

DOCUMENTO PRELIMINAR  
Instituto Latinoamericano de  
Planificación Económica y Social  
Santiago, febrero de 1965

EJEMPLOS DE INVERSION DE MATRICES SENCILLAS POR EL METODO DE JORDAN

Señor Juan Ayza  
Apuntes de Clases

7001

11-11-11

1

2

3

4

INSTITUTO LATINOAMERICANO DE PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL

Curso Básico  
de Planificación  
Profesor Juan Ayza  
mayo de 1964

Ejemplos de inversión de matrices sencillas  
por el método de Jordan

Matriz original			Matriz unidad			Control
3	5	8	1			17
2	4	1		1		8
3	1	7			1	12
1.000	1.667	2.667	0.333			5.667
	0.666	-4.334	-0.666	1		-3.334
	-4.001	-1.001	-0.999		1	-5.001
1.000		13.511	2.000	-2.502		14.008
	1.000	-6.505	-1.000	1.501		-5.004
		-27.028	-5.000	6.006	1	-25.022
1			-0.500	0.497	0.500	1.497
	1		0.203	0.057	-0.241	1.020
		1	0.185	-0.222	-0.037	0.926
Matriz unidad			Matriz inversa			Control

Luego la matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

es

$$\begin{bmatrix} -0.500 & 0.497 & 0.500 \\ 0.203 & 0.057 & -0.241 \\ 0.185 & -0.222 & -0.037 \end{bmatrix}$$

2.000	1.000	9.000	3.000	1.000				16.000
1.000	5.000	3.000	6.000		1.000			16.000
4.000	2.000	7.000	9.000			1.000		23.000
5.000	4.000	1.000	2.000				1.000	13.000
1.000	.500	4.500	1.500	.500				8.000
	4.500	-1.500	4.500	-.500	1.000			8.000
	0.000	-11.000	3.000	-2.000		1.000		-9.000
	1.500	-21.500	-5.500	-2.500			1.000	-27.000
1.000		4.667	1.000	.556	-.111			7.111
	1.000	-.333	1.000	-.111	.222			1.778
		-11.000	3.000	-2.000		1.000		-9.000
		-21.000	-7.000	-2.334	-.333		1.000	-29.667
1.000			2.274	-.293	-.111	-.425		3.293
	1.000		.909	-.050	.222	-.030		2.050
		1.000	-.273	.182		-.091		.818
			-12.733	1.488	-.333	-1.911	1.000	-12.489
1.000				-.027	-.170	.084	.180	1.062
	1.000			.056	.198	.166	.072	1.158
		1.000		.150	.007	-.050	-.022	1.086
			1.000	-.117	.026	.150	-.079	.981

/Vamos a

Vamos a ilustrar parte del proceso de inversión, con el segundo ejemplo.

Ante todo, la disposición del cuadro, con separaciones horizontales indica cinco divisiones. En la primera de ellas figura la matriz original de orden  $4 \times 4$ , y a su derecha la matriz unidad del mismo orden. Además figura la columna control, en que cada elemento representa la suma de todas las casillas que están en su propia fila.

La última división presenta la matriz unidad de orden  $4 \times 4$ , y a su derecha la matriz inversa de la matriz original. Además, la columna de control.

Sólo la primera división presenta la matriz original. Las demás divisiones son etapas en la inversión de la matriz. Hay tantas etapas como el orden de la matriz cuadrada original, es decir 4. Sin embargo, por usar términos más generales, al referirnos a la primera división la llamaremos a veces etapa anterior.

En la primera etapa aparece un uno en la diagonal que correspondía a la matriz original. En la segunda etapa dos unos en la diagonal, etc.

No es preciso que aparezcan los unos en el orden que los hemos colocado, ni es tampoco indispensable que estén en la diagonal, pero no entraremos a estos casos.

Para pasar de la primera división a la primera etapa (y después de una a otra etapa) se hacen los cálculos fila por fila, para cada una de las nuevas filas.

Primero que nada se calcula la fila donde aparece el uno en la diagonal, y por lo tanto, la primera fila de la primera etapa. Esta fila se calcula de la manera más sencilla: cada elemento de esta fila 1, se forma dividiendo el elemento correspondiente en la fila 1, de la etapa anterior, entre 2.000. Por esto el primer elemento es 1.000. El segundo  $1.000/2.000 = 0.500$ . Y el elemento de la columna de control en la primera fila es  $16.000/2.000 = 8.000$ .

El primer elemento 2.000 de la matriz inicial, y los otros elementos de ella que están en la primera (misma) columna, tienen un importante papel en el paso a la primera etapa. Por esto reciben nombre especial. A 2.000 se le llama pivote y a los demás en su columna semipivotes.

/Ya vimos

Ya vimos qué papel juega el pivote. Al dividir toda su fila entre el pivote, para obtener la fila del mismo orden en la etapa siguiente, se obtiene en el lugar antes ocupado por el pivote, la unidad.

Es preciso calcular esa primera fila y escribirla en la etapa próxima, pues para calcular cualquier fila en esa etapa, se utilizan, la fila correspondiente en la etapa anterior, y la fila recién calculada, con uno en la diagonal, en la etapa propia. Es decir, para calcular la fila 2 en la etapa 1, se trabaja con la fila 2 en la primera división (o etapa anterior) y con la fila 1 de la etapa 1.

Para obtener el elemento que se indica, de la fila 2, etapa 1, se procede así:

---

Lugar del elemento en la fila 2, etapa 1	Elemento	=	su cálculo
1	0.000		1 - 1 x 1
2	4.500		5.000 - .500 x 1
3	-1.500		3.000 -4.500 x 1
4	4.500		6.000 -1.500 x 1
5	-0.500		0.000 -0.500 x 1
6	1.000		1.000 -0.000 x 1
7	0		0.000 -0.000 x 1
8	0		0.000 -0.000 x 1
9	8.000		16.000 -8.000 x 1

---

Todo elemento se obtiene de una resta, en que el minuendo es el elemento correspondiente en la etapa anterior y el sustraendo el producto del elemento correspondiente en la fila con uno en la diagonal de la nueva etapa, por el semipivote de la fila que se calcula.

Como hemos usado en dos sentidos la palabra correspondiente, el primero para el elemento que ocupa la misma fila y columna en la etapa anterior y el segundo para el elemento que ocupa la misma columna en la etapa en trabajo, aclararemos esto más, con los números anteriores.

/For ejemplo,

Por ejemplo, el cuarto elemento de la fila 2, se calcula así:

$$4.500 = 6.000 - 1.500 \times 1$$

6.000 es el cuarto elemento de la fila 2, pero en la etapa anterior (minuyendo). 1.500 es el cuarto elemento en la fila 1, etapa 2.

1.000 es el semipivote de la fila 2, en la etapa anterior.

De la misma manera se calcula el elemento de la columna de control. Pero además de hacerse el cálculo del elemento de control de esta manera, igual a todos los demás, dicho elemento tiene la propiedad de ser la suma de todos los elementos de su fila. De modo que hay dos maneras distintas de comprobar dicho elemento. Si no coinciden los cálculos, es prueba de que se ha cometido algún error (en la fila o en el elemento de control) y deben ser revisados. El procedimiento usual de cálculo es encontrar el elemento de control como todos los demás elementos de la fila. Después, sumar la fila y verificar el elemento de control. Si la diferencia entre ambos es el doble de algún otro elemento de la fila, es posible que ese elemento tenga el signo equivocado.

La fila 3, de la etapa 1, se calcula de manera similar. En este caso el semipivote es 4.000, y el elemento 3, de la fila 3, que es -11.000, se calcula así:

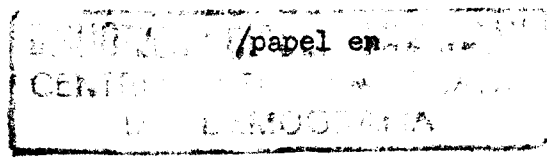
$$- 11.000 = 7.000 - 4.500 \times 4.000$$

Para pasar a la etapa 2, el pivote es el elemento en fila 2, columna 2, de la etapa 1, es decir 4.500.

La nueva fila de la etapa 2, con la nueva unidad, con 1 en la diagonal se forma dividiendo cada elemento de la fila 2, etapa 1, entre 4.500.

orden del elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fila 2, etapa 1	0	4.500	-1.500	4.500	-.500	1.000	0.000	0.000	8.000
fila 2, etapa 2	0	1.000	-.333	1.000	-.111	.222	0.000	0.000	1.778

A la nueva fila así calculada, suele enmarcársela entre líneas horizontales hechas con lápiz de color, pues como señalamos, juega



papel en el cálculo de todas las demás filas de su etapa. Y señalándola de ese modo se evitan errores de cálculo.

Así por ejemplo el cálculo del elemento en la fila 4, columna 4, de la etapa 2, que resulta ser -7.000, resulta así

$$-7.000 = (-5.500) - 1.000 \times 1.500$$

En que (-5.500) es el elemento correspondiente de la etapa anterior. 1.000 es el elemento correspondiente en la fila 2, etapa 2; y 1.500 es el semipivote (etapa anterior, en la columna del pivote).

Para el cálculo, también suele enmarcarse con líneas de color la columna del pivote y semipivotes. Representaremos las líneas de color por una línea sinuosa y trataremos de representar gráficamente el cálculo de la fila 3, etapa 2, y el de la fila 4, etapa 2.

<u>Etapa 1</u>	1.000	$\left. \begin{array}{l} .500 \\ 4.500 \\ 0.000 \\ 1.500 \end{array} \right\}$							
			-1.500	4.500	-4.500	1.000	0.000	0.000	8.000
			-11.000	3.000	-2.000	0.000	1.000	0.000	-9.000
			-21.500	-5.500	-2.500			1.000	-27.000
	1.000	0.000							
	1.000	-0.333	1.000	-0.111	0.222	0.000	0.000	1.778	
<u>Etapa 2</u>	0.000	-11.000	3.000	-2.000	0.000	1.000	0.000	-9.000	
	0.000	-21.000	-7.000	-2.334	-0.333	0.000	1.000	-29.667	

Suprimimos la primera fila sólo por conveniencia pero las operaciones que se harían con ella son análogas.

La nueva fila 3, resulta igual a la anterior, debido a que el semipivote es cero.

La nueva fila 4, resulta distinta ya que el semipivote es 1.500. Deben revisarse en la tabla anterior, los cálculos referentes a estas filas, hasta formarse una idea gráfica del proceso.

Por ejemplo seguir el cálculo del elemento 3, fila 4, etapa 2, que es - 21.000  $-21.000 = (-21.500) - \{-0.333\} \times \{1.500\}$