L_0^2}\right) \frac{1}{b} + \frac{L_1}{L_0^2} \frac{1}{d} = L_0.$$

Aplicando esta fórmula a la población femenina de Inglaterra y Gales en 1871-1880 (véase la página 83), se transforma en

$$(95) \quad 0,2631 \frac{1}{b} + 0,7369 \frac{1}{d} = 44,62$$

El valor observado para  $b$  fue 0,03373. La fórmula (95) da una tasa de mortalidad

$$d = 0,02000$$

mientras que el valor observado era

$$d = 0,02001$$

una concordancia notable y sin duda excepcional.

Redondeando los coeficientes de  $\frac{1}{d}$  y  $\frac{1}{b}$  podríamos poner en (95)

$$(96) \quad \frac{1}{4} \frac{1}{b} + \frac{3}{4} \frac{1}{d} = 44,62$$

que evoca extraordinariamente la fórmula empírica de Farr. Poniendo de nuevo

$$b = 0,03373 \text{ (valor observado)}$$

se obtiene

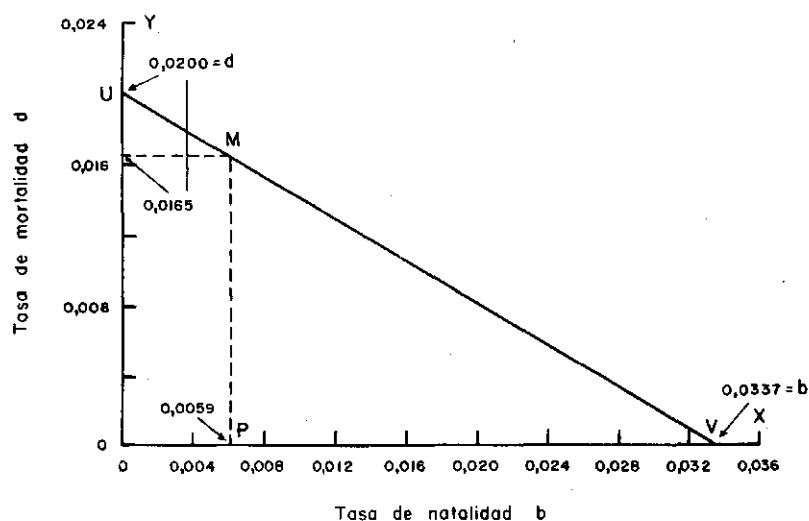
$$d = 0,02018$$

que concuerda razonablemente con el valor observado 0,02001.

*Gráfico de la fórmula de Farr.* La fórmula de Farr admite una representación gráfica simple que es aplicable también a la fórmula más general (95).

REPRESENTACION GRAFICA DE LA RELACION ENTRE LAS TASAS DE  
NATALIDAD, DE MORTALIDAD Y LA VIDA MEDIA

(Haciendo girar la recta UV alrededor del punto M, se obtiene una sucesión de pares de valores  $d$  y  $b$ , que están indicados por las posiciones sucesivas de los puntos U y V sobre las escalas de los ejes vertical y horizontal, respectivamente)



En el gráfico 6 se han representado los coeficientes de  $\frac{1}{b}$  y  $\frac{1}{d}$  correspondientes a la expresión (95)

$$(97) \quad OP = \frac{1}{L_0} \left( 1 - \frac{L_1}{L_0^2} \right)$$

$$(98) \quad PM = \frac{1}{L_0} \left( \frac{L_1}{L_0^2} \right)$$

$$OV = b = 0,0337$$

En dicho caso  $VMU$  corta al eje  $OY$  en el punto  $U$ , de tal modo que  $OU$  es igual a  $d$ , es decir en este caso particular, a  $0,0200$

Haciendo girar la recta  $UV$  alrededor del punto  $M$  se obtiene una sucesión de pares de valores de  $b$  y  $d$ , indicados por las posiciones sucesivas de los puntos  $U$  y  $V$  sobre las escalas de los ejes vertical y horizontal, respectivamente.

Hasta aquí nos hemos ocupado del caso particular de una población cuya distribución por edad, así como las tasas de natalidad, de mortalidad y de crecimiento natural, son constantes. Aun dentro de esas condiciones arbitrarias y en cierto modo artificiales, hemos visto que nuestro modelo analítico refleja con bastante fidelidad la estructura de determinadas poblaciones concretas. Sin embargo, tales casos son más bien excepcionales y es natural que se trate de ampliar las premisas con el propósito de aproximarse mejor y en forma más general a las condiciones que se presentan en las poblaciones concretas, con distribución variable por edades y tasas de natalidad, mortalidad y crecimiento como funciones del tiempo.

Para dicha finalidad retomamos la ecuación fundamental

$$(9) \quad N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a)p(a)da$$

suponiendo que  $N(t)$  y  $B(t)$  son funciones cualesquiera del tiempo, que pueden representarse por las series

$$(100) \quad N(t) = k_0\varphi(t) + k_1\varphi'(t) + \frac{1}{2!}k_2\varphi''(t) + \dots$$

$$(101) \quad B(t) = c_0\varphi(t) + c_1\varphi'(t) + \frac{1}{2!}c_2\varphi''(t) + \dots$$

siendo  $\varphi$  una función conocida y  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ , ... sus derivadas sucesivas en relación al tiempo  $t$ . Introduciendo (101) en (9) se obtiene

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} N(t) = c_0 \{ L_0\varphi(t) - L_1\varphi'(t) + \frac{1}{2!}L_2\varphi''(t) - \dots \} \\ + c_1 \{ \quad \quad L_0\varphi'(t) - L_1\varphi''(t) + \dots \} \\ + \frac{1}{2!}c_2 \{ \quad \quad \quad L_0\varphi''(t) - \dots \} \\ + \text{etc.} \end{array} \right.$$

luego

$$(103) \quad N(t) = c_0 L_0 \varphi(t) - (c_0 L_1 - c_1 L_0) \varphi'(t) + \frac{1}{2!} (c_0 L_2 - 2c_1 L_1 + c_2 L_0) \varphi''(t)$$

$$(104) \quad \quad \quad = k_0 \varphi(t) \quad \quad \quad + k_1 \varphi'(t) \quad \quad \quad + \frac{1}{2!} k_2 \varphi''(t)$$

Si se comparan los términos del mismo orden que están a la derecha en (103) y (104) se obtiene, conociendo  $B(t)$ , una expresión para  $N(t)$ , o viceversa.<sup>1/</sup>

Caso particular. Sea  $N(t) = K_0 \varphi(t)$

se tendrá entonces

$$(105) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{K_0}{L_0} \\ c_0 L_1 - c_1 L_0 = 0 \\ c_1 = c_0 \frac{L_1}{L_0} = \lambda_1 c_0 \\ c_0 L_2 - 2c_1 L_1 + c_2 L_0 = 0 \\ c_2 = 2c_1 \frac{L_1}{L_0} - c_0 \frac{L_2}{L_0} \\ \quad = \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_0 \end{array} \right.$$

y así sucesivamente. Se obtiene de esta manera

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{K_0}{L_0} \\ c_1 = \lambda_1 c_0 \\ c_2 = \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_0 \\ c_3 = \lambda_1 c_2 - 2\lambda_2 c_1 + \lambda_3 c_0 \\ c_4 = \lambda_1 c_3 - 3\lambda_2 c_2 + 3\lambda_3 c_1 - \lambda_4 c_0 \\ c_5 = \lambda_1 c_4 - 4\lambda_2 c_3 + 6\lambda_3 c_2 - 4\lambda_4 c_1 + \lambda_5 c_0 \end{array} \right.$$

<sup>1/</sup> El problema de encontrar  $N(t)$  dado  $B(t)$ , se resuelve directamente integrando la ecuación fundamental (9). El caso particular donde  $B(t)$  toma la forma de la función logística ha sido tratado por E. Zwinggi, *Mitteilungen des Vereins Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, vol. 24, agosto 1929, pág. 94. El problema de encontrar  $B(t)$  cuando se conoce  $N(t)$ , requiere un tratamiento de otro tipo. Lotka ha dado su solución independientemente del artículo de Zwinggi en *Proceedings of the National Academy of Science*, oct. 1929, pág. 794 (informe del 12 de septiembre de 1929). Véase también A.J. Lotka, *Human Biology*, vol. 3, 1931, pág. 549. El nuevo método que presento aquí puede decirse que es simétrico y, en consecuencia, aplicable por igual a los dos problemas.

<sup>2/</sup> Se reconoce en esta expresión, aunque con algunos cambios de signo, el inverso del algoritmo con el cual, a partir de los  $L$ , se deducen los  $\lambda$ , (véase la ecuación (49), pág. 76).



Esas fórmulas son suficientemente claras. Sin embargo, pueden simplificarse considerablemente dando la siguiente forma a la ecuación (9)

$$(9a) \quad N(t) = \int_0^\infty B[(t - \lambda_1) - (a - \lambda_1)]p(a)da$$

De esta manera<sup>1</sup> se obtienen fórmulas análogas a (106) a condición de reemplazar

$$(107) \quad \begin{cases} t \text{ por } t' = t + \lambda_1 \\ \lambda_1 \text{ por } \lambda_1' = 0 \\ \lambda_n \text{ por } \lambda_n' = \lambda_n \end{cases} \quad (n \neq 1)$$

y en consecuencia, se anulan todos los términos que contienen a  $\lambda_1$  o  $c_1$  en (106), resultando

$$(108) \quad \begin{cases} c_0' = \frac{K_0}{L_0} \\ c_1' = 0 \\ c_2' = -\lambda_2 c_0 \\ c_3' = \lambda_3 c_0 \\ c_4' = -\lambda_4 c_0 + 3\lambda_2^2 c_0 \\ c_5' = \lambda_5 c_0 - 10\lambda_2 \lambda_3 c_0 \end{cases}$$

La solución (101) de (9) se presenta entonces bajo una forma más característica

$$(109) \quad B(t) = \frac{K_0}{L_0} \left\{ \varphi(t') - \frac{\lambda_2}{2!} \varphi''(t') + \frac{\lambda_3}{3!} \varphi'''(t') - \frac{1}{4!} (\lambda_4 - 3\lambda_2^2) \varphi^{IV}(t') + \frac{1}{5!} (\lambda_5 - 10\lambda_2 \lambda_3) \varphi^V(t') - \dots \right\}$$

en el miembro derecho de la ecuación (109), el tiempo  $t'$  se cuenta a partir de un origen  $-\lambda_1$  anterior al origen del tiempo  $t$  en el miembro izquierdo.

Si los términos en  $\varphi''(t')$  y de orden superior son suficientemente pequeños en comparación con el término en  $\varphi(t')$ , se tendrá en forma simple una representación aproximada de  $B(t)$

$$(110) \quad B(t) = \frac{K_0}{L_0} \varphi(t')$$

es decir, los nacimientos anuales  $B(t)$  seguirán la misma ley  $\varphi$ , de

<sup>1</sup> Véase el apéndice, página 209, para una transformación de la serie (101) mediante un cambio del origen de  $t$ .

104 la población  $N(t)$ , afectada en este caso por una constante, pero con un desplazamiento hacia la izquierda en el origen del tiempo a una distancia  $\lambda_1$  que depende exclusivamente de la función  $p(a)$  y no de la función  $\varphi(t)$ .

*Las defunciones anuales.* Por un procedimiento análogo al que nos dio  $B(t)$ , puede buscarse una expresión para las defunciones anuales  $D(t)$  partiendo de la ecuación

$$(18) \quad D(t) = - \int_0^{\infty} B(t-a)p'(a)da$$

donde  $p'(a)$  significa la derivada, con respecto a la edad  $a$ , de  $p(a)$ . Sin embargo, se obtiene con mayor facilidad el mismo resultado, considerando que

$$(111) \quad D(t) = B(t) - \frac{dN}{dt}$$

de modo que, según las fórmulas (100), (101) y (105)

$$(112) \quad \begin{cases} D(t) = c_0\varphi(t) + (c_1 - K_0)\varphi'(t) + \dots \\ = \frac{K_0}{L_0} \varphi(t) + (\lambda_1 - L_0)\varphi'(t) + \dots \end{cases}$$

Mediante un cambio en el origen del tiempo

$$(113) \quad t' = t + (\lambda_1 - L_0)$$

se anula el segundo término del miembro derecho, y se tiene

$$(114) \quad D(t) = \frac{K_0}{L_0} \varphi(t') + R$$

en la cual  $R$  contiene solamente términos en  $\varphi''(t')$  y de orden superior. Por lo tanto, si esos términos son suficientemente pequeños, se observa que las defunciones anuales, del mismo modo que los nacimientos, siguen una ley igual a la de la población, pero con un desplazamiento hacia la derecha en el origen del tiempo a una distancia  $(L_0 - \lambda_1)$  que depende solamente de la función de supervivencia  $p(a)$ , y no de la función  $\varphi$ .

*Tasa de natalidad.* Dividiendo los nacimientos anuales  $B(t)$  por  $N(t) = K_0 \varphi(t)$ , se deduce de inmediato la tasa de natalidad  $b(t)$ . 105

$$(115) \quad b(t) = \frac{B(t)}{N(t)} = \left\{ c_0 + c_1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + \frac{c_2}{2!} \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} + \dots \right\} \frac{1}{K_0}$$

$$= \frac{1}{L_0} \left\{ 1 + \lambda_1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + \frac{1}{2!} (\lambda_1^2 - \lambda_2) \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} + \dots \right\}$$

*Tasa de mortalidad.* Dada la población  $N(t)$  como una función del tiempo, la tasa de mortalidad  $d(t)$ , se obtiene inmediatamente por medio de la relación

$$(116) \quad \begin{cases} d(t) = b(t) - r(t) \\ \quad = b(t) - \frac{dN(t)}{N(t)dt} \end{cases}$$

En la discusión de los nacimientos y las defunciones anuales hemos obtenido algunos resultados con carácter general sin darle a  $\varphi(t)$  una forma particular. Para un desarrollo más completo de las fórmulas que nos dan las tasas  $b(t)$  y  $d(t)$  es preciso tener en cuenta la forma de la función  $\varphi$ . Trataremos, en consecuencia, un caso particular que presenta un interés práctico considerable.

*Caso particular: Población logística.* Recordemos que la ley de Malthus, de la cual nos hemos ocupado con anterioridad, puede ser considerada como un caso particularmente simple del desarrollo general

$$(117) \quad \frac{dN}{dt} = f(N) = a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3 + \dots$$

cuando la serie que está en el miembro derecho queda reducida a un único término,  $a_1 N$ .

Si en lugar de conservar solamente el primer término de la serie, se conservan dos,

$$(118) \quad \frac{dN}{dt} = a_1 N + a_2 N^2$$

se llegará a la ley "logística" de Verhulst-Pearl. Es sabido que esta ley se verifica muy bien en determinadas poblaciones (entre

106 otras, la de los Estados Unidos) a través de extensos intervalos de tiempo.

Escribamos la fórmula (118) de una manera más cómoda

$$(119) \quad \frac{dN}{Ndt} = r_t = r_i \left( 1 - \frac{N}{N_\infty} \right)$$

que pone en evidencia al hecho de que en ese caso la tasa de crecimiento  $r_t$ , ya no es más constante, y por el contrario disminuye constantemente a partir de un valor inicial<sup>1/</sup>  $r_i$  hasta cero; y al mismo tiempo  $N(t)$  tiende indefinidamente al valor límite<sup>2/</sup>  $N_\infty$ .

El valor  $N(t)$  se obtiene integrando la ecuación (119):

$$(120) \quad \begin{cases} N(t) = \frac{N_\infty}{1 + e^{-r_i t}} \\ = \frac{1}{2} N_\infty \left( 1 + \tanh \frac{r_i t}{2} \right) \end{cases}$$

La curva que representa los valores de  $N(t)$  en función del tiempo, de acuerdo con la expresión (120) tiene la forma de una S alargada.<sup>3/</sup> Como lo indica la fórmula alternativa, esta curva no es otra cosa que una representación gráfica de la tangente hiperbólica, circunstancia ventajosa para los cálculos.

La curva de los valores  $r_t$ , dada por la fórmula (119), tiene

<sup>1/</sup> Evidentemente este valor inicial es también el valor máximo (véase la página 65); para los Estados Unidos es igual a 0.0314. Es probable que un valor de un 0,03 a 0,04 corresponda al máximo fisiológico por el hecho de que en una población humana los nacimientos múltiples son poco frecuentes y porque el intervalo entre alumbramientos sucesivos apenas si puede ser inferior a 11 meses. Véase A.J. Lotka, *Journal of the American Statistical Association*, 1927, págs. 166, 167.

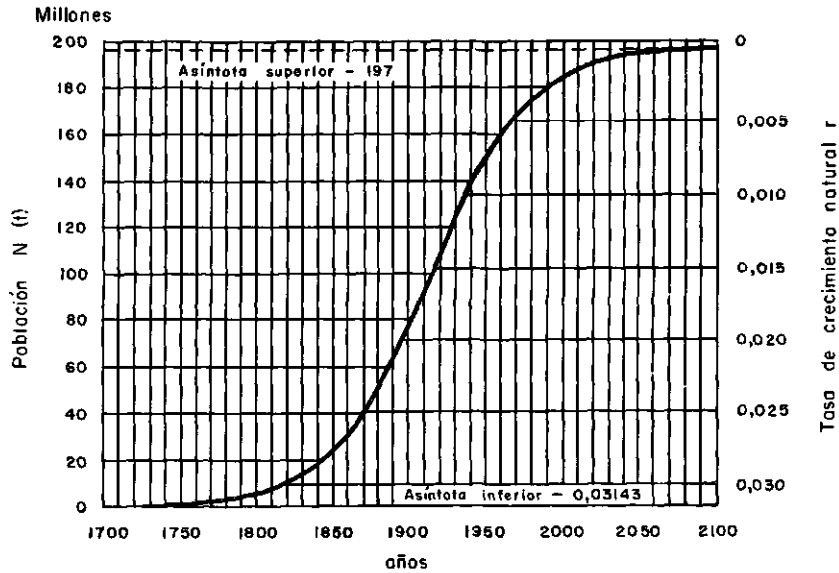
<sup>2/</sup> Suponiendo, claro está, que la población sigue comportándose de acuerdo con la ley logística. Esta hipótesis se introduce únicamente con el propósito de dar una interpretación concreta a la constante  $N_\infty$  y no en el sentido de una proyección. Semejante extrapolación sobre una escala heroica sería contraria a los principios elementales de la ciencia.

<sup>3/</sup> En las fórmulas (119) y (120) el tiempo  $t$  se cuenta a partir de un origen que corresponde al centro de simetría de la curva de  $N(t)$ .

la forma de una logística invertida o, lo que es lo mismo, la forma 107 de una logística en relación al eje de las ordenadas vuelto hacia abajo, como se muestra a la derecha del gráfico 7.

Gráfico 7

CURVA LOGISTICA QUE REPRESENTA EL TOTAL N Y LA TASA DE CRECIMIENTO  $r$  DE UNA POBLACION. BASADO EN ESTADISTICAS DE LOS ESTADOS UNIDOS. MAS ALLA DE 1930 LA CURVA ES HIPOTETICA Y NO SE HA PRESENTADO A TITULO DE PROYECCION



Algunas propiedades de la función logística. En lo que sigue tendremos ocasión de aplicar ciertas propiedades de la función logística, que será útil indicar por anticipado:

1. Pongamos

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \psi(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

108 en tal caso

$$(121) \quad \psi(t) + \psi(-t) = 1$$

2.

$$(122) \quad \psi'(t) = \frac{re^{-rt}}{(1 + e^{-rt})^2} = r\psi(t)\psi(-t)$$

de modo que

$$(123) \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = r\psi(-t)$$

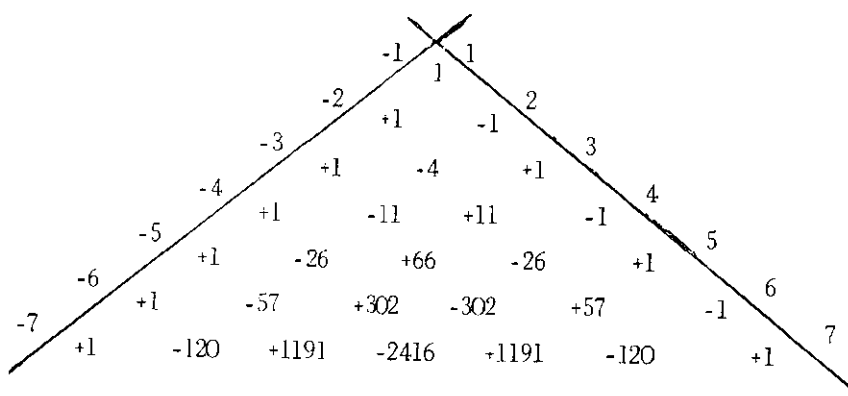
3. Cuando las fórmulas (103, 104) se aplican al caso de una población logística, deben calcularse sus términos de orden más elevado; para ello es preciso conocer las derivadas sucesivas de  $\psi(t)$ . Su forma es

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(t) = \frac{1}{1 + e^{-rt}} \\ \psi'(t) = \frac{re^{-rt}}{(1 + e^{-rt})^2} \\ \psi''(t) = -\frac{r^2e^{-rt}(1 - e^{-rt})}{(1 + e^{-rt})^3} \\ \psi'''(t) = +\frac{r^3e^{-rt}(1 - 4e^{-rt} + e^{-2rt})}{(1 + e^{-rt})^4} \\ \psi^{IV}(t) = -\frac{r^4e^{-rt}(1 - 11e^{-rt} + 11e^{-2rt} - e^{-3rt})}{(1 + e^{-rt})^5} \\ \psi^V(t) = +\frac{r^5e^{-rt}(1 - 26e^{-rt} + 66e^{-2rt} - 26e^{-3rt} + e^{-4rt})}{(1 + e^{-rt})^6} \end{array} \right.$$

La ley de formación de los factores que aparecen entre paréntesis en los numeradores puede expresarse de manera muy cómoda por medio de un algoritmo análogo al del triángulo de Pascal. Los coeficientes de los sucesivos términos entre paréntesis aparecen inscritos, en el cuadro 8, debajo de las líneas oblicuas. El procedimiento por el cual se obtiene el coeficiente de un término cualquiera puede explicarse más fácilmente con un ejemplo: El número 4 en la tercera línea se obtiene sumando las dos cifras adjuntas en la línea precedente, multiplicadas respectivamente por el rango de la fila oblicua en la cual se encuentran. Ese rango se indica con

los números colocados encima de la recta oblicua.<sup>1</sup> Así, la segunda 109  
 cifra de la tercera línea es  $(1 \times -2) + (-1 \times 2) = -4$ . Del mismo  
 modo, la tercera cifra de la última línea inscrita en el cuadro  
 (el cual se extiende efectivamente hasta el infinito) es la suma  
 de  $(-57 \times -5) + (302 \times 3) = 1191$ .

Cuadro 8



Aplicando esas propiedades de la función logística estamos ahora en condiciones de continuar con la discusión de las funciones demográficas.

*Nacimientos anuales en una población logística cerrada.* La expresión para los nacimientos anuales  $B(t)$  en una población cerrada, se obtiene de inmediato introduciendo en la fórmula general (109) los valores especiales correspondientes a la función logística.<sup>2/</sup>

$$(120) \quad N(t) = \frac{N_{\infty}}{1 + e^{-rt}} = N_{\infty} \psi(t)$$

<sup>1/</sup> Tomo este algoritmo de un artículo (referente por lo demás a otro tema) de C. Burrau, quien lo atribuye originalmente a O. Burrau. Véase *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1934, pág. 4. En M. Merrell, *Human Biology*, vol. 3, 1931, pág. 37 se encuentra un cuadro de valores numéricos para las 7 primeras derivadas de la función logística.

<sup>2/</sup> No hay que olvidar que cuando la fórmula de la curva logística se escribe en esta forma, el tiempo  $t$  se cuenta a partir del "centro" de la logística.

110 es decir

$$(125) \quad \begin{cases} \varphi(t) = \psi(t) \\ K_0 = N_\infty \end{cases}$$

Para propósitos de cálculo es a veces más cómodo utilizar la expresión (109) *in extenso* con la forma que presenta cuando  $\varphi(t)$  se expresa por la tangente hiperbólica, cuyos valores se encuentran en tablas numéricas usuales. Se tiene entonces

$$(126) \quad \left\{ \begin{aligned} B(t) &= \frac{N_\infty}{L_0} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \frac{rt'}{2} \right) + \frac{\lambda_2 r^2}{214} \left( \tanh \frac{rt'}{2} - \tanh^3 \frac{rt'}{2} \right) \right. \\ &- \frac{\lambda_3 r^3}{318} \left( 1 - 4 \tanh^2 \frac{rt'}{2} + 3 \tanh^4 \frac{rt'}{2} \right) \\ &- \frac{(\lambda_4 - 3\lambda_2^2) r^4}{414} \left( 2 \tanh \frac{rt'}{2} - 5 \tanh^3 \frac{rt'}{2} + 3 \tanh^5 \frac{rt'}{2} \right) \\ &\left. + \frac{(\lambda_5 - 10\lambda_2\lambda_3) r^5}{518} \left( 2 - 17 \tanh^2 \frac{rt'}{2} + 30 \tanh^4 \frac{rt'}{2} - 15 \tanh^6 \frac{rt'}{2} \right) + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

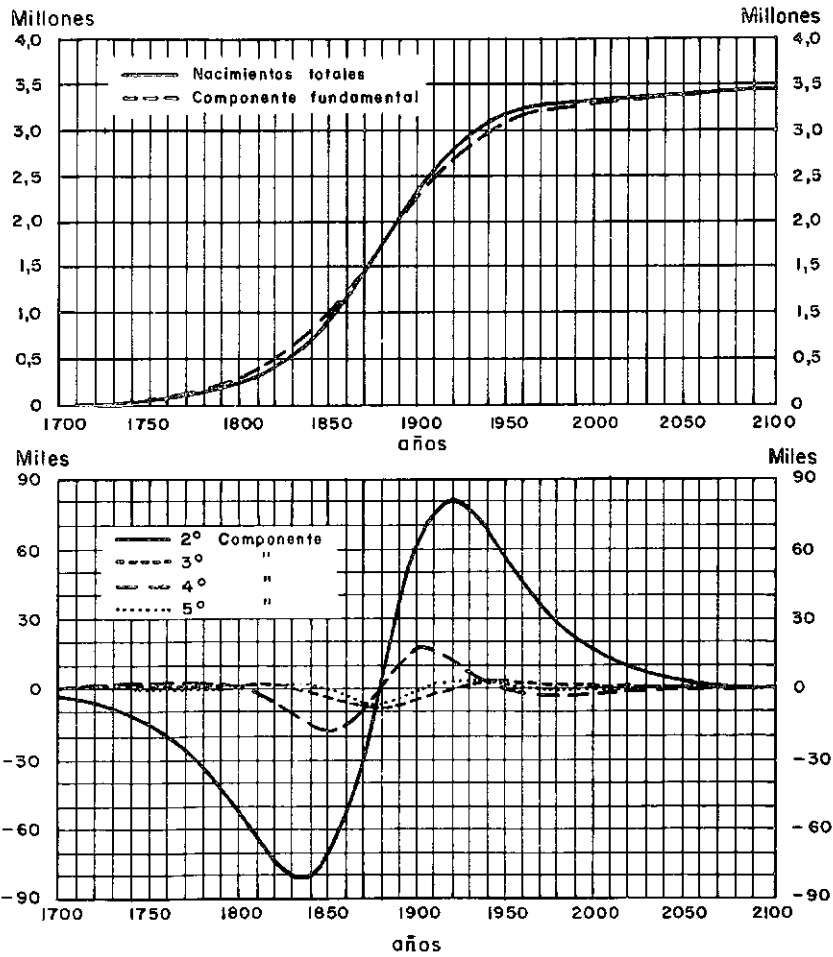
Ahora bien, el primer término de la serie (109), aplicado al caso de una población logística

$$(127) \quad B(t) = \frac{N_\infty}{L_0} \psi(t')$$

representa por sí mismo una curva logística semejante a la de la población, excepto que su centro está desplazado hacia la izquierda a una distancia  $\lambda_1$ , cuya amplitud es  $\frac{N_\infty}{L_0}$  en lugar de  $N_\infty$ . En cuanto a los términos de segundo orden etc., sólo representan correcciones prácticamente despreciables. Esto se ve claramente en el gráfico 8 donde figuran resultados obtenidos con cálculos hechos sobre datos numéricos referentes a la población de los Estados Unidos. Se observa allí que la primera componente, es decir, el primer término de la serie, representa, salvo una ligera corrección, el conjunto de la función  $B(t)$ . En efecto, para poner de manifiesto las componentes de orden 2, 3, 4, 5 ha sido preciso representarlas en el segundo cuadro del gráfico 8 con una escala veinticinco veces mayor que la usada en el primer cuadro.



NACIMIENTOS ANUALES EN UNA POBLACION LOGISTICA.  
 CURVA CALCULADA DE ACUERDO CON LAS CARACTERISTICAS  
 DE LA POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS Y LA  
 TABLA DE VIDA DE 1919-1920



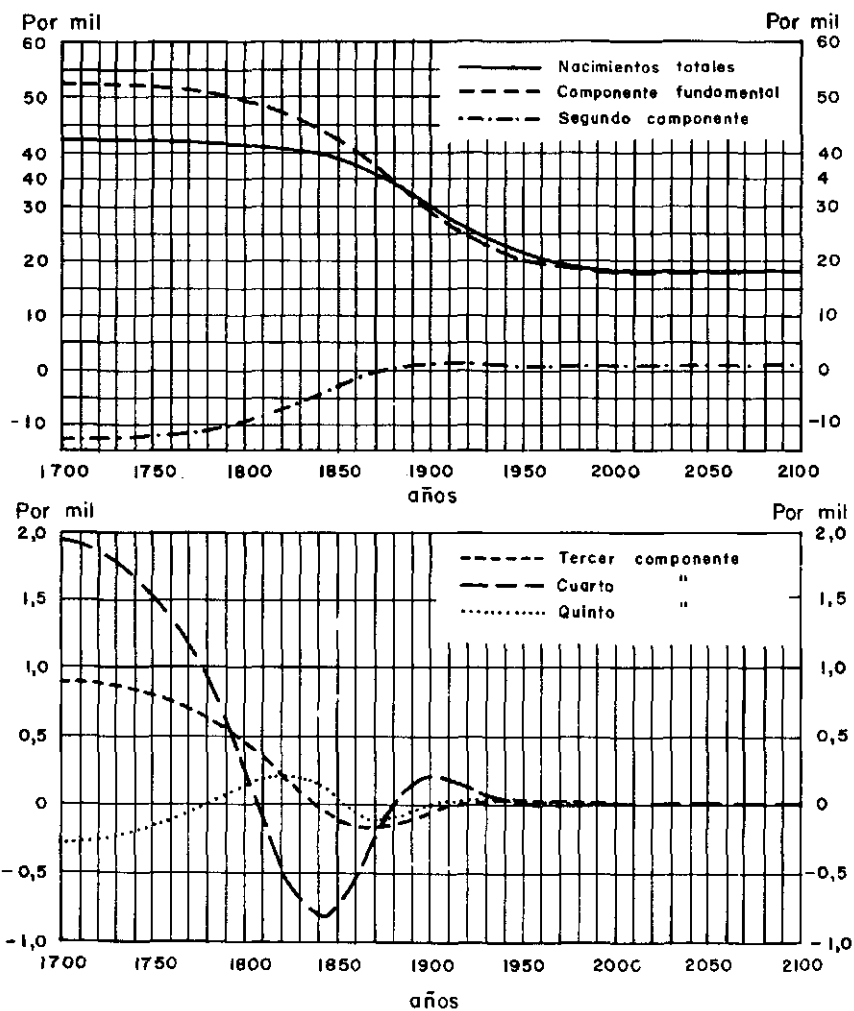
*Defunciones anuales en una población logística cerrada. Si en la fórmula general (112) se introducen las características de la fun-*

112 ción logística  $N(t)$  inmediatamente se obtiene

$$(128) \quad D(t) = \frac{N_{\infty}}{L_0} \psi(t) + (\lambda_1 - L_0) \psi'(t) + \dots$$

Gráfico 9

TASA DE NATALIDAD EN UNA POBLACION LOGISTICA.  
CURVA CALCULADA DE ACUERDO CON LAS CARACTERISTICAS  
DE LA POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS Y LA  
TABLA DE VIDA DE 1919-1920



y, mediante un cambio en el origen del tiempo

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} t' = t + (\rho_1 - L_0) \\ D(t) = \frac{N_\infty}{L_0} \psi(t') + R \end{array} \right.$$

el resto  $R$  contiene solamente términos en  $\psi''(t)$  y de orden superior.

*Tasa de natalidad en una población logística cerrada.* Aplicando a la fórmula general (115) la propiedad de la función logística

$$(123) \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = r_i \psi(-t)$$

se obtiene

$$(130) \quad b(t) = \frac{1}{L_0} \left[ 1 + \lambda_1 r_i \psi(-t) + \dots \right]$$

Los dos primeros términos del miembro derecho, serían en general insuficientes para representar por sí solos, ni siquiera con aproximación, la función  $b(t)$ , como puede verse en el gráfico 9. Sin embargo, mediante un cambio en el origen del tiempo podemos darles una importancia predominante. Ponemos

$$(131) \quad b(t) = \frac{1}{L_0} + \frac{\lambda_1 + \tau}{L_0} r_i \psi(-t') + \dots$$

eligiendo

$$t' = t + \tau$$

de tal modo que

$$(132) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{-\infty} = \frac{1}{L_0} + \frac{\lambda_1 + \tau}{L_0} r_i \psi(\infty) \\ = b_\infty + \frac{\lambda_1 + \tau}{L_0} r_i \\ \tau = \frac{(b_{-\infty} - b_\infty)}{r_i} L_0 - \lambda_1 \\ b(t) = \frac{1}{L_0} + (b_{-\infty} - b_\infty) \psi(-t'). \end{array} \right.$$

Con esa elección para el origen del tiempo, la sencilla fórmula (131) da resultados casi tan exactos como los seis primeros tér-

TASAS DE NATALIDAD EN UNA POBLACION LOGISTICA CERRADA,  
TOMANDO COMO BASE LA CURVA DE CRECIMIENTO DE LOS  
ESTADOS UNIDOS Y LA TABLA DE VIDA PARA 1919-1920  
(RAZA BLANCA, SEXO FEMENINO)

Año	Tasa de natalidad $b(t)$ , por uno		
	Fórmula (130)		Fórmula (132)
	Primera componente	Primeros seis términos	
1800	0,0360	0,0411	0,0410
20	0,0356	0,0404	0,0403
40	0,0348	0,0392	0,0390
60	0,0336	0,0372	0,0370
80	0,0316	0,0342	0,0341
1900	0,0290	0,0302	0,0305
20	0,0251	0,0259	0,0267
40	0,0222	0,0225	0,0234
60	0,0210	0,0202	0,0210
80	0,0195	0,0189	0,0195
2000	0,0185	0,0182	0,0185

minos de la fórmula (130), como puede verse en el cuadro 9.<sup>1/</sup>

*Tasa de mortalidad en una población logística cerrada.* Análogamente, mediante un cambio en el origen de tiempo, se encuentra a partir de (112)

$$(133) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(t) = \frac{1}{L_0} + \frac{(\lambda_1 - L_0 - \tau)}{L_0} r_i \psi(-t') \\ \tau = \frac{(d_{-\infty} - d_{\infty})L_0}{r_i} + (\lambda_1 - L_0) \\ d(t) = \frac{1}{L_0} - (d_{\infty} - d_{-\infty})\psi(-t'). \end{array} \right.$$

<sup>1/</sup> Para un análisis diferente de la curva de natalidad véase además, A.J. Lotka, *Annals of Mathematical Statistics*, junio de 1939.

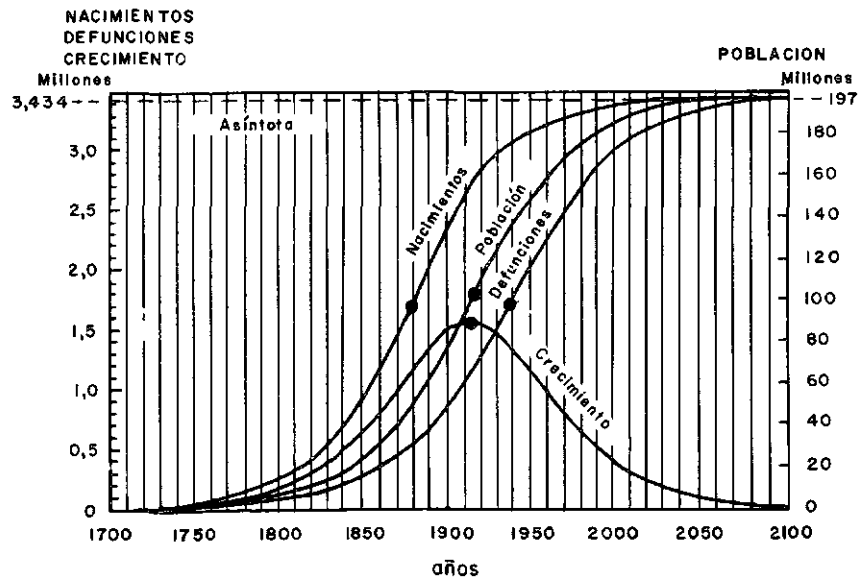
Resumen. En una población cerrada  $N(t)$  que crece siguiendo la ley logística 115

$$N(t) = N_{\infty} \psi(t) = \frac{N_{\infty}}{1 + e^{-rt}}$$

los nacimientos y las defunciones anuales crecen también (aproximadamente) según leyes logísticas, y las tasas de natalidad y crecimiento disminuyen de acuerdo con leyes logísticas inversas. Con todo, los centros de las curvas están desplazados en relación al centro de  $N(t)$  según el esquema del cuadro 10 y los gráficos 10 y 11, cuyos datos numéricos están basados en estadísticas de los Estados Unidos.

Gráfico 10

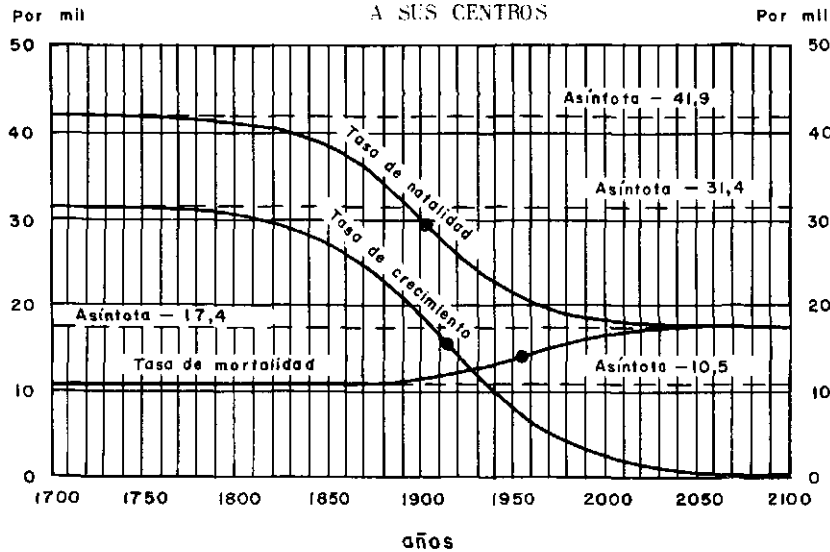
CURVAS DE NACIMIENTOS, POBLACION Y CRECIMIENTO ANUAL EN UNA POBLACION LOGISTICA, CON INDICACION DE LAS POSICIONES CORRESPONDIENTES A SUS CENTROS



116 Esas relaciones son aproximadas debido a que se han despreciado los términos de orden superior en los desarrollos en series. No obstante, en el ejemplo numérico introducido a título ilustrativo, basado en la curva de crecimiento logístico de los Estados Unidos y en la tabla de vida para 1919-1920, el desvío que se produce entre los valores aproximados del centro de las curvas y los calculados conservando cinco términos de las series, alcanza a 7 años en un sólo caso, el de  $d(t)$ . Para  $B(t)$  es menos de un año, y para  $b(t)$  y  $I(t)$  de dos.

Gráfico 11

CURVAS DE LAS TASAS DE NATALIDAD, MORTALIDAD Y CRECIMIENTO, EN UNA POBLACION LOGISTICA BAJO EL REGIMEN DE UNA TABLA DE MORTALIDAD CONSTANTE, CON INDICACION DE LAS POSICIONES CORRESPONDIENTES A SUS CENTROS



*Caso más general: Población logística bajo el régimen de una tabla de vida variable.* Es difícil un análisis riguroso que tenga en cuenta las variaciones de la mortalidad. En cambio, surge de inmediato una aproximación sin que sea necesario modificar la forma

exterior de nuestras fórmulas. Basta con que de ahora en adelante, 117  
 consideremos tanto los coeficientes  $c$  como los semi-invariantes  $\lambda$ ,  
 funciones del tiempo; hecho que se deduce naturalmente a consecuen-

Cuadro 10

CARACTERISTICAS DE UNA POBLACION LOGISTICA CERRADA,  
 CALCULADAS BASANDOSE EN LA CURVA DE CRECIMIENTO DE  
 LOS ESTADOS UNIDOS Y LA TABLA DE VIDA PARA  
 1919-1920 (RAZA BLANCA, SEXO FEMENINO)

Función demográfica	Desplazamiento del centro de la componente logística	Posición del centro desplazado	Valor medio <u>a/</u>	Posición del valor medio <u>b/</u>
$N(t)$	0,0	1914	$\frac{N_{\infty}}{2}$	1914
$B(t)$	$\lambda_1$	1879	$\frac{N_{\infty}}{2L_0}$	1879
$b(t)$	$\frac{(b_{-\infty} - b_{\infty}) L_0}{r_i} - \lambda_1$	1904	$\frac{b_{-\infty} + b_{\infty}}{2}$	1902
$D(t)$	$\lambda_1 - L_0$	1937	$\frac{N_x d_{\infty}}{2}$	1939
$d(t)$	$\frac{(d_{-x} - d_{\infty}) L_0}{r_i} + (\lambda_1 - L_0)$	1949	$\frac{d_{\infty} + d_{-x}}{2}$	1956

a/ Es decir, media entre los dos extremos correspondientes a  
 $t = \pm \infty$ .

b/ De acuerdo con las fórmulas (109), (115), conservando 5 términos.  
 Valor de las constantes fundamentales

Origen de  $t = 1914$

$N_{\infty} = 197$  millones

$r_i = 0,0314$

$b_{-\infty} = 0,0419$

$b_{\infty} = d_{\infty} = 0,0174$

$d_{-\infty} = 0,0105$

$L_0 = 57,52$

$\lambda_1 = 35,03$

118 cia de la alteración secular de la curva de supervivencia. Para ello es preciso que la función  $p(a)$  que ahora debemos escribir  $p(a,t)$  se transforme sólo lentamente a lo largo del tiempo.

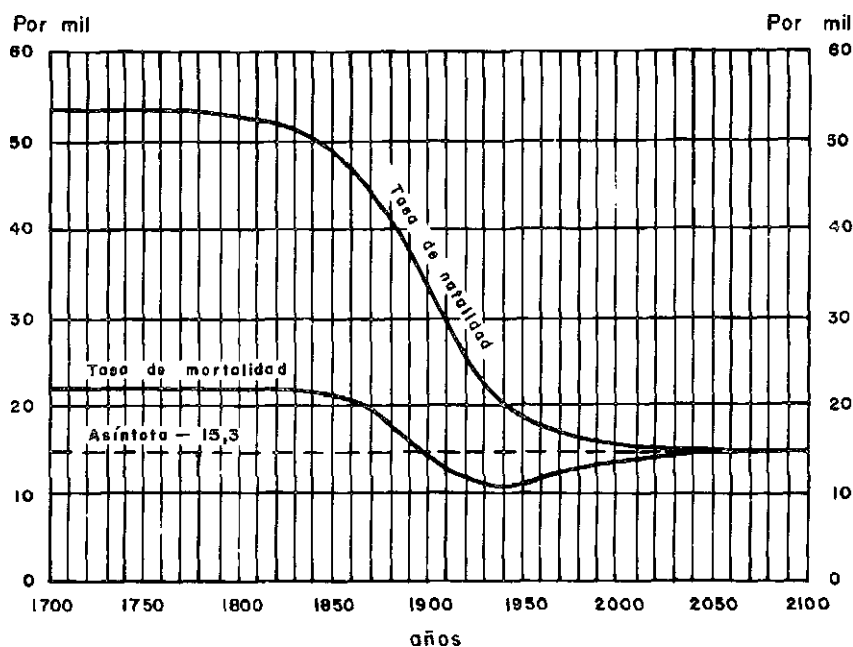
La introducción de la mortalidad variable modifica sustancialmente el aspecto de las curvas de natalidad y mortalidad expresadas en función del tiempo, como puede verse en los gráficos 11 y 12. En el gráfico 11 se representa dichas curvas, las que se han calculado manteniendo constante, la tabla de vida de los Estados Unidos para 1919-1920. Por el contrario, en el cálculo del gráfico 12 se ha empleado una tabla de vida variable que representa aproximadamente las condiciones correspondientes a las sucesivas épocas del período 1700 a 2100.<sup>1/</sup> Se percibe de inmediato dos diferencias importantes entre ambos gráficos. La curva de la tasa de natalidad desciende mucho más bruscamente bajo el régimen de una tabla de vida variable. Pero todavía es más sorprendente que, bajo el régimen de una tabla de vida variable, la curva de la tasa de mortalidad, en lugar de subir continuamente desde un valor inicial a un valor final, siguiendo la forma de una S alargada, comprenda un período durante el cual la mortalidad desciende con bastante rapidez; a este período sigue una etapa final donde la curva asciende hasta aproximarse al valor asintótico de la tasa de mortalidad. Estas observaciones tienen una importancia práctica y actual; en los Estados Unidos estamos hoy, en la región del mínimo de la curva de mortalidad. Hasta el presente hemos gozado de un descenso continuo y bastante rápido de la tasa de mortalidad; debemos esperar, en lo futuro, un aumento de dicha tasa (véase la página 64).

*Comparación de los resultados teóricos con los datos empíricos.* Es necesario insistir en que los cálculos y resultados desarrollados en lo que antecede se han hecho únicamente a título de ejemplo, sin atribuirles una correspondencia estrecha con la realidad. Sin embargo, nuestro modelo teórico se ha construido sobre bases tomadas de la demografía concreta y debe esperarse que esta circuns-

<sup>1/</sup> Para más detalles consúltese el texto "The Structure of a Growing Population", *Human Biology*, 1931, págs. 481 y siguientes.



CURVAS DE NATALIDAD Y MORTALIDAD EN UNA POBLACION  
LOGISTICA, BAJO UN REGIMEN DE MEJORAMIENTO  
PROGRESIVO EN LA TABLA DE VIDA



tancia se refleje en los resultados. En efecto, si se toma en cuenta la inmigración, factor hasta ahora omitido, nuestros resultados teóricos reflejan con bastante fidelidad la realidad concreta. Veamos, desde este punto de vista, qué aspecto presentan los resultados de nuestros cálculos.

*La tasa de natalidad.* En el cálculo de la tasa de mortalidad, de acuerdo con el esquema explicado, hemos supuesto la población *cerrada*, es decir, que aumenta únicamente con el exceso de los nacimientos sobre las defunciones. A este respecto, la población de los Estados Unidos, que nos ha servido de ejemplo, recibió en el curso de los años cantidades muy importantes de inmigrantes. En cierto sentido puede decirse, que la magnitud considerada como tasa de natalidad de nuestros cálculos, era efectivamente la suma

120 de las tasas de natalidad e inmigración. Es posible introducir en nuestros resultados una corrección aproximada, deduciendo de los valores calculados para  $b$  una cantidad que represente, bien o mal, la parte del crecimiento que corresponde a inmigración. La estadística sobre inmigrantes es bastante inexacta, particularmente para las épocas menos recientes. Usando, en la medida de lo posible, los datos tal cual se presentan, se llegó a los resultados contenidos en el cuadro 11, en el cual se ve que en el período comprendido entre 1915 y 1930 hay, entre las cifras calculadas y las observadas, una concordancia que debe considerarse muy satisfactoria si se tienen en cuenta las aproximaciones un tanto heroicas que ha sido preciso hacer. Para los años siguientes no es posible pensar siquiera en una coincidencia burda, ya que la crisis económica trastornó la evolución regular de las cosas. Además, hay razones para creer que el crecimiento de la población estadounidense, que hasta 1930 siguió tan fielmente la curva logística, no alcanzará a partir de ese momento los valores estimados de acuerdo con esta curva. Pero, no es nuestro objetivo hacer aquí proyecciones.<sup>1/</sup> Nuestra tarea, más modesta, se refiere al análisis de los hechos y especialmente a la búsqueda de relaciones entre esos hechos.

*La distribución por edad.* Puede introducirse una corrección, al menos parcial, para atenuar el efecto de la inmigración sobre la distribución por edad, comparando las cifras calculadas con la población nativa de los Estados Unidos. Esta comparación basada en una función de supervivencia variable.<sup>2/</sup> se presenta en el gráfico 13. En ese caso, la concordancia es excelente.

1/ Observamos que si se conocen o se dan, de acuerdo con una hipótesis cualquiera en función del tiempo, los valores de  $p(a, t)$  y de una determinada función  $m(a, t)$ , la fecundidad, la ecuación integral (134), cuyo estudio haremos enseguida, (pág. 124) nos permite calcular progresivamente la población para una serie de épocas futuras. Varios autores han hecho cálculos de esta naturaleza en relación con diversos países. Para los Estados Unidos y para los años posteriores a 1933, muestran un déficit por debajo de los valores correspondientes a la logística.

2/ Es decir, mediante el empleo en los cálculos de una sucesión de tablas de vida que reflejen el progreso moderno de la salud pública. Estos cálculos son bastante laboriosos. Para mayores detalles el lector debe remitirse al texto, A.J. Lotka, "The Structure of a Growing Population", *Human Biology*, 1931, vol. 3, pág. 459.

COMPARACION DE LAS TASAS CALCULADAS CON LAS EFECTIVAMENTE REGISTRADAS. ESTADOS UNIDOS. EL CALCULO SE BASA EN UNA SERIE DE TABLAS DE VIDA (MORTALIDAD VARIABLE)

Año	Tasa de natalidad		
	Calculada		Registrada
	Bruta	Corregida por inmigración	
1915 <sup>a/</sup>	28	25	25,1
1916	28	25	25,0
1917	27	24	24,7
1918	27	24	24,6
1919	26	23	22,3
1920	26	23	23,7
1921	26	23	24,2
1922	25	22	22,3
1923	25	22	22,2
1924	24	21	22,4
1925	24	21	21,5
1926	23	20	20,7
1927	23	20	20,6
1928	22	19	19,8
1929	22	19	18,9
1930	22	19	18,9

a/ Fecha en la cual se inician los registros oficiales de las tasas de natalidad en los "Birth Registration States".

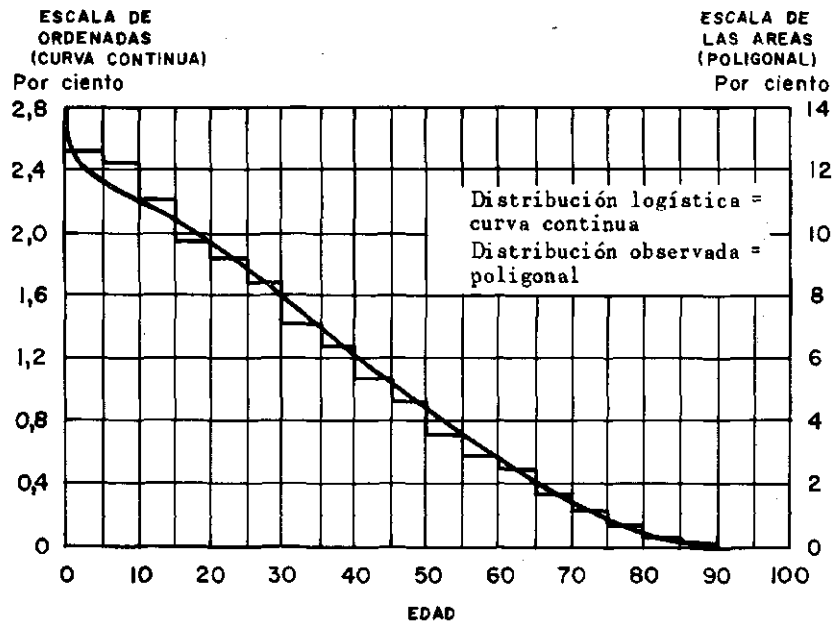
Hasta aquí nos hemos ocupado, siguiendo el plan indicado en la introducción, de relaciones que comprenden un mínimo de variables, como las tasas de natalidad y mortalidad y la distribución por edad.

Existe entre esas variables, como hemos visto, determinadas relaciones mutuas. La tasa de mortalidad a cada edad y la distribución por edad, por ejemplo, determinan entre ellas la tasa de mortalidad global. Es evidente que de un modo análogo la distribución por edades determina la tasa de natalidad, ya que ésta dependerá de la cuota de personas comprendidas entre los límites del período reproductivo. Para delinear las relaciones que entran en juego

122 aquí, pasamos a la próxima etapa de estos estudios introduciendo un nuevo factor en nuestra discusión.

Gráfico 13

COMPARACION DE LA DISTRIBUCION POR EDAD, CALCULADA SEGUN LA CURVA LOGISTICA CON LA DISTRIBUCION REAL DE LA POBLACION NATIVA, FEMENINA, Y DE RAZA BLANCA DE LOS ESTADOS UNIDOS



## RELACIONES QUE INCLUYEN LA FECUNDIDAD

La fórmula

$$(33) \quad b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da}$$

desarrollada anteriormente es incompleta en cierto sentido. Expresa una relación entre la tasa de natalidad  $b$  y la tasa constante de crecimiento  $r$ , sin fijar, sin embargo, los valores en forma definitiva. Para esto sería necesario contar con una segunda relación independiente. Es evidente que existe un factor esencial que hasta ahora no ha entrado en nuestros cálculos: la fecundidad de la población.

*La fecundidad y los nacimientos anuales.* Convendrá, al menos por el momento, tratar nuestro tema en su aplicación sólo a uno de los dos sexos habiendo escogido por razones prácticas, la población del sexo femenino.<sup>1/</sup>

Los nacimientos de niñas  $B(t)$  en la época  $t$  provienen de madres que en esa época tienen edad  $a$ , comprendida entre los límites del período reproductivo, o sea, entre 15 y 55 años. Estas mismas madres nacieron en la época  $(t-a)$  cuando los nacimientos anuales eran

<sup>1/</sup> El período reproductivo está definido con mayor precisión en la mujer que en el hombre, y la filiación materna es casi siempre conocida, aun en el caso de hijos ilegítimos.

124

124  $B(t-a)$ , de manera que en un intervalo de tiempo  $dt$  había  $B(t-a)dt$  nacimientos, de los cuales  $B(t-a)p(a)dt$  sobreviven en la época  $t$ , teniendo entonces una edad entre  $a$  y  $(a+dt) = (a+da)$ . Sea  $m(a)$  la fecundidad efectiva<sup>1/</sup> del sexo femenino a la edad  $a$ , definida como el número de hijas nacidas vivas por año, *per capita* de mujeres de edad  $a$ . La función  $m(a)$  así como  $p(a)$  en el caso que nos ocupa, es independiente del tiempo  $t$ . Entonces de las  $B(t-a)p(a)da$  mujeres de edad  $a$  nacerán, en el curso del año,  $B(t-a)p(a)m(a)da$  niñas, y la suma total anual de tales nacimientos provenientes de mujeres de toda edad, será

$$(134) \quad B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a)p(a)m(a)da \quad // \quad 2/$$

una ecuación fundamental que relaciona los nacimientos anuales de las niñas en la época  $t$  con los nacimientos anuales de las madres en el tiempo que precede.

Por su forma, la ecuación (134) nos recuerda la ecuación (9), que hemos vuelto a encontrar en el problema de una población logística. Busquemos una solución utilizando la serie exponencial

$$(135) \quad B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + Q_3 e^{r_3 t} + \dots$$

la sustitución da, para  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(136) \quad 1 = \int_0^{\infty} e^{-r_n a} p(a)m(a)da.$$

de este modo, los coeficientes  $r_n$  quedan determinados como las raíces de la ecuación

$$(137) \quad 1 = \int_0^{\infty} e^{-r a} p(a)m(a)da. //$$

<sup>1/</sup> La fecundidad potencial, magnitud cuya medida se nos escapa, no nos interesa en absoluto en este examen.

<sup>2/</sup> Observemos de paso que la ecuación (134) sigue siendo válida si  $p(a)$  y  $m(a)$  están en función del tiempo  $t$ . Sin embargo, en las presentes consideraciones tratamos el caso en que la tabla de vida y la fecundidad por edades son constantes.

Por el contrario, los coeficientes  $Q_n$  dependen de las condiciones iniciales.

*Raíces de la ecuación fundamental (137): Propiedades generales.* Antes de iniciar el examen detallado de las raíces de la ecuación (137), son útiles algunas observaciones generales acerca de sus propiedades.

*Raíz real.* La función  $p(a)m(a)$  (producto de una probabilidad y de una fecundidad), no puede, evidentemente, tomar más que valores reales y positivos. En consecuencia, la ecuación (137) puede tener únicamente una sola raíz real  $\rho$ , positiva para

$$R_0 = \int_0^{\infty} p(a) m(a) da > 1$$

y negativa para  $R_0 < 1$ :

$$(138) \quad \rho \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases} \text{ según que } R_0 \begin{cases} \geq 1 \\ < 1 \end{cases}$$

es decir, según que el número de nacimientos aumente o disminuya de generación en generación.

*Raíces complejas.* Sea

$$(139) \quad r = u + iv$$

una cualquiera de las raíces complejas de (137). Entonces

$$(140) \quad e^{rt} = e^{(u+iv)t} = e^{ut}(\cos vt + i \operatorname{sen} vt).$$

Las raíces complejas introducen, pues, oscilaciones en la evolución de los nacimientos anuales. Si  $u < 0$ , lo que es el caso común en la práctica, esas oscilaciones estarán amortiguadas (bajo la influencia del factor  $e^{ut}$ ), de manera que la amplitud disminuirá de período en período.<sup>1/</sup>

<sup>1/</sup> El lector encontrará una representación gráfica de esas características en el gráfico 15, página 142, cuyo examen detallado debe, no obstante, posponerse para más adelante.

126 En todos los casos se tiene

$$(141) \quad u < \rho$$

de modo que la amplitud *relativa* de las oscilaciones, en relación al término aperiódico  $Q_\rho e^{\rho t}$  va en disminución, y por último ese término aperiódico es el que domina la evolución de los nacimientos, ya que en relación a él todos los otros términos de la solución se vuelven despreciables. Se tiene entonces

$$(142) \quad B(t) = Q_\rho e^{\rho t}.$$

*Importante función de la raíz real  $\rho$ : Tasa intrínseca de crecimiento.* Desde el momento en que la fórmula (142) es aplicable, se tiene

$$(9) \quad N(t) = \int_0^\infty B(t-a)p(a)da$$

$$(143) \quad = Q_\rho e^{\rho t} \int_0^\infty e^{-\rho a} p(a)da$$

$$(144) \quad = Ke^{\rho t} \quad (\text{siendo } K \text{ una constante})$$

Tenemos, pues, una población malthusiana que aumenta o disminuye según la tasa de crecimiento constante  $\rho$ . Este resultado es independiente de las condiciones iniciales. Con tal que la mortalidad y la fecundidad de cada edad tengan constantemente los valores dados, cualquiera sea la distribución inicial por edad y las tasas de natalidad y mortalidad, al final la tasa de crecimiento se aproxima cada vez más al valor asintótico  $\rho$ , valor *intrínseco*, que expresa la capacidad fundamental de multiplicación de la población, liberada de la influencia perturbadora de una distribución inicial, por edad, arbitraria.

Este aspecto de la tasa intrínseca de crecimiento  $\rho$  merece muy particularmente nuestra atención. Dicha tasa nos interesa no tanto como instrumento de previsión, sino por expresar una propiedad actual de la población: su capacidad fundamental de multiplicación.



La tasa bruta de crecimiento -el excedente de la tasa de natalidad sobre la tasa de mortalidad registrada- no nos da la verdadera medida de esa capacidad, pues ambas tasas están influidas por la distribución por edad de la población, y la distribución misma depende de los factores que podríamos llamar adventicios que han actuado en lo pasado. Entre la tasa bruta y la tasa intrínseca de crecimiento, puede haber una desviación importante. Volveremos sobre este tema cuando con nuestro examen más detallado hayamos llegado al cálculo numérico de las raíces  $r$ .

*Población con distribución estable por edad.* Establecido esto, volvemos al problema de la estabilidad de tipo maltusiano. Hemos observado que las fórmulas para la tasa de natalidad y la distribución por edad de una población maltusiana eran insuficientes para determinar completamente esas características, y que era necesaria una relación independiente suplementaria para determinar los valores *estables* de esas características. Esta relación independiente la tenemos en la ecuación

$$(137) \quad 1 = \int_0^{\omega} e^{-ra} p(a) m(a) da,$$

cuya única raíz real  $\rho$  define completamente las características de la población maltusiana con distribución estable.

Esas características son por consiguiente

$$(145) \quad b_{\rho} = 1 \int_0^{\infty} e^{-\rho a} p(a) da$$

$$(146) \quad c_{\rho}(a) = b_{\rho} e^{-\rho a} p(a)$$

$$(147) \quad 1 = \int_0^{\infty} e^{-\rho a} p(a) m(a) da.$$

La distribución estable por edad puede ser establecida efectivamente en una población, si la tasa de crecimiento  $r$  ha sido prácticamente constante a través de un período bastante largo, como en los ejemplos citados en la página 75. La distribución efectiva se desviará más o menos de ese tipo estable. Si esto es así, los

128 resultados contenidos en las fórmulas (145), (146) y (147) nos informan sobre el estado final hacia el cual tiende la población bajo el régimen de una fecundidad y una mortalidad constantes, sin indicarnos, sin embargo, las fases intermedias por las cuales pasa. Para informarnos sobre esas fases intermedias es menester examinar más de cerca la relación fundamental (137) y calcular no solamente su raíz real  $\rho$ , sino también sus raíces complejas  $u + iv$ .

*Las raíces de la ecuación fundamental (137): Examen detallado.* Para el examen detallado y cálculo de las raíces de la ecuación fundamental (137) conviene introducir los momentos  $R_n$  y los semi-invariantes  $\mu_n$  de la función  $p(a)m(a) = \varphi(a)$ , análogos a los momentos  $L_n$  y a los semi-invariantes  $\lambda_n$  de la función  $p(a)$ .

Establezcamos

$$(148) \quad y_{(3)} = \int_0^{\infty} e^{-ra} \varphi(a) da$$

de manera que

$$(149) \quad \frac{dy}{dr} = - \int_0^{\infty} a e^{-ra} \varphi(a) da$$

$$(150) \quad = - A_r \int_0^{\infty} e^{-ra} \varphi(a) da$$

$$(151) \quad = - A_r y$$

$$(152) \quad y = R_0 e^{-\int_0^r A_r dr}$$

$$(153) \quad = R_0 e^{-rT_r}$$

donde se ha colocado

$$(154) (*) \quad A_r = \frac{\int_0^{\infty} a e^{-ra} \varphi(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-ra} \varphi(a) da}$$

$$(155) \quad T_r = \frac{1}{r} \int_0^r A_r dr.$$

\* Hay que distinguir claramente  $A_r$  del  $A_r$  de la fórmula (45) página 74.

Destaquemos de paso que  $R_0$  es el momento de orden 0 de la función  $p(a)m(a)$ . Este parámetro, por su definición misma, representa la relación entre los nacimientos totales de dos generaciones sucesivas. Por otra parte, el cociente  $A_r$  indica la edad media en la cual una madre tiene sus hijas. O podría también decirse que  $A_r$  es el desvío medio entre la edad de una madre y la de todas sus hijas (dando también a las hijas nacidas vivas, pero fallecidas más tarde, la edad que tendrían si estuvieran aún con vida). Finalmente, siendo  $T_r$  el intervalo en el cual tiene lugar un crecimiento igual a la relación entre los nacimientos de dos generaciones sucesivas, representa evidentemente el intervalo medio entre dos generaciones sucesivas (contadas de madre a hija, es decir, a lo largo de la línea de descendencia del sexo femenino).

Volvamos a las ecuaciones (148), (153)

$$(156) \quad y = \int_0^{\infty} e^{-ra} \zeta(a) da = R_0 e^{-rT_r} = 1 \quad \text{de acuerdo con (137)}$$

$$(157) \quad \log_e R_0 - rT_r = \log_e 1.$$

Acorde con el modelo que hemos seguido en el desarrollo de la edad media de una población malthusiana, colocamos

$$(158) \quad A_r = \frac{R_1 - rR_2 + \frac{1}{2!} r^2 R_2 - \dots}{R_0 - rR_1 + \frac{1}{2!} r^2 R_2 - \dots}$$

$$(159) \quad = \mu_1 - \mu_2 r + \mu_3 \frac{r^2}{2!} - \dots$$

$$(160) \quad T_r = \mu_1 - \mu_2 \frac{r}{2!} + \mu_3 \frac{r^2}{3!} - \dots$$

En términos de los semi-invariantes  $\mu$  la ecuación (157) se transforma

$$(161) \quad \mu_1 r - \mu_2 \frac{r^2}{2!} + \mu_3 \frac{r^3}{3!} - \dots - \log_e R_0 = \log_e 1$$

130 Cálculo de las raíces de (161): Raíz real. La única raíz real de (161) se encuentra dando al  $\log_e 1$  su valor real, es decir cero:<sup>1/</sup>

$$(162) \quad \mu_1 r - \mu_2 \frac{r^2}{2!} + \mu_3 \frac{r^3}{3!} - \dots - \log_e R_0 = 0.$$

Valores aproximados: Primera aproximación. En la práctica  $r$  sobrepasa raramente el valor 0,01 o a lo más 0,02. Se tiene entonces en primera aproximación

$$(163) \quad r = \frac{\log_e R_0}{\mu_1}$$

$$(164) \quad r = \frac{R_0 - 1}{\mu_1}.$$

Puede decirse aproximadamente que  $R_0 - 1$  es la "tasa de crecimiento por generación", y en el mismo sentido  $r$ , que se obtiene dividiendo esa tasa por el intervalo medio (aproximado)  $\mu_1$  entre dos generaciones sucesivas, representa la tasa de crecimiento por año.

Un ejemplo servirá para ilustrar esas relaciones. En la población de los Estados Unidos, sexo femenino, raza blanca, en 1920, se tenía

$$(165) \quad \begin{cases} R_0 = 1,1664 & R_0 - 1 = 0,1664 \\ \mu_1 = 28,47 & \log_e R_0 = 0,1539 \end{cases}$$

luego, según (164)

$$r = \frac{0,1664}{28,47} = 0,0058.$$

Si para ser más exactos, se empleara la fórmula logarítmica (163), se encontraría

$$r = \frac{0,1539}{28,47} = 0,0054.$$

Segunda aproximación. Manteniendo en la expresión (162) el término de segundo grado, debe resolverse la ecuación cuadrática

$$(166) \quad \frac{1}{2} \mu_2 r^2 - \mu_1 r + \log_e R_0 = 0$$

<sup>1/</sup> Interesa solamente la raíz en la proximidad de  $\frac{\log_e R_0}{\mu_1}$ . Las otras raíces de la ecuación (161) se introducen en la transformación de la ecuación fundamental (137) por el desarrollo en serie exponencial y no corresponden a las condiciones del problema.

lo que da

$$(167) \quad r = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 2\mu_2 \log_e R_0}}{\mu_2} \quad \checkmark$$

En el ejemplo que hemos citado el cálculo da

$$r = \frac{28,47 \pm \sqrt{(28,47)^2 - 2 \times 45,39 \times 0,1539}}{45,39} \\ = 0,0054.$$

*Aproximaciones de orden superior.* Para los valores de  $r$  que se encuentran en la práctica, habrá que conservar, en muy pocos casos, términos superiores al de segundo grado al calcular la raíz real. Esta observación no es aplicable cuando se buscan las raíces complejas como lo veremos enseguida. Observamos a propósito de eso que la omisión de términos con semi-invariantes  $\mu_3, \mu_4, \dots$  etc. es equivalente a admitir una representación Gaussiana para la función  $p(a)m(a)$ . Por consiguiente esta hipótesis se permite sólo en el cálculo de la raíz real  $\rho$ ; en cuanto a las raíces complejas, se las puede calcular únicamente conservando los términos de orden superior a 2.

*Tasa intrínseca de natalidad.* Una vez que se ha calculado la tasa intrínseca de crecimiento  $\rho$ , es necesario obtener también el valor de la correspondiente tasa de natalidad. Por aplicación de la fórmula (145) en nuestro ejemplo se obtiene  $b = 0,02091$ . Hay que decir no obstante que puede reemplazarse esta sustitución de  $r = \rho$  en la ecuación (145), mediante el uso de una fórmula abreviada y muy cómoda. En efecto, en el caso de una población con distribución estable por edad, la tasa de natalidad se obtiene directamente como sigue.

Combinando las fórmulas (145) y (147) se consigue

$$(168) \quad b = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\rho a} p(a)m(a) da}{\int_0^{\infty} e^{-\rho a} p(a) da} \\ = \frac{R_0 - \rho R_1 + \frac{\rho^2}{2!} R_2 - \dots}{L_0 - \rho L_1 + \frac{\rho^2}{2!} L_2 - \dots}$$

132 Luego, en primera aproximación

$$(169) \quad b = \frac{R_0}{L_0}.$$

En segunda aproximación, se tiene

$$(170) \quad b = \frac{R_0 - \rho R_1}{L_0 - \rho L_1} = \frac{R_0}{L_0} \frac{1 - \rho \mu_1}{1 - \rho \lambda_1}$$

y, como las aproximaciones sucesivas dan valores alternativos, la media entre la primera y la segunda aproximación todavía es más ventajosa, es decir

$$(171) \quad b = \frac{R_0}{L_0} \frac{1 - \frac{1}{2} \rho (\mu_1 + \lambda_1)}{1 - \rho \lambda_1}.$$

En nuestro ejemplo esas fórmulas dan los siguientes resultados:

Fórmula	(145)	(169)	(170)	(171)
b	0,02091	0,02030	0,02121	0,02075

El autor aprovecha esta ocasión para corregir una extraña confusión de M.R. Kuczynski.<sup>1/</sup> Este opone la fórmula (168) que llama "la complicada fórmula de Lotka" con la fórmula (145) que atribuye a Bortkiewicz. Esto es un doble engaño. La fórmula (168) fue introducida por Lotka solamente con el expreso propósito de llegar a la fórmula aproximada (169) que ciertamente es la más simple posible. En cuanto a la fórmula (145) Lotka la presentó en 1907 para una población malthusiana con tasa de crecimiento arbitrario  $r$ , cuatro años antes de la publicación de la misma fórmula por Bortkiewicz. Su aplicación a una población cualquiera exige en general el cálculo de la tasa intrínseca  $\rho$ , es decir, un procedimiento especial del cual no se encuentra ningún rastro en Bortkiewicz.

De acuerdo con lo que antecede, el valor de la raíz real (mien-

<sup>1/</sup> M.R. Kuczynski, *Fertility and Reproduction*, 1932, págs. 62, 90.

tras se mantiene en los límites usuales) depende casi exclusivamente de  $\mu_1$ , el intervalo medio entre dos generaciones, y sólo en menor medida del desvío cuadrado medio  $\mu_2$  de la curva de fecundidad efectiva  $p(a)_m(a)$ . La raíz es prácticamente independiente de los semi-invariantes superiores de esta curva. Es muy diferente lo que ocurre con las raíces complejas, al estudio de las cuales pasamos a continuación.

*Raíces complejas de la ecuación (137).* Para encontrar las raíces complejas de la ecuación fundamental (137), es necesario escribir el  $\log_e 1$  en (161) en su forma compleja, es decir  $\pm 2\pi ni$  de modo que

$$(172) \quad \frac{1}{2} \mu_2 r^2 - \mu_1 r + \dots + \log_e R_0 = -2\pi ni$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

Esta ecuación se descompone en dos, poniendo para el valor complejo de  $r$

$$(173) \quad r = u + iv$$

y separando la parte real de la parte imaginaria:

$$(174) \quad \frac{1}{2} \mu_2 (u^2 - v^2) - \mu_1 u = -\log_e R_0 + f(u, v)$$

$$(175) \quad (\mu_2 u - \mu_1) v = -2\pi n + F(u, v)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

las funciones  $f$  y  $F$ , son por lo menos de tercer grado en  $u$ ,  $v$ , y de tercer orden, al menos, en relación a los semi-invariantes  $\mu$ . El factor  $n$  recorre los valores de los números enteros, de modo que se obtiene un número infinito de parejas  $(u, v)$  distintas, y otras tantas raíces complejas para  $r$ , cuya parte real  $u$  y la parte imaginaria  $iv$  estarán representadas por los puntos de intersección de la curva definida según (174) con cada una de las curvas de la familia definida en (175).

1/ Podría también escribirse  $+ 2\pi ni$ , haciendo recorrer a  $n$  los valores de los enteros negativos.

134 La ecuación (174), dividida por  $\frac{1}{2}\mu_2$  y completada a derecha e izquierda por el término  $\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2$  toma la forma

$$(176) \quad u^2 - 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} u + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - v^2 = -\frac{2 \log_e R_0}{\mu_2} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 + \frac{2f(u, v)}{\mu_2}$$

En las ecuaciones (174) y (175), colocamos

$$(177) \quad U = u - \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

lo que da

$$(178) \quad U^2 - v^2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - \frac{2 \log_e R_0}{\mu_2} + \chi(u, v)$$

$$(179) \quad U^2 v^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{\mu_2^2} + \psi(u, v)$$

las funciones  $\chi$ ,  $\psi$  son por lo menos de tercer grado en relación a  $u$  y  $v$ .

Inmediatamente se reconoce que  $U^2$ ,  $-v^2$  son las raíces de la ecuación de segundo grado en  $x$ .

$$(180) \quad x^2 - \left\{ \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - \frac{2 \log_e R_0}{\mu_2} + \chi \right\} x - \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{\mu_2^2} + \psi \right\} = 0.$$

Para el caso en que  $u$ ,  $v$  y en consecuencia  $\chi$ ,  $\psi$ , son suficientemente pequeños, puede resolverse la ecuación (180) por aproximaciones sucesivas, colocando en primera aproximación

$$(181) \quad \chi = \psi = 0$$

y obteniendo para  $u$  y  $v$  los valores provisorios  $u_1$  y  $v_1$ .

Colocando esos valores en  $\chi$  y  $\psi$ , la ecuación (180) da un nuevo valor de  $x$  y una nueva pareja  $u_2$ ,  $v_2$ , y así sucesivamente.

Cuando  $n$  es grande,  $u$ ,  $v$  alcanzan valores numéricos considerables, lo que hace a este método poco práctico. Es necesario entonces, operar directamente con la ecuación fundamental (137).<sup>1/</sup> Sin embargo, esas raíces de orden superior que dependen de semi-inva-

<sup>1/</sup> Véase A. J. Lotka, "The Progeny of a Population Element", *American Journal of Hygiene*, 1928, tomo VIII, pág. 900.



riantes de orden elevado y conocidos forzosamente de un modo 135  
 inexacto, no tienen mucho interés práctico.

*Caso particular:* Los semi-invariantes posteriores a  $\mu_2$  se anulan. Como ya se ha dicho, hay correspondencia entre esta condición y aquella por la cual se exige que la función tenga la forma de una distribución Gaussiana. Es útil examinar ese caso particular porque las curvas (178) (179) son ahora muy fáciles de trazar (véase el gráfico 14). En efecto, si en (178) se hace

$$(182) \quad \chi = 0$$

se reconoce que esta ecuación representa, en un sistema de coordenadas rectangulares, una hipérbola con el centro situado en

$$(183) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = 0 \\ v = 0 \end{array} \right. \quad u = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

y con los ejes paralelos a los ejes de  $u$  y de  $v$ .

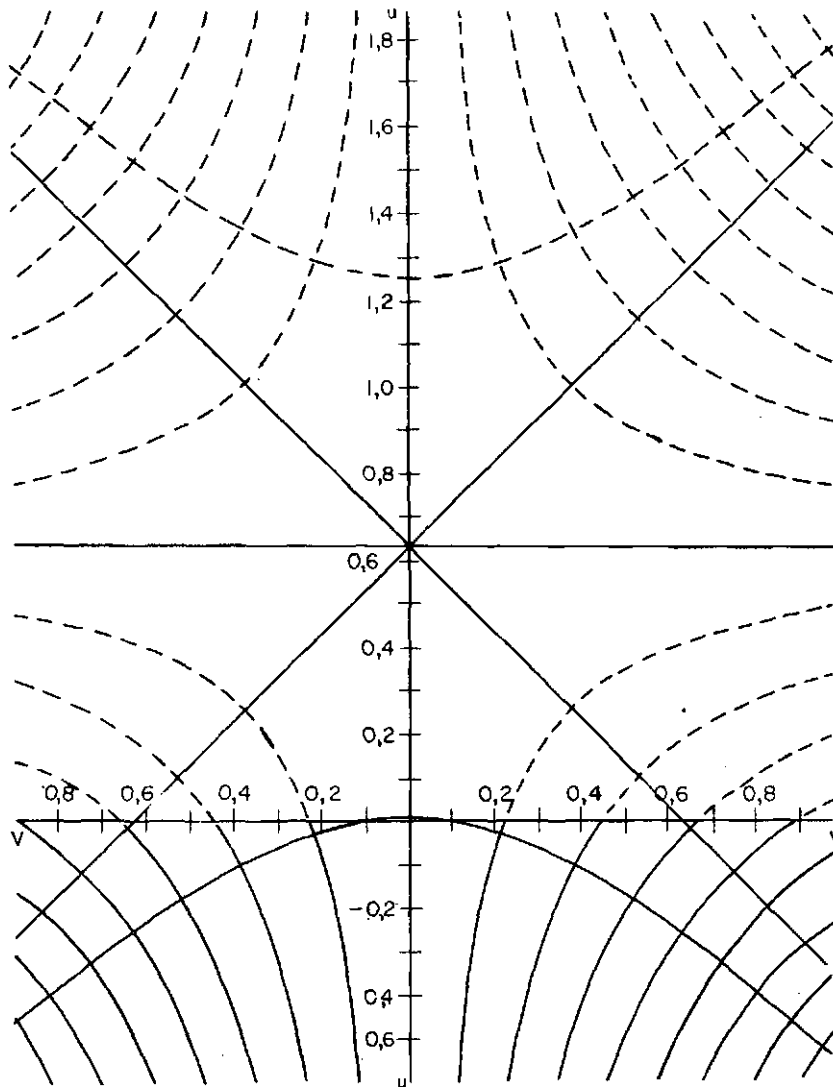
Del mismo modo, si se hace

$$(184) \quad \psi = 0$$

la ecuación (179) representa una familia de hipérbolas concéntricas con la hipérbola (183), y tiene sus ejes inclinados en  $45^\circ$  con relación a los ejes de  $u$  y  $v$ . De acuerdo con una propiedad muy conocida, la primera hipérbola corta cada una de las de la segunda familia a  $90^\circ$ . Los puntos de intersección corresponden por consiguiente a las raíces de la ecuación fundamental para el caso particular que hemos considerado.<sup>1/</sup> Es cierto que éste es un caso muy idealizado, pero no por ello menos útil, ya que permite formarnos una idea de la topografía general de las curvas que representan, en sus intersecciones, las raíces complejas de la ecuación funda-

<sup>1/</sup> Es necesario destacar que las curvas de la parte superior en el gráfico 14 se han trazado solamente para completar la simetría del dibujo. Los valores de  $u$  y de  $v$  que corresponden a los puntos de intersección en los cuadrantes superiores deben desecharse porque no satisfacen la condición mencionada más arriba, según la cual hay sólo una raíz real,  $\rho$ , y la parte real de toda raíz compleja es inferior a  $\rho$ .

TOPOGRAFIA DE LAS CURVAS HIPERBOLICAS QUE EN SUS INTERSECCIONES DAN LAS RAICES DE LA ECUACION FUNDAMENTAL (137) PARA EL CASO EN QUE SE ANULAN LOS SEMI-INVARIANTES DE ORDEN SUPERIOR A 2



mental. Si las curvas se hubiesen trazado teniendo en cuenta también los semi-invariantes de orden superior sin duda se las vería más o menos deformadas en relación con las hipérbolas del gráfico 14. Se habría conservado, sin embargo, el carácter topológico general al menos en cuanto a que las intersecciones serían siempre ortogonales.

*Valor aproximado del período de la primera raíz compleja.* Hagamos  $n = 1$  admitiendo que los semi-invariantes de orden superior son despreciables; la ecuación (175) queda reducida a

$$(185) \quad (\mu_2 u - \mu_1) \nu = -2\pi.$$

Si, además,  $u$  es suficientemente pequeño, se tiene

$$(186) \quad \nu = + \frac{2\pi}{\mu_1}.$$

El período de oscilación  $T$  de esta primera componente es entonces, dentro de ese grado de aproximación

$$(187) \quad T = \frac{2\pi}{\nu} = \mu_1$$

es decir, que este período es igual al intervalo medio entre dos generaciones de madre a hija, en la población estacionaria.

Veremos enseguida el significado de dicho resultado (véase la página 141).



## LA DESCENDENCIA DE UN CONJUNTO DE POBLACION

El significado del resultado que acaba de citarse se hará más claro después de examinar la distribución en el tiempo de la descendencia de un conjunto de población.

Fijemos pues nuestra atención sobre un grupo de población que comprende  $N$  personas del sexo femenino, nacidas -condición esencial- en el mismo momento, digamos, el primero de enero del año cero. Llamamos a este conjunto la *generación cero*. Cuando esas personas alcanzan una determinada edad  $a_1$  (en la práctica unos 15 años), comienzan a reproducirse dando origen a lo que llamaremos la *primera generación* de niñas. Este proceso continúa hasta que las madres de la generación cero alcanzan una determinada edad  $a_2$  (en la práctica unos 55 años), más allá de la cual son todas estériles. Los nacimientos de las niñas que pertenecen a esta primera generación se extienden por lo tanto entre los años  $a_1$  y  $a_2$ , digamos 15 y 55, del calendario que marcaba el año cero al comienzo de esas observaciones.

En el momento que ese mismo calendario marque el año  $2a_1$  (es decir = 30), las hijas mayores que pertenecen a la primera generación alcanzan la edad  $a_1$  (= 15), y comienzan a su vez a procrear, dando nacimiento a la *segunda generación* de niñas. Este proceso continúa a su vez, hasta que las más jóvenes de las niñas que per-

140 pertenecen a la primera generación -aquéllas que nacieron en el año  $a_1$  (= 55), hayan alcanzado el límite de la edad reproductiva,  $a_2$  (= 55). El calendario marcará entonces la fecha  $2a_1$  (= 110). La segunda generación se extiende en consecuencia desde el año  $2a_1$  al año  $2a_2$ , la tercera de  $3a_1$  a  $3a_2$ , y así sucesivamente, la  $n$ -ésima de  $na_1$  a  $na_2$ .

La distribución de los nacimientos entre esos límites estará lejos, sin embargo, de ser uniforme. Busquemos la ley de esta distribución. De los  $N$  individuos de la generación cero, sobrevive hasta la edad  $a$  un número igual a  $Np(a)$ . Esas mujeres sobrevivientes producen durante el tiempo  $da=dt$  un número de hijas igual a  $Np(a)m(a)da$  (primera generación). Luego, la distribución de los nacimientos  $B_1(t)$  que pertenecen a la primera generación está dada por la fórmula

$$(188) \quad B_1(t) = Np(a)m(a) = Np(t)m(t).$$

Para la segunda generación, con un razonamiento completamente análogo al desarrollado en las páginas 123 y 124, se llega directamente a la relación

$$(189) \quad B_2(t) = \int_0^t B_1(t-a)p(a)m(a)da$$

$$(190) \quad B_3(t) = \int_0^t B_2(t-a)p(a)m(a)da$$

y, en general, para la  $(n+1)$ -ésima generación

$$(191) \quad B_{n+1}(t) = \int_0^t B_n(t-a)p(a)m(a)da.$$

*Propiedad analítica de las distribuciones de los nacimientos en las generaciones sucesivas.* La ecuación (191) permite extraer inmediatamente las siguientes conclusiones:<sup>1/</sup>

1. Cualquiera sea el número entero  $k$ , el semi-invariante de or-

<sup>1/</sup> Esa es la propiedad aditiva de los semi-invariantes de Thiele. Con este fin véase A.J. Lotka, "The Progeny of a Population Element", *American Journal of Hygiene*, 1928, Tomo VIII, pág. 875.

den  $k$  de la distribución de los nacimientos en la  $(n+1)$ -ésima generación sobrepasa al de la  $n$ -ésima generación en  $\mu_k$ , siendo este último parámetro el semi-invariante del mismo orden de la función  $p(a)m(a)$ .

2. En consecuencia, el semi-invariante de orden  $k$  de la  $n$ -ésima generación es igual a  $n\mu_k$ .

3. Por consiguiente, a medida que  $n$  aumenta, la distribución de los nacimientos en la  $n$ -ésima generación se aproxima cada vez más a la distribución normal (Gausiana) con desviación cuadrática media  $n\mu_2$  <sup>1/</sup>

4. Los límites de la  $n$ -ésima generación  $na_1$  y  $na_2$  indican solamente su extensión máxima. En la práctica, casi todos los nacimientos estarán comprendidos entre los límites  $\pm \sqrt{n\mu_2}$  alrededor de la época media en la distribución de los nacimientos en esta generación.

Esas propiedades de las distribuciones de los nacimientos en relación al tiempo en las generaciones sucesivas, se representan en el gráfico 15, el cual muestra también por qué el período de oscilación  $T$  (véase la página 137) es aproximadamente igual al intervalo medio entre dos generaciones sucesivas.

*Nacimientos globales en la época  $t$ .* Los nacimientos de una época cualquiera  $t$ , pertenecerán en general a varias generaciones contemporáneas. En efecto, serán nacimientos posibles los de cualquier  $n$ -ésima generación que cumpla con la desigualdad

$$(192) \quad na_1 < t < na_2$$

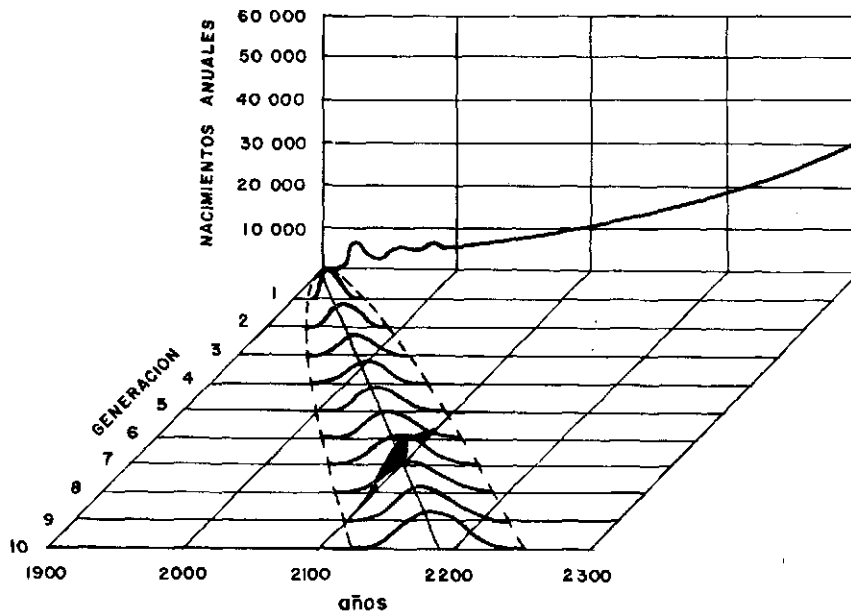
o lo que es lo mismo

$$(193) \quad \frac{t}{a_2} < n < \frac{t}{a_1}$$

Por ejemplo, en la época  $t=500$  serán posibles los nacimientos per-

<sup>1/</sup> Véase Lotka, loc. cit., y también, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1933, pág. 51.

DISTRIBUCION DE LOS NACIMIENTOS, A TRAVES DEL TIEMPO, EN UNA SUCESION DE GENERACIONES. LA CURVA TRAZADA SOBRE LA PARTE POSTERIOR ES LA RESULTANTE QUE INDICA LOS NACIMIENTOS TOTALES DE TODAS LAS GENERACIONES CONTEMPORANEAS



tenecientes a todas las generaciones comprendidas entre

$$(194) \quad n = \frac{t}{a_1} = \frac{500}{15} \approx 33$$

y

$$(195) \quad n = \frac{t}{a_2} = \frac{500}{55} \approx 9.$$

En los hechos, casi todos los nacimientos estarán comprendidos entre límites mucho más estrechos. Veamos cómo el número anual de nacimientos globales se compone con nacimientos que pertenecen a diversas generaciones contemporáneas.

Volvemos a la ecuación (191) y damos a  $n$  los valores 1, 2, 3,...



$$(196) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1(t) = B_1(t) \\ B_2(t) = \int_0^t B_1(t-a)p(a)m(a)da \\ B_3(t) = \int_0^t B_2(t-a)p(a)m(a)da \\ \dots\dots\dots \\ B_{n+1}(t) = \int_0^t B_n(t-a)p(a)m(a)da. \end{array} \right.$$

La suma de esas ecuaciones tiene la forma

$$(197) \quad \sum_{i=1}^{i=j+1} B_i(t) = B_1(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^{i=j} B_i(t-a)p(a)m(a)da.$$

Ahora bien, si la sumatoria de la derecha se extiende a todas las generaciones que nacen efectivamente en la época  $t$ , o dicho de otra manera, si la  $j$ -ésima generación es la más joven de todas las que nacen en esa época, puede suprimirse el último término en la sumatoria de la izquierda, lo que da

$$(198) \quad \sum_{i=1}^{i=j} B_i(t) = B_1(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^{i=j} B_i(t-a)p(a)m(a)da$$

o, simplemente,

$$(199) \quad B(t) = B_1(t) + \int_0^t B(t-a)p(a)m(a)da$$

El símbolo  $B(t)$ , sin índice, representa el número de nacimientos globales de todas las generaciones contemporáneas en la época  $t$ .

Observamos también que, a partir del momento  $t = a_2$  cesan los nacimientos en la primera generación, es decir  $B_1(t) = 0$  y para  $t > a_2$  se tiene

$$(134) \quad B(t) = \int_0^\infty B(t-a)p(a)m(a)da.$$

Nos reencontramos así con nuestra fórmula (134) como una expresión particular de la fórmula más general (199), para el caso que se

144 presenta cuando tratamos con una población de origen "antiguo" cuya edad sobrepasa  $a_2$  años.

*Distribución de los nacimientos entre diferentes generaciones contemporáneas.* Hemos señalado que todos los nacimientos de una época cualquiera  $t$  pertenecen a las generaciones comprendidas entre los límites

$$(193) \quad \frac{t}{a_2} < n < \frac{t}{a_1}.$$

Sin embargo, las contribuciones de esas generaciones en el conjunto total de nacimientos serán evidentemente muy desiguales.

Para determinar la proporción de nacimientos pertenecientes a una generación cualquiera, digamos la  $(n + j)$ -ésima, en la época  $t$ , fijemos en primer lugar nuestra atención sobre la distribución de esos nacimientos de la  $(n + j)$ -ésima generación, a través del tiempo; admitamos que  $(n + j)$  sea un número suficientemente grande para que a esta distribución podamos suponerla normal (Gausiana, véase la página 141). Hemos visto, por otra parte, que la media de la curva de distribución corresponde a  $t = (n + j)\mu_1$  y que la desviación cuadrática media es igual a  $(n + j)\mu_2$ , mientras que la suma de los nacimientos en la  $(n + j)$ -ésima generación completa se indica  $NR_0^{n+j}$ .

Designemos con  $\phi(n + j, t)$  la distribución de los nacimientos a través del tiempo en esta generación, de modo que  $\phi(n + j, t)dt$  represente el número de tales nacimientos que tienen lugar en la época  $t$  en un intervalo de tiempo  $dt$ ; dentro de nuestras hipótesis se tiene

$$(200) \quad \phi(n + j, t) = \frac{NR_0^{n+j}}{\sqrt{2\pi(n + j)\mu_2}} e^{-[t - (n + j)\mu_1]^2 / 2(n + j)\mu_2}$$

Hacemos

$$(201) \quad t = n\mu_1,$$

lo que da

$$(202) \quad \Phi(n + j) = \frac{NR_0^{n+j}}{\sqrt{2\pi(n + j)\mu_2}} e^{-j^2\mu_1^2 / 2(n + j)\mu_2}.$$

Para  $n$  suficientemente grande y  $j$  suficientemente pequeño, respectivamente, se encuentra una expresión más simple

$$(203) \quad \Phi(n+j) = \frac{NR_0^{n+j}}{\sqrt{2\pi n\mu_2}} e^{-j^2\mu_1^2/2n\mu_2}.$$

Hemos visto por otra parte, que de acuerdo con (162)

$$(204) \quad R_0 = e^{r(\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 r + \dots)};$$

por consiguiente, para  $r$  suficientemente pequeño se tiene

$$(205) \quad R_0^j = e^{r\mu_1 j}.$$

Para simplificar colocamos

$$(206) \quad \frac{n\mu_2}{\mu_1^2} = \delta^2;$$

en esas condiciones la fórmula (203) se transforma

$$(207) \quad \Phi(n+j) = \frac{NR_0^n}{\mu_1 \delta \sqrt{2\pi}} e^{r\mu_1 j - j^2/2\delta^2}$$

$$(208) \quad = \frac{NR_0^n}{\mu_1 \delta \sqrt{2\pi}} e^{-(j - r\mu_1 \delta^2)^2/2\delta^2 + r^2\mu_1^2 \delta^2/2}$$

$$(209) \quad = \frac{NR_0^n + r\mu_1 \delta^2/2}{\mu_1 \delta \sqrt{2\pi}} e^{-(j - r\mu_1 \delta^2)^2/2\delta^2}.$$

Se advierte de ese modo que en nuestras hipótesis -es decir para  $n$  suficientemente grande así como  $j/n$  y  $r$  suficientemente pequeños- las contribuciones de las diferentes generaciones de orden  $(n+j)$  se distribuyen alrededor de la correspondiente a la  $n$ -ésima generación según la ley normal (Gausiana), con una desviación cuadrática media

$$(210) \quad \delta = \frac{\sqrt{n\mu_2}}{\mu_1},$$

mientras que la distribución de los nacimientos en relación al tiempo en la  $n$ -ésima generación es, en sí misma, una normal con desviación cuadrática media

$$\delta_n = \sqrt{n\nu_2}$$

de manera que

$$(212) \quad \delta = \frac{\delta_n}{\mu_1}$$

Sin embargo, el centro de la distribución de los nacimientos en la  $(n + j)$ -ésima generación no está situado exactamente en  $j = 0$ , sino en  $j = r\mu_1\delta^2 = rn \frac{\mu_2}{\mu_1}$ .

Estos resultados permiten hacer la interesante representación que figura en el gráfico 15. La distribución de los nacimientos en las generaciones sucesivas se representa en dicho gráfico por curvas de frecuencias dispuestas en su orden natural  $n = 1, 2, 3, \dots$  distanciadas en  $\mu_1$  una de otra. En ese modelo tridimensional si la curva de frecuencia en relación al tiempo de una  $n$ -ésima generación cualquiera (siendo  $n$  suficientemente grande), se desplaza mediante un movimiento de rotación de  $90^\circ$  alrededor de un eje vertical que pasa por su media, queda convertida con mucha aproximación en la curva de frecuencia de las contribuciones de las generaciones sucesivas en la época  $t = n\mu_1$ .

*Ejemplo numérico.* Las fórmulas precedentes fueron aplicadas a título de ejemplo a una generación cero compuesta de 100 000 nacimientos con las mismas características de la población de los Estados Unidos, raza blanca, sexo femenino, en el año 1920. Dando a los parámetros los siguientes valores numéricos

$$(213) \quad \begin{cases} r = 0,005 & \mu_1 = 28,47 & \mu_2 = 45,39 \\ R_0 = 1,1664 & N = 100.000 \end{cases}$$

buscamos la distribución de los nacimientos entre las diferentes generaciones 200 años después del nacimiento de la generación cero.

La contribución más importante será la de la generación de orden  $\frac{t}{\mu_1} = \frac{200}{28,5} = 7,02$  es decir, de la séptima. Únicamente la quinta, sexta, octava y novena aportarán también contribuciones considerables. Dado que la generación de orden cero comprendía 100 000 recién nacidos, los nacimientos anuales en la época  $t = 200$  serán 10 487, de los cuales 4 pertenecen a la quinta generación, 1 275 a la sexta, 6 567 a la séptima, 2 481 a la octava, y 164 a la novena. Expresadas estas cifras en porcentaje corresponden a 0,04; 12,15;

62,60; 23,65; y 1,56 por ciento respectivamente, de los nacimientos anuales en la época  $t = 200$ . 147

Con esos resultados concluimos el estudio del caso particular de la descendencia de una generación primitiva compuesta totalmente por individuos nacidos en una misma época  $t$ .

Volvemos al caso más general de una población que tiene una distribución por edades cualquiera y crece bajo el régimen de una mortalidad y fecundidad constantes por edad.

Constantes  $Q$  de la solución (135). Volvemos a la solución

$$(135) \quad B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots$$

de la ecuación integral

$$(134) \quad B(t) = \int_0^{\omega} B(t-a)p(a)m(a)da.$$

Para definir completamente esta solución quedan aún por calcular los coeficientes  $Q$  que dependen de las condiciones iniciales. Veremos en efecto, que la constante  $Q_s$  correspondiente a una raíz cualquiera  $r_s$  de la ecuación fundamental

$$(137) \quad 1 = \int_0^{\infty} e^{-r_s a} p(a)m(a)da$$

está conectada con la función  $B_1(t)$  que representa la distribución en relación al tiempo de los nacimientos en la primera generación. Es necesario, para determinar el problema, que dicha función esté dada desde la época  $t = 0$  hasta  $t = a_2$  (fin del período reproductivo de la primera generación), ya sea directamente o en función de  $B(t)$  según (199). Establecido esto, introducimos las constantes auxiliares

$$(214) \quad P_s = \int_0^{a_2} e^{-r_s t} B_1(t) dt,$$

siendo  $r_s$ , una raíz cualquiera de la ecuación (137).

Ahora bien, según (199)

$$(199) \quad B_1(t) = B(t) - \int_0^t B(t-a)\varphi(a)da,$$

148 y en consecuencia

$$(215) \quad P_r = \int_0^{a_2} e^{-rs't} dt \left\{ B(t) - \int_0^t B(t-a)\varphi(a) da \right\}.$$

Por otra parte, se tiene

$$(135) \quad B(t) = \sum Q_j e^{r_j t} = Q_s e^{r_s t} + \sum_{-s} Q_j e^{r_j t},$$

en donde la sumatoria comprende todos los términos formados con las raíces  $r$  de la ecuación fundamental (137) y el símbolo  $\sum_{-s}$  designa la misma suma con excepción del término  $Q_s e^{r_s t}$ .

Introduciendo la expresión (135) en (215), se obtiene

$$(216) \quad \begin{aligned} P_r &= \int_0^{a_2} e^{-rs't} dt \left\{ Q_s e^{r_s t} - \int_0^t Q_s e^{r_s(t-a)} \varphi(a) da \right\} \\ &\quad + \int_0^{a_2} e^{-rs't} dt \left\{ \sum [Q_j e^{r_j t} - \int_0^t Q_j e^{r_j(t-a)} \varphi(a) da] \right\} \\ &= Q_s \int_0^{a_2} dt \left\{ 1 - \int_0^t e^{-r_s a} \varphi(a) da \right\} + R_s. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$(217) \quad \int_0^t e^{-r_s a} \varphi(a) da = \int_0^{a_2} e^{-r_s a} \varphi(a) da - \int_t^{a_2} e^{-r_s a} \varphi(a) da$$

$$(218) \quad = 1 - \int_t^{a_2} e^{-r_s a} \varphi(a) da,$$

de modo que

$$(219) \quad P_r = Q_s \int_0^{a_2} dt \int_t^{a_2} e^{-r_s a} \varphi(a) da + R_s$$

$$(220) \quad = Q_s \int_0^{a_2} e^{-r_s a} \varphi(a) da \int_0^a dt + R_s$$

$$(221) \quad = Q_s \int_0^{a_2} a e^{-r_s a} \varphi(a) da + R_s.$$

Luego, se anula la expresión  $R_s$  ya que está compuesta de térmi-

$$(222) \quad R_{s,u} = \int_0^{a_2} e^{-r_s t} dt \left\{ Q_u e^{r_u t} - \int_0^t Q_u e^{r_u(t-a)} \varphi(a) da \right\},$$

los cuales, después de una transformación análoga a la introducida desde (216) a (219) se transforman en

$$(223) \quad R_{s,u} = Q_u \int_0^{a_2} e^{(r_u - r_s)t} dt \int_t^{a_2} e^{-r_u a} \varphi(a) da$$

$$(224) \quad = Q_u \int_0^{a_2} e^{-r_u a} \varphi(a) da \int_0^a e^{(r_u - r_s)t} dt$$

$$(225) \quad = \frac{Q_u}{r_u - r_s} \int_0^{a_2} e^{-r_u a} \varphi(a) \left\{ e^{(r_u - r_s)a} - 1 \right\} da$$

$$(226) \quad = \frac{Q_u}{r_u - r_s} \left\{ \int_0^{a_2} e^{-r_s a} \varphi(a) da - \int_0^{a_2} e^{-r_u a} \varphi(a) da \right\}$$

$$(227) \quad = 0$$

ya que ambas,  $r_s$  y  $r_u$ , son raíces de la ecuación fundamental (137). Por consiguiente esos términos son nulos, cualesquiera que sean los números  $s$ ,  $u$ , con tal que  $s \neq u$ . De lo que resulta

$$(228) \quad R_s = 0,$$

y

$$(229) \quad P_s = Q_s \int_0^{a_2} a e^{-r_s a} \varphi(a) da$$

$$(230) \quad Q_s = P_s \int_0^{a_2} a e^{-r_s a} \varphi(a) da$$

$$(231) \quad = \frac{\int_0^{a_2} B_1(t) e^{-r_s t} dt}{\int_0^{a_2} a e^{-r_s a} \varphi(a) da}$$

$$(232) \quad = \frac{\int_0^{a_2} e^{-r_s t} dt \left\{ B(t) - \int_0^t B(t-a) \varphi(a) da \right\}}{\int_0^{a_2} a e^{-r_s a} \varphi(a) da}.$$

150 Ese resultado fue obtenido introduciendo la solución (135) en la ecuación (215), que contiene los valores de  $B(t)$  entre los límites  $t = 0$  y  $t = a_2$ ; por consiguiente, los coeficientes  $Q_s$  dados por (232) dependen de los valores  $B(t)$  entre esos límites.

Las constantes  $Q$  en términos de los semi-invariantes  $\mu$  de la función  $\varphi(a) = p(a)m(a)$ . El denominador de (232) presenta un aspecto familiar. En vista de (154), (159), (137), podemos escribirlo

$$(233) \quad \frac{\int_0^{a_2} a e^{-r_2 a} \varphi(a) da}{\int_0^{a_2} e^{-r_2 a} \varphi(a) da} = \mu_1 - \mu_2 r + \frac{1}{2} \mu_3 r^2 - \dots$$

Ese desarrollo también es válido para los valores complejos de  $r$ . Conviene, no obstante, darle en ese caso al numerador de (232), la forma

$$(234) \quad \int_0^{a_2} e^{-(u + iv)t} dt \left\{ B(t) - \int_0^t B(t-a) \varphi(a) da \right\} = U + iV;$$

del mismo modo, el denominador se transforma

$$(235) \quad \mu_1 - \mu_2(u + iv) + \frac{1}{2} \mu_3(u + iv)^2 - \dots = G - iH$$

de manera que  $Q_s$  puede tomar dos formas

$$(236) \quad Q_s = \frac{U + iV}{G - iH} = \frac{(UG - VH) + i(GV + HU)}{G^2 + H^2}$$

y

$$(237) \quad Q'_s = \frac{(UG - VH) - i(GV + HU)}{G^2 + H^2}$$

donde según (235), las cantidades  $G, H$  valen

$$(238) \quad G = \mu_1 - \mu_2 u + \frac{\mu_3}{2!} (u^2 - v^2) - \frac{\mu_4}{3!} (u^3 - 3uv^2) + \dots$$

$$(239) \quad H = \mu_3 v - \mu_3 uv + \frac{\mu_4}{3!} (3u^2 v - v^3) - \dots$$



Introduciendo las constantes  $Q_s, Q'_s$  en la solución (135), y ha- 151  
ciendo

$$(240) \quad e^{(u+iv)t} = e^{ut}(\cos vt + i \operatorname{sen} vt)$$

se obtiene finalmente, el término

$$(241) \quad \frac{2e^{ut}}{G^2 + H^2} \{ (GU - HV) \cos vt + (HU + GV) \operatorname{sen} vt \}.$$

Si se conocen los valores de la función  $B(t)$  en el intervalo  $0 < t < a_2$ , pueden calcularse las constantes  $U, V$  mediante integración numérica de la parte izquierda de (234).

*Un caso particular.* El numerador en la expresión  $Q_s$  toma una forma particularmente simple en el caso que ya nos ha servido de ejemplo, es decir, para una línea de descendencia que se inicia en una generación de orden cero en la cual todos los  $N$  miembros han nacido en la misma época, designada como cero. En ese caso, la distribución en relación al tiempo  $B_1(t)$  de la "primera" generación (compuesta de niñas de la generación cero) queda reducida simplemente a

$$(242) \quad B_1(t) = Np(t)m(t) = N\varphi(t)$$

y el numerador en la expresión de  $Q_s$  se reduce

$$(243) \quad N \int_0^{a_2} e^{-r_s t} \varphi(t) dt = N$$

siendo  $r_s$  una raíz de la ecuación fundamental (137).

En lo que precede hemos supuesto conocida la fecundidad  $m(a)$ , sin llevar más lejos el análisis de esta característica. Puede, evidentemente, descomponerse esta fecundidad general  $m(a)$  en dos factores, uno de los cuales representa la proporción  $\eta(a)$  de mujeres casadas (esposas) entre las mujeres de edad  $a$ , y el otro,  $m(a)$ ,

152 la fecundidad específica en el matrimonio.<sup>1/</sup> Puede distinguirse también una fecundidad legítima y una fecundidad ilegítima.<sup>2/</sup> La introducción de curvas de frecuencia según Karl Pearson, para representar la función  $\psi(a) = p(a)m(a)$  ha sido sugerida por S. Wicksell<sup>3/</sup> y desarrollada por A.J. Lotka.<sup>4/</sup> Wicksell ha examinado también la relación entre la nupcialidad y la fecundidad,<sup>5/</sup> y Lotka ha aplicado a las estadísticas de los Estados Unidos, los principios sustentados por aquél. Para conocer esos desarrollos el lector debe recurrir a los trabajos citados.

Observemos finalmente que hemos considerado la función  $m(a)$  independiente de la proporción de ambos sexos en la población, lo cual, en la mayoría de los casos es una aproximación legítima, puesto que esta proporción, en general, no cambia fundamentalmente.<sup>7/</sup> En casos extremos, sin embargo, esas variaciones pueden desempeñar un papel más importante.<sup>8/</sup>

- 
- <sup>1/</sup> A.J. Lotka: "The Size of American Families in the Eighteenth Century", *Journal of the American Statistical Association*, 1927, pág. 154; S. Wicksell: "Nuptiality, Fertility and Reproductivity", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1931, pág. 125.
- <sup>2/</sup> S. Wicksell: *loc. cit.*
- <sup>3/</sup> S. Wicksell: *loc. cit.*
- <sup>4/</sup> A.J. Lotka: "Industrial Replacement", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1933, pág. 51; *Annals of Mathematical Statistics*, 1939, pág. 1.
- <sup>5/</sup> S. Wicksell: *loc. cit.*, véase también H. Westergaard: *Journal of the American Statistical Association*, 1920, pág. 381.
- <sup>6/</sup> A.J. Lotka: *Annals of the American Academy of Political and Social Science*, 1936, pág. 1.
- <sup>7/</sup> En la población existe naturalmente una relación entre la proporción de los sexos a cada edad y la misma proporción para los recién nacidos, siendo esta última sensiblemente constante. Para este tema, véase A.J. Lotka: "A Natural Population Norm", *Journal of the Washington Academy of Science*, 1913, pág. 289; también, Bortkiewicz: *Bulletin de l'Institut de Statistique*, 1911, Tomo XIX, I, pág. 63.
- <sup>8/</sup> Véase A.J. Lotka: "The Stability of the Normal Age Distribution", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1922, pág. 343.

## INDICES Y MEDIDAS DEL CRECIMIENTO NATURAL

*Relación entre los nacimientos anuales de dos épocas separadas por el intervalo medio entre dos generaciones.* Los nacimientos anuales, para el caso de una población malthusiana aumentan o disminuyen de acuerdo con la misma "tasa de interés compuesto"  $r$  de la población, de modo que

$$(244) \quad \begin{cases} \frac{B(t)}{B(t-x)} = e^{rx} \\ = R_0^{x/T} \end{cases}$$

esta fórmula es válida para todo valor de  $x$ . En particular

$$(245) \quad \begin{cases} \frac{B(t)}{B(t-T)} = \frac{B(t)}{B(t - \mu_1 + \frac{\mu_2}{2}r - \dots)} \\ = e^{rT} \\ = R_0 \end{cases}$$

o, en primera aproximación,

$$(246) \quad \frac{B(t)}{B(t - \mu_1)} = R_0.$$

La fórmula (244) se verifica únicamente para todo valor de  $x$  en el caso de una población malthusiana. Por lo contrario, las fórmulas (245), (246) tienen una aplicabilidad mucho más general. Traducen una propiedad de las poblaciones reales en la cual se basa una medida aproximada, pero muy práctica, de la reproductividad. Para ver esto, volvemos a la relación (134) la cual sigue siendo válida aun cuando la mortalidad y la fecundidad sean funciones del tiempo  $t$ ,

154 de modo que podemos escribir

$$(134 a) \quad B(t) = \int_0^{\infty} B(t-a)p(a, t)m(a, t)da.$$

Hacemos

$$(247) \quad B(t - \bar{a}) = \frac{\int_0^{\infty} B(t-a)p(a, t)m(a, t)da}{\int_0^{\infty} p(a, t)m(a, t)da}$$

siendo la magnitud  $\bar{a}$  en cierto sentido, una especie de valor medio de  $a$  que, en general, será una función de  $t$ .<sup>1/</sup>

Dividiendo (134 a) por

$$\int_0^{\infty} p(a, t)m(a, t)da$$

se obtiene

$$(248) \quad \frac{B(t)}{\int_0^{\infty} p(a, t)m(a, t)da} = \frac{\int_0^{\infty} B(t-a)p(a, t)m(a, t)da}{\int_0^{\infty} p(a, t)m(a, t)da}$$

por consiguiente

$$(249) \quad \frac{B(t)}{R_0(t)} = B(t - \bar{a}).$$

Ahora bien, si es posible representar satisfactoriamente a  $B(t-a)$  mediante una función lineal entre los límites  $a_1 < a < a_2$ ,<sup>2/</sup> la media  $\bar{a}$  definida en (247) será esencialmente igual al valor

<sup>1/</sup> En la práctica, sin embargo, las variaciones de  $\bar{a}$  se mantendrán entre límites bastante estrechos.

<sup>2/</sup> Bastará con que  $B(t-a)$  considerado como función de  $a$  para un determinado valor de  $t$ , siga un comportamiento casi lineal entre límites más estrechos, ya que el factor  $m(a, t)$  toma únicamente valores de importancia en la proximidad de  $a = \mu_1$ .

medio  $\alpha$  definido con la fórmula<sup>1/</sup>

$$(250) \quad \alpha = \frac{\int_0^{\infty} ap(a,t)m(a,t)da}{\int_0^{\infty} p(a,t)m(a,t)da} = \mu_1(t).$$

Concluimos así en la relación

$$(246) \quad \frac{B(t)}{B(t - \mu_1)} = R_0.$$

Si en lugar de suponer que  $B(t-a)$  sigue una forma lineal, admitimos que de  $B(t-a_2)$  a  $B(t-a_1)$  dicha función es aproximadamente exponencial, con una tasa de crecimiento  $\rho$ , entre esos límites se tiene

$$(251) \quad B(t-a) = B(t)e^{-\rho a} \quad (a_1 < a < a_2)$$

y análogamente, resulta

$$(252) \quad \frac{B(t)}{\int_0^{\infty} p(a,t)m(a,t)da} = \frac{B(t)}{R_0(t)} = \frac{B(t) \int_0^{\infty} e^{-\rho a} p(a,t)m(a,t)da}{\int_0^{\infty} p(a,t)m(a,t)da} = B(t)e^{-\rho \bar{a}}.$$

Luego

$$(253) \quad e^{\rho \bar{a}} = R_0(t)$$

y la edad media  $\bar{a}$  definida de esa forma no es otra cosa que el intervalo medio  $T$  entre dos generaciones en una población que crece

<sup>1/</sup> Véase, A. J. Lotka: *Journal of the American Statistical Association*, 1936, vol. 31, la nota al pie de la página 287. Dado que  $\psi(x) = u + vx$  y siendo  $f(x)$  una función cualquiera de  $x$ , el valor medio  $\psi_m(x)$  será entonces igual a  $\psi(x_m)$ , es decir

$$\psi_m(x) = \frac{\int \psi(x)f(x)dx}{\int f(x)dx} = u + v \frac{\int xf(x)dx}{\int f(x)dx} = u + vx_m = \psi(x_m)$$

156 con una tasa de crecimiento  $\rho$ . En consecuencia, se tiene

$$(245a) \quad \frac{B(t)}{B(t-T)} = R_0(t).$$

El valor de T en una población con distribución por edad estable es, por otra parte, de acuerdo con (160).

$$(160) \quad T_0 = \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2 \rho + \dots$$

de manera que en tal caso puede escribirse con mayor exactitud

$$(254) \quad \frac{B(t)}{B\left(t - \left[\mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2 \rho + \dots\right]\right)} = R_0(t).$$

En algunos casos la fórmula anterior presenta una mejor correspondencia con las observaciones que la fórmula (246).

Conviene recapitular esos resultados bajo la forma de una proposición:

*En una población cerrada cualquiera, la magnitud  $R_0$  que expresa la relación entre los nacimientos totales de dos generaciones sucesivas calculada a partir de la mortalidad y fecundidad reales en el instante t, es aproximadamente igual a la relación entre el número de nacimientos anuales en el instante t y el del instante t - T, donde T representa el intervalo medio entre dos generaciones sucesivas.*

Lo sorprendente en esta proposición es que en el curso de una generación las tasas de mortalidad y fecundidad pueden sufrir variaciones considerables sin que por ello dicha proposición pierda su validez,<sup>1/</sup> con tal que los nacimientos anuales  $B(t-a)$  considerados como función de a no se aparten demasiado de la forma lineal o exponencial en la cercanía de  $a = \mu_1$ . Algunos ejemplos numéricos servirán para ilustrar este hecho bastante notable.

*Ejemplos numéricos: Primer ejemplo.* La cifra anual de nacimien-

<sup>1/</sup> Es cierto que esos cambios afectarán muy poco al intervalo medio entre dos generaciones sucesivas.

tos registrados en los Estados Unidos durante los años 1928 y 1929 157  
 fue 2 330 000, incluyendo una corrección para el 5,5 por ciento  
 la población que en esa época escapaba aún al registro de naci-  
 mientos. En 1900, es decir, una generación ( $\mu_1 = 28,3$  años) antes,  
 con una tasa de natalidad de 29,5 por mil<sup>1/</sup> y una población de  
 75 995 000, el total de nacimientos debía ser 2 240 000. Por lo  
 tanto, en ese caso según nuestra fórmula

$$(255) \quad \frac{B(t)}{B(t - \mu_1)} = \frac{2,330}{2,240} = 1,040$$

mientras que el cálculo directo, usando las tasas de mortalidad y  
 fecundidad observadas en 1928, da

$$(256) \quad R_0 = 1,049.$$

Un cálculo semejante hecho para los años 1933 y 1905, resulta

$$(257) \quad \frac{B(t)}{B(t - \mu_1)} = 0,883$$

mientras que el cálculo directo para 1933, muestra

$$(258) \quad R_0 = 0,866.$$

*Segundo ejemplo.* Un ejemplo particularmente interesante se pre-  
 senta con la distribución de las cifras anuales de nacimientos en  
 el caso de una población logística con coeficientes que correspon-  
 dan a la población de los Estados Unidos. En las columnas 7, 8 y 9  
 del cuadro 12 se dan los resultados obtenidos al aplicar las fórmu-  
 las (246) y (254) a dicha serie numérica. Puede verse, que en la  
 primera etapa del desarrollo logístico, correspondiente a una tasa  
 de crecimiento casi constante, las cifras obtenidas mediante la  
 fórmula (254) presentan mayor concordancia con los resultados del  
 cálculo directo, que las que se encuentran con la fórmula (246).

<sup>1/</sup> Según una evaluación hecha en 1925; véase Dublin, L.I. y Lotka,  
 A.J., "The True Rate of Natural Increase," *Journal of the American  
 Statistical Association*, 1925, pág. 217.

RELACION ENTRE LOS NACIMIENTOS ANUALES  $B(t)$  EN LA EPOCA  $t$  Y LOS DE UNA GENERACION MEDIA  $T$  AÑOS ANTES EN UNA POBLACION LOGISTICA, CON LAS CARACTERISTICAS DE LA POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS, RAZA BLANCA, SEXO FEMENINO, 1920

Año	Tasa de crecimiento natural $r$	Duración media de una generación $T$	Nacimientos anuales		
			$B(t)$	$B(t - \mu_1)$	$B(t - T)$
$t$	$r$	$T$			
1	2	3	4	5	6
1900	0,0306	27,78	218 697	91 897	93 870
1825	0,0296	27,80	454 475	197 055	201 064
1850	0,0277	27,84	890 975	411 709	419 184
1875	0,0243	27,92	1 567 415	815 688	827 261
1900	0,0191	28,04	2 330 669	1 462 024	1 474 927
1920	0,0143	28,15	2 797 246	2 082 021	2 091 788
1925	0,0131	28,17	2 882 723	2 231 455	2 240 209
1950	0,0077	28,30	3 164 261	2 824 622	2 827 609
1975	0,0040	28,38	3 303 823	3 136 262	3 137 024
2000	0,0020	28,43	3 373 610	3 289 582	3 289 754

Año	Reproductividad neta calculadas de acuerdo con			Tasa intrínseca de crecimiento natural, basada en los valores de la reproductividad neta de las columnas 7, 8, 9		
	$\frac{B(t)}{B(t - \mu_1)}$	$\frac{B(t)}{B(t - T)}$	$R_0(t)$	Según (7)	Según (8)	Según (9)
$t$	7	8	9	10	11	12
1800	2,380	2,330	2,329	0,0312	0,0304	0,0304
1825	2,306	2,260	2,260	0,0301	0,0293	0,0293
1850	2,164	2,125	2,127	0,0277	0,0271	0,0271
1875	1,922	1,895	1,899	0,0234	0,0229	0,0229
1900	1,594	1,580	1,588	0,0166	0,0163	0,0165
1920	1,344	1,337	1,346	0,0105	0,0103	0,0105
1925	1,292	1,287	1,296	0,0091	0,0089	0,0092
1950	1,120	1,119	1,125	0,0040	0,0040	0,0042
1975	1,053	1,053	1,056	0,0018	0,0018	0,0019
2000	1,026	1,025	1,027	0,0009	0,0009	0,0009

Explicación según el número de las columnas

(2) De acuerdo con la fórmula

$$r = \frac{0,0314}{1 + e^{0,0314(t-1914,1)}}$$

$$(3) T = \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2 r$$

(4, 5, 6)  $B(t)$ ,  $B(t - \mu_1)$ ,  $B(t - T)$  de acuerdo con la fórmula (109) o (126) del texto.

(9) Calculada multiplicando  $R_0(1920)$  con el producto de  $B(t)$  por los nacimientos anuales  $\sum m(u, 1920) c(a, t)$  que resultarían en la época  $t$  bajo el régimen de la fecundidad de 1920.

(10, 11, 12) Calculada de acuerdo con la fórmula

$$\rho(t) = \frac{1}{\mu_2} \left\{ \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 2\mu_2 \log_e R_0(t)} \right\}$$

Nota: Los resultados para las tres últimas fechas, 1950, 1975, y 2000 se dan únicamente para completar el ejemplo y no deben considerarse como un pronóstico.



Conviene señalar que la fórmula (244), válida en una población malthusiana para todo  $x$ , daría en general un resultado muy inexacto si se aplicara a una población cualquiera y a un valor arbitrario de  $x$ . Por ejemplo, en su aplicación a la población logística ya considerada, en lugar de  $\rho = 0,0105$  y  $R_0 = 1,346$ , se obtendrían los siguientes valores

$t$	$x$	$t - x$	$\rho$	$R_0(t)$
1920	20	1900	0,0912	1,295
1920	45	1875	0,1286	1,439

*Índice de Reemplazo.* La relación que acabamos de reconocer entre los nacimientos actuales y los correspondientes a una época una generación media hacia atrás podría emplearse para conseguir una medida por lo menos aproximada de la reproductividad neta  $R_0$ , y por consiguiente de la tasa intrínseca de crecimiento  $\rho$ .

Sería éste, sin embargo, un procedimiento poco práctico debido a que exige el conocimiento bastante exacto de cifras sobre nacimientos que están separados por un período considerable durante el cual, además, pueden modificarse las condiciones sobre las que se basan nuestras fórmulas. Podemos remediar, no obstante, este inconveniente mediante una determinada modificación de tales fórmulas.

Señalemos en primer lugar que si  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  no es muy diferente de  $T$ , se tendrá otra vez aproximadamente

$$(259) \quad \frac{B(t)}{B(t - [x_2 - x_1])} = e^{\rho(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

es decir

$$(260) \quad \frac{B(t - x_1)}{B(t - x_2)} = e^{\rho(x_2 - x_1)}$$

$$(261) \quad = R_0^{(x_2 - x_1)/x}$$

Sobre esta relación se apoya una medida muy práctica de reproductividad neta introducida por W.S. Thompson<sup>1/</sup> y muy empleada por F. Lorimer y F. Osborn (1934) en su obra *The Dynamics of Population Growth*. Esta medida, llamada *Replacement Index*, o sea Índice de

<sup>1/</sup> *The Ratio of Children to Women*, publicación del Bureau of the Census, Washington, 1920.

160 Reemplazo, se determina: 1° calculando el cociente entre el número de niñas con edades comprendidas entre 0 y 5 años y el total de mujeres con edades entre 15 y 45 años de una población en la época  $t$ , y 2° calculando el mismo cociente para una población estacionaria con una distribución por edades correspondiente a la de la tabla de vida aplicable en la época  $t$ ; 3° dividiendo el primer cociente por el segundo. Las edades límites de ambos grupos -inferior y superior-, tanto para las niñas como para las mujeres, son por lo demás hasta cierto punto arbitrarias con tal que estén convenientemente elegidas.

La definición del índice de reemplazo tiene la siguiente forma en lenguaje analítico

$$(262) \quad J = \frac{\int_p^q c(a)da}{\int_u^v c(a)da} \div \frac{\int_p^q p(a)da}{\int_u^v p(a)da}$$

donde  $c(a), p(a)$  se refieren a la población del sexo femenino, los símbolos  $p, q$  representan las edades límites del grupo de niñas y los símbolos  $u, v$  las edades límites de los grupos de mujeres.

Cambiando el orden de los factores, se obtiene

$$(263) \quad J = \frac{\int_p^q c(a)da}{\int_p^q p(a)da} \div \frac{\int_u^v c(a)da}{\int_u^v p(a)da}$$

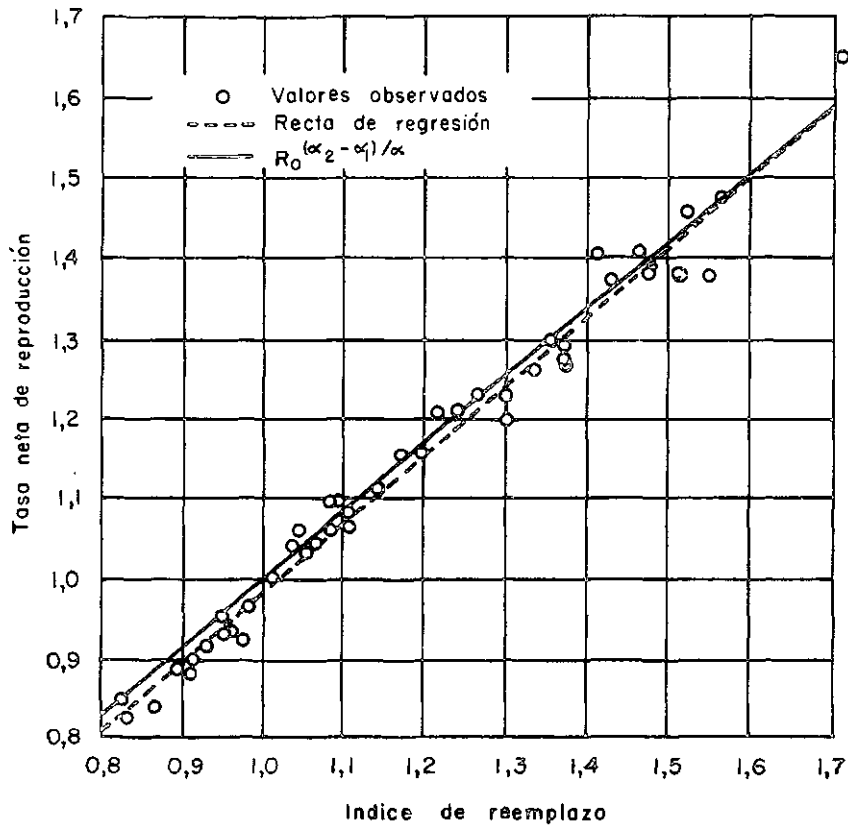
$$(264) \quad = \frac{\int_p^q B(t-a)p(a)da}{\int_p^q p(a)da} \div \frac{\int_u^v B(t-a)p(a)da}{\int_u^v p(a)da}$$

$$(265) \quad = \frac{B(t-\alpha_1)}{B(t-\alpha_2)}$$

$$(266) \quad = R_0^{(\alpha_2 - \alpha_1)/x}$$

tomando en consideración la expresión (261), con la condición que las edades límites  $p, q; u, v$  de los grupos inferior y superior, respectivamente sean convenientemente elegidas, y que la diferencia  $\alpha_2 - \alpha_1$  no se aleje demasiado de  $\alpha$ .

RELACION ENTRE EL INDICE DE REEMPLAZO J  
Y LA REPRODUCTIVIDAD NETA  $R_0$



Observemos también que la relación (266) entre el índice de reemplazo  $J$  y la reproductividad neta  $R_0$  es más o menos independiente de la tabla de vida particular usada en su cálculo, lo cual se explica porque las edades medias  $\alpha_1$  del grupo inferior y  $\alpha_2$  del grupo superior, lo mismo que la edad media  $\alpha$  de la curva de fecundidad neta, se modifican sólo levemente al cambiar de tabla de vida.

162      *Aplicación.* En el gráfico 16, sobre las abscisas del sistema rectangular se representan<sup>1/</sup> los índices J de reemplazo calculados de acuerdo con la fórmula (262) para 45 de los 48 Estados Unidos en el año 1930, y en las ordenadas los correspondientes valores de  $R_0$ . Las edades límites empleadas fueron 0 a 5 años para las niñas (hijas) y 15 a 45 años para las mujeres, mientras que los valores de las edades medias correspondientes a esos grupos eran  $a_1 = 2,48$ ,  $a_2 = 32,29$ . La curva continua trazada a través del conjunto de puntos que representan a los 45 estados es la función  $R_0^{(a_2 - a_1)/a}$ . Puede verse que esta curva representa muy bien el conjunto de esos puntos a pesar que la misma fue calculada con ayuda de la tabla de vida para los Estados Unidos tomados en conjunto, aun cuando la mortalidad en algunos estados difiere sensiblemente de la media para el total del país. Esto sirve de ilustración al hecho señalado más arriba, o sea, la relación (266) es casi independiente de la tabla de vida empleada en los cálculos.

*Variación del índice de reemplazo según la elección de los grupos de edades inferiores y superiores.* Hemos puesto de manifiesto que la elección de edades límites para los grupos inferior y superior es hasta cierto punto arbitraria, con tal que la relación  $(a_2 - a_1)/a$  no se aleje demasiado de la unidad. Es posible preguntar entonces cuál será el efecto del cambio en la elección de esas edades límites.

*Variación del grupo de edad inferior.* En el cuadro 13 se reúnen los resultados obtenidos al modificar las edades límites del grupo de edad inferior. A título de ejemplo se ha elegido una población con distribución estable por edad, dando a la tasa de crecimiento seis valores distintos, y tomando como base la tabla de vida de los Estados Unidos para 1929-1931.

En el cuadro 13 se muestra que la elección de la edad límite superior del grupo inferior de edades afecta muy levemente al índice de reemplazo cuando se calcula manteniendo constante el grupo

<sup>1/</sup> Para mayores detalles remitimos al lector al artículo ya citado, *Journal of the American Statistical Association*, 1936, pág. 273.

VARIACION DEL INDICE DE REEMPLAZO J  
CORRESPONDIENTE A UNA VARIACION EN LA EDAD LIMITE SUPERIOR  
DEL GRUPO INFERIOR DE EDADES EN UNA POBLACION CON  
DISTRIBUCION ESTABLE POR EDAD. CALCULOS BASADOS EN LA  
TABLA DE VIDA DE LOS ESTADOS UNIDOS,  
SEXO FEMENINO, RAZA BLANCA, 1929-1931

Grupo inferior	Tasa intrínseca de crecimiento natural <i>per capita</i>					
	0,03640	0,02800	0,01736	0,00265	-0,02170	-0,04516
	Indice de reemplazo					
Edad 0 <sup>a</sup> /	3,130	2,420	1,738	1,089	0,490	0,221
Menos de:						
1 año	3,052	2,373	1,717	1,087	0,498	0,228
2 años	3,004	2,344	1,704	1,086	0,503	0,233
3 años	2,955	2,315	1,690	1,084	0,508	0,237
4 años	2,905	2,285	1,677	1,083	0,513	0,243
5 años	2,856	2,255	1,663	1,082	0,518	0,248
30 a 35 <sup>b</sup> /	2,752			1,079		

a/ Nacimientos anuales.

b/ El grupo de edad superior se toma entre 20 y 45 años; para la última línea en cambio, se toma entre 50 y 75 años.

superior de edades (20 a 45 años) y se hace variar de 1 a 5 años el límite superior del grupo inferior de edades.

*Variación paralela de los grupos de edades inferior y superior.* La aplicación de la fórmula (266) exige que la diferencia  $\alpha_2 - \alpha_1$ , no se aparte demasiado del valor de  $\alpha$ ; fuera de ello, la elección de los grupos en los que  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$  son las edades medias, puede hacerse arbitrariamente.

De ese modo, en lugar de combinar, por ejemplo, el grupo superior de edades 20 a 45 años con el grupo inferior de 0 a 5 años, para deducir de allí el valor de J o de  $R_0$  en la época  $t - \alpha_1 = t - 2,5$  (aproximadamente), podemos combinar los grupos entre 25 y 50 años y 5 a 10 años; 30 a 55 años con 10 a 15 años y así sucesivamente para extraer los valores de J o de  $R_0$  correspondientes a una época más o menos aproximada a la época  $t - 7,5$ ;  $t - 12,5$ ; etc. Podemos

164 obtener de esta forma una indicación sobre la evolución de esos índices a través del tiempo. En el cuadro 14 se dan los resultados encontrados para la población femenina de los Estados Unidos, raza blanca, usando el censo de 1930 y la tabla de vida para 1929-1931.

Cuadro 14

VARIACION DEL INDICE DE REEMPLAZO CALCULADO PARA SUCESIVOS GRUPOS DE EDADES. SEGUN DATOS ESTADISTICOS DE LOS ESTADOS UNIDOS. SEXO FEMENINO, RAZA BLANCA, 1929-1931

Grupo inferior	Grupo superior	Indice de reemplazo	Año medio de nacimiento del grupo inferior
1	2	3	4
0 - 5	20 - 45	1.088	1928
5 - 10	25 - 50	1.309	1923
10 - 15	30 - 55	1.359	1918
15 - 20	35 - 60	1.444	1913
20 - 25	40 - 65	1.558	1908
25 - 30	45 - 70	1.595	1903
30 - 35	50 - 75	1.700	1898
35 - 40	55 - 80	1.933	1893
40 - 45	60 - 85	1.886	1888
45 - 50	65 - 90	1.878	1883

Se observa la disminución del índice de reemplazo J. Claro está que a la indicación anterior puede atribuírsele únicamente un valor cualitativo, ya que con anterioridad los Estados Unidos recibieron gran número de inmigrantes y, por lo tanto, los individuos comprendidos en el grupo inferior no representan exclusivamente a los hijos del grupo superior, como lo exigiría la aplicación estricta de la fórmula.<sup>1/</sup>

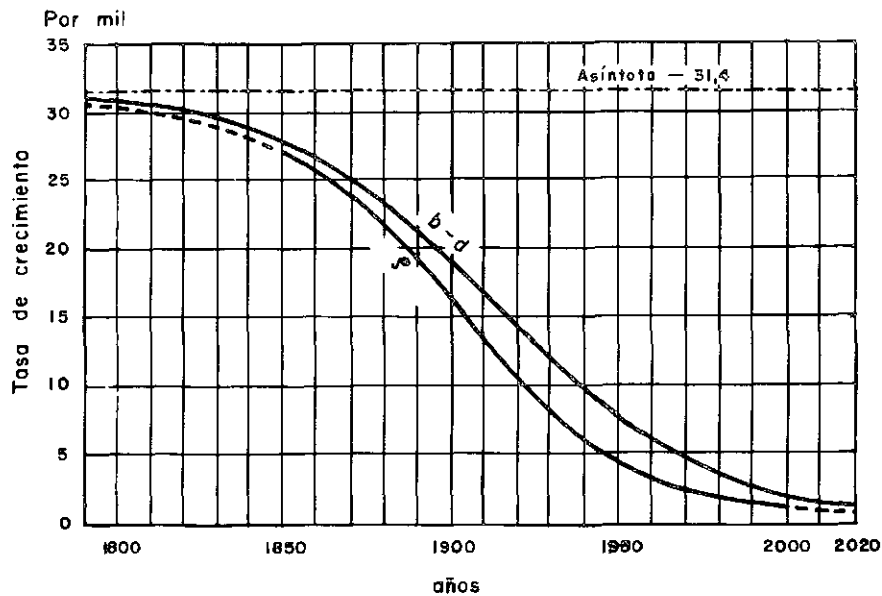
*Excedente de la tasa bruta sobre la tasa intrínseca en una población logística.* En una población con crecimiento logístico, las

<sup>1/</sup> Esta objeción no es aplicable al grupo de 0 a 5 años, puesto que la llegada de niños tan jóvenes sin sus padres es un hecho muy raro.

series correspondientes a la tasa bruta de crecimiento y a la tasa intrínseca muestran un fenómeno que requiere nuestra atención. En las columnas 2 y 12 del cuadro 12 y en el gráfico correspondiente (gráfico 17), se ve que en cualquier punto, salvo para  $t = +\infty$ , la tasa intrínseca es inferior a la tasa bruta. Por consiguiente, el hecho que en los Estados Unidos la tasa intrínseca sea inferior a la tasa bruta no puede considerarse anormal. Ambas tasas son iguales sólo en el caso de una población malthusiana, o en una población

Gráfico 17

COMPARACION DE LA TASA BRUTA DE CRECIMIENTO NATURAL  
 ( $b - d = r$ ) CON LA TASA INTRINSECA  $\rho$  EN UNA POBLACION  
 LOGISTICA; BASADA EN LAS CARACTERISTICAS DE LA  
 POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS



estacionaria. Ahora bien, el crecimiento malthusiano no puede durar nunca indefinidamente, el estado estacionario no se ha alcanzado aún en la mayoría de los países en nuestros días. En consecuencia,

166 la inferioridad de la tasa intrínseca con respecto a la tasa bruta no es inquietante por si misma. Es cierto, sin embargo, que cuando la veamos tomar valores negativos tendremos una buena razón para preguntarnos hacia dónde nos va a conducir.

*Ventajas y desventajas de los diversos índices o medidas del crecimiento natural.* Hemos expuesto diversos índices diferentes del crecimiento natural de una población.

1. La más común es la tasa bruta  $r$ , excedentes de la tasa de natalidad sobre la de mortalidad. Su ventaja consiste, una vez que se cuenta con la estadística demográfica, en la facilidad de su cálculo. Su defecto es la dependencia de la distribución por edades de la población, lo que en ocasiones provoca indicaciones muy erróneas.

2. La reproductividad neta,  $R_0$ , introducida por Boeckh, tiene más mérito, ya que provee una medida absolutamente independiente de la distribución por edades de la población. Su cálculo, es cierto, exige el conocimiento de la fecundidad y la mortalidad según la edad. La experiencia, enseña sin embargo, que basta con conocer la fecundidad por grupos quinquenales de edad. Esta medida, a su vez, está influida por el intervalo medio entre las generaciones y es por esta razón que el  $R_0$  calculado para la población masculina supera al que se obtiene para la población femenina. Además, tiene un valor limitado como elemento de diagnóstico, el cual ha sido considerablemente preconizado por algunos autores. Ciertamente es que cuando la tasa de crecimiento  $r$  es positiva al tiempo que  $(R_0 - 1)$  llega a ser una cantidad negativa, nos previene en cuanto a las indicaciones erróneas de los resultados de la tasa bruta. Pero cuando  $r$  es positiva y  $(R_0 - 1)$  también lo es, como sucede en los Estados Unidos en 1920, no nos habría prevenido en absoluto de que la tasa bruta nos daba una idea exagerada de la capacidad intrínseca de crecimiento de la población. Esta imperfección de  $R_0$  ha escapado a algunos autores porque hoy, en muchos países, el valor de  $(R_0 - 1)$  es negativo.

3. Mencionemos también brevemente una medida propuesta por G.



Knibbs<sup>1/</sup> que se define como el producto de la tasa de natalidad por la vida media. He demostrado en otra parte<sup>2/</sup> que ese producto  $bL_0$  da un valor aproximado a  $R_0$  en el caso de una población con distribución estable por edad, pero en general  $bL_0$  no es, ni siquiera aproximadamente, igual a dicha cantidad.

4. Igualmente, aunque sólo sea al pasar, se menciona la idea de las tasas rectificadas, que se obtendrían aplicando los valores de la fecundidad y mortalidad por edades a una población con distribución por edades proporcional a los guarismos  $l_x$  de la tabla de vida. El cálculo de tasas rectificadas, en la forma propuesta, descansa sobre bases contradictorias, ya que, a menos que la población no sea realmente estacionaria, la distribución por edades introducida en los cálculos está en contradicción con la fecundidad y mortalidad dadas.

5. El índice de reemplazo  $J$ , como hemos visto, da efectivamente un valor aproximado (y generalmente muy cercano) de la reproductividad neta  $R_0$ ; tiene la ventaja de exigir únicamente el conocimiento de la distribución por edad de la población. No es necesario conocer ni la fecundidad ni la mortalidad.

Como valor aproximado de  $R_0$ , el índice  $J$  comparte, naturalmente, sus ventajas y desventajas. Tiene, además, el defecto de no ser una medida completamente determinada, puesto que su valor depende hasta cierto punto de las edades límites para los grupos inferior y superior (hijas y madres). Hay que convenir, sin embargo, que el índice de reemplazo constituye un instrumento de trabajo muy ingenioso.

6. La tasa intrínseca de crecimiento,  $\rho$ , tiene muchas ventajas. Nos provee todas las indicaciones sobre la reproductividad neta, la cual, por otra parte, no es más que un subproducto en el cálculo de  $\rho$ . Pero nos dice mucho más. Cuando  $(R_0 - 1)$  es positivo, en cuyo caso  $R_0$  por sí sólo no nos dice nada con respecto a las indicaciones superficiales de la tasa bruta, la tasa intrínseca nos da pre-

<sup>1/</sup> G.H. Knibbs: *Mathematical Theory of Population*, 1917, pág. 294.

<sup>2/</sup> A.J. Lotka: "The Measure of Net Fertility", *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1925, pág. 469.

168 cisamente el criterio y la medida que debe sustituir a la tasa bruta. Además,  $\rho$ , se expresa directamente en unidades usuales; es una tasa anual *per capita* y puede de esta forma compararse directamente con la tasa bruta o con cualquier otra tasa anual.

El cálculo de  $\rho$  es asimismo muy simple. Una vez obtenido el momento de orden cero  $R_0$  de la función  $p(a)m(a)$ , sólo queda por calcular los momentos de primer y segundo orden -un asunto de diez minutos con una máquina moderna-, y después resolver una simple ecuación de segundo grado; es todo. Ciertos autores<sup>1/</sup> han dado la impresión de que en esto hubiera alguna cosa difícil; en realidad es excesivamente sencillo.

Pero las mayores ventajas de  $\rho$  se ponen de manifiesto al avanzar en el análisis demográfico. Se ve entonces que la tasa intrínseca de crecimiento natural desempeña un papel importante en problemas muy diversos. En particular, si se introduce en las fórmulas de las tasas de natalidad y mortalidad, para el caso de una población malthusiana, permite calcular las tasas intrínsecas de natalidad y mortalidad correspondientes a las funciones dadas de fecundidad y mortalidad, acerca de las cuales la reproductividad neta  $R_0$  no nos ha informado cosa alguna.

RELACIONES QUE COMPRENDEN LA FECUNDIDAD SEGUN  
EL ORDEN DE LOS NACIMIENTOS

*Relaciones que conducen al fenómeno de la familia.* A medida que los seres vivos se elevan en la escala de la evolución, dependen en mayor grado, durante su infancia, de sus padres -por lo menos de su madre-, para su protección y aprendizaje. En la especie humana, este fenómeno alcanza su grado más alto y da lugar a la familia, institución cuya influencia fundamental se extiende sobre todas las fases de la vida del individuo, la comunidad y las naciones.

En lo que sigue vamos a examinar algunas relaciones que toman en cuenta la composición de la familia en una población cerrada que vive bajo el régimen de una tabla de mortalidad y una fecundidad fijas. Para simplificar la discusión, solamente tendremos en cuenta los hijos legítimos y los matrimonios en primeras nupcias.

*Proporción de casadas y tasa de nupcialidad.* Para el caso ideal en que todos los matrimonios sean en primeras nupcias, entre la proporción  $s(a)$  de mujeres no-casadas o la de las casadas  $1 - s(a) = H(a)$  a la edad  $a$  y la tasa de nupcialidad  $v(a)$ , existe la simple relación<sup>1/</sup>

$$(267) \quad \frac{ds(a)}{da} = -v(a)s(a)$$

<sup>1/</sup> Esta relación ha sido señalada, entre otros, por H. Westergaard, *Journal of the American Statistical Association*, 1920, pág. 381 v por S. Wicksell, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1931, pág 125.

$$(268) \quad s(a) = e^{-\int_0^a v(a) da}$$

La enumeración de una población por edad y estado civil nos da directamente los valores de la relación  $s(a)$ ; y mediante una diferenciación numérica, según la fórmula (267), se obtienen de inmediato los valores de la tasa de nupcialidad  $v$ .

*Número de hijos por esposa.* Fijemos nuestra atención en una cohorte de  $N$  niñas recién nacidas, y sigamos el curso de su vida hasta el momento en que fallece la última sobreviviente. A la edad  $a$  hay  $Np(a)$  sobrevivientes, de las cuales  $Np(a)s(a)$  son no-casadas; entre éstas habrá  $Np'(a)s(a)da$  que fallecieron antes de alcanzar la edad  $a + da$ . Por último, cuando la cohorte completa haya fallecido, el número de mujeres que murieron solteras estará expresado por la integral

$$(269) \quad S = N \int_0^{\omega} p'(a)s(a)da$$

y el número de mujeres que durante su vida estuvieron alguna vez casadas será igual a la diferencia

$$(270) \quad N - S = N \left\{ 1 - \int_0^{\omega} p'(a)s(a)da \right\}$$

A su vez, el número de hijos nacidos de la cohorte será  $N \int_0^{\omega} p(a)m(a)da$ , de manera que el número de hijos <sup>1/</sup> por esposa será igual a

$$(271) \quad E_e = \frac{\int_0^{\omega} p(a)m(a)da}{1 - \int_0^{\omega} p'(a)s(a)da}$$

*Número de hijos por madre.* La estadística de varios países provee informaciones no sólo sobre la fecundidad global  $m(a)$ , sino

<sup>1/</sup> El símbolo  $m(a)$  se refiere aquí a hijos de ambos sexos.

también sobre la fecundidad específica según el orden de los nacimientos. Luego, si con  $m_1(a)$  designamos los nacimientos primogénitos *per capita* entre mujeres de edad  $a$ , el número de mujeres que en la cohorte  $N$  tendrán un primer hijo, y por consiguiente se convertirán en madres, será  $N \int_0^{\omega} p(a)m_1(a)da$  y, en consecuencia, el número de hijos por madre será

$$(272) \quad E_m = \frac{\int_0^{\omega} p(a)m(a)da}{\int_0^{\omega} p(a)m_1(a)da}$$

*Tasa de esterilidad.* Si el número de hijos por madre es superior al de hijos por esposa, ello se debe a que una determinada proporción de matrimonios permanece estéril. Esta proporción, esta "tasa de esterilidad", puede expresarse mediante la fórmula

$$(273) \quad \zeta = 1 - \frac{E_e}{E_m} = \frac{E_m - E_e}{E_m}$$

o más directamente<sup>1/</sup>

$$\zeta = 1 - \frac{\text{número de mujeres en la cohorte que se convierten en madres}}{\text{número de mujeres en la cohorte que se convierten en esposas}}$$

de modo que

$$(274) \quad \zeta = 1 - \frac{\int_0^{\infty} p(a)m_1(a)da}{1 - \int_0^{\infty} p'(a)s(a)da}$$

*Relación entre el número medio de hijos por familia y la tasa de crecimiento.* Es evidente que entre el número medio de hijos por familia y la tasa de crecimiento de una población cerrada existe una relación más o menos estrecha. En el caso de una población del

<sup>1/</sup> La fórmula (274) da la dimensión completa de la esterilidad, independientemente de la causa: esterilidad fisiológica, muerte temprana de cualquiera de los cónyuges, matrimonio a una edad posterior al límite del período reproductivo, etc.

172 tipo estable esta relación toma una forma definida. En este caso, los componentes de una cohorte de  $N$  niñas recién nacidas, tienen a lo largo de su vida,  $R_0 N$  hijas, es decir  $2,06 R_0 N$  hijos, (véase la página 173). Sea  $H$  la proporción de mujeres de la cohorte que llegan a esposas y  $M$  la proporción de las que pasan a ser madres. El número de hijos por esposa será entonces

$$(275) \quad E_e = \frac{2,06 R_0}{H}$$

de modo que

$$(276) \quad R_0 = \frac{H E_e}{2,06} = e^{\rho T}$$

$$(277) \quad \rho = \frac{1}{T} \log_e \frac{H E_e}{2,06}$$

En forma análoga se obtiene<sup>1/</sup>

$$(277a) \quad \rho = \frac{1}{T} \log_e \frac{M E_m}{2,06}$$

*Aplicación.* El siguiente ejemplo numérico, extraído de estadísticas de población de los Estados Unidos (raza blanca) correspondientes a 1930 servirá para aclararnos el empleo de las fórmulas dadas en los párrafos precedentes y, además, para poner en evidencia la importancia de contar con datos suficientemente exactos.

De acuerdo con las fórmulas (271), (272), se tiene

$$(278) \quad \begin{cases} E_e = \frac{2,046}{0,8308} = 2,46 \\ E_m = \frac{2,046}{0,6290} = 3,25 \end{cases}$$

de forma tal que según (273)

$$(279) \quad \zeta = 1 - \frac{E_e}{E_m} = 1 - \frac{2,46}{3,25} = 0,243$$

<sup>1/</sup> Véase A.J. Lotka: "The Size of American Families in the eighteenth Century", *Journal of the American Statistical Association*, 1927, págs. 161-166.

Se tendría así una cifra asombrosa de esterilidad bruta, 24,3 173 por ciento.

Con todo, el registro de nacimientos es aun muy imperfecto en la mayoría de los Estados, estimándose que quizá un 8 por ciento de los nacimientos escapan a la estadística. Al introducir esta corrección se tiene

$$(280) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_e = \frac{2,210}{0,8308} = 2,66 \\ E_m = \frac{2,210}{0,6793} = 3,25 \end{array} \right.$$

$$(281) \quad \zeta = 0,182$$

es decir, una esterilidad de 18,2 por ciento, porcentaje todavía muy elevado, pero mucho más moderado que 24,3.

Es de destacar que en los cálculos anteriores no se ha hecho ninguna corrección con referencia a los nacimientos ilegítimos, ya que acerca de este asunto carecemos de información estadística según orden de nacimiento.

*Composición de la familia "estacionaria".* En las condiciones de fecundidad y mortalidad de los Estados Unidos en 1930, con una tasa intrínseca de crecimiento de 0,003 *per capita*, se obtiene una familia media de 2,66 hijos por esposa y de 3,25 hijos por madre. Cabe preguntar entonces, cuál será la composición de la familia suficiente para conservar exactamente el equilibrio entre la fecundidad y la mortalidad, de modo que la tasa de crecimiento se anule. Es evidente que de la cohorte de  $N$  hijas recién nacidas, de las cuales  $NH$  pasan a ser esposas y  $NH \frac{E_e}{E_m}$  son madres, tendrán que nacer  $N$  hijas. El número de hijas por esposa deberá ser entonces

$$(282) \quad \frac{N}{NH} = \frac{1}{H}$$

y el número de hijas por madre

$$(283) \quad \frac{NE_m}{NHE_e} = \frac{1}{H(1 - \zeta)}$$

174 Las fórmulas anteriores dan el número de hijas por esposa o por madre, necesarios para conservar el equilibrio demográfico. El correspondiente número de hijos de ambos sexos se obtiene multiplicando las expresiones precedentes por la relación entre el total de nacimientos y los nacimientos femeninos; esta relación, bastante constante en los países civilizados, es más o menos igual a 2,06.

En el ejemplo<sup>1/</sup> citado más arriba, para la familia estacionaria en 1930, se tiene

$$(284) \quad \begin{cases} E_e' = \frac{2,057}{0,8308} = 2,47 & \text{hijos por esposa.} \\ E_m' = \frac{2,057}{0,8308 (1 - 0,182)} = 3,03 & \text{hijos por madre.} \end{cases}$$

*Familia final media.* Es de destacar que las cifras así obtenidas representan la familia final media, lo que significa que al hacer las integrales de la fórmula (272)<sup>2/</sup> cada mujer de la cohorte es observada desde su nacimiento hasta su muerte.

*Familias completas.* Es particularmente interesante estudiar la composición de la familia en condiciones plenamente favorables para su desarrollo integral, es decir, en el caso en que ambos cónyuges llegan con vida, sin disolver el matrimonio, por lo menos hasta el fin del período reproductivo de la mujer.

Sea  $\eta(a)$  la proporción de mujeres de edad  $a$  que están realmente casadas (esposas); sea también  $\nu(a)$  la proporción de viudas, y  $\delta(a)$  la proporción de divorciadas. Entonces, siendo  $m(a)$  la reproductividad de mujeres de edad  $a$  en general (cualquiera sea su estado civil), es evidente que la reproductividad de las mujeres casadas será

$$(285) \quad m'(a) = \frac{m(a)}{\eta(a)}$$

<sup>1/</sup> En este ejemplo se ha despreciado la influencia de los nacimientos ilegítimos. Las cifras mencionadas pueden considerarse suficientemente realistas para usarlas como ejemplo si se tienen en cuenta las deficiencias del registro.

<sup>2/</sup> Para una discusión detallada del tema remitimos al lector a los artículos de C. Gini y F. Savorgan en el *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 1934, Tomo XXVII, pág. 40 y la Revista del mismo Instituto, 1933, Tomo I, pág. 23.



Fijemos nuestra atención en una cohorte de  $N$  mujeres en la cual  $N \eta(a)$  son las casadas de edad  $a$  y donde todas sobreviven el período reproductivo. En el curso de su vida esas mujeres tendrán un número  $\epsilon$  de hijos

$$(286) \quad \epsilon = N \int_0^{\infty} \eta(a) m'(a) da$$

Sin embargo, en una población real hay una determinada proporción  $\nu(a)$  de mujeres viudas a la edad  $a$ , y además otra proporción  $\delta(a)$  de divorciadas de esa misma edad. Elijamos nuestra cohorte de forma tal que no contenga mujeres que hayan sufrido alguno de estos percances o, lo que es lo mismo, supongamos que los esposos fallecidos se reemplazan de inmediato y las parejas divorciadas se vuelven a casar al instante; dentro de esas hipótesis, la proporción de mujeres casadas a la edad  $a$  aumentará de  $\eta(a)$  a

$$(287) \quad \eta'(a) = \eta(a) + \nu(a) + \delta(a)$$

y el número de hijos nacidos de esta cohorte, será

$$(288) \quad \epsilon' = N \int_0^{\infty} \eta'(a) m'(a) da$$

Por el contrario, el número de madres en la cohorte será, evidentemente, igual al número de "primogénitos" nacidos en las mismas condiciones, es decir

$$(289) \quad \epsilon_1' = N \int_0^{\infty} \eta'(a) m_1'(a) da$$

si se admite que el factor  $\eta'(a)$  puede aplicarse por igual a la probabilidad de tener un primer hijo como a la probabilidad de tener uno de cualquier orden.

El número de hijos por madre en la cohorte, será por consiguiente

$$(290) \quad E_{m'} = \frac{\epsilon'}{\epsilon_1'} = \frac{\int_0^{\infty} \eta'(a) m'(a) da}{\int_0^{\infty} \eta'(a) m_1'(a) da}$$

176      *Aplicación.* Utilizando información estadística de los Estados Unidos para 1930, de acuerdo con la fórmula (280) se obtiene una familia final media de 3,253 hijos por madre y según (290) una familia media completa de 3,434 hijos por madre. Se ve entonces que en las condiciones actuales la familia completa sobrepasa ligeramente a la familia final.

RELACIONES QUE COMPRENDEN LA FUNCION DE  
SUPERVIVENCIA DE DOS INDIVIDUOS

*Las familias disueltas.* La disolución de familias como consecuencia del fallecimiento de uno u otro de los padres, o de ambos, constituye un problema sociológico y económico de primera importancia. Hay por consiguiente un interés práctico en calcular la frecuencia de ese fenómeno demográfico, en su relación con las características biométricas de una población.

*Proporción de huérfanos a una determinada edad a. Huérfanos de madre.* Sea  $B(t)$  el número anual de nacimientos femeninos en la época  $t$ ;  $m(n)$  la cifra anual de tales nacimientos por mujer de edad  $n$ ; y  $p(n)$  la proporción de recién nacidas que alcanzan la edad  $n$ . El número anual de nacimientos femeninos que provienen de madres con edad comprendida entre  $n$  y  $n + dn$ , será entonces

$$(291) \quad B(t - n)p(n)m(n)dn$$

y este guarismo será una fracción

$$(292) \quad \frac{B(t - n)p(n)m(n)dn}{B(t)}$$

del total de nacimientos femeninos en la época  $t$ . Apliquemos ahora este razonamiento al número de hijas  $B(t-a)p(a)da$ , cuya edad en la época  $t$  se encuentra en el intervalo  $a$ ,  $a + da$ . La proporción de las que provienen de madres con edad entre  $n$  y  $n + dn$  al momento del nacimiento será, evidentemente

$$(293) \quad \frac{B(t - a - n)}{B(t - a)} p(n)m(n)dn$$

$$(294) \quad B(t - a - n)p(n)m(n)dn p(a)da$$

Si la edad de esas hijas es  $a$  años, la de sus madres será  $(a+n)$  años, de suerte que el total de dichas madres sobrevivientes en la época  $t$  es

$$(295) \quad B(t - a - n)p(a + n)m(n)dn p(a)da$$

Por último, el total de hijas con edades comprendidas entre  $a$  y  $a+da$  que en la época  $t$  tienen aún su madre viva, será

$$(296) \quad p(a)da \int_0^{\omega} B(t - a - n)p(a + n)m(n)dn$$

y la proporción de esas hijas en el total de hijas de la misma edad, es igual a

$$(297) \quad \int_0^{\omega} \frac{B(t - a - n)}{B(t - a)} p(a + n)m(n)dn$$

$$= \int_0^{\omega} \frac{p(a + n)}{p(n)} \frac{B(t - a - n)}{B(t - a)} p(n)m(n)dn$$

$$(298) \quad = \frac{p(a + \bar{n})}{p(\bar{n})} \frac{B(t - a - \bar{n})}{B(t - a)} \int_{a_1}^{a_2} p(n)m(n)dn$$

Ahora bien, si el producto

$$\frac{p(a + n)}{p(n)} \frac{B(t - a - n)}{B(t - a)}$$

considerado como función de  $n$ , entre los límites  $a_1$  y  $a_2$ , <sup>1/</sup> se aparta sólo un poco de la forma lineal, la media de  $n$  en la expresión (298) no difiere mucho de la media definida con la fórmula

$$(299) \quad \bar{n} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} np(n)m(n)dn}{\int_{a_1}^{a_2} p(n)m(n)dn}$$

esto es, de la media de la curva de fecundidad. Pero en tal caso la relación (249) resulta

$$(300) \quad \frac{B(t - a - \bar{n})}{B(t - a)} = \frac{1}{R_0}$$

<sup>1/</sup> Es suficiente con que esa forma lineal se dé entre límites más estrechos, puesto que la función  $p(n)m(n)$  sólo tiene valor considerable en las proximidades de su máximo.

Por otro lado se tiene

179

$$(301) \quad \int_{a_1}^{a_2} p(n)m(n)dn = R_0$$

La proporción de hijas de edad  $a$  cuyas madres viven aún, se reduce entonces simplemente a la relación

$$(302) \quad \frac{p(a + \bar{n})}{p(\bar{n})}$$

y, finalmente, la proporción de hijas de edad  $a$  huérfanas de madre, será

$$(303) \quad \Omega(a) = 1 - \frac{p(a + \bar{n})}{p(\bar{n})}$$

*Huérfanos de madre.* La fórmula (303) no contiene ninguna característica que pertenezca únicamente a los hijos del sexo femenino, porque la edad media de las madres al nacimiento de las hijas no es sensiblemente diferente de su edad al nacimiento de los varones. Luego, la fórmula (303) sirve también para calcular la proporción de varones de edad  $a$  que han perdido a su madre, es decir, que son huérfanos de madres.

*Huérfanos de padre.* El razonamiento usado para establecer la proporción de huérfanos de madre en la fórmula (303), es aplicable también al cálculo de los huérfanos de padre, siempre que la función de supervivencia  $p(a)$ , que ahora se refiere a los padres, provenga de las estadísticas de mortalidad masculina.

*Huérfanos desde su nacimiento.* Al aplicar la fórmula (303), tanto a los huérfanos de madre como a los de padre, debe hacerse aún, una corrección más.

En cuanto a los primeros, se introduce un error sistemático que proviene de aplicar a las mujeres, en ocasión de cada uno de los partos, la función de supervivencia correspondiente a la población femenina total; este error es tanto más importante dado que los riesgos especiales del alumbramiento se concentran precisamente en los años de nacimiento de aquellos hijos entre los cuales buscamos la proporción de los que han perdido su madre. En consecuencia un determinado número de hijos son huérfanos desde su nacimiento. En

180 forma algo análoga, determinada proporción de hijos nacen huérfanos de padre, ya que sus padres durante los nueve meses comprendidos entre la concepción y el nacimiento de esos hijos están expuestos a los riesgos normales de morir.

La corrección que hay que introducir a causa de esta segunda circunstancia evidentemente es muy simple. Basta con introducir en la fórmula (303) en lugar de la edad del padre a la fecha del nacimiento mismo, su edad nueve meses antes del nacimiento del hijo. Entonces, nuestra fórmula queda

$$(304) \quad \Omega'(a) = 1 - \frac{p(a + \bar{n})}{p\left(\bar{n} - \frac{3}{4}\right)}$$

En el momento del nacimiento del hijo tenemos

$$(305) \quad a = 0$$

$$(306) \quad \Omega'(0) = 1 - \frac{p(\bar{n})}{p\left(\bar{n} - \frac{3}{4}\right)}$$

$$(307) \quad = \frac{p\left(\bar{n} - \frac{3}{4}\right) - p(\bar{n})}{p\left(\bar{n} - \frac{3}{4}\right)}$$

$$(308) \quad = -\frac{3}{4} \frac{dp(\bar{n})}{p(\bar{n})d\bar{n}}$$

Por lo tanto, la proporción de hijos póstumos entre los nacimientos totales, es igual a tres cuartos de la tasa de mortalidad de los padres correspondiente a la edad media  $\bar{n}$  al nacimiento de los hijos. De acuerdo con las estadísticas de los Estados Unidos en 1920 el valor de  $\bar{n}$  era para los padres 32,1 y la tasa de mortalidad correspondiente a esa edad igual a 0,0069, de manera que la proporción de hijos póstumos debía ascender, más o menos, a  $\frac{3}{4} \times 0,0069 = 0,0052$  ó 5,2 por mil. Esta cifra es quizá un poco exagerada ya que los hombres que llegan a ser padres tienen probablemente una mortalidad algo inferior a la media. Con una tabla de vida más reciente se obtendría también una cifra inferior. Por

ejemplo, con la mortalidad de los Estados Unidos en 1930 la proporción de hijos póstumos es de  $\frac{3}{4} \times 0,0042 = 0,0031$  ó 3,1 por mil.

La corrección que hay que introducir a causa de las muertes imputables al parto que ocurren entre las mujeres, es más difícil de determinar. Sin embargo, por casualidad se ha encontrado que las defunciones provocadas por esta causa son del mismo orden numérico que las defunciones ocurridas entre los padres durante los nueve meses que preceden al nacimiento.<sup>1/</sup>

fórmula (304) es posible entonces calcular una corrección muy satisfactoria, aunque explicable con razones muy diferentes, dando a  $p(a)$  valores tomados de una tabla de vida femenina y haciendo  $\bar{n}$  igual a la edad media de las madres a la fecha del nacimiento de sus hijos.

*Huérfanos absolutos.* El caso de hijos que han perdido a ambos padres tiene una especial importancia social. Si la probabilidad de perder a la madre y la de perder al padre fueran independientes, la probabilidad de perder a los dos se obtendría simplemente mediante un producto de dos probabilidades. Únicamente la observación puede decirnos si ello es así. Como veremos enseguida las dos probabilidades que entran en juego están muy lejos de ser independientes.

*Aplicaciones. 1. Comparación de las cifras teóricas con los datos observados: Inglaterra.* Con el propósito de obtener una confirmación práctica de la teoría se han aplicado las fórmulas deducidas anteriormente a los datos estadísticos de Inglaterra y Gales para el año 1921. Para ese año se cuenta con datos completos sobre huérfanos de madre, de padre y absolutos clasificados por edades. En el cuadro 15 y en el gráfico 18 se presentan los resultados encontrados. Puede verse que para los huérfanos de madre hasta los

<sup>1/</sup> Para mayores detalles sobre este aspecto el lector debe recurrir a mi trabajo *Orphanhood in Relation to Demographic Factors*, *Metron*, 1931, Tomo IX, págs. 37-109, donde para determinar el número de hijos que pierden su madre al momento de nacer he seguido un procedimiento mucho más complicado porque no había desallado aún el sencillo método presentado aquí.

Cuadro 15

INGLATERRA Y GALES: NUMERO DE HUÉRFANOS. COMPARACION DE LAS CIFRAS CALCULADAS CON LAS REGISTRADAS, 1921

Edad	Número total de hijos a/	Huérfanos de padre			Huérfanos de madre			Huérfanos absolutos		
		Regis- trado	Calcu- lado	Di feren- cia	Regis- trado	Calcu- lado	Di feren- cia	Regis- trado	Calcu- lado b/	Di feren- cia
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0 - 15	10 362 244	786 090	593 501	192 589	316 339	386 746	-70 407	55 245	54 647	598
0 - 1	785 852	7 541	5 580	1 961	3 382	3 772	-390	332	236	96
1 - 2	816 506	13 508	10 615	2 893	5 379	6 940	-1 561	533	490	43
2 - 3	544 211	19 780	10 340	9 440	7 048	6 803	245	837	381	456
3 - 4	529 227	25 000	13 389	11 616	9 088	8 838	250	1 170	582	588
4 - 5	603 310	36 124	19 185	16 939	11 968	12 730	-762	1 607	965	642
5 - 6	647 579	45 577	25 061	20 516	14 765	16 643	-1 878	2 091	1 295	796
6 - 7	699 558	57 266	32 040	25 226	18 473	21 197	-2 724	2 915	1 889	1 026
7 - 8	716 809	61 932	38 134	23 798	21 519	25 232	-3 713	3 430	2 509	921
8 - 9	713 052	63 833	43 496	20 337	23 694	28 593	-4 899	3 874	3 137	737
9 - 10	702 427	65 920	48 538	17 382	26 038	31 820	-5 782	4 543	4 074	469
10 - 11	707 463	69 423	54 899	14 524	28 394	35 798	-7 404	5 093	5 023	70
11 - 12	720 078	73 914	62 287	11 627	31 802	40 396	-8 594	5 840	6 337	-497
12 - 13	732 329	78 954	70 157	8 797	36 004	45 331	-9 327	6 925	7 689	-764
13 - 14	734 055	82 828	77 516	5 312	38 487	49 916	-11 429	7 655	9 322	-1 667
14 - 15	709 788	84 490	82 264	2 226	40 298	52 737	-12 439	8 400	10 718	-2 318

a/ Se excluyen aquéllos para los cuales se desconocía la condición de los padres.

b/ Los valores calculados incluyen una corrección por efecto de la dependencia que existe en la probabilidad de muerte de ambos cónyuges. La información estadística usada en los valores calculados se encuentra en los siguientes lugares: Tabla de vida inglesa N° 9;

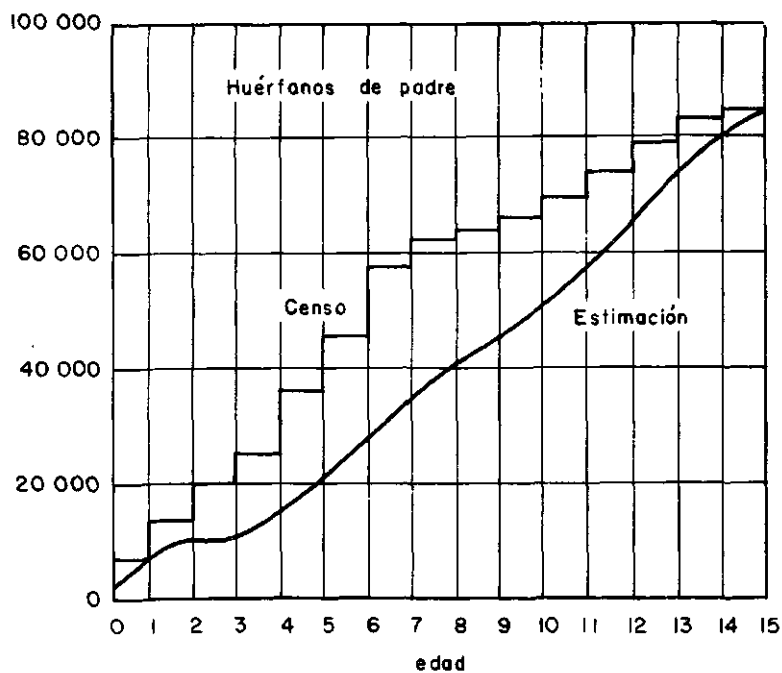
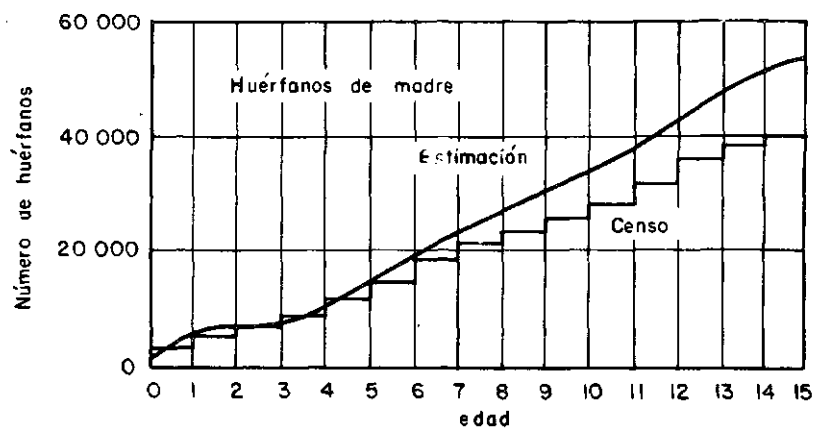
England and Wales, Census of 1921, General Tables, Table 33, pág. 138,

England and Wales, Report of Registrar General, 1922, pág. 132;

England and Wales, Census of 1921, Dependency, Orphanhood, Fertility, Table 11, pág. 241.



NUMERO DE HUÉRFANOS. COMPARACION DE LAS CIFRAS ESTIMADAS CON LAS OBSERVADAS, INGLATERRA Y GALES, 1921



184 5 años de edad, hay una concordancia bastante aceptable entre las cifras calculadas y las observadas.

Por encima de esa edad los valores calculados superan a los observados lo que se explica en parte, sin duda, porque una fracción de las viudas se casa nuevamente, por lo que sus hijos no figuran en las estadísticas como huérfanos, aunque sí en nuestras fórmulas.

El número de huérfanos de padre es, por el contrario, superior al calculado, especialmente entre los de 4 a 10 años; es decir, para los hijos nacidos entre 1911 y 1917. Ese es uno de los efectos funestos de la guerra.

Hay que destacar por otra parte que la proporción de huérfanos absolutos calculada como simple producto de la proporción de los huérfanos de madre y los de padre no coincide en absoluto con las observaciones. Efectivamente, a la edad de un año la cantidad de huérfanos registrados es por lo menos diez veces mayor que la calculada sobre la hipótesis, evidentemente muy inexacta, de independencia entre la defunción del padre y la de la madre. La desviación entre los valores calculados y los registrados disminuye a medida que aumenta la edad.

2. *Cálculo indirecto cuando se carece de datos precisos de observación: Estados Unidos.* En todo caso, la correspondencia entre los resultados calculados de acuerdo con las fórmulas teóricas y los datos observados, es suficientemente grande para suplir con cifras teóricas la falta de información directa sobre huérfanos, como ocurre en los Estados Unidos. Los guarismos teóricos del cuadro 16 nos informan, por lo tanto, en cierta medida sobre las condiciones de los Estados Unidos en 1930, fecha del último censo. Para calcular el número de huérfanos absolutos hemos multiplicado el producto de las proporciones de huérfanos de madre y los de padre por el factor correspondiente observado en la población de Inglaterra y Gales. Por cierto que este procedimiento no es el ideal y sería muy deseable contar con datos de huérfanos para otro país, y saber hasta qué punto esos factores son constantes o variables de un caso a otro. Por el momento debemos contentarnos con haber llamado la atención sobre esas relaciones.

ESTIMACION DEL NUMERO DE HUÉRFANOS. ESTADOS UNIDOS,  
RAZA BLANCA, 1930

Edad	Total de niños	Huérfanos			
		Total	Padre fallecido	Madre fallecida	Padre y madre fallecidos
Menores de 16 años	33 448 712	2 718 000	1 531 000	1 041 000	146 000
Menores de 5 años	9 927 396	266 000	146 000	113 000	7 000
5 - 9	10 956 144	790 000	443 000	318 000	29 000
10 - 14	10 546 282	1 332 000	755 000	494 000	83 000

*Efecto de un mejoramiento en la mortalidad.* Es interesante calcular el número de huérfanos en una población, bajo el supuesto de dos tasas de mortalidad diferentes, para apreciar de esta forma el efecto que tiene sobre esa relación una disminución de la mortalidad. En el cuadro 17, en donde figuran los resultados de dicho cálculo, se ve que si en 1930 la población de los Estados Unidos hubiera estado sometida a la mortalidad imperante en 1901 habría habido, entre los niños de raza blanca, casi dos millones de huérfanos más.<sup>1/</sup>

*Composición de la familia según el número de hijos.* El mismo sistema que nos dio los valores de  $m_1(a)$ , número de nacimientos de orden uno por mujer de edad  $a$ , nos provee también los datos para calcular  $m_2(a)$ ,  $m_3(a)$  ...  $m_n(a)$ , número de segundos, terceros, ... enésimos nacimientos por mujer de edad  $a$ . Así como se ha seguido la vida de una cohorte de  $N$  mujeres para determinar la proporción de esposas y madres, también puede buscarse la proporción de las que tendrán 2, 3, ... hijos bajo el régimen de una tabla de mortalidad y una fecundidad dadas. De esta forma se obtiene una clasificación de las familias según el número de hijos nacidos vivos.

<sup>1/</sup> Véase A.J. Lotka: *Orphanhood in Relation to Demographic Factors*, *Metron*, 1931, Vol. 9, pág. 37; además M. Spiegelman: *The Broken Family-Widowhood and Orphanhood*, *Annals of the American Academy of Political and Social Sciences*, vol. 188, pág. 126, 1936.

REDUCCION DEL NUMERO DE HUERFANOS (MENORES DE 16 AÑOS)  
A CAUSA DEL DESCENSO DE LA MORTALIDAD DESDE 1901 A 1930.  
ESTADOS UNIDOS, RAZA BLANCA

Condición	Estimación del número de huérfanos en 1930 basada en la mortalidad de		Reducción del número de huérfanos
	1901	1930	
Padre fallecido	2 438 000	1 531 000	907 000
Madre fallecida	1 741 000	1 041 000	700 000
Padre y madre fallecidos	455 000	146 000	309 000
Totales	4 634 000	2 718 000	1 916 000

Por ejemplo, para calcular en la cohorte el número de mujeres que son madres de 3 hijos exactamente, se hace la diferencia

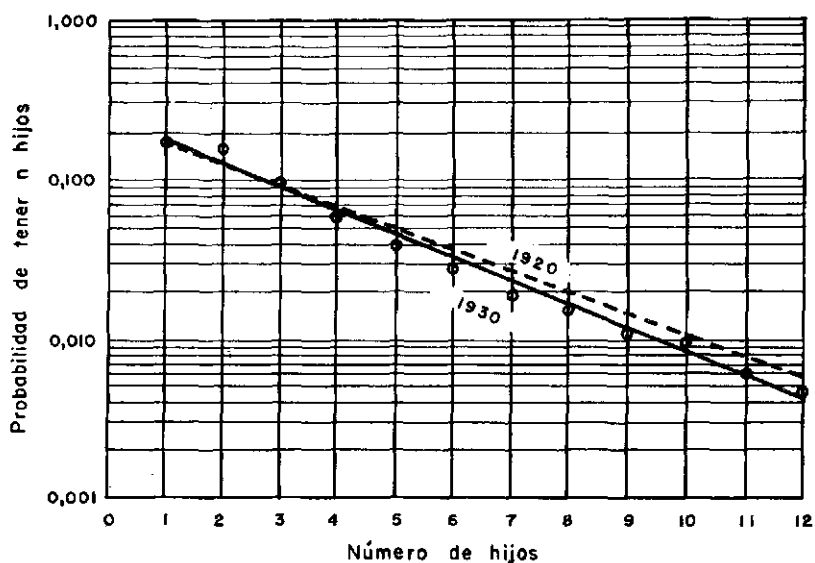
$$(309) \quad N \int_0^{\omega} p(a) \{ m_3(a) - m_2(a) \} da = Np_3$$

*Aplicación.* En este ejemplo hemos utilizado estadísticas de los Estados Unidos para la población de raza blanca en dos épocas distintas, 1920 y 1930. Los resultados se presentan en el gráfico 19 cuyas ordenadas están en escala logarítmica. Queda en evidencia una notable propiedad que es muy útil en la discusión del problema sobre extinción de familias. Los puntos señalan la frecuencia relativa de las familias con 1, 2, ...  $n$  hijos, los que se ordenan casi en línea recta; <sup>1/</sup> designando con  $p_n$  la frecuencia relativa de familias con  $n$  hijos por madre, se consigue en efecto, mediante el método de mínimos cuadrados, una aproximación muy razonable

$$(310) \quad p_n = 0,7358^{(n-1)} p_1 \quad (n \neq 0)$$

<sup>1/</sup> Esta propiedad fue señalada para los hijos varones por A. J. Lotka, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1931, págs. 377-453. También se encuentra una observación análoga para los hijos de ambos sexos en E.B. Wilson, *Journal of the American Statistical Association*, 1935, suplemento, pág. 577. Ambos autores han destacado que esa propiedad lineal no se da en familias con más de 11 ó 12 hijos.

PROBABILIDAD DE QUE UN RECIEN NACIDO TENGA EN EL CURSO DE SU VIDA  $n$  HIJOS. DATOS PROVENIENTES DE ESTADÍSTICAS DE LOS ESTADOS UNIDOS PARA 1920 Y 1930. LOS CIRCULOS PEQUEÑOS INDICAN DATOS OBSERVADOS EN 1930; LAS RECTAS SE TRAZARON MEDIANTE EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS



La frecuencia de las familias sin hijos constituye, en general, una excepción y no entra en el esquema logarítmico lineal. Designemos con  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_\omega$  la probabilidad de tener 0, 1, 2, ...  $\omega$  hijos en la familia. Esas probabilidades deben verificar la siguiente condición

$$(311) \quad p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_\omega = 1$$

lo que, en general, no podría ocurrir, si los  $p$  formaran una pro-

188 regresión geométrica. Por el contrario, una vez calculada la recta que representa el conjunto de puntos  $p_1, p_2, \dots, p_\omega$ , mediante el método de mínimos cuadrados, puede calcularse siempre el correspondiente valor de  $p_0$  con la fórmula

$$(312) \quad p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_\omega).$$

## EXTINCION DE UNA LINEA DE DESCENDENCIA

El razonamiento mediante el cual hemos llegado a la noción y medida de la tasa intrínseca de crecimiento se basa en la función de fecundidad general  $m(a)$ , y, en consecuencia, nuestras conclusiones representan un valor medio, es un resultado colectivo correspondiente a una población considerada como conjunto. Las funciones de fecundidad según orden de nacimiento del hijo  $m_n(a)$ , que acabamos de introducir, nos permiten llevar más lejos nuestro análisis. La tasa media de crecimiento  $r$  no se aplica por igual a cualquier elemento tomando al azar entre la población, digamos por ejemplo a los descendientes directos (los que llevan el mismo apellido) de un individuo cualquiera.

Estudemos ahora un problema particular: ¿Cuál es la probabilidad de que el número de descendientes (masculinos) en línea recta de un individuo (masculino) a la  $s$ -ésima generación sea igual a  $\nu$ ? ¿Y cuál es, en particular, la probabilidad de que ese número sea cero; es decir, que se extinga el apellido después de la  $s$ -ésima generación? Es evidente que este problema, por el número de autores que se han ocupado de él, presenta un interés considerable. La lista comprende los nombres de Watson (1889) citado por Galton<sup>1/</sup> (1889), Erlang, citado por Steffensen<sup>2/</sup> (1930), Lotka<sup>3/</sup> (1931), J.B.S. Haldane<sup>4/</sup> (1932) y R.A. Fisher,<sup>5/</sup> habiéndose ocupado los dos

1/ H.W. Watson citado por F. Galton, *Natural Inheritance*, 1889, pág. 242.

2/ J.F. Steffensen: *Matematisk Tidsskrift*, 1930, pág. 19.

3/ A.J. Lotka: *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1931, págs. 377-453.

4/ J.B.S. Haldane: *The causes of Evolution*, 1932, pág. 198.

5/ R.A. Fisher: *The Genetical Theory of Natural Selection*, 1929, pág. 273.

190 últimos en la aplicación de este problema a cuestiones sobre evolución en el régimen de herencia mendeliana.

Lotka (1931) e independientemente Steffensen (1931), han sido los primeros en aplicar fórmulas del tipo de las de Watson y de Steffensen<sup>1/</sup> a datos estadísticos concretos. Esta aplicación práctica requiere algunos desarrollos especiales como se verá a continuación.

Vamos a estudiar la descendencia masculina de un varón desde el momento de su nacimiento.

Sea  $\pi_0$  la probabilidad, considerada al momento de su nacimiento,<sup>2/</sup> de que un individuo muera sin descendencia masculina;

$\pi_1$  la probabilidad de que haya tenido un único hijo varón antes de su muerte;

$\pi_2$  la probabilidad de que haya tenido exactamente dos hijos varones antes de su muerte;

$\pi_\nu$  la probabilidad de que haya tenido exactamente  $\nu$  hijos varones antes de su muerte.

Es evidente que entonces

$$(313) \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_\omega = 1$$

donde  $\omega$  representa el mayor número de hijos, para el cual la probabilidad  $\pi_\nu$  toma un valor no nulo.

Trataremos únicamente el caso en que los  $\pi$  son invariables para el individuo padre y para toda su descendencia.

Formamos una función auxiliar

$$(314) \quad f(x) = \pi_0 + \pi_1 x + \pi_2 x^2 + \dots$$

con algunas propiedades significativas que nos serán útiles. Señala-

<sup>1/</sup> J.F. Steffensen: *Deux Problèmes du Calcul de Probabilité*. Conferencias efectuadas en el Instituto Poincaré, diciembre de 1931; véase también E.B. Wilson, *Journal of the American Statistical Association*, 1935, Suplemento, pág. 577; T.H. Rawles, *Human Biology*, 1936, pág. 126.

P.L. Fegiz, I Cognomi di San Gimignano, *Metron*, vol. V, 1925, pág. 115.

<sup>2/</sup> Se excluyen los nacidos muertos.



lamos especialmente que

$$(315) \quad 1^\circ \quad f(1) = 1$$

$$(316) \quad 2^\circ \quad f(0) = \pi_0 = \text{probabilidad que un individuo muera sin descendiente masculino.}$$

$$(317) \quad 3^\circ \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = f'(1) = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + \dots$$

= número medio de hijos varones de los individuos considerados.

4° El coeficiente de  $x^s$  en la serie  $f(x)$  indica la probabilidad de que un individuo (considerado al momento de su nacimiento) tenga  $s$  hijos varones en el curso de su vida.

5° El coeficiente de  $x^s$  en la serie  $[f(x)]^r$  da la probabilidad de que  $r$  individuos (considerados al momento de su nacimiento) tengan a lo largo de su vida  $s$  hijos varones en conjunto (se comprueba la veracidad de esta proposición calculando dicha probabilidad de acuerdo con las reglas usuales y comparando el resultado con el coeficiente en cuestión).

6° La probabilidad para un individuo de tener  $r$  hijos varones y  $s$  nietos varones se expresa mediante el producto de la probabilidad de tener  $r$  hijos varones y la probabilidad de que esos  $r$  hijos tengan a su vez  $s$  hijos varones. Esta probabilidad compuesta viene dada por el coeficiente de  $x^s$  en el producto

$$(318) \quad \pi_r [f(x)]^r$$

7° La probabilidad de que un individuo tenga  $s$  nietos varones, cualquiera sea el número de sus hijos varones, está dada evidentemente por el coeficiente de  $x^s$  en la suma de todos los términos de la forma  $\pi_r [f(x)]^r$ . es decir, en

$$(319) \quad \pi_0 + \pi_1 f(x) + \pi_2 f^2(x) + \dots + \pi_\omega f^\omega(x) = f_2(x)$$

Esta función

$$f\{f(x)\} = f_2(x)$$

y en general

$$(320) \quad f\{f[f \dots]\} = f_n(x)$$

192 se llama la función iterada de orden  $n$  de  $f(x) = f_1(x)$ .

8° Con un razonamiento igual al del punto 7° se comprueba que la probabilidad de un individuo de tener  $\nu$  hijos varones en la  $s$ -ésima generación está dada por el coeficiente de  $x^\nu$  en la  $s$ -ésima iteración  $f_s(x)$  de  $f(x)$ .

Queda por determinar aún lo que le sucede a la función  $f_s(x)$  cuando  $s$  tiende a  $\infty$ , y especialmente lo que ocurre cuando  $f_s(0)$ , es decir, cuál será la probabilidad de que se extinga la línea de descendencia.

Para resolver este asunto debemos examinar algunas propiedades de las funciones iteradas de  $f(x)$ .

*Propiedades de las funciones iteradas  $f_s(x)$ .*

1° Siendo todos los coeficientes  $\pi$  cantidades positivas, y su suma  $\sum \pi$  igual a 1, se deduce, cuando  $x$  aumenta de 0 a 1, que  $f(x)$ , lo mismo que todas sus iteradas, aumentan continuamente de  $\pi_0$  a 1.

2° Si existe un valor de  $x$ , digamos  $\xi < 1$ , tal que

$$(321) \quad \xi = f(\xi)$$

entonces se tendrá también, evidentemente

$$(322) \quad \xi = f_1(\xi) = f_2(\xi) = \dots$$

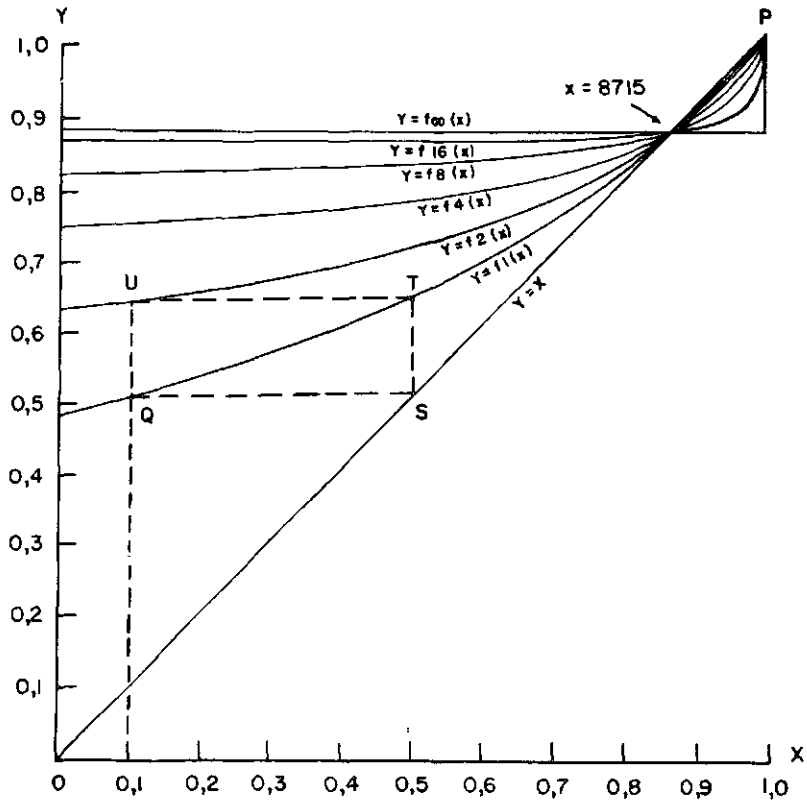
Las dos propiedades anteriores se han representado en el gráfico 20 el que da al mismo tiempo un método gráfico para construir iteraciones sucesivas de  $f(x)$ . Sirve asimismo como demostración de un teorema que permite calcular el valor límite de  $f_n(0)$ , para  $n$  tendiendo a  $\infty$ ; es decir, la probabilidad de extinción de una línea de descendencia.

*Teorema sobre el valor límite de una función iterada una infinidad de veces.* El valor límite de  $f_n(x)$ , para  $n$  tendiendo a  $\infty$ , no es otra cosa que el valor  $\xi$  de  $x$  que satisface la condición

$$\xi = f_1(\xi)$$

si es que un tal valor  $\leq 1$  existe.

El sentido de este teorema es claro: basta con mirar el gráfico 20, donde la primera función  $f(x) = f_1(x)$  se ha trazado directamente; para construir su iterada  $f_2(x)$ , desde un punto cualquiera

ITERACION GRAFICA DE LA FUNCION  $y = f_1(x)$ 

Q de la curva  $y_1 = f_1(x)$  se ha trazado una recta paralela al eje de las  $x$  que corta a la diagonal  $OP$  ( $y = x$ ) en el punto S. La ordenada del punto S corta la curva  $y_1 = f_1(x)$  en el punto T, y la recta horizontal que pasa por T corta la ordenada del punto Q en el punto U, el cual está situado evidentemente sobre la curva  $y_2 = f_2(x)$ . Procediendo de este modo es posible construir cualquier número de puntos correspondientes a la curva  $y_2 = f_2(x)$ .

Operando de la misma manera con la curva  $y_2 = f_2(x)$  se obtiene

194 la curva  $y_3 = f_3(x)$ , y así sucesivamente. Con anterioridad hemos señalado que la función  $f_1(x)$  y todas sus iteradas, son funciones crecientes de  $x$ . Por consiguiente, si existe un valor  $\xi (< 1)$  de  $x$ , tal que  $\xi = f(\xi)$ , la curva  $f_1(x)$  y todas sus iteradas pasan por ese punto ubicado en la intersección de la diagonal con la curva  $f_1(x)$ . Por otra parte, todas esas curvas pasan por el punto  $x = y = 1$ .

Por la forma misma como han sido construidas estas curvas resulta que los tramos situados a la izquierda del punto  $\xi = f_1(\xi)$  están dispuestos uno encima del otro, aplanándose y aproximándose cada vez más a una recta horizontal, la cual representa el segmento correspondiente a la curva límite  $y = f_\infty(x)$ . Resulta entonces que las curvas que representan a  $f_1(0)$ ,  $f_2(0)$ , ...  $f_\infty(0)$ , se escalonan una encima de otra, tendiendo hacia el límite

$$(323) \quad f_\infty(0) = f_\infty(\xi) = f_1(\xi) = \xi.$$

Por lo tanto, si se desea conocer la probabilidad de extinción de la línea de descendencia directa (masculina) de una persona, hay que buscar la raíz  $< 1$  (si es que existe) de la ecuación

$$x = f(x)$$

En consecuencia, es preciso ante todo examinar con mayor detenimiento la función  $f(x) = \sum \pi_i x^i$ .

Sea  $P_n$  la probabilidad al nacimiento de que un individuo del sexo masculino tenga en el curso de su vida por lo menos  $n$  hijos. En esas condiciones sabemos que

$$(324) \quad P_n = \int_0^\infty p(a) m_n(a) da$$

$$(325) \quad P_0 = 1$$

donde las funciones  $p(a)$  y  $m_n(a)$  se refieren al sexo masculino (padres).

La probabilidad de tener exactamente  $n$  hijos es evidentemente

$$(326) \quad p_n = P_n - P_{n+1}$$

Buscaremos ahora la probabilidad correspondiente a tener  $\nu$  hijos del sexo masculino.

Sea  $\alpha$  la proporción de nacimientos masculinos y  $\beta = 1 - \alpha$  la proporción de los femeninos en el total de nacimientos. La probabilidad de que entre  $n$  hijos haya  $\nu$  varones está<sup>1/</sup> dada entonces por el coeficiente de  $\alpha^\nu$  en el desarrollo en serie de  $(\alpha + \beta)^n$ .

¿Cuál será entonces la probabilidad de un recién nacido de tener a lo largo de su vida  $\nu$  varones? La respuesta se da en el cuadro 18. En la última línea se ha anotado la probabilidad para un recién nacido de tener 0, 1, 2, ... hijos, en la hipótesis, justificada con las observaciones citadas anteriormente, de que esas probabilidades<sup>2/</sup> forman una progresión geométrica con razón constante  $\gamma$ . Al pie de cada columna del citado cuadro se encuentra la probabilidad de tener  $n$  hijos, la que se ha descompuesto de acuerdo con un teorema muy conocido, en las probabilidades de que entre esos  $n$  hijos haya 0, 1, 2, ... varones. La octava columna da los valores de la probabilidad  $\pi_\nu$  de tener  $\nu$  varones independientemente del total de hijos. Se ve de inmediato que si las probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_\omega$  de tener 1, 2, ...  $\omega$  hijos forman una progresión geométrica con razón constante  $\gamma$ , las probabilidades correspondientes  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\omega$  de tener 1, 2, ...  $\omega$  varones forman también una progresión geométrica, cuya razón constante es igual a  $\Gamma = \frac{\alpha \gamma}{1 - \beta \gamma}$ .

En la práctica los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  no se apartan mucho de  $1/2$  y entonces la razón constante de la progresión  $\pi_1, \pi_2, \dots$  es  $\frac{\gamma}{2 - \gamma}$ .

*Número medio de hijos varones.* El número medio de posibles hijos varones por cada recién nacido del sexo masculino (o dicho de otra manera, la esperanza matemática de un varón recién nacido de tener hijos varones) se obtiene evidentemente multiplicando por 1, 2, 3, ... el segundo, tercer, cuarto ... término de la octava columna

<sup>1/</sup> Según un teorema muy conocido de la teoría de las probabilidades. Hemos supuesto aquí que la probabilidad de nacimientos de uno y otro sexo, observada entre los nacimientos totales, se aplica también a los nacimientos dentro de cada familia. Esta hipótesis no concuerda exactamente con la observación, pero el error que ello ocasiona no es de importancia. Un detallado estudio estadístico sobre el tema se encuentra en A. Geissler, *Zeitschrift des K. Sächsischen Statistischen Bureau's*, 1889, cuadernos I y II. Véase también D. Cecil Rife y L.H. Snyder, *Human Biology*, Vol. 9, 1937, pág. 98.

<sup>2/</sup> Salvo la correspondiente a 0 hijo (véase la página 183).

Cuadro 18

PROBABILIDAD DE QUE UNA PERSONA DEL SEXO MASCULINO (CONSIDERADA AL MOMENTO DE SU NACIMIENTO) TENGA  $n$  HIJOS DE LOS CUALES  $\nu$  SON VARONES; SUPONIENDO QUE  $\alpha$  ES LA PROPORCION DE NACIMIENTOS MASCULINOS Y  $\beta = 1 - \alpha$  LA DE LOS FEMENINOS

Hijos varones $\nu$	Hijos $n$						$\alpha$ $\sum_0^n$	Valor de las constantes (véase pág. 197)
	0	1	2	3	4	5		
0	$p_0$	$\beta p_1$	$\beta^2 \gamma p_1$	$\beta^3 \gamma^2 p_1$	$\beta^4 \gamma^3 p_1$	$\beta^5 \gamma^4 p_1$	$p_0 + \frac{\beta p_1}{1 - \beta \gamma} = \pi_0$	$\pi_0 = 0,4825$
1		$\alpha p_1$	$2\alpha \beta \gamma p_1$	$3\alpha \beta^2 \gamma^2 p_1$	$4\alpha \beta^3 \gamma^3 p_1$	$5\alpha \beta^4 \gamma^4 p_1$	$\frac{\alpha p_1}{(1 - \beta \gamma)^2} = \pi_1$	$\pi_1 = 0,2126$
2			$\alpha^2 \gamma p_1$	$3\alpha^2 \beta \gamma^2 p_1$	$6\alpha^2 \beta^2 \gamma^3 p_1$	$10\alpha^2 \beta^3 \gamma^4 p_1$	$\frac{\alpha^2 \gamma p_1}{(1 - \beta \gamma)^3} = \pi_1 \Gamma$	$\alpha = 0,515$
3				$\alpha^3 \gamma^2 p_1$	$4\alpha^3 \beta \gamma^3 p_1$	$10\alpha^3 \beta^2 \gamma^4 p_1$	$\frac{\alpha^3 \gamma^2 p_1}{(1 - \beta \gamma)^4} = \pi_1 \Gamma^2$	$\beta = 0,485$
4					$\alpha^4 \gamma^3 p_1$	$5\alpha^4 \beta \gamma^4 p_1$	$\frac{\alpha^4 \gamma^3 p_1}{(1 - \beta \gamma)^5} = \pi_1 \Gamma^3$	$\gamma = 0,7358$
5						$\alpha^5 \gamma^4 p_1$	$\frac{\alpha^5 \gamma^4 p_1}{(1 - \beta \gamma)^6} = \pi_1 \Gamma^4$	$\Gamma = \frac{\alpha \gamma}{1 - \beta \gamma}$
6								$= 0,5893$
7								$p_0 = 0,3686$
8								$p_1 = 0,1707$
9								$m = 2,446$
								$M = 1,2600$
$\infty$	$p_0$	$p_1$	$\gamma p_1$	$\gamma^2 p_1$	$\gamma^3 p_1$	$\gamma^4 p_1$	$p_0 + \frac{p_1}{1 - \gamma} = \pi_0 + \frac{\pi_1}{1 - \Gamma}$	$\xi = \frac{\pi_0}{\Gamma} = 0,819$

Cuadro 19

PROBABILIDAD DE QUE UN VARON RECIEN NACIDO TENGA EN EL CURSO DE SU VIDA  $n$  HIJOS DE LOS CUALES  $v$  SON VARONES.  
 CALCULOS BASADOS EN ESTADISTICAS DE LOS ESTADOS UNIDOS, RAZA BLANCA, 1920

Hijos varones $v$	Hijos $n$											$\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,v}$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0,3686	0,0328	0,0295	0,0105	0,0038	0,0013	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	.....	0,4825
1		0,0879	0,0628	0,0336	0,0160	0,0071	0,0030	0,0013	0,0005	0,0002	.....	0,2126
2			0,0333	0,0357	0,0254	0,0152	0,0081	0,0041	0,0019	0,0009	.....	0,1252
3				0,0126	0,0180	0,0161	0,0115	0,0072	0,0041	0,0022	.....	0,0738
4					0,0048	0,0086	0,0091	0,0076	0,0055	0,0035	.....	0,0435
5						0,0018	0,0039	0,0049	0,0046	0,0037	.....	0,0257
6							0,0007	0,0017	0,0025	0,0026	.....	0,0151
7								0,0003	0,0007	0,0012	.....	0,0088
8									0,0001	0,0003	.....	0,0052
9										0,0000	.....	0,0031
10											.....	0,0018
$\sum_{v=0}^{\infty} p_{n,v}$	0,3686	0,1707	0,1256	0,0924	0,0680	0,0501	0,0368	0,0271	0,0199	0,0147	.....	1,0000

198 del cuadro 18 y sumando los resultados. Se obtiene así:

$$(327) \quad m = \frac{2p_1}{(1-\gamma)^2}$$

resultado que concuerda evidentemente con el número medio de hijos que se obtiene al hacer la suma

$$(328) \quad p_1 + 2\gamma p_1 + 3\gamma^2 p_1 + \dots = \frac{p_1}{(1-\gamma)^2}$$

*Probabilidad de extinción de una línea de descendencia.* De acuerdo con los principios expuestos más arriba, esta probabilidad está dada por la raíz < 1 de la ecuación

$$(329) \quad x = \pi_0 + \pi_1 x + \Gamma \pi_1 x^2 + \Gamma^2 \pi_1 x^3 + \dots$$

$$(330) \quad = \pi_0 + \frac{\pi_1 x}{1-\Gamma x}$$

Sabemos por otra parte que la suma de las probabilidades de tener 0, 1, 2, 3, ... hijos varones es igual a 1, esto es

$$(331) \quad 1 = \pi_0 + \frac{\pi_1}{1-\Gamma}$$

Eliminando  $\pi_1$  en (330) y (331) se obtiene

$$(332) \quad x(1-\pi_0)(1-\Gamma) = (x-\pi_0)(1-\Gamma x)$$

$$(333) \quad x^2 - x\left(\frac{\pi_0}{\Gamma} + 1\right) + \frac{\pi_0}{\Gamma} = 0$$

$$(334) \quad (x-1)\left(x - \frac{\pi_0}{\Gamma}\right) = 0$$

la raíz  $x = 1$ , no nos interesa; sabemos que debe existir. Lo que buscamos en cambio es la raíz

$$(335) \quad x = \frac{\pi_0}{\Gamma} = \xi$$

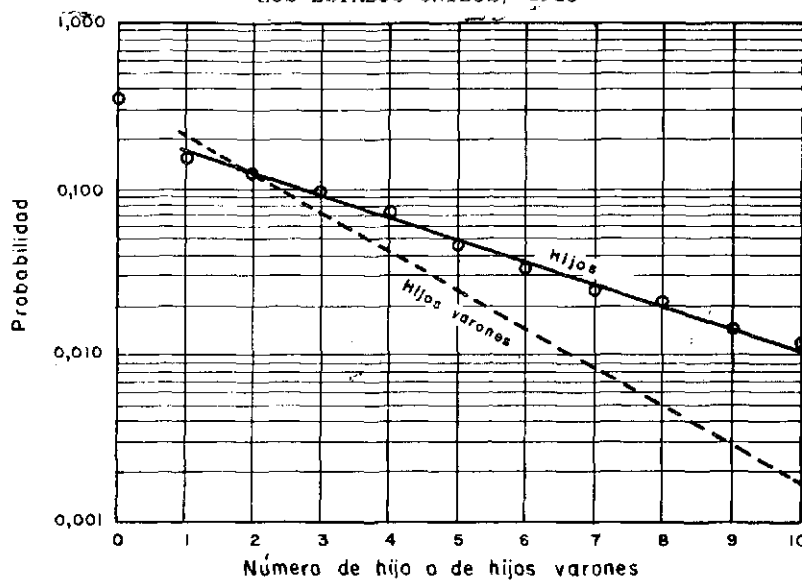
siempre que sea < 1, es decir, siempre que  $\Gamma > \pi_0$



Aplicación. Hemos aplicado esos resultados a datos de población 199 (de raza blanca) de los Estados Unidos en 1920, sobre la cual un estudio anterior<sup>1/</sup> contiene indicaciones fundamentales.

Gráfico 21

PROBABILIDAD DE QUE UN RECIEN NACIDO VARON  
TENGA EN EL CURSO DE SU VIDA UN DETERMINADO NUMERO DE  
HIJOS O DE VARONES. INFORMACION ESTADISTICA DE  
LOS ESTADOS UNIDOS, 1920



En el cuadro 19 se resumen los resultados e indicaciones obtenidos de acuerdo con la aplicación del esquema del cuadro 18. Las cifras del primero se corresponden línea a línea y columna a columna con

<sup>1/</sup> A.J. Lotka: "The Extinction of Families", *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1931, Tomo XXI, págs. 377-453. Ese estudio está concebido dentro del mismo orden de ideas, sin embargo, aquí se han llevado un poco más lejos. Los nuevos resultados se apartan un poco de los del documento primitivo: 1) En el documento el cálculo se basa directamente en la distribución de las probabilidades de tener  $n$  hijos sin atribuirle un comportamiento (logarítmico) rectilíneo; dicha distribución se aplicó únicamente a las probabilidades de tener  $\nu$  hijos varones; 2) el documento no contiene el examen de la relación que existe entre ambas distribuciones. Los resultados de dicho examen se presentan aquí por primera vez; 3) en el documento se hace  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  mientras que en el presente texto se emplearon valores más exactos, esto es  $\alpha = 0,515$ ;  $\beta = 0,485$ .

200 las magnitudes expresadas simbólicamente en el último. La representación de los mismos resultados se encuentra en el gráfico 21, donde los puntos marcados con pequeños círculos dan, sobre una escala logarítmica, la probabilidad de que un varón recién nacido tenga a lo largo de su vida 1, 2, 3, ...  $n$  hijos. La recta de trazado continuo que pasa por esos puntos se calculó usando el método de mínimos cuadrados, pero deja de lado los puntos correspondientes a los hijos de orden 13 y más, que se apartan sensiblemente de la línea recta (como las familias tan numerosas son bastante raras, el error que se introduce no es grave). Por último, la recta punteada representa las probabilidades, de acuerdo con las fórmulas del cuadro 18, de que un varón recién nacido tenga 1, 2, 3, ...  $\nu$  hijos varones en el curso de su vida. Los puntos correspondientes a 0 hijo y 0 varón se han calculado por separado para corroborar, en la suma de todas las probabilidades, la evidente condición de igualdad a 1.

El gráfico 21 muestra claramente que las probabilidades de tener 0 ó 1 varón son mayores que las de tener 0 ó 1 hijo; y que al contrario las probabilidades de tener 3 o más varones son más pequeñas que las de tener igual número de hijos. La probabilidad de tener 2 varones es casi igual a la de tener 2 hijos. Hay una legítima curiosidad por conocer la razón. La probabilidad de tener 2 varones es

$$(336) \quad \pi_2 = \frac{\pi_1 \alpha \gamma}{(1 - \beta \gamma)} = \frac{\alpha^2 \gamma p_1}{(1 - \beta \gamma)^3}$$

Ahora bien,  $\alpha$  y  $\beta$  valen más o menos  $\frac{1}{2}$ , y  $\gamma$ , de acuerdo con los datos usados en nuestro ejemplo, vale 0,736, digamos  $\frac{3}{4}$ . La relación que buscamos es aproximadamente

$$(337) \quad \frac{\pi_2}{p_2} = \frac{\alpha^2 \gamma p_1}{(1 - \beta \gamma)^3 \gamma p_1} = \frac{\alpha^2}{(1 - \beta \gamma)^3} = \frac{1/4}{(5/8)^3}$$

$$(338) \quad = \frac{512}{500} = 1,024$$

Su valor más exacto es

$$(339) \quad \frac{(0,515)^2}{(1 - 0,485 \times 0,736)^3} = \frac{0,2652}{0,2660} = 0,9971$$

En cifras redondas, esa relación es entonces 1, lo que explica que la probabilidad de tener 2 varones sea prácticamente igual a la de tener 2 hijos, según las condiciones de nuestro ejemplo basado en información referente a la población estadounidense.

*Número medio de hijos varones: Ejemplo numérico.* Usando la fórmula (327) el número medio de varones resulta

$$(340) \quad m = 1,260;$$

lo que es igual a la relación entre el total de nacimientos masculinos de dos generaciones sucesivas. Recordemos que, con base en la misma información estadística, la relación para nacimientos del sexo femenino era  $R_0 = 1,166$ . En parte, la diferencia se debe a que el intervalo medio de padre a hijo es más amplio que el de madre a hija; sus valores son 32,76 y 28,33 años, respectivamente. Podemos calcular un valor  $R'_0$  para el sexo masculino correspondiente  $R_0$  de las mujeres, mediante la relación

$$(341) \quad \frac{\log_e R'_0}{T'} = \rho$$

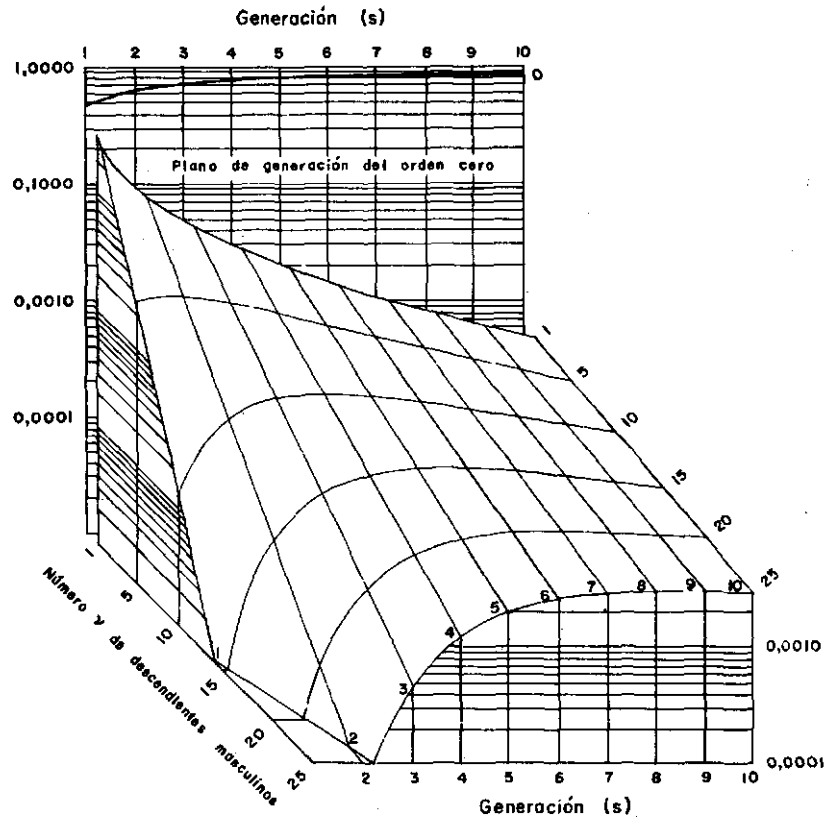
Para  $\rho$  hemos encontrado un valor de 0,0054. Sucede entonces que

$$(342) \quad \begin{aligned} \log_e R'_0 &= 0,0054 \times 32,76 = 0,17 \\ R'_0 &= 1,194 \end{aligned}$$

guarismo que de todos modos es notoriamente inferior a 1,260.

En realidad, cabía esperar una cierta desviación entre esas cifras. No sólo el número medio  $m$  fue calculado por un procedimiento indirecto, el cual comprende entre otros un ajuste por mínimos cuadrados, sino que además sumamos las series hasta infinito, mientras que seguramente no existen familias con más de 30 ó 40 hijos. Si detenemos el cálculo en las familias de 20 hijos, de los cuales 10 son varones, el valor de  $m$  se reduce a 1,232. Si nos quedamos con familias de hasta 15 hijos que incluyen 10 varones, el valor de  $m$  resulta 1,198. En todos los cálculos anteriores se ha supuesto que la frecuencia de  $n$  hijos por familia sigue exactamente una progresión geométrica, aun cuando sabemos que por encima del 12.º hijo las frecuencias no alcanzan las cifras dadas por di-

LAS ORDENADAS MUESTRAN SOBRE UNA ESCALA LOGARITMICA  
 LAS PROBABILIDADES  $\pi_{s,\nu}$  DE QUE UN RECIEN NACIDO TENGA  
 $\nu$  DESCENDIENTES MASCULINOS EN LA  $s$ -ESIMA GENERACION



cha progresión.

Por último, aunque a largo plazo la población femenina y la masculina deben tener tasas iguales de crecimiento (si ello no fuera así, al final de cuentas, una sobrepasaría ilimitadamente a la otra) puede ocurrir muy bien, y en general sucederá así, que durante un período limitado, se produzca cierto desajuste entre

ambas tasas de crecimiento. La correspondencia aproximada que se observa entre  $m = 1,260$  calculada para los hombres,  $R'_o = 1,166$  para el sexo femenino y  $R'_o = 1,194$  para el sexo masculino es, tan estrecha como cabía esperar de acuerdo con las circunstancias en que fueron calculadas.

Probabilidad de que la  $s$ -ésima generación comprenda  $\nu$  hijos varones. De acuerdo con los principios ya expuestos tal probabilidad puede calcularse desarrollando la  $s$ -ésima iteración de  $f(x)$  y eligiendo el coeficiente de  $x^\nu$  que resulte de la progresión. Las iteraciones sucesivas pueden calcularse progresivamente, pero gracias a una fórmula de Steffensen<sup>1/</sup> es posible obtener el coeficiente deseado por un camino directo. Esta fórmula, ligeramente modificada, tiene la forma

$$(343) \quad \pi_{s,\nu} = m^s \left( \frac{1-\xi}{m^s-\xi} \right)^2 \left( \frac{m-1}{m-\xi} \right)^{\nu-1}$$

Se relacionan en ella, la probabilidad  $\pi_{s,\nu}$  con la probabilidad  $\xi$  de extinción de la línea y con el número medio  $m$  de hijos varones en la primera generación.

Examinando el gráfico 22 se percibe bien la naturaleza de esa relación, la cual se ha representado en forma tridimensional.<sup>2/</sup>

Vale también la pena comentar brevemente un resultado citado por Steffensen. En el caso especial de que la serie completa de probabilidades  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_\infty$ <sup>3/</sup> sea una progresión geométrica, existe una relación muy simple entre la probabilidad de extinción  $\xi$  y el número medio de hijos varones  $m$  en la primera generación.<sup>4/</sup>

$$(344) \quad \xi = \frac{1}{m}$$

<sup>1/</sup> Loc. cit. pág. 342. La modificación citada aquí se aplica cuando las probabilidades de tener un determinado número (excepto cero) de varones forman una progresión geométrica.

<sup>2/</sup> Este gráfico se tomó del artículo del autor *Extinction of Families*, ya citado, en el cual los cálculos se hicieron sobre un ajuste de la distribución de la descendencia en la primera generación de acuerdo con el número de hijos varones, siguiendo para ello el método de mínimos cuadrados; en cambio aquí dicho ajuste se aplica al número de hijos. La diferencia en los resultados no es considerable y carece de importancia desde un punto de vista topológico.

<sup>3/</sup> Esto es, sin excluir  $\pi_0$ .

<sup>4/</sup> J.F. Steffensen: loc. cit., pág. 343.



## CONCLUSION

Debido a los límites impuestos a los fascículos de esta serie<sup>1/</sup> el autor se circunscribe a presentar un resumen de los progresos recientes en el análisis demográfico. Con el fin de evitar la repetición de lo que está suficientemente bien expuesto en otra parte se han dejado de lado los trabajos clásicos, que además se citan en todas las obras generales sobre demografía cuantitativa. Para completar el esquema del presente fascículo sólo queda por indicar un dispositivo al cual el autor hizo alusión en las primeras páginas. Habíamos destacado entonces que las representaciones gráficas, pese a prestar buenos servicios, eran insuficientes para expresar las relaciones complicadas del análisis demográfico, no sólo a causa del gran número de variables que entran en juego sino también, y en mayor medida, como consecuencia de la forma de esas relaciones. Para representar satisfactoriamente las relaciones aleatorias no necesitamos gráficos inmóviles trazados sobre un papel; debemos, más bien, construir modelos móviles los que con su funcionamiento originen un conjunto de características cuya distribución de frecuencias sea semejante a la correspondiente distribución de esas características en la población real. Lo ideal sería contar con un conjunto de urnas que dieran, mediante sorteos hechos de acuerdo con reglas fijas, una muestra representativa de las caracterís-

<sup>1/</sup> *N. de T.* Se refiere aquí a la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles" de la editorial Hermann et Cie. de París donde originalmente se publicó esta obra.

206 ticas de la población.<sup>1/</sup> Este ideal es irrealizable en todos sus detalles, pero podemos acercarnos a él, lo que depende por un lado de nuestros recursos estadísticos y por el otro del esfuerzo que estemos dispuestos a poner en la tarea.

A título de ejemplo, imaginemos una colección de urnas suficientemente completa como para representar con cierta aproximación las propiedades y relaciones fundamentales de la población, aunque dejando de lado naturalmente algunos detalles sobre los cuales en la actualidad carecemos de datos.

Advirtamos en primer lugar que las urnas propiamente tales resultarían muy incómodas al congestionar desagradablemente los estantes de nuestra oficina. Las reemplazaremos entonces por un equivalente más refinado.

Tendremos primeramente un disco dividido con radios en sectores proporcionales a las cifras de la columna  $d_x$  de una tabla de vida para hombres.

Supongamos que estamos en presencia de un determinado número de recién nacidos (varones). Hacemos girar el disco y, deteniéndolo a través de un mecanismo adecuado que funcione de una manera imparcial, anotamos la edad correspondiente al sector que coincida con una señal fija. Sea esa edad, por ejemplo, 52 años. Entonces decimos que uno de los niños vivió hasta la edad 52. Podemos repetir esta operación indefinidamente y construir una cohorte completa de individuos cuyas defunciones se distribuirán de acuerdo con la tabla de vida usada en la construcción del disco. En realidad, esta cohorte puede tomarse directamente de la tabla; pero continuemos. Elijamos uno de los individuos, por ejemplo, el que había muerto a los 52 años. Tomamos ahora un segundo disco que hacemos girar y detenemos al azar como al primero. Esta vez la división en sectores se ha hecho de tal modo que al detenerse nos indique la

<sup>1/</sup> Citamos con este propósito a Emil Borel: "El problema general de la estadística es el siguiente: establecer un sistema de sorteo usando urnas con composición fija, de tal modo que el resultado de una serie de tiradas interpretadas con la ayuda de coeficientes fijos, convenientemente elegidos, conduzcan con gran verosimilitud a la construcción de un cuadro idéntico al de las observaciones". (*Le Hasard*, 1928, pág. 154).



edad al casarse de la persona, digamos 25 años. (Si por casualidad el disco se detiene sobre la edad 54 podemos decir que murió sin casarse). Un tercer disco nos dirá en forma análoga la edad de la esposa al momento del matrimonio, digamos 22 años. Tomemos un disco semejante al primero, pero construido ahora en base a una tabla de vida para el sexo femenino. Este disco puesto en rotación y detenido al azar nos dirá a qué edad fallecerá la mujer. Si accidentalmente el disco se detiene en una edad inferior a los 22 años, ignoramos la prueba y la repetimos hasta conseguir una edad superior a 22. Supongamos que la edad encontrada es 40. Pasamos entonces a un quinto disco. Un año después del matrimonio la mujer tiene 23 años, este disco nos dice en la primera vuelta si nace o no un hijo. Una segunda vuelta nos da la misma información con referencia al segundo año de matrimonio, o sea cuando la mujer tiene 24 años, y así sucesivamente hasta los 40 años, edad a la que fallece. El sexo del hijo se determina cada vez usando un disco dividido en dos sectores proporcionales a 0,515 y 0,485.

De esta forma puede construirse una población con características que se acercarán cada vez con mayor exactitud a la de una población real, en la medida que tengamos un número suficiente de discos y que concuerden fielmente con las características demográficas de esa población. La serie de discos tomada como ejemplo en el párrafo precedente representa el mínimo indispensable para obtener un modelo aproximado a la realidad de una población humana. El autor construyó dicha serie con discos de aproximadamente 30 centímetros de diámetro. Desafortunadamente no es posible reproducir ese modelo de la población de los Estados Unidos en el formato de este libro.

Y ahora, para concluir esta exposición de los resultados recientes del análisis demográfico, recordemos que este análisis, aplicado a los fenómenos de la población de una sola especie, no es más que un capítulo especial en la teoría general de las asociaciones biológicas la cual constituye nuestro punto de partida, y al que habrá que volver para completar el estudio que fundamentalmente nos interesa.



## APENDICE

*Cambio de variable en un desarrollo con derivadas sucesivas de una función dada (véase la página 103). Sea*

$$(345) \quad \Phi(t) = c_0\varphi(t) + c_1\varphi'(t) + \frac{1}{2!}c_2\varphi''(t) + \dots$$

Buscamos un desarrollo

$$(346) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= c'_0\varphi(t) + c'_1\varphi'(t) + \frac{1}{2!}c'_2\varphi''(t) + \dots \\ &= c'_0\varphi(t + \tau) + c'_1\varphi'(t + \tau) + \frac{1}{2!}c'_2\varphi''(t + \tau) + \dots \\ &= c'_0 \left\{ \varphi(t) + \tau\varphi'(t) + \frac{1}{2!}\tau^2\varphi''(t) + \dots \right\} \\ &\quad + c'_1 \left\{ \varphi'(t) + \tau\varphi''(t) + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2!}c'_2 \left\{ \varphi''(t) + \dots \right\} \\ &\quad + \dots \\ (347) \quad &= c'_0\varphi(t) + (c'_0\tau + c'_1)\varphi'(t) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(c'_0\tau^2 + 2c'_1\tau + c'_2)\varphi''(t) + \dots \end{aligned}$$

Comparando los términos de la serie (345) con los de la (347) se reconoce sin dificultad la ley de formación de los coeficientes  $c'$  en el desarrollo de  $\Phi(t)$  en términos de  $\varphi(t)$  y sus derivadas; en efecto,

$$\begin{aligned} c_0 &= c'_0 \\ c_1 &= c'_0\tau + c'_1 \\ c_2 &= c'_0\tau^2 + 2c'_1\tau + c'_2 \\ c_3 &= c'_0\tau^3 + 3c'_1\tau^2 + 3c'_2\tau + c'_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$



## BIBLIOGRAFIA

*Nota:* No se trata de una bibliografía completa o detallada, es sólo una lista de orientación; los seis subtítulos de la lista corresponden a las divisiones fundamentales de nuestra materia. Por otra parte, muchas de esas publicaciones incluyen notas bibliográficas, complementos útiles de nuestra selección forzosamente restringida. No es necesario decir que no siempre es posible delimitar claramente las fronteras entre las subdivisiones de una clasificación.

### 1. ANALISIS DEMOGRAFICO GENERAL

- Bonz, F. y Hilburg, F. Die voraussichtliche Bevölkerungsentwicklung in Deutschland, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1931, vol. 11, p. 237.
- Bortkiewicz, L.v. Mittlere Lebensdauer. *Staatswissenschaftliche Studien*, 1893, vol. 4.
- Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der stationären und in der progressiven Bevölkerung, *Bulletin de l'Institut international de statistique*, 1911, vol. 19, p. 63.
- Connor, L.R.: Fertility of Marriage and Population Growth, *The Journal of the Royal Statistical Society*, 1926, vol. 89, p. 553.
- Friedli, W.: Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz, *Bundesamt für Sozialversicherung*, Bern, 1928, p. 32.
- Gumbel, E.J.: La durée extreme de la vie humaine. *Actualités scientifiques et industrielles*, N° 250, Paris, 1937.
- Haldane, J.B.S.: A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 23, 1927, p. 607.
- A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection, Part V: Selection and Mutation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 23, 1927, p. 838.
- *The Causes of Evolution*, Londres, 1932.
- Husson, Gaoul: Sur la mesure de l'accroissement des Populations. XV<sup>e</sup> Congrès International d'Anthropologie et d'Archéologie Pré-

- historique, V<sup>e</sup> session de l'Institut International d'Anthropologie, Paris, 1931, p. 201.
- Natalité et accroissement de la population en France et a l'Etranger avant et apres la guerre, *Bulletin de la Statistique générale de la France*, 1931, vol. 20, p. 245.
- Insolera Filadelfo: Su particolari equazioni di Volterra e loro applicazione finanziaria e demografica, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, Milano, 1927, p. 247.
- Kreis, H.: Stabilität einer sich jährlich erneuernden Gesamtheit, *Bulletin de l'Association des Actuairees Suisses*, 1936, vol. 32, p. 17.
- Lotka, Alfred J.: Relation between Birth Rates and Death Rates, *Science*, 1907, vol. 26, p. 21.
- Studies on the Mode of Growth of Material Aggregates, *American Journal of Science*, 1907, vol. 24, pp. 199, 375.
- A Problem in Age Distribution, *Philosophical Magazine*, 1911, vol. 21, p. 435.
- A Natural Population Norm, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1913, vol. 3, pp. 241, 289.
- The Relation Between Birth Rate and Death Rate in a Normal Population, and the Rational Basis of an Empirical Formula for the Mean Length of Life, given by William Farr, *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, 1918, vol. 16, p. 121.
- A Simple Graphic Construction for Farr's Relation Between Birth Rate, Death Rate and Mean Length of Life, *Journal of the American Statistical Association*, 1921, vol. 17, p. 998.
- The Stability of the Normal Age Distribution, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1922, vol. 8, p. 339.
- On the True Rate of Natural Increase of a Population, *Journal of the American Statistical Association*, 1925, vol. 20, p. 305.
- The Progeny of a Population Element, *American Journal of Hygiene*, 1928, vol. 8, p. 875.
- The Actuarial Treatment of Official Birth Records, *The Eugenics Review*, 1927, vol. 19, p. 257.
- The Spread of Generations, *Human Biology*, 1929, vol. 1, p. 305.
- Biometric Functions in a Population Growing in Accordance with a Prescribed Law, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1929, vol. 15, p. 793.
- The Structure of a Growing Population, *Human Biology*, 1931, vol. 3, p. 459.
- Zur Dynamik der Bevölkerungsentwicklung, *Allgemeines Statistisches Archiv*, 1932, vol. 22, p. 587; 1933, vol. 23, p. 98.
- Industrial Replacement, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1933, p. 51.
- Applications de l'analyse au phénomène démographique, *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1933, vol. 74, p. 336.
- A Historical Error Corrected, *Human Biology*, 1937, vol. 9, p. 104.
- Population Analysis: A theorem regarding the stable age distribution, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1937, vol. 27, p. 299.

- Quelques résultats récents de l'analyse démographique. Congrès International de la Population, Paris, 1937. Voir aussi *Journal of the American Statistical Association*, 1938, vol. 33, p. 164.
- The application of mathematical analysis to self-renewing Aggregates. *Annals of Mathematical Statistics*, 1939, p. 1.
- An integral equation in population analysis, *Annals of Mathematical Statistics*, junio 1939.
- Moser, Chr.: Über Gleichungen für eine sich erneuernde Gesellschaft mit Anwendung auf Sozialversicherungskassen, *Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft*, Schaffhausen, 1921.
- Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit, *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*, 1926, vol. 21, p. 1.
- Meidell, Birger: Mathematical Statistics: On damping effects and approach to equilibrium in certain general phenoma, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1928, vol. 18, p. 437.
- Norton, H.T.J.: Natural Selection and Mendelian Variation. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1926, vol. 28, p. 1.
- Risser, R.N.: Sur une application de l'équation de Volterra au problème de la répartition par age dans les milieux a effectif constant. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, novembre, 1920, p. 845.
- Schoenbaum, Emil: Anwendung der Volterraschen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1924 y 1925, pp. 241 y 1.
- Schulthess, Harald: Volterrasche Integralgleichung in der Versicherungsmathematik, *Inaugural-Dissertation*, Bern, 1935.
- Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes, *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*, 1937, vol. 33, p. 69.
- Wyss, Hans: Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse, *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*, 1929, p. 39.
- Zwinggi, Ernst: Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums, *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*, 1929, vol. 24, p. 95.
- Die Witwenversicherung als Teil der allgemeinen Alters- und Hinterlassenen Versicherung, *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*, 1931, vol. 26, p. 79.
- Zum Problem der Erneuerung. Blätter für Vers-Mathematik und verwandte Gebiete, *Beilage zur Zeitschrift für die gesamte Vers-Wissenschaft*, 1931, vol. 31, p. 18.
- Zur Methodik der Bevölkerungsvorausberechnung, *Zeitschrift für Schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, 1933, vol. 69, p. 255.

## 2. CRECIMIENTO DE LA POBLACION

- Goldziher, K.: Beiträge zur Theorie der Vermehrungsformeln, *Aktuárské Vedy*, 1930, vol. 2, p. 1.
- Methodische Untersuchungen zu den Bevölkerungsstatistischen

- 214 Grundlagen der schweizerischen Alters- und Hinterlassenenversicherung. *Zeitschr. f. schweiz. Stat. und Volkswirtschaft*, 1930, vol. 66, p. 501.
- Krummeich, E.: Contribution à l'Etude du Mouvement de la Population, *Journ. de la Société de Stat. de Paris*, 1927, vol. 68, pp. 119, 157, 165, 191, 230.
- Kuczynski, Robert R.: The Balance of Births and Deaths, vol. 1, *Western and Northern Europe*, Nueva York, 1928; vol. 2, *Eastern and Southern Europe*, Washington, 1931.
- Rückgang der Fruchtbarkeit. Entwicklung der Fruchtbarkeit, *Bericht über den XIV Internationalen Kongress für Hygiene und Demographie*, vol. 3, p. 1472.
- *The Measurement of Population Growth*. 1935.
- *Population Movements*, Oxford, 1936.
- Landry, Adolphe: Taux rectifiés de mortalité et de natalité. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1931.
- Rastoin, E.: Analyse et Prévision Démographiques, *Journ. de la Société de Stat. de Paris*, 1932, vol. 73, p. 367.
- Sauvy, Alfred: Sur les Taux de Stabilisation d'une Population. *Journ. de la Société de Stat. de Paris*, 1934, vol. 75, p. 51.
- Vianelli, Silvio: Evoluzione economica e demografica negli schemi delle curve logistiche. *Rivista Italiana di Scienze Economiche*, Bologna, mayo-junio, 1935, vol. 7.
- A General Dynamic Demographic Scheme and its Application to Italy and the United States, *Econometrica*, 1936, vol. 4, p. 269.

### 3. PROYECCIONES DEMOGRAFICAS

- Bowley, A.L.: Estimates of the Working Population of Certain Countries in 1931 and 1934, League of Nations. *Economical and Financial Section*, Ginebra, 1926.
- Burgdörfer, Friedrich: Die Dynamik der künftigen Bevölkerungsentwicklung im deutschen Reich. *Allgemeines Statistisches Archiv.*, 1932, vol. 22, p. 161.
- Cannan, E.: The probability of a cessation of the growth of population in England and Wales during the next century. *Economic Journal*, 1895, vol. 5, p. 505.
- The changed outlook in regard to population, 1831-1931. *Economic Journal*, 1931, vol. 41, p. 519.
- Charles, Enid: The Effect of Present Trends in Fertility and Mortality upon the Future Population of England and Wales and upon its Age Composition, *Royal Economic Society*, 1935, Memorandum 55.
- Cramér, Harald: Über die Vorausberechnung der Bevölkerungsentwicklung in Schweden. *Skandinavisk Actuarietidskrift*, 1935, p. 35.
- Mortality Variations in Sweden, *ibid.*, p. 161.
- Depoid, Pierre: Les récentes tendances démographiques dans le monde. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, enero, 1937, vol. 78, p. 4.
- Dublin, Louis I.: The Outlook for the American Birth Rate, Problems of Population, The International Union for the Scientific Investigation of Population Problems, Londres, 1932, p. 115.



- Gunther, Ernst: Wert oder Unwert der Vorausberechnung der künftigen Bevölkerung. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 1930, vol. 25, p. 404.
- Lotka, Alfred J.: The Progressive Adjustment of Age Distribution to Fecundity. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1926, vol. 16, p. 505.
- Mises, Richard v.: Über die Vorausberechnung von Umfang und Altersschichtung der Bevölkerung Deutschlands, *Blätter für Vers.-Mathematik und verwandte Gebiete. Beilage zur Zeitschrift für die gesamte Vers.-Wissenschaft*, vol. 33, p. 359.

#### 4. FECUNDIDAD Y COMPOSICION DE LA FAMILIA

- Burks, Barbara S.: Statistical Method for Estimating the Distribution of Size of Completed Fraternities in a Population represented by a Random Sampling of Individuals. *Journal of the American Statistical Association*, 1933, vol. 28, p. 388.
- Fegiz, P. Luzatto: I Cognomi di San Gimignano. *Metron*, septiembre, 1925, vol. 5, p. 115.
- Geissler, Arthur: Beiträge zur Frage des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen, *Zeitschrift des K. Sächsischen Statistischen Bureaus*, 1889, vol. 35, p. 1.
- Gini, Corrado: Sur la mesure de la fécondité des mariages. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 1934, p. 40.
- Hersch, Liebmann: Der Rückgang der Geburtenziffer in Deutschland und seine mathematische Formulierung, *Allgemeines Statistisches Archiv*, 1932, vol. 22, p. 179.
- Lorimer, Frank: Adjustment for the Influence of Age Composition on Estimates by Burks' Method of the Distribution of Sizes of Completed Fraternities. *Journal of the American Statistical Association*, 1935, vol. 30, p. 688.
- Lotka, Alfred J.: The Measure of Net Fertility. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1925, vol 15, p. 469.
- The Size of American Families in the Eighteenth Century. *Journal of the American Statistical Association*, 1927, vol. 22, p. 154.
- The Geographic Distribution of Intrinsic Natural Increase in the United States, and an Examination of the Relation Between Several Measures of Net Reproductivity. *Journal of the American Statistical Association*, 1936, vol. 31, p. 273.
- The Extinction of Families. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1931, vol. 21, pp. 377, 453.
- Muller, J.H.: Human Fertility in Relation to Ages of Husband and Wife at Marriage and Duration of Marriage. *Annals of Eugenics*, 1931, vol. 3, p. 238.
- Savorgnan, Franco: La Statistica delle nascite secondo l'ordine di generazione. *Revue de l'Institut international de Statistique*, 1933, livraison 1, p. 23.
- Wicksell, S.D.: Sveriges framtida befolkning under olika förutsättningar. *Ekonomisk Tidskrift*, 1926, p. 91.

- 216 — Individens fruktsamhet och släktets förökning. *Ekonomisk Tidskrift*, 1930, p. 29.
- Nuptiality, Fertility and Reproductivity. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1931, p. 125.
- Bidrag till den formella befolkningsteorien. *Statsökonomisk Tidskrift*, Oslo, 1934.
- Fruktsamhet och förökning. *Hygienisk Revy*. Lund, 1936.
- Wilson, E.B.: Size of Completed Families, Supplement. *Journal of the American Statistical Association*, 1935, vol. 30, p. 577

#### 5. EL DESCENSO DE LA NATALIDAD

- Burgdorfer, Friedrich: *Sterben die weissen Volker?* München, 1934.
- Lotka, Alfred J.: Modern Trends in the Birth Rate. *The Annals of the American Academy of Political and Social Science*, noviembre 1936, p. 1.
- Müller, Johannes: *Der Geburtenrückgang*, Jena, 1924.
- Wolfe, A.B.: The Population Problem since the World War. *Journal of Political Economy*, 1928, vol. 26, pp. 529, 662, 1929, vol. 37, p. 87.
- Wolf, Julius: *Der Geburtenrückgang*, Jena, 1912.

#### 6. OBRAS DE CARACTER GENERAL

- Dublin, L.I. y Lotka, Alfred J.: *Length of Life*, Nueva York, 1936.
- Knibbs, G.H.: The Mathematical Theory of Population of its Character and Fluctuations, and of the Factors which Influence them, *Census of the Commonwealth of Australia*, 1917, Apéndice A, vol. I.
- Landry, Adolphe: *La Révolution Démographique*, París, 1934.
- Lorimer, Frank y Osborn, Frederick: *Dynamics of Population*, Nueva York, 1934.
- Lotka, Alfred J.: *Elements of Physical Biology*, Baltimore, 1925.
- Contact points of population study which related branches of science, *Proceedings of the American Philosophical Society*, 1939, p. 601.
- Paulinus, Gottfried: *Prolegomena zu einer Bevölkerungsprognose*, *Inaugural Dissertation*, Leipzig, 1934.
- Thompson, Warren S. y Whelpton, P.K.: *Population Trends in the United States*, Nueva York, 1933.
- Dublin, Louis I. (Editor): *The American People*, *Studies in Population*. *The Annals of the American Academy of Political and Social Science*, 1936.
- Notestein, F.W. y Taeuber, I.B. (Editores): *Population Literature*. Continuada desde 1937 bajo el título de *Population Index*, School of Public Affairs, Princeton University and Population Association of America.
- Véanse también las publicaciones de la Sociedad de las Naciones; y el informe del Congreso Internacional de Población, París, julio-agosto de 1937, especialmente los documentos de H. Bunle, P. Depoid, R. Husson, A. Landry, A.J. Lotka, S.D. Wicksell.

# I N D I C E

## PRIMERA PARTE

### PRINCIPIOS

I.	.....	9
	Ecuación de enlace .....	14
II.	.....	21
III.	.....	31
	Resumen .....	37
IV.	ESTOQUIOMETRICA BIOLOGICA .....	41
	Encadenamiento de especies .....	44
	Casos particulares .....	53

### CUADROS Y GRAFICOS

<i>Cuadro</i>		
	1. Dependencia mutua de las especies biológicas....	45
	2. El arenque y las especies que directa o indirectamente le sirven de alimento .....	46
<i>Gráfico</i>		
	1. Curva representativa del número de bolillas negras que hay en la urna A después de n extracciones, a partir de una época cero y hasta la centésima extracción .....	27
	2. Curva representativa del número de bolillas negras en la urna A después de n extracciones a partir de la quincuagésima extracción antes de la época cero, hasta la quincuagésima extracción después de dicha época .....	27
	3. Diagramas representativos de varios tipos de estados estacionarios en un sistema que comprende dos especies biológicas .....	51

ANALISIS DEMOGRAFICO CON ESPECIAL  
 APLICACION A LA ESPECIE HUMANA

INTRODUCCION .....	57
RELACIONES QUE COMPRENDEN LA MORTALIDAD Y LA NATALIDAD .....	63
<i>Población cerrada</i> , 64. Relación entre la población, los nacimientos anuales y la tabla de vida, 65. Distribución por edad, 67. La tasa de natalidad, 68. Defunciones anuales, 68. Tasa de mortalidad, 69. <i>Caso particular. Distribución constante por edad: Población malthusiana</i> , 69. Expresión directa de la tasa de mortalidad $d$ , 71. Índice vital, 71. Población estacionaria, 71. Recapitulación, 73. Aplicación estadística, 74. Edad media de la población, 74. Cambios en la distribución por edad, 77. Centro instantáneo de oscilación, 78. Relación entre la tasa de natalidad $b$ y la tasa de crecimiento $r$ , 81. Momentos $L$ de la curva de supervivencia: Valores numéricos, 81. Semi-invariantes de la curva de supervivencia: Valores numéricos, 84. Construcción gráfica de $\lambda_1$ , 88. Base racional de las reglas para encontrar el valor de $\lambda_1$ , 89. Semi-invariantes de orden superior, 93. <i>Relación entre la tasa de natalidad <math>b</math> y la tasa de mortalidad <math>d</math> en una población malthusiana</i> , 95. Valor mínimo de la tasa de mortalidad, 96. Fórmula empírica que relaciona las tasas de natalidad y mortalidad, 97. Base analítica de la fórmula de Farr, 98. Gráfico de la fórmula de Farr, 99. <i>Población con tasas variables</i> , 101. Caso particular, 102. Las defunciones anuales, 104. Tasa de natalidad, 105. Tasa de mortalidad, 105. Caso particular: Población logística, 105. Algunas propiedades de la función logística, 107. Nacimientos anuales en una población logística cerrada, 109. Defunciones anuales en una población logística cerrada, 111. Tasa de natalidad en una población logística cerrada, 113. Resumen, 115. Caso más general: Población logística bajo el régimen de una tabla de vida variable, 116. Comparación de los resultados teóricos con los datos empíricos, 118. La tasa de natalidad, 119. La distribución por edad, 120.	
RELACIONES QUE INCLUYEN LA FECUNDIDAD .....	123
La fecundidad y los nacimientos anuales, 123.	

Raíces de la ecuación fundamental (137), 125. Raíz real, 125. Raíces complejas, 125. Importante función de la raíz real  $\rho$ : Tasa intrínseca de crecimiento, 126. Población con distribución estable por edad, 127. Las raíces de la ecuación fundamental (137): Examen detallado, 128. *Cálculo de las raíces de (161): Raíz real*, 130. Valores aproximados: Primera aproximación, 130. Segunda aproximación, 130. Aproximaciones de orden superior, 131. Tasa intrínseca de natalidad, 131. Raíces complejas de la ecuación (137), 133. Caso particular: Los semi-invariantes posteriores a  $\mu_2$  se anulan, 135. Valor aproximado del período de la primera raíz compleja, 137.

LA DESCENDENCIA DE UN CONJUNTO DE POBLACION ..... 139

Propiedad analítica de las distribuciones de los nacimientos en las generaciones sucesivas, 140. Nacimientos globales en la época  $t$ , 141. Distribución de los nacimientos entre diferentes generaciones contemporáneas, 144. Ejemplo numérico, 146. Constante  $Q$  de la solución (135), 147. Las constantes  $Q$  en términos de los semi-invariantes  $\mu$  de la función  $\psi(a) = p(a)m(a)$ , 150. Un caso particular, 151.

INDICES Y MEDIDAS DEL CRECIMIENTO NATURAL ..... 153

Relación entre los nacimientos anuales de dos épocas separadas por el intervalo medio entre dos generaciones, 153. Ejemplos numéricos: Primer ejemplo, 156. Segundo ejemplo, 157. *Índice de reemplazo*, 159. Aplicación, 162. Variación del índice de reemplazo según la elección de los grupos de edades inferiores y superiores, 162. Variación del grupo de edad inferior, 162. Variación paralela de los grupos de edades inferior y superior, 163. Excedente de la tasa bruta sobre la tasa intrínseca en una población logística, 164. *Ventajas y desventajas de los diversos índices o medidas del crecimiento natural*, 166.

RELACIONES QUE COMPRENEN LA FECUNDIDAD SEGUN EL ORDEN DE LOS NACIMIENTOS ..... 169

Relaciones que conducen al fenómeno de la familia, 169. Proporción de casadas y tasa de nupcialidad, 169. Número de hijos por esposa, 170. Número de hijos por madre, 170. Tasa de esterilidad, 171. Relación entre el número medio de hijos por familia y la tasa de crecimiento, 171. Aplicación, 172. Composición de la familia "estacionaria", 173. Familia final media, 174. Familias completas, 174. Aplicación, 176.

220 RELACIONES QUE COMPRENDEN LA FUNCION DE SUPERVIVENCIA DE DOS INDIVIDUOS .....	177
<i>Las familias disueltas</i> , 177. Proporción de huérfanos a una determinada edad $\alpha$ . Huérfanos de madre, 177. Huérfanos de madre, 179. Huérfanos de padre, 179. Huérfanos desde su nacimiento, 179. Huérfanos absolutos, 181. Aplicaciones, 1. Comparación de las cifras teóricas con los datos observados, Inglaterra, 181. 2. Cálculo indirecto cuando se carece de datos precisos de observación: Estados Unidos, 184. Efecto de un mejoramiento en la mortalidad, 185. Composición de la familia según el número de hijos, 185. Aplicación, 186.	
EXTINCION DE UNA LINEA DE DESCENDENCIA .....	189
Teorema sobre el valor límite de una función iterada una infinidad de veces, 192. Número medio de hijos varones, 195. Probabilidad de extinción de una línea de descendencia, 198. Aplicación, 199. Número medio de hijos varones: Ejemplo numérico, 201. Probabilidad de que la $s$ -ésima generación comprenda $\nu$ hijos varones, 203.	
CONCLUSION .....	205
APENDICE .....	209
BIBLIOGRAFIA .....	211
1. Análisis demográfico general, 211. 2. Crecimiento de la población, 213. 3. Proyecciones demográficas, 214. 4. Fecundidad y composición de la familia, 215. 5. El descenso de la natalidad, 216. 6. Obras de carácter general, 216.	

#### CUADROS Y GRAFICOS

<i>Cuadro</i>	
1. Poblaciones de tipo maltusiano .....	75
2. Edad media de la población de los Estados Unidos	76
3. Población maltusiana .....	80
4. Vida media en diversos países para diversas épocas .....	82
5. Valores de las características principales de algunas tablas de vida .....	83
6. Cocientes de los momentos sucesivos de la función de supervivencia .....	85
7. Comparación de los valores de $\lambda_1$ (edad media de la población estacionaria) con los valores calculados por las fórmulas aproximadas (65) y (66).	87
8. ....	109
9. Tasas de natalidad en una población logística cerrada, tomando como base la curva de creci-	

miento de los Estados Unidos y la tabla de vida para 1919-1920 (raza blanca, sexo femenino) .....	114
10. Características de una población logística cerrada, calculadas basándose en la curva de crecimiento de los Estados Unidos y la tabla de vida para 1919-1920 (raza blanca, sexo femenino)	117
11. Comparación de las tasas calculadas con las efectivamente registradas, Estados Unidos .....	121
12. Relación entre los nacimientos anuales $B(t)$ en la época $t$ y los de una generación media $T$ años antes en una población logística, con las características de la población de los Estados Unidos, raza blanca, sexo femenino, 1920 .....	158
13. Variación del índice de reemplazo $J$ correspondiente a una variación en la edad límite superior del grupo inferior de edades en una población con distribución estable por edad. Cálculos basados en la tabla de vida de los Estados Unidos, sexo femenino, raza blanca, 1929-1931 ..	163
14. Variación del índice de reemplazo calculado para sucesivos grupos de edades. Según datos estadísticos de los Estados Unidos, sexo femenino, raza blanca, 1929-1931 .....	164
15. Inglaterra y Gales: Número de huérfanos. Comparación de las cifras calculadas con las registradas, 1921 .....	182
16. Estimación del número de huérfanos. Estados Unidos, raza blanca, 1930 .....	185
17. Reducción del número de huérfanos (menores de 16 años) a causa del descenso de la mortalidad desde 1901 a 1930. Estados Unidos, raza blanca	186
18. Probabilidad de que una persona del sexo masculino (considerada al momento de su nacimiento) tenga $n$ hijos de los cuales $\nu$ son varones; suponiendo que $\alpha$ es la proporción de nacimientos masculinos y $\beta = 1 - \alpha$ la de los femeninos .....	196
19. Probabilidad de que un varón recién nacido tenga en el curso de su vida $n$ hijos de los cuales $\nu$ son varones. Cálculos basados en estadísticas de los Estados Unidos, raza blanca, 1920 .....	197
<i>Gráfico</i>	
1. Distribución por edad .....	78
2. Construcción gráfica. Para un valor aproximado de $\lambda_1$ según la tabla de vida de los Estados Unidos, sexo femenino, raza blanca, 1929-1931	89
3. Curva de supervivencia de acuerdo con la hipótesis de De Moivre .....	91
4. Curva de supervivencia efectiva, Estados Unidos, 1919-1920 .....	93
5. Población maltusiana, Tasa de mortalidad como	

222	función de la tasa de natalidad con indicación del mínimo .....	95
6.	Representación gráfica de la relación entre las tasas de natalidad, de mortalidad y la vida media .....	100
7.	Curva logística que representa el total $N$ y la tasa de crecimiento $r$ de una población. Basado en estadísticas de los Estados Unidos .....	107
8.	Nacimientos anuales en una población logística. Curva calculada de acuerdo con las características de la población de los Estados Unidos y la tabla de vida de 1919-1920 .....	111
9.	Tasa de natalidad en una población logística. Curva calculada de acuerdo con las características de la población de los Estados Unidos y la tabla de vida de 1919-1920 .....	112
10.	Curvas de nacimientos, población y crecimiento anual en una población logística, con indicación de las posiciones correspondientes a sus centros .....	115
11.	Curvas de las tasas de natalidad, mortalidad y crecimiento, en una población logística bajo el régimen de una tabla de mortalidad constante, con indicación de las posiciones correspondientes a sus centros .....	116
12.	Curvas de natalidad y mortalidad en una población logística, bajo un régimen de mejoramiento progresivo en la tabla de vida .....	119
13.	Comparación de la distribución por edad, calculada según la curva logística con la distribución real de la población nativa, femenina, y de raza blanca de los Estados Unidos .....	122
14.	Topografía de las curvas hiperbólicas que en sus intersecciones dan las raíces de la ecuación fundamental (137) para el caso en que se anulan los semi-invariantes de orden superior a 2 .....	136
15.	Distribución de los nacimientos, a través del tiempo, en una sucesión de generaciones. La curva trazada sobre la parte posterior es la resultante que indica los nacimientos totales de todas las generaciones contemporáneas .....	142
16.	Relación entre el índice de reemplazo $J$ y la reproductividad neta $R_0$ .....	161
17.	Comparación de la tasa bruta de crecimiento natural ( $b-d = r$ ) con la tasa intrínseca $\rho$ en una población logística; basada en las características de la población de los Estados Unidos .....	165
18.	Número de huérfanos, comparación de las cifras estimadas con las observadas, Inglaterra y Gales, 1921 .....	183
19.	Probabilidad de que un recién nacido tenga en el curso de su vida $n$ hijos. Datos provenientes	



de estadísticas de los Estados Unidos para 1920 y 1930 .....	187	223
20. Iteración gráfica de la función $y = f_1(x)$ .....	193	
21. Probabilidad de que un recién nacido varón tenga en el curso de su vida un <i>determinado</i> número de hijos o de varones. Información estadística de los Estados Unidos, 1920 .....	199	
22. Las ordenadas muestran sobre una escala logarítmica las probabilidades $\pi_{s,\nu}$ de que un recién nacido tenga $\nu$ descendientes masculinos en la $s$ -ésima generación .....	202	



**Impresos Offset Ltda. - Mallinkrodt 102 - Teléfono 775618 - Santiago-Chile.**

