

Curso Básico de Santiago
 Seminario de Técnicas de
 Planificación
 Juan Ayza
 Pedro Paz
 Santiago, 3 de junio de 1963

TECNICAS DE PLANIFICACION

Matrices: Definición: Una matriz de orden $m \times n$ es un conjunto ordenado de números (elementos) dispuestos en m filas y en n columnas, siendo las filas las líneas horizontales y las columnas las líneas verticales de la matriz. Los números que forman la matriz pueden ser positivos, negativos, fraccionarios, etc. También pueden ser símbolos algebraicos o incluso matrices.

Nomenclatura: Una expresión general para matrices es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
 \vdots & & & & \\
 \vdots & & & & \\
 \vdots & & & & \\
 \vdots & & & & \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}
 \end{array}$$

donde el primer subíndice indica la fila a que pertenece el elemento y el segundo subíndice, la columna respectiva. Así, a_{12} es el elemento correspondiente a la primera fila y a la segunda columna, y a_{23} representa el elemento ubicado en la segunda fila y tercera columna. La anterior matriz general puede expresarse por $[a_{ij}]$ o bien A .

1/ Sobre nomenclatura seguimos en estas notas la de L.C. Aitken, "Determinantes y Matrices". Ed. Dossat, Madrid.

Ejemplos: Indicar el orden de las matrices siguientes:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 1/4 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 7 \\ 1/4 & 2,5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a) es una matriz que posee dos filas (líneas horizontales) y 3 columnas (líneas verticales); luego, se tiene una matriz de 2 por 3.

Clasificación de algunas formas especiales de matrices:

1) Matriz cuadrada: Se tiene una matriz cuadrada si el número de filas es igual al número de columnas; o sea $m = n$.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Matriz rectangular: Si el número de filas no es igual al número de columnas; o sea $m \neq n$.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 5 \qquad 3 \times 1 \qquad 1 \times 3$

3) Escalar: Se denomina escalar a un número cualquiera, sin importar el orden o posición que tenga respecto a otros números.

4) Vector fila: es una matriz rectangular, que sólo posee una fila.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 7 & 0,2 & 1/8 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$1 \times 3 \qquad 1 \times 4 \qquad 1 \times 2$

5) Vector columna: es una matriz rectangular que tiene sólo una columna.

Ejemplos:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 7 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ 3 \times 1 & 2 \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0,2 \\ \hline 1/8 \\ \hline 3/8 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} \\ & & 5 \times 1 & & 4 \times 1 \end{array}$$

A veces para ahorrar espacio un vector columna se pone en forma de fila, pero para indicar que en realidad representa una columna se le encierra entre corchetes especiales, así

$$\{ 1 \ 3 \ 2 \} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

También podemos representar un vector columna por un símbolo, por ejemplo

$$x = \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \vdots \\ \hline x_n \\ \hline \end{array} = \{ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \}$$

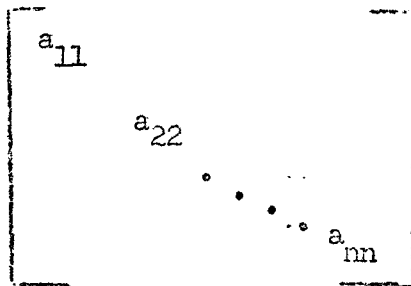
En los textos impresos este símbolo en minúsculas que suele representar vectores columna se imprime en negrita.

Los vectores fila también se denotan con una minúscula similar, pero para diferenciarlos de las columnas se les agrega una comilla. Por ejemplo

$$x^i = \{ \overline{x_1} \ \overline{x_2} \ \dots \ \overline{x_n} \}$$

En la misma nomenclatura, las matrices se representan con mayúsculas impresas en negrita.

- 6) Diagonal principal: La diagonal principal de una matriz cuadrada es la línea diagonal que divide la matriz desde el extremo superior izquierdo, al extremo inferior derecho y que está formada por los siguientes elementos:



Ejemplo:

0	2	3	4
7	3	2	0
1	4	5	6
8	3	9	1

4 x 4

la diagonal principal está formada por los elementos 0, 3, 5, 1.

- 7) Matriz diagonal: es la matriz cuadrada cuyos elementos son todos ceros, excepto los de la diagonal principal.

Ejemplos:

1	0	0	0
0	3	0	0
0	0	1/8	0
0	0	0	0,3

4 x 4

2	0
0	7

2 x 2

a	0	0
0	b	0
0	0	c

3 x 3

- 8) Usualmente cuando se escribe una matriz in-extenso, como en el caso de estas matrices diagonales, se omiten los ceros y el espacio que les corresponde se deja en blanco. Aquí hemos dejado los ceros solamente por razones didácticas.
- 9) Matriz unidad: es la matriz cuadrada donde todos sus elementos son ceros, menos los de la diagonal principal que son todos iguales a uno. Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Su símbolo es I ; o bien I_n .

- 10) Matriz nula: es aquella en que todos sus elementos son iguales a cero. Puede ser rectangular o cuadrada.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

- a) Trasposición: llamaremos a una matriz la traspuesta de otra si sus filas primera, segunda, etc., son respectivamente las columnas primera, segunda, etc., de la segunda matriz. En otras palabras, se intercambian filas por columnas y columnas por filas, en el mismo orden. Siendo A la matriz original, su traspuesta se simboliza con A' .

Si A es una matriz de 2×4 ; A' será una matriz de 4×2 .

Ejemplos:

<u>Matriz A</u>	<u>Matriz traspuesta A'</u>
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$
2×3	3×2

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2 x 3

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3 x 2

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$$

1 x 3

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{bmatrix}$$

3 x 1

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$$

3 x 1

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \end{bmatrix}$$

1 x 3

b) Igualdad entre matrices.

Dos matrices son iguales cuando son del mismo orden y todos los elementos correspondientes son iguales entre sí.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2,3) ^{1/} (2,3)

Es decir si $A = B$, ambas deben ser del mismo orden y además todo $a_{ij} = b_{ij}$, es decir los elementos que ocupan la misma posición (correspondientes) deben ser iguales entre si.

^{1/} La notación que usamos en este caso, para el orden, es equivalente a la anterior.

c) Suma y resta

Para sumar dos matrices, estas deben ser del mismo orden. La suma se efectúa sumando uno a uno los elementos correspondientes.

$$\text{Así si } A + B = C$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz suma es del mismo orden que las matrices sumandos.

En el caso de la resta, se restan uno a uno los elementos correspondientes, y lógicamente, las matrices deben ser también del mismo orden.

Esto también puede hacerse sumando los elementos con el signo cambiado.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ -7 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

y también

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ -7 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

De donde, el signo (-) colocado delante de la matriz afecta a todos los elementos de la matriz.

d) PRODUCTOS MATRICIALES

d-1) Producto de un escalar por una matriz.

Esta operación es conmutativa, o sea si el escalar es c y la matriz A

$$cA = Ac$$

Es decir, como en algebra, el orden de los factores no altera el producto.

El producto se forma multiplicando todos los elementos de la matriz por el escalar. Ejemplos:

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 25 & 10 \end{bmatrix}$$

$$-2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{2}{6} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \frac{2}{5} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

$$-0.03 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{4} \\ 0.2 & 6 & 0.0001 \\ 48 & x & 21 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} - \frac{3}{2} =$$

d-2) Vector fila por vector columna

El resultado de esta operación es un escalar. Por definición este producto se forma multiplicando uno a uno los elementos primeros, segundos, etc. y sumando los productos.

O sea

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \text{un escalar}$$

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (3)(1) + (2)(2) + (1)(5) = 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 2x1 + 3x0 + 7x(-2) + 8x3 = 12$$

(1,4) (4,1)

De la definición se deduce que para poder efectuar el producto se requiere que el número de elementos del vector fila debe ser igual al número de elementos del vector columna. Esto mismo puede decirse de manera algo más complicada, pero más coherente con lo que sigue, el requisito es que el número de columnas del vector fila debe ser igual al número de filas del vector columna. Si examinamos los números que indican el orden, el requisito para que pueda efectuarse el producto puede expresarse así:

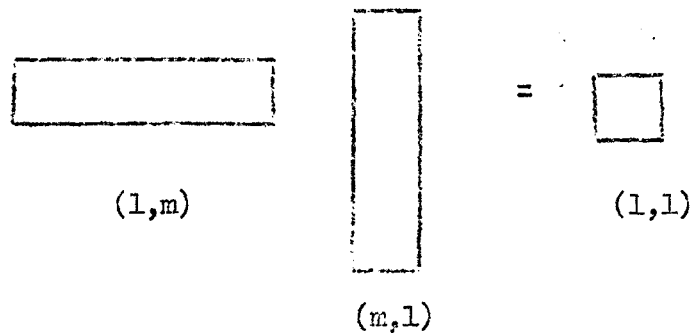
$$(1 \times m) \text{ por } (m \times 1) \text{ resulta } (1 \times 1)$$

La matriz resultante de orden $(1,1)$ sería un elemento de otra matriz si indicáramos su ubicación dentro de ella. Mientras no demos importancia a su posición, es un escalar.

Del producto de un vector fila $(1,5)$ por un vector columna $(5,1)$ obtenemos un escalar $(1,1)$.

Representación gráfica

Gráficamente la operación que estudiamos puede simbolizarse así:



Ahora daremos una representación gráfica y mnemotécnica de este producto, en la cual alteramos ligeramente la posición usual del vector columna:

El producto de un vector fila x' por un vector columna y algebraicamente podemos expresarlo así:

$$x'y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$x'y$ es la expresión matricial, la suma que aparece del otro lado, la expresión algebraica correspondiente.

Una ecuación lineal puede simbolizarse por un producto de este tipo, por ejemplo

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 20$$

puede simbolizarse, en matrices, por

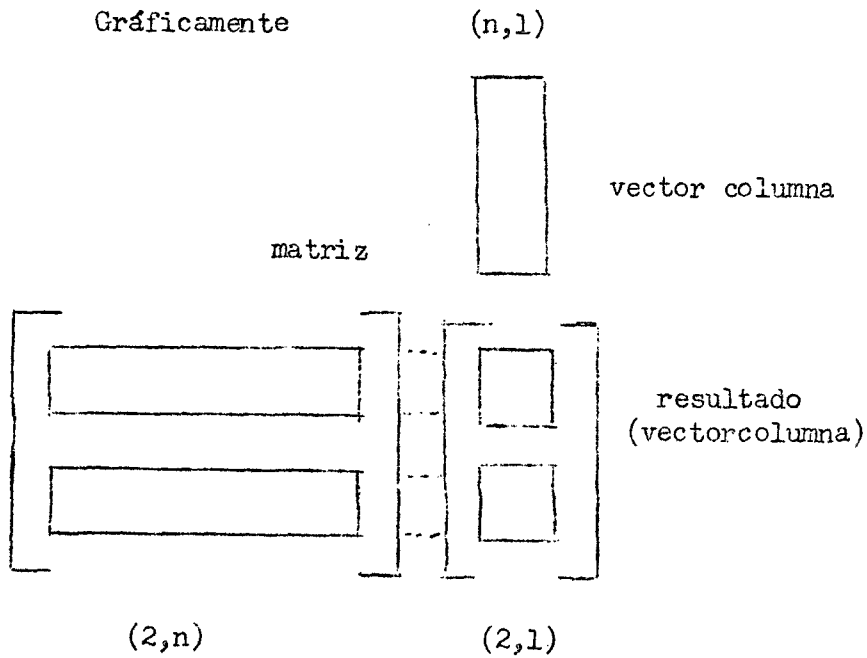
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 20$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 4 & -3 \end{Bmatrix} = 20$$

d-3) Matriz por vector columna

El resultado de esta operación es otro vector columna. Este caso puede considerarse una extensión del anterior dado que la matriz está formada por varias filas. Si efectuamos el producto de cada una de las filas que componen la matriz por el vector columna, obtenemos un escalar cada vez. Si colocamos estos escalares en el orden que corresponde a las filas de la matriz, obtenemos el vector columna producto.



Cada uno de los productos se forma como en el caso anterior, la diferencia consiste en que ahora están ordenados. El elemento que ocupa el lugar 2, resulta de multiplicar la fila 2 de la matriz, por la columna.

Gráficamente, se aprecia que es una ampliación del caso anterior de fila por columna.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

si disponemos este producto gráficamente:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

apreciaremos de este modo como la fila de la matriz indica el orden del producto de esa fila por el vector columna. Sin embargo, esta representación gráfica sólo tiene por fin recordar mejor la formación y posición del producto, y no se utiliza en el trabajo práctico.

Por la descripción que hemos hecho del producto de una matriz por un vector columna, se puede apreciar que el requisito para que el producto sea posible sigue válido, o sea el número de columnas de la matriz debe ser igual al número de filas de la columna. Esto mismo en los números que indican el orden, debe aparecer así

$$(p,m) \text{ por } (m,l) \text{ resulta } (p,l)$$

los dos m son iguales y están juntos, p y l, determinan el orden de la matriz producto.

Ejercicio:

Efectuar el siguiente producto e indicar su orden

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

(2,3) (3,1)

Mediante el producto de una matriz por un vector columna puede representarse un sistema de m ecuaciones lineales con p incógnitas, así,

$$3x_1 + x_2 = a$$

$$2x_1 + 4x_2 = b$$

$$7x_1 + 2x_2 = c$$

puede expresarse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

(3,2) (2,1) (3,1)

donde $x = \{x_1 \ x_2\}$

Justamente la necesidad de abreviar la escritura de largos sistemas de ecuaciones lineales es uno de los factores que influyó en el desarrollo histórico del algebra matricial.

El sistema anterior de ecuaciones, aún podría abreviarse más del siguiente modo

$$Ax = d$$

don A representa la matriz de los coeficientes.

El paso inverso es también factible. Dada una expresión matricial, desarrollar el sistema de ecuaciones correspondiente. Sea por ejemplo

$$\begin{array}{l} Bx = d \\ \text{donde } B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -8 \end{bmatrix} \\ (3,1) \\ (2,3) \end{array} \quad x = \begin{array}{c} \{x_1 \ x_2 \ x_3\} \\ (3,1) \end{array} \\ \quad \quad \quad d = \begin{array}{c} \{d_1 \ d_2\} \\ (2,1) \end{array} \end{array}$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 1x_3 = d_1 \\ 1x_1 - 3x_2 - 8x_3 = d_2 \end{array}$$

o sea 2 ecuaciones con tres incógnitas.

El sistema del mismo número de ecuaciones que de incógnitas estaría representado de la misma manera, o sea $Bx = d$, pero B debe ser en este caso una matriz cuadrada.

Cada uno de los elementos de la matriz producto puede expresarse en notación matricial o en notación algebraica. Si tenemos el producto

$$Bx = d$$

de la matriz B por el vector columna X , hemos indicado que, por ejemplo

$$d_2 = \text{fila 2 de } B \text{ por vector columna } x$$

si ahora denotamos la fila 2 de B por b_2 . d_2 podemos expresarlo matricialmente, así:

$$d_2 = b_2 \cdot x$$

y en general

$$d_i = b_i \cdot x$$

donde b_i simboliza la fila i de la matriz B .

Esta nomenclatura es nueva. Su formación es simple. Si observamos la fila 2 de la matriz B , esta fila en términos generales estará formada por elementos

$$\text{fila 2: } b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23} \quad \dots \quad b_{2j} \quad \dots \quad b_{2n}$$

en ellos el subíndice que denota la fila, o sea 2, se mantiene constante. De ahí surge la nomenclatura que utilizamos. Algo similar para la fila i , que se simboliza b_i .

Para la columna j de la matriz B , podemos también dar el símbolo $b_{.j}$.

Algebraicamente la expresión del producto de una matriz por un vector columna, es algo más engorrosa. Para el elemento d_i en el mismo ejemplo, la expresión algebraica es

$$\sum_{h=1}^n b_{ih} x_h = d_i$$

que no hace sino representar nuevamente la definición.

La nueva notación se hace precisa para diferenciar las columnas o filas de una matriz, de columnas o filas aisladas, en las que podría bastar un sólo subíndice para cada elemento.

Es importante observar que los productos matriciales no son conmutativos. Es decir, el producto de un vector fila por un vector columna, no es conmutativo. O sea del orden de los factores depende el producto.

El producto de una matriz por un vector columna, tampoco es conmutativo. Obsérvese que de alterarse el orden de los factores ni siquiera se cumpliría (salvo casos especiales) el requisito para que la multiplicación sea factible.

Como veremos después el producto de dos matrices entre sí, tampoco es conmutativo.

Observese que si tenemos

$$B x \equiv d \\ (5,3)(3,1) (5,1)$$

no podemos efectuar el producto $x B$
 $(3,1)(5,3)$

por ser 1 distinto de 5.

d-4) Producto de matriz por matriz

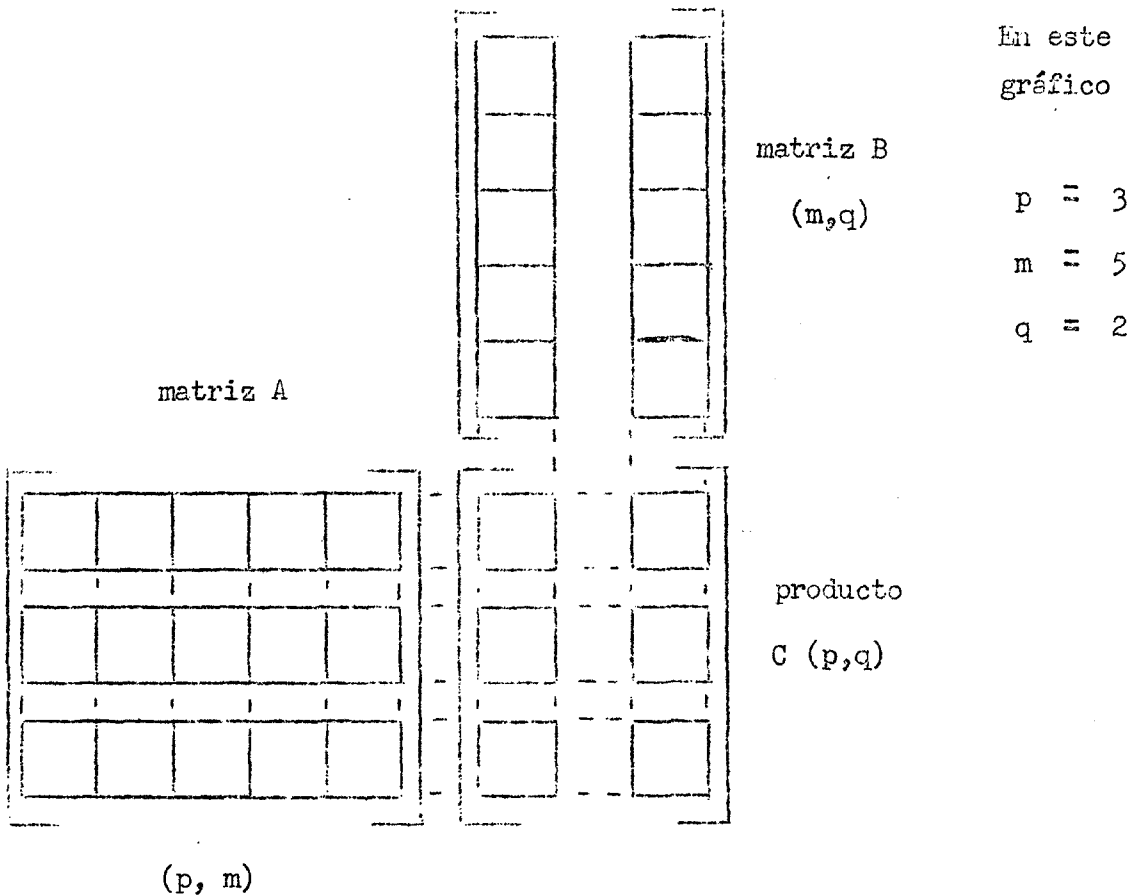
Para poder efectuar el producto las matrices deben cumplir el mismo requisito anterior, es decir que el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda. El orden de la matriz producto se forma en forma análoga a la anterior. De la expresión del orden de las matrices que se multiplican entre sí, resulta el orden de la matriz producto, así:

$$\begin{matrix} & AB = C \\ (p,m) & (m,q) \end{matrix}$$

$m = m$ cumple el requisito de la multiplicación el orden de la matriz C es (p,q) .

Gráficamente el producto de dos matrices resulta una extensión del producto de una fila por una columna y de una matriz por una columna.

La representación gráfica (mnemotécnica) es:



El producto de dos matrices no es conmutativo. O sea, AB no es igual a BA (salvo casos especiales). Además puede apreciarse que BA puede no cumplir con el requisito de multiplicación.

Como el orden de los factores tiene importancia en los productos matriciales debe diferenciarse la posición. En el producto $AB = C$, se dice que A "premultiplica" a B . O que B "postmultiplica" a A .

La formación de los elementos en la matriz producto es similar a los casos anteriores de producto matricial, y puede además apreciarse en el gráfico mnemotécnico.

El elemento 2_1 de la matriz producto, resulta de multiplicar la fila 2 de la matriz que premultiplica, por la columna 1 de la que postmultiplica. En el gráfico el elemento está determinado donde se cortan las líneas de la fila correspondiente al primer subíndice, y la columna que corresponde al segundo.

La expresión matricial de un elemento de la matriz producto es como en los casos anteriores fila por columna.

Ejemplos:

$$\begin{matrix} \boxed{3} & 1 & \boxed{2} \\ & & \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{5} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{13} & \boxed{15} \\ & \end{matrix}$$

(1,3) (3,2) (1,2)

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} \\ \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{-1} & \boxed{2} \\ \boxed{-5} & \boxed{-2} \\ \boxed{3} & \boxed{1} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{-2} & \boxed{1} \\ \boxed{-10} & \boxed{3} \end{matrix}$$

(2,3) (3,2) (2,2)

$$\begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{2} \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{3} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{5} & \boxed{5} \\ \boxed{10} & \boxed{10} \end{matrix}$$

(2,2) (2,2) (2,2)

En este último caso son matrices cuadradas. Si tenemos el producto AB, podemos también formar el producto BA, pero los productos, en el caso general, serán diferentes.

Un caso particular de la conmutatividad se presenta en los productos con la matriz unitaria. Una matriz cuadrada, pre o post-multiplicada por la matriz unitaria, no se altera. Es decir

$$AI = IA = A$$

Ejemplos

$$\begin{matrix} \boxed{3} & \boxed{-7} \\ \boxed{5} & \boxed{25} \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{3} & \boxed{-7} \\ \boxed{5} & \boxed{25} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{30} & \boxed{104} \\ \boxed{2} & \boxed{-90} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{30} & \boxed{104} \\ \boxed{2} & \boxed{-90} \end{matrix}$$

En notación matricial el elemento c_{ij} de la matriz producto en $AB = C$, puede expresarse así

$$c_{ij} = a_{i.} \cdot c_{.j}$$

o también
$$c_{ij} = [a_{i.}] (b_{.j})$$

La expresión algebraica correspondiente es

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih} b_{hj}$$

que a veces se expresa sólo así

$$c_{ij} = \sum_h a_{ih} b_{hj}$$

e) Proceso inverso de la multiplicación

Se hará primero un símil algebraico. Si tenemos una ecuación algebraica

$$ax = b$$

y deseamos despejar x , usualmente se divide ambos términos de la expresión entre a , obteniendo

$$x = \frac{b}{a}$$

Menos usual, pero equivalente es multiplicar ambos miembros de la ecuación por a^{-1} , puesto que $aa^{-1} = 1$. Tendremos

$$\begin{aligned} ax &= b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b \\ 1x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

En forma similar si tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas (matriz) cuadrada, por lo general podremos resolver ese sistema despejando las incógnitas. Es decir (en notación matricial),

$$Bx = d$$

siendo B matriz cuadrada. Si logramos despejar las x habremos resuelto el sistema. Para esto necesitamos pre-multiplicar ambos

miembros de la ecuación por una matriz R tal, que premultiplicada por B nos de la matriz unidad.

De este modo obtendremos como

$$\begin{aligned}
RB &= I \\
RBx &= Rd \\
(RB)x &= Rd \\
Ix &= Rd \\
x &= Rd
\end{aligned}$$

La matriz R que tiene esta propiedad se denomina matriz recíproca o invertida de la matriz B, y se usa la notación

$$R = B^{-1}$$

f) Aplicaciones a economía

En el esquema de insumo producto en una economía cerrada, si se examina una fila puede plantearse una ecuación de oferta igual demanda

Suma de transacciones intermedias más demanda final = Valor bruto de la producción.

En términos algebraicos, para la fila l si indicamos cada transacción con T_{lj} , la demanda final con y_l , y el valor bruto de la producción por x_l .

$$T_{l1} + T_{l2} + \dots + T_{ln} + y_l = x_l$$

y en la fila i

$$T_{i1} + T_{i2} + \dots + T_{in} + y_i = x_i$$

Pero cada una de las transacciones puede expresarse en términos del coeficiente técnico correspondiente y el valor bruto de la producción del sector que insume:

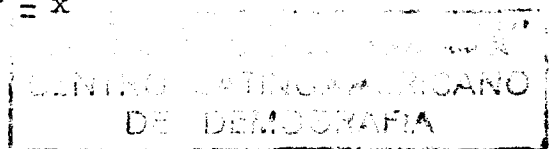
$$T_{ij} = a_{ij} x_j$$

Por lo tanto la ecuación de la fila i, se transforma en

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y_i = x_i$$

Todo el sistema de ecuaciones resultante, para las n filas podemos representarlo matricialmente como sigue

$$Ax + y = x$$



donde A es la matriz de coeficientes técnicos, x e y son los vectores columna del valor bruto de la producción y la demanda final, respectivamente.

Procediendo matricialmente

$$x - Ax = y$$

$$(I-A)x = y$$

$$x = (I-A)^{-1}y$$

g) Inversión de la matriz por el método de Jordan

El método de Jordan para la solución de sistemas de ecuaciones lineales e inversión de matrices corresponde al siguiente procedimiento algebraico de eliminación que describimos a continuación.

Sean las ecuaciones:

1) $2x_1 + 3x_2 = 12$

2) $4x_1 - 5x_2 = 2$

Dividiremos la primera ecuación entre 2, coeficiente al que llamamos pivote (en su lugar, después de la división aparecerá un uno) entonces obtenemos

1) $x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 6$

2) $4x_1 - 5x_2 = 2$

De la segunda ecuación restamos la primera multiplicada por 4, con lo cual eliminamos x_1 , de la segunda ecuación, obtenemos:

1) $x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 6$

2) $x_2 = 2$

y restaremos de la primera ecuación la segunda multiplicada por $(3/2)$, obteniendo

1) $x_1 = 3$

2) $x_2 = 2$

Obsérvese que no hemos alterado el orden de las incógnitas en los pasos sucesivos. Cada incógnita la hemos dejado en su columna. La solución puede representarse así

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o sea $x_1 = 3, x_2 = 2.$

En las ecuaciones resueltas podrían haber surgido otros métodos para obtener la solución. El método que hemos aplicado es el de Jordan y consiste en eliminar cada incógnita de todas las ecuaciones menos una, de modo que al final se tiene la solución en la forma

$$Ix = k$$

o sea $x = k$

Aunque la aplicación que hemos hecho parece trivial, el problema se complica cuando el sistema de ecuaciones es grande. En estos casos el método de Jordan resulta el más breve para la inversión de matrices, con la ventaja de que también se utiliza en programación lineal. El procedimiento iterativo tiene la ventaja de que el trabajo puede ser repartido entre varias personas. Pero cuando el orden de la matriz es mayor de 10, el método de Jordan resulta mucho más ventajoso que otros métodos hasta ahora explicados.

Como un sistema de ecuaciones, matricialmente se representa por una expresión.

$$Bx = d$$

y en el ejemplo dado hemos operado en realidad, sólo con los coeficientes, sin variar las incógnitas (cuando no aparece una incógnita es que su coeficiente es cero). Podemos deducir que las mismas operaciones las podríamos haber realizado sólo sobre la matriz B y la columna d, sin necesidad de escribir las incógnitas.

Representaremos esto de la siguiente manera:

1.)	$x_1 \quad x_2 \quad = \quad d$		
	$2 \quad 3 \quad 12$		
2.)	$4 \quad -5 \quad 2$		
	$1 \quad \frac{3}{2} \quad 6$	}	
	$4 \quad -5 \quad 2$		I
	$1 \quad \frac{3}{2} \quad 6$		
	$0 \quad -11 \quad -22$		
	$1 \quad \frac{3}{2} \quad 6$	}	
	$0 \quad 1 \quad 2$		II
	$1 \quad 0 \quad 3$		
	$0 \quad 1 \quad 2$		

El procedimiento es el mismo, pero con mayor ahorro de espacio y de escritura. Pero aún podría haberse simplificado más, pues las dos operaciones señaladas por las llaves I y II, podrían haberse hecho, cada una, en una sola etapa, como sigue:

x_1	x_2	d
2	3	12
4	-5	2
1	$\frac{3}{2}$	6
0	-11	-22
1	0	3
0	1	2

Como ya se indicó, en la práctica no es preciso escribir los ceros, basta con dejar su espacio en blanco, por convención.

Trabajando de la segunda manera será preciso calcular tantas etapas como filas tenga la matriz a resolver.

En este método de trabajo abreviado se copia en la etapa siguiente la fila con el pivote reducido a 1, y luego se opera con esta nueva fila y las de la etapa anterior con objeto de eliminar los demás coeficientes en la columna del pivote.

Para pasar de

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{2} & 3 & 12 \\ \hline 4 & -5 & 2 \\ \hline \end{array}$$

a la etapa siguiente, se copia primero la fila del pivote (pivote marcado con círculo),

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline & 2 & \\ \hline \end{array}$$

la nueva fila dos se forma restando de la fila dos anterior la nueva fila multiplicada por 4, o sea

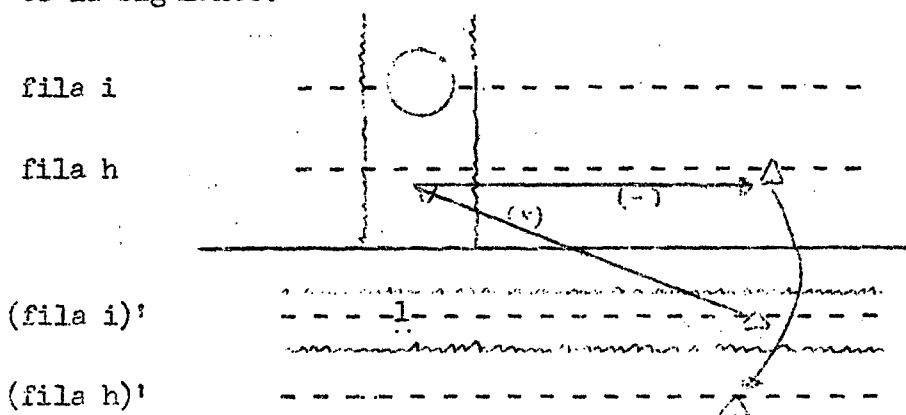
$$\begin{aligned} \text{primer elemento} &= 4 - 1 \times 4 = 0 \\ \text{segundo elemento} &= -5 - \left(\frac{3}{2}\right) \times 4 = -11 \\ \text{tercer elemento} &= 2 - 6 \times 4 = -22 \end{aligned}$$

operaciones que representan en detalle

$$(\text{fila } 2)' = (\text{fila } 2) - (\text{fila } 1)' \times 4$$

observese la posición de 4 en la misma columna del pivote 2. El elemento 4 se llama semipivote.

La representación gráfica de esta operación, elemento a elemento, es la siguiente:



Con lo que antecede queda explicado el método de Jordan para resolver un sistema de ecuaciones. Con las operaciones efectuadas hemos pasado de un sistema

$$Bx = d$$

a un sistema $Ix = x = Rd =$ vector columna

sin embargo la matriz $R = B^{-1}$ no figura explícitamente, sino que figura la solución en un vector columna. Si todas las operaciones que hicimos sobre la matriz B también las hubieramos hecho sucesivamente sobre la matriz unidad, al final cuando obtenemos en vez de la matriz B la matriz unidad, simultáneamente en vez de la matriz unidad sobre la que registramos las operaciones, obtendremos la matriz recíproca.

En el ejemplo anterior si en vez de partir de

2	3	12
4	-5	2

empezamos además con una matriz unidad sobre cuyos elementos efectuamos las mismas operaciones que sobre los demás

$$\begin{array}{cc|cc|c}
 x_1 & x_2 & & & d \\
 \hline
 2 & 3 & 12 & 1 & 0 \\
 4 & -5 & 2 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & \frac{3}{2} & 6 & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & -11 & -22 & -2 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 3 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\
 0 & 1 & 2 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\
 \hline
 \end{array}$$

Como indicamos, al final (última etapa) cuando en vez de la matriz B tenemos la matriz unidad, en la columna d tenemos la solución del sistema de ecuaciones y donde teníamos la matriz unidad tenemos ahora la matriz invertida que es

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

La utilidad de esta matriz es que mientras los coeficientes de las incógnitas no cambien, a cualquier nuevo valor del vector columna d puede obtenerse las nuevas soluciones con ayuda de B^{-1} , pues

$$x = B^{-1} d$$

Así si en las mismas ecuaciones anteriores hubiéramos tenido un juego de coeficientes d distinto de $\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$, por ejemplo $\begin{bmatrix} 22 \\ 6 \end{bmatrix}$, la nueva solución sería

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 5 + \frac{9}{11} \qquad x_2 = 4 - \frac{6}{11}$$

$$x_1 = 5.8182 \qquad x_2 = 3.4546$$

En otras palabras, mientras los coeficientes de las incógnitas no varían podemos obtener la matriz invertida, y en este caso a cualquier valor de la columna d, obtendremos la solución correspondiente. De tal modo que en el caso anterior podíamos haber prescindido de la columna d, Su inclusión será una cuestión a decidir que depende de la conveniencia o inconveniencia de esto para los fines que se persigan.

De modo que en el sistema de ecuaciones lineales correspondiente al anterior, pero algo más general:

$$1) \quad 2x_1 + 3x_2 = d_1$$

$$2) \quad 4x_1 - 5x_2 = d_2$$

Si queremos obtener la matriz invertida por el método Jordan, procedemos como sigue, ahora trabajaremos con decimales

x_1	x_2			suma de control
2	3	1		6
4	-5		1	
1	1.5	0.5		3
	-11	-2	1	-12
1		.23	.14	1.37
	1	.18	-.09	1.09

La matriz invertida es

$$\begin{bmatrix} .23 & .14 \\ .18 & -.09 \end{bmatrix}$$

que corresponde a la anterior dentro de la aproximación con que trabajamos. La nueva columna agregada y que llamamos sumas de control, corresponde en cada etapa a la suma de todos los elementos de la fila. Con estas sumas, desde la etapa inicial se opera igual que si fueran parte de la matriz con que trabajamos. Es decir igual que si fueran una columna como la d por ejemplo. El control consiste en que la suma obtenida por el procedimiento indicado, para una nueva etapa, debe ser

efectivamente la suma de los elementos en su fila en esa nueva etapa. Esto puede comprobarse en el ejemplo anterior.

El control indicado es útil pues es fácil cometer errores en operaciones como las indicadas, y sería muy costoso, en matrices grandes, tener que rehacer nuevamente todo el trabajo.

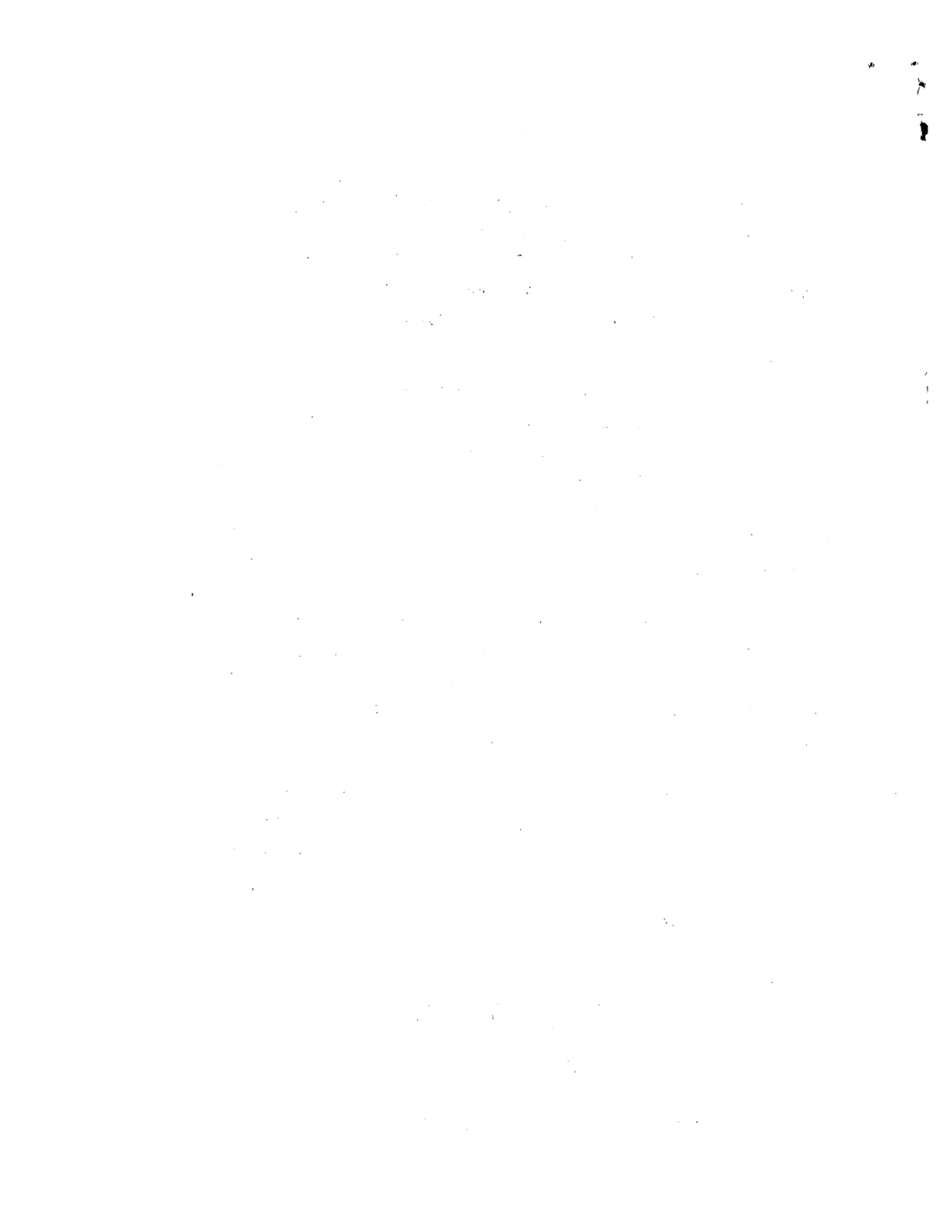
Nota final

La razón de que obtengamos la matriz invertida efectuando las mismas operaciones que hacemos sobre B, en la matriz unidad, es que cada una de las operaciones efectuadas corresponde a un producto matricial. La matriz que premultiplica a B, en cada caso es una matriz de tipo sencillo que efectúa operaciones elementales sobre B, tales como multiplicar (o dividir) toda una fila de B por una cantidad, el pivote por ejemplo y/o sumar a una fila de B, la fila del pivote multiplicada por el semipivote. La forma de tales matrices consta en todo caso de la matriz unidad. Si uno de los unos diagonales de la matriz unidad esta sustituido por una cantidad tendremos la multiplicación por una fila. Si tenemos todos los unos de la matriz unidad y además otra de las casillas fuera de la diagonal llena con una cantidad, tendremos el caso de suma de dos filas. Además pueden encontrarse combinaciones que efectúen ambas operaciones simultáneamente.

Si partimos de la matriz B y con estas premultiplicaciones sucesivas por matrices R_1, R_2, R_3, \dots etc. obtenemos la matriz I, es evidente que el producto $R_n R_{n-1} \dots R_3 R_2 R_1 = R$.

Resta indicar que debemos registrar este producto, haciendo en cada caso las mismas operaciones sobre la matriz I, o sea

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 B & I \\
 \hline
 R_1 B & R_1 I = R_1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 R_2 R_1 B & R_2 R_1 I
 \end{array} \\
 \\
 R_n \dots R_2 R_1 B = I & R_n \dots R_2 R_1 I = R
 \end{array}$$



INSTITUTO
 Curso Básico de Santiago
 Seminario de Técnicas de
 Planificación
 Juan Ayza, Pedro Paz
 Santiago, 3 de junio de 1963

CORRECCIONES A:

Seminario III de Técnicas de Planificación

página	línea	dice	debe decir
5	5	matriz unitaria	matriz unidad
11	1	x	x'
11	1	y'	y
11	primera fórmula	xy'	x'y
11	3	xy'	x'y
23	primera fórmula	$Ix - k$	$Ix = k$
26	gráfico	(fila i)' - - - -	(fila i)' - -1- -
		(fila h)' - -1- -	(fila h)' - - - -

