

INT-2143

T. 1 V. 2

DE TALLERES Y ESTUDIOS DE CASOS

**PLANIFICACION DEL
DESARROLLO REGIONAL**

Tomo 1

Volumen II

**PROYECTO DE CAPACITACION EN PLANIFICACION
PROGRAMACION, PROYECTOS AGRICOLAS Y DE DESARROLLO RURAL**

FAO



PNUD



CEPAL

PROCADES



PROLOGO

El Proyecto Regional de Capacitación en Planificación, Programación, Proyectos Agrícolas y de Desarrollo Rural (PROCADES) patrocinado por la FAO, CEPAL y PNUD, comenzó a operar el primer semestre de 1980. Desde esa fecha hasta su término en diciembre de 1986 participó en la organización y realización de 64 cursos y seminarios de capacitación a través de toda América Latina y el Caribe, donde participaron 1905 profesionales vinculados a la problemática agrícola y rural.

Para sustentar las actividades de capacitación el equipo técnico permanente de PROCADES, especialistas y consultores internacionales, elaboraron más de 80 documentos, los cuales constituyeron un importante conjunto de material de apoyo para las actividades docentes del PROCADES.

Dicha documentación recoge las más recientes experiencias y reflexiones realizadas en la región en las áreas de Planificación Agroalimentaria y Proyectos de Desarrollo Agrícolas y Rural.

Con el objetivo de facilitar el intercambio internacional de experiencias y documentación entre instituciones nacionales de capacitación se realizó la presente edición. En esta se presenta una selección de dichos documentos siendo compilados en tres series: Serie Lecturas, Serie Talleres y Estudios de Caso; y, Serie Documentos Docentes para las Actividades de Capacitación en los Países del Caribe Inglés.

Los conceptos vertidos en todos los estudios de este volumen son de responsabilidad de sus autores y no comprometen a los organismos patrocinantes del PROCADES ni a las instituciones en que estos trabajan.

PROYECTO REGIONAL
DE CAPACITACION EN PLANIFICACION,
PROGRAMACION, PROYECTOS AGRICOLAS
Y DE DESARROLLO RURAL
RLA/77/006
FAO-PNUD-CEPAL

PRESENTACION

La Serie Talleres y Casos de Estudio consta de 2 tomos: Planificación del Desarrollo Regional y Proyectos de Desarrollo Agrícola y Rural.

El primer tomo incluye 3 documentos organizados en 2 volúmenes. En el volumen 2 se presentan los documentos; "Ejercicios Prácticos para la Capacitación en Formulación y Evolución de Planes de desarrollo Agropecuario de Mediano Plazo"-elaborado por la Sra. Vivianne Laffitte; y "Elementos de Técnicas Cuantitativas" -elaborado por el Sr. Guido Miranda.

El primer documento contiene once ejercicios en que se exponen diversas tareas que es preciso desarrollar durante el proceso de formulación y evaluación de planes de desarrollo agropecuario.

El tema proyección de la demanda es abordado mediante dos ejercicios; la proyección de la oferta tiene tres ejemplos; la proyección de mano de obra cuenta con dos ejercicios; la proyección del capital agropecuario tiene tres y finalmente, hay dos ejercicios sobre evaluación del plan.

El documento tiene mucho valor para los participantes en los cursos de capacitación pues cada ejercicio se desarrolla dentro del esquema de presentación similar lo cual facilita su comprensión. En primer lugar, se presentan los antecedentes, los datos y el enunciado del problema y a continuación se ejecuta la resolución numérica del mismo.

Los temas seleccionados por la autora permiten a su vez desarrollar ejercicios que facilitan la comprensión de diversos aspectos que es preciso analizar en el proceso de planificación, tales como, cálculos sobre composición del uso de la tierra, determinación de metas de superficie, construcción de índices, cálculos sobre demanda interna total de productos agropecuarios, demanda estacional de mano de obra; desarrollo de masa ganadera; y cálculos del origen del aumento de la producción.

El segundo documento presentado en este volumen presenta conceptos de primera importancia en el campo de los métodos cuantitativos necesarios para todo profesional relacionado con la planificación y proyectos.

En el primer capítulo, se presentan los conceptos de funciones y gráficos, que, en sí mismos, constituyen parte importante del lenguaje cuantitativo, tratando específicamente el tema de la estadística descriptiva, que contiene las diversas formas de expresar los datos y resultados de variables que obedecen a una función estudiada estadísticamente.

El tercer capítulo recoge un caso particular de función estadística, analizando las series de tiempo, que, a su vez, expresan el desarrollo cronológico de un fenómeno o variable bajo estudio.

El cuarto capítulo desarrolla aún más el lenguaje de análisis de las series, al introducir el concepto de números índices, los cuales permiten un tratamiento más abstracto - y por lo tanto, más general - de los problemas bajo estudio.

El quinto capítulo es una introducción a las llamadas matemáticas financieras, es decir, el conjunto de cálculos de series que se caracterizan por la introducción de tasas de interés y de descuento.

El sexto capítulo va hacia la aplicación de las matemáticas financieras, concretamente en la forma de una iniciación a los métodos de evaluación de proyectos a través del cómputo de indicadores unidimensionales como el VAN, el TIR o las relaciones Beneficio/Costo.

El séptimo capítulo trata de los problemas de la ligazón entre variables, abordando los conceptos de regresión y correlación simple, que aparecen constantemente en el análisis estadístico.

El octavo capítulo trata de matrices y determinantes, que constituyen los instrumentos básicos para la resolución de los sistemas de ecuaciones que son la expresión cuantitativa de los modelos computables. Con estos conceptos, el noveno capítulo desarrolla en particular uno de los modelos que ha alcanzado mayor popularidad, el modelo de programación lineal.

El texto finaliza con apéndices que contienen algunas de las principales tablas que son necesarias para realizar los cálculos numéricos de las aplicaciones de los métodos reseñados.

DOCUMENTO 1
EJERCICIOS PRACTICOS PARA LA CAPACITACION EN FORMULACION Y
EVALUACION DE PLANES DE DESARROLLO AGROPECUARIO DE MEDIANO
PLAZO *

* Elaborado por la Sra Vivianne Laffitte, para uso en las
actividades docentes de PROCADES.

INDICE

	<u>Página</u>
I. INTRODUCCION	(x)
II. EJERCICIOS	1
Tema I - Proyección de la demanda	1
. <u>Ejercicio No. 1: Proyección de la demanda para consumo humano de arroz y maíz</u>	1
1. Planteo	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Datos	9
1.3 Enunciado	9
2. Solución de la parte a)	13
2.1 Procedimiento	13
2.2 Resolución numérica	15
2.3 Discusión	16
3. Solución de la parte b)	19
3.1 Procedimiento	19
3.2 Resolución numérica y discusión	19
4. Solución de la parte c)	20
4.1 Resolución	20
4.2 Características	20
. <u>Ejercicio No. 2: Proyección de la demanda total de carne vacuna y trigo</u>	24
1. Planteo	24
1.1 Antecedentes	24
1.2 Datos	31
1.3 Enunciado	36
2. Solución	36
2.1 Procedimiento	36
2.2 Resolución numérica	37
Tema II - Proyecciones de oferta	39
. <u>Ejercicio No. 3: Determinación de las metas de uso del suelo y de la oferta de productos agropecuarios en la región del Llano</u>	39
1. Planteo	39
1.1 Antecedentes	39
1.2 Datos	49
1.3 Enunciado	56
2. Solución	58
2.1 Procedimiento	58
2.2 Resolución numérica	60
2.3 Discusión	60

./...

	<u>Página</u>
• <u>Ejercicio No. 4:</u> Proyección de la producción global	66
1. Planteo	66
1.1 Antecedentes	66
1.2 Datos	75
1.3 Enunciado	75
2. Solución	75
2.1 Resolución numérica	75
• <u>Ejercicio No. 5:</u> Proyección del balance oferta-demanda global	80
1. Planteo	80
1.1 Antecedentes	80
1.2 Datos	97
1.3 Enunciado	97
2. Solución	97
2.1 Resolución numérica	97
 Tema III - Proyección de la mano de obra	 105
• <u>Ejercicio No. 6:</u> Proyección de requerimientos de mano de obra en el Llano	105
1. Planteo	105
1.1 Antecedentes	105
1.2 Datos	118
1.3 Enunciado	118
2. Solución	123
2.1 Procedimiento	123
2.2 Resolución numérica	123
2.3 Discusión	128
• <u>Ejercicio No. 7:</u> Cuantificación del margen de desempleo estacional en el Llano	131
1. Planteo	131
1.1 Antecedentes	131
1.2 Datos	142
1.3 Enunciado	142
2. Solución	149
2.1 Resolución numérica	149
 Tema IV - Proyección del capital agropecuario	 152
• <u>Ejercicio No. 8:</u> Proyección de praderas permanentes	152
1. Planteo	152
1.1 Antecedentes	152
1.2 Datos	167
1.3 Enunciado	167
2. Solución	170
2.1 Resolución numérica	170

	<u>Página</u>
• <u>Ejercicio No. 9: Proyección del stock de ganado vacuno</u>	178
1. Planteo	178
1.1 Antecedentes	178
1.2 Datos	197
1.3 Enunciado	197
2. Solución	197
2.1 Resolución numérica	197
TEMA V - Evaluación del Plan	201
• <u>Ejercicio No. 10: Cálculo de indicadores a utilizar en la evaluación del Plan</u>	201
1. Planteo	201
1.1 Datos	201
1.2 Enunciado	201
2. Solución	206
2.1 Resolución numérica	206
• <u>Ejercicio No. 11: Origen de los aumentos de producción</u>	214
1. Planteo	214
1.1 Antecedentes	214
1.2 Datos	217
1.3 Enunciado	217
2. Solución	220
2.1 Resolución numérica	220

INDICE DE CUADROS Y GRAFICOS

	<u>Página</u>
<u>Ejercicio No. 1</u>	
Cuadros No.:	
1 - Estructura de la superficie agrícola por región	2
2 - Uso actual del suelo	4
3 - Uso potencial del suelo	5
4 - Evolución de la superficie cultivada	7
5 - Índice de evolución del área destinada a cada cultivo	8
6 - Uso del suelo por región	10
7 - Estructura de la superficie agrícola por región	11
8 - Proyección de la demanda	12
9 - Tipos de curvas de Engel	21
Gráficos No.:	
1 - Función hipotética de consumo de un producto "i", respecto al ingreso per cápita	14
2 - Recta de ajuste de la relación histórica ingreso- consumo per cápita de arroz	17
3 - Recta de ajuste de la relación histórica ingreso- consumo per cápita de maíz	18
<u>Ejercicio No. 2</u>	
Cuadros No.:	
1 - Estructura de la demanda interna de los principales productos agrícolas y pecuarios en el año t-1	25
2 - Disponibilidad de los principales alimentos por ha- bitante, por día, en t-16 y en t-1	27
3 - Índice del volumen físico de las exportaciones agrí- colas, pecuarias y agropecuarias	28
4 - Composición de las exportaciones de origen agropecuario	30
5 - Evolución de las exportaciones de origen agropecuario	32
6 - Evolución de las exportaciones de origen agropecuario	33
7 - Índices de crecimiento de las exportaciones de origen agropecuario	34
8 - Proyección de la demanda	35
9 - Demanda total	38
<u>Ejercicio No. 3</u>	
Cuadros No.:	
1 - Uso actual del suelo	40
2 - Uso potencial del suelo	41
3 - Estructura de la superficie agrícola	44
4 - Evolución de la superficie cultivada	47

	<u>Página</u>
5 - Índice de evolución del área destinada a cada cultivo	48
6 - Uso del suelo por región	50
7 - Estructura de la superficie agrícola por región	51
8 - Uso del suelo en la región del Llano	52
9 - Uso potencial del suelo en la región del Llano	53
10 - Índice de incrementos máximos de áreas destinadas a cada rubro, de acuerdo a las restricciones técnicas previstas	54
11 - Información complementaria a utilizar en la elaboración del modelo de programación lineal	55
12 - Metas de uso del suelo	61
13 - Coeficientes de la función objetivo	62
14 - Solución óptima para la función objetivo No. 1	63
15 - Solución óptima para la función objetivo No. 2	64

Ejercicio No. 4

Cuadros No.:

1 - Evolución de la estructura de la producción agropecuaria	67
2 - Evolución de los rendimientos de los principales rubros agropecuarios	69
3 - Evolución del valor bruto de producción agropecuaria	70
4 - Índice del valor bruto de producción de los principales productos agrícolas y pecuarios	71
5 - Estructura por rubros del valor bruto de producción agropecuaria en t-1 y en el Año 5	72
6 - Estructura del valor bruto de producción por región en el año 5	73
7 - Estructura del valor bruto de producción por tipo de empresa en el año 5	74
8 - Áreas, rendimientos y producción de los principales rubros agropecuarios	76
9 - Tasas de crecimiento para el período Año 1/Año 5	77
10 - Proyección de áreas, rendimientos y producción de los principales rubros agropecuarios	78
11 - Volumen físico de la producción	79

Ejercicio No. 5

Cuadro No.:

1 - Evolución de la oferta global de productos agropecuarios	81
2 - Evolución de la demanda global de productos agropecuarios	82
3 - Evolución de la demanda global de productos agropecuarios	85
4 - Estructura interna de productos nacionales en t-1 y Año 5	86

./...

	<u>Página</u>
5 - Consumo humano de maíz, trigo y arroz extranolado por la recta de ajuste de la relación histórica ingreso-consumo	88
6 - Evolución de la dieta alimenticia diaria	89
7 - Disponibilidad de los principales alimentos por habitante y por día en el Año 5	90
8 - Demanda interna de productos agropecuarios para uso intermedio en los Años t-1 y 5	92
9 - Evolución de las exportaciones de origen agropecuario	94
10 - Evolución de las exportaciones de origen agropecuario	95
11 - Índices de crecimiento de las exportaciones de origen agropecuario	96
12 - Evolución de la oferta global de productos agropecuarios	98
13 - Volumen físico de la producción	99
14 - Demanda interna agropecuaria - Año 5	100
15 - Demanda interna total de productos agropecuarios Año 5	101
16 - Volumen físico de la demanda interna de productos agropecuarios	102
17 - Proyección de saldos exportables y necesidades de importación - Año 5	103
18 - Balance de oferta y demanda global de productos agropecuarios	104

Ejercicio No. 6

Cuadros No.:

1 - Evolución de la población	106
2 - Distribución de la población rural por región y tipo de empresa	108
3 - Distribución mensual de la mano de obra total según su participación en el proceso productivo - Año t-1	109
4 - Requerimientos anuales de mano de obra directa, por rubro y región	111
5 - Ocupación agropecuaria por región y tipo de empresa	112
6 - Distribución mensual de la mano de obra total según su participación en el proceso productivo - Año 5	115
7 - Requerimientos anuales de mano de obra por región - Año 5	116
8 - Requerimientos anuales de mano de obra por tipo de empresa - Año 5	117
9 - Requerimientos mensuales de mano de obra directa para el cultivo de maíz en una empresa subfamiliar - Año 5	119
10 - Requerimientos mensuales de mano de obra directa para el cultivo de maíz por tipo de empresa - Año 5	120
11 - Requerimientos de mano de obra por hectárea, por tipo de empresa, en la región del Llano, y superficie ocupada por rubro de producción en el año meta	121

	<u>Página</u>
12 - Requerimientos de mano de obra mensuales	122
13 - Jornadas directas mensuales requeridas por hectárea de maíz por tipo de empresa en el Llano	124
14 - Requerimientos anuales de mano de obra en el Llano Subfamiliar - Año 5	125
15 - Requerimientos anuales de mano de obra en el Llano Familiar - Año 5	126
16 - Requerimientos anuales de mano de obra en el Llano Multifamiliar - Año 5	127
Gráfico No.	
1 - Requerimientos mensuales de mano de obra y población económicamente activa en la región del Llano para el Año 5	130
<u>Ejercicio No. 7</u>	
Cuadros No.	
1 - Evolución de la población	132
2 - Distribución de la población rural por región y tipo de empresa - Año t-1	134
3 - Distribución mensual de la mano de obra total según su participación en el proceso productivo - Año t-1	135
4 - Requerimientos anuales de mano de obra directa, por rubro y región - Año t-1	137
5 - Ocupación agropecuaria por región y tipo de empresa Año t-1	138
6 - Distribución mensual de la mano de obra total según su participación en el proceso productivo - Año 5	141
7 - Requerimientos anuales de mano de obra por región Año 5	143
8 - Requerimientos anuales de mano de obra por tipo de empresa - Año 5	144
9 - Requerimientos mensuales de mano de obra directa para el cultivo de maíz en una empresa subfamiliar - Año 5	145
10 - Requerimientos mensuales de mano de obra directa para el cultivo de maíz por tipo de empresas - Año 5	146
11 - Requerimientos de mano de obra por hectárea, por tipo de empresa, en la región del Llano, y superficie ocupada por rubro de producción en el año meta	147
12 - Requerimientos de mano de obra mensuales	148
13 - Desempleo y porcentaje de ocupación mensual en el Llano	150
Gráfico No.:	
1 - Requerimientos emnsuales de mano de obra en el año t-1 y 5	151

Ejercicio No. 8

Cuadros No.:

1 - Inversión neta agropecuaria	153
2 - Capital agropecuario a costo de reposición	155
3 - Capital depreciado por región y tipo de empresa - Año t-1	156
4 - Evolución de la inversión bruta proyectada y sus componentes	158
5 - Evolución y estructura de la inversión neta agropecuaria	159
6 - Evolución y estructura del capital agropecuario a costo de reposición	160
7 - Capital depreciado por región - Año 5	162
8 - Capital depreciado por tipo de empresa - Año 5	163
9 - Índice de evolución del capital agropecuario a costo de reposición	164
10 - Composición porcentual del capital depreciado en los años t-1 y 5.	165
11 - Información para el cálculo de la inversión bruta total y capital sin depreciar en praderas en los 5 años del Plan	168
12 - Información para el cálculo del parque de tractores en t-1, y de la demanda total de tractores en el período t-1/Año 5	169
13 - Capital sin depreciar, inversión bruta, fuera de uso y cambio de existencias para el período t-1/Año 5	171
14 - Amortización, inversión neta y capital depreciado	173
15 - Estructura del capital sin depreciar, y amortización de praderas para el período t-1/Año 5	174
16 - Amortización, inversión bruta, inversión neta y capital depreciado	175
17 - Demanda total de tractores en el período t-1/Año 5	176
18 - Capital sin depreciar, inversión bruta, cambio de existencias, fuera de uso, amortización e inversión neta en tractores para el período t-1/Año 5	177

Ejercicio No. 9

Cuadros No.:

1 - Evolución del destino de la producción de carne vacuna	180
2 - Evolución proyectada de la producción por animal en existencia y la dotación	182
3 - Evolución de la estructura del stock vacuno	183
4 - Evolución proyectada de las tasas de procreo y mortandad	185
5 - Evolución de las tasas de faena y producción del stock bovino	186
6 - Evolución de la producción esperada de los distintos tipos de forrajes de pastoreo	188
7 - Evolución de la superficie forrajera destinada a vacunos	189
8 - Recursos comprometidos para la producción de carne vacuna en t-1 y Año 5	191
9 - Combinación de factores productivos para la producción de carne vacuna en t-1 y en el Año 5	192

	<u>Página</u>
10 - Relación entre los factores productivos y el valor generado por la producción de carne vacuna en t-1 y en el Año 5	193
11 - Información para la proyección del stock de ganado vacuno en el período t-1/Año 5	198
12 - Stock gandero y tasas de mortandad y faena por categoría en el año 4	199
13 - Estructura por categorías del stock vacuno en el Año 5	200

Ejercicio No. 10

Cuadros No.

1 - Información para el cálculo de indicadores - Año t-1	202
2 - Información para el cálculo de indicadores - Año 5	203
3 - Información para el cálculo del saldo neto de comercio exterior	204
4 - Información para comparación gráfica entre tendencia histórica y plan de desarrollo	205
5 - Determinación del valor agregado neto por región (t-1)	207
6 - Determinación del valor agregado neto por región - Año 5	208
7 - Determinación del saldo neto de comercio exterior	209
8 - Índices de crecimiento de las productividades parciales de los recursos entre t-1 y Año 5, por región y para todo el país	210
9 - Productividad marginal de las divisas demandadas por el plan de desarrollo agropecuario	211

Gráficos No.:

1 - Saldo neto de comercio exterior	212
2 - Valor agregado por hectárea dedicada a la actividad agropecuaria	213

Ejercicio No. 11

Cuadros No.:

1 - Origen de los aumentos de la producción en la agricultura según provengan de mayores áreas, más altos niveles de productividad o variaciones en el uso del suelo	215
2 - Información para calcular índices de productividad y origen de los aumentos de producción	219
3 - Cambio de la productividad de las tierras	221
4 - Orígenes de los aumentos de producción	222

Gráfico No.:

1 - Origen de los aumentos de producción en la agricultura sin cambios en el uso del suelo	218
--	-----

EJERCICIOS PRACTICOS PARA LA CAPACITACION EN FORMULACION Y EVALUACION

DE PLANES DE DESARROLLO AGROPECUARIO DE MEDIANO PLAZO

I. INTRODUCCION

Se plantean en el presente trabajo una serie de ejercicios referidos a aspectos de la formulación y evaluación de un plan agropecuario quinquenal, que pueden ser desarrollados independientemente uno del otro, de acuerdo a los intereses de los cursos sobre planificación y desarrollo agrícola.

Estos ejercicios se ubican en el contexto de un país imaginario, Americana, perteneciente a América Latina.

Se supone que su extensión es de aproximadamente 300.000 Km² y presenta una configuración topográfica que permite distinguir dos grandes regiones: los llanos (cerca de la 3a. parte del país) y la meseta, la región más extendida.

Otras características necesarias de señalar para el desarrollo de los ejercicios, se presentan en los antecedentes de cada uno de ellos.

Se identifica como año 1 el año de comienzo del Plan, y año 5 el año meta. La información histórica se señala con un rezago (t-1) de acuerdo al tiempo que la separe del año de inicio del Plan.

Se abarcan los siguientes temas:

- TEMA I - Proyección de la demanda.
- TEMA II - Proyecciones de oferta.
- TEMA III - Proyección de la mano de obra.
- TEMA IV - Proyección del capital agropecuario.
- TEMA V - Evaluación del Plan.

Los ejercicios se estructuran de la siguiente forma:

1. Planteo del problema

. Antecedentes

Se ubica el ejercicio en el contexto de las características del país.

. Datos

La información numérica se presenta generalmente ordenada en cuadros.

. Enunciado

Incluye las preguntas concretas a las que el alumno debe responder.

2. Solución

- Procedimiento
Cuando corresponde, se desarrolla en este punto el procedimiento que se entiende más adecuado para la resolución del problema planteado.
- Resolución numérica
Se incluye la presentación de los resultados y se explicitan los cálculos por los que se llegó a ellos.
- Discusión
Cuando se indique en el enunciado se procederá a discutir el resultado y el método adoptado.

Cada tema comprende más de un ejercicio. La información numérica se provee por ejercicio. Existen casos en que los antecedentes y/o los datos necesarios para el desarrollo de algunos de los ejercicios son los mismos, difiriendo el enunciado y la solución. En tales casos, se ha reiterado esta información a efectos de facilitar la consideración de cada ejercicio como una unidad.

2

3

4

5

6

7

II. EJERCICIOS

TEMA I - Proyección de la demanda

Ejercicio No. 1 - Proyección de la demanda para consumo humano de arroz y maíz

1. Planteo

1.1 Antecedentes

De acuerdo al censo del año t-1, el 63 por ciento de la superficie del país se encuentra dedicada a ganadería. Del total de tierras ganaderas, casi el 95 por ciento es campo natural, correspondiéndole el resto a mejoras forrajeras anuales y permanentes, lo que denota la extensividad de la explotación que se realiza. El área dedicada a cultivos para cosecha representa un 11,3 por ciento, y la superficie cubierta con bosques el 8,3 por ciento del total del país.

A nivel regional, se observa en la región urbana una menor importancia relativa de la ganadería (51,5 por ciento del área) y una participación de los cultivos apreciablemente mayor a la media nacional (28,5 por ciento).

En la meseta, la superficie destinada a cultivos (principalmente trigo) representa solamente el 7,6 por ciento, notándose una mayor importancia de las áreas forestales, que cubren el 11,0 por ciento de la superficie regional. Cabe anotar que los 2,1 millones de hectáreas forestales de la meseta significan el 84% del total de bosques del país.

El área destinada a ganadería en la región no se aparta mayormente de la media nacional. El campo natural supera el 61% de la superficie total.

En los llanos, el área cultivada alcanza al 15% siendo los bosques relativamente menos importantes (3,3%). Las mejoras forrajeras representan el 5 por ciento.

En las tierras dedicadas a cultivos, los rubros intensivos (caña de azúcar, horticultura, frutales, algodón, etc.) ocupan aproximadamente el 30% de las mismas; los semiextensivos (arroz, maíz) un 26% y los extensivos (trigo, soja) el 44% restante.

En cuanto a la importancia de los diferentes cultivos para cosecha, el trigo es el que ocupa mayor superficie: el Censo del año t-1, indicaba 1.170 miles de hectáreas sembradas con trigo, o sea casi el 35% del área cultivada. En la meseta, la región ecológicamente más apta para cereales de invierno, la superficie sembrada con trigo representa más de las tres cuartas partes del área de cultivos (véase Cuadro No. 1).

El maíz le sigue en importancia (22% del área). Este cultivo tiene mayor importancia relativa en la región urbana, donde ocupa la mitad de la superficie agrícola, mientras que en la meseta representa solamente un 4 por ciento.

La caña es el tercer cultivo del país en relación a la superficie ocupada (15% del total). Su cultivo se localiza totalmente en el llano, donde representa el 36% de la superficie.

ESTRUCTURA DE LA SUPERFICIE AGRICOLA POR REGION

(año t-1)

REGION	TRIGO	ARROZ	SOJA	CAÑA	MAIZ	ALGODON	FRIJOLES	HUERTA	FRUTALES	OTROS	TOTAL
 en miles de hectáreas										
URBANA	-	-	20	-	280	25	50	80	100	15	570
LLANO	80	105	105	500	415	20	42	50	20	33	1.370
MESETA	1.090	35	190	-	55	-	20	28	9	13	1.440
TOTAL	1.170	140	315	500	750	45	112	158	129	61	3.380
 en porcentaje del total										
URBANA	-	-	3,5	-	49,1	4,4	8,8	14,0	17,6	2,6	100
LLANO	5,7	7,7	7,7	36,5	30,3	1,5	3,1	3,6	1,5	2,4	100
MESETA	75,7	2,4	13,3	-	3,8	-	1,4	1,9	0,6	0,9	100
TOTAL	34,6	4,1	9,3	14,8	22,3	1,3	3,3	4,7	3,8	1,8	100

I
N
I

El análisis de las posibilidades de expandir la producción debe apoyarse en las diferencias existentes entre el uso actual y potencial del suelo (véase Cuadros 2 y 3). Las posibilidades futuras de desarrollo agropecuario están determinadas por la capacidad potencial de uso de los suelos y el aprovechamiento que se haga de la misma, asumiendo que cuente con los recursos que requiere este aprovechamiento y que existan mercados para absorber la mayor producción obtenida.

Los estudios de diagnóstico del sector agropecuario han permitido establecer que de los 24,8 millones de hectáreas productivas con que cuenta el país, tan sólo 10,65 millones pueden considerarse cultivables, o sea susceptibles de ser roturadas y sometidas a cultivos anuales o permanentes. A su vez, considerando los requerimientos planteados por la conservación del recurso, no toda esa superficie puede ser arada todos los años, estimándose en sólo 7,2 millones el máximo roturable cada año.

El resto de las tierras productivas del país, o sea 14,15 millones de hectáreas no tienen otra alternativa que el uso pastoral o forestal. Esta superficie, a su vez, puede mantenerse con su vegetación natural o ser mejorada, mediante fertilización y/o incorporación de nuevas especies, manejo, etc.

El uso que actualmente se hace de los suelos dista mucho de aproximarse a su capacidad potencial. Esta subutilización de uso de las tierras agrícolas está referida al país en su conjunto. Sin embargo, en las zonas donde actualmente está concentrada la agricultura del país, así como en los establecimientos pequeños, los suelos vienen siendo sometidos a un uso exagerado. Como consecuencia de este hecho, importantes áreas están seriamente afectadas o amenazadas por la erosión.

Las proyecciones de la producción agrícola están basadas en las previsiones sobre las áreas que es posible incorporar a la producción y los rendimientos esperados por unidad de superficie.

Los aumentos de producción previstos descansan, en primer lugar, en un cambio en el uso del suelo, que lo aproxime al potencial y reduzca la presión ejercida sobre las áreas sobreexplotadas. En este sentido, la región que presenta mayor diferencia entre el uso actual y potencial es la del Llano, y será en ella donde se produzcan los cambios más importantes en el área cultivada.

Los rubros que se expandirán más aceleradamente son: el maíz, la soja y el trigo; menos importancia tendrá la expansión del principal rubro exportable: la caña de azúcar.

La importancia de la expansión de las áreas destinadas a los distintos rubros se definió en base a su contribución al comercio exterior, medida en términos de divisas; el saldo de divisas fue el indicador básico utilizado.

Complementariamente, se tuvieron en cuenta las implicancias derivadas de la expansión del área cultivada. Así, un primer grupo de cultivos, integrados por la soja y el maíz, constituyen rubros con un mínimo de requerimientos adicionales de maquinaria, conocimientos tecnológicos de producción, requisitos de almacenamiento, etc.; éstos son los cultivos cuya promoción puede

USO ACTUAL DEL SUELO

(año t-1)

REGION	GANADERIA			Uso Agrícola	Uso Forestal	Superficie Improductiva	Superficie Total
	Campo Natural	Mejoras Forrajeras	Sub Total				
 en miles de hectáreas						
URBANA	900	130	1.030	570	100	300	2.000
LLANO	5.400	430	5.830	1.370	300	1.500	9.000
MESETA	11.650	420	12.060	1.440	2.100	3.400	19.000
TOTAL	17.940	980	18.920	3.380	2.500	5.200	30.000
 en porcentaje del total						
URBANA	14,0	5,5	51,5	28,5	5,0	15,0	100
LLANO	60,0	4,8	64,8	15,2	3,3	16,7	100
MESETA	61,3	2,2	63,5	7,6	11,0	17,9	100
TOTAL	59,8	3,3	63,1	11,3	8,3	17,3	100

USO POTENCIAL DEL SUELO

REGION	CULTIVOS	USO PASTORIL	USO FORESTAL	SUPERFICIE IMPRODUCTIVA	SUPERFICIE TOTAL
 en miles de hectáreas				
URBANA	1.150	450	100	300	2.000
LLANO	5.400	1.800	300	1.500	9.000
MESETA	4.100	9.900	1.600	3.400	19.000
TOTAL	10.650	12.150	2.000	5.200	30.000
 en porcentaje del total				
URBANA	57,5	22,5	5,0	15,0	100
LLANO	60,0	20,0	3,3	16,7	100
MESETA	21,6	52,1	8,4	17,9	100
TOTAL	35,5	40,5	6,7	17,3	100

tener el máximo efecto en el mínimo tiempo. Para estos rubros, las previsiones de áreas máximas en el período del Plan fueron de tres veces la superficie actual.

El arroz requiere para su expansión fuertes inversiones y es un cultivo relativamente especializado. Por ello, la expansión del área cultivada en el año meta del Plan se entendió debía no ser superior al doble del área cultivada actualmente.

Finalmente, la expansión del área cañera implica también una infraestructura muy importante; se consideró en este caso una expansión máxima posible del 30%.

Teniendo en cuenta este conjunto de elementos, se procedió a proyectar el uso agrícola de los suelos, ajustado, como ya se mencionó, a la superficie cultivable, y, particularmente, el área arable anualmente.

El total del área cultivada se completa con los cultivos destinados a la alimentación animal por medio del pastoreo directo; praderas anuales, permanentes y campo natural mejorado. Aquí también se establecieron ciertos topes por razones técnicas, según la facilidad de expansión del rubro.

En base a todos los elementos anteriores, se definió el área cultivada propuesta para el período del Plan (véase Cuadro No. 4). Se puede observar en el mismo que, en el Período del Plan se produce un importante acercamiento entre el uso propuesto y el potencial; así, el área cultivada pasa, de constituir el 49,9% del área potencialmente cultivable en el año t-1, a ser el 71,5% en el año 5. De la misma manera, el área arada anualmente representa en t-1 el 48,3% del potencial, mientras que en el año meta alcanza al 88,9% de la misma.

En el Cuadro No. 5 se presenta el índice de crecimiento de las áreas de los distintos rubros; se observa así que, dentro de los rubros agrícolas son aquellos destinados preferentemente a la exportación los que presentan un mayor incremento de área, y, dentro de éstos tienen particular relevancia los rubros que señalan la intención de la diversificación de la producción y las exportaciones: la soya, el maíz y el arroz. Este último se mantiene a un nivel más restringido por las dificultades específicas que plantea en el mediano plazo, como rubro que depende del riego, requiriendo una importante infraestructura complementaria.

Dentro de los cultivos destinados a la producción pecuaria, destaca el importante crecimiento del campo natural mejorado, de mínimos requerimientos de capital y pasible de ser realizado en áreas no roturables; también se expande al máximo potencial, en este período, el área de praderas permanentes, mientras lo hacen en forma más restringida las praderas anuales, que compiten directamente con los cultivos agrícolas por el área arable anualmente.

Complementariamente a estos incrementos del área cultivada, teniendo en cuenta que la frontera agrícola del país ha sido alcanzada, se produce una reducción de la superficie de campo natural y forestal

EVOLUCION DE LA SUPERFICIE CULTIVADA
(en miles de hectáreas)

RUBROS	A ñ o					
	t-1	1	2	3	4	5
Caña	500	480	507	536	566	600
Trigo	1.170	1.000	1.051	1.105	1.161	1.232
Maíz	750	720	800	1.100	1.350	1.673
Arroz	140	140	160	190	220	255
Soja	315	320	420	550	720	945
Algodón	45	45	46	47	48	49
Frijoles	112	110	113	115	118	121
Huerta	158	160	162	165	167	170
Frutales	129	130	132	134	137	139
Otros	61	65	65	66	66	66
SUBTOTAL AGRICOLA	3.380	3.170	3.546	4.008	4.553	5.251
Praderas anuales	510	513	600	700	815	950
Praderas permanentes	470	474	622	817	1.073	1.410
Campo nat. mejorado	180	182	271	405	603	900
SUBTOTAL PECUARIO	1.160	1.169	1.493	1.922	2.491	3.260
TOTAL	4.540	4.339	5.039	5.930	7.044	8.511

INDICE DE EVOLUCION DEL AREA DESTINADA A CADA CULTIVO

(Año t-1 = 100)

RUBROS	A ñ o					
	t-1	1	2	3	4	5
Caña	100.0	96.0	101.4	107.2	113.2	120.0
Trigo	100.0	85.5	89.8	94.4	99.2	105.3
Maíz	100.0	96.0	118.7	146.7	180.0	223.1
Arroz	100.0	100.0	114.3	135.7	157.1	182.1
Soja	100.0	101.6	133.3	174.6	288.5	300.0
Algodón	100.0	100.0	102.2	104.4	106.6	107.7
Frijoles	100.0	98.2	100.9	102.7	105.4	107.7
Huerta	100.0	101.3	102.5	104.4	105.7	107.7
Frutales	100.0	100.8	102.3	103.9	106.2	107.7
Otros	100.0	106.6	106.9	107.4	107.7	107.7
SUBTOTAL AGRICOLA	100.0	93.8	104.9	118.6	134.7	154.9
Praderas anuales	100.0	100.6	117.7	137.8	159.8	186.3
Praderas permanentes	100.0	99.2	132.3	173.8	228.3	300.0
Campo nat. mejorado	100.0	101.1	150.6	225.0	335.0	500.0
SUBTOTAL	100.0	100.8	128.7	165.7	214.7	281.0
TOTAL	100.0	95.6	111.0	130.6	155.2	187.5

Referente a estos últimos, en el período del Plan se estima que se producirá una reducción de 500 mil hectáreas en el área forestal. Dicha reducción será consecuencia de la deforestación del Valle del Río Guaraní. También se prevé la sustitución en algunas áreas del bosque natural, degradado por especies más valiosas que justifiquen una más racional explotación maderera de futuro.

El área excluida de los usos anteriormente mencionados continuará cubierta de praderas naturales; dicha área pasa de 17.760 miles de hectáreas en t-1 a 14.289 miles de hectáreas en el año 5, es decir, se reduce en un 20%.

Analizando ahora los cambios en el uso del suelo por región, se observa que los incrementos del área cultivada aumentan un 117,9% entre t-1 y el año 5, siendo menor su importancia en la región urbana (57%) y la meseta (39%). (Véase Cuadro No. 6).

Como consecuencia de lo anterior se produce una importante aproximación al área potencialmente cultivable mostrándose a continuación cómo se modifica en cada región el porcentaje de área cultivada:

<u>Región</u>	<u>Area cultivada / Area potencial</u>	
	<u>Año t-1</u>	<u>Año 5</u>
Urbana	60,9	95,8
Llano	33,3	72,6
Meseta	<u>45,4</u>	<u>63,0</u>
Total	40,9	71,5

En lo referente a la estructura regional del área con cultivos agrícolas, se aprecia un importante incremento de la importancia de los cultivos destinados principalmente a la exportación, con excepción de la caña y el trigo por las restricciones técnicas y económicas ya planteadas anteriormente (véase Cuadro No.7).

1.2 Datos

Véase Cuadro No. 8.

1.3 Enunciado

- a) Calcule la demanda para consumo humano de arroz y maíz para todos los años del Plan (1 - 5). Verifique gráficamente sus resultados. Se parte del supuesto de que se ha mantenido inalterada la tendencia histórica de la función consumo.
- b) i) Calcule la elasticidad - ingreso de la demanda de arroz y maíz en el punto de los valores medios, \bar{x} , \bar{y} .
ii) Observe la variación de la elasticidad a lo largo de la recta, calculando la misma para valores del ingreso por encima y por debajo del punto medio. ¿Cómo varía la elasticidad a lo largo de la recta?

USO DEL SUELO POR REGION

(Año 5)

REGION	USO GANADERO		Subtotal	Uso Agrícola	Uso Forestal	Superficie Improductiva	Superficie total
	Campo Natural + C. Natural Mejorado	Mejoras forrajeras cultivadas					
URBANA	498	390	888	712	100	300	2.000
LLANO	3.277	1.290	4.567	2.633	300	1.500	9.000
MESETA	11.414	680	12.094	1.906	1.600	3.400	19.000
TOTAL	15.189	2.360	17.549	5.251	2.000	5.200	30.000
 en miles de hectáreas						
 en porcentaje del total						
URBANA	24.9	19.5	44.4	35.6	5.0	15.0	100
LLANO	36.4	14.3	50.7	29.3	3.3	16.7	100
MESETA	60.1	3.6	63.7	10.0	8.4	17.9	100
TOTAL	50.6	7.9	58.5	17.5	6.6	17.4	100

ESTRUCTURA DE LA SUPERFICIE AGRICOLA POR REGION
(Año 5)

REGION	TRIGO	ARROZ	SOJA	CAÑA	MAIZ	ALGODON	FRIJOLES	HUERTA	FRUTALES	OTROS	TOTAL
URBANA	-	-	60	-	369	27	54	86	100	16	712
LLANO	86	210	315	600	1.245	22	45	54	20	36	2.633
MESETA	1.146	45	570	-	59	-	22	30	20	14	1.906
TOTAL	1.232	255	945	600	1.673	49	121	170	140	66	5.251
 en miles de hectáreas										
URBANA	-	-	8,4	-	51,8	3,8	7,6	12,2	14,0	2,2	100
LLANO	3,3	8,0	12,0	22,7	47,2	0,8	1,7	2,1	0,8	1,4	100
MESETA	60,1	2,4	29,9	-	3,1	-	1,2	1,6	1,0	0,7	100
TOTAL	23,5	4,9	18,0	11,4	31,8	0,9	2,3	3,2	2,7	1,3	100
 en porcentaje del total										

PROYECCION DE LA DEMANDA

Años	Consumo humano bruto per cápita (en kilogramos)		Ingreso per cápita	Población (miles de hab.)	Consumo per cápita (kilogramos netos) ^{1/} Carne vacuna
	Mafz	Arroz			
t-16	113,3	25,5	586		
t-15	110,1	26,0	594		
t-14	108,3	26,2	576		
t-13	106,7	26,5	625		
t-12	103,2	26,9	616		
t-11	100,8	27,2	629		
t-10	98,2	27,6	637		
t-9	96,6	28,1	658		
t-8	94,0	28,4	661		
t-7	92,1	28,7	677		
t-6	90,2	29,1	648		
t-5	88,6	29,5	669		
t-4	86,2	29,8	695		
t-3	83,5	30,2	722		
t-2	81,3	30,5	742		
t-1	79,4	30,8	753	4.500	23,9
1	79,4 ^{2/}	30,9 ^{2/}	736	4.604	23,8
2			830	4.710	24,4
3			872	4.818	25,1
4			915	4.929	25,6
5			961	5.042	26,3

^{1/} Rendimiento en canal: 53 por ciento.

^{2/} Datos estimados

iii) Teniendo en cuenta las funciones hipotéticas de consumo de un producto i , respecto al ingreso per cápita, representadas en el Gráfico No. 1, discuta:

- a. La validez de emplear una función del tipo $C_i = a + b YPC$
- b. La variación de la elasticidad-ingreso de la demanda a medida que el ingreso aumenta. ¿Debería aumentar, disminuir, o permanecer constante para un bien necesario? ¿Y para uno inferior?

c) Indique otras formas posibles de curva de demanda y sus características principales.

2. Solución de la parte a):

Cálculo de la demanda para consumo humano de maíz y arroz.

2.1 Procedimiento

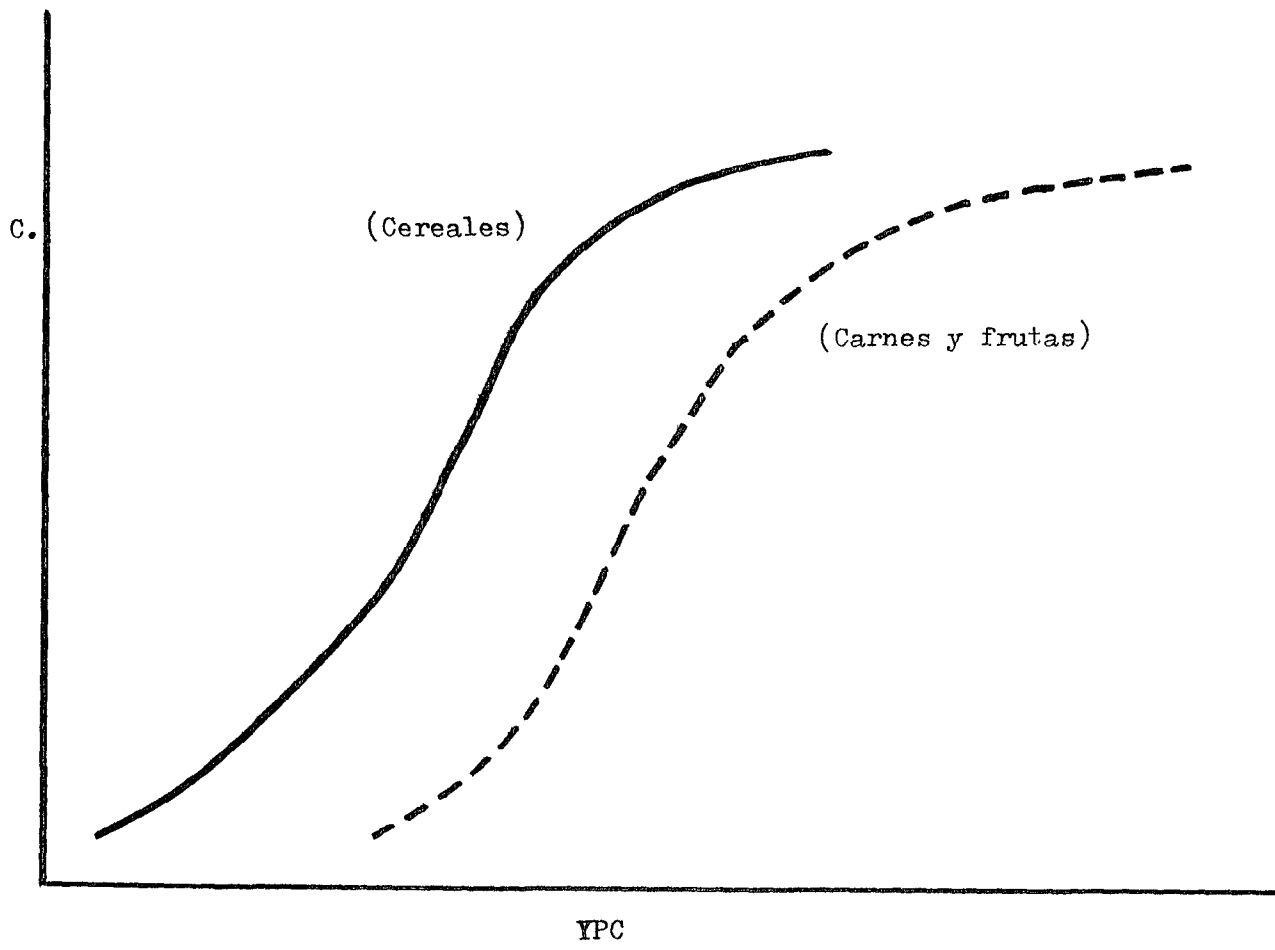
La proyección de la demanda de alimentos para consumo humano está condicionada por los siguientes factores:

- Evolución de la población, determinada por la tasa anual de crecimiento demográfico.
- Consumo de alimentos por habitante, que dependerá del ingreso personal disponible y su crecimiento, la evolución de los precios, y los cambios en la dieta que se propongan, teniendo en cuenta los hábitos o tradiciones de consumo, la situación nutricional existente y la política alimentaria prevista.
- La proyección del consumo de alimentos por habitante puede hacerse sencillamente extrapolando la tendencia histórica - método justificado cuando se carece de instrumentos para proceder de otro modo, y existen elementos de juicio que permitan aceptar la premisa de que las condiciones que se presentaron en el pasado podrán continuar actuando en el futuro durante algún tiempo. O bien, conociendo la función demanda-ingreso, la proyección puede basarse en el cálculo de la elasticidad-ingreso de la demanda.

Si hay otros factores aparte del ingreso que están afectando el consumo por habitante, éstos deberán ser tenidos en cuenta. La evolución de los precios relativos afectará la composición y el nivel del consumo de productos agropecuarios. Finalmente, las medidas de política alimentaria podrán restringir la disponibilidad de ciertos bienes o aumentar la de otros, sin reflejarse directamente estas medidas en variación de los precios relativos. Tanto precios como política alimentaria podrán determinar cambios en la composición de la dieta.

Poniendo en juego los elementos mencionados anteriormente, se puede llevar a cabo la proyección hacia el futuro de la

FUNCION HIPOTETICA DE CONSUMO DE UN PRODUCTO i,
RESPECTO AL INGRESO PER CAPITA



función del consumo existente en el país. Que esta prognosis coincida o no con las metas del Plan en materia de demanda de alimentos, dependerá de que se decida o no mantener vigente la función de consumo del pasado. Se puede por ejemplo decidir que esta función quede restringida a algunos productos, mientras que se modifique para otros que estén afectando significativamente el papel que se desea hacer cumplir al sistema agropecuario en el desarrollo nacional.

Para la proyección de la demanda para consumo humano de maíz y arroz, se supone que la función de consumo del pasado se ha mantenido inalterada. Como primer paso, se deberá determinar la relación funcional entre ingreso per cápita y consumo per cápita para maíz y arroz, en Americana. Los datos existentes indican que se logra un buen ajuste suponiendo que en este período existe una relación lineal del Tipo $C_i = a + b YPC$, siendo " C_i " el consumo per cápita, " a " la ordenada en el origen, y " b " el coeficiente de inclinación de la recta. Téngase en cuenta además que la información existente demuestra que el arroz es un "bien necesario" o sea que su consumo disminuye sólo relativamente al aumentar los ingresos (o lo que es lo mismo, que la elasticidad-ingreso de la demanda será menor que 1), mientras que el maíz es un "bien inferior", es decir, que su consumo disminuirá tanto en términos absolutos como relativamente a los ingresos al aumentar éstos (elasticidad negativa). Es un típico ejemplo de un alimento consumido esencialmente por personas de muy bajos ingresos, cuya demanda disminuye a medida que el ingreso de esas personas asciende. En el caso del maíz, esto se debe a que se ve sustituido en grado creciente por el trigo al aumentar el ingreso. (Se consume pan en lugar de tortillas).

2.2 Resolución numérica

Ajuste de recta por mínimos cuadrados:

$$b = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{11.224}{17} = 660,235$$

Arroz:

$$b = \frac{319.666,7 - (11.224)(481,9)/17}{7.458.756 - \frac{(11.224)^2}{17}} = \frac{319.666,7 - 318.167,388}{48.275,059} =$$

$$= \frac{1.499,312}{48.275,059} = \underline{0,031}$$

$$\bar{y} = \frac{481,9}{17} = 28,347$$

$$a = 28,347 - (0,031) \cdot (660,235) = 28,347 - 20,467 = \underline{7,88}$$

$$y = 7,88 + 0,031x$$

Maíz:

$$b = \frac{1.054.250 - \frac{(11.224)(1.610,9)}{17}}{7.458.756 - \frac{(11.224)^2}{17}} = \frac{1.054.250 - 1.063.573,035}{48.275,059} =$$

$$= \frac{-9.323,035}{48.275,059} = \underline{-0,193}$$

$$\bar{y} = \frac{1.610,9}{17} = 94,759$$

$$a = 94,759 - (-0,193) \cdot (660,235) = 94,759 + 127,425 = \underline{222,184}$$

$$y = 222,184 - 0,193x$$

Véase Gráficos No. 2 y 3.

2.3 Discusión

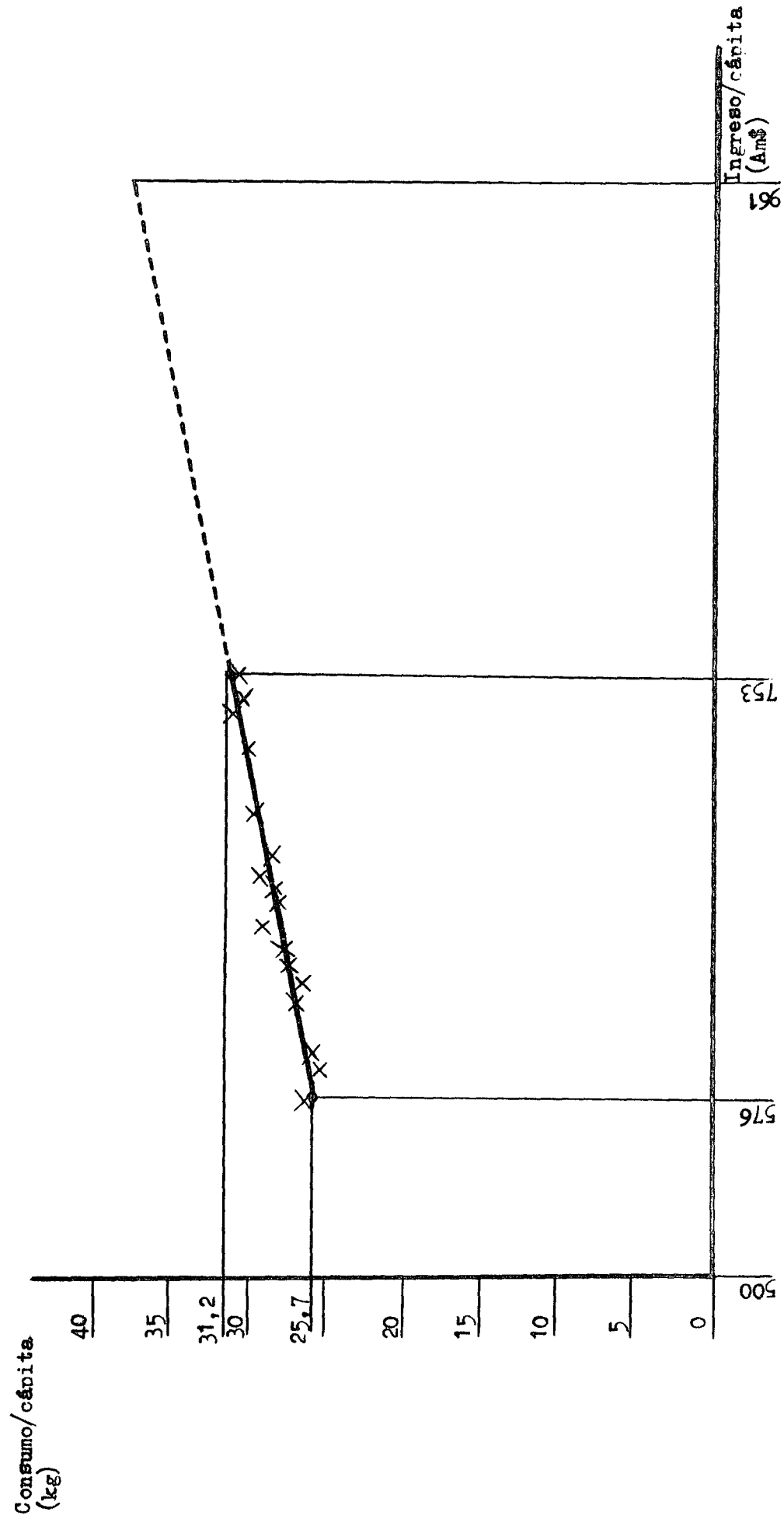
- Se procederá a la discusión de la solución y del método utilizado haciendo referencia al procedimiento adoptado en el Plan.

En el caso de Americana, la proyección de la demanda de alimentos para consumo humano se realizó en base a los siguientes supuestos:

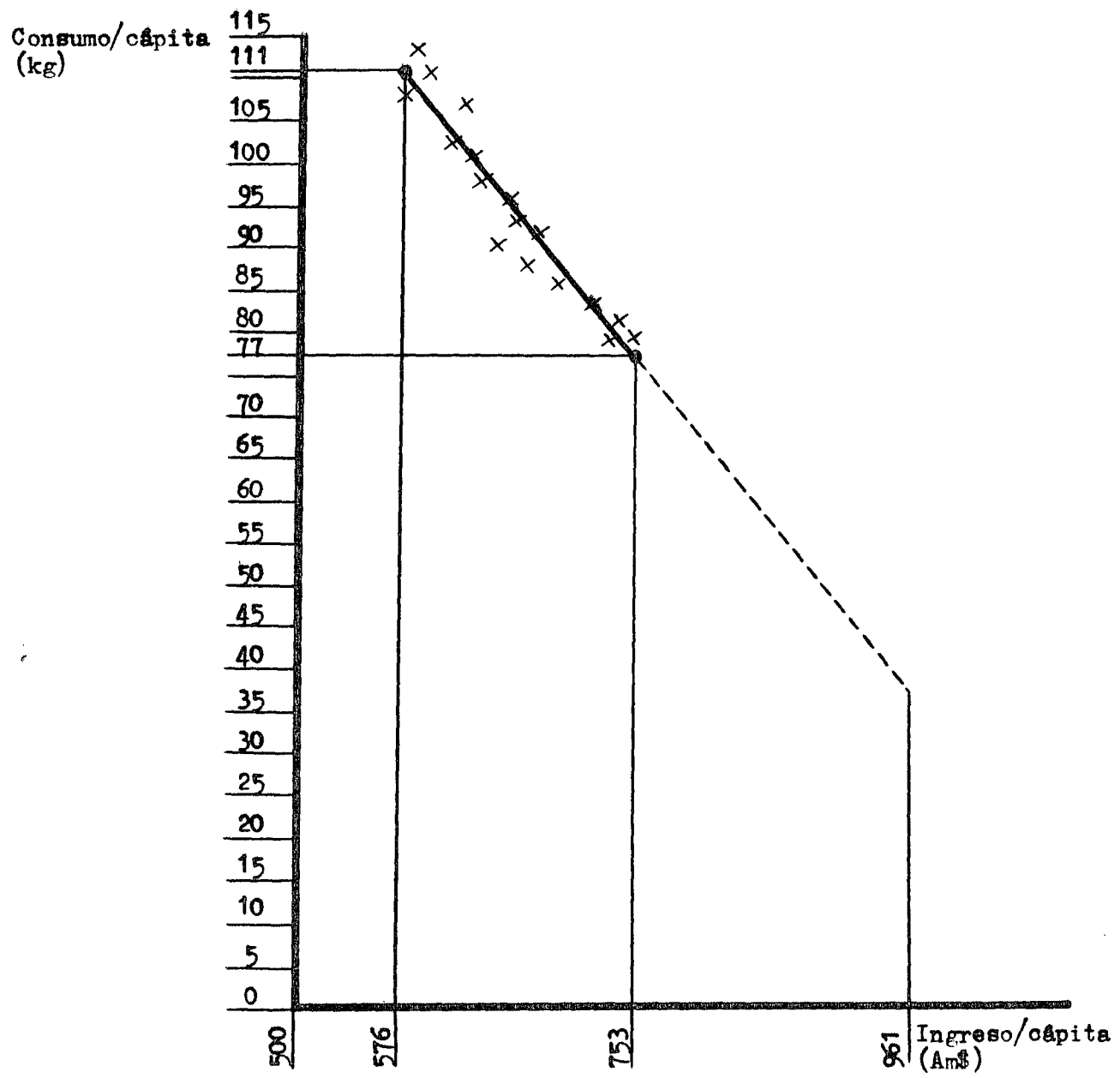
- No se consideraron modificaciones en la estructura de los precios que pagarían los consumidores, por las dificultades en procurar tanto sus variaciones como los cambios en las relaciones de los mismos entre productos sustitutivos, en el plazo del Plan.
- Para algunos productos, la estimación de su demanda futura se hizo suponiendo inalterada la función de consumo del pasado. En estos casos, y al no disponer el país de información completa sobre gastos de los consumidores a distintos niveles de ingreso como para calcular coeficientes de elasticidad que sirvan de base para la proyección de la demanda, se prefirió, al conocerse la evolución del ingreso en los años del plan, tomar las series

GRAFICO No. 2

RECTA DE AJUSTE DE LA RELACION HISTORICA INGRESO-CONSUMO PER CAPITA DE ARROZ



RECTA DE AJUSTE DE LA RELACION HISTORICA INGRESO-CONSUMO PER CAPITA DE MAIZ



históricas del diagnóstico para ingresos y consumos por habitante, y una vez calculada la función correspondiente, utilizarla para determinar la evolución del consumo.

- Para otros productos, considerados de importancia estratégica para las relaciones comerciales con el exterior (como por ejemplo la carne vacuna), se decidió cambiar la función de consumo del pasado, no permitiendo que el consumo creciera en relación al ingreso en la misma proporción que lo venía haciendo. En estos casos, el cálculo de las metas se hizo estableciendo a priori la disponibilidad por habitante que habrá para esos productos, controlando a través de la disponibilidad de sustitutos y del balance alimenticio para el año meta, la evolución de la dieta de la población y el cumplimiento de las metas de mejoramiento de la misma.

3. Solución de la parte b):

3.1 Procedimiento

La elasticidad-ingreso se define como: $\epsilon_y = \frac{\frac{\Delta C}{C}}{\frac{\Delta Y}{Y}} = \frac{\Delta C}{\Delta Y} \cdot \frac{Y}{C}$

En la ecuación $C = a + bY$, "b" puede ser visto como una medida del cambio en C dada una variación de una unidad en Y, es decir $b = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$.

Por tanto, $\epsilon_y = b \frac{Y}{C}$. La relación $\frac{Y}{C}$ debe representar

un punto de la recta de ajuste calculada. Una práctica usual es usar las medias aritméticas de Y y C, puesto que la recta de ajuste pasa por ese punto, al mismo tiempo que se obtiene un valor en la "mitad" de los datos. Para calcular la elasticidad en cualquier otro punto, se debe calcular el valor correspondiente C al valor Y elegido, y usar ambos en la relación Y/C.

3.2 Resolución numérica y Discusión

i) Cálculo de elasticidad ingreso de la demanda de arroz y maíz en el punto de los valores medios.

Arroz: $\epsilon_y = 0,031 (660,235 / 28,347 = 0,722$

Maíz: $\epsilon_y = -0,193 (660,235 / 94,759 = -1,345$

ii) Cálculo de elasticidad con valores de ingreso por encima y por debajo de la media.

Maíz

para $x = 700$ $y = 222,184 - 0,193(700) = 87,084$

$\epsilon = -0,193 \frac{700}{87,084} = -1,551$

para $x = 600$ $Y = 222,184 - 0,193(600)$

$\epsilon = -0,193 \frac{600}{106,384} = -1,088$

ϵ en $\bar{x}, \bar{y} = -1,345$

Arroz
para $x = 750$ $y = 7,88 + 0,031(750) = 31,13$

$$\epsilon = 0,031 \frac{750}{31,13} = 0,747$$

para $x = 580$ $y = 7,88 + 0,031(580) = 25,86$

$$\epsilon = 0,031 \frac{580}{25,86} = 0,695$$

$$\epsilon \text{ en } \bar{x}, \bar{y} = \underline{0,722}$$

Se observa que, en el caso del arroz, al aumentar el ingreso aumenta la elasticidad, mientras que en el caso del maíz al aumentar el ingreso, disminuye la elasticidad.

iii) Discusión

a) Una función del tipo $C_i = a + b YPC$ puede ser válida en un segmento no muy amplio de la curva, donde se puede suponer que exista una relación lineal entre consumo e ingreso (segmento medio, por ejemplo).

b) La elasticidad-ingreso de la demanda de un bien necesario debería disminuir a medida que las cantidades consumidas aumentan (el valor de la elasticidad variando en relación inversa con los ingresos); es decir, que la tasa de aumento del consumo disminuye progresivamente al aumentar los ingresos.

Esto indica que una relación del tipo $C = a + b YPC$, donde la elasticidad aumenta a medida que el ingreso aumenta, no presenta mucha validez para representar el consumo de un bien necesario, y su uso debería quedar restringido a segmentos donde las variaciones de ingreso no sean muy grandes, y para aquellos bienes que en esos segmentos puedan ser considerados como productos "de lujo", cuyo consumo aumente rápidamente junto con el ingreso.

En el caso de un bien inferior, cuyo consumo disminuye al aumentar el ingreso, la elasticidad es negativa y debería aumentar (es decir, acercarse a 0) a medida que el ingreso aumenta, hasta llegar a un punto de equilibrio (con elasticidad = 0); de otro modo, se llegaría a una situación en la que ese bien se dejaría de consumir.

4. Solución de la parte c):

4.1 Resolución (Véase Cuadro No. 9)

4.2 Características

En los análisis del consumo de alimentos se suelen utilizar varias funciones cada una de ellas adecuada a diferentes situaciones según su ajuste estadístico, la interpretación económica de la función en el marco de la teoría del consumo y la simplicidad de los cálculos. En el Cuadro No. 9 se presentan 9 funciones. A lo largo de su gama de ingresos, esas funciones describen distintas situaciones en el caso de diferentes bienes, que se clasifican en general en:

TIPOS DE CURVAS DE ENGEL

Denominación	relación entre consumo e ingreso	Propensión marginal a consumir	Coefficiente de elasticidad
1) Lineal	$C = \alpha + \beta YPC + u$	β	$\beta \frac{YPC}{C}$
2) Doble log.	$\log C = \alpha + \beta \log YPC + u$	$\beta \frac{C}{YPC}$	β
3) Semi log.	$C = \alpha + \beta \log YPC + u$	$\frac{\beta}{YPC}$	$\frac{\beta}{C}$
4) Inversa	$C = \alpha - \frac{\beta}{YPC} + u$	$\frac{\beta}{YPC^2}$	$\frac{\beta}{YPC \cdot C}$
5) Log inversa	$\log C = \alpha + \frac{\beta}{YPC} + u$	$\beta \left(\frac{C}{YPC^2} \right)$	$\frac{\beta}{YPC}$
6) Log - log inversa	$\log C = \alpha - \frac{\beta}{YPC} - \log YPC + u$	$C \left(\frac{-\beta - \gamma YPC}{YPC^2} \right)$	$\frac{\beta}{YPC} - \gamma$
7) Semi log con uso de proporciones	$\frac{C}{YPC} = \alpha + \beta \log YPC + u$	$\beta + \frac{C}{YPC}$	$1 + \beta \frac{C}{YPC}$
8) Cuadrática	$C = \alpha + \beta YPC + \gamma YPC^2 + u$	$\beta + 2 \gamma YPC$	$\beta \frac{C}{YPC} + 2 \gamma \frac{(YPC)^2}{C}$
9) Log. normal	$C = k P (\log. YPC / \sigma, \sigma^2) + u$	$\frac{C}{YPC} \frac{1}{\sigma} \frac{z(t)}{P(t)}$	$\frac{1}{\sigma} \frac{z(t)}{P(t)}$

- a) Bienes inferiores; aquellos cuyo insumo disminuye tanto en términos absolutos como relativamente al aumentar los ingresos (elasticidad negativa).
- b) Bienes necesarios, aquellos cuyo consumo sólo disminuye relativamente al aumentar los ingresos (elasticidad entre 0 y 1).
- c) Bienes de lujo, aquellos cuyo consumo aumenta tanto en términos absolutos como relativamente al aumentar los ingresos (elasticidad superior a la unidad).

En general, el valor de la elasticidad varía con los ingresos. Un artículo puede ser de lujo para un consumidor de ingresos bajos y un bien inferior para otro de ingresos altos, cuando la única diferencia entre los consumidores sean los ingresos. Lo mismo puede decirse cuando varían los niveles reales de ingresos en el correr del tiempo.

Las principales características de las funciones son:

- 1) Lineal - Útil por su sencillez de computación, en esta función la elasticidad ingreso tiende a 1 cuando aquél se incrementa. Esta es una hipótesis no siempre verificable en la realidad. Su ajuste puede ser bueno para rangos estrechos de ingreso, pero empeora en rangos bajos o altos.
- 2) Doble logarítmica - La función implica una elasticidad constante en toda la gama de ingresos. Se le ha empleado fundamentalmente para efectuar proyecciones de demanda de alimentos de lujo sobre todo en los países en desarrollo, donde el consumo de esos bienes es reducido y puede mantenerse por debajo de los niveles de saturación.
- 3) Semi logarítmica - Al igual que la función anterior, no prevé un nivel de saturación, se la ha empleado principalmente en referencia a elementos necesarios consumidos en los países en desarrollo y, asociada en general a elasticidades negativas, a los países desarrollados en el caso de los productos inferiores cuyo consumo se prevé disminuirá radicalmente al aumentar los ingresos.
- 4) Inversa - Su ajuste es generalmente bueno en rangos altos de ingresos para los cuales el consumo se acerca a su nivel de saturación (no incluye el caso de bienes inferiores).
- 5) log inversas - Dada las características del coeficiente de elasticidad que tiene esta función, su aplicación se adecua a la ingestión de calorías que aumenta rápidamente al aumentar los ingresos, partiendo de una situación de hambre, y en el caso de ingresos elevados tiende a un nivel de saturación determinado por los límites fisiológicos.
- 6) log log inversa - Es adecuada para una previsión a priori sobre la variación de las cantidades de un producto dado consumidas cuando los ingresos pasan de un nivel muy bajo a otro muy alto.

- 7) Semi log con uso de proporciones - tiene un buen comportamiento en las cercanías del promedio de ingreso. La elasticidad ingreso disminuye a medida que el ingreso aumenta, siendo muy marcada la declinación cuanto más difiera de \bar{I} dicha elasticidad.
- 8) Cuadrática - Es apropiada cuando el consumo de un bien aumenta, alcanza un máximo y luego disminuye a medida que el ingreso aumenta.
- 9) Log normal - Es una función muy flexible al contar con 3 parámetros. El bien es de lujo hasta el punto de inflexión de la curva, desde entonces, hasta el punto de saturación, deviene un bien necesario.

TEMA I - Proyección de la demanda

Ejercicio No. 2 - Proyección de la demanda total de carne vacuna y trigo

1. Planteo

1.1 Antecedentes

La demanda interna de productos agropecuarios está integrada principalmente por el consumo alimenticio de personas, en forma directa o con algún proceso de elaboración, por las semillas necesarias para la reiniciación del ciclo productivo, por los alimentos para el ganado, por las materias primas que van a la industria sin fines alimenticios, y las variaciones de existencia.

La utilización interna de productos agropecuarios aumentó rápidamente en la década de los cincuenta, no habiendo sufrido la demanda per cápita alteraciones notorias en los años que se analizan.

Los alimentos constituyen el rubro más importante de la demanda interna. En el año t-1 representaba cerca del 90% del total, absorbiendo prácticamente el 100% de la producción ganadera que queda en el mercado interno. El consumo animal es relevante como destino del maíz: absorbe el 55% de la producción. No tiene mayor importancia la demanda de materias primas por parte de la industria no alimenticia, destinándose sólo al alcohol y con menor importancia a la industria textil (véase Cuadro No. 1).

En cuanto a la evolución de la demanda interna, sólo se cuenta con información sobre consumo humano, explicativo, por otra parte, per se, de la evolución global.

El consumo de alimentos creció en el período considerado, a una tasa prácticamente coincidente con la evolución de la población.

La natural prodigalidad del país para la producción de alimentos permite alcanzar niveles alimenticios satisfactorios si se le compara con la media de América Latina. La dieta americana se caracteriza por un consumo de calorías muy próximo al de la dieta media. El trigo, el maíz y el azúcar aportan más del 50% de las calorías siendo en el 50% restante importantes por su orden, el arroz, los aceites, los frijoles, las carnes, la leche y las frutas, presentando poca relevancia el consumo de hortalizas.

La calidad nutritiva de la dieta puede apreciarse a través del contenido en proteínas, especialmente de origen animal y del porcentaje de calorías derivadas de los cereales y el azúcar.

Desde el punto de vista del contenido en proteínas, la dieta americana alcanza los requisitos considerados normales por los dietólogos - 70 gramos diarios aproximadamente - pudiéndose apreciar, sin embargo, que el componente de origen animal alcanza

**ESTRUCTURA DE LA DEMANDA INTERNA DE LOS PRINCIPALES
PRODUCTOS AGRICOLAS Y PECUARIOS EN EL AÑO t-1**

(en porcentaje del total de toneladas)

Rubro	Consumo humano	Consumo animal	Semilla	Manufactura no alimenticia	Desperdicio
Trigo	83,0	6,0	9,0	-	2,0
Maíz	40,0	55,0	1,0	1,0	3,0
Arroz	87,2	-	6,0	-	6,8
Tubérculos	77,0	-	15,0	-	8,0
Frijoles	86,0	-	12,0	-	2,0
Aceites y grasas	90,0	-	7,0	-	3,0
Frutas	95,0	-	-	-	5,0
Hortalizas	90,0	-	-	-	10,0
Caña de azúcar	90,0	-	-	10,0	-
Carne vacuna	100,0	-	-	-	-
Carne ovina	100,0	-	-	-	-
Aves y cerdos	100,0	-	-	-	-
Leche	98,0	2,0	-	-	-

Fuente: Oficina de Planificación.

sólo al 30%, lo cual coincide con el promedio de disponibilidades mundiales de alimentos. El fuerte peso de los alimentos ricos en hidratos de carbono puede generar desequilibrios en la dieta al empobrecer la provisión de vitaminas y minerales.

Se conoce la estructura de la dieta alimenticia para los años t-16 y t-1, apreciándose pocas modificaciones en su estructura y nivel (véase Cuadro No. 2). Los cambios más relevantes tienen lugar en la composición del consumo de hidratos de carbono, en particular debido al desplazamiento del maíz y los frijoles por el trigo y el azúcar. Llama también la atención, el incremento del consumo de frutas, y de leche. Las carnes, en cambio, permanecen prácticamente estabilizadas.

Las alteraciones observadas en la dieta fueron promovidas por cambios en la estructura de precios relativos entre los diferentes alimentos y por el proceso redistributivo, que a nivel urbano implicó un incremento del salario real, favoreciendo el pasaje a alimentos de mejor calidad.

No se cuenta con información por regiones ni por estratos de ingresos que permita analizar la forma en que los alimentos se distribuyen ni localizar los diversos grados de gravedad de los problemas de mal nutrición.

La situación general del país autoriza, sin embargo, a afirmar que tales desniveles existen y que amplios sectores de la población sufren carencias de calorías y fundamentalmente de proteínas, que son, sin duda, más graves en el medio rural que en el urbano.

Las deficiencias vitamínicas, a pesar del mayor consumo de frutas de los últimos años, son de orden más general, pudiéndose pensar que alcanzan a la casi totalidad de los estratos medios e inferiores de la escala de ingresos.

La evolución de la dieta encuentra diversas dificultades, según las capas sociales en las que se plantee. Los hábitos alimenticios, que arrastran en muchos casos deficiencias tradicionales, presentan mayores resistencias al cambio en los sectores menos modernos de la sociedad.

Las exportaciones de origen agropecuario, con diverso grado de transformación, constituyen la base del comercio exterior del país, representando cada año el 80% aproximadamente del total exportado. Este hecho le asigna gran importancia al sector agropecuario, que se transforma en el proveedor de las divisas necesarias para la importación de materias primas, maquinarias, combustibles, etc. que esta economía requiere.

El volumen físico de las exportaciones de origen agropecuario en los años a estudio creció un 60%, incrementándose, como consecuencia, la disponibilidad per cápita de divisas aportadas por el sector.

En la evolución de las exportaciones puede distinguirse un primer sub-período, que abarca desde el año t-16 al t-10 en que éstas se mantuvieron prácticamente incambiadas; entre t-9 y t-7, se ubican a niveles superiores en un 25% a los de la primera mitad de la 1a. década considerada y es a partir de t-5 que aceleran su crecimiento llegando en t-1 al punto más alto de los últimos veinte años. (Véase Cuadro No. 3).

DISPONIBILIDAD DE LOS PRINCIPALES ALIMENTOS POR HABITANTE, POR DIA,
EN t-1 Y EN EL AÑO 5

	Años t-16			Año t-1		
	Calorías	Proteínas (gramos)	Grasas	Calorías	Proteínas (gramos)	Grasas
Trigo	583,3	17,5	1,75	700,0	21,0	2,10
Maíz	707,1	14,3	5,00	495,0	10,0	3,50
Arroz	163,3	3,0	0,33	196,0	3,6	0,40
Tubérculos	114,3	2,9	1,02	80,0	2,0	0,72
Frijoles	247,5	12,5	8,00	148,5	7,5	4,80
Ac. y grasas	147,0	0,1	16,50	161,7	0,1	18,20
Frutas	87,1	1,4	0,57	122,0	2,0	0,80
Hortalizas	38,8	1,9	0,49	50,4	2,4	0,64
Azúcar	325,8	-	-	423,6	-	-
Carne vacuna	129,2	8,7	10,00	142,2	9,6	11,00
Carne ovina	42,6	2,1	3,48	46,9	2,3	3,83
Carne, aves y cerdos	28,4	2,9	1,66	31,3	3,1	1,83
Leche	112,3	6,3	6,30	146,0	8,2	8,20
TOTAL	2.784,9	73,6	55,10	2.743,6	71,8	56,02

Fuente: Oficina de Planificación.

INDICE DEL VOLUMEN FISICO DE LAS EXPORTACIONES

AGRICOLAS, PECUARIAS Y AGROPECUARIAS

(t-16 = 100)

Años	Azúcar	Trigo	Agrícola	Carne vacuna	Pecuaría	Agropecuaria
t-16	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
t-15	106,3	109,3	107,7	100,9	101,4	105,2
t-14	102,0	133,6	100,7	110,5	109,7	104,2
t-13	106,9	58,2	110,4	130,0	126,4	116,7
t-12	101,1	91,8	111,3	124,4	122,2	115,6
t-11	102,1	171,2	124,2	73,7	82,6	107,8
t-10	106,9	206,4	127,8	83,5	88,9	112,4
t-9	114,2	235,5	140,6	143,8	142,0	141,2
t-8	106,6	318,5	128,4	138,4	135,4	131,2
t-7	114,4	297,9	141,5	149,1	142,4	141,9
t-6	100,3	230,5	118,1	144,2	138,5	126,1
t-5	113,9	261,4	138,6	98,4	95,8	121,8
t-4	113,5	362,9	154,9	99,8	94,8	131,2
t-3	124,8	321,6	166,1	148,8	129,9	151,8
t-2	133,5	296,1	177,9	163,5	140,6	163,2
t-1	135,8	340,2	183,1	187,0	160,4	174,1
11/	126,3	259,0	167,5	174,4	150,0	160,5

1/ Cifras Preliminares.

Fuente: Oficina de Planificación.

Las exportaciones agrícolas crecen a un ritmo superior al de las pecuarias, incrementando su participación en el total agropecuario. El azúcar, rubro básico de las exportaciones agrícolas aumenta sus exportaciones sólo un 26% en estos quince años, explicándose el mayor incremento global por la expansión del saldo exportable de trigo así como por la incorporación del arroz y la soja como productos de exportación. A pesar de la diferente evolución relativa, en el año 1 todavía el azúcar representa el 42% de la demanda externa (véase Cuadro No. 4).

La carne vacuna pasa en el período, a constituirse en el único rubro de significación de las exportaciones pecuarias, compartiendo con el azúcar los renglones prioritarios que el país vende al exterior. La lana, que llegó a representar el 30% de la demanda externa de productos pecuarios durante los años 50, ha dejado de figurar entre los rubros de exportación.

Los saldos exportables de los productos de origen agropecuario no han tenido, en general, dificultades de mercado. El volumen de los mismos, en ningún caso determinante de la marcha del mercado mundial, facilita su colocación, sujeta, claro está, a los avatares de los precios.

Las exportaciones de azúcar de Americana representan el 7,5% del total comercializado en el mercado mundial, ocupando el segundo lugar, después de Cuba entre los exportadores de azúcar de América.

La importancia del azúcar en el total de exportaciones agropecuarias y la trascendencia que el cultivo de caña ha tenido sobre la configuración económica y social del país, permiten caracterizar a Americana como un país altamente dependiente de este rubro.

La carne vacuna, si bien juega un papel trascendente en las exportaciones de este país, no lo diferencia del conjunto de países ganaderos de las zonas templadas del Sur de América, estando lejos de alcanzar en su producción la calidad de las carnes argentinas y ubicándose por debajo de Uruguay como proveedor del mercado mundial.

El crecimiento de las exportaciones de origen agropecuario resulta básico para el desenvolvimiento de la estrategia agro-industrial exportadora en que se asienta la planificación del desarrollo global.

La proyección de la demanda externa debe partir del papel que le cabe a esta economía en el concierto mundial. Americana es una economía sometida a fuertes relaciones de dependencia que son determinantes de las condiciones de su comercio exterior. La demanda externa opera como una variable exógena que la potencial oferta de productos americanos no va a alterar en términos significativos. Las previsiones de la evolución de los mercados externos cobran pues, gran importancia, y el más afinado conocimiento de los mismos por las autoridades planificadoras, logrará una mejor colocación de los saldos exportables.

Las exportaciones proyectadas resultan de la conjugación de la evaluación de la capacidad de expansión de ciertas producciones en condiciones competitivas en el mercado mundial

COMPOSICION DE LAS EXPORTACIONES DE ORIGEN AGROPECUARIO

(en porcentaje sobre el total, a precios del año t-1)

Años	Carne vacuna	Otros pec.	Total pec.	Azúcar	Trigo	Mafz	Arroz	Soja	Otros agric.	Total agric.
t-16	32,2	7,3	39,5	53,4	3,8	1,2	-	-	2,1	60,5
t-15	30,9	7,0	37,9	54,1	4,1	2,2	-	-	1,7	62,1
t-14	34,1	7,4	41,5	52,3	5,1	-	0,3	-	0,8	58,5
t-13 <u>1/</u>	35,9	6,8	42,7	48,8	2,0	3,5	0,9	-	2,1	57,3
t-12	34,7	7,0	41,7	46,7	3,1	3,4	2,6	0,6	1,9	58,3
t-11	22,0	8,1	30,1	50,6	6,3	3,3	5,2	2,3	2,2	69,9
t-10	23,9	7,3	31,2	51,1	7,2	1,6	4,5	2,9	1,6	68,9
t-9	32,8	6,9	39,7	43,2	6,6	1,1	4,1	3,5	1,8	60,3
t-8	33,9	6,8	40,7	43,5	9,6	-	3,9	1,4	0,9	59,3
t-7	33,8	5,7	39,5	43,2	8,3	-	4,4	3,4	1,2	60,5
t-6	36,8	6,5	43,3	42,3	7,2	-	2,3	4,0	0,9	56,7
t-5	26,1	4,9	31,0	50,3	8,5	-	2,0	6,3	1,9	69,0
t-4	24,5	4,0	28,5	46,3	10,9	-	3,8	7,6	2,9	71,5
t-3	31,6	2,1	33,8	44,1	8,3	-	3,2	7,7	3,2	66,2
t-2	32,3	1,7	34,0	43,6	7,2	0,6	3,7	7,2	3,7	66,0
t-1	34,6	1,7	36,3	41,7	7,7	1,4	3,6	5,1	4,2	63,7
1 <u>1/</u>	35,0	1,7	36,7	42,1	6,4	0,2	4,1	5,6	4,9	63,3

1/ Cifras preliminares.

Fuente: Banco Central.

y de una apreciación de la previsible evolución de los mercados a que esa producción se destinaría.

En primer lugar se determinaron pues, los rubros para los cuales el país tiene aptitudes ecológicas y recursos suficientes para expandir su producción en términos competitivos. Se procedió luego a proyectar su expansión teniendo en consideración la reactivación que producirá en la economía la aplicación del Plan basada en la mejor utilización de sus recursos naturales, a través del diseño de una política adecuada. La estimación de la oferta proyectada de estos productos, deducido el volumen que iría a la demanda interna deja la proyección de los saldos exportables.

En seguida, ello se contrastó con las perspectivas de los mercados mundiales de esos productos y se corrigieron las proyecciones de los saldos exportables en base a las posibilidades de colocación (véase Cuadro No. 5).

El total de exportaciones agropecuarias crece un 75,2% incrementando la disponibilidad de divisas por habitante en un 56,4% (véase Cuadro No. 6 y 7).

En lo que se refiere a la composición de las exportaciones, éstas acusan el esfuerzo de diversificación que el Plan se propuso. El trigo pierde importancia relativa, mientras que el maíz, la soja y el arroz son los rubros que se desarrollan más aceleradamente, llegándose en todos ellos a superar la duplicación de los saldos exportables. (Véase nuevamente Cuadros Nos. 5, 6 y 7).

La evolución prevista para las exportaciones de carne vacuna muestran una sustancial reducción de las mismas en los primeros años del Plan como consecuencia del esfuerzo de capitalización previsto. Entran luego en una tendencia creciente llegando en el año meta a superar las de t-1. En el futuro inmediato, la potencialidad del rubro como proveedor de divisas dependerá fundamentalmente de si se mantiene o no el incremento de las existencias. Si ello no se cumpliera, el gran incremento de la producción respecto a la demanda interna prevista, provocaría un importante crecimiento de los saldos exportables.

1.2 Datos

Véase Cuadro No. 8.

- i) Carne vacuna - La producción total en el año 4 fue de 3.376 miles de cabezas, con dos destinos finales: faena y cambio de stock. Ese año se procesaron 2.364 miles cabezas, con un peso promedio de 385 kgs. de peso vivo por animal. Para cambio de stock, se asumió un peso promedio de 333 kgs.
- ii) Trigo - El consumo humano en el año 3 fue de 79,92 kgs. netos per cápita, existiendo una diferencia de 28 por ciento entre la producción y el alimento humano. La elasticidad ingreso de la demanda de trigo, en ese sector de la función, es aproximadamente igual a 0,824. En el año 5 se sembrarán 1.232 miles de hectáreas, con

EVOLUCION DE LAS EXPORTACIONES DE ORIGEN AGROPECUARIO
(en miles de toneladas)

Rubro	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Trigo	737	459	490	550	623	707
Maíz	157	214	554	846	1.325	1.907
Arroz <u>1/</u>	261	246	292	377	463	566
Soja	261	221	340	524	724	1.029
Frutas	300	308	301	285	281	259
Azúcar <u>2/</u>	20.500	19.074	20.950	23.024	25.260	27.759
Carne						
Vacuna <u>3/</u>	792	481	559	573	672	824
Lana	12	12	12	12	14	13

1/ Con cáscara.

2/ En caña de azúcar.

3/ En pie.

EVOLUCION DE LAS EXPORTACIONES DE ORIGEN AGROPECUARIO

(en millones de U\$S a precios del año t-1)

Rubros	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Trigo	98	61	65	73	83	94
Mafz	18	27	62	95	148	214
Arroz	46	44	52	67	82	101
Soja	65	55	84	130	180	255
Azúcar	533	496	601	692	868	1.040
Carne vacuna	434	263	306	314	368	451
Otros	75	76	75	72	74	68
Total	1.269	1.022	1.245	1.443	1.803	2.223

INDICES DE CRECIMIENTO DE LAS EXPORTACIONES DE ORIGEN AGROPECUARIO
(Base t-1 = 100)

Rubro	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Trigo	100,0	62,2	66,3	74,5	84,7	95,9
Maiz	100,0	150,0	344,4	527,8	822,2	1.188,9
Arroz	100,0	95,7	113,0	145,7	178,3	219,6
Soja	100,0	84,6	129,2	300,0	276,9	392,3
Azúcar	100,0	93,1	112,8	129,8	162,9	195,1
Carne vacuna	100,0	60,6	70,5	72,4	84,8	103,9
Otros	100,0	101,3	100,0	96,0	98,7	90,7
Total	100,0	80,5	98,1	113,7	142,1	175,2

PROYECCION DE LA DEMANDA

Años	Consumo humano bruto per cápita (en kilogramos)		Ingreso per cápita	Población (miles de hab.)	Consumo per cápita (kilogramos netos) 1/ Carne vacuna
	Maíz	Arroz			
t-16	113,3	25,5	586		
t-15	110,1	26,0	594		
t-14	108,3	26,2	576		
t-13	106,7	26,5	625		
t-12	103,2	26,9	616		
t-11	100,8	27,2	629		
t-10	98,2	27,6	637		
t-9	96,6	28,1	658		
t-8	94,0	28,4	661		
t-7	92,1	28,7	677		
t-6	90,2	29,1	648		
t-5	88,6	29,5	669		
t-4	86,2	29,8	695		
t-3	83,5	30,2	722		
t-2	81,3	30,5	742		
t-1	79,4	30,8	753	4.500	23,9
1	79,4 ^{2/}	30,9 ^{2/}	736	4.604	23,8
2			830	4.710	24,4
3			872	4.818	25,1
4			915	4.929	25,6
5			961	5.042	26,3

1/ Rendimiento en canal: 53 por ciento.

2/ Datos estimados

una densidad de siembra de 110 kg/ha. El desperdicio y el consumo animal son respectivamente el 2 y 5 por ciento de la producción total, habiéndose producido 1.428 miles de toneladas en el año 4.

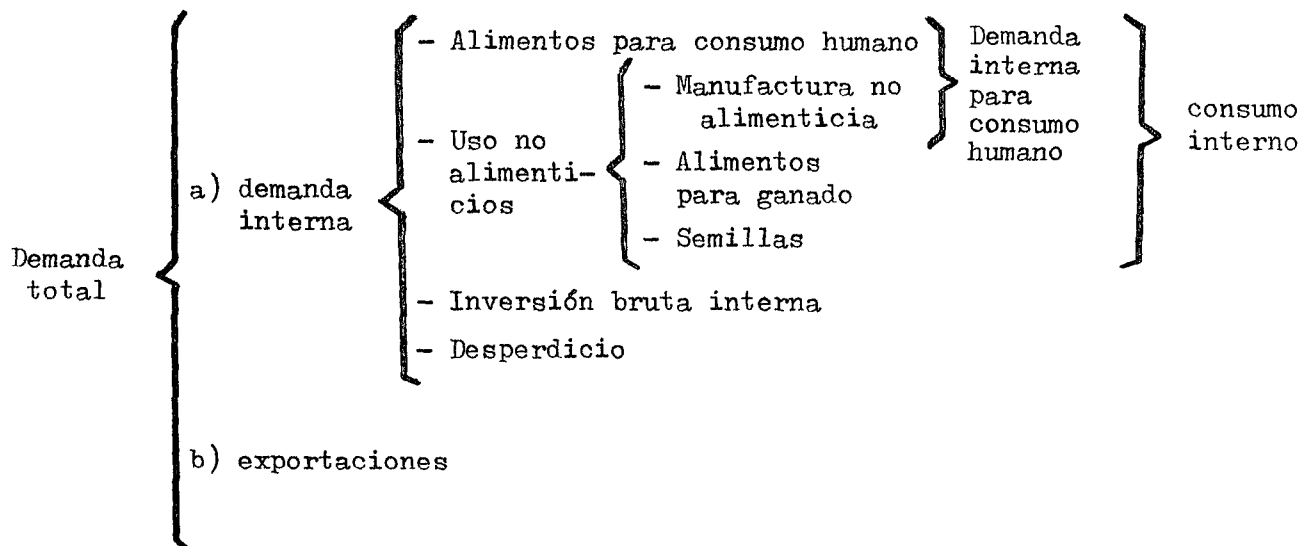
1.3 Enunciado

Calcule la demanda total de carne vacuna y trigo para el año 4.

2. Solución

2.1 Procedimiento

El cálculo de la demanda total se realiza como agregación de sus componentes. En el caso del trigo y la carne vacuna en Americana, la proyección de exportaciones se obtendrá por diferencia entre oferta y demanda interna admitiéndose que es factible la colocación de los saldos exportables.



- Se supone se ha proyectado la demanda de consumo humano.
- Proyección de la demanda de bienes agropecuarios de uso intermedio, materias primas para uso intermedio no alimenticio, alimentos para ganado, y semillas.
- En el caso de bienes destinados a manufactura no alimenticia, la proyección se realiza de acuerdo a las metas de producción de las industrias que utilizan estas materias primas.
- En el caso de productos destinados a la alimentación animal (fundamentalmente granos), la proyección se hace en base a las metas de producción establecidas para el ganado lechero, aves, cerdos, reproductores bovinos, etc., y de acuerdo a los requerimientos de alimentación de cada uno de ellos.

- La proyección de la demanda de semillas para un año dado dependerá de la previsión de siembras para el año siguiente. El área y la densidad de siembra, así como un margen de reserva para situaciones de emergencia, determinarán las necesidades.
- Finalmente, el componente restante de la demanda interna es la inversión bruta interna. Esta inversión bruta tiene dos componentes: la inversión fija y la variación de existencias. El primero de estos dos componentes comprende todos los medios fijos de producción del sector agropecuario; es el caso por ejemplo de las praderas artificiales permanentes, plantaciones frutales, etc. El segundo registra todas las modificaciones de existencias de productos agropecuarios.

2.2 Resolución numérica

i) Carne vacuna

Consumo humano: $25,6 \times 4.929.000 = 126.182.400$ kgs.
 $126.182,4$ ton. $\cdot 0,53 = 238.080$ ton.

Faena: $2.364.000$ cabezas $\times 385$ kgs. = $910.140.000$ kgs.

Cambio de stock: $3.376 - 2.364 = 1.012$ miles de cabezas.
 $1.012.000$ cabezas $\times 333$ kgs. = $336.996.000$

Saldo exportables: $910 - 238 = 672$ miles de toneladas.

ii) Trigo

$79,92 \cdot 0,72 = 111$ kg. brutos per cápita

$$\epsilon_Y = \frac{\Delta C}{\Delta Y} \cdot \frac{Y}{C} \cdot \Delta C = \left(\Delta Y \frac{C}{Y} \right)$$

$$\Delta C = 0,824 (915-872) \frac{111}{872} = 4,51$$

$C_4 = 111 + 4,51 = 115,51$ kg. brutos per cápita

Consumo humano: $115,51 \times 4.929.000 = 569.348.790$ kg.

Semilla: $110 \times 1.232.000 = 135.520.000$ kg.

Desperdicio: $1428 \times 0,02 = 28,56$ miles de ton.

Cons. animal: $1428 \times 0,05 = 71,4$ miles de ton.

Exportaciones: $1428 - (569 + 71 + 136 + 29) = 63$ miles de ton.

DEMANDA TOTAL
(miles de toneladas)

	Demanda interna					Demanda ext.	Total
	Consumo humano	Consumo animal	Cambio de existencias	Semilla	desperdicio	Exportaciones	
Carne Vacuna	238	-	337	-	-	672	1.247
Trigo	569	71	-	136	29	623	1.428

TEMA II - Proyecciones de oferta

Ejercicio No. 3 - Determinación de las metas de uso del suelo y de la oferta de productos agropecuarios en la región del Llano.

1. Planteo

1.1 Antecedentes

Se ha estimado que de los 300.000 Km² que conforman el territorio americano, 52.000 corresponden a tierras improductivas desde el punto de vista agrícola (17,3% del total). Por otra parte, la totalidad de los suelos clasificados como productivos están siendo utilizados actualmente en agricultura ^{1/} salvo una franja de suelos bajos en la costa del Océano Atlántico, en la región de los llanos, la que requerirá obras de drenaje de cierta importancia para su aprovechamiento. Se puede estimar pues, que en la actualidad, se dedica a la agricultura el 82,7 por ciento de la superficie nacional.

Si bien entonces no será posible en el futuro ampliar mucho más el área de agricultura del país, se podrá mejorar sí el uso de los diferentes suelos. Actualmente están bajo cultivo 4,36 millones de hectáreas (cifras del Censo del año t-1), lo que significa el 14,6 por ciento de la superficie de Americana. Por otra parte, las evaluaciones realizadas permiten suponer que más del 35% del territorio lo conforman suelos aptos para cultivos. (Véase Cuadros Nos. 1 y 2).

La región de los llanos ^{2/} es la que ofrece el mayor potencial de expansión de las áreas cultivables. En efecto, alrededor del 60% de su superficie la conforman suelos arables, mientras que en la meseta éstos representan solamente el 21,5% del área. Del total de tierras aptas para cultivos, casi las dos terceras partes se concentran en los llanos, de las que actualmente se aprovechan menos del 40 por ciento.

El grueso de las tierras no arables corresponden a la zona definida como de aptitud pastoril, la que ocupa 12,15 millones de hectáreas (aproximadamente el 40 por ciento del territorio). Estos suelos de uso restringido a ganadería se concentran en la meseta: el 81,5 por ciento de la zona de uso pastoril se encuentra en la misma, lo que significa algo más de la mitad de la superficie de esta región. En los llanos, las tierras no arables de uso pastoril aparecen como manchones en las zonas más escarpadas.

^{1/} Faltaría incorporar a la frontera agrícola el valle correspondiente al cauce superior del Río Guaraní, que se encuentra en buena medida forestado y se incluyó en el uso actual por este concepto, aunque sólo se hace una explotación extractiva muy pequeña.

^{2/} Comprende el llano propiamente dicho y la región urbana.

USO ACTUAL DEL SUELO

(año t-1)

REGION	C A N A D E R I A					Uso Agrícola	Uso Forestal	Superficie Improductiva	Superficie Total
	Campo Natural	Mejoras Forrajeras	Sub Total en miles de hectáreas					
URBANA	900	130	1.030	570	100	300	2.000		
LLANO	5.400	430	5.830	1.370	300	1.500	9.000		
MESETA	11.650	420	12.060	1.440	2.100	3.400	19.000		
TOTAL	17.940	980	18.920	3.380	2.500	5.200	30.000		
URBANA	14,0	6,5	51,5	28,5	5,0	15,0	100		
LLANO	60,0	4,8	64,8	15,2	3,3	16,7	100		
MESETA	61,3	2,2	63,5	7,6	11,0	17,9	100		
TOTAL	59,8	3,3	63,1	11,3	8,3	17,3	100		
			 en porcentaje del total					

USO POTENCIAL DEL SUELO

REGION	CULTIVOS	USO PASTORIL	USO FORESTAL	SUPERFICIE IMPRODUCTIVA	SUPERFICIE TOTAL
 en miles de hectáreas				
URBANA	1.150	450	100	300	2.000
LLANO	5.400	1.800	300	1.500	9.000
MESETA	4.100	9.900	1.600	3.400	19.000
TOTAL	10.650	12.150	2.000	5.200	30.000
 en porcentaje del total				
URBANA	57,5	22,5	5,0	15,0	100
LLANO	60,0	20,0	3,3	16,7	100
MESETA	21,6	52,1	8,4	17,9	100
TOTAL	35,5	40,5	6,7	17,3	100

El resto del territorio lo constituyen las áreas forestales, que totalizan en la actualidad unos 2,5 millones de hectáreas y representan el 8,3% de la superficie del país.

En general se estima que las áreas cubiertas con bosques no presentan actualmente una mejor alternativa de uso que el forestal. Las áreas boscosas con posibilidades de ser utilizadas para ganadería o cultivos fueron sufriendo en el pasado un proceso de desmonte (quema y talado), al ir avanzando la frontera agrícola del país. Hoy en día sólo podrían desforestarse algunos valles del Sudoeste aún no incorporados a la agricultura, aunque cabe observar que no se conoce con precisión qué porcentaje del área está ocupada con bosques en esos valles. El desmonte de estos valles se estima dejaría unos 2 millones de hectáreas ocupadas con bosques.

El proceso de desforestación llevado a cabo en el pasado terminó con la mayoría de las especies de madera dura en los llanos y también en la meseta, donde se presentaban con mayor densidad. Los bosques remanentes de la meseta son en su mayoría de coníferas apareciendo por encima de los 800 metros de altitud. En el llano quedan algunos manchones boscosos en las zonas más escarpadas con especies valiosas.

Dentro de los suelos aptos para cultivos, no todos son de la misma calidad ni admiten una intensidad de uso similar. Aunque hasta que no esté completo el relevamiento de suelos no se sabrá con precisión, la experiencia indica que las mejores tierras agrícolas aparecen en los llanos.

El valle inferior de los ríos Santa Isabel y San Salvador, constituían una zona de suelos profundos de muy buena calidad, aunque el cultivo continuado durante más de 100 años ha ido deteriorándolos en forma importante. De todas formas, con un manejo adecuado, estas tierras pueden todavía mantener una productividad elevada.

Entre los ríos San Salvador y Tacuarí existe otra franja de buenos suelos, que paulatinamente ha sido ocupada por el cultivo de caña de azúcar, que los ha ido degradando al no emplearse prácticas conservacionistas.

El grado de deterioro es bastante inferior, sin embargo, al sufrido por los suelos mencionados anteriormente.

Finalmente, todo el valle del río Guaraní parece estar formado por suelos de gran calidad, dedicados hasta ahora a un uso pastoril extensivo, o no aprovechados aún desde el punto de vista agrícola, como sucede con el valle superior.

Del otro lado de la frontera se ha promovido en los últimos años una utilización intensiva de dichas tierras, junto a una agresiva política poblacional. Esto hace necesario pensar en una pronta utilización de los recursos del valle del Guaraní en territorio de Americana.

En síntesis, la región de los llanos presenta una elevada proporción de suelos cultivables de buena calidad, lo que unido a la topografía suave de la mayor parte de la región, permite pensar en un uso más intensivo del recurso que en la meseta. Por razones técnicas de manejo, la superficie estimada como cultivable debe integrarse en una rotación con praderas artificiales,

para preservar al suelo de destrucción o deterioro por la erosión y mejorar su fertilidad natural. Lo dicho anteriormente permite suponer, sin embargo, que en los llanos las tres cuartas partes de la superficie arable podría ser cultivada todos los años, permaneciendo bajo praderas artificiales permanentes la cuarta parte restante.

En la meseta, si bien los suelos del valle superior de los ríos Santa Isabel y San Salvador eran originalmente de buena calidad, a lo largo de este siglo han soportado un uso esquilman-te a través del cultivo continuo sin medidas de conservación adecuadas, lo que se vio agravado por los problemas de topografía de esta región (zonas onduladas con pendientes bastante fuertes). El manejo adecuado de estos suelos obliga a pensar en un uso más moderado que en el llano, por lo que se estima que en la meseta en conjunto, sólo se podrá arar anualmente un 55 por ciento de la superficie apta para cultivos, debiendo permanecer el resto bajo praderas.

En cuanto al uso actual de suelos, de acuerdo al censo del año t-1, el 63% de la superficie del país se encuentra dedicada a ganadería. Del total de tierras ganaderas, casi el 95% es campo natural, correspondiéndole el resto a mejoras forrajeras anuales y permanentes, lo que denota la extensividad de la explotación que se realiza. El área dedicada a cultivos para cosecha representa un 11,3%, y la superficie cubierta con bosques el 8,3% del total del país (véase Cuadro No. 1).

A nivel regional, se observa en la región urbana una menor importancia relativa de la ganadería (51,5% del área) y una participación de los cultivos apreciablemente mayor a la media nacional (28,5%).

En la meseta, la superficie destinada a cultivos (principalmente trigo) representa solamente el 7,6%, notándose una mayor importancia de las áreas forestales, que cubren el 11,0% de la superficie regional. Cabe anotar que los 2,1 millones de hectáreas forestadas de la meseta significan el 84% del total de bosques del país.

El área destinada a ganadería en la región no se aparta mayormente de la media nacional. El campo natural supera el 61% de la superficie total.

En los llanos, el área cultivada alcanza al 15%, siendo los bosques relativamente menos importantes (3,3%). Las mejoras forrajeras representan el 5 por ciento.

En las tierras dedicadas a cultivos, los rubros intensivos (caña de azúcar, horticultura, frutales, algodón, etc.) ocupan aproximadamente el 30% de las mismas; los semiextensivos (arroz, maíz) un 26% y los extensivos (trigo, soja) el 44% restante. En cuanto a la importancia de los diferentes cultivos para cosecha, el trigo es el que ocupa mayor superficie: el Censo señalado indicaba 1.170 miles de hectáreas sembradas con trigo, o sea casi el 35% del área cultivada. En la meseta, la región ecológicamente más apta para cereales de invierno, la superficie sembrada con trigo representa más de las tres cuartas partes del área de cultivos (véase Cuadro No. 3).

ESTRUCTURA DE LA SUPERFICIE AGRICOLA POR REGION

(año t-1)

REGION	TRIGO	ARROZ	SOJA	CAÑA	MAIZ	ALGODON	FRIJOLES	HUERTA	FRUTALES	OTROS	TOTAL
 en miles de hectáreas										
URBANA	-	-	20	-	280	25	50	80	100	15	570
LLANO	80	105	105	500	415	20	42	50	20	33	1.370
MESEÑA	1.090	35	190	-	55	-	20	28	9	13	1.440
TOTAL	1.170	140	315	500	750	45	112	158	129	61	3.380
 en porcentaje del total										
URBANA	-	-	3,5	-	49,1	4,4	8,8	14,0	17,6	2,6	100
LLANO	5,7	7,7	7,7	36,5	30,3	1,5	3,1	3,6	1,5	2,4	100
MESEÑA	75,7	2,4	13,3	-	3,8	-	1,4	1,9	0,6	0,9	100
TOTAL	34,6	4,1	9,3	14,8	22,3	1,3	3,3	4,7	3,8	1,8	100

El maíz le sigue en importancia (22% del área). Este cultivo tiene mayor importancia relativa en la región urbana, donde ocupa la mitad de la superficie agrícola, mientras que en la meseta representa solamente un 5%.

La caña es el tercer cultivo del país en relación a la superficie ocupada (15% del total). Su cultivo se localiza totalmente en el llano, donde representa el 36% de la superficie.

El análisis de las posibilidades de expandir la producción debe apoyarse en las diferencias existentes entre el uso actual y potencial del suelo. Las posibilidades futuras de desarrollo agropecuarios están determinadas por la capacidad potencial de uso de los suelos y el aprovechamiento que se haga de la misma, asumiendo que cuente con los recursos que requiere este aprovechamiento y que existan mercados para absorber la mayor producción obtenida.

Los estudios de diagnóstico del sector agropecuario han permitido establecer que de los 24,8 millones de hectáreas productivas con que cuenta el país, tan sólo 10,65 millones pueden considerarse cultivables, o sea susceptibles de ser roturadas y sometidas a cultivos anuales o permanentes. A su vez, considerando los requerimientos planteados por la conservación del recurso, no toda esa superficie puede ser arada todos los años, estimándose en sólo 7,2 millones el máximo roturable cada año.

El resto de las tierras productivas del país, o sea 14,15 millones de hectáreas no tienen otra alternativa que el uso pastoril o forestal. Esta superficie, a su vez, puede mantenerse con su vegetación natural o ser mejorada, mediante fertilización y/o incorporación de nuevas especies, manejo, etc.

El uso que actualmente se hace de los suelos dista mucho de aproximarse a su capacidad potencial. Esta subutilización de uso de las tierras agrícolas está referida al país en su conjunto. Sin embargo, en las zonas donde actualmente está concentrada la agricultura del país, así como en los establecimientos pequeños, los suelos vienen siendo sometidos a un uso exagerado. Como consecuencia de este hecho, importantes áreas están seriamente afectadas o amenazadas por la erosión.

Las proyecciones de la producción agrícola están basadas en las previsiones sobre las áreas que es posible incorporar a la producción y los rendimientos esperados por unidad de superficie.

Los aumentos de producción previstos descansan, en primer lugar, en un cambio en el uso del suelo, que lo aproxime al potencial y reduzca la presión ejercida sobre las áreas sobreexplotadas. En este sentido, la región que presenta mayor diferencia entre el uso actual y potencial es la del Llano, y será en ella donde se produzcan los cambios más importantes en el área cultivada.

Los rubros que se expandirán más aceleradamente son: el maíz, la soja y el trigo; menos importancia tendrá la expansión del principal rubro exportable: la caña de azúcar.

La importancia de la expansión de las áreas destinadas a los distintos rubros se definió en base a su contribución al

comercio exterior, medido en términos de divisas; el saldo de divisas fue el indicador básico utilizado.

Complementariamente, se tuvieron en cuenta las implicancias derivadas de la expansión del área cultivada. Así, un primer grupo de cultivos, integrados por la soja y el maíz, constituyen rubros con un mínimo de requerimientos adicionales de maquinaria, conocimientos tecnológicos de producción, requisitos de almacenamiento, etc.; éstos son los cultivos cuya promoción puede tener el máximo efecto en el mínimo tiempo. Para estos rubros, las provisiones de áreas máximas en el período del Plan fueron de tres veces la superficie actual.

El arroz requiere para su expansión fuertes inversiones y es un cultivo relativamente especializado. Por ello, la expansión del área cultivada en el año meta del Plan se entendió debía no ser superior al doble del área cultivada actualmente.

Finalmente, la expansión del área cañera implica también una infraestructura muy importante; se consideró en este caso una expansión máxima posible del 30 por ciento.

Teniendo en cuenta este conjunto de elementos, se procedió a proyectar el uso agrícola de los suelos, ajustado, como ya se mencionó, a la superficie cultivable, y, particularmente, el área arable anualmente.

El total del área cultivada se completa con los cultivos destinados a la alimentación animal por medio del pastoreo directo; praderas anuales, permanentes y campo natural mejorado. Aquí también se establecieron ciertos topes por razones técnicas, según la facilidad de expansión del rubro.

En base a todos los elementos anteriores, se definió el área cultivada propuesta para el período del Plan (véase Cuadro No. 4). Se puede observar en el mismo que, en el período del Plan se produce un importante acercamiento entre el uso propuesto y el potencial; así, el área cultivada pasa, de constituir el 40,9% del área potencialmente cultivable en t-1, a ser el 71,5% en el año 5. De la misma manera, el área arada anualmente representa en t-1 el 48,3% del potencial, mientras que en el año 5 alcanza el 88,9% de la misma.

En el Cuadro No. 5 se presenta el índice de crecimiento de las áreas de los distintos rubros; se observa así que, dentro de los rubros agrícolas son aquéllos destinados preferentemente a la exportación los que presentan un mayor incremento de áreas, y, dentro de éstos tienen particular relevancia aquellos rubros que señalan la intención de la diversificación de la producción y las exportaciones: la soja, el maíz y el arroz. Este último se mantiene a un nivel más restringido por las dificultades específicas que plantea en el mediano plazo, como rubro que depende del riego, requiriendo una importante infraestructura complementaria.

Dentro de los cultivos destinados a la producción pecuaria, destaca el importante crecimiento del campo natural mejorado, de mínimos requerimientos de capital y pasible de ser realizado en áreas no roturables; también se expande al máximo potencial, en este período, el área de praderas permanentes, mientras lo hacen en forma más restringida las praderas anuales, que compiten directamente con los cultivos agrícolas por el área arable anualmente.

EVOLUCION DE LA SUPERFICIE CULTIVADA
(en miles de hectáreas)

RUBROS	A ñ o					
	t-1	1	2	3	4	5
Caña	500	480	507	536	566	600
Trigo	1.170	1.000	1.051	1.105	1.161	1.232
Maíz	750	720	800	1.100	1.350	1.673
Arroz	140	140	160	190	220	255
Soja	315	320	420	550	720	945
Algodón	45	45	46	47	48	49
Frijoles	112	110	113	115	118	121
Huerta	158	160	162	165	167	170
Frutales	129	130	132	134	137	139
Otros	61	65	65	66	66	66
SUBTOTAL AGRICOLA	3.380	3.170	3.546	4.008	4.553	5.251
Praderas anuales	510	513	600	700	815	950
Praderas permanentes	470	474	622	817	1.073	1.410
Campo nat. mejorado	180	182	271	405	603	900
SUBTOTAL PECUARIO	1.160	1.169	1.493	1.922	2.491	3.260
TOTAL	4.540	4.339	5.039	5.930	7.044	8.511

INDICE DE EVOLUCION DEL AREA DESTINADA A CADA CULTIVO
(Año t-1 = 100)

RUBROS	A ñ o					
	t-1	1	2	3	4	5
Caña	100.0	96.0	101.4	107.2	113.2	120.0
Trigo	100.0	85.5	89.8	94.4	99.2	105.3
Mafz	100.0	96.0	118.7	146.7	180.0	223.1
Arroz	100.0	100.0	114.3	135.7	157.1	182.1
Soja	100.0	101.6	133.3	174.6	288.5	300.0
Algodón	100.0	100.0	102.2	104.4	106.6	107.7
Frijoles	100.0	98.2	100.9	102.7	105.4	107.7
Huerta	100.0	101.3	102.5	104.4	105.7	107.7
Frutales	100.0	100.8	102.3	103.9	106.2	107.7
Otros	100.0	106.6	106.9	107.4	107.7	107.7
SUBTOTAL AGRICOLA	100.0	93.8	104.9	118.6	134.7	154.9
Praderas anuales	100.0	100.6	117.7	137.8	159.8	186.3
Praderas permanentes	100.0	99.2	132.3	173.8	228.3	300.0
Campo nat. mejorado	100.0	101.1	150.6	225.0	335.0	500.0
SUBTOTAL	100.0	100.8	128.7	165.7	214.7	281.0
TOTAL	100.0	95.6	111.0	130.6	155.2	187.5

Complementariamente a estos incrementos del área cultivada, teniendo en cuenta que la frontera agrícola del país ha sido alcanzada, se produce una reducción de la superficie de campo natural y forestal.

Referente a estos últimos, en el período del Plan se estima que se producirá una reducción de 500 mil hectáreas en el área forestal. Dicha reducción será consecuencia de la deforestación del Valle del Río Guaraní. También se prevé la sustitución en algunas áreas del bosque natural degradado, por especies más valiosas que justifiquen una más racional explotación maderera de futuro.

El área excluida de los usos anteriormente mencionados continuará cubierta de praderas naturales; dicha área pasa de 17.760 miles de hectáreas en t-1 a 14.289 miles de hectáreas en el año 5, es decir, se reduce en un 20%.

Analizando ahora los cambios en el uso del suelo por región, se observa que los incrementos del área cultivada se centralizan en el Llano, región en la que el área cultivada aumenta un 177,9% entre t-1 y el año 5, siendo menor su importancia en la región urbana (57%) y la meseta (39%). (Véase Cuadro No. 6).

Como consecuencia de lo anterior se produce una importante aproximación al área potencialmente cultivable mostrándose a continuación cómo se modifica en cada región el porcentaje de área cultivada:

Región	Area cultivada Año t-1	Area potencial Año 5
Urbana	60,9	95,8
Llano	33,3	72,6
Meseta	45,4	63,0
Total	40,9	71,5

En lo referente a la estructura regional del área con cultivos agrícolas, se aprecia un importante incremento de la importancia de los cultivos destinados principalmente a la exportación, con excepción de la caña y el trigo por las restricciones técnicas y económicas ya planteadas anteriormente (Véase Cuadro No. 7).

1.2 Datos

Véanse Cuadros No. 8, 9, 10 y 11.

Información complementaria para la elaboración del modelo de programación lineal:

- Requerimientos de área mínima para algunos rubros:
 - . Caña de azúcar, arroz y forrajeras anuales: no debe reducirse la superficie actual.
 - . Praderas permanentes: no puede ser inferior a la su-

USO DEL SUELO POR REGION

(Año 5)

REGION	USO GANADERO		Subtotal	Uso Agrícola	Uso Forestal	Superficie Improductiva	Superficie total
	Campo Natural + C. Natural Mejorado	Mejoras forrajeras cultivadas					
URBANA	498	390	888	712	100	300	2.000
LLANO	3.277	1.290	4.567	2.633	300	1.500	9.000
MESETA	11.414	680	12.094	1.906	1.600	3.400	19.000
TOTAL	15.189	2.360	17.549	5.251	2.000	5.200	30.000
 en miles de hectáreas						
 en porcentaje del total						
URBANA	24.9	19.5	44.4	35.6	5.0	15.0	100
LLANO	36.4	14.3	50.7	29.3	3.3	16.7	100
MESETA	60.1	3.6	63.7	10.0	8.4	17.9	100
TOTAL	50.6	7.9	58.5	17.5	6.6	17.4	100

ESTRUCTURA DE LA SUPERFICIE AGRICOLA POR REGION
(Año 5)

REGION	TRIGO	ARROZ	SOJA	CAÑA	MAIZ	ALGODON	FRIJOLES	HUERTA	FRUTALES	OTROS	TOTAL
URBANA	-	-	60	-	369	27	54	86	100	16	712
LLANO	86	210	315	600	1.245	22	45	54	20	36	2.633
MESETA	1.146	45	570	-	59	-	22	30	20	14	1.906
TOTAL	1.232	255	945	600	1.673	49	121	170	140	66	5.251
 en miles de hectáreas										
URBANA	-	-	8,4	-	51,8	3,8	7,6	12,2	14,0	2,2	100
LLANO	3,3	8,0	12,0	22,7	47,2	0,8	1,7	2,1	0,8	1,4	100
MESETA	60,1	2,4	29,9	-	3,1	-	1,2	1,6	1,0	0,7	100
TOTAL	23,5	4,9	18,0	11,4	31,8	0,9	2,3	3,2	2,7	1,3	100
 en porcentaje del total										

USO DEL SUELO EN LA REGION DEL LLANO
Año t-1, en miles de hectáreas

Rubro	Destino de la producción		
	Demanda interna	Exportación	TOTAL
Trigo	80	-	80
Arroz	40	65	105
Soya	40	65	105
Caña de azúcar <u>1/</u>	45	455	500
Maíz	340	75	415
Algodón	20	-	20
Frijoles	42	-	42
Otros	33	-	33
Huerta	50	-	50
Frutales	20	-	20
<u>Carne vacuna 2/</u>	-	<u>5.830</u>	<u>5.830</u>
Forrajas anuales	-	150	150
Praderas permanentes <u>1/</u>	-	280	280
Campo natural	-	5.400	5.400
<u>TOTAL 3/</u>	<u>710</u>	<u>6.490</u>	<u>7.200</u>

1/ Las plantaciones de caña de azúcar y praderas permanentes duran 5 años, por lo que la superficie arada anualmente corresponde a la 5ª parte de la superficie total destinada a cada rubro.

2/ La totalidad de la superficie de campo natural, forrajas anuales y permanentes se destinan a la producción de carne vacuna. Se asume que la totalidad de la producción regional de carne vacuna se destina a la exportación.

3/ Se excluye la superficie improductiva y la ocupada por bosques.

USO POTENCIAL DEL SUELO EN LA REGION DEL LLANO

	Superficie	
	Miles de hectáreas	Porcentaje
Cultivos 1/	5.400	60,0
Uso pastoril	1.800	20,0
Uso forestal	300	3,3
Superficie Improductiva	1.500	16,7
<u>Superficie total</u>	9.000	100,0

1/ Incluyen mejoras forrajeras que exigen roturación de la tierra (forrajeras anuales y praderas permanentes).

INDICE DE INCREMENTOS MAXIMOS DE AREAS DESTINADAS A CADA RUBRO,
DE ACUERDO A LAS RESTRICCIONES TECNICAS PREVISTAS
(Base: Area del año t-1 = 100)

Rubros	Indice
Caña de azúcar	130
Arroz	200
Maíz	300
Soja	300
Praderas anuales	300
Praderas permanentes	300

INFORMACION COMPLEMENTARIA A UTILIZAR EN LA ELABORACION DEL MODELO DE PROGRAMACION LINEAL

	Saldo de divisas 1/ (US\$ t-1/ha)	Rendimientos Año 5 (kg/ha)	Requerimientos de mano de obra		
			Octubre	Abril	Noviembre
Caña de Azúcar	588	50.000	6,52	0,68	3,19
Arroz	500	3.300	0,28	4,44	0,11
Soya	260	1.400	0,37	0,97	0,75
Maíz	126	1.600	0,25	1,54	0,65
Producción de carne en praderas anuales	135	350	0,71	0,91	1,08
Producción de carne en praderas permanentes	105	250	0,71	0,90	1,06
Producción de carne en campo natural	46	100	0,34	0,44	0,69

1/Calculado en base al promedio de los precios de exportación comprendidos entre t-16 y t=1, de los rubros considerados y de importación de los insumos requeridos.

perficie actual más 300 mil ha. que deberán entrar en rotación con el cultivo de arroz.

- Disponibilidad de mano de obra.

La disponibilidad total de mano de obra se calculó tomando como base la información para t-1. A la disponibilidad total proyectada para el año 5 se le restó la mano de obra utilizada por los cultivos destinados al consumo interno. Estudiada la estacionalidad de la demanda de mano de obra, se determinó que octubre era el mes donde se producían picos máximos de actividad, y donde era más probable que la mano de obra disponible fuera una limitante a la expansión de las áreas. Se usó como restricción en el modelo, por tanto, la disponibilidad proyectada para octubre, una vez deducida la mano de obra utilizada por los rubros destinados al consumo interno. La disponibilidad proyectada fue 5.673 jornadas. Véase en el Cuadro No. 11 los requerimientos de mano de obra por hectárea.

- Incremento de rendimiento:

Se proyectaron teniendo en cuenta el grado de progreso técnico que era factible esperar a nivel general en los 5 años del Plan. Véase Cuadro No. 11.

- Saldo de divisas:

El saldo de divisas está constituido por los ingresos por ha. generados por la venta en el exterior de cada rubro (se obtuvo multiplicando los rendimientos unitarios expresados en términos de producto final por sus precios de exportación) menos los insumos importados y las amortizaciones del capital importado, agropecuario e industrial, comprometido (véase Cuadro No. 11).

1.3 Enunciado:

- a) En base a la información contenida en los Cuadros Nos. 8 y 9 determine:
 - a₁) La superficie destinada a la demanda interna en el año meta, sabiendo que de acuerdo a las previsiones de crecimiento de la población, rendimientos, ingresos etc. el área de cultivo destinado a ese fin debe crecer a una tasa acumulativa anual del 1,5%.
 - a₂) La disponibilidad de tierra para rubros de exportación en el año meta.
 - a₃) La superficie que podría cultivarse anualmente con destino a rubros de exportación, teniendo en cuenta que, por razones de manejo, se estima que solamente se pueden arar anualmente el 75% de las tierras de uso agrícola.
- b) Teniendo en cuenta el objetivo prioritario del Plan de Desarrollo de maximizar la contribución del sector agropecuario como proveedor de divisas al conjunto del país (luego de satisfacer la demanda interna), formule la función objetivo y las restricciones de un modelo de programación lineal para proyectar las metas de uso

del suelo y de oferta agropecuaria en el año meta. Para ello tenga en cuenta los datos contenidos en los cuadros 8, 9, 10 y 11.

- c) Discuta la solución propuesta a través de la resolución del modelo de programación lineal. ¿Resulta lógico el área final de caña de azúcar respecto a las superficies asignadas a otros rubros?
- d) Si se modifican los requerimientos de mano de obra por alteraciones en los coeficientes de mecanización y se ajustan a lo que figura para los meses de abril y noviembre en el Cuadro No. 11, discuta cuál sería la asignación óptima de superficies, manteniendo la misma función objetivo. ¿Aumentará la superficie de caña de azúcar con respecto a la solución del modelo anterior? 1/
- e) Si se cambian los coeficientes de la función objetivo y en lugar de utilizar como el valor más probable a obtener para el saldo de divisas en el año 5 el promedio de precios de t-16 al año 1, se proyecta en función de los precios de t-1, ¿cómo afectaría ese cambio a la asignación de área con las nuevas restricciones de mano de obra previstas en d) ?

1/ Al proyectar inicialmente la expansión de la superficie destinada a rubros de exportación, se pensó que dicha expansión se podría llevar a cabo con la tecnología más eficiente, utilizando el grado máximo de mecanización existente en Americana. Sin embargo, posteriores ajustes llevaron a concluir que era más lógico proyectar la expansión de áreas teniendo en cuenta que los predios familiares no utilizarían el grado máximo de mecanización para la realización de las diferentes labores. Por consiguiente, los requerimientos de mano de obra por unidad de superficie resultaron superiores a los previstos inicialmente para todos los rubros, con excepción de la caña de azúcar y el arroz.

Finalmente se agregó otro supuesto, que fue el de la mecanización de la cosecha de caña de azúcar para un 30% del área (inicialmente se consideraba un 10% de cosecha mecanizada solamente), por lo que los requerimientos globales de mano de obra para la cosecha de caña disminuyeron.

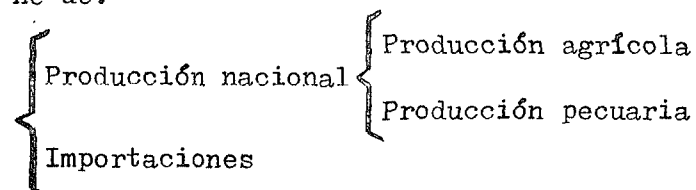
Los cambios mencionados tuvieron como consecuencia un cambio en la distribución estacional de la mano de obra: disminuyeron los requerimientos en la primavera (época de la cosecha de caña) y aumentaron en el otoño (época de la cosecha de maíz). Los meses de pico pasaron a ser entonces abril y noviembre, en lugar de octubre, como ocurría anteriormente. Los requerimientos de mano de obra por unidad de superficie para cada rubro y para ambos meses, se presentan en el Cuadro No. 11.

2. Solución

2.1 Procedimiento

a) Antecedentes

La oferta total de productos agropecuarios se compone de:



A efectos de proyectar la producción nacional se requiere proceder a:

- i) La evaluación de la dotación de recursos naturales, incluyendo un análisis comparativo del uso actual y potencial de dichos recursos.
- ii) La determinación del papel que se le desea asignar al sistema agropecuario en el proceso económico general, considerando la ocupación, la acumulación, la disponibilidad de divisas, la situación alimentaria, etc.
- iii) La determinación de la disponibilidad de recursos productivos (volumen y calidad de los mismos) y de conocimiento tecnológico.

La consideración de todos los antecedentes disponibles permitirá determinar las posibilidades de:

- expandir la superficie incorporada a la producción agropecuaria.
- reestructurar el uso del suelo, sustituyendo algunos cultivos por otros, incorporando tierras aptas para cultivos que actualmente no se explotan y algunos otros que se cultiven indebidamente, mejorando las tierras que sólo tienen aptitud para la ganadería.
- incrementar los rendimientos sobre la base de la utilización del conocimiento tecnológico disponible.

A partir de estos elementos, y mediante la comparación con las proyecciones de demanda, con las proyecciones de las tendencias históricas de la producción y de la dotación histórica de los recursos productivos, se tendrá una imagen preliminar del esfuerzo que es necesario realizar, así como de las posibilidades de materializarlo en términos de la producción nacional y las importaciones.

El cálculo de las metas de producción serán interdependientes con las proyecciones de demanda y de los recursos productivos.

- La proyección de la producción agrícola exige el conocimiento de la proyección de áreas agrícolas

(en función de la información disponible sobre el uso efectivo y potencial de los recursos naturales), de la proyección de la superficie ocupada por cada cultivo individual y de los rendimientos por unidad de suelo.

La confrontación con las proyecciones de demanda con la determinación del papel que se le asigna al sistema agropecuario en el proceso económico general, permitirá precisar la mejor combinación posible de los diferentes cultivos para maximizar el incremento de la producción, en función del uso potencial de los suelos y de la evolución posible de los rendimientos por unidad de suelo.

- La proyección de la producción pecuaria exige por un lado conocer las proyecciones de las áreas ganaderas, las que estarán determinadas por los mismos factores que condicionan la proyección de áreas de cultivos. Es decir que a partir de la información sobre la capacidad de uso de los suelos y de la asignación que se haga de ellos, se determinarán conjuntamente áreas agrícolas y ganaderas: las áreas destinadas a cultivos condicionan y son condicionadas por las que se destinan a ganadería. Adicionalmente, cada tipo de pastura tendrá una capacidad de sustentación diferente, o sea que las previsiones que se hacen sobre las existencias totales de animales estarán determinando al mismo tiempo las necesidades que habrá de los distintos métodos de mejoramiento.

b) Determinación de las metas de superficie en el Llano de Americana

Para determinar las proyecciones de la producción nacional en la región del Llano, se calculó en primer lugar las metas de superficie para los rubros considerados individualmente. Una vez determinada la estructura del área, y conociendo la evolución de los rendimientos, se proyectó la producción. La determinación del uso del suelo en el año meta, se llevó a cabo considerando en forma separada los dos destinos de la producción: demanda interna y exportación.

Los recursos naturales utilizados para satisfacer el consumo interno se calcularon considerando un incremento porcentual constante de la superficie destinada a ese fin entre el año base y el año meta del plan, manteniéndose la estructura interna actual del área.

El resto de la superficie agropecuaria del Llano será ocupada por rubros destinados al mercado externo.

Para la determinación de la superficie a asignar a cada rubro, hay que tener en cuenta que la disponibilidad de recursos productivos se consideró limitada en el plazo del Plan, lo que está acotando el nivel que pueden alcanzar las actividades productivas consideradas, global e individualmente, ya que competirán entre sí por el uso de los recursos. Aparte de la tierra, la disponibilidad de mano de obra, de tecnología, de re-

cursos de capital, de asistencia técnica directa a los productores, etc., están limitando la expansión potencial de los rubros de exportación.

Al no contarse con información suficiente para cuantificar en forma individual el modo en que cada uno de los recursos limitados afectaría el uso del suelo en el año meta, se estimó una restricción global de carácter técnico que estaría representando la disponibilidad de los recursos enumerados anteriormente, con excepción de la mano de obra. Las restricciones de carácter técnico indican la superficie máxima que podría llegar a ocupar cada rubro en relación a la actual, en los 5 años del Plan, teniendo en cuenta los recursos existentes.

En cuanto a la superficie destinada a los rubros de exportación, se asignó en forma individual teniendo en cuenta el aporte de cada uno de ellos a las divisas del país (medido por unidad de superficie), y en función de las limitaciones impuestas por la disponibilidad de mano de obra y del resto de los recursos englobados en esa restricción de carácter técnico.

Finalmente, la información sobre la disponibilidad de conocimiento tecnológico existente permitió determinar el aumento posible de los rendimientos por unidad de superficie. Los rendimientos proyectados para el año meta determinaron la producción esperada por unidad de suelo, y se reflejan directamente en el saldo de divisas por hectárea proyectado para cada cultivo.

El problema de lograr la combinación óptima de los rubros (es decir, aquella que permitiera alcanzar un aporte máximo al saldo de divisas del país) se resolvió a través de un modelo de programación lineal.

2.2 Resolución numérica

- Parte a) - véase Cuadro No. 12
- Parte b) - véase Cuadro No. 13
- Parte c) - véase Cuadro No. 14
- Parte d) - véase Cuadro No. 15

2.3 Discusión (parte c y d)

El modelo presenta una respuesta en lo referente a superficie a asignar a cada rubro de producción (nivel a que debe realizarse cada una de las actividades involucradas) y el valor alcanzado por la función objetivo.

La solución propuesta supone que, con la excepción de la caña de azúcar, el resto de los cultivos, forrajeras anuales y praderas permanentes ocuparán en el año meta el máximo de superficie que le permitirán las restricciones impuestas. La caña de azúcar se ve limitada en el incremento de áreas por la disponibilidad de mano de obra, al tener que destinar parte de las jornadas a la producción de carne en campo natural, actividad ésta que, como se

METAS DE USO DEL SUELO

a ₁ Área destinada al consumo interno		
	Año t-1	Año 5 ^{1/}
 miles de hectáreas	
Trigo	80	86,2
Arroz	40	43,1
Soya	40	43,1
Caña de Azúcar	45	48,5
Maíz	340	366,3
Algodón	20	21,5
Frijoles	42	45,2
Otros	33	35,6
Huerta	50	53,9
Frutales	20	21,5
TOTAL	710	764,9

^{1/} Tasa de crecimiento: $(1,015)^5 = 1.0773$

a ₂ Disponibilidad de tierra para rubros de exportación:
$(5.400 + 1.800) - 765 = 6.435$ miles de ha

a ₃	- Disponibilidad de tierra apta para cultivos: $5.400 - 765 = 4.635$ miles de ha
	- Cultivable anualmente para rubros de exportación: $(5.400 \times 0,75) - 765 = 3.285$ miles de ha

COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO

Función Objetivo:
 $Z_{\max} = 888X_1 + 500X_2 + 260X_3 + 126X_4 + 135X_5 + 105X_6 + 46X_7$

Restricciones:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$	=	6.435
X_1	\geq	455
X_1	\leq	602
X_2	\geq	65
X_2	\leq	167
X_3	\leq	272
X_4	\leq	879
X_5	\geq	150
X_5	\leq	450
X_6	\geq	580
X_6	\leq	840

$6,52X_1 + 0,28X_2 + 0,37X_3 + 0,25X_4 + 0,71X_5 + 0,71X_6 + 0,34X_7 \leq 5.673$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0$

Siendo: X_1 = Caña de azúcar
 X_2 = Arroz
 X_3 = Soya
 X_4 = Maiz
 X_5 = Praderas anuales
 X_6 = Praderas permanentes
 X_7 = Campo Natural

SOLUCION OPTIMA PARA LA FUNCION OBJETIVO No. 1

	Area ocupada (miles de hectáreas)	MANO DE OBRA		SALDO DE DIVISAS 1/	
		Coefficiente (octubre)	Uso total (miles de jornadas)	Por hectárea (U\$ t-1)	Total
Caña de azúcar	499,8	6,52	3.258,696	888	443.822,4
Arroz	167,0	0,28	46,76	500	83.500,0
Soya	272,0	0,37	200,64	260	70.720,0
Maíz	879,0	0,25	219,75	126	110.754,0
Prod. de carne en praderas anuales	450,0	0,71	319,5	135	60.750,0
Prod. de carne en prad. permanentes	840,0	0,71	596,4	105	88.200,0
Prod. de carne en campo natural	3.327,2	0,34	1.131,268	46	153.051,2
Total	6.435,0		5.672,994		1.010.797,6
Restricciones iniciales	6.435,0		5.673,0		

1/ Precios promedio del periodo comprendido entre t-16 y t=1.

SOLUCION OPTIMA PARA LA FUNCION OBJETIVO No. 2

	Area ocupada	MANO DE OBRA				SALDO DE DIVISAS	
		Abril		Noviembre		Por hectárea (U\$ de t-1)	Total (U\$ de t-1)
		Coficiente (jorn/ha)	Uso total (miles de jornadas)	Coficiente (jorn/ha)	Uso total (miles de jornadas)		
Caña de azúcar	602,0	0,68	409,36	3,19	1.920,38	1.140,0	686.280
Arroz	167,0	4,44	741,48	0,11	18,37	424,2	70.841,4
Soya	272,0	0,97	263,84	0,75	204,0	240,2	65.334,4
Maíz	879,0	1,54	1.353,66	0,65	571,35	147,2	129.388,8
Prod. de carne en praderas anuales	450,0	0,91	409,50	1,08	486,0	147,1	66.195
Prod. de carne en prad. permanentes	840,0	0,90	756,0	1,06	890,4	114,6	96.264
Prod. de carne en campo natural	3.225,0	0,44	1.419,0	0,69	2.225,25	49,75	160.443,75
Total	6.435,0		5.352,84		6.315,75		
Restricciones iniciales	6.435,0		5.586,81		6.397,15		

recuerda, debe cubrir toda la superficie no afectada a ninguna de las otras actividades.

O sea que, frente a la restricción que suponía la disponibilidad de mano de obra en el mes de octubre, el modelo prefirió sacrificar parte de la superficie que podría ser destinada a caña de azúcar antes que la de cualquiera de los otros rubros. Esto, que parecería contradictorio frente a la contribución de cada actividad al saldo de divisas, tiene su explicación en la desproporción que existe entre el uso de mano de obra por la caña de azúcar frente a las otras actividades. En efecto, en función de las jornadas utilizadas, cada hectárea que deje de destinarse a caña permite cultivar por ejemplo 23 hectáreas de arroz, 18 de soja o 9 de forrajeras anuales.

En el Cuadro No. 15 se presenta el programa de acción preparado para la nueva función objetivo, teniendo en cuenta los nuevos requerimientos de mano de obra. A diferencia de los resultados anteriores, se observa que todos los cultivos, forrajeras anuales y praderas permanentes ocuparían en el año meta el máximo de superficie permitido por las restricciones impuestas. Asimismo, se observa que los requerimientos de mano de obra para abril y noviembre con los nuevos coeficientes utilizados, y proyectando los máximos de área permitidos por las restricciones impuestas, no llegan a superar las jornadas disponibles. O sea que, siempre y cuando se logre una mejor contribución al saldo de divisas con cualquiera de los otros rubros frente al campo natural, se alcanzará el máximo de superficie para los primeros, ya que con el cambio ocasionado por el aumento previsto en el área de caña de azúcar que podría ser cosechada en forma mecánica, la disponibilidad de mano de obra en el Llano en el año meta del Plan, dejaría de ser una limitante de las posibilidades de producción.

En cuanto a si los demás rubros posibilitan o no una mejor contribución al saldo de divisas que el campo natural, la respuesta surge simplemente de la observación de los coeficientes respectivos en la función objetivo, teniendo en cuenta ahora que no existen restricciones por el lado de la mano de obra.

TEMA II - Proyecciones de la oferta

Ejercicio No. 4 - Proyección de la producción global

1. Planteo

1.1 Antecedentes

La composición de la producción agropecuaria ha sufrido sustanciales modificaciones en el período a estudio. En primer lugar, se verifica la pérdida de participación de la producción pecuaria en el total. En t-16/t-14 se ubicaba en el 37,5% de la producción agropecuaria; en el trienio t-2/t-1 desciende al 33,7%. En el sector pecuario, como ya se indicó, la lana pasa de representar un 7,4% a apenas un 3,8% de la producción total, mientras que la carne vacuna gana posiciones llegando a conformar el 25% de la producción en el año 1 (véase Cuadro No. 1).

En el interior de la agricultura, la caña es el rubro principal a todo lo largo del período, aportando cinco veces más producción que el rubro que le sigue: el trigo. Este ha ascendido en participación, en forma sensible, desplazando al maíz que perdió la posición de segundo producto que tenía en las décadas anteriores. El ascenso de frutas y hortalizas, así como la presencia emergente del arroz y la soja, anuncian modificaciones en la composición de la producción agrícola previsibles de acentuarse en los próximos años.

Individualmente el rubro azucarero es el más importante de toda la producción agropecuaria, seguido por la carne vacuna. La combinación caña-carne como componentes esenciales de la producción agropecuaria se mantiene incambiada en el período. Sus producciones en todos los años representan más del 50% del total agropecuario.

Históricamente, la actividad agropecuaria se ha desarrollado en el país con una marcada extensividad, sobre la base de los privilegiados recursos de que el mismo disponía. El empleo de fertilizantes no ha sido una práctica generalizada, como no lo ha sido la rotación de las tierras agrícolas y ganaderas, la utilización de semillas certificadas, etc. Todas estas prácticas significan cambios sustanciales en el manejo de la explotación, el adiestramiento en ellas de los trabajadores encargados de ejecutarlas, la introducción de nuevos criterios en la administración de la empresa y problemas de financiamiento para nuevas inversiones, así como para gastos de explotación.

De allí la prioridad que en el presente Plan se otorga a la investigación y, particularmente, a la expansión de los servicios encargados de poner los nuevos conocimientos a disposición de los productores.

EVOLUCION DE LA ESTRUCTURA DE LA PRODUCCION AGROPECUARIA

(Porcentaje sobre el total, a precios de t-1)

Año	Carne Vacuna	Otros Pecueros	Total Pecuero	Caña	Trigo	Maíz	Arroz	Soja	Otros Agrícolas	Total Agrícola	Forestal
t-16	24,7	15,8	38,5	35,2	4,7	5,5	1,0	0,8	12,5	59,7	1,8
t-15	24,0	13,2	37,2	35,9	4,8	5,9	0,9	0,8	12,4	60,7	2,0
t-14	24,5	14,3	38,8	37,4	5,8	3,3	1,4	0,6	10,3	58,8	2,3
t-13	24,4	13,0	37,4	33,5	5,5	6,5	1,6	1,0	12,5	60,6	1,9
t-12	24,0	13,9	37,9	32,8	3,9	6,4	2,5	1,4	13,0	60,1	2,0
t-11	21,6	13,5	35,1	32,1	5,9	6,6	2,8	2,0	13,5	62,9	2,0
t-10	21,1	13,4	34,5	32,6	6,4	5,7	3,3	2,3	13,2	63,5	2,0
t-9	22,5	12,4	34,9	32,0	6,4	5,3	3,3	2,7	10,3	63,3	1,8
t-8	24,4	12,6	37,0	30,6	8,0	3,6	3,2	1,7	14,9	61,0	2,0
t-7	24,0	11,5	35,5	30,9	7,4	3,4	3,4	2,6	15,0	62,7	1,8
t-6	26,6	12,1	38,7	30,9	7,3	3,1	2,5	3,1	12,2	59,1	2,2
t-5	24,0	10,7	34,7	32,2	7,3	4,2	2,2	3,8	13,4	63,1	2,2
t-4	24,0	9,9	33,9	30,2	8,4	4,9	3,0	4,3	13,2	64,0	2,1
t-3	24,2	9,6	33,8	30,8	7,4	4,7	2,8	4,5	14,0	64,2	2,0
t-2	24,2	8,9	33,1	31,7	6,9	5,0	3,2	4,4	13,8	65,0	1,9
t-1	24,2	9,2	33,4	31,6	7,4	5,5	3,2	3,5	13,5	64,7	1,9
1 1/	25,1	9,4	34,5	30,5	6,6	5,1	3,4	3,7	14,3	63,6	1,9

Como consecuencia de la nueva tecnología que se propicia incorporar a la producción, se espera lograr importantes incrementos de rendimientos por unidad de superficie. En el Cuadro No. 2 se presenta la evolución de los rendimientos esperados para los principales rubros de producción. Interesa destacar el importante crecimiento de la producción de carne vacuna por hectárea dedicada al rubro, debida fundamentalmente al cambio de la participación del campo natural en el total del área de pastoreo, como consecuencia de la evolución de las áreas mejoradas mencionadas anteriormente 1/.

En base a las áreas y los rendimientos expuestos en los cuadros anteriores, se estima que el valor bruto de producción evolucionará de 1.707 millones de Am\$ en t-1 a 2.744 millones de Am\$ en el año 5, es decir, experimentará un incremento en el quinquenio del orden del 60%. (Véase Cuadro No. 3).

Los principales rubros que crecerán por encima de dicho porcentaje son la soja, el maíz y el arroz; la caña de azúcar lo hará en torno al promedio 2/, mientras que el trigo y la carne vacuna se ubican por debajo (véase Cuadro No. 4). En el caso del trigo, la causa del reducido incremento de su producción debe buscarse básicamente en las limitaciones ecológicas (región de la meseta, principalmente centro-sur), que limitan su potencialidad productiva, lo que lo ubica como menos prioritario que los otros cultivos desde el punto de vista de la explotación (divisas generadas por hectárea). En el caso de la ganadería, a pesar del importante crecimiento de los rendimientos esperados como consecuencia de la creciente importancia de la superficie con pasturas mejoradas, el aumento total de la producción se ve restringido por la reducción del área total destinada al rubro.

Como consecuencia se producen cambios de cierta relevancia en la estructura del valor bruto de producción (véase Cuadro No. 5).

Si analizamos ahora el crecimiento desde el punto de vista regional (véase Cuadro No. 6), vemos que el mismo se concentra en el Llano, que como habíamos mencionado anteriormente era el más alejado de la situación potencial. En efecto, el valor bruto de producción crece en el mismo en un 71,1%, mientras que en la meseta aumenta un 52,7%. En la región urbana, cuyas producciones se destinan fundamentalmente al abastecimiento interno y cuya situación previa estaba cercana al potencial de crecimiento alcanza sólo al 37,1%.

Considerando ahora cuáles serán las unidades de producción de las que se espera una mayor respuesta en el período del Plan, vemos (Cuadro No. 7) que el crecimiento esperado es muy importante en las empresas multifamiliares (crecimiento del 85,9% en el quinquenio), ya que, como se había visto eran las que disponían de más recursos subutilizados y las que producían con

1/ Se asume que la totalidad de la superficie forrajera mejorada se destinará a stock vacuno, dada la mayor rentabilidad del rubro y la más definida respuesta de las producciones de carne y leche a la mejora en la alimentación.

2/ En el caso de la caña de azúcar, el incremento de áreas y rendimientos de campo será necesario agregarle el aumento previsto en su rendimiento industrial, que se espera pase del 10% en t-1 al 12% en el año 5.

EVOLUCION DE LOS RENDIMIENTOS DE LOS PRINCIPALES RUBROS AGROPECUARIOS

Rubro	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1) En kg/ha						
Caña	45.000	44.000	45.450	46.950	48.500	50.000
Trigo	1.080	1.100	1.140	1.180	1.230	1.270
Maíz	1.400	1.300	1.370	1.440	1.510	1.590
Arroz	3.000	3.100	3.150	3.200	3.250	3.300
Soja	1.200	1.200	1.250	1.300	1.350	1.400
Carne Vacuna (1)/ha	57,8	58,0	64,3	72,3	84,0	100,0
- Prod. anual	210,2	210,2	232,1	256,2	282,3	312,6
- Prod. permanente	150,2	150,2	167,0	185,7	206,5	229,1
- Campo natural	49,6	49,4	52,8	56,3	60,2	65,0
- C. natural mejorado	50,6	50,6	60,1	71,4	84,8	100,0
2) Indice (t-1 = 100)						
Caña	100,0	97,8	101,0	104,3	107,8	111,1
Trigo	100,0	101,9	105,6	109,3	113,9	117,6
Maíz	100,0	92,9	97,9	102,9	107,9	113,6
Arroz	100,0	103,3	105,0	106,7	108,3	110,0
Soja	100,0	100,0	104,2	108,3	112,5	116,7
Carne Vacuna (1)/ha	100,0	100,3	111,2	125,8	145,3	173,0
- Prod. anual	100,0	100,0	110,4	121,9	134,3	148,7
- Prod. permanente	100,0	100,0	111,2	123,6	137,5	208,1
- Campo natural	100,0	100,0	106,5	113,5	121,4	131,0
- C. natural mejorado	100,0	100,0	118,8	141,1	167,6	197,6

(1) En pie.

EVOLUCION DEL VALOR BRUTO DE PRODUCCION AGROPECUARIA
(en millones de AM\$ a precios de t-1)

Rubro	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Caña	540	507	581	664	758	864
Trigo	126	110	120	130	143	157
Maíz	95	84	110	143	184	239
Arroz	55	56	66	79	93	109
Soja	61	61	84	114	156	212
Algodón	14	14	15	16	16	17
Frijoles	14	15	16	16	17	17
Huerta	90	88	92	96	100	105
Frutales	99	104	107	109	113	115
Otros	12	14	14	15	15	15
SUBTOTAL AGRICOLA	1.106	1.053	1.205	1.382	1.595	1.850
Carne vacuna	412	416	454	501	562	642
Carne ovina	24	24	25	25	26	27
Aves y cerdos	21	22	25	28	31	35
Leche	48	49	55	63	71	81
Lana	63	62	64	66	69	71
SUBTOTAL PECUARIO	569	573	623	683	759	856
Forestal	33	32	33	35	36	38
TOTAL	1.707	1.658	1.861	2.100	2.390	2.744

INDICE DEL VALOR BRUTO DE PRODUCCION DE LOS
PRINCIPALES PRODUCTOS AGRICOLAS Y PECUARIOS

(t-1 = 100)

Rubros	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Caña	100	93,9	107,6	123,0	140,0	160,0
Trigo	100	87,3	95,2	103,2	113,5	124,6
Maíz	100	88,4	115,8	150,5	193,7	151,8
Arroz	100	101,8	120,0	143,6	169,1	198,1
Soja	100	100,0	137,7	186,9	255,7	347,5
SUBTOTAL AGRICOLA	100	95,2	109,0	125,0	144,2	167,3
Carne vacuna	100	100,9	109,7	121,3	136,1	154,5
SUBTOTAL PECUARIO	100	100,9	109,5	120,0	133,4	150,4
TOTAL AGROPECUARIO	100	97,1	109,0	123,0	140,0	160,7

ESTRUCTURA POR RUBROS DEL VALOR BRUTO DE PRODUCCION
AGROPECUARIA EN t-1 Y EN EL AÑO 5
(en porcentaje del total a precios de t-1)

Rubro	Año t-1	Año 5
Caña	31,6	31,5
Trigo	7,4	5,7
Mafz	5,6	8,7
Arroz	3,2	4,0
Soja	3,6	7,7
Algodón	0,8	0,6
Frijoles	0,8	0,1
Huerta	5,3	3,8
Frutales	5,8	4,2
Otros	0,7	0,5
SUBTOTAL AGRICOLA	64,8	67,3
Carne vacuna	24,2	23,4
Carne ovina	1,4	1,0
Aves y cerdos	1,2	1,3
Leche	2,8	3,0
Lana	3,7	2,6
SUBTOTAL PECUARIO	33,3	31,3
Forestal	1,9	1,4
TOTAL	100,0	100,0

ESTRUCTURA DEL VALOR BRUTO DE PRODUCCION POR REGION

AÑO 5

(en millones de AM\$ a precios de t-1)

Rubro	Urbana	Llano	Meseta	Total
Caña	-	864	-	864
Trigo	-	8	149	157
Maíz	53	179	7	239
Arroz	-	90	19	109
Soja	13	71	128	212
Algodón	9	8	-	17
Frijoles	8	6	3	17
Huerta	53	33	19	105
Frutales	83	17	15	115
Otros	4	8	3	15
SUBTOTAL AGRICULTURA	223	1.284	343	1.850
Carne vacuna	60	314	268	642
Carne ovina	-	-	27	27
Lana	-	-	71	71
Leche	45	20	16	81
Aves y cerdos	22	8	5	35
SUBTOTAL PECUARIO	127	342	387	856
Forestales	1	2	35	38
TOTAL AGROPECUARIO	351	1.628	765	2.744

ESTRUCTURA DEL VALOR BRUTO DE PRODUCCION POR TIPO DE EMPRESA

AÑO 5

(en millones de AM\$ a precios de t-1)

Rubros	Subfamiliar	Familiar	Multifamiliar	Total
Caña	-	346	518	864
Trigo	2	108	47	157
Maíz	30	157	52	239
Arroz	-	73	36	109
Soja	7	72	133	212
Algodón	5	12	-	17
Frijoles	6	11	-	17
Huerta	35	49	21	105
Frutales	30	72	13	115
Otros	5	7	3	15
SUBTOTAL AGRICULTURA	120	907	823	1.850
Carne vacuna	26	315	301	642
Carne ovina	1	14	12	27
Lana	3	36	32	71
Leche	24	40	17	81
Aves y cerdos	10	18	7	35
SUBTOTAL PECUARIO	64	423	369	856
Forestal	1	17	20	38
TOTAL AGROPECUARIO	185	1.347	1.212	2.744

mayor eficiencia económica; le sigue en importancia el crecimiento esperado de las empresas familiares (51,0%), mientras que las subfamiliares lo harán sólo en un 12,8%.

1.2 Datos

Véase Cuadros No. 8 y 9.

1.3 Enunciado

- a) Calcule las proyecciones de áreas, rendimientos y producción para los principales rubros agropecuarios en el año 5. (Redondear datos de áreas a miles de hectáreas y los de rendimientos a decenas de kilos).
- b) Calcule volúmenes físicos de producción valorados a precios de t-1.

2. Solución

2.1 Resolución numérica

- Parte a) Véase Cuadro No. 10
Parte b) Véase Cuadro No. 11

AREAS, RENDIMIENTOS Y PRODUCCION DE LOS PRINCIPALES RUBROS AGROPECUARIOS

	Año 1		Año 5			Año t-1
	Superficie (hectáreas)	Rendimientos (kg/ha)	Superficie (hectáreas)	Rendimientos (kg/ha)	Produccion (toneladas)	
Caña de azúcar	480.000	44.000	1.232.000	50.000		28,8
Trigo	1.000.000	1.100	1.673.000	1.270		100
Maíz	720.000	1.300				90
Arroz	140.000	3.100				130
Soja	320.000	1.200				160
Algodón	45.000	320	49.000	450		1.000
Frijoles	110.000	750	121.000	820		180
Huerta	160.000	3.860	170.000	4.350		142,5
Frutales	130.000	6.235	139.000	6.470	60.000	128,3
Otros	65.000	-	66.000	-		250
Subtotal Agrícola	3.170.000					
Carne vacuna: 1/						
Praderas Anuales	513.000	211,7				
Praderas Permanentes	474.000	151,3				
Campo Natural Mejorado	182.000	50,5				
Campo Natural	14.789.000	49,8				
Carne ovina 2/	3.272.000	22,5	3.300.000	23,4		350
Lana 2/	3.272.000	8,1	3.300.000	8,6		2.500
Leche	-	-	-	-	623.077	130
Otros	-	-	-	-	87.500	400
Subtotal Pecuario	19.230.000					
Total 3/	22.400.000					

1/ Los rendimientos de carne vacuna están expresados en kilos de carne en pie por ha en los diversos mejoramientos forrajeros.

2/ Carne ovina y lana ocupan la misma superficie de campo natural.

3/ El total productivo es de 24.800 miles de hectáreas, incluyendo 2.400 miles de hectáreas dedicadas a forestales en el año 1, y 2.000 en el año 5.

TASAS DE CRECIMIENTO PARA EL PERIODO AÑO 1/AÑO 5
(porcentaje acumulativo anual)

	Superficie ocurada	Rendimientos
Caña de azúcar	5,7	-
Arroz	16,3	1,6
Soya	31,1	4,0
Maíz	-	5,2
Praderas Anuales	16,7	10,23
Praderas Permanentes	31,3	10,93
Campo Natural Mejorado	49,1	18,63
Campo Natural	-7,7	6,9

PROYECCION DE AREAS, RENDIMIENTOS Y PRODUCCION DE LOS
PRINCIPALES RUBROS AGROPECUARIOS

	P R O D U C C I O N		
	Area (ha)	Rendimientos (kg./ha)	Producción (toneladas)
Caña	600.000	50.000	30.000.000
Trigo	1.232.000	1.270	1.564.640
Mafz	1.673.000	1.590	2.660.070
Arroz	225.000	3.300	841.500
Soja	945.000	1.400	1.323.000
Algodón	49.000	350	17.150
Frijoles	131.000	800	96.800
Huerta	170.000	4.350	739.500
Frutales	139.000	6.470	899.330
Otros	66.000	-	60.000
Subtotal agrícola 1/	5.250.000		
<u>Carne vacuna</u>			<u>1.424.350</u>
Praderas anuales	950.000	312,6	295.970
Praderas Permanentes	1.410.000	229,1	323.031
Campo Natural Mejorado	900.000	100,0	90.000
Campo Natural	10.990.000	65,0	714.350
<u>Carne ovina</u>	3.300.000	23,4	<u>77.220</u>
<u>Lana</u>	3.300.000	8,6	<u>28.380</u>
<u>Leche</u>	-	-	<u>623.077</u>
Otros	-	-	87.500
Subtotal			
Pecuario	17.550.000		
TOTAL	22.800.000		

1/ Area sembrada

VOLUMEN FÍSICO DE LA PRODUCCION

	Producción (toneladas)	Precios de t-1 (Am\$/ton.)	Volumen físico (miles de Am\$ a precios de t-1)
Caña	30.000.000	28,8	864.000
Trigo	1.564.640	100	156.500
Maíz	2.660.070	90	239.400
Arroz	841.500	130	109.460
Soja	1.323.000	160	211.680
Algodón	17.150	1.000	17.000
Frijoles	96.800	180	17.460
Huerta	739.500	142,5	105.450
Frutales	899.330	128,3	115.342
Otros	60.000	250	15.000
Subtotal agrícola			1.851.292
Carne vacuna	1.424.350	450	640.800
Carne ovina	77.220	350	26.950
Lana	28.380	2.500	70.000
Leche	623.077	130	80.990
Otros	87.500	400	35.200
Subtotal pecuario			853.940
TOTAL			2.705.232

TEMA II - Proyección de la oferta

Ejercicio No. 5 - Proyección del balance oferta-demanda global

1. Planteo

1.1 Antecedentes

La demanda interna de productos agropecuarios se abastece prácticamente en su totalidad de lo producido en el país. Territorio pródigo en variadas condiciones ecológicas, permite proveer el abastecimiento de los principales renglones de ese origen. País ya de tradición agropecuaria, ha asentado la producción y la ha diversificado en respuesta a las necesidades de su población. En el año $t-1$, solamente algunos productos de regiones más tropicales: café, té, cacao, se adquieren del exterior, no superando el total de las importaciones agropecuarias, el 10% del total de la oferta total (véase Cuadro No. 1). Las importaciones agropecuarias se redujeron sensiblemente desde hace 30 años y ya al abrirse el período que se considera, eran poco relevantes, habiéndose avanzado en este proceso en el correr de estos años solamente por la sustitución de oleaginosos y arroz. Las actuales posibilidades de sustitución de importaciones agropecuarias pueden considerarse mínimas.

Coyunturas desfavorables de clima provocan la importación circunstancial de ciertos productos tradicionalmente provistos por la producción interna como fue, por ejemplo el caso de la importación de maíz en el año $t-14$.

La evolución de la oferta global, coincide de hecho con la de la producción ya que el volumen importado no tiene relevancia para alterar su tendencia.

Como puede apreciarse en el Cuadro No. 2, la demanda interna y la externa conservan incambiada su participación, mostrando similar ritmo de crecimiento. Si se observa la composición de ambas, se comprueba que los diferentes productos han abastecido de distinta forma estos crecimientos.

Si esta participación se analiza desagregada en su origen agrícola y pecuario, se aprecia el incremento del papel de la demanda externa en la estructura de la demanda agrícola, mientras que, en la ganadería, la demanda interna crece en participación debido a la reducción de los saldos exportables de lana.

Desde otro punto de vista, la producción del sector agropecuario puede ser objeto de demanda directa o final o de demanda intermedia, pasando en este caso por la industria para su ulterior transformación.

La demanda de productos agropecuarios sin transformación industrial es muy escasa en Americana. En primer lugar porque sus principales producciones exportables: el ganado para faena y la caña de azúcar, requieren ser transformados en carne y azúcar, para ser comercializados en el exterior.

EVOLUCION DE LA OFERTA GLOBAL DE PRODUCTOS AGROPECUARIOS
(en millones de AM\$ a precios de t-1)

Años	(a) Producción interna	(b) Importaciones	(c) Oferta global	(a/c) (en porcentaje)
t-16	1.105	61	1.166	94,8
t-15	1.149	62	1.211	94,9
t-14	1.064	104	1.168	91,1
t-13	1.245	63	1.308	95,2
t-12	1.214	64	1.278	95,0
t-11	1.252	59	1.311	95,5
t-10	1.293	61	1.354	95,5
t-9	1.403	62	1.465	95,8
t-8	1.382	86	1.468	94,1
t-7	1.465	90	1.555	94,2
t-6	1.304	99	1.403	92,9
t-5	1.408	87	1.495	94,2
t-4	1.502	94	1.596	94,1
t-3	1.616	120	1.736	93,1
t-2	1.669	109	1.778	93,9
t-1	1.708	92	1.800	94,9
1	1.661	72	1.733	95,8

1/ Cifras preliminares

EVOLUCION DE LA DEMANDA GLOBAL DE PRODUCTOS AGROPECUARIOS

(en millones de Am\$ de t-1)

Años	DEMANDA INTERNA			DEMANDA EXTERNA		Total	DEMANDA INTERNA Demanda Total (en porcentaje)
	Producción	Importación	Total	Exportación	Total		
t-16	429	61	490	676	1.166	42,0	
t-15	443	62	505	706	1.211	41,7	
t-14	372	104	476	692	1.168	40,8	
t-13	430	63	493	815	1.308	37,7	
t-12	450	64	514	764	1.278	40,2	
t-11	548	59	607	704	1.311	46,3	
t-10	545	61	606	748	1.354	44,8	
t-9	495	62	557	908	1.465	38,8	
t-8	537	86	623	845	1.468	42,4	
t-7	560	90	650	905	1.555	41,8	
t-6	515	99	614	789	1.403	43,8	
t-5	643	87	730	765	1.495	48,8	
t-4	689	94	783	813	1.596	49,1	
t-3	663	120	783	953	1.736	45,1	
t-2	651	109	760	1.018	1.778	42,7	
t-1	622	92	714	1.086	1.800	39,7	
1/	661	72	733	1.000	1.733	42,3	

1/ Cifras preliminares.

Fuente: Oficina de Planificación

Sólo son objeto de exportación directa, los granos: trigo y soja, no habiendo esta última aún generado una industria oleaginosa con capacidad de competir en el mercado mundial de aceites.

La baja participación de frutas y verduras en la dieta, hace que pase por la industria prácticamente la totalidad de la producción agropecuaria destinada al consumo interno de la población urbana.

Si bien no se cuenta con información detallada de transacciones inter sectoriales, puede estimarse que menos del 25% de la demanda final tiene carácter de demanda directa del sector, estando constituida en su mayor parte por el auto-consumo de la población rural.

La industria alimenticia es la rama más importante de la manufactura de Americana. Pasa por ella el 80% de la producción agropecuaria con destino a la exportación.

El grado de elaboración industrial a que son sometidos los productos del agro es limitado, pudiendo concebirse una creciente profundización de este proceso.

La industria textil algodonera ha pasado por una situación crítica al reducirse la importancia del cultivo en los últimos años. Las textiles laneras, y en particular las peinaduras han resentido la pérdida de importancia de las exportaciones de lana.

La industria oleaginosa, de incipiente instalación, visualiza un futuro auspicioso sobre la base de las ventas de aceite de soja al mercado europeo.

En general, las industrias transformadoras de productos agropecuarios tienen aún capacidad ociosa, la que permitiría prever un incremento de su demanda de materias primas.

Los objetivos de producción del Plan están basados en un estudio previo de la demanda a la que se va a atender con esa producción. Por una parte, se busca asegurar el abastecimiento de la demanda interna de productos agropecuarios y por la otra, la obtención de determinados excedentes exportables que permitan un ingreso de divisas compatible con la tasa de crecimiento del ingreso que el Plan Nacional de Desarrollo se ha fijado como meta.

La demanda de productos agropecuarios prevista en el Plan, crece entre t-1 y el año 5 un 60,3%. El factor más dinámico está constituido por el mercado interno del que se prevé una reactivación por la propia implementación del proceso planificado, que aspira cubrir parte de las insatisfacciones del consumo detectadas en el diagnóstico. Mientras que la demanda interna se incrementará en un 63,4% entre los años mencionados, el crecimiento previsto para las exportaciones no superaría un 58,2%. Ello implica, sin embargo, una similar participación de ambos destinos en la demanda global, prevaleciendo la demanda externa que continúa absorbiendo el 60% aproximadamente del total. (Véase Cuadro No. 3).

La proyección de la demanda interna, se basó en los requerimientos de la población y la capacidad instalada de la industria transformadora así como en los mayores niveles de insumos de origen agropecuario necesarios para el cumplimiento de las

metas productivas. Para la estimación de los saldos exportables, se parte de la posible expansión de la oferta de los productos destinados al mercado externo estimándose el remanente disponible luego de satisfechas las necesidades de la demanda interna. La selección de los rubros exportables y del grado de expansión a asignarles, derivó de estudios que se realizaron para cada producto en los que se analizó las características de los mercados externos, y su capacidad potencial de absorción de la producción americana, así como las posibilidades que presenta este país para participar creciente y competitivamente en los mismos.

La proyección de la demanda interna prevé entre t-1 y el año 5 un incremento del 45,3% en la disponibilidad de productos agropecuarios por habitante. Los componentes de la demanda interna pueden agruparse en: (i) alimentos de consumo humano, que absorben la parte más importante, (ii) los bienes de uso intermedio que vuelven al proceso productivo en el propio sector - semillas, granos para alimentación animal, etc. - o pasan a la industria como materia prima del sector alimenticio, textil, etc., (iii) bienes destinados a la inversión, entre los que ocupa lugar predominante el ganado. Dentro de la demanda interna, el mayor crecimiento relativo entre t-1 y el año 5 lo registra la inversión y el más lento el de los rubros destinados a consumo humano (véase nuevamente Cuadro No. 3). Su recomposición por rubros se aprecia en el Cuadro No. 4.

a) Proyección de la demanda de alimentos para consumo humano

En un mercado en el que se operan las condiciones de libre comercialización, la demanda de alimentos varía en función de tres factores esenciales: la evolución de la población, la evolución del ingreso y de su distribución y la tendencia de los precios.

En lo que respecta al crecimiento demográfico, se espera para el período que se analiza que el mismo se ajuste a la tendencia de los últimos años, o sea que su tasa acumulativa anual sea del orden del 2,3%.

El crecimiento del ingreso responde al juego de las diversas macrovariables que integran el modelo de desarrollo y constituye un dato (en un principio provisorio) para la programación del sector agropecuario, habiendo sido el mismo suministrado por las autoridades centrales de planificación. En este sentido, se ha establecido un crecimiento del 27,6% en el período del Plan. Este crecimiento del ingreso produciría un efecto diferente sobre la demanda de los distintos bienes, según cual sea la elasticidad-ingreso de la demanda que corresponde a ese producto.

Las variaciones en el nivel de precios, las modificaciones en la estructura de precios relativos y las correspondientes elasticidades precio-demanda y de sustitución, también afectan la evolución de la demanda interna de alimentos. Las dificultades para establecer en la práctica las variaciones en el nivel de precios en el próximo quinquenio, en una economía como la de Americana, afectada por elevadas tasas de

EVOLUCION DE LA DEMANDA GLOBAL DE PRODUCTOS AGROPECUARIOS

	VALOR (Mill de Am\$ t-1)		ESTRUCTURA (porcentaje)		INDICE (Base: t-1 = 100)
	Año t-1	Año 5	Año t-1	Año 5	
1) Demanda interna	714,1	1.166,8	39,7	40,4	163,4
- Demanda Intermedia	181,8	277,4	10,1	9,6	152,6
- Demanda Final	532,3	889,4	29,6	30,8	167,1
o Consumo humano	552,3	704,4	30,7	24,4	127,5
o Inversión	-35,0	158,0	-1,9	5,5	-
o Desperdicio	15,0	27,0	0,8	0,9	180,0
2) Demanda externa	1.086,0	1.718,0	60,3	59,6	158,2
3) Demanda Global	1.800,1	2.884,8	100,0	100,0	160,3

ESTRUCTURA INTERNA DE PRODUCTOS NACIONALES EN t-1 y AÑO 5
(en millones de AM\$ a precios de t-1)

	Año t-1				Año 5					
	Demanda intermedia	Demanda Final		Inversión	Total	Demanda intermedia	Demanda Final		Inversión	Total
		Desperdicio	Consumo humano				Desperdicio	Consumo humano		
Trigo	8	1	44	-	53	22	3	51	-	86
Maíz	46	2	32	-	80	44	7	17	-	68
Arroz	1	1	18	-	20	9	2	25	-	36
Soja	1	-	17	-	18	20	6	21	-	47
Cana	5	-	43	-	48	5	-	49	-	54
Frutas	-	3	58	-	61	-	4	78	-	82
Algodón	14	-	-	-	14	17	-	-	-	17
Frijoles	2	-	12	-	14	2	-	16	-	18
Huerta	5	8	77	-	90	5	5	95	-	105
Otros	-	-	12	-	12	-	-	15	-	15
Subtotal Agrícola	82	15	313	-	410	124	27	377	-	528
Carne vacuna	-	-	91	-35	56	-	-	112	158	270
Carne ovina	-	-	24	-	24	-	-	27	-	27
Aves y cerdos	-	-	21	-	21	-	-	35	-	35
Leche	1	-	48	-	49	2	-	80	-	82
Lana	33	-	-	-	33	38	-	-	-	38
Subtotal Pecuario	34	-	184	-35	183	40	-	254	158	452
Forestal	33	-	-	-	33	38	-	-	-	38
Total	149	15	497	-35	626	202	27	631	158	1.018

CUADRO No. 4

inflación y altamente sensible a los cambios de precios en algunos rubros, inducidos por modificaciones en los precios internacionales, hacen que se haya trabajado con el supuesto de precios constantes, utilizándose los del año $t-1$.

Fue sobre la evolución proyectada de estas tres variables: población, ingreso y precios, y a partir de la tendencia histórica registrada en estos consumos, que se elaboraron las proyecciones de maíz, trigo y arroz para los cinco años del Plan. (Véase Cuadro No. 5).

El Estado ha incidido en los últimos años sobre el volumen físico de algunos alimentos que se liberan al consumo y se prevé una intensificación de esta práctica al implementarse el Plan. Entra pues, como factor adicional explicativo de la demanda proyectada de estos productos, la modalidad y grado de ingerencia que cobra la intervención del Estado.

Las restricciones impuestas por el Estado al consumo de carne bovina, alimento que ha integrado tradicionalmente en forma importante la dieta de la población, ha determinado la necesidad de extender la intervención de los rubros sustitutivos, es decir, la carne ovina, de aves y cerdos, pescado, y de otros productos principales proveedores de proteínas animales, como la leche.

En consecuencia, en este caso no reviste interés proyectar la demanda interna de este conjunto de rubros empleando el crecimiento de la población y de los ingresos. Por el contrario, se ha procurado establecer al volumen físico anual y por habitante de carne vacuna que se libraré al consumo interno y las posibilidades de incrementar la oferta de los sustitutos, de manera de cumplir metas de mejoramiento de la dieta, incrementando el nivel proteico de la misma y, en particular, la proporción de las mismas de origen animal.

El incremento más importante del consumo, dentro de este grupo de alimentos, es el establecido para las carnes de ave y cerdo, así como para la leche. Ello se sustenta en el importante desarrollo esperado de la producción maicera, que facilitará el crecimiento de estas producciones a bajos costos. En este sentido, en los últimos años se ha llevado a cabo un proceso de reorganización y tecnificación de estas producciones intensivas que establecen las bases para un importante esfuerzo de crecimiento en el futuro próximo.

En líneas generales, el Plan no modifica sustancialmente el contenido calórico y proteico de la dieta americana; el mayor incremento se establece para las proteínas, y, dentro de éstas, las proteínas de origen animal, que aumentan en un 40,5% entre $t-1$ y el año 5. (Véase Cuadro No. 6).

En el Cuadro No. 7 puede apreciarse para el año 5, el aporte de los diversos rubros a la dieta.

CONSUMO HUMANO DE MAIZ, TRIGO Y ARROZ EXTRAPOLADO POR LA
RECTA DE AJUSTE DE LA RELACION HISTORICA INGRESO-CONSUMO

	A Ñ O S					
	t-1	1	2	3	4	5
A-INGRESO PER CAPITA PREVISTO	753	736	830	872	915	961
B-CONSUMO DE MAIZ						
- Per capita (kg/año)	79,4	79,4	62,1	54,0	45,7	36,8
- Consumo humano total (miles de ton)	357	366	292	260	225	186
C-CONSUMO DE TRIGO						
- Per capita (kg/año)	97,2	97,2	106,5	111,0	115,5	120,4
- Consumo humano total (miles de ton)	437	448	502	535	569	607
D-CONSUMO DE ARROZ						
- Per capita (kg/año)	30,8	30,9	33,6	34,9	36,3	37,7
- Consumo humano total (miles de ton)	139	142	158	168	179	190

EVOLUCION DE LA DIETA ALIMENTICIA DIARIA

	Año t-16	Año t-1	Año 5
1) CANTIDADES			
A- Calorias	2.789,1	2.752,6	2.908,7
B- Proteinas (en gramos)			
- totales	74,2	73,1	82,6
- de origen animal	20,6	24,5	32,6
C- Grasas (en gramos)	56,0	56,0	64,1
2) INDICE (t-16 = 100)			
A- Calorias	100	98,7	104,3
B- Proteinas			
- totales	100	98,5	111,3
- de origen animal	100	118,9	158,2
C- Grasas	100	100	114,5

DISPONIBILIDAD DE LOS PRINCIPALES ALIMENTOS POR HABITANTE Y POR DIA EN EL AÑO 5

Rubro	Kg al año		Calorias		Proteinas		Grasas	
	brutos	netos	coeficiente	cal/día	coeficiente	gr/día	coeficiente	gr/día
Trigo	120,4	86,7	10	866,9	0,3	26,0	0,03	2,6
Mafz	36,8	23,2	9,9	229,5	0,2	4,6	0,07	1,6
Arroz	37,7	24,5	9,8	240,1	0,18	4,4	0,02	0,5
Frijoles	16,9	16,9	9,9	167,3	0,5	8,5	0,32	5,4
Soja	25,6	7,7	23,1	177,9	0,01	0,1	2,6	20,0
Frutas	120	120	1,22	146,4	0,02	2,4	0,008	1,0
Hortalizas	132	132	0,63	83,2	0,03	4,0	0,008	1,1
Caña	400	48	10,59	508,3	-	-	-	-
Carne vacuna	49,5	26,3	5,95	156,5	0,4	10,5	0,46	12,1
Carne ovina	15,5	7,1	6,6	46,9	0,33	2,3	0,54	3,8
Aves y cerdos	17,4	13,1	3,6	47,2	0,36	4,7	0,21	2,8
Leche	123,0	123,0	1,78	218,9	0,10	12,3	0,10	12,3
Pescado	5,4	5,4	3,63	19,6	0,52	2,8	0,17	0,9
Total				2.908,7		82,6		64,1

b) Proyecciones de la demanda de bienes agropecuarios de uso intermedio:

Americana destina parte de su producción de maíz, trigo, etc., así como subproductos de las industrias azucarera, molinera, frigorífica, aceiteras, etc., a la alimentación animal, fundamentalmente del ganado lechero, aves y cerdos y, en muy menor grado, ganado vacuno. Se han establecido los requerimientos de los rubros anteriormente mencionados, constatándose adicionalmente que el volumen de subproductos resulta en general suficiente. Se prevé solamente la posibilidad de importar harinas proteicas en los primeros años, teniendo en cuenta la reducción de la faena como consecuencia del esfuerzo de capitalización que se llevará a cabo en el rubro carne bovina.

Complementariamente, y también con la finalidad de proveer insumos para el propio sector, se estimaron los requerimientos de semillas, en función de la previsión de siembras para el año siguiente. Para estos cálculos se utilizaron las densidades de siembra habituales en el país.

Finalmente, distintos sectores industriales utilizan productos de origen agropecuario como materia prima para la elaboración de manufacturas no alimenticias. Así, se emplea caña de azúcar y maíz para la elaboración de alcoholes, lana para la industria textil, etc. En este sentido, la proyección se realizó teniendo en cuenta las previsiones establecidas en el Plan de Desarrollo Industrial para la industria respectiva. (Véase Cuadro No. 8).

La demanda de productos agropecuarios para uso intermedio en el año 5 crecería un 52,6% respecto a t-1.

c) Proyecciones de la demanda de productos agropecuarios para inversión:

La principal demanda para inversión está constituida por los cambios en las existencias ganaderas. El Plan proyecta un aumento considerable del stock vacuno, debido a la mayor receptividad de las praderas sometidas a diversos mejoramientos. Los aumentos de existencias no representan disponibilidad para el consumo, sino, por el contrario, contribuyen a incrementar el acervo productivo del país: las disminuciones de existencias, en cambio, aumentan las disponibilidades para consumo a expensas de dicho acervo.

En este aspecto, el Plan se propone efectuar un verdadero esfuerzo de capitalización, conteniendo la faena - en particular de vaquillonas - para, junto con una serie de cambios de manejo, posibilitar un incremento en el número de vientres que, a su vez permitan aumentar el stock. De esta manera se asegurará un mejor aprovechamiento de los recursos forrajeros del país, tomando en cuenta la expansión proyectada de pasturas mejoradas.

DEMANDA INTERNA DE PRODUCTOS AGROPECUARIOS PARA USO INTERMEDIO EN
LOS AÑOS t-1 Y 5
(en miles de toneladas)

Rubro	Año t-1	Año 5	Indice de crecimiento (t-1 = 100)
Trigo	79	220	278,5
Maíz	509 ^{1/}	487	95,7
Arroz	10	68	680,0
Soja	8	125	1.562,5
Caña	200	224	101,8
Frutas	-	-	-
Algodón	14	17	121,4
Frijoles	9	12	133,3
Huerta	35	37	105,7
Carne vacuna	-	-	-
Carne ovina	-	-	-
Aves y cerdos	-	-	-
Leche	8	13	162,5
Lana	13	15	115,4

^{1/} Un estudio más detallado a partir del diagnóstico acerca del origen de este volumen, hace suponer un error en el dato, considerándose que la cifra real tendría que ser sensiblemente menor.

Como se indicó al explicitarse los objetivos del Plan de Desarrollo Agropecuario, el crecimiento de las exportaciones de origen agropecuario resulta básico para el desenvolvimiento de la estrategia agro-industrial exportadora en que se asienta la planificación del desarrollo global.

La proyección de la demanda externa debe partir del papel que le cabe a esta economía en el contexto mundial. Americana es una economía sometida a fuertes relaciones de dependencia que son determinantes de las condiciones de su comercio exterior. La demanda externa opera como una variable exógena que la potencial oferta de productos americanos no va a alterar en términos significativos. Las previsiones de la evolución de los mercados externos cobran pues, gran importancia, y el más afinado conocimiento de los mismos por las autoridades planificadoras, logrará una mejor colocación de los saldos exportables.

Las exportaciones proyectadas resultan de la conjugación de la evaluación de la capacidad de expansión de ciertas producciones en condiciones competitivas en el mercado mundial y de una apreciación de la previsible evolución de los mercados a que esa producción se destinaría.

En primer lugar se determinaron pues, los rubros para los cuales el país tiene aptitudes ecológicas y recursos suficientes para expandir su producción en términos competitivos. Se procedió luego a proyectar su expansión teniendo en consideración la reactivación que producirá en la economía la aplicación del Plan basada en la mejor utilización de sus recursos naturales, a través del diseño de una política adecuada. La estimación de la oferta proyectada de estos productos, deducido el volumen que iría a la demanda interna de la proyección de los saldos exportables.

En seguida, ello se contrastó con las perspectivas de los mercados mundiales de esos productos y se corrigieron las proyecciones de los saldos exportables en base a las posibilidades de colocación (véase Cuadro No. 9).

El total de exportaciones agropecuarias crece un 75,4% incrementando la disponibilidad de divisas por habitante en un 56,4% (véase Cuadros No. 10 y 11).

En lo que se refiere a la composición de las exportaciones, éstas acusan el esfuerzo de diversificación que el Plan se propuso. El trigo pierde importancia relativa, mientras que el maíz, la soja y el arroz son los rubros que se desarrollan más aceleradamente, llegándose en todos ellos a superar la duplicación de los saldos exportables. (Véase nuevamente Cuadros Nos. 9, 10 y 11).

La evolución prevista para las exportaciones de carne vacuna muestra una sustancial reducción de las mismas en los primeros años del Plan como consecuencia del esfuerzo de capitalización previsto. Entran luego en una tendencia creciente llegando en el año 5 a superar las de t-1. En el futuro inmediato, la potencialidad del rubro como proveedor de divisas dependerá fundamentalmente de si se mantiene o no el incremento de las existencias. Si ello no se cumpliera, el gran incremento de la producción respecto a la demanda interna prevista, provocaría un importante crecimiento de los saldos exportables.

EVOLUCION DE LAS EXPORTACIONES DE ORIGEN AGROPECUARIO
(en miles de toneladas)

Rubro	A ñ o s					
	t-1	1	2	3	4	5
Trigo	737	459	490	550	623	707
Maiz	157	244	554	846	1.325	1.907
Arroz <u>1/</u>	261	246	292	377	463	566
Soja	261	221	340	524	724	1.029
Frutas	300	308	301	285	281	259
Azúcar <u>2/</u>	20.500	19.074	20.950	23.024	25.260	27.759
Carne						
Vacuna <u>3/</u>	792	481	559	573	672	824
Lana	12	12	12	12	14	13

1/ Con cáscara.

2/ En caña de azúcar.

3/ En pie.

EVOLUCION DE LAS EXPORTACIONES DE ORIGEN AGROPECUARIO

(en millones de US\$ a precios de t-1)

Rubros	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Trigo	98	61	65	73	83	94
Maiz	18	27	62	95	148	214
Arroz	46	44	52	67	82	101
Soja	65	55	84	130	180	255
Azúcar	533	496	601	692	868	1.040
Carne vacuna	434	263	306	314	368	451
Otros	75	76	75	72	74	68
Total	1.269	1.022	1.245	1.443	1.803	2.223

INDICES DE CRECIMIENTO DE LAS EXPORTACIONES DE ORIGEN AGROPECUARIO
(Base Año t-1 = 100)

Rubro	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Trigo	100,0	62,2	66,3	74,5	84,7	95,9
Maíz	100,0	150,0	344,4	527,8	822,2	1.188,9
Arroz	100,0	95,7	113,0	145,7	178,3	219,6
Soja	100,0	84,6	129,2	300,0	276,9	392,3
Azúcar	100,0	93,1	112,8	129,8	162,9	195,1
Carne vacuna	100,0	60,6	70,5	72,4	84,8	103,9
Otros	100,0	101,3	100,0	96,0	98,7	90,7
Total	100,0	80,5	98,1	113,7	142,1	175,2

Parte del abastecimiento de la demanda interna de productos agropecuarios es atendida con importaciones. Básicamente, se importan productos que el país no puede producir y, secundariamente, otros que pudiendo ser producidos, no lo son en cantidad suficiente.

Habiendo prácticamente agotado el proceso de sustitución de importaciones de productos agropecuarios, el país deberá enfrentarse en el futuro a un incremento de las importaciones de estos productos, como consecuencia del incremento de la demanda de productos no sustituibles proveniente de una mayor población con mejores ingresos y una actividad agropecuaria que demanda insumos más sofisticados. Se espera, sin embargo, que mediante el incremento en las importaciones de productos agropecuarios se mantenga dentro de los niveles actuales, en relación a la oferta global de los mismos, oscilando su importancia entre el 5 y el 6% de la misma (véase Cuadro No. 12).

1.2 Datos

Véanse Cuadros No. 13 y 14.

1.3 Enunciado

- a) Calcule la demanda interna total de productos agropecuarios y su volumen físico.
- b) Determine los saldos exportables y las necesidades de importación de productos agropecuarios para el año 5.
- c) Muestre el balance global entre oferta y demanda de productos agropecuarios.

2. Solución

2.1 Resolución numérica

- a) Véanse Cuadros No. 15 y 16.
- b) Véase Cuadro No. 17.
- c) Véase Cuadro No. 18.

VOLUMEN FISICO DE LA PRODUCCION

	Producción (toneladas)	Precios del Año t-1 (Am\$/ton.)	Volumen físico (miles de Am\$ a precios de t-1)
Caña	30.000.000	28,8	864.000
Trigo	1.564.640	100	156.500
Maíz	2.660.070	90	239.400
Arroz	841.500	130	109.460
Soja	1.323.000	160	211.680
Algodón	17.150	1.000	17.000
Frijoles	96.800	180	17.460
Huerta	739.500	142,5	105.450
Frutales	899.330	128,3	115.342
Otros	60.000	250	15.000
Subtotal agrícola			1.851.292
Carne vacuna	1.424.350	450	640.800
Carne ovina	77.220	350	26.950
Lana	28.380	2.500	70.000
Leche	623.077	130	80.990
Otros	87.500	400	35.200
Subtotal pecuario			853.940
Total			2.705.232

DEMANDA INTERNA AGROPECUARIA

Año 5

Producto	Consumo humano	Consumo animal	Cambio de existencias	Semilla	Manufacturas no Alimentarias	Desperdicio	Precios t-1 (Am\$/ton.)
Caña de azúcar 1/	2.017	-	-	-	224	-	28,8
Trigo	607	78	-	142	-	31	100
Maíz	186	452	-	25	10	80	90
Arroz	190	-	-	68	-	17	130
Soja	129	-	-	125	-	40	160
Algodón	-	-	-	-	17	-	1.080
Frijoles	84	-	-	11	-	2	180
Huerta	666	-	-	37	-	37	142,5
Frutas	605	-	-	-	-	35	128,3
Otros	60	-	-	-	580	-	250
Carne vacuna	250	-	350	-	-	-	450
Carne ovina	77	-	-	-	-	-	350
Lana	-	-	-	-	15	-	2.500
Leche	610	13	-	-	-	-	130
Aves y cerdos	88	-	-	-	-	-	400

1/ Los rendimientos de caña de azúcar se calcularon como rendimientos netos, excluida ya la caña seca.

DEMANDA INTERNA TOTAL DE PRODUCTOS AGROPECUARIOS

Año 5

Producto	Consumo humano	Consumo animal	Cambio de existencias	Semilla	Manufacturas no Alimentarias	Desperdicio	Total
Caña de azúcar 1/	2.017	-	-	-	224	-	2.241
Trigo	607	78	-	142	-	31	858
Mafz	186	452	-	25	10	80	753
Arroz	190	-	-	68	-	17	276
Soja	129	-	-	125	-	40	294
Algodón	-	-	-	-	17	-	17
Frijoles	84	-	-	11	-	2	97
Huerta	666	-	-	37	-	37	740
Frutas	605	-	-	-	-	35	640
Otros	60	-	-	-	580	-	640
Carne vacuna	250	-	350	-	-	-	600
Carne ovina	77	-	-	-	-	-	77
Lana	-	-	-	-	15	-	15
Leche	610	13	-	-	-	-	623
Aves y cerdos	88	-	-	-	-	-	88

1/ Los rendimientos de caña de azúcar se calcularon como rendimientos netos, excluida ya la caña seca.

VOLUMEN FISICO DE LA DEMANDA INTERNA DE PRODUCTOS AGROPECUARIOS

(a precios de t-1)

	Demanda Interna (miles ton.)	Precios del Año t-1 (Am\$/ton.)	Volumen físico (Miles de Am\$)
Caña	2.241	28,8	64.541
Trigo	858	100	85.800
Maíz	753	90	67.770
Arroz	276	130	35.880
Soja	294	160	47.040
Algodón	17	1.000	17.000
Frijoles	97	180	17.460
Huerta	740	142,5	105.450
Frutales	640	128,3	82.112
Otros	640	250	160.000
Subtotal agrícola			683.053
Carne vacuna	600	450	270.000
Carne ovina	77	350	26.950
Lana	15	2.500	37.500
Leche	623	130	80.990
Aves y cerdos	88	400	35.200
Otros	-		6.800
Subtotal Pecuario			457.440
Total			1.140.493

PROYECCION DE SALDOS EXPORTABLES Y NECESIDADES DE IMPORTACION
(a precios de t-1)
AÑO 5

	Producción Nacional		Demanda Interna Total		Saldos Exportables		Necesidades de Importación	
	Miles de toneladas	Miles de Am\$	Miles de toneladas	Miles de Am\$	Miles de toneladas	Miles de Am\$	Miles de toneladas	Miles de Am\$
Caña	30.000	864.000	2.241	64.541	27.759	799.459	-	-
Trigo	1.565	156.500	858	85.800	707	70.700	-	-
Meliz	2.260	239.400	753	67.770	1.907	171.630	-	-
Arroz	842	109.460	276	35.880	566	73.580	-	-
Soja	1.323	211.680	294	47.040	1.029	164.640	-	-
Algodón	17	17.000	17	17.000	-	-	-	-
Frijoles	97	17.460	97	17.460	-	-	-	-
Huerta	740	105.450	740	105.450	-	-	-	-
Frutales	899	115.342	640	82.112	259	33.230	-	-
Otros	60	115.000	640	160.000	-	-	580	145.000
Subtotal agrícola		1.856.292		683.953		1.313.239		145.000
Carne vacuna	1.424	680.800	600	270.000	824	370.800	-	-
Carne ovina	77	86.950	77	26.950	-	-	-	-
Lana	28	70.000	15	37.500	13	32.500	-	-
Leche	623	80.990	623	80.990	-	-	-	-
Aves y Cercos	88	35.200	88	35.200	-	-	-	-
Otros	-	-	...	6.800	-	-	...	6.800
Subtotal pecuario		853.940		457.440		403.300		6.800
Total		2.705.232		1.140.493		1.716.539		151.800

BALANCE DE OFERTA Y DEMANDA GLOBAL DE PRODUCTOS AGROPECUARIOS

(en miles de Am\$ a precios de t-1)

Año 5

	O F E R T A		D E M A N D A			
	Interna	Externa	Total	Interna	Externa	Total
Caña	864.000	-	864.000	64.541	799.459	864.000
Trigo	156.500	-	156.500	85.800	70.700	156.500
Mafz	239.400	-	239.400	67.770	171.630	239.400
Arroz	109.460	-	109.460	35.880	73.580	169.460
Soja	211.680	-	211.680	47.040	164.640	211.680
Algodón	17.000	-	17.000	17.000	-	17.000
Frijoles	17.460	-	17.460	17.460	-	17.460
Huerta	105.450	-	105.450	105.450	-	105.450
Frutales	115.342	-	115.342	82.112	33.230	115.342
Otros	15.000	145.000	160.000	160.000	-	160.000
Subtotal agrícola	1.856.292	145.000	1.996.292	683.053	1.313.239	1.996.292
Carne vacuna	640.800	-	640.800	270.000	370.800	640.800
Carne ovina	26.950	-	26.950	26.950	-	26.950
Lana	70.000	-	70.000	47.500	32.500	70.000
Leche	80.990	-	80.990	80.990	-	80.990
Aves y cerdos	35.200	-	35.200	35.200	-	35.200
Otros	-	6.800	6.800	6.800	-	6.800
Subtotal pecuario	853.940	6.800	860.740	457.440	403.300	860.740
Total	2.705.232	151.800	2.857.032	1.140.493	1.716.539	2.857.032

TEMA III - Proyección de la mano de obra

Ejercicio No. 6 - Proyección de requerimientos de mano de obra en el Llano

1. Planteo

1.1 Antecedentes

El análisis de la utilización de la mano de obra en el sector agropecuario en los últimos quince años, permitirá conocer las características del empleo en el sector y comprobar si la disponibilidad del mismo ha constituido un factor limitante para el desarrollo agropecuario. Por otra parte, se obtendrán elementos de juicio para fundamentar los requisitos de mano de obra para alcanzar determinadas metas en el Plan.

El análisis de la población rural aporta el contexto inmediato a la consideración de la mano de obra agropecuaria. Se define la población rural como el conjunto de personas que residen fuera de los núcleos poblados de mil o más habitantes. Ello no implica que toda esta población dependa de actividades agropecuarias ni que todas las personas dependientes de actividades agropecuarias habiten en el medio rural. Existe un trasiego de la población ocupada entre el medio rural y los centros urbanos, especialmente los más próximos a las áreas rurales.

La población rural global creció en América a una tasa promedio de 1,65%, evolución más lenta que la de la población total del país y que trae como consecuencia una reducción de la participación de la población rural en el total que pasa del 46,5% al 41,7% entre el año t-16 y el año 1 (véase Cuadro No. 1). Esta tendencia es propia de países que atraviesan procesos de modernización social, provocado en este país por la reestructura económica que produjo la industrialización y la concomitante expansión de los servicios urbanos.

Esa pérdida de participación que hubiera significado la presencia de 220.000 personas más en el medio rural, de mantenerse la proporción de t-16, coincide sin embargo con un incremento del área agrícola de un millón de hectáreas que pudo haber representado un factor de afincamiento al medio rural al brindar más posibilidades de empleo. Si a ello se agrega que de estimaciones realizadas por especialistas demógrafos puede concluirse en que la tasa de natalidad en el medio rural es sensiblemente más alta que la que se registra en las ciudades, se concluye que el trasiego de población hacia las ciudades debe ser constante y sustancial.

El sector agropecuario no ha sido capaz pues, de retener en su seno al incremento poblacional que tuvo lugar en estos años.

La población rural de América está localizada fundamentalmente en los llanos (1 millón doscientos mil), de la que una tercera parte está concentrada en la región urbana que ro-

EVOLUCION DE LA POBLACION
(en miles de habitantes)

Años	Población total	Población rural	Población urbana
t-16	3.176	1.477	1.700
t-15	3.252	1.502	1.750
t-14	3.335	1.530	1.804
t-13	3.417	1.558	1.859
t-12	3.500	1.585	1.915
t-11	3.586	1.614	1.972
t-10	3.668	1.640	1.028
t-9	3.754	2.667	2.087
t-8	3.840	1.693	2.146
t-7	3.926	1.720	2.206
t-6	4.016	1.747	2.269
t-5	4.109		
t-4	4.206	1.804	2.402
t-3	4.303	1.833	2.470
t-2	4.400	1.861	2.539
t-1	4.500	1.890	2.610
1 ^{1/}	1.920	1.920	2.684

^{1/} Datos preliminares.

Fuente: Dirección General de Estadística y Censos.

de la capital. Los restantes 700.000 habitan la meseta, pudiéndose apreciar una mayor densidad en la región dedicada a cultivos (véase Cuadro No. 2).

Si se distingue la población de acuerdo al tipo de empresa al que está vinculada se aprecia que más del 50% depende de explotaciones subfamiliares, que practican en buena medida una agricultura de subsistencia. Este millón de minifundistas deficientemente atendidos en sus necesidades esenciales constituye el elemento más importante en la problemática de orden social del agro americano.

Por otra parte, los 10 millones de hectáreas ocupadas por las empresas multifamiliares grandes cobijan sólo 100 mil personas. Restan entonces 800 mil personas cuya existencia en el medio rural está asociada a las empresas medianas, y que presentan los rasgos de mayor equilibrio en la constitución familiar.

La estructura por sexo y por edades se conoce sólo para t-1, pero puede considerarse vigente en términos generales. Mientras que en las empresas de gran tamaño se aprecia un mercado excedente de hombres, la proporción se aproxima al 50% en las regiones agrícolas en que predomina la empresa mediana, y se conserva también entre el campesinado.

La estimación de población económicamente activa en el sector agropecuario se ubica en un 48,7% del total.

La ocupación en el sector agropecuario se estimó sobre la base de la fuerza de trabajo efectivamente aplicada al proceso productivo agropecuario. Tomando en cuenta las jornadas requeridas por las diversas operaciones incluidas en el proceso y suponiendo que cada persona cumple un promedio de 17 jornadas al mes, se cuantificaron los requerimientos mensuales y anuales de mano de obra, y el porcentaje de ocupación efectiva.

En el año t-1, la actividad agropecuaria en el total de Americana insumió aproximadamente 120 millones de jornadas. Los 925 mil trabajadores que componían la población activa de ese año generaban una oferta de casi 190 millones de jornadas, estimándose en consecuencia que, en el año t-1, el porcentaje de ocupación de la población activa se ubicaba en torno al 63%. Las jornadas por persona se ubican en unas 130 al año, lo cual puede considerarse normal en el contexto latinoamericano. (véase Cuadro No. 3).

a) Composición según su participación en el proceso productivo:

La participación de la fuerza de trabajo asignada directamente al proceso productivo alcanza al 90% del total requerido en la actividad agropecuaria. Se computa en ella la mano de obra que se ocupa en las diversas prácticas de los cultivos y en las prácticas ordinarias de la actividad ganadera. Dentro de esta asignación puede distinguirse la que atiende a la formación del capital agropecuario, que en Americana se concreta en las plantaciones de caña, en la implantación de praderas, etc., y que es

DISTRIBUCION DE LA POBLACION RURAL POR REGION Y TIPO DE EMPRESA
(año t-1)

Concepto	REGIONES			TIPO DE EMPRESA			Total
	Urbana	Llano	Meseta	Sub-familiar	Familiar	Multi-familiar	
 en miles de habitantes						
Población total	400	800	700	1.000	800	100	1.900
Población por predio	5,9	5,3	5,3	4,4	6,9	14,3	5,4
Hectáreas por habitante	4,7	11,2	26,1	1,48	18,0	139,0	15,7

Fuente: Oficina de Planificación

DISTRIBUCION MENSUAL DE LA MANO DE OBRA TOTAL SEGUN SU PARTICIPACION EN EL PROCESO PRODUCTIVO
(año t-1, en miles de jornadas)

Meses	D I R E C T A S				I N D I R E C T A S				Total	% de Ocupación
	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal		
Enero	1.030	2.994	3.303	7.327	140	265	173	579	7.906	50,3
Febrero	1.535	3.100	3.098	7.733	263	383	153	804	8.537	54,3
Marzo	2.344	3.408	2.947	8.700	423	483	211	1.117	9.817	62,4
Abril	2.492	4.429	4.034	10.956	345	454	266	1.065	12.021	76,4
Mayo	2.145	4.435	4.276	10.856	293	433	249	975	11.831	75,2
Junio	1.426	3.526	3.236	8.187	206	353	151	710	8.897	56,6
Julio	1.103	3.801	2.558	7.462	183	340	140	563	8.125	51,7
Agosto	993	3.967	2.427	7.387	128	320	110	558	7.945	50,5
Setiembre	1.338	5.134	2.699	9.201	196	464	234	794	9.995	63,6
Octubre	1.676	5.962	3.531	11.169	237	527	176	940	12.109	77,0
Noviembre	1.638	5.284	4.312	11.234	192	409	186	788	12.021	76,4
Diciembre	1.254	3.871	4.480	9.605	148	353	247	748	10.353	65,8
Total	18.975	49.940	40.900	2.755	2.755	4.786	2.200	9.741	119.556	63,4

muy poco relevante. Los requerimientos de mano de obra indirecta se computan por las jornadas dedicadas a tareas de administración y de reparación de maquinarias.

La proporción de mano de obra directa e indirecta difiere según la región que se considere. Es mayor la indirecta en los llanos porque el tamaño de los predios y la complejidad de la explotación exige mayor esfuerzo de administración. En la zona urbana, pesan más también porque estas tareas se incrementan relativamente al aumentar el número de establecimientos de menor tamaño. En la meseta, en cambio, la mano de obra indirecta no alcanza en t-1 al 5% del total requerido.

b) Distribución de la ocupación por rubro de producción

La mano de obra directa requerida por la producción agropecuaria en t-1 se ocupa prácticamente en la misma proporción en las actividades agrícolas y en las pecuarias. Dentro de la agricultura, es la caña el cultivo que absorbe individualmente el mayor volumen de mano de obra, siguiéndole la huerta, de características típicamente intensivas, y el maíz, cuyos coeficientes de ocupación se ven incrementados por la parte de su producción que se realiza en los minifundios.

La distribución regional de la ocupación muestra que en el llano se ocupa la mayor proporción de mano de obra dedicada a la agricultura, absorbiendo además cerca del 40% de la ocupación pecuaria. La meseta en cambio, absorbe el grueso de la ocupación ganadera. (Véase Cuadro No. 4).

c) Si se atiende a la ocupación agropecuaria por tipo de empresa, se constata que las empresas subfamiliares disponen de 450.000 trabajadores que ofrecen 92.000 jornadas de las que utilizan menos de 20.000 en el propio establecimiento (véase Cuadro No. 5). Se genera así un excedente de fuerza de trabajo que representa el 80% de las jornadas disponibles. Mientras tanto, en las empresas multifamiliares, los requisitos superan a las disponibilidades, lo que está indicando la incorporación a estos predios de trabajadores que provienen de los estratos subfamiliares y familiares. Las empresas medianas, muestran el mayor equilibrio ocupacional logrando dar trabajo productivo al 80% del tiempo disponible por sus trabajadores.

La cantidad de hectáreas que atiende cada trabajador en las empresas de diversa organización varía según la región en que están ubicados. Mientras que un trabajador en la meseta en una empresa multifamiliar tendrá a su cargo en promedio unas 130 hectáreas, en el otro extremo de la escala, un trabajador de las empresas subfamiliares del llano contará con sólo dos hectáreas para volcar su fuerza de trabajo.

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA

DIRECTA, POR RUBRO Y REGION

Año t-1

	Urbana	Llano	Meseta	Total	Estructura
 en miles de jornadas				%
Trigo	-	280	3.521	3.801	3,5
Arroz	-	1.669	557	2.226	2,0
Soja	78	472	1.092	1.642	1,5
Cana	-	16.920	-	16.920	15,4
Maíz	2.344	3.771	640	6.755	6,2
Algodón	950	970	-	1.920	1,7
Frijoles	863	781	369	2.013	1,8
Huerta	4.400	3.100	1.740	9.240	8,4
Frutales	100	460	4.280*	4.920	4,5
Subtotal	11.600	29.073	12.484	53.157	48,4
Campo Natural	5.724	18.320	26.087	50.131	45,7
Praderas	1.650	2.547	2.329	6.526	5,9
Subtotal	7.374	20.867	28.416	56.657	51,6
Total	18.974	49.940	40.900	109.814	100

* Incluye explotación forestal.

Fuente: Oficina de Planificación.

OCUPACION AGROPECUARIA POR REGION Y TIPO DE EMPRESA

(año t-1)

Concepto	REGION			TIPO DE EMPRESA			Total Pafs
	Urbana	Llano	Meseta	Sub familiar	Familiar	Multi familiar	
Número de trabajadores (en miles de trabajadores)	250	320	320	450	400	75	925
Jornadas disponibles (en miles de jornadas)	41.820	81.600	65.280	91.800	81.600	15.300	188.700
Jornadas directas utilizadas (en miles de jornadas)	18.975	49.940	40.900	18.639	64.629	26.547	109.815
Relación 2/1 (en %)	45,3	61,2	62,7	20,3	79,2	173,7	58,2

d) Distribución de la ocupación durante el transcurso del período productivo.

La distribución estacional de la ocupación total del sector agropecuario, muestra dos períodos de crecimiento de la ocupación: los meses de abril y mayo, y el período septiembre-diciembre. Ello es la resultante de varios procesos estacionales que se superponen y que se originan principalmente en la cosecha de la caña de azúcar, y en los cultivos agrícolas de verano cuyas cosechas coinciden en los meses de abril y mayo (véase nuevamente Cuadro No. 3).

El sector varía el porcentaje de ocupación en los diferentes meses del año, dejando en todos los casos un margen de mano de obra desocupada que oscila entre el 23 y el 50% de la fuerza de trabajo disponible.

Las variaciones estacionales se acentúan en el llano, donde la incidencia de los cultivos opera con más fuerza. Entre los puntos de máxima (octubre) y de mínima (enero), la ocupación mensual se duplica, llegando a absorber en el pico de máxima prácticamente el total de mano de obra disponible.

El 60% de los requerimientos de mano de obra de la caña de azúcar se concentran en los cuatro meses en que, con diferente intensidad, tiene lugar la zafra. Ello implica que un importante contingente de mano de obra que trabaja en el llano está sometido a prolongados períodos de desocupación total o parcial, quedando a disponibilidad de la demanda estacional que se intensifica a partir del mes de julio. La importancia del cultivo de caña y lo marcado de su estacionalidad define la configuración que la caña provoca, y que no son pasibles de contrarrestarse por requerimientos provenientes de otras producciones, determinan la presencia de importantes núcleos de población de nivel de ingreso reducido y que condicionan la existencia en el llano de 120 mil predios de organización subfamiliar, con una población trabajadora de 400 mil personas.

El problema ocupacional que plantea la caña de azúcar tiene múltiples implicancias en las consideraciones de la diagnosis agrícola de América. En primer lugar, pone de manifiesto el problema social de mayor gravedad que aqueja a este país. En seguida, plantea la importancia que presenta la restricción de la disponibilidad de mano de obra ante una previsible expansión del área cañera. Los problemas que se plantean con referencia al empleo, de expandirse el cultivo, y la discusión de las opciones que se plantean en torno a esta problemática, ofrecen uno de los campos de mayor interés.

Puede afirmarse, en el orden de importancia de los problemas a identificar, que los que derivan de las

distorsiones en el empleo provocadas por la importancia de actividades agrícolas de fuerte estacionalidad ocupan un lugar prioritario.

Si bien el problema de la estacionalidad ocupacional tiene en la caña su factor principal, la predominancia de los cultivos de verano en la superficie agrícola, genera también un pico en los meses de abril y mayo, en el momento de la cosecha. La ganadería comparte con los cultivos de verano el millón de jornadas en que se incrementa la demanda en esos meses.

En la meseta, la variación estacional más suave está asociada directamente a la producción ganadera, que ocupa el 75% del total de mano de obra de esa zona.

La región urbana muestra un nivel de ocupación en el sector agropecuario de un 52% y algunos meses en que la ocupación no llega al 30%, lo cual está mostrando que la ciudad ofrece trabajo complementario a las actividades rurales que estos trabajadores desempeñan. El pico de alza de marzo-abril marca también la importancia de las cosechas de cultivos de verano.

La disponibilidad global de mano de obra, pues, no es restrictiva, ya que hay excedente de fuerza de trabajo en todo el año, aunque se aprecia en el llano una demanda próxima al 100% en el pico de la zafra canera.

De acuerdo a las proyecciones realizadas, las jornadas totales requeridas para el cumplimiento de las actividades previstas en el año 5 alcanzan a 144 millones. Esto significa que el programa de actividades propuesto implica una utilización de mano de obra superior a un 20,5% a la demandada en t-1. Teniendo en cuenta que el crecimiento esperado de la población trabajadora es inferior a este porcentaje, se observa como resultado un mejoramiento en el nivel de ocupación, pasándose de un 63,4% de ocupación efectiva en t-1 a un 70,9% en el año 5 (véase Cuadro No. 6).

De la ocupación total anteriormente mencionada, 15.395 miles de jornadas (10,7%) se destinarán a actividades indirectamente productivas, mientras que el 89,3% restante se aplicará en forma directa a la producción. Es decir, pues, que habrá un incremento relativo de la importancia del trabajo indirecto, como consecuencia de la intensificación de la producción prevista.

Analizando la distribución mensual, se constata también una mayor regularidad. En ningún período del año las jornadas requeridas son inferiores al 54% (en t-1 en dos meses alcanzaban al 50%); en 6 meses los requerimientos superan el 70% de las jornadas disponibles (en t-1 sólo cuatro meses superaban ese porcentaje).

Los requerimientos se incrementan en forma similar en cada uno de los subsectores (véase Cuadros No. 7 y 8), aunque por razones diferentes. En la agricultura, pese a la expansión del área, la mecanización prevista para el año 5 de parte impor-

DISTRIBUCION MENSUAL DE LA MANO DE OBRA TOTAL SEGUN SU PARTICIPACION EN EL PROCESO PRODUCTIVO

(Año 5, en miles de jornadas)

Meses	D I R E C T A S				I N D I R E C T A S				Total	% de Ocupación
	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal		
Enero	1.260	3.680	3.575	8.515	209	438	344	991	9.506	56,1
Febrero	1.896	3.775	3.405	9.076	355	485	344	1.184	10.260	60,6
Marzo	2.737	4.581	3.291	11.009	516	673	362	1.551	12.560	74,2
Abril	2.654	6.300	4.533	13.487	408	759	463	1.630	15.117	89,3
Mayo	2.400	6.233	4.708	13.341	375	745	472	1.592	14.933	88,2
Junio	1.577	4.168	3.530	9.275	270	501	341	1.112	10.387	61,4
Julio	1.259	3.995	2.889	8.143	235	474	282	991	9.134	54,0
Agosto	1.184	4.883	2.771	8.838	180	542	254	976	9.814	58,0
Setiembre	1.593	5.622	3.032	10.247	262	643	292	1.197	11.444	67,6
Octubre	2.069	6.230	395	12.234	333	713	388	1.434	13.668	80,7
Noviembre	2.046	6.355	4.829	13.230	300	711	466	1.477	14.707	86,9
Diciembre	1.551	4.866	4.885	11.302	233	549	478	1.260	12.562	74,2
Total	22.226	61.088	45.383	128.697	3.676	7.233	4.486	15.395	144.092	70,9

CUADRO No. 6

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA POR REGION

Año 5

(en miles de jornadas)

Rubro	Urbana	Llano	Meseta	Total
Caña ^{1/}	-	17.031	-	17.031
Trigo	-	301	3.593	3.894
Maíz	2.208	6.457	389	9.055
Arroz	-	3.339	716	4.055
Soja	220	1.320	2.284	3.824
Algodón	977	1.032	-	2.009
Frijoles	926	827	371	2.124
Huerta	4.940	3.300	1.640	9.880
Frutales	2.905	650	620	4.175
Otros	220	520	180	920
Subtotal Agrícola	12.396	34.778	9.793	56.967
Praderas anuales	3.150	3.373	1.091	7.614
Praderas permanentes	2.700	6.204	1.644	10.548
Campo natural mejorado	-	-	2.350	2.350
Subtotal mej. forraj.	5.850	9.577	5.085	20.512
Campo Natural	3.980	16.733	25.801	46.514
Subtotal forrajero	9.830	26.310	30.886	67.026
Forestales	-	-	4.704	4.704
Total	22.226	61.088	45.383	128.697

^{1/}30% cosecha mecanizada.

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA POR TIPO DE EMPRESA

Año 5

(en miles de jornadas)

Rubro	Sub familiar	Familiar	Multi familiar	Total
Caña 1/	-	6.812,4	10.218,6	17.031
Trigo	106	2.996	792	3.894
Maíz	2.876	5.439	740	9.055
Arroz	0	2.735	1.320	4.055
Soja	290	1.512	2.022	3.824
Algodón	924	1.085	-	2.009
Frijoles	878	1.225	21	2.124
Huerta	3.850	4.050	1.980	9.880
Frutales	1.440	2.175	560	4.175
Otros	360	350	210	920
Subtotal Agrícola	10.724	28.379	17.861	56.967
Praderas anuales	495	4.621	2.498	7.614
Praderas permanentes	825	5.805	3.918	10.548
Campo natural mejorado	-	1.600	750	2.350
Subtotal mej. forr.	1.320	12.026	7.166	20.512
Campo Natural	6.100	24.455	15.959	46.514
Subtotal forrajero	7.420	36.481	23.125	67.026
Forestales	193	2.159	2.352	4.704
Total	18.337	67.019	43.341	128.697

1/ 30% cosecha mecanizada.

tante de la cosecha de caña (30%) contrasta dicho efecto, quedando como resultado global un incremento del 15,9%. En la ganadería, pese a la reducción del área destinada a la actividad pecuaria, la intensificación de la producción basada en el incremento de la superficie forrajera mejorada hace que las jornadas directas de este subsector se incrementen en el 18,3%. Finalmente, también en el rubro forestal, a pesar de la reducción del área, la instalación de nuevas plantaciones artificiales y la explotación más intensa del bosque justifican un 17,3% de incremento en las jornadas directas.

En lo referente al incremento de la ocupación por regiones, alcanza su máximo en el llano (22,3%) y su mínimo en la meseta (11,0%).

En el Cuadro No. 8 se presenta también la información sobre los requerimientos por tipo de empresa en el año 5. Los efectos del Plan tienen resultados muy diferentes a este nivel; las empresas subfamiliares mantienen prácticamente incambiada su ocupación; las familiares la incrementan muy levemente (3,6%), mientras que las multifamiliares lo hacen en forma espectacular (63,5% de aumento). Como consecuencia, se da una redistribución de la demanda de fuerza de trabajo, ocupando las subfamiliares sólo el 14,2%, las familiares el 52,1% y las multifamiliares el 33,7%.

Esto llevaría, sin duda, a la creciente proletarización del agro.

1.2 Datos

Véanse Cuadros No. 9, 10, 11 y 12.

1.3 Enunciado

- a) Calcule los requerimientos de mano de obra para el cultivo del maíz en jornadas directas anuales por hectárea para las empresas subfamiliares, y las jornadas directas mensuales, por hectárea y totales, en el Llano, para empresas subfamiliares, familiares y multifamiliares. En los predios subfamiliares se cultivarán en el año meta 170.000 hectáreas de maíz, 875.000 en las familiares y 200 mil hectáreas en los predios multifamiliares de dicha región.
- b) Calcule los requerimientos totales de mano de obra en la región del Llano, para el año meta, por tipo de empresa y para todas las empresas.
- c) Calcule las necesidades de trabajadores que habrá en el año meta para el Llano, por mes; de acuerdo a las normas ocupacionales propuestas en el Plan de Desarrollo: $\text{Trabajadores mensuales} = \text{Jornadas mensuales}/17$; $\text{Trabajadores anuales} = \text{jornadas anuales}/204$.
- d) Determine la población económicamente activa que demandarán las actividades productivas en el Llano, calculándola en función de:
 - i) El mes de mayores necesidades de trabajo.
 - ii) La población media durante todo el año.

REQUERIMIENTOS MENSUALES DE MANO DE OBRA DIRECTA PARA EL CULTIVO
DE MAIZ EN UNA EMPRESA SUBFAMILIAR

Año 5

Labor	Horas/ha <u>1/</u>	Mes
1a. Arada	6	Agosto
2a. Arada	6	Agosto/Setiembre
Disqueadas	8	Setiembre/Octubre
Rastreadas	8	Octubre/Noviembre
Siembra	5	Noviembre
Carpidas	12	Noviembre/Diciembre
Cosecha	90	Marzo/Mayo

1/ Se considera que una jornada corresponde a 10 horas de labor.

REQUERIMIENTOS MENSUALES DE MANO DE OBRA DIRECTA PARA EL

CULTIVO DE MAIZ POR TIPO DE EMPRESAS (en porcentaje)

Año 5

	Sub familiar	familiar	Multi familiar
Jornadas anuales (por hectárea)	-	4,3	2,0
Enero	-	-	-
Febrero	-	-	-
Marzo	20,7	15,1	10,0
Abril	25,2	27,9	30,0
Mayo	20,7	15,1	10,0
Junio	-	-	-
Julio	-	-	-
Agosto	5,2	4,7	1,5
Setiembre	5,9	9,3	15,0
Octubre	8,9	11,6	15,0
Noviembre	8,9	11,6	15,0
Diciembre	4,5	4,7	3,5

REQUERIMIENTOS DE MANO DE OBRA POR HECTAREA, POR TIPO DE EMPRESA, EN LA REGION DEL LLANO,

Y SUPERFICIE OCUPADA POR RUBRO DE PRODUCCION EN EL AÑO META

Año 5

RUBROS	MANO DE OBRA DIRECTA POR TIPO DE EMPRESA						MANO DE OBRA INDIRECTA	como % de la Directa
	Subfamiliar		Familiar		Multifamiliar			
	Superficie (miles de hectáreas)	Jornadas directas (por ha)	Superficie (miles de hectáreas)	Jornadas directas (por ha)	Superficie (miles de hectáreas)	Jornadas directas (por ha)		
Caña de Azúcar	-	-	240	28,4	360	28,4	11,3	
Trigo	-	-	86	3,5	-	-	11,3	
Mafz	170	13,5	875	4,3	200	2,0	11,3	
Arroz	-	-	150	15,9	50	15,9	11,3	
Soja	15	10,0	193	4,4	107	3,0	11,3	
Algodón	10	66,0	12	31,0	-	-	14,6	
Frijoles	22	21,4	23	15,5	-	-	11,3	
Huerta	30	70,0	20	50,0	4	50,0	31,2	
Frutales	10	40,0	8	25,0	2	25,0	18,8	
Otros	13	20,0	20	10,0	3	20,0	14,6	
Subtotal	270	-	1.627	-	736	-	-	
Praderas anuales	17	15,0	333	7,2	100	7,2	11,3	
Praderas permanentes	20	15,0	505	7,2	315	7,2	11,3	
Subtotal	37	-	838	-	415	-	-	
Campo Natural	193	10,0	1.035	4,8	2.049	4,8	9,4	
Total	500	-	3.500	-	3.200	-	-	

REQUERIMIENTOS DE MANO DE OBRA MENSUALES

	TOTAL PAIS Año t-1		TOTAL PAIS Año 5	
	(en miles de jornadas)	(en miles de trabajadores)	(en miles de jornadas)	(en miles de trabajadores)
Total	68.427,6	119.555	144.192	706,8
Enero	4.117,8	7.906	9.506	559,2
Febrero	4.260,1	8.537	10.260	603,5
Marzo	5.653,8	9.817	12.660	744,7
Abril	7.059,9	12.021	15.117	889,2
Mayo	6.978,8	11.831	14.933	878,4
Junio	4.668,5	8.897	10.387	611,0
Julio	4.480,6	8.125	9.134	537,3
Agosto	5.440,3	7.945	9.814	577,3
Setiembre	6.287,0	9.994	11.444	573,2
Octubre	6.969,7	12.108	13.668	804,0
Noviembre	7.086,4	12.021	14.707	865,1
Diciembre	5.424,7	10.353	12.562	738,9

- e) Exprese en un gráfico la curva de requerimientos mensuales de trabajo, y la población económicamente activa calculada de acuerdo a los métodos propuestos en el punto (d).

2. Solución

2.1 Procedimiento

Las proyecciones de los requerimientos de mano de obra del sector agropecuario van a depender en primer lugar de las metas establecidas en relación al uso de los recursos naturales; además, dependerán en general de los cambios tecnológicos propuestos, y en particular de aspectos específicos, como la nueva estructura productiva, grado de mecanización, naturaleza de las prácticas productivas, etc. Estos aspectos variarán naturalmente de acuerdo a los distintos rubros de la producción.

Asimismo, la consideración de la probable evolución futura de la población rural constituye un elemento de juicio fundamental para la formulación de las metas sobre empleo.

En cuanto al procedimiento general para la formulación de las metas, conviene separar la mano de obra directa de la indirecta y realizar las proyecciones de las necesidades de cada una, expresándolas en términos de jornadas de trabajo. En seguida, se calcularán los totales correspondientes en cada una de las regiones, para cada mes y para todo el año.

Se entiende por mano de obra directa aquella que puede imputarse específicamente a la realización de cada uno de los distintos tipos de tareas que exigen los procesos productivos: cosecha de cereales, vacunación de animales, etc. La cuantificación de las necesidades se expresa normalmente en términos de jornadas de trabajo, por hectárea y por tipo de actividad.

Algunas tareas no tienen asignada una superficie determinada, como por ejemplo la esquila de los ovinos o la vacunación de animales. En este caso se calculan las jornadas sobre la base del tiempo necesario para cumplir la tarea por cabeza y el número de cabezas.

Por otra parte, la mano de obra indirecta es la que no resulta imputable a ninguna actividad productiva específica, pues se la dedica al desarrollo de tareas comunes a diferentes procesos productivos. Es el caso de reparación y mantenimiento de maquinarias y equipos, administración de empresas, etc. Normalmente, las metas se expresan en este caso en términos de jornadas globales para cada tipo de actividad.

2.2 Resolución numérica

Parte a) Véase Cuadro No. 13.

Parte b) Véanse Cuadros No. 14, 15 y 16.

JORNADAS DIRECTAS MENSUALES REQUERIDAS POR HECTAREA DE MAIZ

POR TIPO DE EMPRESA en el Llano

Año 5

	Sub familiar	Familiar	Multi familiar	Total
Jornadas anuales por ha	13,5	4,3	2,0	1.245
Miles de hectáreas	170	875	200	1.245
Enero	-	-	-	-
Febrero	-	-	-	-
Marzo	2,8	0,65	0,2	0,9
Abril	3,4	1,2	0,6	1,4
Mayo	2,8	0,65	0,2	0,9
Junio	-	-	-	-
Julio	-	-	-	-
Agosto	0,7	0,2	0,03	0,2
Setiembre	0,8	0,4	0,3	0,5
Octubre	1,2	0,5	0,3	0,6
Noviembre	1,2	0,5	0,3	0,6
Diciembre	0,6	0,2	0,07	0,2

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA EN EL LLANO
SUBFAMILIAR - Año 5

Rubros	Superficie (miles ha)	Jornadas directas por ha	Jornadas directas totales	Mano de Obra indirecta como % de la Mano de Obra directa	Jornadas indirectas totales	Jornadas totales
Caña	-	-	-	-	-	-
Trigo	-	-	-	-	-	-
Maíz	170	13,5	2.295	11,3	259	2.554
Arroz	-	-	-	-	-	-
Soja	15	10,0	150	11,3	17	167
Algodón	10	66,0	660	14,6	96	756
Frijoles	22	21,4	470,4	11,3	53	523,8
Huerta	30	70,0	2.100,0	31,2	655	2.755
Frutales	10	40,0	400,0	18,8	75	475
Otros	13	20,0	260,0	14,6	38	298
Subtotal	270	-	6.335,8	-	1.193	7.528,8
Praderas anuales	17	15	255	11,3	29	284
Praderas permanentes	20	15	300	11,3	34	334
Subtotal	37	-	555	-	63	618
Campo natural	193	10	1.930	9,4	181	2.111
Total	500	-	8.820,8	-	1.437	10.257,8

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA EN EL LLANO

FAMILIAR - Año 5

Rubros	Superficie (miles ha)	Jornadas directas por ha	Jornadas directas totales	Mano de Obra indirecta como % de la Mano de Obra directa	Jornadas indirectas totales	Jornadas totales
Caña	240	28,4	6.812	11,3	770	7.582
Trigo	86	3,5	301	11,3	34	335
Mafz	875	4,3	3.762,5	11,3	425	4.187,5
Arroz	150	15,9	2.385	11,3	270	2.655
Soja	193	4,4	849,2	11,3	96	945,2
Algodón	12	31,0	372	14,6	54	426
Frijoles	23	15,5	356,5	11,3	40	396,5
Huerta	20	50,0	1.000,0	31,2	312	1.312
Frutales	8	25,0	200,0	18,8	38	238
Otros	20	10,0	100,0	14,6	29	229
Subtotal	1.627	-	16.238,2	-	2.068	18.346,2
Praderas anuales	333	7,2	2.397,6	11,3	271	2.668,6
Praderas permanentes	505	7,2	3.636	11,3	411	4.047
Subtotal	838	-	6.033,6	-	682	6.715,6
Campo natural	1.035	4,8	4.968	9,4	467	5.435
Total	3.500	-	27.239,8	-	3.217	30.456,8

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA EN EL LLANO
MULTIFAMILIAR - Año 5

Rubros	Superficie (miles ha)	Jornadas directas por ha	Jornadas directas totales	Mano de Obra indirecta como % de la Mano de Obra directa	Jornadas indirectas totales	Jornadas totales
Caña	360	28,4	10.219	11,3	1.155	11.374
Trigo	-	-	-	-	-	-
Maíz	200	2	400	11,3	45	445
Arroz	60	15,9	954	11,3	108	1.062
Soja	107	3,7	321	11,3	36	357
Algodón	-	-	-	-	-	-
Frijoles	-	-	-	-	-	-
Huerta	4	50	200	31,2	62	262
Frutales	2	25	50	18,8	9	59
Otros	3	20	60	14,5	9	69
Subtotal	736	-	12.204	-	1.424	13.628
Praderas anuales	100	7,2	720	11,3	81	801
Praderas permanentes	315	7,2	2.268	11,3	256	2.524
Subtotal	415	-	2.988	-	337	3.325
Campo natural	2.049	4,8	9.835,2	9,4	925	10.760
Total	3.200	-	25.027	-	2.686	27.713

Parte c) Miles de trabajadores mensuales:

Enero	242,2
Febrero	250,6
Marzo	332,6
Abril	415,3
Mayo	410,5
Junio	274,6
Julio	263,6
Agosto	320,0
Septiembre	369,8
Octubre	410,0
Noviembre	416,8
Diciembre	319,1

- Parte d) i) 416,8 miles de trabajadores (noviembre)
ii) 335,4 miles de trabajadores

2.3 Discusión

Se procederá a la discusión de la solución.

Las necesidades de mano de obra para el año meta se calcularon en una primera etapa para cada proceso productivo, determinándose las horas necesarias por hectárea para cumplir cada tarea, y el mes del año en que se realizaba. Las jornadas se calcularon sobre la base de 10 horas de labor por jornada. Se tuvieron en cuenta los cambios tecnológicos propuestos con relación al año base al determinar las horas que insumirá cada labor.

Se manejaron distintas necesidades de mano de obra según las empresas consideradas. Generalmente existen dos requerimientos diferentes para cada rubro, según se consideren empresas subfamiliares, con un grado mínimo de mecanización, o empresas familiares o multifamiliares, donde habitualmente se dan los máximos niveles de mecanización para el país. Adicionalmente, para algunos rubros se establecieron diferencias entre predios familiares y multifamiliares, cuando era evidente la existencia de un grado intermedio de mecanización.

El ajuste de las necesidades mensuales se realizó mediante una distribución porcentual de las jornadas totales, en función del conocimiento de la época más adecuada para llevar a cabo cada labor. Al proyectar la asignación de jornadas para el total de la superficie ocupada por cada rubro, se debe manejar con una mayor flexibilidad la época de realización de las tareas que si se considera a nivel de unidad de superficie, ya que se debe pensar que los mismos recursos (mano de obra, maquinaria) podrán emplearse sucesivamente para completar una misma labor durante un cierto período de tiempo.

Así, por ejemplo, la cosecha de maíz, cuya fecha óptima de realización sería abril, se proyectó ocupando los meses de marzo, abril y mayo (en grado variable según la cosecha fuera manual o mecanizada), teniendo en cuenta la superficie ocupada y la disponibilidad de mano de obra en los distintos tipos de empresas.

Finalmente, en función de la superficie ocupada por cada rubro de producción, se determinaron las jornadas totales directas, por mes y para todo el año, para cada rubro y para cada región.

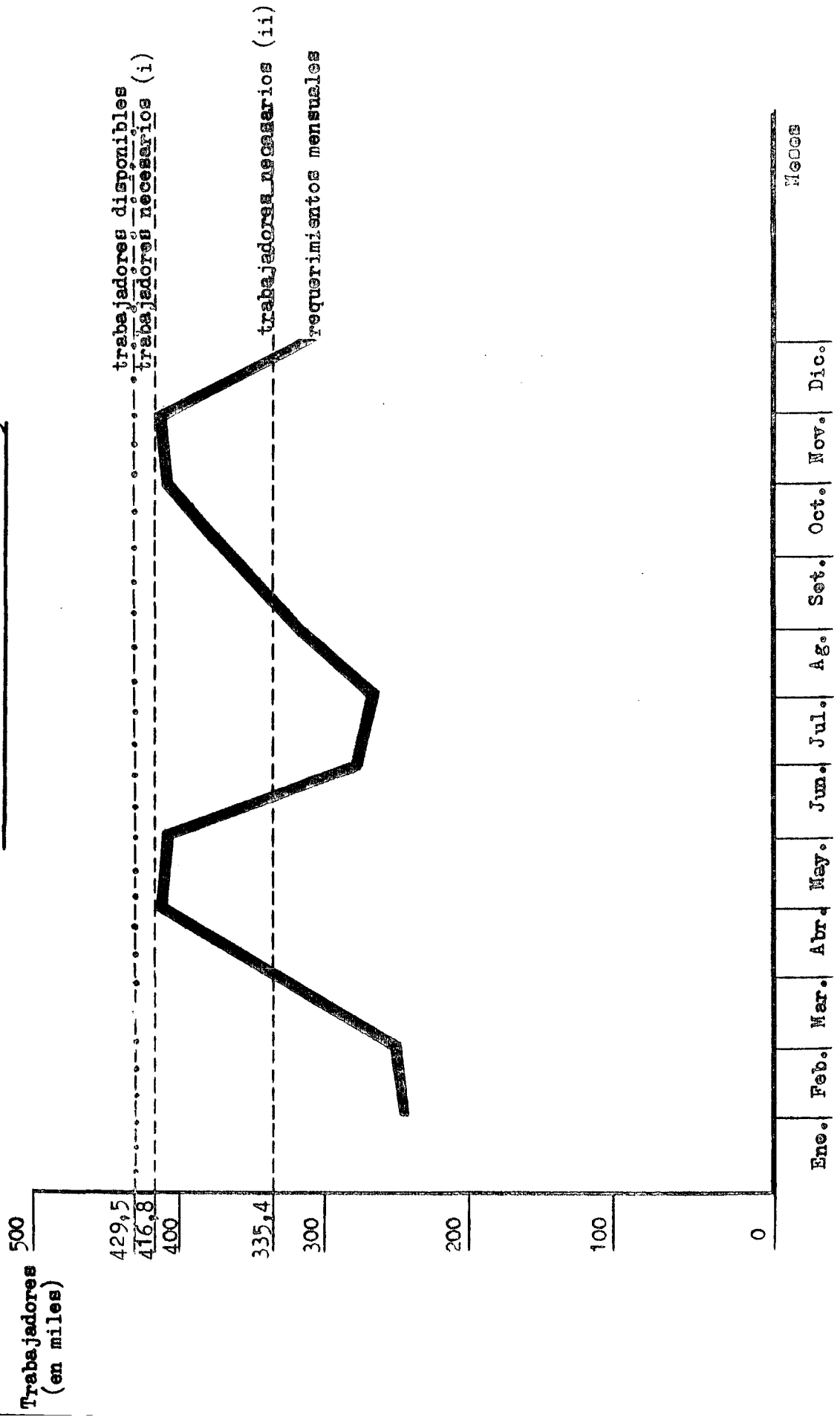
Los requerimientos de mano de obra directa, se calcularon como un porcentaje de la directa para cada rubro de producción, variando dicho porcentaje entre rubros de acuerdo al grado de complejidad que irán adquiriendo dichas tareas, al tener que hacer frente a mayor número de actividades. Así, por ejemplo, se estima que la mano de obra indirecta representará un 9% de la directa en la ganadería extensiva, un 11% en la agricultura extensiva, y llegará a un 31% en los rubros hortícolas.

Cabe anotar por último que la mano de obra requerida por la ganadería se estimó en función de las hectáreas ocupadas, llevando a cabo una conversión de las necesidades calculadas por cabeza (caso de esquila, vacunación, etc.), en función de la dotación media, para compatibilizarlas con aquellas otras necesidades que se expresaban por unidad de superficie (recorrida, en el caso del campo natural; labores del suelo, en el caso de los distintos tipos de mejoramientos forrajeros).

Una vez en poder del número total de jornadas ocupadas por mes y para todo el año, se determinó el número de trabajadores ocupados de acuerdo a las normas ocupacionales que se pondrían en el Plan. Se entiende por norma ocupacional la cantidad de jornadas de trabajo que una persona puede llevar a cabo en cada mes y durante todo el año. El régimen laboral prevaeciente en el país y las condiciones climáticas predominantes son los dos factores determinantes de las normas ocupacionales. En el caso de Americana, no se previeron cambios con relación a la situación urgente. Se estima que, en promedio, los trabajadores rurales realizan 17 jornadas de labor al cabo de un mes.

Establecidas las metas acerca de las necesidades totales de trabajo humano, su comparación con las proyecciones de población rural (total y económicamente activa) que surgen de las tasas previstas de crecimiento de dicha población, permitirá evaluar la capacidad empleadora que tendrán las actividades productivas en el futuro, así como los picos estacionales de ocupación y desocupación.

REQUERIMIENTOS MENSUALES DE MANO DE OBRA Y POBLACION ECONOMICAMENTE ACTIVA
 EN LA REGION DEL LLANO PARA EL AÑO 5



TEMA III - Proyecciones de mano de obra

Ejercicio No. 7 - Cuantificación del margen de desempleo estacional en el Llano.

1. Planteo

1.1 Antecedentes

El análisis de la utilización de la mano de obra en el sector agropecuario en los últimos quince años, permitirá conocer las características del empleo en el sector y comprobar si la disponibilidad del mismo ha constituido un factor limitante para el desarrollo agropecuario. Por otra parte, se obtendrán elementos de juicio para fundamentar los requisitos de mano de obra para alcanzar las metas del Plan.

El análisis de la población rural aporta el contexto inmediato a la consideración de la mano de obra agropecuaria. Se define la población rural como el conjunto de personas que residen fuera de los núcleos poblados de mil o más habitantes. Ello no implica que toda esta población dependa de actividades agropecuarias ni que todas las personas dependientes de actividades agropecuarias habiten en el medio rural. Existe un trasiego de la población ocupada entre el medio rural y los centros urbanos, especialmente los más próximos a las áreas rurales.

La población rural global creció en América a una tasa promedio de 1,65%, evolución más lenta que la de la población total del país y que trae como consecuencia una reducción de la participación de la población rural en el total que pasa del 46,5% al 41,7% entre el año t-16 y el año t (véase Cuadro No. 1). Esta tendencia es propia de países que atraviesan procesos de modernización social, provocado en este país por la reestructura económica que produjo la industrialización y la concomitante expansión de los servicios urbanos.

Esa pérdida de participación que hubiera significado la presencia de 220.000 personas más en el medio rural, de mantenerse la proporción de t-16, coincide sin embargo con un incremento del área agrícola de un millón de hectáreas que pudo haber representado un factor de afincamiento al medio rural al brindar más posibilidades de empleo. Si a ello se agrega que de estimaciones realizadas por especialistas demógrafos puede concluirse en que la tasa de natalidad en el medio rural es sensiblemente más alta que la que se registra en las ciudades, se concluye que el trasiego de población hacia las ciudades debe ser constante y sustancial.

El sector agropecuario no ha sido capaz pues, de retener en su seno al incremento poblacional que tuvo lugar en estos años.

La población rural de América está localizada fundamentalmente en los llanos (1 millón doscientos mil), de la que una tercera parte está concentrada en la región urbana que rodea la capital. Los restantes 700.000 habitan la meseta, u-

EVOLUCION DE LA POBLACION
(en miles de habitantes)

Años	Población Total	Población Rural	Población Urbana
t-16	3.176	1.477	1.700
t-15	3.252	1.502	1.750
t-14	3.335	1.530	1.804
t-13	3.417	1.558	1.859
t-12	3.500	1.585	1.915
t-11	3.586	1.614	1.972
t-10	3.668	1.640	2.028
t-9	3.754	1.667	2.087
t-8	3.840	1.693	2.146
t-7	3.926	1.720	2.206
t-6	4.016	1.747	2.269
t-5	4.109		
t-4	4.206	1.804	2.402
t-3	4.303	1.833	2.470
t-2	4.400	1.861	2.539
t-1	4.500	1.890	2.610
1 ^{1/}	4.604	1.920	2.684

^{1/} Datos Preliminares.

Fuente: Dirección General de Estadística y Censos.

diéndose apreciar una mayor densidad en la región dedicada a cultivos (véase Cuadro No. 2).

Si se distingue la población de acuerdo al tipo de empresa al que está vinculada se aprecia que más del 50% depende de explotaciones subfamiliares, que practican en buena medida una agricultura de subsistencia. Este millón de minifundistas deficientemente atendidos en sus necesidades esenciales constituye el elemento más importante en la problemática de orden social del agro americano.

Por otra parte, los 10 millones de hectáreas ocupadas por las empresas multifamiliares grandes cobijan sólo 100 mil personas. Restan entonces 800 mil personas cuya existencia en el medio rural está asociada a las empresas medianas, y que presentan los rasgos de mayor equilibrio en la constitución familiar.

La estructura por sexo y por edades se conoce sólo para el año t-1, pero puede considerarse vigente en términos generales. Mientras que en las empresas de gran tamaño, se aprecia un marcado excedente de hombres, la proporción se aproxima al 50% en las regiones agrícolas en que predomina la empresa mediana, y se conserva también entre el campesinado.

La estimación de población económicamente activa en el sector agropecuario se ubica en un 48,7% del total. La ocupación en el sector agropecuario se estimó sobre la base de la fuerza de trabajo efectivamente aplicada al proceso productivo agropecuario. Tomando en cuenta las jornadas requeridas por las diversas operaciones incluidas en el proceso y suponiendo que cada persona cumple un promedio de 17 jornadas al mes, se cuantificaron los requerimientos mensuales y anuales de mano de obra, y el porcentaje de ocupación efectiva.

En el año t-1, la actividad agropecuaria en el total de Americana insumió aproximadamente 120 millones de jornadas. Los 925 mil trabajadores que componían la población activa de ese año generaban una oferta de casi 190 millones de jornadas, estimándose en consecuencia que, en el año t-1, el porcentaje de ocupación de la población activa se ubicaba en torno al 63%. Las jornadas por persona se ubican en unas 130 al año, lo cual puede considerarse normal en el contexto latinoamericano. (Véase Cuadro No. 3).

a) Composición según su participación en el proceso productivo:

La participación de la fuerza de trabajo asignada directamente al proceso productivo alcanza al 90% del total requerido en la actividad agropecuaria. Se computa en ella la mano de obra que se ocupa en las diversas prácticas de los cultivos y en las prácticas ordinarias de la actividad ganadera. Dentro de esta asignación puede distinguirse la que atiende a la formación del capital agropecuario, que en Americana se concreta en las plantaciones de caña, en la implantación de praderas, etc. y que es muy poco relevante. Los requerimientos de mano

DISTRIBUCION DE LA POBLACION RURAL POR REGION Y TIPO DE EMPRESA
(año t-1)

Concepto	REGIONES			TIPO DE EMPRESA			Total
	Urbana	Llano	Meseta	Sub-familiar	Familiar	Multi-familiar	
 en miles de habitantes						
Población total	400	800	700	1.000	800	100	1.900
Población por predio	5,9	5,3	5,3	4,4	6,9	14,3	5,4
Hectáreas por habitante	4,7	11,2	26,1	1,48	18,0	139,0	15,7

Fuente: Oficina de Planificación

DISTRIBUCION MENSUAL DE LA MANO DE OBRA TOTAL SEGUN SU PARTICIPACION EN EL PROCESO PRODUCTIVO
(año t-1, en miles de jornadas)

Meses	D I R E C T A S				I N D I R E C T A S				Total	% de Ocupación
	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal		
Enero	1.030	2.994	3.303	7.327	140	265	173	579	7.906	50,3
Febrero	1.535	3.100	3.098	7.733	263	383	153	804	8.537	54,3
Marzo	2.344	3.408	2.947	8.700	423	483	211	1.117	9.817	62,4
Abril	2.492	4.429	4.034	10.956	345	454	266	1.065	12.021	76,4
Mayo	2.145	4.435	4.276	10.856	293	433	249	975	11.831	75,2
Junio	1.426	3.526	3.236	8.187	206	353	151	710	8.897	56,6
Julio	1.103	3.801	2.558	7.462	183	340	140	663	8.125	51,7
Agosto	993	3.967	2.427	7.387	128	320	110	558	7.945	50,5
Setiembre	1.338	5.134	2.699	9.201	196	464	234	794	9.995	63,6
Octubre	1.676	5.962	3.531	11.169	237	527	176	940	12.109	77,0
Noviembre	1.638	5.284	4.312	11.234	192	409	186	788	12.021	76,4
Diciembre	1.254	3.871	4.480	9.605	148	353	247	748	10.353	65,8
Total	18.975	49.940	40.900	2.755	2.755	4.786	2.200	9.741	119.556	63,4

de obra indirecta se computan por las jornadas dedicadas a tareas de administración y de reparación de maquinarias.

La proporción de mano de obra directa e indirecta difiere según la región que se considere. Es mayor la indirecta en los llanos porque el tamaño de los predios y la complejidad de la explotación exige mayor esfuerzo de administración. En la zona urbana, pesan más también porque estas tareas se incrementan relativamente al aumentar el número de establecimientos de menor tamaño. En la meseta, en cambio, la mano de obra indirecta no alcanza en el año t-1 al 5% del total requerido.

b) Distribución de la ocupación por rubro de producción

La mano de obra directa requerida por la producción agropecuaria en t-1 se ocupa prácticamente en la misma proporción en las actividades agrícolas y en las pecuarias. Dentro de la agricultura, es la caña el cultivo que absorbe individualmente el mayor volumen de mano de obra, siguiéndole la huerta, de características típicamente intensivas, y el maíz, cuyos coeficientes de ocupación se ven incrementados por la parte de su producción que se realiza en los minifundios.

La distribución regional de la ocupación muestra que en el llano se ocupa la mayor proporción de mano de obra dedicada a la agricultura, absorbiendo además cerca del 40% de la ocupación pecuaria. La meseta en cambio, absorbe el grueso de la ocupación ganadera. (Véase Cuadro No. 4).

c) Si se atiende a la ocupación agropecuaria por tipo de empresa, se constata que las empresas subfamiliares disponen de 450.000 trabajadores que ofrecen 92.000 jornadas de las que utilizan menos de 20.000 en el propio establecimiento (véase Cuadro No. 5). Se genera así un excedente de fuerza de trabajo que representa el 80% de las jornadas disponibles. Mientras tanto, en las empresas multifamiliares, los requisitos superan a las disponibilidades, lo que está indicando la incorporación a estos predios de trabajadores que provienen de los estratos subfamiliares y familiares. Las empresas medianas, muestran el mayor equilibrio ocupacional logrando dar trabajo productivo al 80% del tiempo disponible por sus trabajadores.

La cantidad de hectáreas que atiende cada trabajador en las empresas de diversa organización varía según la región en que están ubicados. Mientras que un trabajador en la meseta en una empresa multifamiliar tendrá a su cargo en promedio unas 130 hectáreas, en el otro extremo de la escala, un trabajador de las empresas subfamiliares del llano contará con sólo dos hectáreas para volcar su fuerza de trabajo.

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA
DIRECTA, POR RUBRO Y REGION
Año t-1

	Urbana	Llano	Meseta	Total	Estructura
 en miles de jornadas				%
Trigo	-	280	3.521	3.801	3,5
Arroz	-	1.569	557	2.226	2,0
Soja	78	472	1.092	1.542	1,5
Cana	-	16.920	-	16.920	15,4
Maíz	2.344	3.771	640	6.755	6,2
Algodón	950	970	-	1.920	1,7
Frijoles	863	781	369	2.013	1,8
Huerta	4.400	3.100	1.740	9.240	8,4
Frutales	100	460	4.280*	4.920	4,5
Subtotal	11.600	29.073	12.484	53.157	48,4
Campo Natural	5.724	18.320	26.087	50.131	45,7
Praderas	1.650	2.547	2.329	6.526	5,9
Subtotal	7.374	20.867	28.416	56.657	51,6
Total	18.974	49.940	40.900	109.814	100

* Incluye explotación forestal.

Fuente: Oficina de Planificación.

OCUPACION AGROPECUARIA POR REGION Y TIPO DE EMPRESA
(año t-1)

Concepto	REGION			TIPO DE EMPRESA				Total País
	Urbana	Llano	Meseta	Sub familiar	Familiar	Multi familiar		
Número de trabajadores (en miles de trabajadores)	250	320	320	450	400	75	925	
Jornadas disponibles (en miles de jornadas)	41.820	81.600	65.280	91.800	81.600	15.300	188.700	
Jornadas directas utilizadas (en miles de jornadas)	18.975	49.940	40.900	18.639	64.629	26.547	109.815	
Relación 2/1 (en %)	45,3	61,2	62,7	20,3	79,2	173,7	58,2	

d) Distribución de la ocupación durante el transcurso del período productivo:

La distribución estacional de la ocupación total del sector agropecuario, muestra dos períodos de crecimiento de la ocupación: los meses de abril y mayo y el período septiembre-diciembre. Ello es la resultante de varios procesos estacionales que se superponen y que se originan principalmente en la cosecha de la caña de azúcar, y en los cultivos agrícolas de verano cuyas cosechas coinciden en los meses de abril y mayo (véase nuevamente Cuadro No. 3).

El sector varía el porcentaje de ocupación en los diferentes meses del año, dejando en todos los casos un margen de mano de obra desocupada que oscila entre el 23 y el 50% de la fuerza de trabajo disponible.

Las variaciones estacionales se acentúan en el llano, donde la incidencia de los cultivos opera con más fuerza. Entre los puntos de máxima (octubre) y de mínima (enero), la ocupación mensual se duplica, llegando a absorber en el pico de máxima prácticamente el total de mano de obra disponible.

El 60% de los requerimientos de mano de obra de la caña de azúcar se concentran en los cuatro meses en que, con diferente intensidad, tiene lugar la zafra. Ello implica que un importante contingente de mano de obra que trabaja en el llano está sometida a prolongados períodos de desocupación total o parcial, quedando a disponibilidad de la demanda estacional que se intensifica a partir del mes de julio. La importancia del cultivo de caña y lo marcado de su estacionalidad define la configuración social de los llanos. Los ciclos de desocupación que la caña provoca, y que no son pasibles de contrarrestarse por requerimientos provenientes de otras producciones, determinan la presencia de importantes núcleos de población de nivel de ingreso reducido y que condicionan la existencia en el llano de 120 mil predios de organización subfamiliar, con una población trabajadora de 400 mil personas.

El problema ocupacional que plantea la caña de azúcar tiene múltiples implicancias en las consideraciones de la diagnosis agrícola de América. En primer lugar, pone de manifiesto el problema social de mayor gravedad que aqueja a este país. En seguida, plantea la importancia que presenta la restricción de la disponibilidad de mano de obra ante una previsible expansión del área cañera. Los problemas que se plantean con referencia al empleo, de expandirse el cultivo, y la discusión de las opciones que se plantean en torno a esta problemática, ofrecen uno de los campos de mayor interés para el diagnóstico.

Puede afirmarse, en el orden de importancia de los problemas a identificar, que los que derivan

de las distorsiones en el empleo provocadas por la importancia de actividades agrícolas de fuerte estacionalidad ocupan un lugar prioritario.

Si bien el problema de la estacionalidad ocupacional tiene en la caña su factor principal, la predominancia de los cultivos de verano en la superficie agrícola, genera también un pico en los meses de abril y mayo, en el momento de la cosecha. La ganadería comparte con los cultivos de verano el millón de jornadas en que se incrementa la demanda en esos meses.

En la meseta, la variación estacional más suave está asociada directamente a la producción ganadera, que ocupa el 75% del total de mano de obra de esa zona.

La región urbana muestra un nivel de ocupación en el sector agropecuario de un 52% y algunos meses en que la ocupación no llega al 30%, lo cual está mostrando que la ciudad ofrece trabajo complementario a las actividades rurales que estos trabajadores desempeñan. El pico de alza de marzo-abril marca también la importancia de las cosechas de cultivos de verano.

La disponibilidad global de mano de obra, pues, no es restrictiva, ya que hay excedente de fuerza de trabajo en todo el año, aunque se aprecia en el llano una demanda próxima al 100% en el pico de la zafra cañera.

De acuerdo a las proyecciones realizadas, las jornadas totales requeridas para el cumplimiento de las actividades previstas en el año meta alcanzan a 144 millones. Esto significa que el programa de actividades propuesto implica una utilización de mano de obra superior en un 20,5% a la demandada en el año t-1. Teniendo en cuenta que el crecimiento esperado de la población trabajadora es inferior a este porcentaje, se observa como resultado un mejoramiento en el nivel de ocupación pasándose de un 63,4% de ocupación efectiva en el año t-1 a un 70,9% en el 5º año del Plan (véase Cuadro No. 6).

De la ocupación total anteriormente mencionada, 15.395 miles de jornadas (10,7%) se destinarán a actividades indirectamente productivas, mientras que el 89,3% restante se aplicará en forma directa a la producción. Es decir, pues, que habrá un incremento relativo de la importancia del trabajo indirecto, como consecuencia de la intensificación de la producción prevista.

Analizando la distribución mensual, se constata también una mayor regularidad. En ningún período del año las jornadas requeridas son inferiores al 54% (en el año t-1 en dos meses alcanzaban al 50%); en 6 meses los requerimientos superan el 70% de las jornadas disponibles (en t-1 sólo 4 meses superaban ese porcentaje).

DISTRIBUCION MENSUAL DE LA MANO DE OBRA TOTAL SEGUN SU PARTICIPACION EN EL PROCESO PRODUCTIVO

(Año 5, en miles de jornadas)

Meses	D I R E C T A S				I N D I R E C T A S				Total	% de Ocupación
	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal	Urbana	Llano	Meseta	Subtotal		
Enero	1.260	3.680	3.575	8.515	209	438	344	991	9.506	56,1
Febrero	1.896	3.775	3.405	9.076	355	485	344	1.184	10.260	60,6
Marzo	2.737	4.981	3.291	11.009	516	673	362	1.551	12.560	74,2
Abril	2.654	6.300	4.533	13.487	408	759	463	1.630	15.117	89,3
Mayo	2.400	6.233	4.708	13.341	375	745	472	1.592	14.933	88,2
Junio	1.577	4.168	3.530	9.275	270	501	341	1.112	10.387	61,4
Julio	1.259	3.995	2.889	8.143	235	474	282	991	9.134	54,0
Agosto	1.184	4.883	2.771	8.838	180	542	254	976	9.814	58,0
Setiembre	1.593	5.622	3.032	10.247	262	643	292	1.197	11.444	67,6
Octubre	2.069	6.230	395	12.234	333	713	388	1.434	13.668	80,7
Noviembre	2.046	6.355	4.829	13.230	300	711	466	1.477	14.707	86,9
Diciembre	1.551	4.866	4.885	11.302	233	549	478	1.260	12.562	74,2
Total	22.226	61.088	45.383	128.697	3.676	7.233	4.486	15.395	144.092	70,9

Los requerimientos se incrementan en forma similar en cada uno de los subsectores (véase Cuadros No. 7 y 8), aunque por razones diferentes. En la agricultura, pese a la expansión del área, la mecanización prevista para el año 5 de parte importante de la cosecha de caña (30%) contrasta dicho efecto, quedando como resultado global un incremento del 15,9%. En la ganadería, pese a la reducción del área destinada a la actividad pecuaria, la intensificación de la producción basada en el incremento de la superficie forrajera mejorada hace que las jornadas directas de este subsector se incrementen en el 18,3%. Finalmente, también en el rubro forestal, a pesar de la reducción del área, la instalación de nuevas plantaciones artificiales y la explotación más intensa del bosque justifican un 17,3% de incremento en las jornadas directas.

En lo referente al incremento de la ocupación por regiones, alcanza su máximo en el llano (22,3%) y su mínimo en la meseta (11,0%).

En el Cuadro No. 8 se presenta también la información sobre los requerimientos por tipo de empresa en el 5º año del Plan. Los efectos del Plan tienen resultados muy diferentes a este nivel; las empresas subfamiliares mantienen prácticamente incambiada su ocupación; las familiares la incrementan muy lentamente (3,6%), mientras que las multifamiliares lo hacen en forma espectacular (63,5% de aumento). Como consecuencia, se da una redistribución de la demanda de fuerza de trabajo, ocupando las subfamiliares sólo el 14,2%, las familiares el 52,1% y las multifamiliares el 33,7%.

Esto llevaría, sin duda, a la creciente proletarianización del agro.

1.2 Datos

Véase Cuadros No. 9, 10, 11 y 12.

1.3 Enunciado

- a) Determine la disponibilidad mensual de trabajadores y jornadas en el año meta, teniendo en cuenta que la tasa de crecimiento de la población rural en el Llano es de aproximadamente 1,6% acumulativo anual, y que en el año 1 los trabajadores rurales en la Región eran 403,1 miles (redondear a cientos de trabajadores).
- b) Analice la estacionalidad de la ocupación. Calcule:
 - i) Jornadas anuales promedio por persona activa.
 - ii) Desempleo mensual.
 - iii) Porcentaje de ocupación (mensual).
 - iv) Número de personas ocupadas en diferentes periodos del año (cuántas personas disponen de plena ocupación durante seis, ocho, diez o doce meses) Determinarlo mediante la observación de los datos del Cuadro No. 12.
- c) Con la información del Cuadro No. 11, comparar la situación del año $t-1$, con la proyectada para el

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA POR REGION

Año 5

(en miles de jornadas)

Rubro	Urbana	Llano	Meseta	Total
Caña ^{1/}	-	17.031	-	17.031
Trigo	-	301	3.593	3.894
Maíz	2.208	5.457	389	9.055
Arroz	-	3.339	716	4.055
Soja	220	1.320	2.284	3.824
Algodón	977	1.032	-	2.009
Frijoles	925	827	371	2.124
Huerta	4.940	3.300	1.540	9.880
Frutales	2.905	650	620	4.175
Otros	220	520	180	920
Subtotal Agrícola	12.396	34.778	9.793	56.967
Praderas anuales	3.150	3.373	1.091	7.614
Praderas permanentes	2.700	6.204	1.644	10.548
Campo natural mejorado	-	-	2.350	2.350
Subtotal mej. forraj.	5.850	9.577	5.085	20.512
Campo Natural	3.980	16.733	25.801	46.514
Subtotal forrajero	9.830	26.310	30.886	67.026
Forestales	-	-	4.704	4.704
Total	22.226	61.088	45.383	128.697

^{1/}30% cosecha mecanizada.

REQUERIMIENTOS ANUALES DE MANO DE OBRA POR TIPO DE EMPRESA

Año 5
(en miles de jornadas)

Rubro	Sub familiar	Familiar	Multi familiar	Total
Caña 1/	-	6.812, ^d	10.218, ⁵	17.031
Trigo	106	2.996	792	3.894
Mafz	2.876	5.439	710	9.055
Arroz	0	2.735	1.320	4.055
Soja	290	1.512	2.022	3.824
Algodón	924	1.085	-	2.009
Frijoles	878	1.225	21	2.124
Huerta	3.850	4.050	1.980	9.880
Frutales	1.440	2.175	560	4.175
Otros	360	350	210	920
Subtotal Agrícola	10.724	28.379	17.861	56.967
Praderas anuales	495	4.621	2.498	7.614
Praderas permanentes	825	5.805	3.918	10.548
Campo natural mejorado	-	1.600	750	2.350
Subtotal mej. forr.	1.320	12.026	7.166	20.512
Campo Natural	6.100	24.455	15.959	46.514
Subtotal forrajero	7.420	36.481	23.125	67.026
Forestales	193	2.159	2.352	4.704
Total	18.337	67.019	43.341	128.697

1/ 30% cosecha mecanizada.

REQUERIMIENTOS MENSUALES DE MANO DE OBRA DIRECTA PARA EL CULTIVO

DE MAIZ EN UNA EMPRESA SUBFAMILIAR

Año 5

Labor	Horas/ha <u>1/</u>	Mes
1a. Arada	6	Agosto
2a. Arada	6	Agosto/Setiembre
Disqueadas	8	Setiembre/Octubre
Rastreadas	8	Octubre/Noviembre
Siembra	5	Noviembre
Carpidas	12	Noviembre/Diciembre
Cosecha	90	Marzo/Mayo

1/ Se considera que una jornada corresponde a 10 horas de labor.

REQUERIMIENTOS MENSUALES DE MANO DE OBRA DIRECTA PARA EL
CULTIVO DE MAIZ POR TIPO DE EMPRESAS (en porcentaje)

Año 5

	Sub familiar	familiar	Multi familiar
Jornadas anuales (por hectárea)	-	4,3	2,0
Enero	-	-	-
Febrero	-	-	-
Marzo	20,7	15,1	10,0
Abril	25,2	27,9	30,0
Mayo	20,7	15,1	10,0
Junio	-	-	-
Julio	-	-	-
Agosto	5,2	4,7	1,5
Setiembre	5,9	9,3	15,0
Octubre	8,9	11,6	15,0
Noviembre	8,9	11,6	15,0
Diciembre	4,5	4,7	3,5

REQUERIMIENTOS DE MANO DE OBRA POR HECTAREA, POR TIPO DE EMPRESA, EN LA REGION DEL LLANO,

Y SUPERFICIE OCUPADA POR RUBRO DE PRODUCCION EN EL AÑO META

Año 5

RUBROS	MANO DE OBRA DIRECTA POR TIPO DE EMPRESA						MANO DE OBRA INDIRECTA
	Subfamiliar		Familiar		Multifamiliar		
	Superficie (miles de hectáreas)	Jornadas directas (por ha)	Superficie (miles de hectáreas)	Jornadas directas (por ha)	Superficie (miles de hectáreas)	Jornadas directas (por ha)	
Caña de Azúcar	-	-	240	28,4	360	28,4	11,3
Trigo	-	-	86	3,5	-	-	11,3
Mafz	170	13,5	875	4,3	200	2,0	11,3
Arroz	-	-	150	15,9	60	15,9	11,3
Soja	15	10,0	193	4,4	107	3,0	11,3
Algodón	10	66,0	12	31,0	-	-	14,6
Frijoles	22	21,4	23	15,5	-	-	11,3
Huerta	30	70,0	20	50,0	4	50,0	31,2
Frutales	10	40,0	8	25,0	2	25,0	18,8
Otros	13	20,0	20	10,0	3	20,0	14,6
Subtotal	270	-	1.627	-	736	-	-
Praderas anuales	17	15,0	333	7,2	100	7,2	11,3
Praderas permanentes	20	15,0	505	7,2	315	7,2	11,3
Subtotal	37	-	838	-	415	-	-
Campo Natural	193	10,0	1.035	4,8	2.049	4,8	9,4
Total	500	-	3.500	-	3.200	-	-

REQUERIMIENTOS DE MANO DE OBRA MENSUALES

	LLANO		TOTAL PAIS Año t-1		TOTAL PAIS Año 5	
	(en miles de jornadas)	(en miles de jornadas)	(en miles de jornadas)	(en miles de trabajadores)	(en miles de jornadas)	(en miles de trabajadores)
Total	68.427,6	119.555	586,1	144.192	706,8	
Enero	4.117,8	7.906	465,1	9.506	559,2	
Febrero	4.260,1	8.537	502,2	10.260	603,5	
Marzo	5.653,8	9.817	577,5	12.660	744,7	
Abril	7.059,9	12.021	707,1	15.117	889,2	
Mayo	6.978,8	11.831	695,9	14.933	878,4	
Junio	4.668,5	8.897	523,4	10.387	611,0	
Julio	4.480,6	8.125	477,9	9.134	537,3	
Agosto	5.440,3	7.915	467,4	9.814	577,3	
Setiembre	6.287,0	9.994	587,9	11.444	673,2	
Octubre	6.959,7	12.108	712,3	13.668	804,0	
Noviembre	7.086,4	12.021	707,1	14.707	855,1	
Diciembre	5.424,7	10.353	609,0	12.552	738,9	

año 5 para todo el país. Teniendo en cuenta que en t-1 había 925.000 trabajadores en el agro, y que en el año 5 ascenderían a 996 mil, analizar cómo varía la situación con la puesta en marcha del Plan. ¿Mejora la ocupación en el país? ¿Mejora la distribución estacional de la misma?

2. Solución

2.1 Resolución numérica

a) Tasa de crecimiento para el año 5: $(1,016)^4 = 1,06555$
 $403,1 \times 1,06555 = 429,5$ miles de trabajadores disponibles.

$429,5 \times 204 = 87.618$ miles de jornadas anuales disponibles.

$\frac{87.618}{12} = 7.301,5$ miles de jornadas mensuales disponibles.

b) i) $\frac{68427,6}{429,5} = 159,3$ jornadas anuales promedio por persona activa.

ii) y iii) - véase Cuadro No. 13.

iv) Trabajan doce meses: 242,2 miles de trabajadores
diez meses: 263,6 miles de trabajadores
ocho meses: 319,1 miles de trabajadores
seis meses: 332,6 miles de trabajadores

c) La puesta en marcha del Plan, prevé un aumento de la ocupación a nivel del país. Mientras que en t-1 el promedio anual de trabajadores ocupados era el 63,3% de la población económicamente activa, ese porcentaje sube al 71,0% en el 5º año del Plan.

Con respecto a la estacionalidad, se observa que en el año 5 se mantienen prácticamente incambiadas las características de t-1. Si bien en algunas regiones la situación ha variado, para el país en su conjunto el Plan no ha mejorado la situación apreciada en el año base.

DESEMPLEO Y PORCENTAJE DE OCUPACION MENSUAL EN EL LLANO

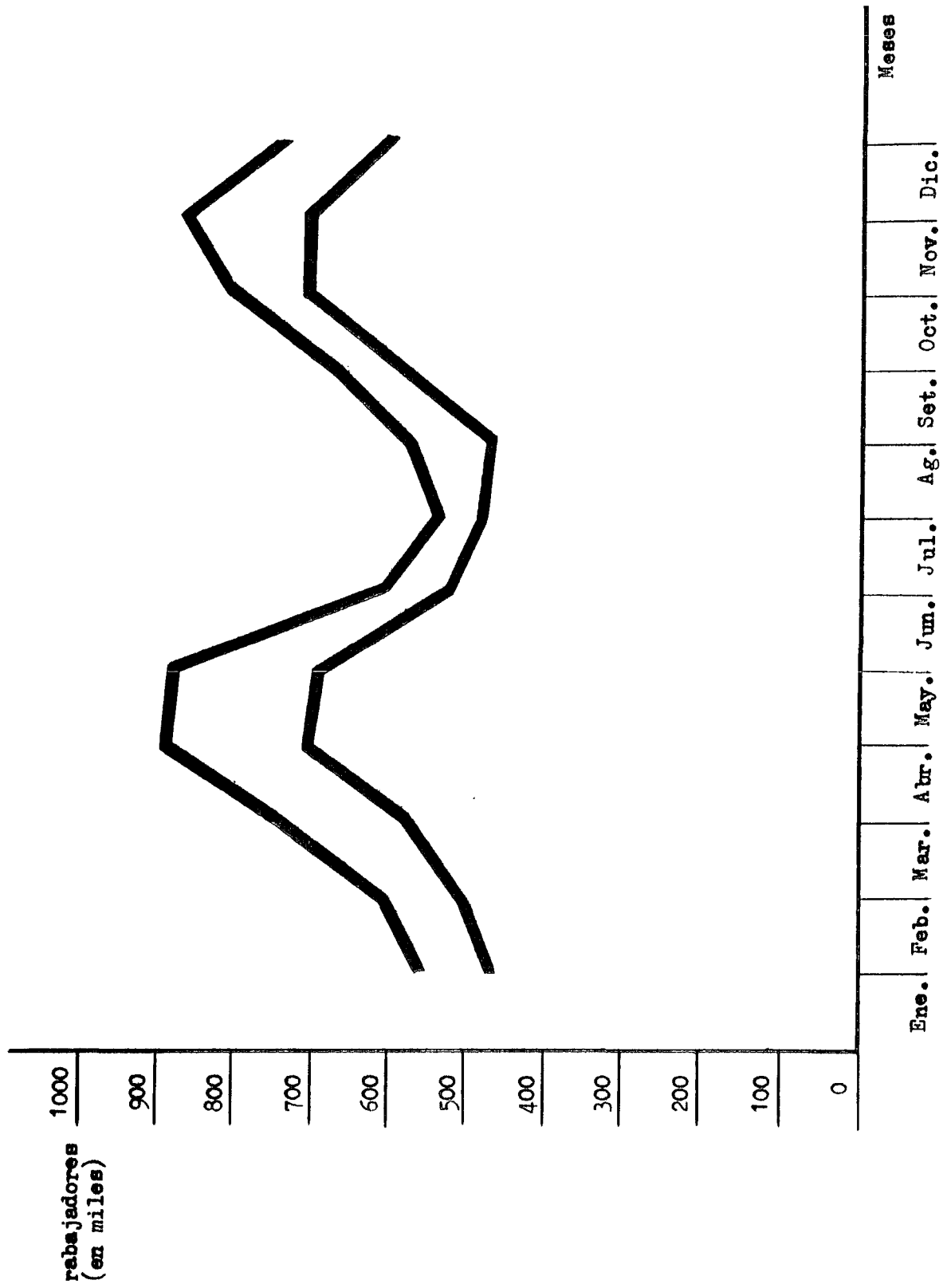
Año 5

	Jornadas disponibles	Trabajadores disponibles	Jornadas requeridas	Trabajadores necesarios 1/	Desempleo mensual 2/	% de ocupación
 en miles	
Total	87.618,0	429,5	68.427,6	335,4		78,1
Enero	7.301,5	429,5	4.117,8	242,2	3.183,7	56,4
Febrero	7.301,5	429,5	4.260,1	250,6	3.041,4	58,3
Marzo	7.301,5	429,5	5.653,8	332,6	1.647,7	77,4
Abril	7.301,5	429,5	7.059,9	415,3	241,6	96,7
Mayo	7.301,5	429,5	6.978,8	410,5	322,7	95,6
Junio	7.301,5	429,5	4.668,5	274,6	2.633,0	63,9
Julio	7.301,5	429,5	4.480,0	263,6	2.820,9	61,4
Agosto	7.301,5	429,5	5.440,3	320,0	1.861,2	74,5
Setiembre	7.301,5	429,5	5.287,0	369,8	1.014,5	86,1
Octubre	7.301,5	429,5	5.969,7	410,0	331,8	95,5
Noviembre	7.301,5	429,5	7.086,4	416,8	215,1	97,1
Diciembre	7.301,5	429,5	5.424,7	319,1	1.876,4	74,3

1/ Trabajadores mensuales = jornadas mensuales/17; Trabajadores anuales/204 .

2/ Desempleo mensual = jornadas requeridas - jornadas disponibles.

REQUERIMIENTOS MENSUALES DE MANO DE OBRA EN EL AÑO t-1 Y 5



TEMA IV - Proyección del capital agropecuario

Ejercicio No. 8 - Proyección de praderas permanentes y de maquinaria

1. Planteo

1.1 Antecedentes

El análisis del capital invertido en el sector agropecuario, es un elemento de gran importancia para la comprensión de la evolución y del grado de desarrollo alcanzado por el mismo. La información de que se dispone para los años en estudio, es fruto de elaboraciones, basadas en indicadores no siempre precisos y se entiende que la confiabilidad de las mismas es válida a nivel global, no pretendiéndose utilizarlas con un excesivo grado de desagregación.

El sector agropecuario en Americana, vino incrementando su capital durante todo el transcurso del período que se estudia. Esto se manifiesta en inversiones netas positivas en estos años, que se caracterizan por su irregularidad (véase Cuadro No. 1).

La inversión agropecuaria puede desagregarse en dos grandes categorías: las inversiones fundiarias y las de explotación. Ha sido diferente la evolución de ambas categorías en el período. Mientras que las fundiarias adicionan en todos los años un incremento positivo, el capital de explotación entre el año t-9 y t-7 disminuyó por inversiones netas negativas. Esto último debido a variaciones de existencias en los semovientes que implicaron reducciones netas de los stocks.

La participación de estas dos categorías como componentes de la inversión neta es variada, alterándose su predominancia en el transcurso del período.

La inversión en capital de explotación muestra la evolución que se detectó en la producción. Mientras que las existencias ganaderas, que componen alrededor del 45% del capital total agropecuario, reclamaron sólo un 10,8% de la inversión neta total de los años estudiados, la maquinaria y equipo, con destino fundamentalmente a la agricultura, tienen importancia en la inversión neta, mostrando un sostenido incremento de la mecanización.

El análisis global del proceso de inversión condice con el desarrollo productivo que se ha caracterizado antes: una expansión agrícola que se mantiene hasta alrededor de t-12 y se reactiva en la coyuntura alcista del año t-4, un estancamiento de las existencias ganaderas, relativizada por el boom de la carne de principios de la década anterior a la actual y un congelamiento de las plantaciones.

La participación de la maquinaria y equipo como indicador de incorporación tecnológica permite apreciar un proceso de modernización no espectacular, pero sostenido.

El capital a costo de reposición disponible en el sector creció en el período un 23,6%, habiéndose incrementado el fun-

INVERSION NETA AGROPECUARIA

(en millones de Am\$ a precios de t-1)

AÑO	FUNDIARIO			DE EXPLOTACION				TOTAL
	Mejoras fundiarias	Plantaciones	Total	Maquinarias y equipos	Semovientes	Total		
t-16	4	1	5	-	11	11	16	
t-15	20	3	23	25	23	48	71	
t-14	4	-	-	31	-11	20	24	
t-13	19	6	25	47	-8	39	64	
t-12	5	-	5	48	-10	38	43	
t-11	15	1	16	8	54	62	78	
t-10	14	2	16	15	31	46	62	
t-9	91	13	104	-	-37	-37	67	
t-8	20	-4	16	-	-14	-14	2	
t-7	6	10	16	10	-31	-21	-5	
t-6	-	10	10	38	-19	19	29	
t-5	12	11	23	42	51	93	116	
t-4	32	11	43	86	77	163	206	
t-3	57	7	64	7	13	20	84	
t-2	3	9	12	40	1	41	53	
t-1	13	-4	9	10	-34	-24	-15	

diario en un 35,2% y el capital de explotación en el 18,8% (véase Cuadro No. 2).

El capital fundiario oscila en estos años en torno al 30% del capital total, estando compuesto predominantemente por mejoras fijas. El capital en plantaciones crece un 67%, debiendo destacarse que se duplicó el capital en frutales y se multiplicó por diez el capital en praderas, sin que, sin embargo, pueda considerarse aún un rubro importante en la capitalización del sector.

El capital de explotación ha sufrido una sustancial reestructuración en el período que se considera. Las maquinarias y equipos pasaron de representar el 30% al 38%. El parque de maquinarias se amplió en respuesta a la expansión del área agrícola, pudiéndose comprobar que un 68% de expansión de dicha área requirió un 50% más de capital en maquinaria.

En definitiva, pues, la composición del capital ha evolucionado de modo tal que se puede apreciar una mayor posibilidad de progreso técnico en la agricultura.

En ganadería, mientras tanto, el estancamiento de las existencias y la muy incipiente capitalización en mejoramiento de pasturas, hacen que el diagnóstico tecnológico a través de la estructura del capital sea poco auspicioso.

La distribución del capital depreciado por región muestran que el llano y la meseta concentran una alta proporción del mismo, aunque la intensidad de la capitalización y la composición del mismo sea diferente.

La meseta ocupa la primera posición, con un 45,6% del capital total, ligeramente mayor que el localizado en el llano (44%). Pero mientras que los cultivos del llano reclaman mayor capital de explotación - un 61,4% del total -, los semovientes en más del 50% están en la meseta, que también ocupa lugar prioritario en el capital fijo. (Véase Cuadro No. 3).

En lo referente a intensidad de capital por unidad de superficie, es la región urbana la que presenta valores más altos, seguida por el llano; los valores de la meseta son un 50% de los anteriores.

Si se observa la distribución del capital por tipo de empresa, se verifica que son las empresas familiares las que cuentan con mayor capital, siendo particularmente favorecidas en la asignación del capital de explotación.

La inversión bruta en el sector agropecuario en el período $t-16/t-1$ se tornó uno de los factores restrictivos para el crecimiento de la producción; entre $t-16$ y $t-1$ la inversión neta agropecuaria alcanzó sólo 910 millones de Am\$, es decir, la media anual representó el 6,6% del valor agregado neto de $t-1$.

Asimismo, la estructura de las inversiones realizadas fue inconveniente, la capitalización se orientó principalmente a viviendas, semovientes y maquinarias, estas últimas básicamente para la agricultura. Algunas de ellas son inversiones iniciales imprescindibles para la producción y otras han permitido un sostenido aumento de la productividad de la mano de obra en los últimos años, pero se careció de aquellas necesarias para aumentar

CAPITAL AGROPECUARIO A COSTO DE REPOSICION

(en millones de Am\$ a precios de t-1)

Año	FUNDIARIO			DE EXPLOTACION			Capital Total	
	Mejoras fijas	Plantaciones	Total	%	Maquinarias y equipos	Semovientes		Total
t-16	998	112	1.110	29,2	794	1.892	2.686	70,8
t-15	1.002	113	1.115	29,2	794	1.903	2.697	70,8
t-14	1.022	116	1.138	29,3	819	1.926	2.745	70,7
t-13	1.026	116	1.142	29,2	850	1.915	2.765	70,8
t-12	1.045	122	1.167	29,4	897	1.907	2.804	70,6
t-11	1.050	122	1.172	29,2	945	1.897	2.842	70,8
t-10	1.065	123	1.188	29,0	953	1.951	2.904	71,0
t-9	1.079	125	1.204	29,0	968	1.982	2.950	71,0
t-8	1.170	138	1.308	31,0	968	1.945	2.913	69,0
t-7	1.190	134	1.324	31,4	958	1.931	2.899	68,8
t-6	1.196	144	1.340	31,8	978	1.900	2.878	68,2
t-5	1.196	154	1.350	31,8	1.016	1.881	2.897	68,2
t-4	1.208	155	1.373	31,5	1.058	1.932	2.990	68,5
t-3	1.240	176	1.416	31,0	1.144	2.009	3.153	69,0
t-2	1.297	183	1.480	31,8	1.151	2.022	3.173	68,2
t-1	1.300	192	1.492	31,7	1.191	2.023	3.214	68,3
1	1.313	188	1.501	32,0	1.201	1.989	3.190	68,0

1/ Cifras preliminares

Fuente: Oficina de Planificación.

CAPITAL DEPRECIADO POR REGION Y TIPO DE EMPRESA - AÑO t-1
 (en millones de Am\$ a precios del año t-1)

	Urbana	Llano	Meseta	Sub familiar	Familiar	Multi familiar	Total
Mejoras fijas	115	260	275	100	300	250	650
Plantaciones	18	46	32	8	48	40	96
Subtotal	133	306	307	108	348	290	746
Maquinaria y Equipos	75	366	155	108	387	201	596
Semovientes	146	804	1.073	91	966	966	2.023
Subtotal	221	1.170	1.228	199	1.353	1.167	2.619
Total	354	1.476	1.535	207	1.701	1.457	3.365

la eficiencia del uso de la tierra, que son las que tienen mayor prioridad en el país.

Como consecuencia, el capital en semovientes alcanza en t-1 al 60% del capital depreciado total, las mejoras fijas el 19,3%, maquinarias y equipo el 17,7% y plantaciones sólo el 2,9% restante.

Se deberá en primer lugar aumentar la eficiencia en la utilización del capital existente. Así, por ejemplo, en importantes sectores, la maquinaria agrícola - tractores, cosechadoras, etc. - se viene utilizando en forma insuficiente; sería posible incrementar el área cultivada con la maquinaria existente. De la misma manera, el capital en existencias ganaderas aumentaría su eficiencia al mejorar la productividad por unidad animal.

El Plan requiere adicionalmente un importante esfuerzo de inversión. La adopción de nuevos métodos de producción promoverá aumentos en la inversión tecnológica, que repercutirán en una mejor estructura del capital existente y en su mayor productividad. Además la expansión de los cultivos agrícolas y la implantación de praderas artificiales requerirán nuevas inversiones en maquinaria y equipos.

El cumplimiento de las metas del Plan supondrá una inversión bruta del orden de los 2.550 millones de Am\$ en el quinquenio del Plan, es decir, un promedio de 500 millones de Am\$ anuales, cifra muy superior a la observada históricamente. La inversión bruta fija pasará de 144 millones de Am\$ en el año t-1 a 657 millones en el año 5, es decir que se multiplicará por 4,4 el valor inicial, muy bajo, por otra parte, dada la coyuntura económica adversa de ese año.

Las inversiones anuales irán adquiriendo un ritmo creciente, no sólo para reponer el capital, sino muy especialmente para incrementarlo. En la inversión total las inversiones netas, o sea la incorporación de nuevo capital al activo agrícola irá alcanzando un porcentaje creciente, que llega casi a las dos terceras partes en el año final del Plan (véase Cuadro No. 4).

No sólo habrá que aumentar considerablemente la inversión, sino además reorientar la misma. Especial participación irán adquiriendo las inversiones asociadas al mejor uso de las tierras agrícolas y ganaderas. Las praderas, plantaciones de caña, frutal y forestal, aguadas, etc., aumentarán su participación (véase Cuadro No. 5)

Como consecuencia de lo anterior, la inversión bruta irá incrementando su participación en el Producto Bruto sectorial, pasando de representar el 14% en t-1 al 43% en el año 5; la inversión neta alcanza, en este último año, al 28% del Producto Bruto.

Las mayores inversiones y la nueva orientación de las mismas se traducirán, al término del quinquenio del Plan, en un importante aumento del capital en el agro y en un cambio de su composición.

De acuerdo a las inversiones programadas, el capital agropecuario sin depreciar se incrementará en un 24,5% entre t-1 y el año meta (véase Cuadro No. 6); el capital depreciado, en

EVOLUCION DE LA INVERSION BRUTA PROYECTADA Y SUS COMPONENTES

(millones de Am\$ del año t-1)

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1. Inversión de Reposición	159	170	182	195	203	217
2. Inversión Meta	-15	192	271	331	376	420
3. Inversión Bruta	144	362	453	526	579	637
4. 2/3 en porcentaje	-10,4	53,0	59,8	62,9	64,9	65,9

EVOLUCION Y ESTRUCTURA DE LA INVERSION NETA AGROPECUARIA
(en millones de Am\$ a precios del año t-1)

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5 1/
A) Fundiaria	9	58	72	82	94	110
- Mejoras Fijas	13	39	46	52	52	55
- Plantaciones	- 4	19	26	30	42	55
B) De Explotación	-24	134	199	249	282	310
- Maquinarias y equipo	10	26	95	107	131	150
- Semovientes	-34	108	104	142	151	160
C) Total Inversión	-15	192	271	331	376	420

1/ Estimada

EVOLUCION Y ESTRUCTURA DEL CAPITAL AGROPECUARIO

A COSTO DE REPOSICION

(en millones de Am\$ a precios de t-1)

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
A) Fundiario	1.492	1.501	1.559	1.631	1.713	1.807
- Mejoras Fijas	1.300	1.313	1.352	1.398	1.450	1.502
- Plantaciones	192	188	207	233	263	305
B) De Explotación	3.214	3.190	3.324	3.523	3.772	4.054
- Maquinarias y equipo	1.191	1.201	1.227	1.322	1.429	1.560
- Semovientes	2.023	1.989	2.097	2.201	2.343	2.494
C) Capital Total	4.706	4.691	4.883	5.154	5.485	5.861

cambio, se incrementará en un 35,5% (véase Cuadros No. 7 y 8). Es de hacer notar que la relación entre el capital depreciado y el capital sin depreciar (excluido el stock ganadero) pasará de constituir el 50% en t-1 al 51% en el año 5, poniendo de manifiesto la renovación del capital existente.

Los cambios en la estructura, como consecuencia de la incorporación proyectada son importantes. En el Cuadro No. 9 se presenta la evolución de los distintos agrupamientos en el período del Plan. Se aprecia así la relevancia creciente que tienen las plantaciones dentro del capital total, así como también la maquinaria y equipo requerida para la ampliación del área cultivada.

En términos de capital depreciado, el rubro plantaciones casi duplica su importancia, pasando de representar el 2,9% en t-1 a constituir el 5% en el año 5; maquinaria y equipo aumenta también su importancia; pasando del 17,7% al 21,4% del capital total depreciado. Pierden importancia, complementariamente, el stock vacuno y las mejoras fijas (véase Cuadro No. 10).

En lo referente a la evolución del capital por región (véase nuevamente Cuadro No. 7), las tres regiones aumentan su capital en forma relativamente homogénea (38% la urbana, 34,4% el llano y 36,1% la meseta). En cambio, la evolución es marcadamente dispar en lo referente a los distintos tamaños; el incremento es de sólo el 2,9% en los predios subfamiliares, contra 31,5% en los familiares y 45% en los multifamiliares (véase nuevamente Cuadro No. 8), ya que son éstos los que se encuentran con un menor nivel de capitalización relativo y quienes tendrán a su cargo al grueso de la expansión productiva. En el primer tramo de tamaño se espera, fundamentalmente, lograr un mejor uso del capital disponible.

Al formular las metas referentes a los medios fijos de producción, hay que tener en cuenta las diferencias entre la formación anual de capital, esto es, la inversión, y la existencia acumulada de los medios fijos de producción, o sea, los bienes de capital.

La cuantificación de las metas sobre formación anual de capital comprenderá las metas de inversión a nivel predial y las de carácter extrapredial, correspondientes a las actividades de apoyo a la producción. El monto de la inversión predial se determina mediante tres criterios fundamentales: un mejor aprovechamiento de las existencias de bienes de capital, un incremento de estas existencias y un cambio en la composición de ellas, asociado a la estructura productiva y el tipo de renovación tecnológica del plan.

En cuanto al procedimiento de cálculo, es necesario determinar las metas para cada rubro individual, ya que debido a su distinta naturaleza, se verán condicionados por diferentes factores.

Normalmente, para muchos rubros se utilizan coeficientes técnicos, como es el caso de construcciones (viviendas, galpones), lo mismo que para envases, enseres o útiles. Las proyecciones de la inversión en maquinarias y equipos dependerá de los niveles de mecanización propuestos. Las proyecciones de plantaciones (caso de

CAPITAL DEPRECIADO POR REGION

AÑO 5

(en millones de Am\$ a precios de t-1)

	Urbana	Llano	Meseta	Total
Mejoras fijas	137	345	379	861
Plantaciones	27	104	97	228
Subtotal	164	449	476	1.089
Maquinaria y Equipos	117	552	309	978
Semovientes	209	981	1.304	2.494
Subtotal	326	1.533	1.613	3.472
Total	490	1.982	2.089	4.561

CAPITAL DEPRECIADO POR TIPO DE EMPRESA

AÑO 5

(en millones de Am\$ a precios de t-1)

	Sub familiar	familiar	Multi familiar	Total
Mejoras Fijas	99	382	380	861
Plantaciones	12	109	107	228
Subtotal	111	491	487	1.089
Maquinaria y Equipos	10	523	445	978
Semovientes	92	1.222	1.180	2.494
Subtotal	102	1.745	1.625	3.472
Total	213	2.236	2.112	4.561

INDICE DE EVOLUCION DEL CAPITAL AGROPECUARIO

A COSTO DE REPOSICION

(t-1 = 100)

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
A) Fundiario	100	100,6	104,5	109,3	114,8	121,1
- Mejoras Fijas	100	101,0	104,0	107,5	111,5	115,5
- Plantaciones	100	97,9	107,8	121,4	137,0	158,9
B) De Explotación	100	99,3	103,4	109,6	117,4	126,1
- Maquinarias y equipos	100	100,8	103,0	110,0	120,0	131,0
- Semovientes	100	98,3	103,7	108,8	115,8	123,3
C) Capital total	100	99,7	103,8	109,5	116,6	124,5

COMPOSICION PORCENTUAL DEL CAPITAL DEPRECIADO

EN LOS AÑOS t-1 Y 5

	Año t-1	Año 5
Mejoras Fijas	27,6	18,9
Plantaciones	4,1	5,0
Subtotal	31,7	23,9
Maquinarias y Equipos	25,3	21,4
Semovientes	43,0	54,7
Subtotal	68,3	76,1
Total	100,0	100,0

praderas permanentes) dependerán de las proyecciones sobre uso del suelo y de disponibilidad de otros recursos productivos. Finalmente, la proyección de las existencias ganaderas dependerá del tamaño de las existencias iniciales, de la estructura de las existencias, de las tasas de parición, procreo, faena y mortalidad y del comercio exterior de animales en pie.

En cuanto a la presentación de las proyecciones de la inversión, se debe tener en cuenta en primer lugar la forma de expresarlas: deberían estar determinadas de acuerdo al volumen físico de la inversión correspondiente a cada rubro por una parte, y por otra, en términos monetarios, de modo de poder agregarlas a distintos niveles. La valoración es conveniente realizarla sobre la base de los precios constantes del año base, para poder apreciar la evolución física de la inversión agregada.

Se deben tener en cuenta además algunos criterios de desagregación para la presentación. Es importante establecer así la separación de la incorporación neta del capital, respecto del monto de recursos que se destina a la reposición del desgaste de los medios de producción, y que conjuntamente con la primera componen la inversión bruta agropecuaria. Así, se tiene que:

$$IB = IN + D \quad (\text{siendo } IB \text{ la inversión bruta, } IN \text{ la inversión neta, y } D \text{ los recursos para depreciación}).$$

Otros criterios de presentación desagregada lo constituyen la separación entre las inversiones destinadas a la agricultura o a la ganadería, la desagregación de la inversión según el grado de asociación de los distintos rubros con el progreso tecnológico, o la desagregación según el origen nacional o importado de los bienes que la componen, información, esta última, necesaria para calcular el balance del comercio exterior agropecuario.

La magnitud de la formación anual de capital determinará finalmente las existencias acumuladas de los bienes de capital.

La cuantificación de los medios fijos de producción acumulados se realiza normalmente mediante modelos de proyección que considera las relaciones entre las variables de flujo y de existencia, además de las connotaciones físicas y financieras que caracterizan el proceso de acumulación.

Así, con referencia al contenido físico de la acumulación, las variables que se tienen en cuenta son la existencia de bienes de capital sin depreciar (esto es, valoradas a precios de reposición, cualquiera sea su antigüedad o desgaste), el cambio anual que experimenta esa existencia, la inversión bruta y la dotación de bienes que en cada año quedan fuera de uso por desgaste (valoradas todas estas variables también a precios de reposición).

En cuanto a las variables financieras del proceso de acumulación, se consideran: la existencia de bienes de capital depreciados, la inversión neta y el monto de las reservas de depreciación.

A continuación se plantea un modelo de proyección para la cuantificación de los bienes de capital:

$$KSD_t = KSD_{t-1} + CE_{t-1}$$

$$CE_t = IB_t - FU_t$$

$$FU_t = rKSD_{t-1}$$

$$IB_t = IN_t + D_t$$

$$KD_t = KD_{t-1} + IN_{t-1}$$

$$D_t = dKD_{t-1}$$

siendo:

- KSD - la existencia de bienes de capital sin depreciar;
- CD - el cambio anual de dicha existencia;
- IB - la inversión bruta;
- FU - la dotación de bienes que quedan fuera de uso por desgaste;
- IN - la inversión neta;
- D - las reservas para depreciación;
- KD - la existencia de bienes de capital depreciados;
- d - la tasa de formación de las reservas para depreciación;
- r - la tasa de reposición de los bienes que quedan fuera de uso, y representando el subíndice t con determinado período de tiempo (en este caso un año). Así, suponiendo una tasa constante de formación de reservas de depreciación y de reposición de los bienes que quedan fuera de uso, fijando exógenamente la inversión bruta, o la neta, o KSD o KD, se pueden determinar las variables restantes.

Este modelo se aplica fundamentalmente para la proyección de rubros individuales entre los componentes del capital, ya que a niveles agregados del análisis se pierde mucha precisión en el cálculo.

1.2 Datos

Véanse Cuadros No. 11 y 12.

1.3 Enunciado

- a) Calcular la inversión bruta total y el capital sin depreciar en términos físicos a que da lugar la implantación de praderas permanentes en los 5 años del Plan, en base a la información contenida en el Cuadro No. 11.
- b) Calcular la amortización, inversión neta y capital depreciado en términos físicos en los 5 años del Plan en base a la información del Cuadro No. 11 y

INFORMACION PARA EL CALCULO DE LA INVERSION BRUTA TOTAL Y
CAPITAL SIN DEPRECIAR EN PRADERAS EN LOS 5 AÑOS DEL PLAN
(en miles de hectáreas)

Año	Fuera de uso	Cambios de existencias	Inversión bruta	Capital sin depreciar
t-5	25	92	117	245
t-4	30	57	87	337
t-3	35	40	75	394
t-2	45	36	81	434
t-1	110	4	114	470
Cambio de existencias previsto en el Plan				
1		148		
2		195		
3		256		
4		337		
5		420		
Vida útil = 5 años				

INFORMACION PARA EL CALCULO DEL PARQUE DE TRACTORES EN t-1, Y
DE LA DEMANDA TOTAL DE TRACTORES EN EL PERIODO t-1/AÑO 5

Año	Inversión bruta por año (miles de tractores)	Año	Superficie cultivada proyectada (miles de hectáreas)
t-13	4	t-1	4.540
t-12	6	1	4.339
t-11	5	2	5.039
t-10	4	3	5.930
t-9	5	4	7.044
t-8	4	5	8.511
t-7	3		
t-6	4		
t-5	6		
t-4	5		
t-3	8		
t-2	6		

sabiendo que la amortización se ajusta a los siguientes porcentajes:

- 1º año - 15%
- 2º año - 25%
- 3º año - 25%
- 4º año - 20%
- 5º año - 15%

y que el capital depreciado para $t-1$ equivale a 254,7 miles de hectáreas de praderas.

Se considera que en el año t las praderas implantadas en el año $t-1$, tienen 1 año de antigüedad.

- c) Valorice la información anterior suponiendo que el valor de las praderas es de Am\$ 75/ha.
- d) Calcular el parque de tractores existentes en $t-1$ y la demanda total de tractores en términos físicos para los 5 años del Plan teniendo en cuenta los datos del Cuadro No. 12 y la siguiente información complementaria:
 - i) vida útil de los tractores: 12 años.
 - ii) se espera que como consecuencia de las medidas adoptadas en el Plan (cultivos propuestos, tipos de predios en que se desarrollarán, etc.) la eficiencia en el uso de los tractores medida en términos de superficie cultivada por tractor, se incrementará un 5% acumulativo anual.
 - iii) el precio unitario del tractor en $t-1$ es de Am\$ 10.000 .
- e) Presente en un cuadro el capital sin depreciar, el cambio de existencia y los tractores fuera de uso para el período $t-1$ /año 5. Asimismo calcule la depreciación (en este caso como amortización lineal del capital sin depreciar) y la inversión neta. Discuta las simplificaciones realizadas.

2. Solución

2.1 Resolución numérica

- a) aplicando la fórmula:

$$CE_{t-1} = IB_{t-1} - FU_{t-1}$$

$$KSD_t = KSD_{t-1} + CE_{t-1}$$

se efectuaron los cálculos que aparecen en el Cuadro No. 13.

Para $t = t-1$

$$CE_{t-1} = 144 - 110 = 4$$

$$KSD_1 = 470 + 4 = 474$$

CAPITAL SIN DEPRECIAR, INVERSION BRUTA, FUERA DE USO Y
CAMBIO DE EXISTENCIAS PARA EL PERIODO t-1/AÑO 5
(en miles de hectáreas)

Año	CE	FU	IB	KSD
t-1	4	110	114	470
1	148	117	265	474
2	195	87	282	622
3	256	75	331	817
4	337	81	418	1.073
5	420	114	434	1.410

b) Aplicando la fórmula:

$$D_{t-1} = AM_{t-2} (IB_{t-2}) + Am_{t-3} (IB_{t-3}) + \\ Am_{t-4} (IB_{t-4}) + Am_{t-5} (IB_{t-5}) + \\ Am_{t-6} (IB_{t-6})$$

$$IN_{t-1} = IB_{t-1} - D_{t-1}$$

$$KD_t = KD_{t-1} + IN_{t-1}$$

se efectuaron los cálculos que aparecen en el Cuadro No. 14.

Para $t = t-1$

$$D_{t-1} = 15\% (81) + 25\% (75) + 25\% (87) + \\ 20\% (117) + 15\% (110) = 92,7$$

$$IN_{t-1} = 114 - 92,7 = 21,3$$

$$KD = 254,7 + 21,3 = 276$$

El detalle del cálculo de amortización para todos los años del Plan aparece en el Cuadro No. 15.

c) Véase Cuadro No. 16.

d) Número de tractores en $t-1 = 60.000$ unidades.
Superficie cultivada por tractores en $t-1 = 76,67$ ha.
Proyección de la demanda de tractores - véase Cuadro No. 17.

e) Véase Cuadro No. 18.

AMORTIZACION, INVERSION BRUTA, INVERSION NETA Y CAPITAL DEPRECIADO

(en miles de hectáreas)

Año	Amortización	Inversión bruta	Inversión neta	Capital depreciado
t-1	92,7	114	21,3	254,5
1	91,2	265	173,8	276,0
2	116,7	282	165,3	449,8
3	164,6	331	166,4	615,1
4	221,5	418	196,5	781,5
5	286,1	434	147,9	978,0

ESTRUCTURA DEL CAPITAL SIN DEPRECIAR, Y AMORTIZACION DE
PRADERAS PARA EL PERIODO t-1 / AÑO 5
(en miles de hectáreas)

Año	Antigüedad (años)					
	a) Capital sin depreciar					
	1	2	3	4	5	Total
t-1	81	75	87	117	110	470
1	114	81	75	87	117	474
2	265	114	81	75	87	622
3	282	265	114	81	75	817
4	331	282	265	114	81	1.073
5	418	331	282	265	114	1.410
	b) Porcentaje de Amortización					
	15	25	25	20	15	Total
t-1	12,2	18,8	21,8	23,4	16,5	92,7
1	17,1	20,3	18,8	17,4	17,6	91,2
2	39,8	28,5	20,3	15,0	13,1	116,7
3	42,3	66,3	28,5	16,2	11,3	164,6
4	49,7	70,5	66,3	22,8	12,2	211,5
5	62,7	82,8	70,5	53,0	17,1	286,1

AMORTIZACION, INVERSION BRUTA, INVERSION NETA Y CAPITAL DEPRECIADO

(en millones de Am\$)

Año	Amortización	Inversión bruta	Inversión neta	Capital depreciado
t-1	6.952,5	8.550,0	1.597,5	19.087,5
1	6.840,0	19.875,0	13.035,0	20.700,0
2	8.752,5	21.150,0	12.397,5	33.735,0
3	12.345,0	24.825,0	12.480,0	36.132,5
4	16.612,5	31.350,0	14.737,5	58.612,5
5	21.457,5	32.550,0	11.092,5	73.350,0

DEMANDA TOTAL DE TRACTORES EN EL PERIODO t-1/AÑO 5

Año	Indice de eficiencia	Hectárea por tractor	Superficie cultivada	Demanda total de tractores	
				(Miles de unidades)	(Millones de Am\$ de t-1)
t-1	100,0	75,67	4.540	60,0	600
1	105,0	79,45	4.339	54,6	546
2	110,3	83,43	5.039	60,4	604
3	115,8	87,60	5.930	67,7	677
4	121,6	91,98	7.044	76,6	766
5	127,6	96,58	8.511	88,1	881

CAPITAL SIN DEPRECIAR, INVERSION BRUTA, CAMBIO DE EXISTENCIAS,
FUERA DE USO, AMORTIZACION E INVERSION NETA EN TRACTORES PARA

EL PERIODO t-1/AÑO 5 (en miles de unidades)

Años	Fuera de uso	Cambio de existencias	Inversión bruta	Capital sin depreciar	Amortización	Inversión neta
t-1	4	-4	0	60,0	5,0	-5,0
1	6	4,4	10,4	56,0	4,7	5,7
2	5	7,3	12,3	60,4	5,0	8,3
3	4	8,9	12,9	67,7	5,6	7,3
4	5	11,5	16,5	76,6	6,4	10,1
5	4	5,6	9,6	88,1	7,3	2,3

TEMA IV - Proyección de capital

Ejercicio No. 9 - Proyección del stock de ganado vacuno

1. Planteo

1.1 Antecedentes

El programa de producción de ganado bovino se plantea los siguientes objetivos:

- i) promover un aumento sostenido de la producción de carne vacuna, que alcanzaría el 55% al término del Plan, a pesar de una ligera reducción de las áreas que ocupa. Ello contribuirá en forma importante al incremento de la producción agropecuaria total,
- ii) este incremento de la producción será suficiente para abastecer la demanda interna para consumo humano proyectada, así como para generar el stock adicional requerido, sin reducir sustancialmente la participación de este producto en las exportaciones del país.

En cuanto a la estrategia a seguirse, los incrementos de producción deberán lograrse en base a métodos más intensivos, que aseguren una mayor producción por animal y por hectárea. Entre estos métodos se asigna importancia principal al aumento de la producción de forrajes (mejoramiento o sustitución del tapiz natural) y al control de la sanidad animal, entendiéndose que ya se ha avanzado sustancialmente en el mejoramiento genético del stock.

El incremento de la producción de forraje busca cumplir a su vez otros dos objetivos: una mejor distribución del mismo a través del año evitando las crisis estacionales y un uso racional del suelo, mediante la incorporación masiva de praderas artificiales permanentes en rotación con los cultivos anuales. Ello permitirá a la vez una mejor conservación del suelo y un incremento de los rendimientos en los cultivos inmediatos, como consecuencia de la fertilidad residual que las mismas proporcionan.

La demanda interna de carne vacuna está formada básicamente por las necesidades alimenticias de la población y los cambios de existencias.

La población ha venido dependiendo en alto grado, para su provisión de proteínas animales, del sector agropecuario y, en particular, de la carne vacuna; la pesca ha tenido muy escasa importancia en este sentido.

Considerando las potencialidades existentes, se espera que, en el futuro, la distribución de la provisión de proteínas de la población sea diferente. Así, cobrará importancia el consumo de pescado así como el de aves, cerdos y leche, producciones pecuarias intensivas a expandirse en base al crecimiento que se obtendrá en la producción de maíz, insumo básico en la producción de estos rubros.

Teniendo en cuenta estos elementos, se han establecido metas de consumo de carne vacuna (10% superior en el año 5 al consumo per capita actual), que están por debajo de lo que sería dado esperar de acuerdo a los incrementos de ingreso previstos, asumiendo que una parte de esos incrementos sería posible trasladarlos hacia los otros rubros antes mencionados.

El éxito de la reestructuración prevista en los hábitos de consumo se logrará a través de una serie de medidas, que incidirán en el aumento de la eficiencia de la producción y la distribución de carne de ave, cerdo y pescado. Ello permitirá el bastacimientto de estos productos a la población, a precios relativos más favorables que los actuales, con respecto a los de la carne bovina.

Los aumentos previstos en la producción de carne vacuna requerirán un considerable incremento del stock, que se prevé pase de 12.902 a 16.036 miles de cabezas entre t-1 y el año 5. En consecuencia, este componente de demanda interna tendrá, en el período del Plan, una importancia muy superior a la que ha registrado históricamente: en los años del Plan la producción destinada al aumento del stock es mayor a aquella correspondiente al consumo humano - lo que pone de manifiesto el esfuerzo de capitalización que deberá efectuar el sector.

El Estado, a través del contralor sobre la faena de vientres, mediante el incremento del crédito para la adquisición de reproductores así como por mecanismos que respalden los precios del ganado de cría, apoyará a los productores en el esfuerzo de capitalización a que se abocarán en los próximos años. Y ello sin perjuicio de la dinamización del subprograma forrajero que asegurará la capacidad de sustitución al stock incrementado.

La puesta en marcha de este programa, en la etapa inicial, implicará el sacrificio de la actual capacidad de exportar, que recién se recuperará al final del período del Plan. En efecto, como ya se mencionó anteriormente, el crecimiento del stock absorberá al principio del período, un volumen considerable de la producción, superior a los incrementos esperados de la misma, lo que provocará una reducción de los saldos exportables.

Complementariamente, de acuerdo a los estudios realizados sobre las posibilidades de futuras colocaciones en el mercado externo, se entiende que no existirán dificultades para realizar esas exportaciones.

Americana aporta un volumen muy poco significativo del total comercializado a nivel mundial y puede preverse que sus mercados tradicionales sigan absorbiendo regularmente su oferta. En el Cuadro No. 1 se presenta la información sobre el destino previsto para la producción de carne vacuna en el período del Plan.

La oferta global de carne vacuna, como en el pasado, estará representada por la producción interna, no previéndose importaciones en épocas normales.

El volumen físico de la producción de carne vacuna crecerá un 55% en el período t-1/año 5, a pesar de la menor super-

EVOLUCION DEL DESTINO DE LA PRODUCCION DE CARNE VACUNA

(miles de toneladas)

	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
DEMANDA ^{1/} EXTERNA	125	445	449	541	575	600
- Consumo	202	207	217	228	238	250
- Diferencia inventario	-77	238	232	313	337	350 1/
DEMANDA EXTERNA						
- Exportación	792	481	559	573	672	824
PRODUCCION	917	926	1.008	1.114	1.247	1.424

1/ Estimado

ficie ocupada. La mayor producción ha sido calculada teniendo en cuenta las posibilidades de la demanda interna y externa, así como también la disponibilidad de recursos productivos en el país y su mejor asignación alternativa. En este sentido, y como se mencionó anteriormente, no se prevén restricciones por el lado de la demanda, particularmente la externa, teniendo en cuenta la posición de tradicional exportador del país y las perspectivas del mercado internacional.

Complementariamente, existe en el país una importante superficie que debe destinarse racionalmente al pastoreo directo, teniendo en cuenta tanto aquellas áreas que no admiten un uso alternativo más intensivo, como aquellas otras que deben mantenerse temporalmente cubiertas de pastos, como la forma más económica de asegurar la conservación del suelo.

El crecimiento de la producción se logrará en base a aumentos de la dotación animal y de los rendimientos por animal en existencia. Ambos están condicionados principalmente por el mejoramiento de la capacidad forrajera y la sanidad, teniendo menor importancia el mejoramiento genético y el manejo.

La proyección del aumento de existencias bovinas ha sido realizada teniendo en cuenta la experiencia acumulada en el uso de praderas, manejando rodeos con un adecuado nivel sanitario. Se estima, como consecuencia, que el stock bovino total pasaría de 12.9 millones de cabezas en t-1 a 16.0 millones de cabezas en el año 5, es decir que experimentaría en el período analizado un crecimiento del 24.3%. Este aumento de stock implica un incremento mayor en la dotación por hectárea de pastoreo dedicada al rubro, ya que la misma, se reduce de 15.9 millones de hectáreas en t-1 a 14.2 millones de hectáreas en el año 5, con lo que la dotación pasa de 0.81 a 1.13 cabezas por hectárea de pastoreo en el mismo período (40% de incremento en la dotación).

Es decir que un aumento del stock del 24,3% permitirá un incremento de la producción del 55%, como consecuencia del efecto complementario y multiplicativo de la mayor producción por cabeza en existencia, que pasa de 71.1 a 88.8 kg de carne en pie por animal en el período considerado. (Véase Cuadro No.2).

A su vez, la mayor producción por cabeza, incidirá en una reestructuración del stock, con pérdida de importancia de la categoría de novillos de más de 3 años y el incremento de las categorías jóvenes (terneros, novillos de 1 a 3 años). (Véase Cuadro No. 3). La mayor precocidad del rodeo permitirá la faena de animales más jóvenes, lo que responde a la tendencia de los requerimientos del mercado mundial, y un entore más temprano de las vaquillonas, alrededor de los 27 meses de edad, es decir, un año antes de lo que es habitual en la actualidad.

Las medidas que se proponen en los aspectos de alimentación y sanidad permitirán aprovechar debidamente el esfuerzo realizado en los últimos años en el mejoramiento del potencial genético, aunque el mismo no debe descuidarse, para que en el futuro no se convierta en factor limitante. Estas medidas determinarán aumentos en la eficiencia productiva que se pueden medir a través de diversos indicadores:

EVOLUCION PROYECTADA DE LA PRODUCCION POR ANIMAL EN EXISTENCIA Y LA DOTACION

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1) Producción (miles de ton. en pie)	917	926	1.008	1.114	1.247	1.424
2) Stock bovino (en miles de cabezas)	12.902	12.671	13.386	14.083	15.024	16.036
3) Superficie de pastoreo (en miles de ha.)	15.857	15.958	15.676	15.307	14.855	14.249
4) Producción por cabeza (en Kg por cabeza)	71,1	73,1	75,3	79,1	83,0	88,8
5) Dotación (2/3) En cabezas por ha)	0,81	0,79	0,85	0,92	1,01	1,13

EVOLUCION DE LA ESTRUCTURA DEL STOCK VACUNO

Stock	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
a) <u>en miles de cabezas</u>	12.902	12.671	13.386	14.083	15.024	16.036
Vacas y Vaq. entoreadas	4.729	4.584	4.953	5.253	5.664	6.094
Toros	181	177	187	197	210	225
Novillos (hasta 3 años)	2.070	2.024	2.142	2.310	2.509	2.726
Novillos (más de 3 años)	680	608	602	193	323	160
Vaquillonas	1.624	1.596	1.687	1.760	1.878	2.004
Vacas de invernada	934	887	937	965	977	962
Ternerros/as	2.674	2.694	2.878	3.105	3.463	3.865
b) <u>en porcentaje</u>	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
Vacas y Vaq. entoreadas	36,70	36,97	37,0	37,30	37,70	38,00
Toros	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40
Novillos (hasta 3 años)	16,00	15,97	16,00	16,40	16,70	17,00
Novillos (más de 3 años)	5,30	4,80	4,50	3,50	2,15	1,00
Vaquillonas s/entorar	12,70	12,60	12,60	12,50	12,50	12,50
Vacas de invernada	7,20	7,00	7,00	6,85	6,50	5,00
Ternerros/as	20,70	21,26	21,50	22,05	23,05	24,10

- i) tasa de procreo: constituye uno de los indicadores más adecuados de la reposición del stock, al relacionar el número de terneros y terneras señalados por cada 100 animales entorados; la misma se incrementará en el período considerado pasando de 66 a 67%.

Los factores responsables de este aumento serán fundamentalmente el mejoramiento en la alimentación de las vacas de cría como consecuencia de las mayores disponibilidades forrajeras, y el control y la prevención de las enfermedades que afectan la reproducción;

- ii) tasa de mortandad: como consecuencia fundamental del desarrollo del sub-programa sanitario, se espera una sensible reducción de la tasa de mortandad, que se ubica en los últimos años en torno al 5%. esperándose que hacia el final del período sólo sobrepase ligeramente al 3%. En el Cuadro No. 4 se presenta la evolución proyectada de estos dos indicadores.

- iii) tasa de producción: es uno de los indicadores que revela la productividad del stock como productor de carne; esta tasa relaciona a la producción, estimada como la suma de la faena, los cambios de stock con su signo y las exportaciones netas de ganado en pie, con el stock bovino total. Expresado en términos de cabezas, esta relación muestra el número de cabezas producidas anualmente por cada 100 unidades de existencias. Durante el período t-1/año 5, la tasa de producción se incrementará en forma constante, pasando del 18,2% en t-1 al 24% en el año 5 (31,9% de aumento). (Véase Cuadro No. 5).

La tasa de faena se comporta en forma distinta a lo que sucedía históricamente, como consecuencia del importante aumento del stock en el período; así se espera una importante reducción de la misma en los primeros años, para luego irse recuperando hacia el final del período, sin alcanzar la tasa inicial en la medida que se continúa con el esfuerzo de inversión en el rubro.

Complementariamente, se producirán cambios sustanciales en las categorías sacrificadas, aumentando la importancia relativa de los animales jóvenes, en particular novillos de 1 a 3 años. Vale decir que, aparte de los cambios en el volumen de faena, se producirá, como ya se mencionó, una importante mejora en la calidad de la misma, lo que permitirá abastecer adecuadamente un consumo interno más exigente y, fundamentalmente, aumentar la capacidad de competencia en el mercado externo.

- iv) producción de carne bovina por hectárea: este índice de productividad sintetiza la evolución prevista en la eficiencia de la producción de carne. En efecto, el mismo es el resultado de los aumentos en la dotación animal por hectárea de pastoreo y de la pro-

EVOLUCION PROYECTADA DE LAS TASAS DE PROCREO Y MORTANDAD

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
a) Procreos						
Hembras entoradas (miles de cabezas)	4.729	4.684	4.953	5.253	5.664	6.094
Terneros logrados (miles de cabezas)	3.121	3.115	3.319	3.572	3.908	4.266
Tasa de procreo (%)	66,0	66,5	67,6	68,0	69,0	70,0
b) Mortandad						
Stock vacuno (miles de cabezas)	12.902	12.571	13.386	14.083	15.024	16.036
Animales muertos (miles de cabezas)	770	613	606	550	532	500
Tasa de mortandad (%)	6,0	4,8	4,5	3,9	3,5	3,1

EVOLUCION DE LAS TASAS DE FAENA Y PRODUCCION DEL STOCK BOVINO
(en miles de cabezas)

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1) Faena	2.582	1.787	2.016	2.081	2.364	2.790
2) Diferencia de stock	- 231	715	597	941	1.012	1.051
3) Producción	2.351	2.502	2.713	3.022	3.376	3.841
4) Stock bovino	12.902	12.761	13.386	14.083	15.024	16.036
5) Tasa de faena	20,0	14,1	15,1	14,8	15,7	17,4
6) Tasa de producción	18,2	19,7	20,3	21,5	22,5	24,0

ducción por animal en existencia. Tiene además, en el país una gran importancia, ya que básicamente la única alternativa para aumentar la producción total la constituye el mejoramiento de la productividad por hectárea.

En t-1 la producción por hectárea dedicada al rubro alcanzaba a 57,8 kg de carne en pie; la meta proyectada para el año meta es de 100 kg es decir que con el conjunto de medidas previsto se espera lograr un incremento del 73% de la producción por unidad de superficie (véase Cuadro No. 6). La base de este incremento debe buscarse en la diferente estructura de la superficie forrajera en ambos momentos. En efecto, mientras en t-1 el 92,7% de la superficie destinada al rubro lo constituían campos naturales de baja productividad, en el año 5 este porcentaje se reduce al 77,1% (véase Cuadro No. 7). A ello debe agregarse el efecto indirecto del sub-programa de sanidad del mejor manejo del forraje cultivado, como consecuencia de la experiencia de los productores y los trabajos experimentales llevados a cabo.

La mano de obra ocupada en la producción de forraje, el cuidado del stock y las mejoras atribuibles a la producción de carne vacuna, alcanzaba en t-1 a 45,8 millones de jornadas, las que se elevarán a 58,3 en el último año del Plan. De esta manera, en el período del Plan las jornadas dedicadas a la ganadería bovina aumentarán su participación relativa, de un 38,3% a un 40,4%.

Los mayores requerimientos están vinculados a la intensificación tecnológica prevista, lo que traerá asociado, como ya se vió, aumento del área forrajera cultivada, del stock y del capital complementario.

La baja productividad actual de este sector, medida en términos de valor agregado por jornada, se incrementa en un 13% en el período, manteniéndose siempre por debajo de la media sectorial.

En el período de ejecución de este programa, los insumos requeridos por la ganadería crecerán un 94%, es decir, un 14,2% acumulativo anual. Interesa particularmente destacar que las innovaciones tecnológicas que se proponen significarán fundamentalmente un cambio en la estructura de los mismos; así, cobrarán mayor importancia los fertilizantes, vacunas y específicos veterinarios, combustibles y lubricantes.

Asimismo, se incrementará el capital fijo del sector; que pasará de 2.265 a 3.031 millones de Am\$ del año t-1, es decir, experimentará en el período un incremento del 33,8%.

La mayor parte de este incremento es debido al aumento del stock vacuno, responsable de 470 millones de Am\$ de la diferencia total de 766 millones. Sin embargo, son los rubros plantaciones y maquinaria y equipo los que se incrementan en forma más importante: el primero se multiplica por 4,5 mientras el segundo lo hace por 2,39.

EVOLUCION DE LA PRODUCCION ESPERADA DE LOS DISTINTOS TIPOS DE FORRAJES DE PASTOREO

Concepto	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
a) Rendimiento (Kg en pir por ha)						
Praderas anuales	57,8	58,0	64,3	72,7	84,0	100,0
Praderas permanentes	210,2	211,7	232,2	256,1	282,3	312,6
Campo natural	150,2	151,3	167,0	185,7	206,5	229,1
Campo natural mejorado	49,7	49,8	52,8	56,3	60,2	65,0
	50,6	50,5	50,4	71,1	34,7	100,0
b) Producción total (miles de ton. en pie)						
Praderas anuales	016,6	925,5	1.008,4	1.113,5	1.247,4	1.424,3
Praderas permanentes	107,2	108,6	139,3	179,3	230,3	297,0
Campo natural	70,6	71,7	103,7	151,7	221,6	323,0
Campo natural mejorado	729,7	736,0	748,9	753,6	744,3	714,3
	9,1	9,2	16,3	28,9	51,1	90,0
c) Estructura de la producción (en porcentaje)						
Praderas anuales	11,7	11,7	13,8	16,1	18,4	20,8
Praderas permanentes	7,7	7,7	10,3	13,5	17,3	22,7
Campo natural	79,6	79,5	74,3	67,7	59,7	50,2
Campo natural mejorado	1,0	1,0	1,5	2,6	1,1	5,3

EVOLUCION DE LA SUPERFICIE FORRAJERA DESTINADA A VACUNOS

Superficie forrajera	Año t-1	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
a) En miles de hectáreas	15.857	15.958	15.676	15.307	14.855	14.247
Praderas anuales	510	513	600	700	815	950
Praderas permanentes	470	474	522	817	1.073	1.410
Campo natural	14.697	14.789	13.183	13.385	12.364	10.989
Campo natural mejorado	180	182	271	405	503	900
b) En porcentaje	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
Praderas anuales	3,2	3,2	3,8	4,6	5,5	6,7
Praderas permanentes	3,0	3,0	4,0	5,3	7,2	9,9
Campo natural	92,7	92,7	90,5	87,4	83,2	77,1
Campo natural mejorado	1,1	1,1	1,7	2,7	4,1	6,3

Como consecuencia, se produce una reestructuración del capital destinado a este rubro de producción, que pone de manifiesto los lineamientos previstos: el stock pasa de constituir el 85,4% en la situación inicial al 79,3% en la final, mientras que los mejoramientos forrajeros pasan de 0,8 a 2,8% y la maquinaria y equipo de 6,0 a 10,8%.

Una síntesis de los recursos comprometidos para la producción de carne vacuna y de la tecnología propuesta se presenta en los Cuadros Nos. 8 y 9.

A los efectos de analizar la evolución experimentada por el valor agregado de esta actividad y la productividad de los recursos involucrados en la misma se elaboró el Cuadro No. 10.

Se comprueba así que aumentan todas las productividades parciales y muy particularmente aquella referida a la tierra, recurso definido como esencialmente limitado. Sin embargo, la totalidad de las mismas permanecen por debajo de las medias nacionales para el sector, como consecuencia de las características del rubro considerado.

Diversas medidas serán necesarias para el cumplimiento del programa de carne vacuna. Su producción dispondrá de menores áreas en el futuro, como consecuencia de una conveniente expansión de los cultivos. Esto determina que en la selección de instrumentos que será necesario utilizar para cumplir las metas de aumento del volumen físico de la producción, deberá darse gran importancia a aquéllos que tiendan a poner a disposición de los productores y a difundir entre ellos los nuevos métodos que permitan utilizar más intensivamente las áreas ganaderas.

El Programa de Investigación tendrá así gran prioridad, especialmente en lo que se refiere a la producción de forrajes y sanidad animal. En el primer aspecto, se ha avanzado a través de la experiencia exitosa del primer Plan Ganadero. Sin embargo, se deberán realizar importantes investigaciones tendientes a perfeccionar y ampliar los conocimientos hoy disponibles, en busca de métodos de alimentación cada vez más eficaces, seguros y económicos.

Es por ello que en el Programa de Investigación se ha dispuesto lo necesario para que el Centro de Investigaciones Agropecuarias "San Salvador" cuente con los recursos adecuados para ampliar sustancialmente las investigaciones en pasturas y sanidad animal, que ha comenzado en los últimos años. Asimismo, se han incluido recursos para la instalación y puesta en marcha de un nuevo instituto de investigaciones, que comenzaría a funcionar en la zona de la meseta en t-1.

En materia de sanidad animal, existen algunos problemas importantes a resolver. Las investigaciones serán llevadas a cabo por el Instituto de Investigaciones Veterinarias, de reciente creación, quedando la acción del Estado en materia de prevención y combate de enfermedades a cargo de la Dirección de Sanidad e Industria Animal del Ministerio de Agricultura.

Complementariamente, se deberá poner especial énfasis en la acción que tienda a difundir los nuevos métodos entre el mayor número posible de productores. Afortunadamente, entre éstos se ha generalizado recientemente, debido al trabajo del per-

RECURSOS COMPROMETIDOS PARA LA PRODUCCION DE CARNE

VACUNA, EN t-1 y AÑO 5

Concepto	a) Año t-1	b) Año 5	(b/a) x 100
Superficie forrajera (miles de hectáreas)	15.857	14.249	89,9
Capital depreciado (millones de Am\$ t-1)	2.265	3.031	133,8
Jornadas directas (miles de jornadas)	42.053	52.026	123,7

COMBINACION DE FACTORES PRODUCTIVOS PARA LA PRODUCCION
DE CARNE VACUNA EN t-1 Y EN EL AÑO 5

Concepto	a) Año t-1	b) Año 5	(b/a) en %
Jornadas por hectárea forrajera	2,65	3,65	137,7
Capital depreciado por hectárea forrajera	143	213	149,0
Capital depreciado por jornada directa	53,9	58,3	108,2
Insumos intermedios por hectárea forrajera	5,2	11,3	217,3
Insumos intermedios por capital depreciado	3,7	5,3	143,2
Insumos intermedios por jornada directa	2,0	3,1	155,0

RELACION ENTRE LOS FACTORES PRODUCTIVOS Y EL VALOR GENERADO
POR LA PRODUCCION DE CARNE VACUNA EN t-1 y EL AÑO 5

Concepto	a) Año t-1	b) Año 5	(b/a) en %
Valor agregado neto	288	401	139,2
Valor agregado neto por hectárea forrajera	18,2	28,1	154,4
Valor agregado neto por jornada directa	6,8	7,7	113,2
Valor agregado neto por capital depreciado	12,7	13,2	103,9

sonal del Plan Ganadero, el convencimiento de que el uso de pasturas mejoradas, en condiciones adecuadas de manejo y sanidad, es altamente rentable para el empresario. En ese sentido, existe en el campo todo un nuevo movimiento de opinión que acogerá con beneplácito el asesoramiento técnico concreto y la asistencia económica que el Estado deberá brindar.

A estos últimos efectos se contará, en primer lugar, con la acción del propio Plan Ganadero, que de acuerdo al nuevo convenio celebrado con el Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento podrá duplicar en los próximos años la tarea realizada durante la ejecución del primer proyecto, recientemente terminado. El desarrollo del Servicio Nacional de Extensión, y la adecuada conexión con la asistencia crediticia del Banco de Fomento complementarán las tareas requeridas para obtener las metas propiciadas en el presente programa. Otra actividad que ayudará al logro de las metas propuestas será el de proporcionar semillas de alta calidad genética y en cantidad suficiente para la instalación de praderas anuales y permanentes.

La política de crédito se constituirá en una de las herramientas básicas para el aumento de la producción.

Debido a la importancia que se les atribuye para el cumplimiento de las metas del programa de producción pecuaria, se ha considerado conveniente especificar algunas de las acciones que será necesario llevar a cabo, vinculadas al mejoramiento forrajero y a la sanidad animal.

a) Subprograma forrajero

Los suelos de las distintas regiones del país permiten, en su totalidad, el mejoramiento del tapiz forrajero que los recubre. Las características ecológicas de los distintos lugares de pastoreo y la necesidad de realizar un adecuado régimen de rotación con la agricultura, condicionan las distintas alternativas técnicas propuestas para el mejoramiento de praderas.

En suelos superficiales o muy quebrados, en los cuales no es posible realizar cultivos forrajeros, se propone mejorar la capacidad de sustentación mediante la incorporación de semillas y fertilizantes o sólo de este último al tapiz natural, según existan o no especies de leguminosas que respondan a la fertilización fosforada. Este tipo de mejoramiento es el que se propone tenga una mayor expansión, en la región de la Meseta, en la que se multiplicará por cinco el área actualmente mejorada.

En los suelos arables, susceptibles de ser utilizados para cultivos, se plantea la opción de cultivos agrícolas o forrajeros y, dentro de éstos, cual será la importancia de los cultivos forrajeros anuales y cuál la de los permanentes.

Los cultivos forrajeros anuales cumplen el papel fundamental de cubrir períodos estacionales críticos en la producción forrajera. Su costo por unidad de forraje producido es más alto que las otras formas de

producir forraje, pero su carácter estratégico fundamenta su utilización, en producciones de demanda permanente durante el año: leche fresca para el abastecimiento de los principales centros poblados, por ejemplo.

Las praderas artificiales permanentes tienen frente a las anteriores, un conjunto de ventajas: producen forraje a más bajo costo, favorecen el control de la erosión al cubrir el suelo con un tapiz cerrado por largos períodos; una adecuada combinación de gramíneas y leguminosas permitirá asegurar forrajes ricos en proteínas a la vez que fijar nitrógeno que será posteriormente utilizado por los cultivos subsiguientes, etc. Es decir que, adecuadamente integrado en una rotación con cultivos, se presenta como rubro complementario, mejorando los rendimientos y la conservación del recurso.

Se plantea entonces, su expansión pasando de ocupar 470 mil hectáreas en t-1 a 1.410 mil hectáreas en el año 5 (véase nuevamente Cuadro No. 9).

Complementariamente, y con la finalidad fundamental de disponer de forraje en los períodos críticos, se incrementan, pero menos fuertemente, las praderas anuales (510 a 950 mil hectáreas en t-1 y el año 5 respectivamente).

Finalmente, se prevé que parte de los excedentes estacionales producidos sean destinados a reservas forrajeras (heno, silo), lo que será propiciado a través de fórmulas crediticias especiales.

El mejoramiento de la producción forrajera estará destinado fundamentalmente a la producción de carne vacuna y, en menor proporción, de la lechería. Se desestima la utilización de la superficie forrajera mejorada por la producción ovina. Dada la baja rentabilidad del rubro y la relativamente menor respuesta de la producción de lana al mejoramiento de las condiciones alimenticias, se destinará a la producción ovina fundamentalmente campos naturales superficiales de la región de la Meseta.

Los distintos tipos de pasturas mejoradas tienen diferentes rendimientos en términos de forrajes verdes y, consecuentemente, serán variadas las cargas animales y la productividad en términos de carne producida por hectárea. En la evaluación de los mejoramientos será necesario también considerar la distinta potencialidad inicial de los suelos en los que se realiza el mejoramiento. En el ya mencionado Cuadro No. 8 se presenta la estimación de los rendimientos y la producción proveniente de cada tipo de mejoramiento. Se constata así que el campo natural, que en t-1 proporciona el 80% de la producción total de carne, perderá importancia relativa, siendo en el año 5 responsable de solo el 50% de la misma, mientras que los distintos mejoramientos cubrirán la producción restante.

b) Subprograma de Sanidad Animal

El Subprograma de Sanidad Animal tiene como objetivo mejorar sustancialmente las condiciones sanitarias de la ganadería, constituyendo uno de los medios importantes para elevar la producción pecuaria y previniendo al mismo tiempo algunas enfermedades que atentan contra la salud humana. Por otra parte, si el país logra erradicar algunas enfermedades, en especial la fiebre aftosa, estará posibilitándose la ampliación del mercado externo al levantarse las causales que vedan la entreda de carnes americanas a varios países compradores.

Si bien los problemas sanitarios que afectan la producción pecuaria abarcan un espectro muy amplio, se ha preferido concentrar la acción sobre aquellas enfermedades que tienen mayor incidencia económica.

Este subprograma comprende los siguientes aspectos:

- i) Campañas sanitarias contra enfermedades infecciosas y parasitarias.
- ii) Reequipamiento del laboratorio oficial de diagnóstico y contralor de productos zoterápicos y organización de equipos móviles.
- iii) Instalación y equipamiento de una estación cuarentena, para la observación de animales provenientes del exterior.

Las medidas estarán estrechamente vinculadas en su ejecución con los resultados de la investigación que se vayan obteniendo en el plano de la medicina veterinaria. De esta manera se logrará aumentar la eficacia de las campañas que se realicen, al aplicar los métodos terapéuticos y preventivos en las condiciones que permitan el más efectivo control al más bajo costo compatible.

El Servicio Nacional de Extensión apuntalará en el largo plazo la eficacia de las campañas sanitarias asesorando a los productores, de tal forma que éstos incluyan dentro de sus prácticas de manejo un ordenamiento racional de vacunaciones, y otros tratamientos veterinarios.

Las campañas sanitarias permitirán reducir y en otros casos erradicar aquellas enfermedades de mayor importancia económica en la ganadería. El reequipamiento del laboratorio oficial y la creación de equipos móviles de diagnóstico permitirán evaluar la incidencia de las diferentes enfermedades en las distintas regiones del país y asegurar un control riguroso de la producción, comercialización y utilización de los productos veterinarios. La instalación de estaciones de cuarentena evitará la propagación de las enfermedades exóticas o de las ya erradicadas, a través de la importación de animales.

Para el cumplimiento del presente subprograma será necesario cubrir ciertos requerimientos adicionales de personal, gastos e inversiones.

1.2 Datos

Véase Cuadros No. 11 y 12.

1.3 Enunciado

- a) Calcule la proyección de las existencias totales de ganado vacuno en el período t-1/año 5, en base a la información del Cuadro No. 11.
- b) Muestre la inversión en stock resultante del cambio de existencias.
- c) A partir de la información contenida en el Cuadro No. 12, calcular el stock por categorías en el año 5.
- d) Muestre comparativamente la estructura de stocks por categorías en los años 4 y 5 y discuta el posible efecto que las medidas propuestas en el programa ganadero pudieron tener sobre el incremento de la precocidad y la reducción de la mortandad.

2. Solución

2.1 Resolución numérica

- a) Aplicando la fórmula:

$$\text{Stock final } 1/ = \text{Stock inicial} + \text{nacimientos} - (\text{mortandad} + \text{faena})$$

- b) Cambio de existencias:
(en miles de cabezas)

Año 1	-233
Año 2	721
Año 3	694
Año 4	939
Año 5	1023

- c) y d) - Véase Cuadro No. 13.

1/ Stock al comienzo del año siguiente se obtuvo:

Año 1	12902 + 3121 - (2580 + 774)	= 12669
Año 2	12669 + 3115 - (1786 + 608)	= 13390
Año 3	13390 + 3319 - (2022 + 603)	= 14084
Año 4	14084 + 3572 - (2084 + 549)	= 15023
Año 5	15023 + 3908 - (2359 + 526)	= 16046

INFORMACION PARA LA PROYECCION DEL STOCK DE CANADO VACUNO

EN EL PERIODO t-1 / AÑO 5

Año	Stock inicial	Hembras entoradas	Tasa de procreo	Tasa de faena	Tasa de mortandad
	en miles de cabezas	 en porcentaje		
t-1	12.902	4.729	66,0	20,0	6,0
1		4.684	66,5	14,1	4,8
2		4.953	67,0	15,1	4,5
3		5.253	68,8	14,8	3,9
4		5.664	69,0	15,7	3,5
5		6.094	70,0	17,4	3,1

STOCK GANADERO Y TASAS DE MORTANDAD Y FAENA POR CATEGORIA EN EL AÑO 4

(en miles de cabezas)

	Stock Año 4	Mortandad % sobre el total de la categoría	Faena % sobre el total de la categoría
Total	15.024		
Terneros	1.732	7,0	2,8
Toros	210	2,0	15,0
Novillos 1-2	1.494	4,0	15,0
Novillos 2-3	1.015	3,0	84,0
Novillos 3-4	210	2,0	88,0
Novillos + 4	113	1,0	92,0
Terneras	1.731	7,0	2,2
Vaquillonas 1-2	1.198	4,0	2,5
Vaquillonas 2-3	680	2,0	3,5
Vacas 2-3	670	3,0	3,5
Vacas 3-4	1.425	2,0	3,5
Vacas 4-5	1.454	1,0	4,5
Vacas 5-6	1.488	1,0	10,0
Vacas + 6	1.604	1,0	33,1

ESTRUCTURA POR CATEGORIAS DEL STOCK VACUNO EN EL AÑO 5

(en miles de cabezas)

	Stock Año 4		Mortandad	Faena	Stock Año 5	
	Miles de cabezas	%			Miles de cabezas	%
Total	15.024	100,0	532,2	2.364,4	16.037	100,0
Termeros	1.732	11,5	121,2	48,5	1.932	12,0
Toros	210	1,3	4,2	31,5	225	1,4
Novillos 1-2	1.494	9,9	59,8	224,1	1.512	9,4
Novillos 2-3	1.015	6,7	30,5	852,6	1.210	7,5
Novillos 3-4	210	1,3	4,2	184,8	132	0,8
Novillos + 4	113	0,7	1,1	104,0	29	0,2
Termeras	1.731	11,5	121,2	38,1	1.933	12,1
Vaquillonas 1-2	1.198	7,9	47,9	30,0	1.572	9,8
Vaquillonas 2-3	680	4,5	13,6	23,8	436	2,7
Vacas 2-3	670	4,4	20,1	23,5	584	3,6
Vacas 3-4	1.425	9,4	28,5	49,9	1.269	7,9
Vacas 4-5	1.454	9,6	14,5	55,4	1.347	8,4
Vacas 5-6	1.488	9,9	14,9	148,8	1.374	8,6
Vacas + 6	1.604	10,6	16,0	530,4	2.382	14,9

TEMA V - Evaluación del Plan

Ejercicio No. 10 - Cálculo de indicadores a utilizar en la evaluación del Plan.

1. Planteo

1.1 Datos

Véanse Cuadros No. 1, 2, 3 y 4.

1.2 Enunciado

- a) En base a la información contenida en los Cuadros Nos. 1 y 2,
 - i) Calcule el VBP y VAN por hectárea en el año $t-1$ y en el año 5 (Agrícola, Pecuario, Forestal y Total), para las 3 regiones y para todo el país.
 - ii) Calcule el VAN por jornada directa en $t-1$ y en el año 5 (Agrícola, Pecuario, Forestal y Total), para las 3 regiones y para todo el país.
 - iii) Calcule el VAN por trabajador rural, y la relación VAN/Capital fijo depreciado, para las 3 regiones y para todo el país.
- b) En base a la información contenida en el Cuadro No. 3,
 - i) Calcule las exportaciones totales del sector agropecuario en $t-1$ y en el año 5, en millones de dólares, a precios de $t-1$.
 - ii) Calcule el saldo neto de Comercio Exterior para el año $t-1$ y el año 5, sabiendo que en esos años las importaciones del sector agropecuario fueron de 404,5 y 747,7 millones de dólares respectivamente, a precios de $t-1$.
- c) Calcule los índices de crecimiento de las productividades parciales de los recursos: tierra, mano de obra y capital entre el año base ($t-1 = 100$) y el año meta.
- d) Calcule la productividad marginal de las divisas demandadas por el Plan de Desarrollo Agropecuario en el año 5 respecto a $t-1$.
- e) En base a la información contenida en el Cuadro No. 4, exprese gráficamente la situación en el año base, la situación alcanzable de continuar las tendencias históricas y la situación alcanzable de cumplirse las metas del Plan, de acuerdo a la evolución de los saldos netos de comercio exterior y del valor agregado neto por hectárea.
Discuta los resultados obtenidos en comparación con los items c) y d).

INFORMACION PARA EL CALCULO DE INDICADORES

Año t-1

	Urbana	Llano	Meseta	Total
1. Valor Bruto de Producción	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	179,0	721,5	201,5	1.105
Pecuario	76,1	226,5	267,4	570
Forestal	0,9	3,0	29,1	33
Total	256,0	951,0	501,0	1.708
2. Valor Agregado Neto	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	72	290	81	443
Pecuario	53	158	188	399
Forestal	1	2	21	24
Total	126	450	290	866
3. Superficie Productiva miles de hectáreas			
Agrícola	570	1.370	1.440	3.380
Pecuaría	1.030	5.830	12.060	18.920
Forestal	100	300	2.100	2.500
Total	1.700	7.500	15.600	24.800
4. Jornadas Directas miles de jornadas			
Agrícolas	11.600	29.073	8.403	49.076
Pecuarías	7.374	20.867	28.416	56.657
Forestales	-	-	4.081	4.081
Total	18.974	49.940	40.900	109.814
5. Trabajadores Agrícolas miles de trabajadores			
Total	205	400	320	925
6. Capital Fijo Depreciado millones de Am\$ de t-1			
Total	354	1.476	1.535	3.365

INFORMACION PARA EL CALCULO DE INDICADORES

Año 5

	Urbana	Llano	Monta	Total
1. Valor Bruto de Producción	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	223	1.284	343	1.850
Pecuario	127	342	387	856
Forestal	1	2	35	38
Total	351	1.628	765	2.744
2. Insumos Intermedios	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícolas	116,5	678,9	182,7	978,1
Pecuarios	49,3	109,2	104,6	263,1
Forestales	0,2	0,9	6,7	7,8
Total	166,0	789,0	294,0	1.249,0
3. Amortización	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	17,2	93,1	32,3	142,6
Pecuaría	9,7	24,8	36,4	70,9
Forestal	0,1	0,1	3,3	3,5
Total	27,1	118,0	72,0	217,0
4. Superficie Productiva miles de hectáreas			
Agrícola	712	2.633	1.906	5.251
Pecuaría	888	4.567	12.094	17.549
Forestal	100	300	1.600	2.000
Total	1.700	7.500	15.600	24.800
5. Jornadas Directas miles de jornadas			
Agrícolas	13.396	34.778	9.793	56.967
Pecuarías	9.830	26.310	30.886	67.026
Forestales	-	-	4.704	4.704
Total	22.226	61.088	45.383	128.697
6. Trabajadores miles de trabajadores			
Total	220	430	346	996
7. Capital Fijo Depreciado millones de Am\$ de t-1			
Total	490	1.982	2.089	4.561

INFORMACION PARA EL CALCULO DEL SALDO NETO DE COMERCIO EXTERIOR

	Exportaciones de origen agropecuaria		Precios de t-1 (US\$/ton.)
	Año t-1	Año 1	
Trigo	737	707	133
Maíz	157	1.907	112
Arroz 1/	261	566	254
Soja	261	1.029	248
Caña de azúcar 2/	20.500	27.778	260
Frutas	300	259	175
Carne vacuna 3/	792	824	1.033
Lana	12	13	1.800

1/ Expresado con cáscara, producto final, 70%.

2/ Rend. industrial, 10% en t-1, 14,4% en el año 5.

3/ En pie. Rend. en canal, 53%.

INFORMACION PARA COMPARACION GRAFICA ENTRE TENDENCIA HISTORICA Y PLAN DE DESARROLLO

Año	Saldo neto de Comercio Exterior		Valor agregado por hectáreas dedicadas a la actividad agropecuaria	
	Valores observados	Valores de tendencia	Valores observados	Valores de tendencia
t-16	507,2	473,7	24,7	23,6
t-15	517,4		22,5	
t-14	460,0		23,7	
t-13	556,2		27,4	
t-12	534,9		26,8	
t-11	508,9	560,9	27,0	27,1
t-10	527,2		27,7	
t-9	742,4		29,8	
t-8	647,1		29,5	
t-7	708,7	530,7	30,9	29,9
t-6	560,9		28,0	
t-5	518,3		29,4	
t-4	531,1		31,1	
t-3	716,6		33,4	
t-2	766,4		34,2	
t-1	864,5		34,9	
1		735,4		34,1
2		752,8		34,8
3		770,3		35,5
4		787,7		36,2
5		805,1		36,9
		822,5		37,5
		584,0		34,2
		750,9		37,5
		881,2		41,5
		1.160,0		45,7
		1.475,3		51,5

.. Millones de dólares a precios de t-1 ..

..... Am\$ de t-1

2. Solución

2.1 Resolución numérica

- a) Véanse Cuadros No. 5 y 6.
- b) Véase Cuadro No. 7.
- c) Véase Cuadro No. 8.
- d) Véase Cuadro No. 9.
- e) Véanse gráficos No. 1 y 2.

DETERMINACION DEL VALOR AGREGADO NETO POR REGION

Año t-1

	Urbana	Llano	Meseta	Total
1. Valor Bruta de Producción	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	179,0	721,5	204,5	1.105
Pecuário	76,1	226,5	267,4	570
Forestal	0,9	3,0	29,1	33
Total	256,0	951,0	501,0	1.708
2. Valor Agregado Neto	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	72	290	81	443
Pecuário	53	158	188	399
Forestal	1	2	21	24
Total	126	450	290	866
3. Superficie miles de hectáreas			
Agrícola	570	1.370	1.440	3.380
Pecuário	1.030	5.830	12.060	18.920
Forestal	100	300	2.100	2.500
Total	1.700	7.500	15.600	24.800
4. Valor Bruto de Prod. por ha Am\$			
Agrícola	314,0	526,6	142,0	326,9
Pecuário	73,9	38,9	22,1	30,1
Forestal	9,0	10,0	13,9	13,2
Total	150,6	126,8	32,1	68,9
5. Valor Agregado Neto por ha Am\$			
Agrícola	126,3	211,7	56,3	131,1
Pecuário	51,4	27,1	15,6	21,1
Forestal	10,0	6,7	10,0	9,6
Total	74,1	60,0	18,6	34,9
6. Valor Agregado Neto por jornada directa Am\$			
Agrícola	6,2	10,0	9,6	9,0
Pecuário	7,2	7,6	6,6	7,0
Forestal	s/d	s/d	5,1	5,9
Total	6,6	9,0	7,1	7,9
7. Valor Agregado Neto por Trabajador Rural Am\$			
Total	615	1.125	906	936
8. Relación Producto Capital (VAN/Capital) Am\$			
Total	35,6	30,5	18,9	25,7

DETERMINACION DEL VALOR AGREGADO NETO POR REGION

AÑO 5

	Urbana	Llano	Montaña	Total
1. Valor Bruto de Producción	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	223	1.284	1.343	1.850
Pecuario	127	342	387	856
Forestal	1	2	35	38
Total	351	1.628	765	2.744
2. Valor Agregado Neto	. en millones de Am\$ a precios de t-1 .			
Agrícola	89	512	128	729
Pecuario	68	208	246	522
Forestal	1	1	25	27
Total	158	721	399	1.278
3. Superficie miles de hectáreas			
Agrícola	712	2.633	1.906	5.251
Pecuario	888	4.567	12.094	17.549
Forestal	100	300	1.600	2.000
Total	1.700	7.500	15.600	24.800
4. Valor Bruto de Prod. por ha Am\$			
Agrícola	313,2	487,7	180,0	352,3
Pecuario	143,0	79,9	32,0	48,8
Forestal	1,0	0,7	21,9	19,0
Total	206,5	217,1	49,0	110,6
5. Valor Agregado Neto por ha Am\$			
Agrícola	125,0	191,5	67,2	138,8
Pecuario	76,6	45,5	20,3	29,7
Forestal	1,0	0,3	15,6	13,5
Total	92,9	96,1	25,6	51,5
6. Valor Agregado Neto por Jornada Directa Am\$			
Agrícola	7,2	14,7	13,1	12,8
Pecuario	6,9	7,9	8,0	7,8
Forestal	s/d	s/d	5,3	5,7
Total	7,1	11,8	8,8	9,9
7. Valor Agregado Neto por Trabajador Rural Am\$			
Total	718	1.677	1.153	1.283
8. Relación Producto/Capital 1/ Am\$			
Total	32,2	36,4	19,1	18,0

1/ Valor Agrícola Neto/Capital fijo depreciado.

DETERMINACION DEL SALDO NETO DE COMERCIO EXTERIOR

	miles de toneladas		US\$/ton.	(millones de dólares, a precios de t-1)				Saldo neto de Comercio Exterior	
	Exportaciones de origen agropecuario			Exportaciones de origen agropecuario		Importaciones del sector agropecuario			
	Año t-1	Año 5		Año t-1	Año 5	Año t-1	Año 5		
Trigo	737	707	133	98	94	-	-	-	
Maíz	157	1.907	112	18	214	-	-	-	
Arroz	261	566	254	46	101	-	-	-	
Soja	261	1.029	248	65	255	-	-	-	
Azúcar	20.500	27.778	260	533	1.040	-	-	-	
Frutas	300	259	175	53	45	-	-	-	
Carne vacuna	792	824	1.033	434	451	-	-	-	
Lana	12	13	1.800	22	23	-	-	-	
Total				1.269	2.223	404,5	747,5	864,5	1.475,3

INDICES DE CRECIMIENTO DE LAS PRODUCTIVIDADES PARCIALES
DE LOS RECURSOS ENTRE t-1 Y AÑO 5, POR REGION Y PARA
TODO EL PAIS (Base Año t-1 = 100)

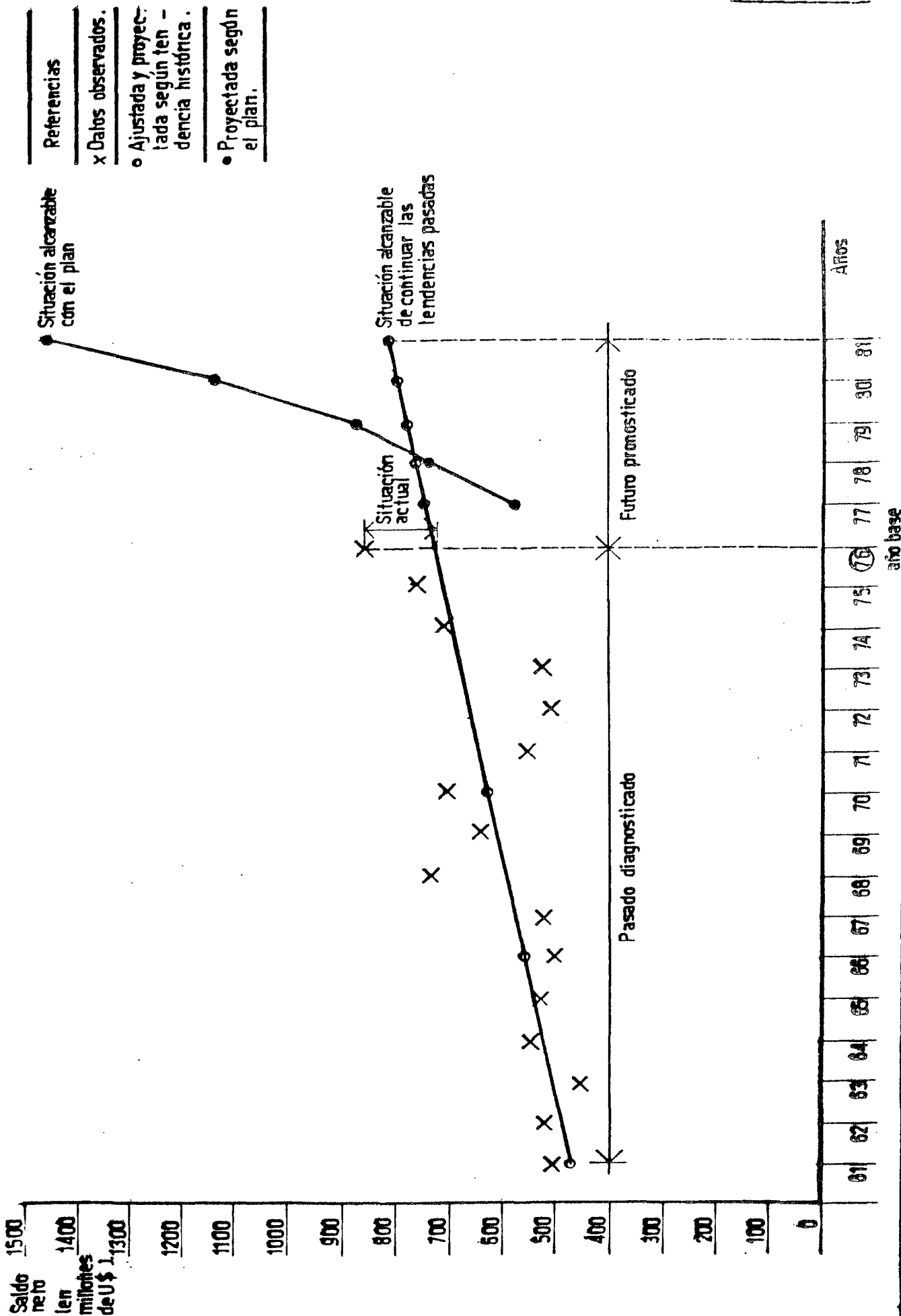
	Urbana	Llano	Montaña	Total
1. Valor Agregado/Hectárea	99,0	91,9	119,4	105,9
Agrícola	99,0	91,9	119,4	105,9
Pecuario	149,0	167,9	130,1	140,8
Total	125,4	160,2	137,6	147,6
2. Valor Agregado/Jornada				
Agrícola	116,1	147,0	136,5	142,2
Pecuario	95,8	103,9	121,2	111,4
Total	107,6	131,1	123,9	125,3
3. Valor Agregado/Trabajador				
Total	116,7	149,1	127,3	137,1
4. Valor Agregado/Capital				
Total	90,4	119,3	101,1	108,9

PRODUCTIVIDAD MARGINAL DE LAS DIVISAS DEMANDADAS POR EL
PLAN DE DESARROLLO AGROPECUARIO
(millones de U\$S a precios del año t-1)

Concepto	Año t-1	Año 1
Importaciones atribuibles al sector	405	718
Saldos exportables de productos de origen agropecuario	1.269	2.223
Aumento de importaciones	-	343
Aumento de exportaciones	-	954
Aumento de exportaciones/Aumento de Importaciones		2,8

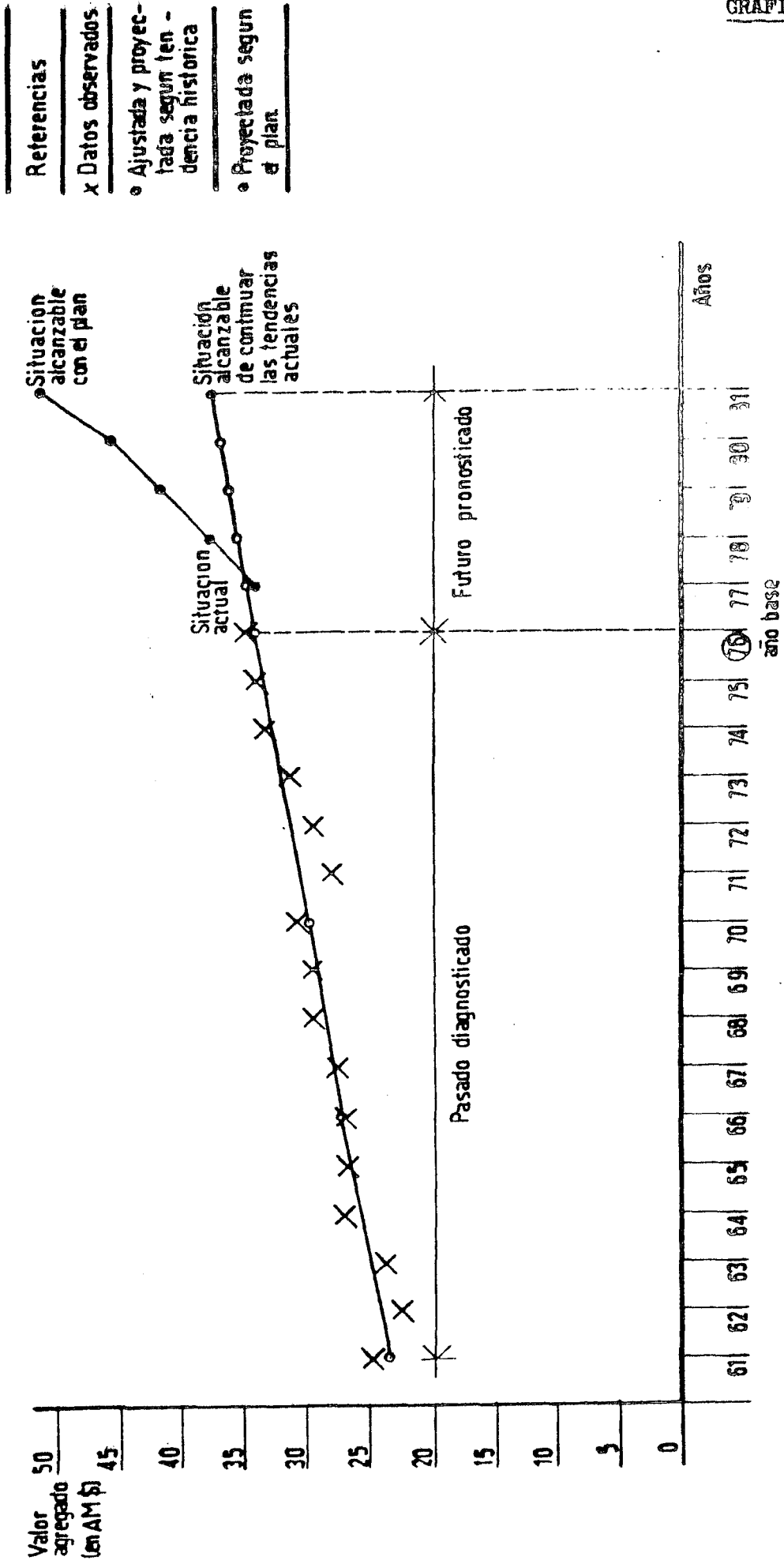
GRAFICO No. 1

SALDO NETO DE COMERCIO EXTERIOR (en millones de U\$ a precios de 1976) -



VALOR AGREGADO POR HECTAREA DEDICADA A LA ACTIVIDAD AGROPECUARIA
(en AM \$ a precios de 1970)

GRAFICO No. 2



TEMA V - Evaluación del Plan

Ejercicio No. 11 - Origen de los aumentos de producción

1. Planteo

1.1 Antecedentes

Se va a exponer a continuación el procedimiento a emplearse para el cálculo de los orígenes de aumentos de producción que plantea este ejercicio y su ejemplificación con respecto a los temas agrícolas.

Los aumentos de producción agropecuaria entre el año base y el año meta del Plan podrán deberse a mayores áreas, más altos niveles de productividad (aumentos de rendimientos por unidad de superficie), o a cambios en el uso del suelo.

Normalmente, los tres factores están incidiendo conjuntamente, por lo que la identificación del origen de los aumentos de producción debidos a cada uno de ellos requiere un método de cálculo específico.

Se presentará un ejemplo suponiendo que se consideren solamente las tierras dedicadas a agricultura en Americana. Las mismas, desde el año t-1 al año 5 se incrementan pasando de 3.380 a 5.251 miles de hectáreas ocupadas. El Valor Agregado agrícola por otra parte, que en t-1 era de 442 millones de Am\$, ascendió en el año 5 a 729 millones. El aumento total del valor agregado fue por consiguiente de:

$$729 - 442 = 287 \text{ millones de Am\$ (Véase Cuadro 1).}$$

- a) Aumento debido a un incremento del área. Se determina calculando el valor agregado por hectárea en t-1 y multiplicándolo por la superficie del año 5, bajo el supuesto de que la estructura del uso del suelo y la producción por ha. se mantuvo constante. Para obtener el incremento, se le restará a este resultado el Valor Agregado de t-1. Llamando AR a la superficie dedicada a la producción, y VA al valor agregado agrícola, se tendría lo siguiente:

$$AR_5^0 \times \frac{VA_{t-1}}{AR_{t-1}} - AR_{t-1} \frac{VA_{t-1}}{AR_{t-1}} \quad (\text{AR}_5^0 \text{ representa la superficie agrícola del año 5, con la misma estructura de uso del suelo de t-1})$$
$$5.251 \frac{442}{3380} - 442 = 244,7 \quad (\text{aumento debido a mayores áreas})$$

- b) Aumento de producción por efecto de la mayor productividad de las tierras.

Se calcula el índice de productividad de las tierras agrícolas para el año 5, con respecto al año

ORIGEN DE LOS AUMENTOS DE LA PRODUCCION EN LA AGRICULTURA
SEGUN PROVIENGAN DE MAYORES AREAS, MAS ALTOS NIVELES DE
PRODUCTIVIDAD O VARIACIONES EN EL USO DEL SUELO

	Año t-1	Año 5
1) Tierras dedicadas a agricultura (miles de hectáreas)	3.380	5.251
2) Valor agregado agrícola (millones de Am\$)	442	729
3) Aumento del Valor Agregado (millones de Am\$)	-	287
4) Índice de productividad de las tierras agrícolas	100,0	122,15
5) <u>Origen de los aumentos de producción</u>		
- Por aumento de área		244,7
- Por mayor productividad, de haberse mantenido el uso del suelo de t-1		<u>152,1</u>
- Aumentos de producción de haberse mantenido la estructura del uso del suelo del año t-1		396,8
- Variación de la producción por cambios en el uso del suelo		<u>-109,8</u>
		287,0

base t-1, suponiendo que la estructura de áreas de los respectivos cultivos se hayan mantenido constante. Para ello se calculó el valor agregado global aplicando sobre las áreas de t-1 los valores agregados por unidad de superficie proyectados para el año 5 para cada cultivo "i". El valor del índice lo da el cociente entre este valor y el Valor Agregado agrícola de t-1, multiplicado por 100.

Es decir que:

$$VA_{5/t-1} = \sum_{i=1}^n (AR_{t-1} \times \text{Valor agregado/ha para el año 5})_i$$

siendo "i" un cultivo individual, y considerando los "n" cultivos.

Índice de productividad para el año 5 (base t-1 = 100):

$$\frac{Va_{5/t-1}}{Va_{t-1}} \times 100$$

El aumento debido a una mayor productividad se determina calculando el incremento de productividad por hectárea y multiplicándolo por las hectáreas del año 5. El incremento de productividad por hectárea es el aumento sobre el valor agregado de t-1, estimado por el incremento del índice de productividad, dividido por la superficie agrícola de t-1.

O sea:

Índice de productividad para el año 5 - 100 = incremento del índice de productividad.

Con la información correspondiente se obtiene lo siguiente:

$$Va_{5/t-1} = 539,9 \quad VA_{t-1} = 442$$

$$\text{Ind. de prod. para el año 5: } \frac{539,9}{442} \times 100 = 122,15$$

$$\frac{(1,2215 - 1,00) \cdot 442}{3380} = 0,028965 \quad (\text{incremento de productividad por hectárea})$$

$$0,028965 \times 5.251 = 152,1 \quad (\text{aumento debido a mayor productividad})$$

- c) Finalmente, los cambios en el uso del suelo entre el año base y el año meta se reflejarán en incremento o reducción de la producción, según aumente o disminuya la importancia de los rubros generadores de mayor valor agregado por hectárea. Se determinan calculando la diferencia entre el aumento del valor agregado global del sector y el aumento de producción logrado si se hubiera mantenido el uso del suelo de t-1.

Este último, es la suma de los incrementos debidos a mayores áreas y a mayor productividad, aunque se puede calcular el valor agregado por hectárea que surge del incremento de productividad del año 5 (o sea $\frac{VA_{5/t-1}}{AR_{t-1}}$), y restándole el Valor Agregado de t-1. Al redondear decimales, puede no coincidir exactamente con el valor obtenido por la suma directa.

Es decir que:

$$\frac{VA_{5/t-1}}{VA_{t-1}} \times AR_5 = VA_5 \text{ (Valor Agregado en el año 5, de haberse mantenido el uso del suelo de t-1).}$$

$$\frac{539,9}{3.380} \times 5.251 = 838,8$$

$$838,8 - 442 = \underline{396,8} \text{ (aumento del Valor Agregado, de haberse mantenido el uso del suelo de t-1).}$$

Se comprueba por otra parte que: $244,7 + 152,1 = 396,8$

$$\text{Finalmente: } 287 - 396,8 = \underline{-109,8}$$

Es decir, que en este caso hubo una reducción del Valor Agregado agrícola debido a cambios en el uso del suelo.

En el Cuadro No. 1 se presenta la información elaborada, explicando los orígenes de los aumentos de producción de la agricultura.

Véase además gráfico No. 1.

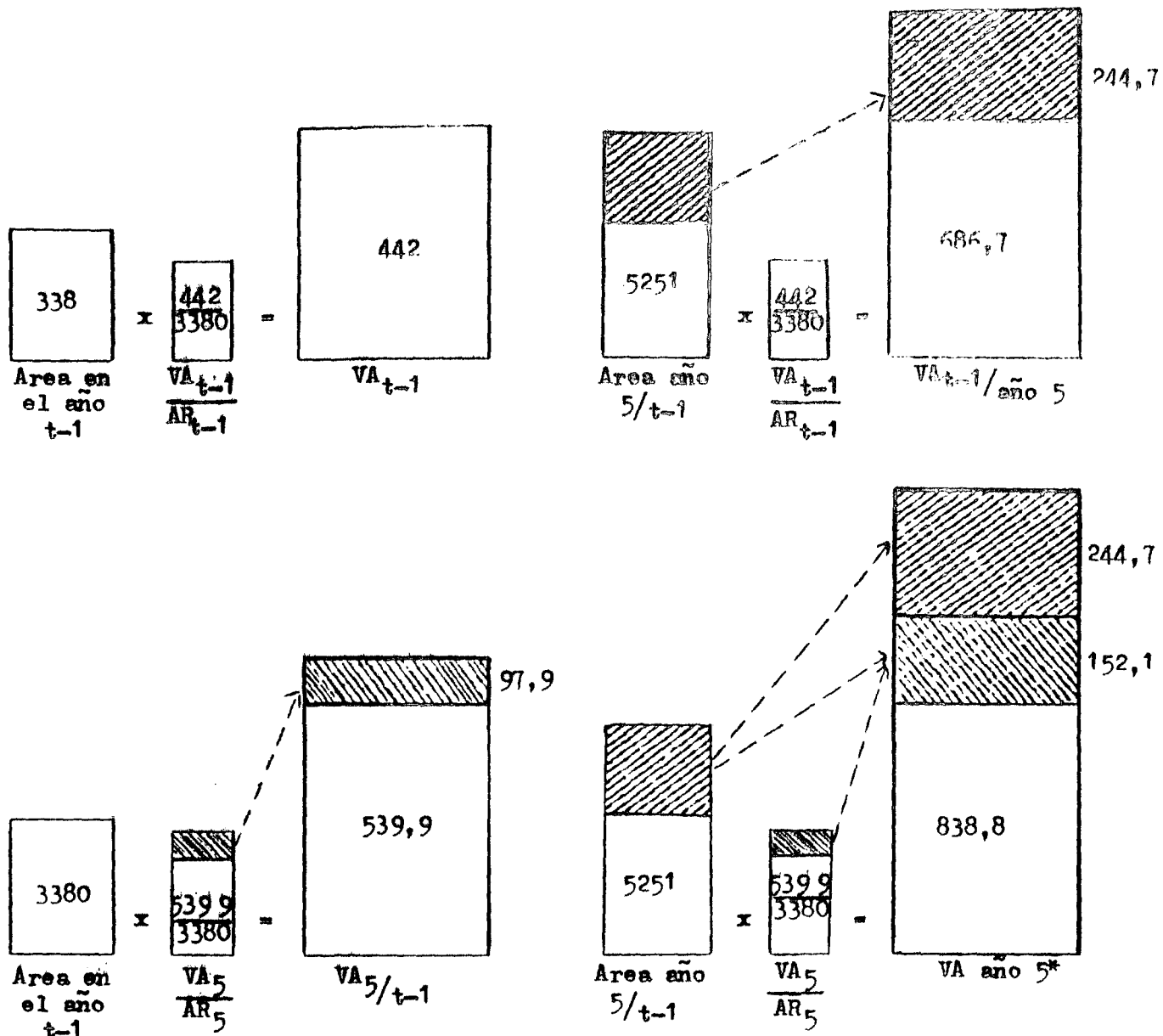
1.2 Datos

Véase Cuadro No. 2.

1.3 Enunciado

- a) En base a la información contenida en el Cuadro No. 2, determine el cambio de productividad de las tierras ganaderas, agrícola-ganaderas y totales entre el año base y el año meta calculando el índice de productividad correspondiente al año 5.
- b) En base a la información contenida en el Cuadro No. 2, calcule los orígenes de los aumentos de producción para las tierras dedicadas a ganadería, agricultura y ganadería en forma conjunta, y para todas las tierras productivas (incluido forestales).

ORIGEN DE LOS AUMENTOS DE PRODUCCION EN LA AGRICULTURA,
SIN CAMBIOS EN EL USO DEL SUELO



VA/AR = valor agregado agrícola/área agrícola

Area 5/t-1 = superficie agrícola del año 5, con la estructura del uso del suelo de t-1

VA_{t-1} = valor agregado global que se hubiera obtenido en t-1, con la superficie del año 5 sin cambiar estructura.

VA_{5/t-1} = Valor agregado global que se obtiene multiplicando área de t-1 y rendimientos del año 5 (marca el aumento de productividad).

VA año 5* = valor agregado global del año 5, en el supuesto de que se mantenga estructura de uso del suelo de t-1.

INFORMACION PARA CALCULAR INDICES DE PRODUCTIVIDAD Y

ORIGEN DE LOS AUMENTOS DE PRODUCCION

	AR _{t-1} (miles de ha)	VA _{t-1} (miles de Am\$)	AR ₅ (miles de ha)	VA ₅ (miles de Am\$)	VA _{5/t-1}
a) Ganadería 1/					
- Carne vacuna + leche	15.857	322.651	14.250	422.000	
- Carne ovina + lana	3.063	61.487	3.300	69.000	
- Total Ganadería	18.920	384.138			
b) Ganadería + Agricultura					
- Agricultura	3.380	442.000	5.250	729.000	539,9
- Ganadería	18.920		17.550		
- Total	22.300		22.800		
c) Total Productivo					
- Agricultura	3.380	442.000	5.250	729.000	539,9
- Ganadería	18.920		17.550		
- Forestal	2.500	25.000	2.000	27.000	
- Total	24.800		24.800		

1/ No está incluido aves e cerdos, al no tener asignados estos rubros en los empesifices.

2. Solución

- a) Véase Cuadro No. 3.
- b) Véase Cuadro No. 4.

2.1 Resolución numérica

A. Índice de Productividad Ganadería:

$$\frac{555.584}{384.138} \times 100 = 144,63$$

Índice de Productividad Ganadería y Agricultura:

$$\frac{1.095.500}{826.000} \times 100 = 132,63$$

Índice de Productividad Total:

$$\frac{1.129.250}{851.000} \times 100 = 132,69$$

B. Ganadería

$$a) AR_5 \frac{VA_{t-1}}{AR_{t-1}} - VA_{t-1} = (17.550 \times \frac{384,0}{18920}) - 384 = -27,8$$

$$b) \frac{(0,446) 384}{18920} \times 17.550 = 158,9$$

$$c) \frac{VA_{5/t-1}}{AR_{t-1}} \times AR_5 = VA_5 = \frac{555,3}{18920} \times 17.550 = 515,1$$

$$515,1 - 384 = 131,1$$

C. Ganadería y Agricultura

$$a) (22.800 \times \frac{826}{22.300}) - 826 = 18,5$$

$$b) \frac{(0,326) 826}{22.300} \times 22.800 = 275,3$$

$$c) \frac{(1,326) 826}{22.300} \times 22.300 = 1.119,8$$

$$1.119,8 - 826 = 293,8$$

Total

$$b) \frac{(0,327) 851}{21.800} \times 21.800 = 278,3$$

CAMBIO DE LA PRODUCTIVIDAD DE LAS TIERRAS

	AR _{t-1} (miles de ha.)	VA _{t-1} (miles de Am\$)	AR ₅ (miles de ha.)	VA ₅ (miles de Am\$)	VA ₅ /AR ₅	VA _{5/t-1} (miles de Am\$)
a) Ganadería						
Carne vacuna + leche	15.857	322.651	14.250	442.000	31,0	491.567
Carne ovina + lana	3.063	61.487	3.300	69.000	20,9	64.017
Total Ganadería	18.920	384.138	17.550	511.000		555.584
b) Ganadería y Agricultura						
Agricultura	3.380	442.000	5.250	729.000	-	539.900
Ganadería	18.920	384.000	17.550	511.000	-	555.600
Total	22.300	826.000	22.800	1.240.000		1.095.500
c) Total Productivo						
Agricultura	3.380	442.000	5.250	729.000	-	539.900
Ganadería	18.920	384.000	17.550	511.000	-	555.600
Forestal	2.500	25.000	2.000	17.000	13,5	33.750
Total	24.800	851.000	24.800	1.267.000		1.129.250

ORIGENES DE LOS AUMENTOS DE PRODUCCION

	Ganadería		Agricultura + Ganadería		Total Tierras productivas	
	Año t-1	Año 5	Año t-1	Año 5	Año t-1	Año 5
1) Superficie ocupada (miles de hectáreas)	18.920	17.550	22.300	22.800	24.300	24.300
2) Valor agregado (miles de Am\$)	384	551	826	1.240	351	1.267
3) Acumulado del V.A. (miles de Am\$)	-	127	-	414	-	416
4) Índice de productividad	100,0	144,6	100,0	132,6	100,0	132,7
5) <u>Origen de los aumentos de producción</u> (miles de Am\$)						
a) por aumento de área		-27,8		18,5		-
b) por mayor productividad de haberse mantenido la estructura del uso del suelo de t-1		158,9		275,3		278,3
Aumentos de producción de haberse mantenido el uso del suelo		131,1		293,9		278,3
c) Variación de la producción por cambios en el uso del suelo		-4,1		120,2		137,7

100

2014

2014

111

111

DOCUMENTO 2
ELEMENTOS DE TECNICAS CUANTITATIVAS */

*/ Elaborado por el consultor señor Guido Miranda para uso en las actividades docentes del PROCADES.

C O N T E N I D O

	<u>Página</u>
- Presentación	1
1. Funciones y gráficos	2
2. Estadística descriptiva	12
3. Análisis de series de tiempo	34
4. Números índices	72
5. Matemáticas financieras	90
6. Iniciación a los métodos de evaluación de proyectos	104
7. Análisis de regresión y correlación simple	114
8. Matrices y determinantes	124
9. Programación lineal	149
- Bibliografía	162
APENDICE I	163
APENDICE II	164
APENDICE III	173

1
2
3
4

5
6
7

PRESENTACION

•
•
•

•
•
•

PRESENTACION

Estos Elementos de Técnicas Cuantitativas, están dirigidos a una masa heterogénea de estudiantes, que en un momento dado tienen una preocupación común: Capacitarse en planificación, programación, proyectos agrícolas y desarrollo rural.

La dirección de PROCADES sentía desde hace tiempo la necesidad de contar con un texto que proporcionara en forma clara y sencilla un conocimiento de las diversas técnicas, englobadas bajo el epígrafe de Técnicas Cuantitativas, como un complemento de las materias impartidas en los diferentes cursos y aportar al estudiante una base sobre la cual pueda apoyar un estudio más amplio de un tema particular.

Se mantuvo un prudente nivel de rigurosidad, para que las explicaciones entregadas fueran comprensibles por alumnos con diferente formación profesional y/o universitaria y dar una enseñanza compatible con el espíritu de estos cursos, a la vez que proporcionar instrumental adecuado para la investigación agropecuaria

Este texto que se somete a la consideración de las promociones venideras, servirá para calibrar el contenido de las materias tratadas, como así también para ajustar y graduar aspectos teóricos en lo referente al cómo y al por qué funcionan algunos conceptos empleados, principalmente, matemáticos, sin menoscabar la rigurosidad de los mismos.

1
2
3

4
5

FUNCIONES Y GRAFICOS

FUNCIONES Y GRAFICOS

1. Funciones

En la práctica el valor de una cantidad puede depender del valor de otra. Así, por ejemplo, la demanda de carne puede depender de su precio actual de mercado; la cantidad de polución en el aire, en el área metropolitana, puede depender del número de vehículos en la calle; el valor de una botella de vino dependerá de si es varietal o mezcla, o bien del año de producción; el precio de los huevos dependerá de su tamaño y/o color, etc. Tales relaciones pueden, frecuentemente, ser representadas matemáticamente como funciones. En general, una variable Y se dice que es función de otra X , cuando entre ambas existe una correspondencia tal que a cada valor de la X corresponde un valor definido de Y , y sólo uno. Se expresa simbólicamente de la forma

$$y = f(x)$$

el símbolo $f(x)$ se lee " f de x ". A X se le llama variable independiente. Como Y resulta de los valores que se atribuyan a X se le denomina a aquella variable: dependiente.

El concepto de variable se puede extender a dos o más variables, como en el siguiente ejemplo:

$$Q_d = f(P, Y, U)$$

en que

Q_d	=	cantidad de leche demandada
P	=	precio de la leche
Y	=	ingreso de los consumidores de leche
U	=	variable estocástica (1)

1) Las variables estocásticas o aleatorias son variables no observables es decir, no existe una serie de observaciones acerca de estas variables que se puedan usar para fines de estimación. Su introducción caracteriza a los modelos estocásticos o probabilísticos, por oposición a los modelos deterministas.

2. Representación gráfica

La representación gráfica de los datos contenidos en una tabla estadística tiene como finalidad ofrecer una visión de conjunto del fenómeno sometido a investigación. Es por ello que estas representaciones constituyen un medio eficaz para el análisis de las estadísticas, ya que las magnitudes y las regularidades se aprecian y recuerdan con más facilidad cuando se examinan gráficamente.

Dentro de los sistemas de representación, el más usual es el de las coordenadas rectangulares, el cual consta de un par de ejes (caso bidimensional) uno horizontal y otro vertical, que se cortan en un ángulo recto (90°).

El eje horizontal se denomina eje de las abscisas y el eje vertical, eje de ordenadas. Para designar a ambos se utiliza la expresión ejes de coordenadas; el punto de intersección es el origen.

En la praxis, generalmente, el eje de la ordenada se designa por la letra Y, representando a la variable dependiente; el eje de la abscisa se designa por la letra X y representa a la variable independiente.

Cuando intervienen 2 variables y una de ellas es el tiempo, éste se considera como variable independiente y, por tanto, se marca en el eje X.

Los ejes al cortarse perpendicularmente entre sí, delimitan 4 espacios llamados cuadrantes, los cuales se enumeran de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo (fig. 1)

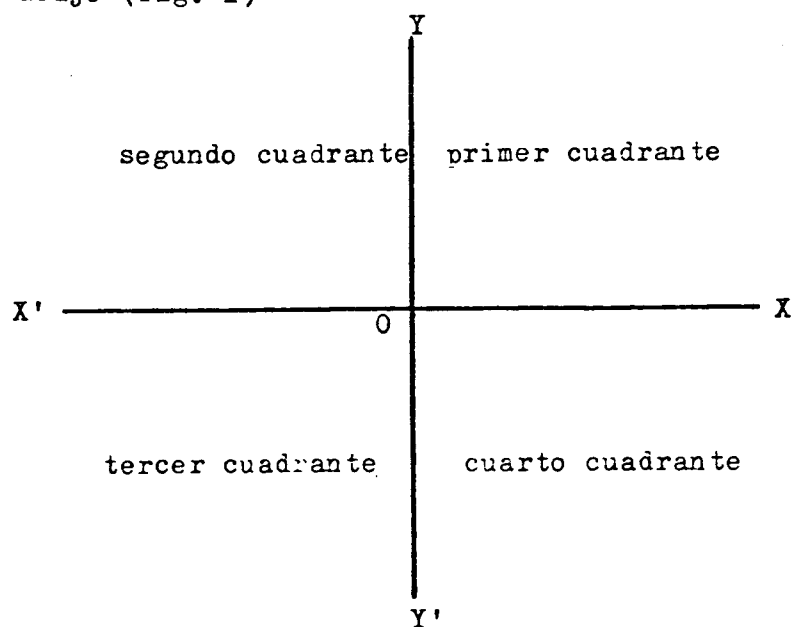


Fig. 1

Para la fijación de los vértices de una gráfica se usa casi sin excepción el primer cuadrante y raras veces los 3 restantes.

Al bajar las perpendiculares desde un punto cualquiera P a los ejes X e Y, los valores de estas variables en los puntos donde las perpendiculares encuentran a estos ejes se llaman coordenadas de P y se representan por (X,Y). Por convención, siempre el primer valor o sea X en este caso, corresponderá a la abscisa: en la práctica estadística, a la variable independiente; por tanto, el segundo valor será el de la ordenada o variable dependiente

Dadas las coordenadas de un punto, se puede localizar y señalar el punto en el plano. Por ejemplo, los puntos con coordenadas (2; 3), (-4; -3), (-2,3; 4,5) y (3,5; -4,0) son representados por P, Q, R y S en la fig.2

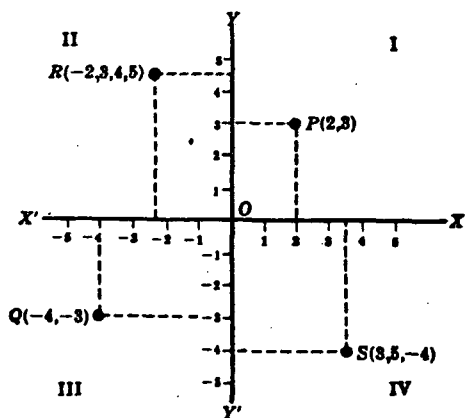


Fig. 2

Para el trazado de una gráfica (poligonal) se determina , en primer lugar, la escala correspondiente al eje de las ordenadas y después la escala perteneciente al eje de las abscisas; ambas escalas pueden o no iniciarse en el origen.

Fijar las escalas convenientes en el espacio disponible es importante, pero también lo es determinar la magnitud total de ella, aún a costa de no ocupar totalmente el espacio disponible. Esta situación se visualiza a través de las representaciones gráficas de la siguiente tabla de valores:

X	Y
1	4
2	1
3	2
4	5
5	4
6	3
7	3
8	9
9	10
10	6

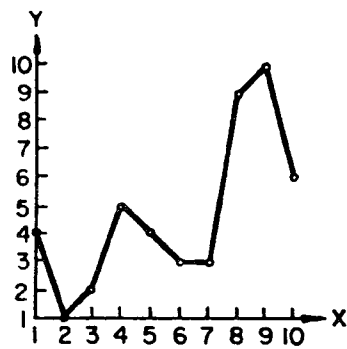


Fig. 3

En la figura 3 el aspecto es normal. La magnitud total de las escalas ocuparon el mayor espacio disponible y por tal razón la fluctuación de los puntos contenidos es normal

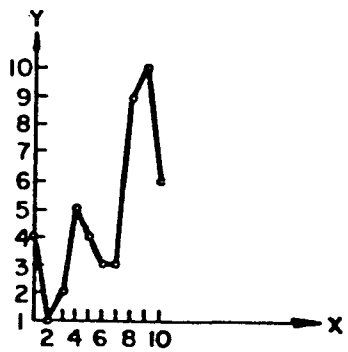
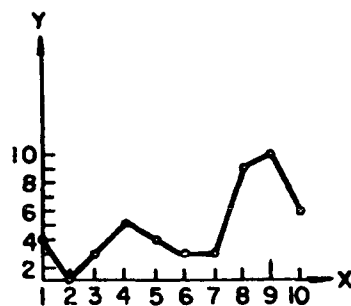


Fig. 4

En la figura 4, se redujo al máximo el módulo de la escala de la abscisa, haciendo resaltar más las fluctuaciones del fenómeno.

Fig. 5



En la figura 5, se suavizaron las fluctuaciones de los vértices de la poligonal, reduciendo al máximo la escala de la ordenada.

En el Cuadro 1, se muestra la producción de trigo y maíz en el país X, para el período 1970-1980, ambos inclusive. Se agregó una columna X para simplificar la variable independiente (codificación del tiempo) y en lugar de trabajar, por ejemplo, con el valor 1974 de la variable, se hace con su valor codificado 4. En este ejemplo, hay coincidencia entre el dígito de las unidades de cada año y el correspondiente de la columna X. La serie pudo haberse iniciado, por ejemplo, en 1973 como primer año de estudio, entonces a este año habría que haberle asignado el valor 0 en la columna de las X, a 1974 el valor 1 y así sucesivamente. El objeto de asignar el valor 0 es el de simplificar algunas operaciones e iniciar el gráfico en el origen. En la actualidad, con el empleo del computador, tales criterios tienen una importancia menor.

Ejercicio

Representar gráficamente los datos del Cuadro 1 (ver pág. siguiente), utilizando:

- i) un gráfico de línea (poligonal);
- ii) un gráfico de barras;
- iii) expresar el número de toneladas anuales de trigo y de maíz como porcentaje de la producción anual;
- iv) graficar los porcentajes de iii);
- v) un gráfico de líneas representar la producción de trigo.

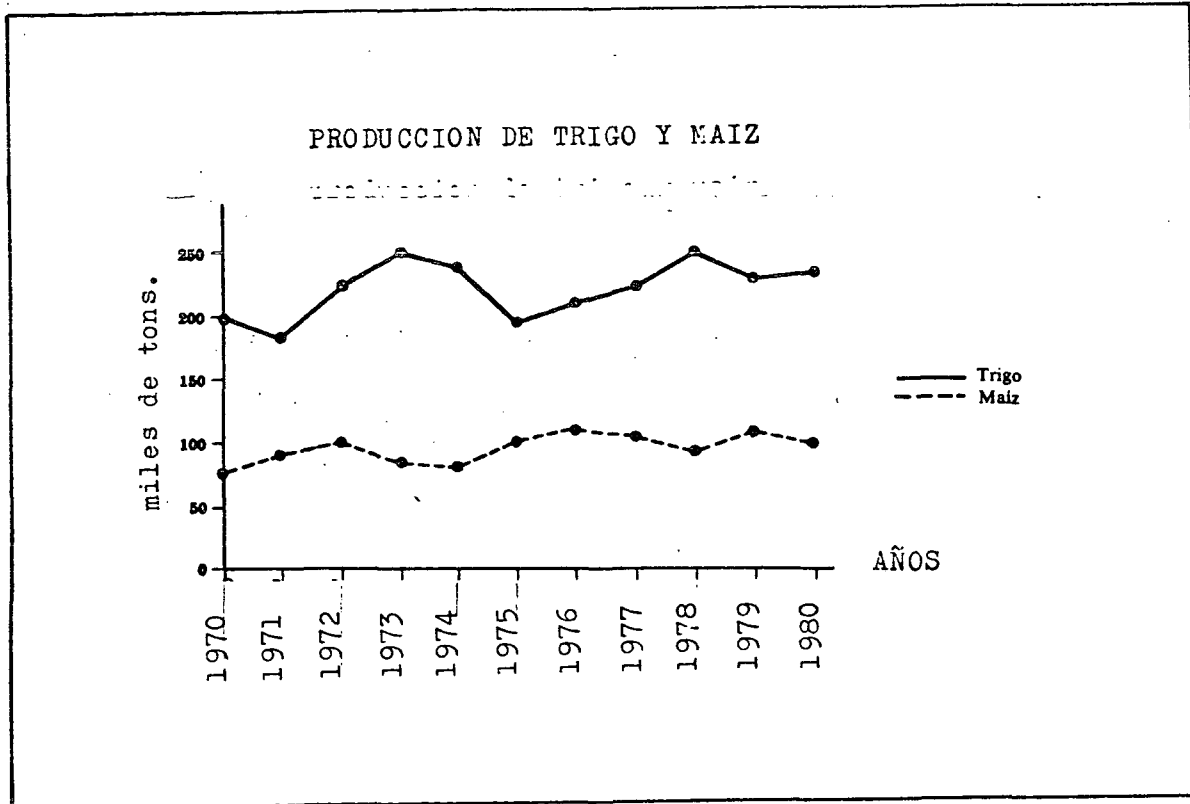
Cuadro 1

PRODUCCION DE TRIGO Y MAIZ EN EL PAIS X
(miles de toneladas)

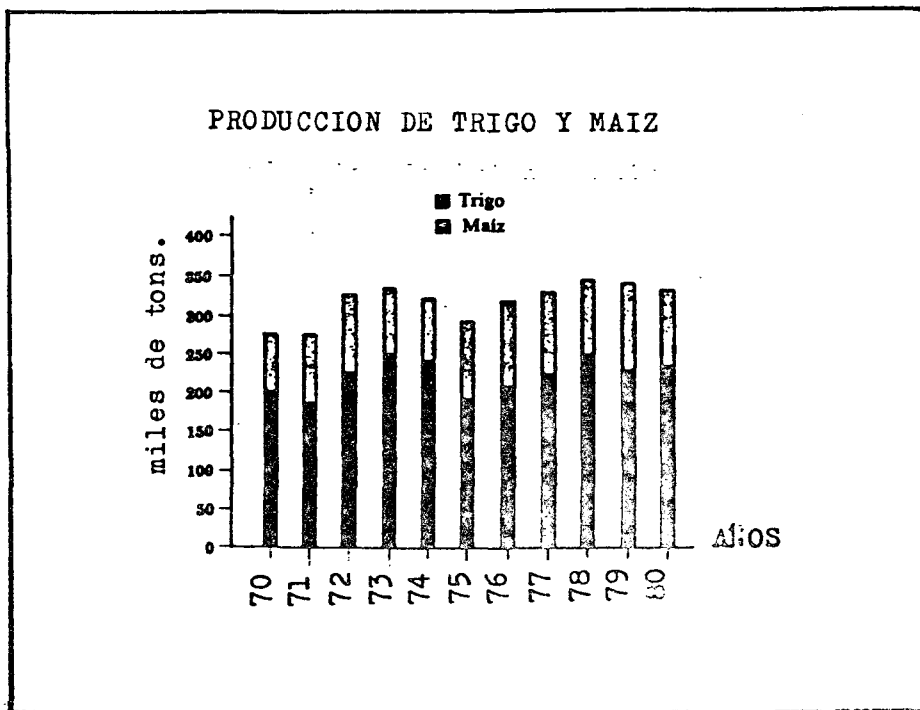
AÑOS	X	TRIGO	MAIZ
1970	0	200	75
1971	1	185	90
1972	2	225	100
1973	3	250	85
1974	4	240	80
1975	5	195	100
1976	6	210	110
1977	7	225	105
1978	8	250	95
1979	9	230	110
1980	10	235	100

FUENTE: Manual de estadísticas agropecuarias de X,
INEC de X, 1983.

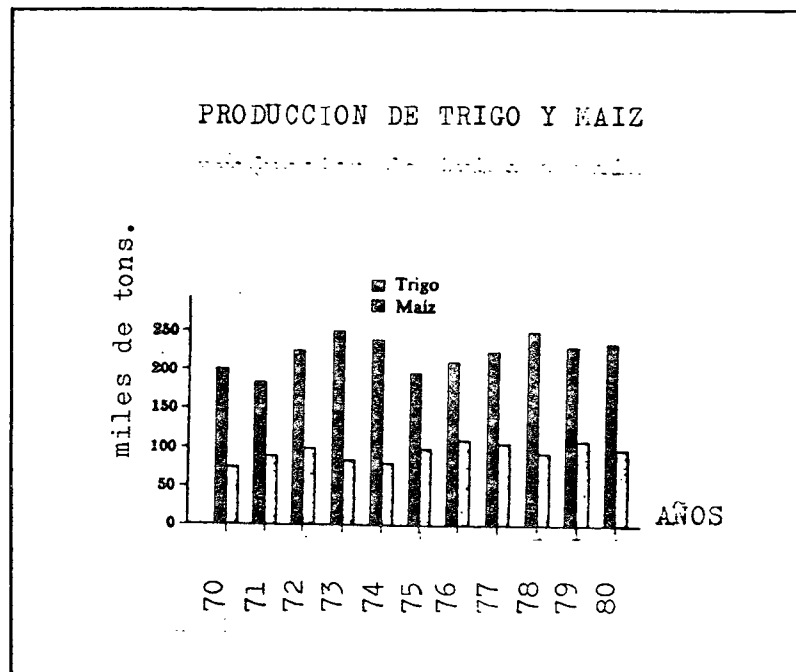
i) Representación gráfica por medio de líneas o poligonales



ii) Representación gráfica por medio de barras (un criterio)



ii) Representacion gráfica por medio de barras (otro criterio))

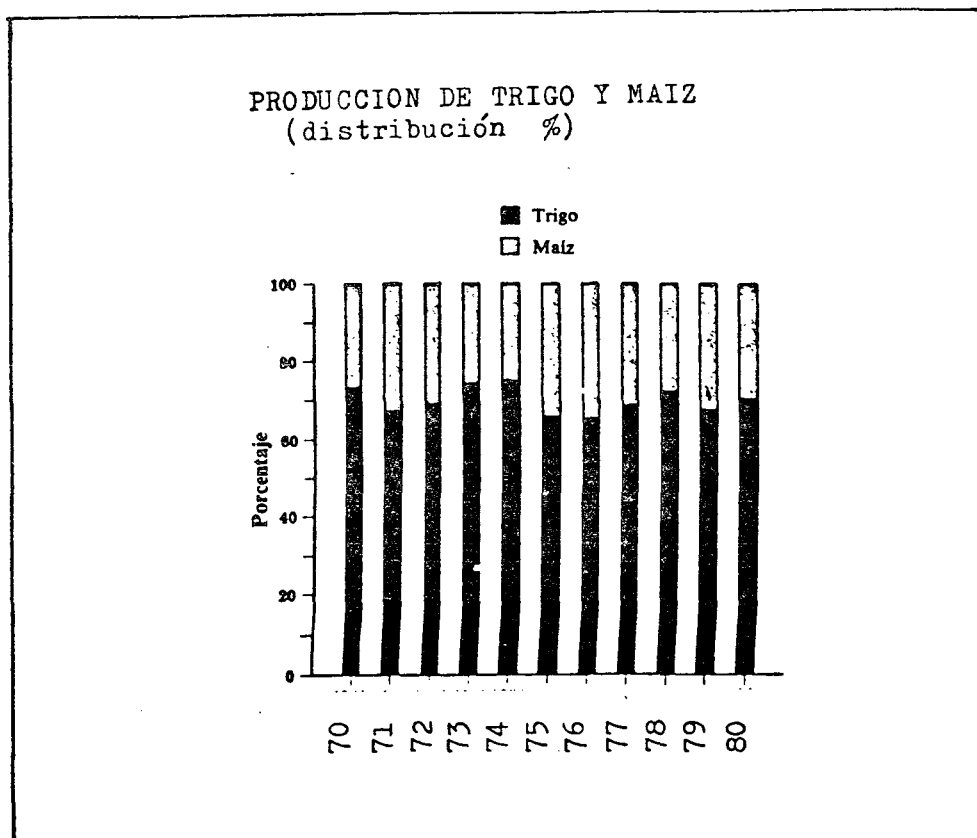


iii) Para 1970, porcentaje de trigo: $\frac{200}{200 + 75} = 0,7273$ 72,7%

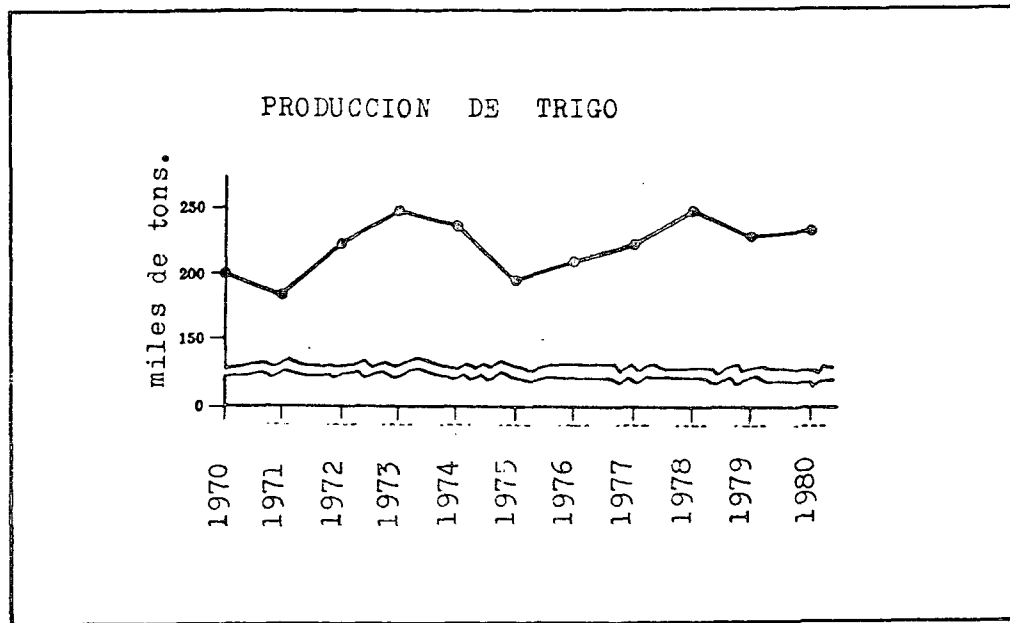
Para 1970, porcentaje de maíz: $\frac{75}{200 + 75} = 0,273$ 27,3%

AÑOS	% DE TRIGO	% DE MAIZ
1970	72,7	27,3
1971	67,3	32,7
1972	69,2	30,8
1973	74,6	25,4
1974	75,0	25,0
1975	66,1	33,9
1976	65,6	34,4
1977	68,2	31,8
1978	72,5	27,5
1979	67,6	32,4
1980	70,1	29,9

iv) Representación gráfica de la distribución porcentual por medio de barras:



v) Representación gráfica de la producción de trigo:



ESTADISTICA DESCRIPTIVA

ESTADISTICA DESCRIPTIVA

1. Introducción

El objetivo de la estadística moderna es hacer inferencias acerca de un conjunto de datos, llamado población, con base en la información contenida en una muestra. Para formular las inferencias es preciso describir un conjunto de datos, sean provenientes de la población o una muestra. Esta descripción consiste en la recopilación, clasificación, tabulación y representación gráfica de los datos y en la determinación de parámetros que proporcionen en forma resumida una información cuantitativa del fenómeno estudiado para obtener conclusiones lógicas, constituyéndose en la base de la estadística descriptiva.

En el muestreo se distingue entre estadígrafo, el valor de la característica determinado en la muestra y parámetro, el correspondiente valor en la población que se trata de estimar. Por ejemplo, el peso medio de una muestra de 25 pollos de 45 días resultó ser de 970 grs. (estadígrafo), el peso medio de otra segunda muestra de igual tamaño y de 45 días alcanzó a 966 grs. (estadígrafo), no obstante provenir de una población de pollos de 45 días de peso medio 954 grs. (parámetro).

En la estadística descriptiva tradicionalmente se han estudiado 4 tipos de estadígrafos, a saber:

- estadígrafos de posición o tendencia central;
- estadígrafos de dispersión;
- estadígrafos de deformación; y,
- estadígrafos de apuntamiento.

Para cada uno de ellos existe una gran cantidad de fórmulas y métodos para su determinación, sin embargo, con el advenimiento de las computadoras gran parte de ellos han resultado obsoletos.

Dada la naturaleza de estos apuntes, se omitirán muchas tradicionales técnicas de cálculo. Estas omisiones se hacen necesarias debido a la restricción de tiempo que se tiene en los cursos, a la heterogeneidad del alumnado; pero la razón fundamental se debe a que a menudo distraen al estudiante y oscurecen la materia

Para explicar en forma resumida los diversos pasos que se precisan para hacer el análisis de una masa de datos, se supondrá que:

se realizó una encuesta en 36 mercados y ferias del área urbana en la ciudad A, durante la tercera semana de agosto de 1985, para investigar el precio al consumidor de diversos productos hortícolas y frutícolas. Para los efectos de este ejemplo, se analizarán los precios por kg. de tomate. Los resultados se señalan en el Cuadro 2, que sigue:

CUADRO 2

PRECIOS DEL TOMATE POR KILOGRAMOS (1)
(en pesos)

5,4	6,4	5,8	4,4	7,0	3,6	4,7
3,5	6,4	1,4	4,0	3,0	4,5	3,8
5,0	1,8	6,2	3,2	3,9	1,8	5,7
2,3	3,2	1,3	2,8	6,3	6,0	4,8
3,8	3,6	7,0	6,4	3,6	5,1	6,5
4,2						

(1) De la encuesta en la ciudad A, levantada en agosto/85.
SOCOAGRO.

En el Cuadro 3, se muestra una de las posibles formas de resumir la información anterior para fines de análisis:

Cuadro 3

PRECIOS DEL TOMATE POR KILOGRAMOS
(en pesos)

Clase	Intervalos	Marcas de clase	Frecuencias	
			Absolutas	Relativas
	$y'_{i-1} - y'_i$	y_i	n_i	h_i
1	1,0 2,0	1,5	4	0,11
2	2,0 3,0	2,5	3	0,08
3	3,0 4,0	3,5	10	0,28
4	4,0 5,0	4,5	6	0,17
5	5,0 6,0	5,5	5	0,14
6	6,0 7,0	6,5	8	0,22
			36	1,00

FUENTE: Cuadro 2

La información de la encuesta se ordenó en el cuadro anterior, denominado "Distribución de frecuencias". Este ordenamiento se hizo en 6 líneas denominadas clases; para ello se determinó el recorrido de la variable o campo de variación, que corresponde a la diferencia entre el mayor y el menor valor observado. En este ejemplo el mayor valor de la variable es 7,0 y el menor 1,3; por tanto, el rango es 5,7. Generalmente, por razones de comodidad se modifica el recorrido de la variable, de modo que sea susceptible de ser subdividido en m clases, cuyos límites y amplitud sean cómodos para trabajar. Se observa en el Cuadro 3 que la amplitud es igual a 1 a lo largo de toda la distribución. En algunas oportunidades, por razones de análisis, es aconsejable trabajar con intervalos variables, como ocurre, por ejemplo, en las distribuciones de predios agrícolas.

La clase o intervalo i -ésimo queda determinada por un límite inferior (y'_{i-1}) y un límite superior (y'_i). Los intervalos quedan caracterizados por las marcas de clase y_i que corresponden a los puntos medios de los límites inferior y superior, respectivos.

Finalmente, quedan por explicar las 2 últimas columnas del Cuadro 3. Una de ellas es la que corresponde a las frecuencias absolutas y que se simbolizó por n_i , representando el número de veces que se repite la variable. Así por ejemplo, en la 6a. clase, el valor de n_6 es 8, significando que en 8 negocios (ferias y/o mercados) el precio del kg. de tomates fluctuó entre 6.0 y 7.0 pesos. En la misma línea, pero en la columna "marca de clase" el precio se transforma en un valor puntual: 6,5 pesos, que corresponde a la semisuma del intervalo (promedio).

Este valor puntual o referencial de la variable no corresponde a la realidad, por cuanto si se examinan los valores originales de la investigación se observa un solo valor igual a 6,5 (incluso, pudo no haberse registrado ninguno). Este es el precio que se paga al resumir una masa de datos en una "distribución de frecuencias"; sin embargo, esta situación no es preocupante y no invalida las conclusiones que se obtienen

La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al número de elementos que componen la muestra:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = n$$

En el caso del Cuadro 3, se tiene:

$$n_1 = 4; \quad n_2 = 3; \quad n_3 = 10; \quad n_4 = 6; \quad n_5 = 5; \quad n_6 = 8$$

$$4 + 3 + 10 + 6 + 5 + 8 = n = 36$$

Además del número de veces que se repite cada valor de la variable, interesa saber su frecuencia relativa o porcentual, la cual se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta correspondiente por la frecuencia total (tamaño de la muestra). Esto es:

$$h_i = \frac{n_i}{n}$$

en el Cuadro 3 $h_2 = 0.08$, equivalente al 8%. En otras palabras, en el 8% de los negocios investigados, el precio del tomate fluctuó entre 2,0 y 3,0 pesos.

2. La sumatoria

Una sucesión de términos tales como $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ tiene por suma

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Simbólicamente esta suma se indica:

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

Σ es la letra griega mayúscula sigma. La expresión anterior se lee sumatoria de x sub i desde i igual 1 hasta i igual n. En la práctica, generalmente, se suprimen los límites de la sumatoria, a menos que, por razones de claridad sea indispensable colocarlos. La i representa el índice de la sumatoria pudiendo tener cualquier valor natural desde 1 hasta n.

- Ejemplos

$$1) \sum_{i=1}^5 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$2) ax_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 = a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = a \sum_{i=1}^4 x_i$$

$$3) \sum_{i=1}^m 1 = n$$

$$4) \sum_{i=1}^m a = an$$

$$5) \text{ Demostrar que } \sum (x - a)(y - b) = \sum xy + a \sum y + b \sum x + nab$$

6) Expresar mediante la notación sumatoria

$$(x_1 - 3)^5 + (x_2 - 3)^5 + (x_3 - 3)^5 = \sum_{i=1}^3 (x_i - 3)^5$$

3. Estadígrafos de posición

Los estadígrafos de posición o promedios son números que caracterizan una distribución de frecuencias, señalando un valor central de la misma. Este valor está expresado en las mismas unidades de la variable. Si la variable está expresada en pesos el promedio estará expresado en pesos; si está en litros, el promedio lo estará en litros, etc. Además, este valor tiene que estar comprendido dentro del recorrido de la variable; por ejemplo, el precio del kg. de tomates fluctuó entre \$ 1,30 y \$ 7,0, entonces el respectivo promedio deberá estar comprendido entre estos dos valores extremos, de no ser así hay un error de cálculo, o bien, se introdujo una información errada.

Existen diversos promedios entre los cuales destacan la media aritmética, la moda y la mediana.

3.1 Media aritmética

Designando por $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ los n términos de un conjunto de datos, la media aritmética entre ellos se designa por \bar{X} , que se lee

"X barra" (equis barra) y se define como el cuociente entre la suma de todos los valores de la variable y el número de observaciones. Existen diversas fórmulas para el cómputo de la media, según se trate de datos originales o datos agrupados. En la actualidad sólo interesa conocer las fórmulas básicas para la media poblacional o la media muestral. Los siguientes símbolos serán los que describan las fórmulas pertinentes:

μ = media poblacional; \bar{X} = media muestral; N = tamaño de la población
 n = tamaño de la muestra.

Media poblacional para datos originales:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} \quad (1)$$

Media poblacional para datos agrupados:

$$\mu = \frac{\sum y_i n_i}{N} \quad (2)$$

Media muestral para datos originales:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (1')$$

Media muestral para datos agrupados:

$$\bar{X} = \frac{\sum y_i n_i}{n} \quad (2')$$

Problema 1.

Calcular la media aritmética de los datos del Cuadro 2.

Solución:

Los datos del Cuadro 2 son:

5,4	6,4	5,8	4,4	7,0	3,6	4,7
3,5	6,4	1,4	4,0	3,0	4,5	3,8
5,0	1,8	6,2	3,2	3,9	1,8	5,7
2,3	3,2	1,3	2,8	6,3	6,0	4,8
3,8	3,6	7,0	6,4	3,6	5,1	6,5
4,2						

según la fórmula (1'), se deben sumar todos los valores de la variable original y la suma dividirse por el número de observaciones. En este caso se tienen 36 observaciones y la suma de esos 36 valores es: 158,4, por tanto:

$$\bar{x} = \frac{158,4}{36} = 4,4$$

La media aritmética de los datos originales es 4,4; como los valores están expresados en pesos, entonces el valor medio del kg. de tomates al consumidor en la ciudad A, en su área metropolitana, es de \$ 4,40.

Problema 2.

Calcular la media aritmética de la muestra de observaciones del Cuadro 3.

Solución A:

Como los datos del Cuadro 3 corresponden a una muestra de datos agrupados, se debe aplicar la fórmula (2') y tabular los datos para su cómputo de la siguiente manera:

Cómputo de \bar{X} (form (2'))

y_i	n_i	$y_i n_i$
1,5	4	6,0
2,5	3	7,5
3,5	10	35,0
4,5	6	27,0
5,5	5	27,5
6,5	8	52,0
—	36	155,0

$$\bar{X} = \frac{155}{36} = 4,31$$

por tanto, la media aritmética calculada a partir de los datos agrupados resultó ser \$ 4,31, diferente al valor \$ 4,4 obtenido de los datos originales. Esta diferencia que no es preocupante, se debe a las razones que se pasan a explicar. El método se basa en la suposición de que el punto medio o marca de clase y_i es aproximadamente igual a la media aritmética de las medidas contenidas en el intervalo. Por supuesto, la bondad de la aproximación de la media obtenida por este método depende directamente del grado en que los puntos medios de las clases representan adecuadamente al promedio de observaciones en la clase. Corrientemente, las aproximaciones que se obtienen son adecuadas, principalmente cuando las frecuencias de clase son suficientemente grandes en relación con la longitud del intervalo.

Solución B:

A veces por razones de información se prefiere utilizar las frecuencias relativas, en lugar de las absolutas. En ese caso la fórmula (2'), se transforma en la siguiente:

$$\bar{X} = y_i h_i \quad (3')$$

en consecuencia la tabla de cálculo se transforma en la siguiente:

Cómputo de \bar{X} (form. 3')

y_i	h_i	$y_i h_i$
1,5	0,11	0,165
2,5	0,08	0,200
3,5	0,28	0,980
4,5	0,17	0,765
5,5	0,14	0,770
6,5	0,22	1,430
—	1,00	4,310

Por simple inspección de la fórmula (3') se concluye que la media aritmética está dada por la sumatoria de la columna $y_i h_i$, esto es:

$$\bar{X} = 4,31$$

resultado, obviamente, igual al obtenido con la aplicación de la fórmula (2').

3.2 Mediana

En un conjunto de n observaciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ se define como la observación que cae en el centro cuando las observaciones se ordenan en orden creciente. Si el número de observaciones es par, se escoge como valor mediano al promedio de las dos observaciones centrales.

Problema 3.

Dadas las siguientes observaciones : 18; 4; 14; 22; 28
calcular la mediana de las mismas.

Solución:

Ordenándolas de acuerdo a su magnitud, se tiene:

4; 14; 18; 22; 28

en consecuencia el valor mediano es 18, por corresponder al valor central.

Al igual que en el caso de la media aritmética, el valor mediano está expresado en las mismas unidades de la variable.

Problema 4.

Considere las siguientes observaciones muestrales:

18; 4; 14; 22; 28; 12

Determinar la mediana de las mismas.

Solución:

Para el cálculo de la Me es preciso arreglar la información en orden de magnitud (creciente o decreciente). Para este ejemplo el arreglo es:

4; 12; 14; 18; 22; 28

Como el número de observaciones es par, se deberá calcular el promedio de los dos valores centrales, esto es, entre 14 y 18. En consecuencia, la Me es 16.

La regla para localizar el valor mediano cuando el número de observaciones es par es un tanto arbitraria. La me se calcula ya sea con fines únicamente descriptivos o bien como un estimador de la mediana poblacional. Con fines descriptivos se puede ser tan arbitrario como se desee. Si se pasa a estimar la Me de la población, la bondad de la regla para calcularla depende de si tiende a producir una estimación buena o mala de la mediana poblacional.

En los párrafos anteriores sólo se hizo mención a la mediana para datos originales, sin embargo, también es posible determinarla para datos agrupados, para lo cual se recurre a una fórmula derivada de un proceso de interpolación lineal, que se ha omitido por razones de brevedad y claridad.

Problema 5.

Calcular la Me de los datos muestrales del Cuadro 2.

Solución:

Conforme a la definición de Me y según se procedió en los dos problemas anteriores, es preciso ordenar los datos del Cuadro 2 por orden de magnitud, esto es de menor a mayor (puede ser a la inversa):

CUADRO 4

ORDENACION DE LOS DATOS DEL CUADRO 2

1,3	1,4	1,8	1,8	2,3	2,4	2,8	3,0	3,2
3,2	3,5	3,6	3,6	3,8	3,8	3,9	4,0	<u>4,2</u>
<u>4,4</u>	4,5	4,7	4,8	5,0	5,1	5,4	5,7	5,8
6,0	6,2	6,3	6,4	6,4	6,4	6,5	7,0	7,0

FUENTE: Cuadro 2

Los datos ordenados que aparecen en el Cuadro 4, corresponden a 36 observaciones ($n = 36$) esto es, un número par; en consecuencia, los dos valores centrales de la variable son los que ocupan los lugares 18 y 19 que aparecen subrayados en el cuadro y corresponden a los valores 4,2 y 4,4, por tanto, el valor mediano será:

$$Me = \frac{4,2 + 4,4}{2} = 4,3$$

Luego, la mediana de los datos del Cuadro 2 es \$ 4,3, valor prácticamente igual al obtenido para el cómputo de la media aritmética.

En la actualidad existen "programas utilitarios" que permiten resolver automáticamente problemas como el ordenamiento realizado en el Cuadro 4. Imagínese el lector lo tedioso y engorroso que es realizar manualmente el ordenamiento de 100 o más observaciones y cada una de ellas formada por 2, 3, 4 o más dígitos.

Como ya se dijo, el valor medio que divide al conjunto de datos en dos partes iguales es la Me. Por extensión, de esta idea se puede subdividir una distribución de mediciones de acuerdo con la proporción de frecuencias observadas. Mientras la Me divide una distribución en dos mitades, los cuartiles (Q_1, Q_2, Q_3) la dividen en 4 cuartos, los deciles la dividen en 10 decimos y los puntos percentiles la dividen en 100 partes iguales.

4. Estadígrafos de dispersión.

Una vez localizado el centro de la distribución de un conjunto de datos, el paso siguiente es buscar una medida de la variabilidad o dispersión que revele la mayor o menor concentración de los datos en torno a un valor central. Entre las medidas más conocidas están: el recorrido, la desviación media, la desviación mediana, el coeficiente de variación, la varianza, la raíz cuadrada de la varianza conocida como la desviación estándar o desviación típica, etc.

4.1 Varianza poblacional.

La varianza poblacional de N observaciones, se define como el promedio del cuadrado de las desviaciones con respecto a su media poblacional (μ). La varianza poblacional se denota por σ^2 . Ver fórmulas (4) y (5) para datos originales y agrupados, respectivamente.

4.2 Varianza muestral.

La varianza muestral de " n " observaciones, se define como la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones respecto de su media muestral (\bar{x}), dividida esta suma entre $(n-1)$. La varianza muestral se denota por s^2 . Ver fórmulas (6) y (7) para datos originales y datos agrupados, respectivamente.

4.3 Desviación estándar.

La desviación estándar de un conjunto de n observaciones es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza (poblacional o muestral) y se denota por " s "

La varianza se mide en términos del cuadrado de las unidades originales. Si las observaciones están medidas en hás. la varianza está en hás. cuadradas; si están medidas en dólares la varianza está en dólares al cuadrado, etc. Al tomar la raíz cuadrada, se obtiene la desviación estándar, con lo que se regresa a las unidades originales de las observaciones.

$$G^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

Varianza poblacional
para datos originales (4)

$$G^2 = \frac{\sum (y_i - \mu)^2 n_i}{N}$$

Varianza poblacional
para datos agrupados (5)

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Varianza muestral
para datos originales (6)

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}$$

Varianza muestral
para datos agrupados (7)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

Desviación estándar poblacional
para datos originales (8)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \mu)^2 n_i}{N}}$$

Desviación estándar poblacional
para datos agrupados (9)

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Desviación estándar muestral
para datos originales (10)

$$s = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}}$$

Desviación estándar muestral
para datos agrupados (11)

Problema 6. Calcular la varianza y la desviación estándar de los datos del Cuadro 3.

Solución A.

Como los datos del Cuadro 3 corresponden a una muestra y los datos están agrupados en forma de distribución de frecuencias, para computar la varianza se deberá aplicar la fórmula 7, que permite calcular la varianza muestral de datos agrupados en forma directa (Ver solución B). De la información del Cuadro 3 se utilizan las columnas y_i y n_i que constituyen la base para aplicar la fórmula 7, recordando que $\bar{x} = 4,31$, se tiene el siguiente Cuadro 5:

CUADRO 5

y_i	n_i	$(y_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{x})^2 n_i$
1,5	4	-2,81	7,8961	31,5844
2,5	3	-1,81	3,2761	9,8283
3,5	10	-0,81	0,6561	6,5610
4,5	6	0,19	0,0361	0,2166
5,5	5	1,19	1,4161	7,0805
6,5	8	2,19	4,7961	38,3688
--	36	—	—	93,6396

$$s^2 = \frac{93,6396}{36 - 1} \cong 2,68 \rightarrow \text{Varianza muestral}$$

$$s = \sqrt{2,68} \cong 1,64 \rightarrow \text{Desviación estándar muestral}$$

En consecuencia, la varianza muestral es $s^2 = 2,68$, es decir, \$ 2,68 al cuadrado y la desviación estándar muestral es $s = 1,64$.

Solución B

Independientemente del procedimiento que se use, el cálculo de la varianza y de la desviación estándar resulta tedioso. Particularmente si se emplea para su cálculo el cómputo de cada una de las desviaciones respecto de la media, como se hizo en el Cuadro 5. Nuevamente se hará uso de los datos del Cuadro 3 para ilustrar un procedimiento más corto derivado de una transformación de la fórmula 7, en la siguiente:

$$s^2 = \frac{\sum y_i^2 n_i - (\sum y_i n_i)^2 / n}{n-1} \quad (7')$$

dando origen al Cuadro 6: los resultados son, obviamente, los mismos.

CUADRO 6

y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i^2 n_i$
1,5	4	6,0	9,00
2,5	3	7,5	18,75
3,5	10	35,0	122,50
4,5	6	27,0	121,50
5,5	5	27,5	151,25
6,5	8	52,0	338,00
- -	36	155,0	761,00

$$s^2 = \frac{761,0 - (155)^2/36}{36 - 1}$$

$$s^2 = 2,68$$

$$s = 1,64$$

Problema 7. Calcular la varianza y la desviación estándar de los datos originales contenidos en el Cuadro 2.

Solución:

En este caso se trata de determinar la varianza muestral de datos originales. Recuérdese que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la respectiva varianza. Al igual que en la solución B del problema anterior, se entregará la fórmula transformada para simplificar los cálculos y hacer más fácil su operatividad. La fórmula es la siguiente:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} \quad (6')$$

$$\sum x_i^2 = 789,9 \quad \bar{x} = 4,4 \quad \bar{x}^2 = 19,36$$

El Cuadro 7 que sigue, consigna los valores del Cuadro 2 al cuadrado y la suma de los mismos es: 789,9. La media aritmética es la obtenida como solución del problema 1, esto es: $\bar{x} = 4,4$

CUADRO 7

VALORES DEL CUADRO 2 ELEVADOS AL CUADRADO						
29,16	40,96	33,64	19,36	49,00	12,96	22,09
12,25	40,96	1,96	16,00	9,00	20,25	14,44
25,00	3,24	38,44	10,24	15,21	3,24	32,49
5,29	10,24	1,69	7,84	39,69	36,00	23,04
14,44	12,96	49,00	40,96	12,96	26,01	42,25
17,64						

$$s^2 = \frac{789,89 - (36)(4,4)^2}{35} = 2,66$$

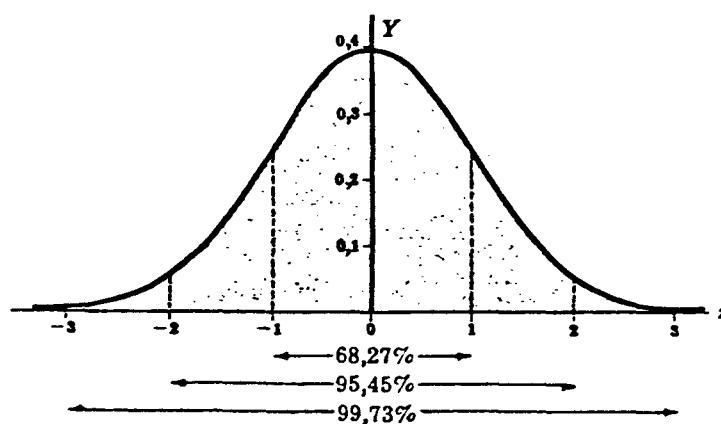
$$s = 1,63$$

5. Uso de la desviación estándar

La media aritmética tiene un significado intuitivo propio, mientras que la desviación estándar adquiere una interpretación intuitiva al introducirse el teorema de Tchebysheff. El objetivo central es describir a la población de la cual se ha tomado la muestra. Para este fin, la media y la desviación estándar muestrales se usan como estimadores de la media y la desviación estándar de la población. En beneficio de la claridad y el tiempo se omitirá toda la explicación referente al mencionado teorema y en su lugar se hará una breve introducción de la distribución normal, que va más allá del ámbito del presente capítulo, pero que permitirá calmar inquietudes respecto del uso de la varianza o la desviación estándar, aún a costa de la precisión y la rigurosidad que debe primar en estas materias.

En la figura 11, se muestra un gráfico de la curva normal tipificada. Este gráfico indica que para una distribución que está normalmente distribuída, se sabe que alrededor del 68% de las mediciones están situadas dentro de una desviación estándar de la media, aproximadamente el 95% de las mediciones están situadas dentro de dos unidades de desviación estándar de la media y que más del 99% de las observaciones están situadas dentro de 3 unidades de desviación estándar de la media.

Figura 11



En el Apéndice I se incluye una tabla que da las áreas bajo esta curva, limitadas por la ordenada $z = 0$ y cualquier otro valor positivo de z . De la misma se puede obtener el área comprendida entre dos ordenadas cualesquiera por la simetría de la curva respecto a $z = 0$

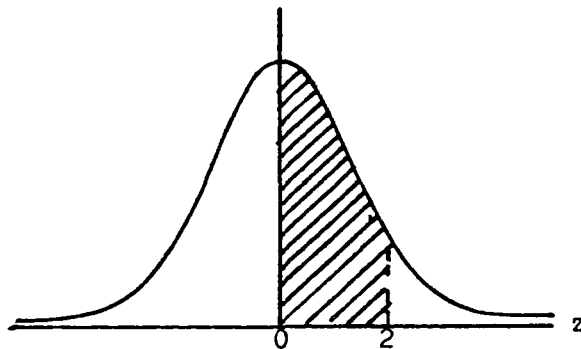
Problema 8. Hallar el área bajo la curva normal entre $z = 0$ y $z = 2$. Utilizar la tabla del Apéndice I.

Solución:

En la tabla del Apéndice I, se ubica la columna de la extrema izquierda, encabezada por z , hasta alcanzar el valor 2.0. Una vez ubicado este valor se corre hacia la derecha hasta la columna encabezada por 0, encontrándose el resultado 0,4772, que es el área pedida y representa la probabilidad de que z esté comprendida entre 0 y 2.0. Técnicamente este resultado se expresa de la siguiente manera:

$$P(0 \leq z \leq 2,0)$$

La expresión gráfica es la siguiente:



El área sombreada representa la probabilidad del 47,72% de que z esté comprendida entre 0 y 2.

Problema 9.

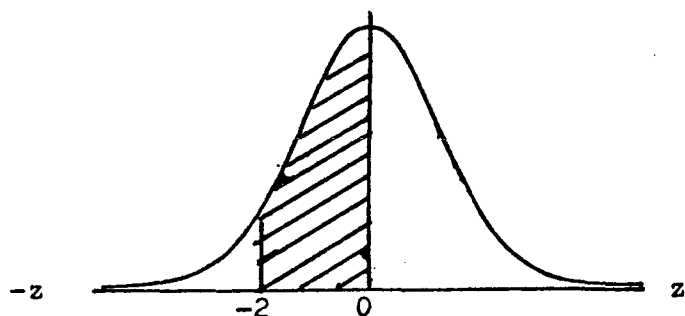
Hallar el área bajo la curva normal entre $z = 0$ y $z = -2.0$. Utilizar la tabla del Apéndice I.

Solución:

Por simetría, el área pedida es igual al área entre $z = 0$ y $z = 2.0$; por tanto, el procedimiento a seguir es similar al de la solución anterior. Varía la expresión matemática y la gráfica. Ahora, el resultado se expresa así:

$$P(-2.0 \leq z \leq 0)$$

La expresión gráfica es la siguiente:



El área sombreada representa la probabilidad del 47,72% de que z esté comprendida entre -2.0 y 0

Problema 10.

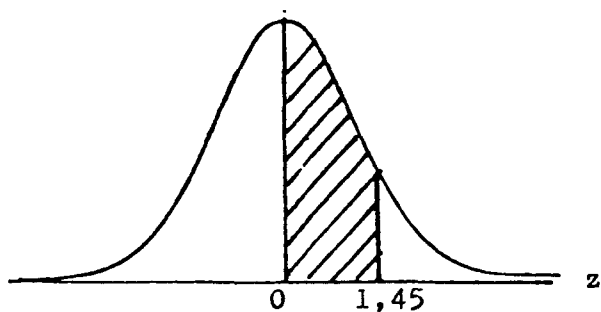
Hallar el área bajo la curva normal entre $z = 0$ y $z = 1,45$. Utilizar la tabla del Apéndice I.

Solución:

En la tabla del Apéndice I se ubica la columna de la extrema izquierda, encabezada por z , hasta alcanzar el valor $1,4$. Una vez ubicado este valor se corre hacia la derecha hasta la columna encabezada por 5 (para completar el número $1,45$), encontrándose el valor $0,4265$, que es el área pedida y representa la probabilidad de que z esté comprendida entre 0 y $1,45$. Técnicamente este resultado se expresa de la siguiente manera:

$$P(0 \leq z \leq 1,45)$$

La graficación es la siguiente:



El área sombreada representa la probabilidad del 42,65% de que z esté comprendida entre 0 y $1,45$.

La tabla del Apéndice I se denomina "Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z". Esta es la distribución de probabilidad normal con $\mu=0$ y $\sigma=1$. Cualquier conjunto de valores de X normalmente distribuidos puede convertirse en valores normales estándar z por medio de la fórmula

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Problema 11.

Según el problema 2 el precio medio del kg. de tomates resultó ser de \$ 4,31 y de acuerdo al problema 6, la desviación estándar de esa misma muestra es de \$ 1,64. Suponiendo que los precios se distribuyen normalmente, hallar en cuántos de los negocios encuestados los precios fluctuaron entre \$ 3 y \$ 5.

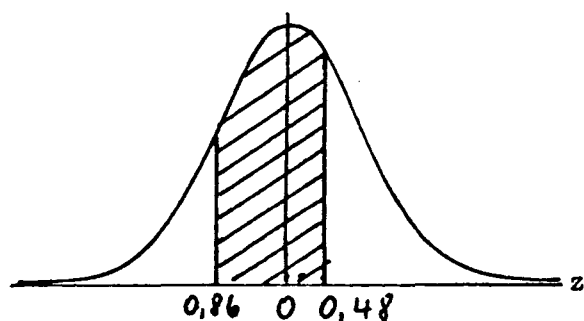
Solución:

El primer paso consiste en la tipificación de los valores de la variable, esto es:

$$z_1 = \frac{2,90 - 4,31}{1,64} = -0,86$$

$$z_2 = \frac{5,10 - 4,31}{1,64} = 0,48$$

Graficando los valores anteriores se tiene:



Conforme al gráfico anterior, se debe sumar las áreas comprendidas entre 0 y 0,48 y entre -0,86 y 0. Consultando la tabla del Apéndice I se tiene $z_1 = 0,3051$ y $z_2 = 0,1844$

Por tanto, el área buscada es de 0,4895. Ello significa que en el 48,95% de los negocios encuestados, el precio del kg. de tomates fluctuó entre \$3 y \$5.

ANALISIS DE SERIES DE TIEMPO

ANALISIS DE SERIES DE TIEMPO

1.- INTRODUCCION

En cierto sentido el análisis de las series de tiempo (cronológicas o históricas) es el área más exasperante del análisis estadístico y el que menos satisfacciones proporciona desde el punto de vista teórico. Parte importante de las dificultades se deben a que las series de tiempo no son extracciones aleatorias de una población, sino que observaciones ordenadas a lo largo del tiempo.

Una serie de tiempo es simplemente una clasificación en un sentido, con el tiempo como la variable de clasificación. Algunos ejemplos de series de este tipo serían los siguientes:

- Series anuales de producto e ingreso nacional (a precios constantes)
- Series anuales de exportación de cítricos
- Series anuales de población total
- Serie mensual del índice de precios al consumidor
- Serie de las ventas mensuales del molino Z
- Serie de las utilidades anuales de la empacadora X
- Serie de las temperaturas horarias en una bodega de vino, etc.

De los ejemplos anteriores se puede ver que la variable puede ser discreta o continua y que los datos pueden representar ya sea, un intervalo de tiempo o la situación en un instante dado en el tiempo, como sería el caso de las temperaturas horarias.

La filosofía en que se basan todos los análisis de las series de tiempo es de que la clasificación de los datos de acuerdo con el tiempo de ocurrencia es significativa y de que la variable es una función del tiempo, es decir, que si representamos por Y a los datos o valores observados y por T el tiempo, se tendría la siguiente relación:

$$Y = f(t) \quad t = 0, 1, 2, \dots, n$$

Este análisis consiste en una técnica para clasificar y estudiar los movimientos en una serie de datos a través del tiempo, es decir, variaciones cuantitativas de los datos en relación con los valores necesarios de una variable a intervalos regulares de tiempo, sean estos semanas, meses, años o cualquier otro período.

Este tipo de análisis permite determinar las pautas pasadas y presentes de estos movimientos de las series de tiempo y permite también, la obtención de claves acerca de las pautas futuras de estos movimientos.

El futuro siempre es incierto. Siempre pueden sobrevenir sucesos imprevisibles que desbaraten las predicciones efectuadas con el mayor esmero, a pesar de esto se debe tratar de predecir constantemente el futuro ya que, prácticamente, cualquier decisión implica una apreciación del futuro.

La creciente complejidad de la actividad económica y la magnitud de los recursos en juego, han obligado al uso de métodos científicos sistemáticos, en la elaboración de las predicciones de las condiciones futuras, con el objeto de disminuir al máximo la posibilidad de errores que podrían ser fatales en la toma de decisiones.

Los economistas generalmente efectúan predicciones a largo y corto plazo. Las predicciones a largo plazo tratan de anticipar sucesos futuros para períodos superiores a los 5 años. Naturalmente, que este tipo de predicciones se efectúan habitualmente sólo con respecto a variables que son básicas para la vida futura de la empresa, como lo son las cifras de ventas de una empresa de fertilizantes, el nivel general de los negocios, las ventas de la industria a la que pertenece la empresa y las necesidades de capital.

Las predicciones a corto plazo se refieren a períodos futuros más inmediatos, los que pueden ser desde algunas semanas hasta unos dos años. Estas predicciones se elaboran corrientemente, con respecto a un mayor número de series que se refieren a las distintas áreas decisionales de la empresa, como lo son las series relativas a niveles de producción, programas de mantención, necesidades de caja, consumo de materias primas, niveles de salarios, precios de materias primas, etc.

El peligro más grande, siempre presente en una predicción, es el acaecimiento de sucesos imprevistos que provoquen una falla en dicha predicción. Resulta evidente que la probabilidad de ocurrencia de sucesos fortuitos aumenta al aumentar al plazo futuro que abarque la predicción. También afecta a esta probabilidad de estabilidad relativa de los negocios durante el período que comprenda la predicción; a mayor estabilidad, menor probabilidad de hechos fortuitos.

Otro factor a considerar, es la magnitud del agregado que abarca la serie. Esto significa que hay menor probabilidad de error al pronosticar

las ventas de un sector que al pronosticar las ventas de una empresa individual. Además, hay que tener presente de que hay industrias que se caracterizan por una mayor estabilidad que otras.

2.- COMPONENTES CONVENCIONALES DE LAS SERIES DE TIEMPO

Generalmente la clasificación de los datos por períodos de tiempo, sirve sólo como punto de partida para el análisis subsiguiente. A menudo se intenta descomponer los datos con diversas finalidades:

- Estudiar uno de los componentes específicos
- Comparar como afecta uno de los componentes a dos o más series.
- Estudiar el desarrollo histórico de la serie
- Utilizar la serie con fines de proyección

Desgraciadamente, el último de los objetivos mencionados, a menudo resulta poco afectivo y es rara vez alcanzado. En todo caso, más adelante, se tratarán con cierto detenimiento los aspectos referentes a esta cuestión.

Históricamente, se ha supuesto que las series de tiempo están formadas por 4 elementos o componentes, a saber:

- Tendencia secular a trend o simplemente tendencia
- Variaciones estacionales
- Variaciones cíclicas
- Variaciones irregulares o aleatorias.

2.1. La tendencia: La tendencia es el ritmo medio de variación en períodos largos. Indica la intensidad de las variaciones que cabe

esperar a largo plazo en las series respectivas. Estas variaciones (aumentos o disminuciones) pueden ser constantes o aproximadamente constantes en términos absolutos, en cuyo caso la tendencia estaría representada por una línea recta; pero pueden y de hecho siguen estructuras no lineales de tipo complejo, es decir, las variaciones, tanto relativas como absolutas, se asimilan a leyes de formación distintas de las de una progresión aritmética (caso de la línea recta).

2.2. Variaciones estacionales: Estas variaciones están caracterizadas por fluctuaciones de corto plazo, que se desarrollan dentro de un cierto período. En buena medida, son derivadas del ritmo de las estaciones y tienen lugar dentro del año. Por ejemplo, las cosechas, las lluvias, el transporte de pasajeros por tren, las recaudaciones de ciertos tributos, etc. En una serie en que los valores observados están dados en forma anual, las variaciones estacionales quedan automáticamente eliminadas.

2.3. Variaciones cíclicas: Las variaciones o movimientos cíclicos se refieren a oscilaciones de largo plazo o evoluciones alrededor de una línea o curva de tendencia. Estos ciclos, como son llamados a veces, pueden o no ser periódicos, o sea, que pueden o no seguir estructuras exactamente similares en intervalos iguales de tiempo. En actividades económicas o de negocios, los movimientos son considerados cíclicos sólo si ocurren en intervalos de tiempo mayores a un año.

2.4. Variaciones irregulares: Las variaciones irregulares se refieren a movimientos esporádicos de las series de tiempo, debido a sucesos aleatorios, tales como inundaciones, sequías, elecciones, terremotos, etc. No obstante, que corrientemente se supone que estos sucesos producen variaciones que duran un corto período, es concebible que puedan ser tan intensos como para producir nuevos movimientos cíclicos o de otro tipo. Todas las series de tiempo contienen variación aleatoria. Además una serie de tiempo puede contener todas o ninguna de las otras tres componentes.

El rol de la Estadística consiste, precisamente, en descubrir, cuantificar y aislar los diversos componentes mencionados, para estudiarlos individual o colectivamente, con las finalidades ya mencionadas.

3.- MODELOS CLASICOS DE LAS SERIES DE TIEMPO

En la práctica del análisis de las series de tiempo, tradicionalmente se han usado dos modelos convencionales para cuantificar sus componentes.

Estos modelos son:

- El modelo aditivo; y
- El modelo multiplicativo.

3.1. El modelo aditivo: El modelo aditivo supone que los 4 componentes de una serie pueden ser sumados para obtener el valor, para un punto dado en el tiempo.

Sea: Y_i = el dato (valor original) en el i -ésimo período.

T_i = el trend en el i -ésimo período

S_i = la estacional en el i -ésimo período

C_i = el ciclo en el i -ésimo período

A_i = el componente aleatoria en el i -ésimo período.

De acuerdo con lo anterior, el modelo aditivo se expresa de la siguiente manera:

$$Y_i = T_i + S_i + C_i + A_i \quad (3.1.)$$

3.2. El modelo multiplicativo: El modelo multiplicativo supone que los componentes están ligados de la siguiente manera:

$$Y = T \times E \times C \times A \quad (3.2.)$$

En la relación anterior uno de los componentes, generalmente la tendencia, está expresada en las mismas unidades de la variable original. El resto de los componentes está expresado en forma de índice. Desde el punto de vista práctico, es el modelo representado por (3.2) el que se usa para separar las influencias de los diversos componentes que actúan sobre los valores de la serie cronológica.

4.- AJUSTE PRELIMINAR DE LAS OBSERVACIONES

En muchos casos, antes de comenzar el análisis propiamente tal, es necesario introducir un ajuste preliminar en los datos a fin de uniformarlos y eliminar fluctuaciones artificiales.

4.1. Ajuste por día calendario: Una serie expresada en cifras mensuales (producción, ventas, etc.), podría ser necesaria una corrección que tome en cuenta las variaciones en el número de días hábiles o efectivamente trabajados en cada mes.

4.2. Ajuste per cápita: Muchas series de tipo económico o de aplicación a los negocios, requieren de un ajuste preliminar que consiste en expresarlas en términos per cápita, esto es dividiendo los valores originales por el número de habitantes, por el número de clientes, por el número de alumnos, etc. Este tipo de ajuste se hace con el objeto de asegurar la comparabilidad en el número de personas a que se refiere la serie.

4.3. Ajuste a un cierto nivel de precios: En general se recomienda que las series nominales, esto es, aquellas que están expresadas en unidades monetarias de cada año, se ajusten a un nivel monetario de un año o un período determinado como base o punto de comparación. La operación anterior se conoce con el nombre de deflactación y da origen a las series monetarias expresadas en términos reales o moneda de igual poder adquisitivo.

"El proceso de deflactación exige disponer de un índice deflactor; es decir, un indicador, que proporcione una pauta de las alteraciones en los precios que dicen relación con la variable que se pretende

deflactor. Es importante recordar que no existe un índice deflactor único; cada variable; estrictamente, debería tener un deflactor adecuado:

En cuanto a la mecánica de la deflactación, ésta implica dividir los montos de la serie monetaria (o serie nominal) por el índice de precios elegido como deflactor adecuado y el cuociente multiplicarlo por 100. El resultado es una serie real, expresada en unidades monetarias de igual poder adquisitivo, o lo que es lo mismo, en moneda del año correspondiente al año base del deflactor. Por ejemplo, si se deflacta una serie nominal por un índice de precios con base en el año 1980 = 100, se obtendrá una serie real, expresada en moneda de 1980.

5.- ALGUNAS TECNICAS UTILIZADAS EN EL ANALISIS DE LAS SERIES DE TIEMPO

En el análisis de las series de tiempo se utilizan diversas técnicas que permiten determinar sus componentes, siendo las más divulgadas la de los promedios móviles y el método de los mínimos cuadrados, de las cuales se darán sus aspectos generales, y, posteriormente, los detalles de su aplicación, según corresponda.

5.1. Promedios móviles: Dado un conjunto de números Y_1, Y_2, Y_3, \dots , se define al promedio móvil de orden "N" como dado por la secuencia de medias aritméticas.

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N}, \frac{Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{N+1}}{N}, \frac{Y_3 + Y_4 + \dots + Y_{N+2}}{N}, \dots(1)$$

Las sumas en los numeradores se llaman totales móviles de orden N
 Ejemplo: Dados los números 2, 6, 1, 5, 3, 7, 2, el promedio móvil de orden 3 está dado por la siguiente relación:

$$\frac{2 + 6 + 1}{3}, \frac{6 + 1 + 5}{3}, \frac{1 + 5 + 3}{3}, \frac{5 + 3 + 7}{3}, \frac{3 + 7 + 2}{3}$$

Es costumbre colocar cada promedio móvil frente a cada uno de los valores respectivos de la variable original. Así, en el ejemplo anterior, escribiremos el resultado final de la siguiente manera:

Y_1	Promedio móvil de 3 términos
2	-
6	3
1	4
5	3
3	5
7	4
2	-

Se observa en el cuadro anterior la pérdida neta de dos observaciones, la primera y la última. Al tomar un promedio móvil mayor, la pérdida de información también será mayor. Afortunadamente esta limitación, cuando se tiene una masa grande de datos, carece de importancia. Por

otra parte, y refiriéndonos al mismo cuadro anterior se dice que los promedios móviles están centrados. Esta es una forma convencional de escribir dicho resultado, pero dadas las características de la media aritmética podríamos escribir los resultados obtenidos en una forma ligeramente distinta y así el valor 3 (primer valor obtenido) perfectamente lo hubiésemos podido escribir frente al valor 2 original de la variable, y así sucesivamente. Sin embargo, respetaremos la convención sancionada por la práctica y cada vez que tengamos que calcular promedios móviles, los presentaremos en forma centrada, esto es, perdiendo igual cantidad de datos en ambos extremos de la serie.

Si los datos están dados anual o mensualmente, un promedio móvil de orden N se llama promedio móvil anual o mensual de orden N , respectivamente. Así se habla de promedios móviles de cinco años, doce meses, etc.

Los promedios móviles tienen la propiedad de que tienden a reducir el monto de la variación presente en un conjunto de datos. En el caso de las series de tiempo, esta propiedad se usa habitualmente para eliminar fluctuaciones no deseadas y el proceso es llamado "suavizamiento de las series de tiempo".

Si en (1) se usan medios aritméticos ponderados, especificándose las ponderaciones por adelantado, la secuencia resultante es llamada "promedio móvil ponderado de orden N ".

Ejemplo: Si las ponderaciones 1, 4, 1, son usadas en el ejemplo (1), un promedio móvil ponderado de orden 3 está dado por la secuencia:

$$\frac{1(2) + 4(6) + 1(1)}{1 + 4 + 1}, \quad \frac{1(6) + 4(1) + 1(5)}{1 + 4 + 1}, \quad \frac{1(1) + 4(5) + 1(3)}{1 + 4 + 1},$$
$$\frac{1(5) + 4(3) + 1(7)}{1 + 4 + 1}, \quad \frac{1(3) + 4(7) + 1(2)}{1 + 4 + 1}$$

ó 4,5 ; 2,5 ; 4,0 ; 4,0 ; 5,5

En general se prefieren promedios móviles con un número impar de términos. Cuando N es un número par, cada promedio móvil queda ubicado entre los valores originales. Para obtener un promedio móvil que enfrente a un valor original, es necesario considerar un nuevo promedio de cada dos promedios móviles consecutivos. Con ello se introduce necesariamente una ponderación en los términos. Como ejemplo, consideremos, un promedio móvil de 4 términos. Los dos primeros promedios móviles serán:

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4} \quad \bar{Y}_2 = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5}{4}$$

Entonces Y queda centrada entre Y₂ y Y₃. El segundo promedio, \bar{Y}_2 queda entre Y₃ y Y₄. Para buscar un promedio que enfrente a Y₃, es necesario promediar \bar{Y}_1 y \bar{Y}_2 lo que da origen a escribir un nuevo promedio que simbolizaremos por \bar{Y}_1 .

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4} + \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5}{4} =$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5}{8}$$

Algunos términos reciben una ponderación doble de la de otros. En general puede decirse que al tomar promedios móviles de promedios móviles, los promedios resultantes contienen términos con diferentes ponderaciones, mientras que en los promedios móviles simples todos poseen términos con igual ponderación.

5.2. Interpolación y ajuste: Se presenta a menudo la conveniencia de asociar observaciones estadísticas a determinadas curvas matemáticas. Esto permite dar continuidad a esas observaciones, y utilizarlas, por lo tanto, para estimar las relaciones correspondientes para valores no observados de las variables. En otras palabras, de ella podría deducirse el valor correspondiente a cada una de las variables, para un valor cualquiera de la otra variable. Estas estimaciones pueden corresponder a valores comprendidos dentro del recorrido de las variables o fuera de él, es decir, a una interpolación ó a una extrapolación, respectivamente, aún cuando desde el punto de vista técnico, no existe una distinción esencial entre los dos casos, por lo que se utiliza corrientemente el término interpolación para hacer referencia a los dos problemas.

En general, la asociación puede asumir dos formas:

- a) Determinación de la ecuación de una curva que pase por todos los puntos observados: interpolación estadística.
- b) Determinación de la ecuación de una curva que pase entre los puntos observados de la manera más satisfactoria posible: ajuste.

6.- METODOS DE ESTIMACION DE LA TENDENCIA

Existen varios métodos de estimación de la tendencia. En la mayoría de los casos se prefiere representarla mediante una función analítica, la cual se ajusta generalmente, a través del Método de los Mínimos Cuadrados. Los objetivos que se persiguen son:

- a) Describir la tendencia general mediante una línea más sencilla que la poligonal original.
- b) Proporcionar una idea acerca del desarrollo futuro de la serie.
- c) Obtener alguna información sobre el comportamiento de series similares; y
- d) Hacer extrapolaciones, predicciones o estimaciones a corto plazo y largo plazo.

Es necesario insistir en que las estimaciones requieren de mucha cautela, especialmente, cuando éstas están un tanto alejadas del último dato disponible.

Es por esto que la experiencia del técnico y su conocimiento concreto del problema específico que se está estudiando constituye un factor predominante en la calidad del análisis de las predicciones.

Entre los métodos usados para describir la tendencia están: los mínimos cuadrados, los promedios móviles, los semipromedios, los puntos medios, el ajuste a mano alzada, etc.

6.1 Mínimos cuadrados: Este método que es una técnica para ajustar diversos tipos de funciones (rectas, potenciales, exponenciales, etc.), permite determinar los valores de la tendencia a través de la ecuación de ajuste. A continuación se expondrá sumariamente el ajuste de una línea recta

La recta de aproximación por mínimos cuadrados del conjunto de puntos $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ tiene la ecuación

$$Y = a_0 + a_1 X \quad (1)$$

donde las constantes a_0 y a_1 se determinan mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X \\ \Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 \end{cases} \quad (2)$$

que son las llamadas *ecuaciones normales para la recta de mínimos cuadrados* (1)

Las constantes a_0 y a_1 pueden sacarse de (2) obteniéndose las fórmulas

$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \quad a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \quad (3)$$

6.2 Promedios móviles: Este método, descrito en páginas anteriores, se utiliza principalmente para suavizar la poligonal, ya que el promedio móvil tiene la propiedad de disminuir las oscilaciones muy pronunciadas, a la vez que señalar la tendencia de las observaciones.

Antes de su aplicación, es necesario determinar el número de términos de que constará el promedio. Generalmente, es suficiente aplicar promedios móviles de 3, 5 ó 7 términos. También se señaló el hecho de que cuando se ajustan $(2p + 1) = N$ términos, quedan "p" datos sin ajustar al extremo superior y "p" datos al extremo inferior. Esto no tiene importancia en lo que respecta a la parte inicial de la serie. En cambio, tiene importancia

no poder calcular la tendencia para los últimos datos. El procedimiento de cálculo de la tendencia tampoco permite realizar extrapolaciones, que nos hagan vislumbrar el comportamiento futuro de la serie. Otras desventajas de este método son:

- Generación de ciclos u otros movimientos que no estaban en los datos;
- Están fuertemente afectados por los valores extremos. Para contrarrestar esto, algunas veces se usan los promedios móviles ponderados, usando ponderaciones apropiadas. En estos casos, el ítem central (o ítems) se le asigna la mayor ponderación y a los valores extremos ponderaciones más reducidas.

6.3. Método de los semi-promedios: Este método consiste en separar los datos en dos partes iguales y promediar los datos en cada parte, obteniendo de este modo dos puntos sobre el gráfico respectivo. Se dibuja la línea de tendencia entre estos dos puntos y pueden así determinarse los valores de tendencia.

Este método es aplicable cuando la tendencia es lineal o aproximadamente lineal, a pesar de que puede extenderse a casos en que los datos pueden separarse en varias partes, en cada una de las cuales la tendencia es lineal.

6.4. Método de los puntos medios: Este método está destinado no a definir una cierta tendencia precisa, sino sólo a ofrecer una idea general de la misma. Para aplicarlo, se comienza por seleccionar de las observaciones originales, los puntos que se consideran como máximos

y como mínimos de cada fase cíclica; enseguida, se estima para cada período intermedio los máximos y mínimos por interpolación lineal. En último término se promedian los máximos y mínimos así obtenidos: en forma esquemática se indicará la aplicación de este método:

Emplearemos la siguiente simbología:

X_i = Período i-ésimo

Y_i = Datos originales

\bar{X} = Valor promedio o de tendencia

$V_{m\acute{a}x.}$ = Valores máximos de la variable

$V_{m\acute{i}n.}$ = Valores mínimos de la variable

$V'_{m\acute{a}x.}$ = Valores máximos estimados

$V'_{m\acute{i}n.}$ = Valores mínimos estimados.

X_i	Y_i	$V_{m\acute{a}x.}$	$V_{m\acute{i}n.}$	$V'_{m\acute{a}x.}$	$V'_{m\acute{i}n.}$	\bar{X}
X_1	Y_1	Y_1		Y_1	Y'_1	Y_1
X_2	Y_2			Y'_2	Y'_2	Y_2
X_3	Y_3		Y_3	Y'_3	Y_3	Y_3
X_4	Y_4	Y_4		Y_4	Y'_4	Y_4
X_5	Y_5			Y'_5	Y'_5	Y_5
X_6	Y_6		Y_6	Y'_6	Y_6	Y_6
X_7	Y_7			Y'_7	Y'_7	Y_7
X_8	Y_8	Y_8		Y_8	Y'_8	Y_8
X_9	Y_9		Y_9	Y'_9	Y_9	Y_9

6.5. Ajuste de tendencia a mano libre.- El método más sencillo para describir una tendencia gráficamente consiste en trazarla a pulso, o haciendo, uso se una regla transparente o una plantilla para dibujar curvas. Este método es altamente subjetivo y está expuesto a la objeción que pueda hacerse a todos los métodos de esta clase: el estadístico determina qué respuesta es la que necesita y después procede a obtenerla. Pero, como se ha dicho, puede lograr casi el mismo resultado mediante una simple selección minuciosa entre los numerosos métodos disponibles. La objeción más válida es que los métodos subjetivos exigen la aplicación de un juicio sólido y por lo tanto, el estadístico no puede estar seguro del resultado si encomienda el trabajo a ayudantes inexpertos.

7.- METODOS DE ESTIMACION DE LAS VARIACIONES ESTACIONALES

La medición de las fluctuaciones estacionales puede hacerse mediante la construcción de índices de variación estacional. Como la fluctuación estacional de desarrolla dentro del curso de un año, el promedio de los 12 índices mensuales será igual a 100. Para los meses en que el índice arroje valores superiores a 100 significará que hay factores estacionales que presionan para que la serie muestre valores superiores a los que normalmente habrían correspondido y a la inversa, para los meses que muestran índices inferiores al promedio. En general, en una serie cronológica mensual, el índice de variación estacional para enero es la mediana de todos los estacionales específicos para los meses de enero, y así sucesivamente. En una serie de tiempo trimestral, el índice de variación estacional para el primer trimestre, es la media de todas las estacionales específicas de los primeros trimestres de

la serie. En forma análoga se definen los restantes índices de variación estacional. Una primera finalidad de los índices de variación estacional es la de permitir la depuración de la serie de la influencia de los factores de carácter estacional. La depuración se hace dividiendo cada valor original de un mes determinado por el correspondiente índice y multiplicando el resultado por 100. Supongamos una serie mensual de 10 años completos. Ello significa que tenemos 120 datos. Luego, los 10 meses de enero correspondientes a cada uno de los 10 diferentes años, serán divididos por el índice (único) de variación estacional de enero que ya habíamos determinado y el cociente de multiplica por 100.

Así sucesivamente, para los restantes 11 meses. En otras oportunidades, puede ocurrir que lo que se requiere es agregar la influencia estacional. El procedimiento será el inverso del mencionado para eliminarla. Son numerosos, los problemas prácticos en los que se requiere agregar o eliminar la influencia estacional, por ejemplo:

- Acumulación de stocks en períodos previos a aumentos estacionales de las ventas (Pascua, época de veraneo, etc.)
- Previsión de necesidades de suministro de energía o de material de transporte no sólo en función del crecimiento global de la demanda, sino también en base de las necesidades estacionales.
- Determinación de la estacionalidad y periodicidad de los diversos tributos que se recauda el fisco, etc.

Si una serie de tiempo está influenciada por variaciones distintas de las estacionales, las medias trimestrales, mensuales, semanales,

etc., ya no son constantes. Esto puede sugerir que, en el cálculos de las estacionales específicas, es posible usar una base diferente para cada año de la serie cronológica, pero semejante procedimiento puede dar un cuadro distorsionado de la realidad. Con el objeto de evitar estas posibilidades se utilizan algunos métodos para calcular los índices de variación estacional. Los métodos más conocidos son:

- Método del Promedio Simple
- Método del Porcentaje del Promedio
- Método del Porcentaje de la Tendencia
- Método de los Porcentajes del Promedio Móvil
- Método de los Eslabones Relativos

7.1. Método del Promedio Simple.- Este método que es el más sencillo, se aplica cuando la serie no muestra una influencia muy marcada de la tendencia, es decir, cuando permanece estacionaria a un cierto nivel.

Para su aplicación se sugiere la siguiente metodología:

- 1) Anotar los datos originales correspondientes.
- 2) Promediar las cifras correspondientes a cada mes (todos los eneros, los febreros, etc.)
- 3) Promediar los promedios mensuales.
- 4) Expresar el promedio de cada mes como porcentaje del promedio anual obtenido en 3) y el cociente multiplicarlo por 100.
- 5) Los resultados obtenidos en 4) constituyen los Indices de Variación Estacional, cuya suma debe der 1.200. En caso contrario, se reajustan con el coeficiente de conversión necesario.

7.2. Método del Porcentaje del Promedio.- Este método es una variante del anterior. Se recomienda usarlos en aquellos casos en que algunos años incluidos en el estudio presenten valores superiores a los de otros años, distorsionando el índice global. Este inconveniente se subsana utilizando el método del Porcentaje del Promedio, que tiene la característica de dar igual influencia a cada año.

El procedimiento para usar este método en el siguiente:

- 1) Anotar los datos originales correspondientes.
- 2) Promediar las cifras correspondiente a cada año en particular.
- 3) Expresar cada mes el porcentaje del promedio del año.
- 4) Los porcentajes obtenidos en 3) se promedian para todos los meses (enero, febrero, etc.). Se puede utilizar la media aritmética o la mediana.
- 5) Los resultados obtenidos en 4) constituyen los Índices de Variación Estacional, cuya suma debe ser 1.200. En caso contrario, se reajustan con el coeficiente de conversión necesario.

7.3. Método del Porcentaje de la Tendencia.- Este método se recomienda aplicarlo cuando la tendencia de la serie es lineal o aproximadamente lineal. Su aplicación reviste dos aspectos: a) eliminación previa de la influencia del trend, el cual puede ser creciente o decreciente; y b) determinación de los Índices de Variación Estacional. Para su aplicación se sugiere la siguiente metodología:

- 1) Escribir los 12 meses en horizontal y los años en vertical.
 - 2) Anotar los datos originales correspondientes.
 - 3) Determinar el promedio de cada año. Generalmente, se usa la media aritmética.
-

- 4) Ajustar una línea recta por el Método de los Mínimos Cuadrados a los promedios obtenidos en 3).
- 5) Como la ecuación obtenida en 4) está expresada en términos anuales, es necesario expresarla en términos mensuales, haciendo el respectivo traslado de origen. Se recomienda que el origen ($X = 0$) quede centrado en enero del primer año de la serie en estudio.
- 6) Una vez obtenida la ecuación según las indicaciones en 5) se confecciona un nuevo cuadro, tal como el indicado en 1), en el cual se anotan los sucesivos valores obtenidos en la recta de tendencia, dando a X ($X_i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) los respectivos valores, siendo el último valor del recorrido el producto de $(12n - 1)$, en que n representa el # de años de que consta la serie.
- 7) Dividir cada valor original por el respectivo valor de la tendencia y los resultados registrarlos en una nueva tabla, tal como la indicada en 1) y en 6). Multiplicar por 100 cada cociente.
- 8) Los valores obtenidos en 7) se promedian para cada uno de los 12 meses, usando la mediana.
- 9) Los resultados obtenidos en 8) constituyen los Índices de Variación Estacional, cuya suma debe ser 1.200. En caso contrario, se reajustan con el coeficiente de conversión necesario.

7.4. Método de los Porcentajes del Promedio Móvil.- Este método se recomienda utilizarlo en aquellos casos en que la tendencia es no lineal. El procedimiento para aplicarlo es el siguiente:

1) Se dispone una planilla (hoja de trabajo) con 5 columnas. Los encabezamientos de las columnas son los siguientes:

- i. Año y mes
- ii. Datos (valores observados)
- iii. Suma móvil de 12 términos
- iv. Suma móvil de 2 términos.
- v. Promedio móvil centrado de 12 términos

2) Una vez registrados los datos originales en la hoja de trabajo, se procede a determinar una suma móvil de 12 términos (columna 3).

La primera suma móvil se coloca frente a junio o julio del primer año en estudio y la última frente a junio o julio del último año.

3) Se calcula una suma móvil de dos términos (columna 4) en base a columna 3.

4) Las cifras de la columna 4 se dividen por 24 (o se multiplican por el recíproco de 24, que es lo más indicado) y se registran en la columna 5. El primer resultado o promedio móvil centrado de 12 términos, se escribe frente al mes de julio del primer año de la serie en estudio y el último frente al mes de junio del último año.

5) Se confecciona una segunda planilla, en la que los meses se colocan en horizontal y los años en vertical. En esta planilla se registran los cuocientes que resultan de dividir los datos originales por los correspondientes promedios móviles centrados de 12 términos y el resultado se multiplica por 100 para darle forma de índice.

6) Se determina el valor mediano para cada uno de los 12 meses. Estos 12 valores medianos constituyen los Indices de Variación Estacional

y la suma de ellos debe ser igual a 1.200. En caso contrario, se reajustan con el coeficiente de conversión necesario.

7.5. Método de los eslabones relativos.- Este método al igual que el anterior, es aplicable cuando la serie muestra efectos más o menos pronunciados de una tendencia lineal. En general, presenta algunas ventajas sobre el método anterior:

- Exige menos cálculos
- Permite una utilización más completa de las cifras anuales disponibles.
- De lo anterior se desprende que se presta mejor, para ser empleado en el caso de períodos cortos.

La metodología para aplicar este método es la siguiente.

1) Se prepara una hoja de trabajo en la que se colocan los años en horizontal y los meses en vertical, con las siguientes columnas adicionales:

- i. Mediana
- ii. Mediana eslabonada o simplemente, eslabones.
- iii. Eslabones corregidos
- iv. Índice de variación estacional o simplemente, Índice.
- v. Índice corregidos

2) Expresar el valor de cada mes como porcentaje del mes inmediatamente anterior. Estos porcentajes constituyen los eslabones relativos. Cuando no se posea la cifra anterior al primer dato de la serie considerada, se coloca en el lugar del primer eslabón o por ciento calculado, el valor 100.

- 3) Una vez calculados la totalidad de los eslabones relativos, se determina la mediana para cada uno de los 12 meses (columna; Mediana).
- 4) Calcular el efecto del trend (columna Eslabones), mediante el siguiente procedimiento:
 - 4.1. Colocar el valor 100 frente al mes de enero.
 - 4.2. Colocar frente al mes de febrero el valor mediano de febrero obtenido en 3).
 - 4.3. Colocar al frente al mes de marzo el producto resultante de multiplicar el valor mediano de este mes por el de febrero y dividir por 100.
 - 4.4. Colocar frente al mes de abril el valor mediano de este mes por el eslabón obtenido en 4.3) dividido por 100 y así sucesivamente, hasta llegar, nuevamente, al mes de enero, cuyo valor mediano se multiplica por el eslabón de diciembre.
- 5) Se determina la diferencia entre el eslabón obtenido para enero y el valor 100. Ella indicará el efecto de la tendencia.
- 6) Se procede a eliminar el efecto de la tendencia de los eslabones obtenidos en 4), para lo cual la diferencia obtenida en 5) se divide por 12 (hipótesis lineal). se procede a llenar la columna eslabones corregidos, colocando frente a enero el eslabón obtenido en 4), o sea, 100. Al eslabón obtenido en 4) para el mes de febrero se le resta 1/12, al de marzo 2/12, etc., y al de diciembre, 11/12. También se podría suponer que el efecto de la tendencia se ha logrado en forma acumulativa (hipótesis de variación geométrica), para lo cual habría que calcular el valor de "r" en la siguiente relación:

$$\text{Mediana de enero por Eslabón de diciembre} = 100(1+r)^{12}$$

Determinado el valor de "r" (tasa de variación) se procede a determinar los eslabones corregidos, de la siguiente manera: el eslabón de enero se deja igual, esto es, se le asigna el valor 100. El eslabón de febrero se divide por $1+r$, etc., el de diciembre por $(1+r)^{11}$.

7) Se calcula el promedio de los eslabones corregidos y cada eslabón se expresa como porcentaje del promedio, obteniéndose así, la columna de los Indices de Variación Estacional.

8) Si la suma de los Indices de Variación Estacional es diferente de 1.200, se reajustan con el coeficiente de conversión necesario, originándose de este modo la columna de Indices Corregidos.

8.- ESTIMACION DE LAS VARIACIONES CICLICAS Y ALEATORIAS

Examinados los métodos de estimación de la tendencia y de las variaciones estacionales, sólo resta determinar las fluctuaciones cíclicas.

Las variaciones aleatorias, tradicionalmente, se determinan por residuo.

Uno de los métodos más generalizados, para determinar las variaciones cíclicas es el conocido con el nombre de Método Residual.

8.1. Método Residual.- El Método residual consiste en eliminar sucesivamente la tendencia y las fluctuaciones estacionales. La forma práctica de proceder es la siguiente:

1° Se calcula el correspondiente índice de variación estacional.

2° Una vez eliminados las fluctuaciones estacionales de la serie original, se determina una expresión analítica de la tendencia y paralelamente los valores de ésta.

3° Se expresan las cifras corregidas por la variación estacional como porcentajes de los valores dados por la tendencia.

Esta última serie puede considerarse como un índice de variación cíclica. Hay que considerar, sin embargo, que en este índice de variación cíclica están incluídas las variaciones irregulares o accidentales. Este inconveniente se subsana tomando un promedio móvil de la serie que se está considerando como índice de variación cíclica. Este promedio móvil se debe determinar de tal modo que no influya en la determinación de la amplitud de los ciclos. Desgraciadamente, no existe ningún método que nos permita decidir a priori la magnitud o el orden del promedio móvil a considerarse.

Esta posibilidad sólo descansa en la experiencia del estadístico. La única posibilidad práctica que existe, es la de tomar sucesivamente, promedios móviles de órdenes bajos, hasta verificar gráficamente la eliminación máxima posible de estas fluctuaciones aleatorias.

Este método sólo es útil para cuantificar la magnitud de las variaciones cíclicas que se han registrado históricamente, pero no resulta adecuado para hacer proyecciones, sino sólo como una posibilidad de obtener indicaciones de carácter general, como por ejemplo, verificar si verdaderamente existe un ciclo determinado

y la amplitud del mismo. Hecho que coloca al economista en la posición del famoso pájaro que vuela hacia atrás - sabe a donde ha estado pero no sabe a donde va.

Para resolver el problema de las proyecciones, es necesario trabajar a través de una curva de senos y cosenos. Tales ajustes suponen que la estructura cíclica es consistente en amplitud y en período o que está cambiando en amplitud y/o en período mediante alguna ley conocida. Desgraciadamente esto sucede raras veces.

Para finalizar, es necesario advertir y recalcar que la predicción del ciclo no puede hacerse mediante el análisis de una sola serie al margen de la mayor o menor bondad de los métodos utilizados, sino que debe hacerse a través del estudio de varias series que sean representativas del movimiento económico, acompañado de un conocimiento cabal de la realidad, conocimiento que se logra sólo con la experiencia.

Ejemplo.

A manera de ejercicio, se calcularán los índices de variación estacional empleando el método de los porcentajes del promedio móvil, descrito en páginas anteriores. Las cifras se refieren a Producción Avícola, concretamente al "Contingente de pollos de 60 días en granjas del nordeste" de cierto país.

En el Cuadro I, se muestran los datos originales, expresados en millones de pollos al final de cada bimestre; no obstante, la Asociación de Avicultores de X dispone de la información mensual desde finales de 1975. La serie abarca un período de 10 años, que van de 1977 a 1986, ambos inclusive. Las cifras que representan a cada año, fué reemplazada, por razones de simplicidad, como habitualmente se procede al trabajar con series de tiempo, del siguiente modo:

AÑOS	(t)
1977	0
1978	1
1979	2
1980	3
1981	4
1982	5
1983	6
1984	7
1985	8
1986	9

A continuación se irá exponiendo cada una de las etapas, para calcular los respectivos índices de variación estacional:

- i) Ordenamiento de los datos originales, como se indica en el Cuadro I a continuación:

CUADRO I

PRODUCCION AVICOLA

Contingente de pollos de 60 días en granjas del nordeste
(millones de pollos al fin de bimestre)

AÑOS	I	II	III	IV	V	VI
0	19,5	15,2	15,6	17,7	20,6	23,0
1	19,5	15,4	15,9	18,5	21,5	24,4
2	20,6	16,5	17,0	19,3	22,7	24,9
3	21,1	17,7	18,8	21,5	24,4	26,6
4	22,9	20,4	22,3	24,6	27,9	30,8
5	26,3	22,9	23,9	26,9	30,5	32,5
6	27,8	22,8	22,2	27,1	30,7	32,3
7	26,7	21,2	22,5	27,2	29,8	32,6
8	28,9	22,5	23,0	26,1	28,4	29,0
9	23,4	20,5	21,3	25,8	24,6	34,2

ii) una vez registrados los datos originales en el Cuadro I, se procede a determinar una suma móvil de 6 (seis) términos, porque los datos están expresados en forma bimestral. En caso de haber estado expresados en forma mensual, entonces habría que haber calculado una suma móvil de 12 términos. La primera suma móvil del Cuadro II es 111,6, que resulta de sumar los 6 primeros valores del Cuadro I (19,5; 15,2; 15,6; 17,7; 20,6; 23,0). La segunda suma móvil resulta de sumar los 6 siguientes valores excluido el primero (19,5), resultado que también se obtiene de restar a la primera suma móvil el primer valor del Cuadro I (19,5) y adicionar el 7o. valor, que por coincidencia es también 19,5. La tercera suma móvil se obtiene de restar a la 2a. suma móvil el tercer valor del Cuadro I (15,6) y adicionar el 8o. valor (15,4), y así sucesivamente. La última suma móvil registrada en el Cuadro II (149,8) se obtiene de la suma de los últimos 6 valores registrados en el Cuadro I.

CUADRO II
SUMA MOVIL DE 6 TERMINOS

AÑOS	I	II	III	IV	V	VI
0	—	—	111,6	111,6	111,8	112,1
1	112,9	113,8	115,2	116,3	117,4	118,5
2	119,3	120,5	121,0	121,5	122,7	124,5
3	126,7	128,4	130,1	131,9	134,6	138,1
4	141,2	144,7	148,9	152,3	154,8	156,4
5	158,7	161,3	163,0	164,5	164,4	162,7
6	162,9	163,1	162,9	161,8	160,2	160,5
7	160,6	159,7	160,0	162,2	163,5	164,0
8	162,9	161,5	157,9	152,4	150,4	148,7
9	148,4	144,6	149,8	—	—	—

iii) Técnicamente los valores del Cuadro II deberían estar centrados. Por ejemplo, el primer valor 111,6 debió haberse escrito entre el III y IV bimestre y el resto de los valores corridos medio espacio hacia la derecha (entre semestres) y el último valor (149,8) debería haber quedado entre el III y IV bimestre del último año (año 9); sin embargo, por razones tipográficas y de comodidad, se escribieron como se escribieron. Obsérvese, además, que al comienzo de la serie del Cuadro II se perdieron 2 datos y al final de la misma: 3, en total 5. En esta tercera etapa, se procede a centrar los promedios móviles. El procedimiento consiste en tomar una suma móvil de 2 términos de las cifras obtenidas en el Cuadro II, lo cual permitirá centrar los datos y perder igual número de términos en ambos extremos (3 y 3). Los resultados se muestran en el Cuadro III.

CUADRO III
SUMA MOVIL DE 2 TERMINOS

AÑOS	I	II	III	IV	V	VI
0	—	—	—	223,2	223,4	223,9
1	225,0	226,7	229,0	231,5	233,7	235,9
2	237,8	239,8	241,5	242,5	244,2	247,2
3	251,2	255,1	258,5	261,0	266,5	272,7
4	279,3	285,9	293,6	301,2	307,1	311,2
5	315,1	320,0	324,3	327,5	328,9	327,1
6	325,6	326,0	326,0	324,7	322,0	320,7
7	321,1	320,3	319,7	322,2	325,7	327,5
8	326,9	324,4	319,4	310,3	302,8	299,1
9	297,1	293,0	294,4	—	—	—

iv) Una vez obtenida la suma móvil de 2 términos (Cuadro III), se dividen todos y cada uno de los términos por 12. El cociente es la media móvil de 6 términos, los que se registran de igual manera que los del Cuadro III. Los resultados se presentan en el Cuadro IV

C U A D R O I V
PROMEDIOS MOVILES DE 6 TERMINOS

AÑOS	I	II	III	IV	V	VI
0	—	—	—	18,6	18,6	18,7
1	18,7	18,9	19,1	19,3	19,5	19,7
2	19,8	20,0	20,1	20,2	20,3	20,6
3	20,9	21,3	21,5	21,7	22,2	22,7
4	23,3	23,8	24,5	25,1	25,6	25,9
5	26,3	26,7	27,0	27,3	27,4	27,3
6	27,1	27,2	27,2	27,1	26,8	26,7
7	26,8	26,7	26,6	26,8	27,1	27,3
8	27,2	27,0	26,6	25,9	25,2	24,9
9	24,8	24,4	24,5	—	—	—

v) La etapa siguiente consiste en calcular los "porcentajes del promedio móvil". El procedimiento consiste en dividir término a término cada dato original (Cuadro I) por cada media móvil de 6 términos (Cuadro IV) y cada cociente multiplicarlo por 100, para darle forma convencional de índice. Los resultados se presentan en el Cuadro V

C U A D R O V
COCIENTES ENTRE DATOS ORIGINALES Y PROMEDIOS MOVILES

AÑOS	I	II	III	IV	V	VI
0	—	—	—	95,2	110,8	123,0
1	104,3	81,5	83,2	85,9	110,3	123,9
2	104,0	82,5	84,6	95,5	111,8	120,9
3	101,0	83,1	87,4	99,1	109,9	117,2
4	98,3	85,7	91,0	98,0	109,0	118,9
5	100,0	85,8	88,5	98,5	111,3	119,0
6	102,6	83,8	81,6	100,0	114,6	121,0
7	99,6	79,4	84,6	101,5	110,0	119,4
8	106,3	83,3	86,5	97,4	112,7	116,5
9	94,4	84,0	86,9	—	—	—

vi) Finalmente, para obtener los Indices de Variación Estacional se calcula la mediana o la media aritmética para cada columna del Cuadro V. En este caso, se usó esta última y como se trata de información bimestral, la suma de las medias debería alcanzar a 600 (1 200 para datos mensuales). Como la adición de la índices llegó a 599,4, fué preciso hacer una pequeña corrección. Los resultados se muestran en el Cuadro VI; pero antes se advierte y recomienda que, cuando el número de observaciones sea mayor que el presentado en esta oportunidad (mayor de 100) no se utilizan todos los datos del Cuadro V; si entre los porcentajes correspondientes se observaron algunos que destaquen por su anormalidad, entonces es conveniente suprimirlos al calcular los promedios. En el ejemplo no ha sido precisa tal supresión porque tales anormalidades no son significativas.

C U A D R O VI
INDICES DE VARIACION ESTACIONAL

Semestre	Indice (1)	Indice (2)
I	101.1	101.2
II	83.2	83.3
III	86.0	86.1
IV	97.9	98.0
V	111.2	111.3
VI	120.0	120.1
Totales	599.4	600.0

(1) Corresponde a la media efectiva

(2) Corresponde a la media corregida

vii) El conocimiento de los índices estacionales permite realizar la desestacionalización de la serie. Esta operación equivale a eliminar la componente en cuestión, dividiendo cada dato de la serie original, por el índice de variación respectivo. La mecánica de la desestacionalización para el ejemplo que se está desarrollando es la siguiente:

- la columna I del Cuadro I, que corresponde a los primeros semestres de los 10 años, se divide por 101.2 que es el índice estacional correspondiente a los primeros semestres;
- la columna II del Cuadro I, que corresponde a los segundos semestres de los 10 años, se divide por 83.3 que es el índice estacional correspondiente a los segundos semestres, etc. Los resultados se muestran en el Cuadro VII.

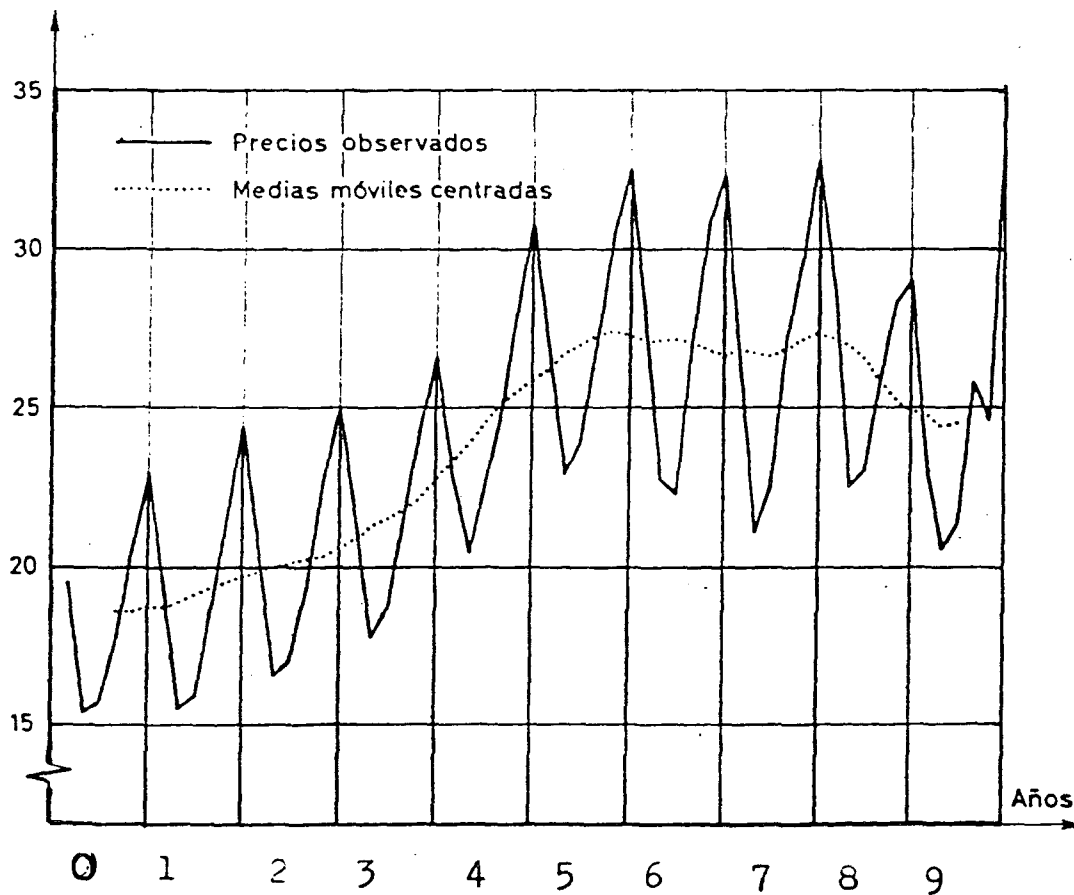
La desestacionalización tiene gran utilidad para estudiar la coyuntura y tener una idea, en un momento dado, qué tendencia de corto plazo (obviamente) muestran los precios, los salarios agrícolas, los rendimientos, la producción, la exportación frutícola, la importación de abonos y pesticidas, etc. con el objeto de hacer revisiones en los planes ajustes en las políticas respectivas, predicciones de corto plazo, etc.

C U A D R O VII
PRODUCCION DESESTACIONALIZADA

AÑOS	I	II	III	IV	V	VI
0	19,3	18,2	18,1	18,1	18,5	19,1
1	19,3	18,5	18,4	18,9	19,3	20,3
2	20,4	19,8	19,7	19,7	20,4	20,7
3	20,8	21,2	21,8	21,9	21,9	22,1
4	22,6	24,5	25,9	25,1	25,1	25,6
5	26,0	27,5	27,7	27,4	27,4	27,1
6	27,5	27,4	25,8	27,7	27,6	26,9
7	26,4	25,4	26,1	27,8	26,8	27,1
8	28,5	27,0	26,7	26,6	25,5	24,1
9	23,1	24,6	24,7	26,3	22,1	28,5

viii) En el gráfico que se muestra más abajo, se presentan los valores del Cuadro I y permite observar la sistemática estacionalidad de la serie. Conjuntamente con la representación de los datos originales, se han gráficado los promedios móviles centrados (Cuadro IV), advirtiéndose, de plano, la eliminación de la estacionalidad. Por otra parte, el gráfico indica que la producción de pollos tuvo una tendencia creciente hasta 1982 (año 5), para estancarse en los 2 años siguientes y mostrar un retroceso en el último período, llegando a los niveles de 1981 (año 4). Algunas razones que explican esta situación son:

- la indiscriminada importación de pollos desde el CEE;
- el encarecimiento de algunos insumos importados, entre los cuales destacan la harina de pescado, vacunas, etc.



Ejemplo

En el Cuadro de la página siguiente, aparecen las cifras correspondientes a la exportación de pelo de conejo, expresadas en miles de US\$. La serie abarca un período de 25 años (1960 a 1984, ambos inclusive). Con la información contenida en el Cuadro se pide:

- ajustar una línea recta, por el método de los mínimos cuadrados;
- mediante la ecuación de ajuste, estimar el valor para 1985; y,
- representar gráficamente los datos originales y la ecuación de ajuste.

Solución

i) Para ajustar una recta de tendencia del tipo $Y = a_1 X + a_0$ se aplican las ecuaciones normales descritas en páginas anteriores. Efectuando los reemplazos del caso, según los cálculos del Cuadro de la página siguiente, se tiene:

$$\begin{aligned} 168\,779 &= 25a_0 + 300a_1 \\ 2\,194\,972 &= 300a_0 + 4\,900a_1 \end{aligned}$$

Resolviendo por determinantes:

Determinante principal: $\Delta = (4\,900)(25) - (300)(300) = 32\,500$

Cálculo de a_0 $\begin{vmatrix} 168\,779 & 300 \\ 2\,194\,972 & 4\,900 \end{vmatrix} = \frac{168\,525\,500}{32\,500} = 5\,185$

Cálculo de a_1 $\begin{vmatrix} 25 & 168\,779 \\ 300 & 2\,194\,972 \end{vmatrix} = \frac{4\,240\,600}{32\,500} = 131$

$$Y = 131X + 5\,185$$

EXPORTACION DE PELOS DE CONEJO
(Miles de US\$)

ANOS	X (1)	Y (2)	XY (3)	X ² (4)
1960	0	6 513	0	0
1961	1	5 090	5 090	1
1962	2	4 154	8 308	4
1963	3	5 954	17 862	9
1964	4	5 352	21 408	16
1965	5	7 666	38 330	25
1966	6	5 623	33 738	36
1967	7	5 953	41 671	49
1968	8	4 132	33 056	64
1969	9	5 474	49 266	81
1970	10	6 530	65 300	100
1971	11	5 402	59 422	121
1972	12	6 754	81 048	144
1973	13	7 444	96 772	169
1974	14	7 554	105 756	196
1975	15	9 101	136 515	225
1976	16	8 337	133 392	256
1977	17	7 070	120 190	289
1978	18	8 407	151 326	324
1979	19	7 807	148 333	361
1980	20	6 187	123 740	400
1981	21	8 122	170 562	441
1982	22	8 353	183 766	484
1983	23	9 079	208 817	529
1984	24	6 721	161 304	576
Totales	300	168 779	2 194 972	4 900

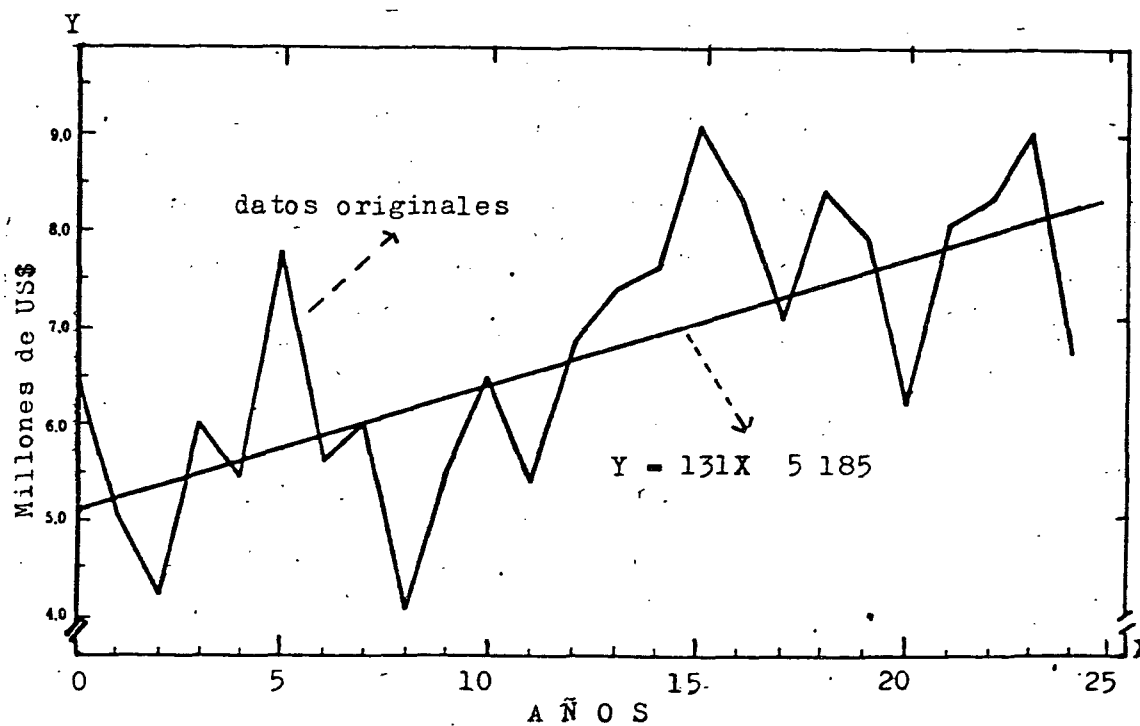
- (1) Variable independiente (Años codificados para simplificar los cálculos);
- (2) Variable dependiente (Valor de las exportaciones de pelo de conejo, en miles de dólares);
- (3) Columna complementaria, que junto a la (1), permiten resolver las ecuaciones normales.
- (4) Idem (3).

ii) Para hacer una estimación del posible valor que registrarán las exportaciones en 1985, se reemplaza en la ecuación ajustada X por su valor codificado (25):

$$Y^* = 131(25) + 5\ 185 = 8\ 460$$

En consecuencia, la estimación puntual alcanza a US\$ 8,5 millones aproximadamente. Existen métodos, propios de la inferencia estadística, que permiten hacer estimaciones de otro tipo; un estimado por intervalo o intervalo de confianza del 95% por ejemplo, que permite tener un límite inferior de confianza y un límite superior de confianza y entregar resultados como el siguiente (ejemplo hipotético): el monto de las exportaciones para 1985, con un 95% de confianza, podrían fluctuar entre US\$ 8,1 y US\$ 8,7 millones, etc.

iii) La graficación de los datos originales y ajustados, es la siguiente:



•
•
•

•
•
•

NUMEROS INDICES

NUMEROS INDICES

1. DEFINICION

Un número índice es un cociente o un promedio de cocientes expresados como porcentaje. Involucra dos o más períodos, uno de los cuales es el período base. El valor al período de base sirve como el punto estándar de comparación, mientras que los valores en otros períodos se usan para mostrar el cambio porcentual en valor con respecto al valor estándar del período base.

2. PERIODO BASE

La determinación del período base depende del destino del índice. Si únicamente interesa conocer como han variado los precios entre dos años extremos de un período determinado, basta tomar como base en el año inicial del período. En cambio para una serie continua de índices anuales o mensuales, es de gran importancia ubicar un período que no represente anomalías, es decir, un período base normal, entendiéndose por tal, un período que no registre cambios violentos en el campo del cual se extrajo la masa de datos que posteriormente servirá para construir la serie de números índices.

Se utiliza la expresión base propiamente tal para referirse al período de diseño del índice y la expresión base aritmética para referirse a cualquier período que por transformación lineal (traslados proporcionales) se le haya asignado el valor 100. El período que se toma como base puede ser:

- Un mes
- Un año
- dos o más años, etc.

Generalmente la base de los números índices es fija, pero también es posible calcularlos con base variable.

Los índices de base fija son aquellos en que se toma como punto de referencia o comparación un mismo período. En todo caso las variaciones del índice, se calculan no sólo con respecto a la base, sino también respecto de fechas cualesquiera comprendidas dentro de la serie formada por el índice.

Ejemplo:

Supongamos el siguiente índice

AÑOS	INDICE 1980=100	VARIACIONES %
1980	100.0	-
1981	120.0	+ 20.0
1982	95.0	- 20.8
1983	110.0	+ 15.8

Las cifras anteriores se interpretan de la siguiente manera:

- El período de diseño del índice fué el año 1980
- Que entre 1980 y 1983 el índice aumentó en 10%.

Además se tienen las siguientes alternativas.

- Que entre 1980 y 1981 aumentó en 20%
- Que entre 1981 y 1982 bajó en 20.8%
- Que entre 1982 y 1983 aumentó en 15.8%

Finalmente, los índices de base variable son aquellos que tienen como base el período inmediatamente anterior.

Ejemplo: Usando de las mismas cifras del caso anterior, el correspondiente índice de base variable sería:

AÑO	INDICE (base variable)
1980	100
1981	120.0
1982	79.2
1983	115.8

Las cifras anteriores se interpretan de la siguiente manera:

- Que para el año 0 (en este caso el año 1980) ambos tipos de índices coinciden.
- Que para el año 1 (en este caso el año 1981) el índice aumentó en un 20%, que coincide con el índice de base fija, y no sólo en este caso, sino que en todos.
- Que el índice disminuyó en 1982 con respecto a 1981 en un 20.8%.
- Que el índice aumentó en 1983 con respecto a 1982 en un 15.8%.
- Que en el caso de los números índices de base variable, los porcentajes de variabilidad se obtienen para un año determinado, restando 100 en el supuesto que el índice sea superior a 100, la diferencia es el porcentaje de aumento. Cuando el índice es inferior a 100 puntos, se busca el complemento a 100 y la diferencia constituye el porcentaje de disminución del índice.

3. SERIE DE TIEMPO INDEXADA

Una serie de tiempo indexada es una lista de números índices para dos o más períodos, en donde para cada número índice se usa el mismo año base.

El ejemplo del Cuadro 1 es una serie de tiempo indexada para los años 1975, 1976, 1977,.....,1982. Una serie de tiempo indexada es simplemente una transformación de la serie original a otra que da el valor para cada año como porcentaje del valor del año base.

Ejemplo:

Expresar en forma de índice las cifras del PIB (Producto Interno Bruto) del cuadro que sigue:

CUADRO No. 1

AÑOS	PIB (Millones A/. de 1975) (1)	INDICE 1975=100 (2)	INDICE 1980=100 (3)
1975	107.740	100.0	73.0
1976	117.679	109.2	79.7
1977	125.369	116.4	84.9
1978	133.632	124.0	90.5
1979	140.718	130.6	95.3
1980	147.622	137.0	100.0
1981 sd	154.331	143.2	104.5
1982 (p)	156.467	145.2	106.0

FUENTE: Cuentas Nacionales del Ecuador (1973-1982) No.5, 1983.

Quito - Ecuador. Banco Central del Ecuador.

sd= Semidefinitiva

p = provisional

Las cifras del cuadro anterior representan el Producto Interno Bruto en millones de sucres de 1975, esto es, en términos REALES.

Las columnas (2) y (3) representan al PIB en forma de Índice. La columna (2) con base en el año 1975=100 y la (3) con base en 1980=100.

La columna (2) se obtuvo dividiendo todos y cada uno de los términos de la columna (1) por 107.740 y el cociente se multiplicó por 100. Por ejemplo, el índice para 1979 se calculó así:

$$I_{1975/1979} = \frac{140.718}{107.740} \times 100 = 130,6$$

La columna (3) se obtuvo dividiendo todos y cada uno de los términos de la columna (1) por 147.622 y el cociente se multiplicó por 100. Por ejemplo, el índice para 1979 se calculó así:

$$I_{1980/1979} = \frac{140.718}{147.622} \times 100 = 95,3$$

(El símbolo $I_{1980/1979}$, se lee, convencionalmente, índice para 1979 con base en 1980).

Por otra parte es necesario advertir que las variaciones porcentuales de las cifras del cuadro que se comenta, permanecen inalteradas cualquiera que sea el año base. En efecto:

- De la columna (1) se obtiene que el porcentaje de variación habido entre 1975 y 1982 es de 45.2%;
- De la columna (2) se obtiene por simple inspección, que el porcentaje de variación habido entre 1975 y 1982 es de 45.2%;
- De la columna (3) se obtiene que el porcentaje de variación habido entre 1975 y 1982, también es de 45.2%;
- En cuanto a las tasas de variación interanuales (o simplemente, la tasa de variación anual) ocurre lo mismo, esto es las tasas no cambian. Véase el cuadro siguiente, donde se muestra tal situación en forma completa.

CUADRO No. 2

AÑOS	PIB	INDICE 1975=100	INDICE 1980=100
1975	-	-	-
1976	9.2	9.2	9.2
1977	6.5	6.5	6.5
1978	6.6	6.6	6.6
1979	5.3	5.3	5.3
1980	4.9	4.9	4.9
1981	4.5	4.5	4.5
1982	1.4	1.4	1.4

FUENTE: Cuadro No. 1

Siguiendo con el ejemplo del cuadro No. 1, en que se tomó como base el año 1975=100 en un caso y 1980=100 en el otro, ahora se considerará como período base los años 1976, 1977 y 1978, esto es, 1976-1978=100.

CUADRO No. 3

AÑOS	PIB (Millones s/. de 1975)	INDICE 1976-1978=100	VARIACION % Anual
1975	107.740	85.8	-
1976	117.679	93.7	9.2
1977	125.369	99.9	6.6
1978	133.632	106.4	6.5
1979	140.718	112.1	5.3
1980	147.622	117.6	4.9
1981 (sd)	154.331	122.9	4.5
1982 (p)	156.467	124.6	1.4

FUENTE: Cuadro No. 1

La columna Índice 1976-1978 = 100, se obtuvo dividiendo la columna del PBI por 125.560 que es la media aritmética de los 3 años: 1976, 1977 y 1978 y multiplicando el cociente por 100. Obsérvese que el promedio de los índices para ese mismo período es 100, y que la variación tanto por ciento anual es también la misma que cuando se calculó el índice con base 1975 = 100 y 1980 = 100.

4. INDICES AGREGATIVOS SIMPLES

Un índice agregativo simple se calcula como el cociente entre la suma de los precios de un conjunto de bienes para un año dado y la suma de los precios de los mismos bienes en el año base, expresado como porcentaje. En símbolos, se tiene

$$\text{Índice de precios de agregación simple} = \frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o}$$

donde Σp_o = suma de todos los precios de bienes en el año base.

Σp_n = suma de los precios de bienes correspondientes en el año dado.

Para calcular un índice agregativo simple, existen dos alternativas:

- i. sumando los precios para cada período (año, mes, etc.) y dividiendo cada total, por la suma de los correspondientes precios en el período base.

Si bien es cierto que este método es de fácil aplicación, no es menos cierto que involucra dos serias desventajas:

- No considera la importancia relativa de los diversos bienes; y

- Hay que sumar unidades heterogéneas.

ii. Parte de los inconvenientes del método anterior se logran superar calculando previamente los relativos de precios de cada artículo. Así, el relativo de un determinado artículo correspondiente al período t, es:

$$P_t = \frac{P'_t}{P'_0}$$

Los relativos de precios o precios relativos, son números abstractos, sin dimensión.

5. INDICES AGREGATIVOS SIMPLES DE RELATIVOS DE PRECIOS (IASRP)

Estos índices se obtienen promediando los relativos de precios. El promedio a utilizar puede ser cualquiera de los estadígrafos de posición: media aritmética, geometría, moda, mediana, etc. En todo caso estos índices no logran proporcionar una adecuada idea de la importancia de las variaciones de precios de los diversos artículos.

Las fórmulas para calcular un IASRP utilizando la media como promedio es:

$$P^I_x = \frac{\frac{P'_i}{P'_0} + \frac{P''_i}{P''_0} + \frac{P'''_i}{P'''_0} + \dots + \frac{P_i^{(n)}}{P_o^{(n)}}}{n} = \frac{\sum \frac{P_i}{P_o}}{n}$$

6. PONDERACION

Para calcular adecuadamente el promedio de los precios relativos, debe establecerse la importancia o ponderación de cada artículo. Los índices calculados mediante fórmulas en la que no aparece explícita una ponderación, no pueden reflejar adecuadamente las variaciones del fenómeno en estudio.

Las ponderaciones pueden ser fijas o variables. Técnicamente, las ponderaciones deberían ser variables; sin embargo, por razones de carácter práctico se usan ponderaciones fijas. Es por ello, que se recomienda rediseñar un índice periódicamente, cada 5 a 10 años.

7. INDICES PONDERADOS

En general, los índices ponderados o índices de precios (cantidades) agregativos ponderados superan en buena medida las desventajas de los índices agregativos simples. Ocurre en la práctica, que existen numerosas fórmulas para computar estos índices de donde surge el problema de seleccionar la fórmula más adecuada para que refleje las variaciones que se desea cuantificar.

Las fórmulas más utilizadas en la práctica, para la confección de índices de precios o cantidades, son las de Laspeyres y la de Paasche.

El índice de precios de Laspeyres usa las cantidades del año base como ponderaciones para los precios del año dado. La justificación de este criterio es que las cantidades

del año base no cambian de un año a otro, y entonces se pueden hacer comparaciones más objetivas del cambio en precios y en el poder adquisitivo en el tiempo, ya que se consideran sólo los cambios del precio de un número dado de unidades, sin cambiar este número de unidades.

La fórmula de Paasche, de uso menos frecuente usa para el cálculo del índice de precios las cantidades del año dado en lugar de las cantidades del año base como pesos para el índice ponderado. Las fórmulas son las siguientes:

	Cantidad	Precios
Indice de Laspeyres:	$Q_L = \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_0 q_0}$	$P_L = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0}$
Indice de Paasche:	$Q_P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_0}$	$P_P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t}$

En estas fórmulas se ha suprimido el factor 100 por las razones ya conocidas. Además, Q y P vienen acompañados de unos subíndices fáciles de interpretar, pues son, simplemente las letras iniciales de los nombres de sus autores.

Si en las fórmulas de Laspeyres y de Paasche se toman los índices de precios, por ejemplo, y cada sumando del numerador se divide y se multiplica por el precio base p_0 , se tiene

$$P_L = \frac{\sum \frac{p_t}{p_0} p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

$$P_P = \frac{\sum \frac{p_t}{p_0} p_0 q_t}{\sum p_0 q_t}$$

lo anterior indica que el índice de Laspeyres es la media aritmética de los índices simples (p_t/p_0) ponderados con los valores $(p_0 q_0)$ del año base y que el índice de Paasche es también una media aritmética de los índices simples (p_t/p_0) , pero ponderados con los valores $(p_0 q_t)$ de las cantidades del tiempo t a los precios del tiempo 0.

Problemas

El cuadro 4 muestra información sistematizada sobre precios al productor y producción de diversos productos agrícolas, para los años 1976 y 1984

CUADRO 4

Productos	PRECIO S/ por quintal		COSECHA Miles de quintales	
	1976	1984	1976	1984
Trigo	2,84	7,70	10 785	11 145
Cebada	2,68	7,48	1 119	1 173
Avena	2,25	8,22	1 038	1 111
Maíz	2,98	8,15	1 339	1 460
Frejoles	11,84	27,11	708	848
Arroz	3,11	8,27	484	969
Garbanzos	7,62	15,92	40	40
Papas	3,63	7,50	7 412	6 675
Lentejas	7,87	32,18	189	168

Se pide calcular para 1984, los indicadores que a continuación se señalan:

- i) el índice agregativo simple de precios
- ii) el índice agregativo simple de cantidades
- iii) el índice de precios de Laspeyres
- iv) el índice de precios de Paasche
- v) el índice de cantidades de Laspeyres
- vi) el índice de cantidades de Paasche

H O J A C A L C U L O S

	P ₇₆	Q ₇₆	P ₈₄	Q ₈₄	P ₇₆ ^Q ₇₆	P ₇₆ ^Q ₈₄	P ₈₄ ^Q ₇₆	P ₈₄ ^Q ₈₄
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,84	10 785	7,70	11 145	30 629,40	31 651,80	83 044,50	85 816,50
2	2,68	1 119	7,48	1 173	2 998,90	3 143,64	8 370,12	8 774,04
3	2,25	1 038	8,22	1 111	2 335,50	2 499,75	8 532,36	9 132,42
4	2,98	1 339	8,15	1 460	3 990,22	4 350,80	10 912,85	11 899,00
5	11,84	708	27,11	848	8 382,72	10 040,32	19 193,88	22 989,28
6	3,11	484	8,27	969	1 505,24	3 013,59	4 002,68	8 013,63
7	7,62	40	15,92	40	304,80	304,80	636,80	636,80
8	3,63	7 412	7,50	6 675	26 905,56	24 230,25	55 590,00	50 062,50
9	7,87	189	32,18	168	1 487,43	1 322,16	6 082,02	3 406,24
					78 539,79	80 557,11	196 365,21	202 730,41

Soluciones

i) Para el cómputo del índice agregativo simple de relativos de precios IASRP se calculan los cocientes de los precios de los 9 productos (col. 3 dividida por col. 1 de la HOJA DE CALCULOS). Los 9 cocientes se suman, según se indica en el cuadro 5 y se promedian (se dividen por 9) el promedio se multiplica por 100, siendo éste el índice respectivo. Entonces el resultado final es

AÑOS	INDICE DE PRECIOS
1976	100.0
1984	278.7

Interpretación:

- La base del índice es 1976 100
- En el período 1976/84, es decir, en un lapso de 8 años, el índice aumentó en 178,7% (278,7 - 100.0)
- El índice para 1984, muestra 278.7 puntos
- La tasa media de crecimiento acumulativo anual fué de 13,7% (esta cifra se explicará posteriormente).

ii) Para el cómputo del IASRQ se calculan los cocientes de la producción de los 9 productos como se indicó en el punto anterior (Ver cuadro 5). El resultado final es

AÑOS	INDICE DE CANTIDAD
1976	100,0
1984	113.7

Interpretación:

- La base del índice es 1976 100
- En el período 1976/84 la producción aumentó en 13,7% (100.0 - 113.7)
- La tasa media de crecimiento fué de 1.32 %

C U A D R O 5.

Cómputo de relativos de precios y cantidades		
Productos	P_{84}/P_{76}	Q_{84}/Q_{76}
Trigo	2,711	1,033
Cebada	2,791	1,048
Avena	3,653	1,070
Maíz	2,735	1,090
Frejoles	2,290	1,198
Arroz	2,659	2,002
Garbanzos	2,089	1,000
Papas	2,066	0,901
Lentejas	4,089	0,889
TOTALES	25,083	10,231

iii) El índice de precios de Laspeyres se calculará según los cómputos registrados en la HOJA DE CALCULO, columnas 7 y 5

$$P_L = \frac{\sum P_{84} Q_{76}}{\sum P_{76} Q_{76}} = \frac{\text{Suma col. 7}}{\text{Suma col. 5}} = \frac{196\ 365,21}{78\ 539,79} = 2,5002 \times 100 = 250$$

AÑOS	INDICE
1976	100.0
1934	250.0

iv) El índice de precios de Paasche se calculará según los cálculos registrados en la HOJA DE CALCULO, columnas 8 y 6

$$P_P = \frac{\sum P_{84}^Q}{\sum P_{76}^Q} = \frac{\text{Suma col. 8}}{\text{Suma col. 6}} = \frac{202\,730,41}{80\,557,11} = 2,5166 \times 100 = 251,7$$

AÑOS	INDICE
1976	100.0
1984	251,7

v) El índice de cantidades de Laspeyres se calculará según los cálculos registrados en la HOJA DE CALCULO, Columnas 6 y 5

$$Q_L = \frac{\sum P_{76}^Q}{\sum P_{76}^Q} = \frac{\text{Suma col. 6}}{\text{Suma col. 5}} = \frac{80\,557,11}{78\,539,79} = 1,0257 \times 100 = 102,6$$

AÑOS	INDICE
1976	100.0
1984	102,6

vi) El índice de cantidades de Paasche se calculará según los cálculos registrados en la HOJA DE CALCULO, columnas 8 y 7

$$Q_P = \frac{\sum P_{84}^Q}{\sum P_{84}^Q} = \frac{\text{Suma col. 8}}{\text{Suma col. 7}} = \frac{202\,730,41}{196\,365,21} = 1,0324 \times 100 = 103,2$$

AÑOS	INDICE
1976	100.0
1984	103.2

8. EMPALME DE INDICES

Indicadores como el Índice de Precios al Consumidor, por ejemplo, pierden representatividad paulatinamente debido a cambios en los gustos y costumbres de los consumidores, modificándose, por tanto, la composición de la canasta de bienes y servicios, haciéndose indispensable la confección de nuevas bases para el cálculo de otro índice más de acuerdo a la nueva estructura del consumo. Esta situación significa el abandono del antiguo índice y la pérdida de la continuidad en la serie. El problema adquiere relevancia cuando es necesaria estudiar la variación del fenómeno entre fechas cubiertas por uno y otro índice separadamente. El problema se soluciona empalmando ambas series, para lo cual es necesario calcular índices con la antigua y con la nueva base, que cubran un mismo período y establecer así un período común de enlace. La mecánica de esta operación se presenta en el Cuadro 6

CUADRO 6

INDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

AÑOS	INDICES EMPALMADOS			
	BASE 1948 (1)	BASE 1980 (2)	BASE 1948 (3)	BASE 1980 (4)
1977	106.0		106.0	49,2
1978	120,5		120.5	55.9
1979	153.0		153.0	71.0
1980	215,4	100,0	215,4	100,0
1981		110,2	237,4	110.2
1982		130.0	280.0	130.0
1983		147,9	318,6	147,9

Los 3 primeros índices de la columna (4) se obtuvieron dividiendo por 215,4 y multiplicado por 100 los 3 primeros índices de la columna (1).

Los 4 últimos índices de la columna (3), se obtuvieron multiplicando por 215,4 y dividiendo por 100, los 4 últimos índices de la columna (2).

RECUERDESE: Cuando se dividen dos índices, el cociente se multiplica por 100
Cuando se multiplican dos índices, el producto se divide por 100.

9. RELACION NETA DE CAMBIO

La Relación neta de cambio o término del intercambio, expresa el poder de compra de las exportaciones con respecto a las importaciones. Esta relación que se muestra en forma de índice, señala si es superior a 100, que los precios de las exportaciones han crecido más (o han bajado menos) que los precios de las importaciones. Cuando la relación neta de cambio, es mayor de 100, se dice que los términos del intercambio son favorables y desfavorables en caso contrario. En el Cuadro 7 se muestra un caso hipotético. Nótese que ambos índices, tanto el de importaciones, como el de las exportaciones, deben tener la misma base, para que la relación tenga sentido.

CUADRO 7

RELACION NETA DE CAMBIO
(Indices base: 1977 100)

AÑOS	INDICES DE PRECIOS DE		RELACION NETA (X)/(M)x100
	EXPORTACIONES (X)	IMPORTACIONES (M)	
1977	100.0	100.0	100.0
1978	117.8	114.8	102.6
1979	114.4	132.5	86.3
1980	117.6	142.8	82.4
1981	121.8	151.2	80.6
1982	132.5	166.1	79.8
1983	140,3	199.0	70.5
1984	160.0	250.0	64.0

10 RELACION DE PARIDAD

En el punto (9), se explicó la relación neta de cambio. En ella se hizo la comparación entre el índice de precios de las exportaciones (precios percibidos por las ventas al exterior) y el índice de precios de las importaciones (precios pagados por las compras realizadas en el exterior). Este mismo principio se podría aplicar a infinidad de situaciones, como por ejemplo, al sector de la construcción, al sector industrial, al sector agrícola, etc.

En muchos países existen Índices de precios agrícolas e Índices de precios pagados por el sector (incluye insumos nacionales e importados). Usando los mismos principios del punto (9), se podría calcular un Índice de Paridad de la Agricultura para un cierto país. Imagínese la siguiente situación:

INDICES DE PARIDAD DE LA AGRICULTURA

AÑOS	INDICES DE PRECIOS		INDICE DE PARIDAD
	PERCIBIDOS	PAGADOS	
1980	96.0	76.0	126.0
1981	93.0	87.0	107.0
1982	97.0	95.0	102.0
1983	100.0	100.0	100.0
1984	105.0	110.0	95.0
1985	115.0	150.0	77.0

Las cifras del Cuadro anterior, revelan un deterioro en el poder de compra de la agricultura de un 39.9% para el sexenio 1980/85, equivalente a una caída de 9,4% acumulativa anual. Para que el sector recupere los niveles de 1980, sus precios debieron haber reajustado, en 1985, en más de un 64%, es decir, el Índice de los precios percibidos, debió haber alcanzado a 189 puntos, en el supuesto que los precios pagados por la agricultura no puedan ser manipulados.

MATEMATICAS FINANCIERAS

GENERALIDADES SOBRE MATEMATICAS FINANCIERAS

Las matemáticas financieras tienen por objeto el estudio de las operaciones financieras, llamándose así todas aquellas operaciones que generan variaciones cuantitativas del capital, en cualquier sentido que ellas se efectúen. Desde el punto de vista de la economía, los factores de la producción son: el trabajo, el capital, la tierra y la capacidad empresarial; a cada uno de esos factores corresponde por su participación en el proceso productivo una remuneración, denominada, respectivamente, salario, interés, arriendo y utilidad.

En la práctica, la determinación del valor del interés que es cobrado en cualquier transacción financiera, es realizada mediante la consideración de un coeficiente denominado "tasa de interés". La tasa de interés que siempre está referida a un cierto período (año, semestre, trimestre, mes, etc.) no es otra cosa que el precio cobrado por la utilización del capital durante el período considerado. Más concretamente, se puede decir que es el precio del dinero.

1. Interés compuesto

El interés compuesto es aquel sistema de capitalización en que los intereses generados al final de cada período son agregados al capital formado en el comienzo del respectivo período para producir nuevos intereses en el período siguiente.

1.1 Fórmula del monto

$$M(n) = M(o)(1+i)^n$$

En que:

$M(n)$ es el monto compuesto de $M(o)$ al final de n períodos de conversión.

$M(o)$ es el capital inicial, invertido en el período 0 a la tasa i por período de conversión

n número de períodos de conversión

i tasa de interés por período

$(1+i)^n$ es el factor de capitalización. Ver Apéndice II

1.2 Valor actual

El recíproco del factor de capitalización se denomina factor de descuento o factor de actualización y por convención se simboliza por

v para el período 1
 v^2 para el período 2
 v^3 para el período 3
.....
 v^n para el período n

El factor de actualización se halla tabulado y las tablas se titulan "valor actual de 1 a interés compuesto"

De acuerdo a lo anterior y despejando $M(o)$ en (1.1) se tiene la fórmula del "valor actual"

$$M(o) = M(n)v^n \quad (1.2)$$

Recuerde que:

$$\frac{1}{(1+i)} = v ; \quad \frac{1}{(1+i)^2} = v^2 ; \quad \dots \quad \frac{1}{(1+i)^n} = v^n$$

1.3 Capitalización de los intereses

Cuando los intereses son calculados al fin de cierto período (año, semestre, trimestre, mes, etc.) ellos pasan a constituir el capital que irá a producir nuevos intereses en el período siguiente. De esta manera los intereses pueden ser capitalizados anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensualmente, etc. Generalmente, la tasa de interés referida es la anual (aa) con la indicación del período de capitalización.

Ejemplos:

- a) Interés de 18% aa capitalizado semestralmente.
- b) Interés de 20% aa capitalizado trimestralmente.
- c) Interés de 12% aa capitalizado mensualmente.

En estos casos, al calcular el valor de $(1+i)^n$ se emplea la tasa proporcional. Para el caso a) la tasa semestral proporcional al 18% aa es de 9%; para b) la tasa proporcional es de 5% al trimestre; para el caso c) la tasa a ser utilizada es la del 1% al mes.

1.4 Regímenes de capitalización

Se entiende por régimen de capitalización al proceso de formación del interés, distinguiéndose 2 sistemas: el de capitalización continua y el de capitalización discontinua.

1.4.1 Capitalización continua

La capitalización continua es el caso límite cuando el número de capitalizaciones tiende a infinito. La fórmula para calcular el monto es

$$M(n) = M(o)e^{in} \quad (1.4)$$

En que los símbolos son los mismos explicados en (1.1), además de la constante $e = 2,718281$. Para designar la tasa de interés en régimen de capitalización continua, tradicionalmente se emplea la letra griega DELTA minúscula δ y se la denomina "tasa instantánea".

La relación (1.4) es una función exponencial natural y sirve para describir índices constantes de crecimiento continuo, o sea, un crecimiento que se produce constantemente, en lugar de hacerlo a saltos. Se utiliza para expresar índices de crecimiento de la población, índices de ganancia en el peso del ganado, en establos de engorda, etc.

1.4.2 Capitalización discontinua

Es el sistema más usado y su característica es que el interés es generado sólo al fin de cada período a que se refiere la tasa de interés considerada. Es decir, el capital experimenta al final de cada período finito de tiempo, un incremento que es proporcional a ese capital. Por ejemplo, un capital de \$ 100 colocado al 12%aa capitalizado trimestralmente durante 1,5 años, se incrementa al final de cada trimestre en 3%, conforme se observa en la siguiente tabla:

Evolución de un capital de \$100 al 12% aa capitalizado trimestralmente

Final de trimestre	Capital al final de trimestre
0	100.00
1	103.00
2	106.09
3	109.27
4	112.55
5	115.93
6	119,41

El cuadro anterior se puede interpretar así:

Se depositó un capital de \$ 100 el 1o. de enero de 1985; al 30 de mar. de 1985 (final del trimestre 1) se convirtió en \$ 103. Este nuevo capital de \$ 103 se capitalizó en el trimestre y al 30 de junio de 1985 (final del trimestre 2) se convierte de golpe en \$ 106,09. Ello significa que, entre el 1o. de enero y el 29 de marzo, por ejemplo, el capital seguía siendo de \$ 100 para convertirse en \$ 103.00 el 30 de marzo; que entre el 1o. de abril y el 29 de junio el capital seguía siendo de \$ 103 para convertirse en \$ 106,09 al 30 de junio, etc.

Ejemplo 1.

Calcular el monto de un capital de S/ 1 000 al cabo de 4 años, colocado al 18% aa.

Según la tabla financiera del Apéndice II, el factor de capitalización para 4 períodos y al 18% es 1.93877776000, por tanto

$$M(4) = 1\ 000\ 1,93877776$$

$$M(4) = 1\ 938,78$$

Ejemplo 2

Calcular el monto de un capital de S/ 1 000 al cabo de 4 años, colocado al 18% aa, capitalizados semestralmente.

La tasa proporcional será 18% : 2 = 9% semestral.

El # de períodos será: 4 años x 2 semestre = 8 semestres

$$M(8) = 1000(1 + 0.09)^8 \quad (\text{Ver Tabla 10, Apéndice II})$$

$$M(8) = 1000 \times 1,99256$$

$$M(8) = \underline{1\,992,6}$$

Ejemplo 3

Calcular el monto de un capital de S/ 1 000 al cabo de 4 años, colocado al 18% aa, capitalizados trimestralmente.

La tasa proporcional será 18% : 4 = 4,5% trimestral

El # de períodos será: 4 años x 4 trimestres = 16 trimestres

$$M(16) = 1\,000(1 + 0,045)^{16} \quad (\text{Tabla 1, Apéndice II})$$

$$M(16) = 1\,000 \times 2,02237$$

$$M(16) = \underline{2\,022,4}$$

Ejemplo 4

Calcular el monto de un capital de S/ 1 000 al cabo de 4 años, colocado al 18% aa, capitalizados bimestralmente.

La tasa proporcional será 18% : 6 = 3% bimestral

El # de períodos será 4 años x 6 bimestres = 24 bimestres

$$M(24) = 1\,000(1 + 0,03)^{24}$$

$$M(24) = 1\,000 \times 2,032794$$

$$M(24) = \underline{2\,032,8}$$

Ejemplo 5

Calcular el monto de un capital de S/ 1 000 al cabo de 4 años, colocado al 18% aa, con capitalización continua.

$$M(\infty) = 1\,000e^{0,18(4)}$$

$$M(\infty) = 1\,000 \cdot 2,05443$$

$$M(\infty) = \underline{2\,054,4}$$

Resumiendo los resultados obtenidos en los 5 problemas, se tiene

- 1) $M(4) = 1\,938,8$
- 2) $M(8) = 1\,992,6$
- 3) $M(16) = 2\,022,4$
- 4) $M(24) = 2\,032,8$
- 5) $M(\quad) = 2\,054,4$

De las cifras anteriores, se verifica empíricamente, que a medida que aumenta el número de capitalizaciones el monto también aumenta.

Ejemplo 6

El Índice de Precios al Consumidor IPC en Ecuador, registró las siguientes cifras:

diciembre 1983	178.4
diciembre 1984	272.0

Calcular la inflación ecuatoriana para 1984 y el ritmo mensual de la misma.

Para calcular la tasa de inflación para 1984, se calcula el aumento porcentual ($\Delta\%$) habido entre 1983 y 1984:

$$\Delta\% = \frac{272.0}{178.4} 100 - 100 = 52,5\%$$

Según los cálculos anteriores, la inflación ecuatoriana fué de 52,5% en 1984.

Para calcular el ritmo mensual de la inflación, se asume un supuesto simplicador, consistente en partir con un IPC de 100 puntos y que al cabo de 12 meses se transformó en 152,5 puntos, ya que la inflación fué de 52,5%; conforme a lo anterior se tiene:

$$152,5 = 100(1 + i)^{12}$$

Haciendo las operaciones pertinentes se obtiene un valor para i de 3,6% am.

$$272.0 \approx 178.4(1 + 0,0358)^{12}$$

1. Rentas

Se acostumbra a denominar renta (a veces anualidad), en la acepción más amplia de la palabra a un conjunto de pagos periódicos (flujos) destinados a constituir un capital o amortizar una deuda.

A cada suma de las que constituyen el flujo generado por el capital, se le denomina "término de la renta", y al período que separa un término de la renta de otro, se le llama "período de la renta". Las rentas se pueden clasificar desde distintos puntos de vista. Atendiendo al valor de los términos de la renta, éstas se clasifican en dos grupos:

- Rentas constantes, y
- Rentas variables.

Se denomina renta constante aquélla en que todos sus términos son iguales y se llama renta variable aquélla en que sus términos varían de acuerdo con cierta ley o no.

Desde el punto de vista del número de condiciones que deben concurrir para que la renta se produzca, se distinguen:

- Rentas ciertas, y
- Rentas contingentes o aleatorias

Si la condición necesaria para que la renta se produzca es la existencia de un capital, se tiene una renta cierta. Si a esta condición se agrega la de la existencia conjunta de un cierto factor aleatorio, se tiene una renta aleatoria.

Desde el punto de vista de su duración , las rentas pueden clasificarse en:

- Rentas temporales, y
- Rentas perpetuas.

Una renta es temporal cuando el número de términos es limitado, y es perpetua cuando el número de términos es ilimitado.

Se llama época inicial al período en que empieza a percibirse o pagarse una renta, mientras aquél en que son evaluados todos los términos simultáneamente recibe el nombre de "época de valuación". Desde el punto de vista de la diferencia entre la época inicial y la de valuación, se distingue 3 clases de rentas:

- Rentas anticipadas,
- Rentas inmediatas, y
- Rentas diferidas.

Rentas anticipadas son aquéllas en que la época inicial es anterior a la época de valuación; diferida es cuando la época inicial es posterior a la época de valuación e inmediata cuando ambas épocas coinciden.

Finalmente, atendiendo a la forma de pago de los términos de la renta, se distinguen:

- Rentas de pago anticipado, y
- Rentas de pago vencido.

según se paguen al comienzo o al final de cada período.

Es importante definir dos nuevos conceptos que en el estudio de las rentas tienen vital importancia: monto de la renta y valor actual de la renta. El monto de la renta es la suma de los montos compuestos de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo y valor actual de una renta es la suma de los valores actuales de los distintos pagos, cada uno descontado al inicio del plazo (época 0).

2. Cálculo del valor actual de una renta

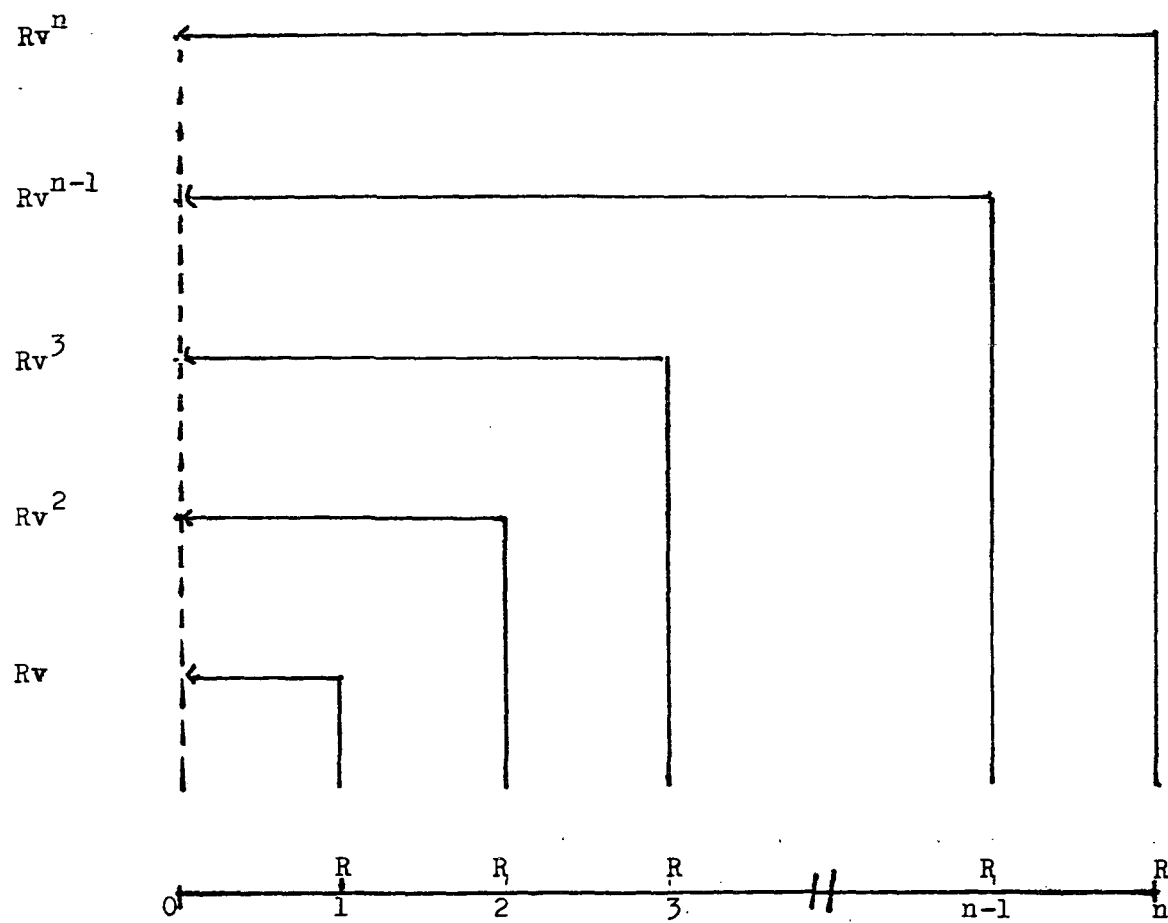
En esta oportunidad sólo nos ocuparemos del cálculo del valor actual de una renta constante, cierta, temporal, inmediata y de pago vencido.

La simbología a utilizar es:

- R = término de la renta o pago periódico
- i = tasa de interés por período de interés.
- n = número de intervalos de pago, coincidente con el número de períodos de interés.
- V = valor actual de la renta.

Para calcular la fórmula de una renta de este tipo, se hará con la ayuda de un gráfico, como el siguiente:

Esquema para la determinación del VALOR ACTUAL de una
renta constante (R), cierta, temporal, inmediata y de
pago vencido



Sumando cada uno de los valores actualizados de cada término de la renta, se tiene:

$$V = R(v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n)$$

La relación anterior permite arribar a la siguiente fórmula compacta del valor actual:

$$V = R \cdot \frac{1 - v^n}{i} \quad (2)$$

La fórmula (2) suele presentarse, también, de la siguiente manera:

$$V = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

en que $a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$

El valor de $a_{\overline{n}|i}$ está tabulado. En el Apéndice II, Tablas 4 al 10, se

presentan diversas tabulaciones para diferentes tasas. Cabe advertir que por razones tipográficas se usó en esta oportunidad el símbolo $a_{\overline{n}|i}$

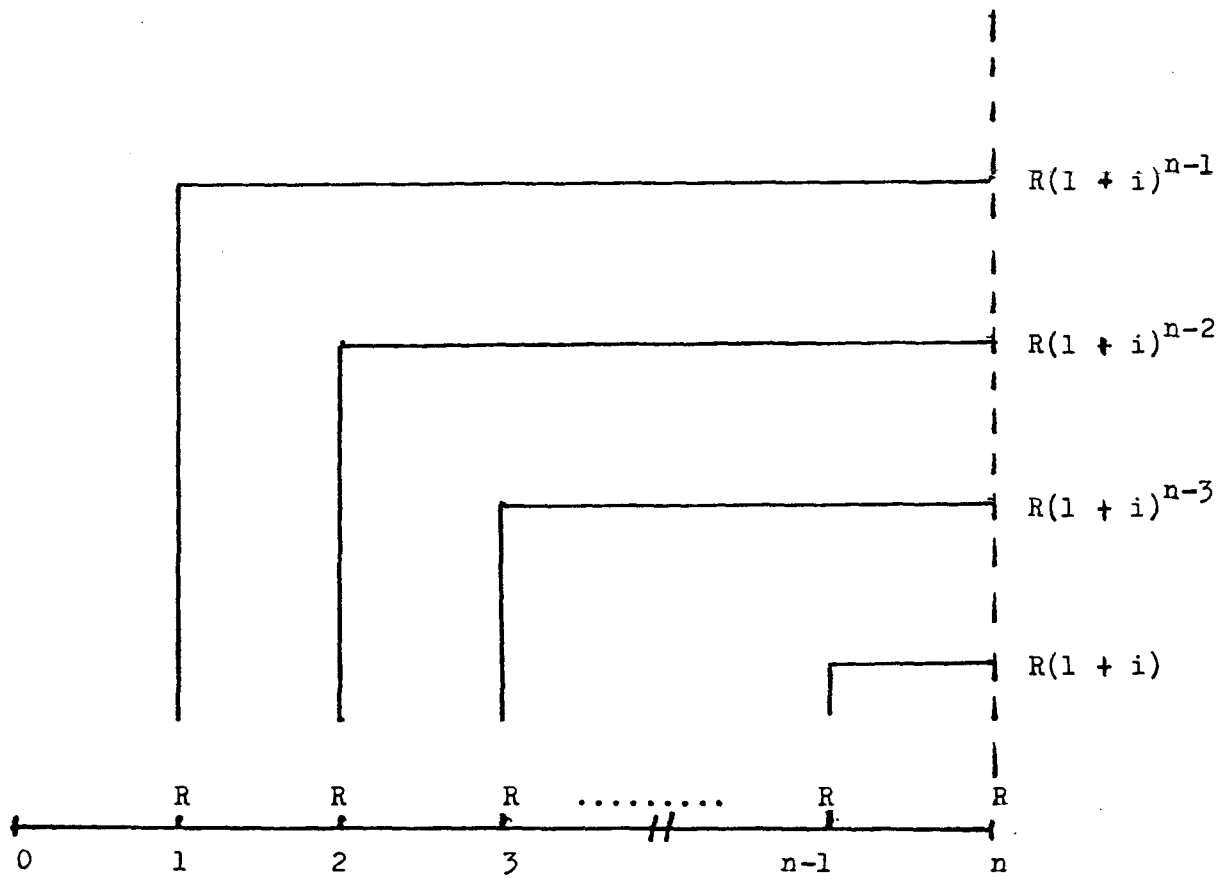
reservado para las rentas de pago anticipado.

3. Cálculo del monto de una renta

Al igual que en (2), nos ocuparemos del monto de una renta constante, cierta, temporal, inmediata y de pago vencido. La letra K servirá para simbolizar el monto.

Para calcular la fórmula del monto K de una renta de este tipo, se hará, al igual que en el caso anterior, con la ayuda de un gráfico, el que se presenta en la página siguiente.

Esquema para la determinación del MONTO de una renta constante (R), cierta, temporal, inmediata y de pago vencido



Sumando cada uno de los montos parciales, se tiene:

$$K = R \left[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} \right]$$

La suma anterior permite arribar a la siguiente fórmula compacta del monto K

$$K = R = \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \quad (3)$$

La fórmula (3) suele presentarse, también, de la siguiente manera:

$$K = R \cdot s_{\overline{n}|i}$$

en que $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$

El valor de $s_{\overline{n}|i}$ está tabulado. En el Apéndice II, Tablas 3 y del

6 al 10 se presentan diversas tabulaciones para diferentes tasas. Cabe advertir que por razones tipográficas se usó en esta oportunidad el símbolo $s_{\overline{n}|i}$ que se lee "ese sub n i" reservado para calcular

el monto de rentas de pago anticipado.

Ejemplo 1

Una empresa agrícola consiguió en el Banco del Estado, un crédito de US\$ 1.5 millones para renovar parte de su maquinaria. El crédito se deberá cancelar en 10 cuotas anuales iguales. El interés que cobra el banco es el 10% aa. Calcular el dividendo anual y confeccionar un cuadro que muestre el desarrollo de la deuda para fines contables.

El problema se puede plantear así:

Hoy se recibió un préstamo de US\$ 1.5 millones (V), al interés del 10% aa. (i); se deberá pagar en 8 (n) cuotas iguales (R) de pago vencido, por tanto:

$$V = Ra_{\overline{8} | .10} \quad \text{ó} \quad 1500000 = Ra_{\overline{8} | .10} \quad (1)$$

el valor tabular de $a_{\overline{8} | .10}$ es 5.334926197903 (Tabla 6 del Apéndice II)

Lo que se debe calcular es el dividendo o servicio de la deuda (R).
Despejando R en (1) y reemplazando el valor tabular de $a_{\overline{n} | i}$ se tiene

$$R = \text{US\$ } 281\,166$$

En consecuencia la empresa deberá cancelar anualmente 281.166 dólares al Banco del Estado como dividendo o servicio de la deuda que contrajo con esta institución

El desarrollo de la deuda, que se explica en la página siguiente, es:

Años	Dividendo	Intereses	Amortizaciones	Saldo
0	—	—	—	1 500 000
1	281 166	150 000	131 166	1 368 834
2	281 166	136 883	144 282	1 224 551
3	281 166	122 455	158 711	1 065 840
4	281 166	106 584	174 582	891 258
5	281 166	89 126	192 040	699 218
6	281 166	69 922	211 244	487 974
7	281 166	48 797	232 369	255 605
8	281 166	25 560	255 605	0

El desarrollo de la deuda (cuadro anterior) es de fácil preparación y de gran utilidad. Está basado en el principio de cancelar periódicamente una cuota de interés más una cuota de amortización. La suma de ambas constituye lo que se denomina dividendo o servicio de la deuda y es constante a lo largo de todo el período.

La cuota interés, como se observa en el cuadro, es decreciente, y se calcula aplicando la tasa de interés (10% en este caso) al saldo o deuda residual.

La cuota de amortización es creciente y se determina por diferencia entre el dividendo y la cuota interés. Nótese que la amortización crece en un porcentaje igual al de la tasa de interés (10% en este caso).

El sistema de amortización descrito se denomina sistema francés y es uno de los más utilizados. Otro sistema es el americano, que consiste en cancelar periódicamente los intereses y en el vencimiento, el capital. Finalmente, se mencionará el sistema alemán, cuyo principio es el de cancelar anticipadamente los intereses en cada período y amortizando el capital con pagos periódicos.

INICIACION A LOS METODOS DE
EVALUACION DE PROYECTOS

INICIACION A LOS METODOS DE EVALUACION DE PROYECTOS

Los principales métodos de evaluación de proyectos, empleados en el análisis y comparación de las alternativas de inversión, son basados en el principio de la equivalencia de los proyectos, es decir, cuando es indiferente elegir entre uno u otro en lo que concierne a los objetivos. Estos métodos tratan de determinar valores únicos que representen cada alternativa de inversión.

De las diferentes técnicas de evaluación conocidas, se distinguen 2 tipos: métodos contables y métodos de actualización o de flujo de caja descontado. Los primeros tienen escasa importancia y son utilizados de manera complementaria con los resultados de los métodos de actualización. Los métodos de actualización son aquellos que básicamente toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

Entre los métodos de actualización se tiene:

- El Valor Actual Neto (VAN) ó (NPV);
- La Tasa Interna de Retorno (TIR) ó (IRR);
- La Tasa de Crecimiento de la Inversión;
- El Costo Medio Actualizados, etc.

1. Método del valor actual neto (VAN).

Por el método del valor actual neto VAN se calcula el valor actual neto de los flujos de caja, empleando la tasa mínima de atractividad. Se comparan los valores actuales de varias alternativas, determinándose la mejor por la mayor diferencia entre los valores actuales de esos flujos netos. Una inversión será atractiva cuando esa diferencia sea positiva. Desde el punto de vista estrictamente matemático, el VAN es igual a la suma algebraica de los valores actualizados de los flujos netos de caja asociados a esa inversión, esto es:

$$VAN = \sum_{j=0}^n \frac{FNC_j}{(1+i)^j} \quad (1)$$

En que:

- VAN = Valor actual neto
- FNC_j = Flujo neto de caja del año j
- i = Tasa de actualización o tasa mínima de atractividad
- n = Número de años

En una inversión normal, los flujos netos de caja durante la fase de realización de un proyecto son negativos, puesto que no se generan ingresos por concepto de explotación.

El flujo neto de caja representa en movimiento neto de caja o la generación neta de fondos durante cierto período. Estos flujos deben considerar solamente los ingresos y los egresos reales o efectivos, es decir, el movimiento de caja propiamente tal.

Tasa de atractividad de una inversión es la tasa mínima de interés que conviene cuando se opta por un determinado proyecto. Esta es la tasa que se utiliza para los efectos de la actualización.

Ejemplo 1.

Existen las siguientes alternativas para una inversión de US\$ 100 000 :

- i) Recibir US\$ 130 000 al cabo de 2 años.
- ii) Recibir US\$ 65 000 al final del 1er. año y US\$ 65 000 al final del 2o. año.
- iii) Recibir 3 cuotas anuales iguales de US\$ 50 000 cada una.

Calcular el VAN usando una tasa mínima de atractividad del 18% aa. y determinar la mejor alternativa.

Solución

En primer lugar se determinan los flujos de caja (FNC) para cada una de las 3 alternativas, designandolas de la siguiente manera:

- Alternativa i): FNC 1,
- Alternativa ii): FNC 2, y
- Alternativa iii): FNC 3

FLUJOS NETOS DE CAJA

FIN DE AÑO	FNC 1	FNC 2	FNC 3
0	-100 000	-100 000	-100 000
1	0	65 000	50 000
2	130 000	65 000	50 000
3	-	-	50 000

i) Designando por VAN_1 el valor actual neto de la primera alternativa y actualizando su FNC al 18% aa., se tiene:

$$VAN_1 = -100\ 000 + 130\ 000v^2 = -6\ 636$$

ii) Designando por VAN_2 el valor actual neto de la segunda alternativa y actualizando su FNC al 18% aa., se tiene:

$$VAN_2 = -100\ 000 + 65\ 000v + 65\ 000v^2 = 1\ 767 \text{ (Ver tabla 8 Apén. II)}$$

también

$$VAN_2 = -100\ 000 + 65\ 000 a_{\overline{2}|.18} = 1\ 767 \text{ (ver tabla 8, Apéndice II)}$$

iii) Designando por VAN_3 el valor actual neto de la tercera alternativa y actualizando su FNC al 18% aa., se tiene:

$$VAN_3 = -100\ 000 + 50\ 000v + 50\ 000v^2 + 50\ 000v^3 = 8\ 714 \text{ (Ver tabla 8 Apénd. II)}$$

también

$$VAN_3 = -100\ 000 + 50\ 000 a_{\overline{3}|.18} = 8\ 714$$

Resumiendo, los VAN obtenidos son:

- i) - 6 636
- ii) 1 767
- iii) 8 714

y conforme al criterio VAN que dice "si el valor actual neto de una inversión es positivo, la inversión debe aceptarse y rechazarse si es negativa", de acuerdo con este principio la alternativa i) se rechaza, pero y qué se hace con las otras dos? De las dos restante se acepta la de mayor valor actual; por tanto, la solución al ejemplo desarrollado es que debe elegirse la alternativa iii). esto es, recibir 3 cuotas anuales iguales de US\$ 50 000 cada una.

En general, cuando se debe efectuar la selección entre diferentes proyectos mutuamente excluyentes, es decir, que puede efectuarse solamente uno de ellos; de acuerdo al criterio del VAN se debe escoger aquel proyecto que presente el mayor valor actual neto a condición que pueda disponerse de los recursos suficientes.

Ejemplo 2.

Para la siguiente serie de flujos netos de Caja (FNC):

Fin de año	0	1	2	3	4	5
FNC (miles de US\$)	-4	1	5	7	0	-10

determinar el VAN a las tasas de interés: 0%; 1%; 5%; 10%; 15% y 20%.

Solución

Se pide calcular el VAN para 6 tasas distintas y como el procedimiento es el mismo en todos los casos, sólo se desarrollará para la tasa del 10%.

$$VAN = -4\ 000 + 1\ 000v + 5\ 000v^2 + 7\ 000v^3 + 0v^4 - 10\ 000v^5$$

$$VAN = -4\ 000 + 909 + 4\ 132 + 5\ 259 + 0 - 6\ 209 = 91$$

Para el resto de las tasas se utilizan los siguientes valores de v^n :

AÑOS	Valor actual de 1 a interés compuesto:					
	0%	1%	5%	10%	15%	20%
1	1	.990099	.952381	.909091	.869565	.833333
2	1	.980296	.907029	.826446	.756143	.694444
3	1	.970590	.863837	.751315	.657516	.578704
4	1	.960980	.822702	.683013	.571753	.482253
5	1	.951465	.783626	.620921	.497177	.401877

- Aplicando los FNC en cada caso, se obtienen los siguientes resultados finales:

AÑOS	Valores actuales netos:					
	0%	1%	5%	10%	15%	20%
0	-4 000	-4 000	-4 000	-4000	-4 000	-4 000
1	1 000	990	952	909	870	833
2	5 000	4 901	4 535	4132	3 781	3 472
3	7 000	6 794	6 047	5259	4 603	4 051
4	0	0	0	0	0	0
5	-10 000	-9 515	-7 836	-6209	-4 972	-4 019
VAN	-1 000	-829	-301	91	282	337

2. Método de la Tasa Interna de Retorno (TIR).

La tasa interna de retorno (TIR) de un proyecto, es la tasa que anula el VAN del flujo de caja. En un análisis de inversión, la elección recae en la alternativa cuyo TIR es mayor o a lo sumo igual que la tasa mínima de atractividad. En situaciones complejas, el TIR calculado es sólo uno de los elementos de guía que se utilizan para la evaluación de los proyectos. Igual suerte corren los indicadores obtenidos por los otros métodos.

El TIR presenta algunos inconvenientes, con distintos grados de dificultad para eliminarlos, como ser:

- * Un FNC puede presentar múltiples TIR;
- * Un FNC puede no tener ningún TIR, etc.

Conforme a la definición del TIR, se tiene:

$$\text{VAN} - \sum \frac{\text{FNC}_j}{(1 + i^*)^j} = 0 \quad (2)$$

en que $i^* = \text{TIR}$ (la incógnita), el resto de los elementos están definidos en (1)

El cálculo del TIR, según se desprende de (2), es muy difícil hacerlo directamente ya que se debe resolver ecuaciones de grado superior, por lo que deben utilizarse procedimientos iterativos u otros algoritmos de bastante complejidad. Sin embargo, en la actualidad existen diversos programas utilitarios que permiten resolver un problema de este tipo mediante el empleo de minicomputadoras o calculadoras electrónicas del tipo financiero (vienen programadas)

Ejemplo 3.

Para la siguiente serie de flujos netos de caja (FNC), calcular la tasa interna de retorno (TIR) correspondiente:

AÑO	0	1	2	3	4
FNC	-1 000	300	200	300	493

Solución.

Utilizando el procedimiento de las aproximaciones sucesivas, se procede como sigue:

- 1) Asumir una tasa de actualización, por ejemplo 12%.
- 2) Calcular el VAN para la tasa del punto 1).

$$\text{VAN} = -1000 + 300v + 200v^2 + 300v^3 + 493v^4$$

Consultando la tabla 7 del Apéndice II, se tiene

$$\text{VAN} = -45,9$$

- 3) Como el VAN es negativo, pero relativamente pequeño, se intentará con otra tasa, pero menor, 11%. Procediendo como en 2) se tiene:

$$\text{VAN} = -23,3$$

- 4) Como el VAN todavía no se anula (no es igual a 0) pero es menor que el anterior(3), se intentará, nuevamente, con una tasa inferior a la anterior, ahora un 10%:

$$\text{VAN} = 0$$

En este caso se encontró una tasa que hizo igual a 0 el valor actual neto. Esto es, el TIR resultó ser un 10%.

- 5) El TIR calculado en 4) cumple con el requisito matemático, pero puede no coincidir con la tasa mínima de atractividad por ser menor que ella, en cuyo caso habrá que rechazar el proyecto, o bien, proceder a su revisión.
- 6) En los pasos 2) y 3) resultó un VAN negativo, procediéndose a intentar con tasas menores. Cuando el VAN es positivo se procede a la inversa. La cuestión está en saber elegir las tasas adecuadas para acercarse lo más rápidamente posible al valor deseado, esto es, al que anula la diferencia entre el valor actual de la inversión y la actualización de los flujos netos de caja.

Ejemplo 4.

Calcular el VAN para los FNC del ejemplo 2) considerando las tasas del 8,52%; 30%; 38,54% y 40%.

Solución:

1) se procederá a tabular los diferentes valores de v^n , para las tasas que se indican. Dichos valores se calcularon directamente con una calculadora corriente:

Años	Valor actual de 1 a interés compuesto			
	8,52%	30%	38,54%	40%
0	1	1	1	1
1	.92149	.76923	.72181	.71429
2	.84914	.59172	.52101	.51020
3	.78248	.45517	.37607	.36443
4	.72104	.35013	.27146	.26031
5	.66443	.26933	.19594	.18593

Los valores actuales netos son:

Para el 8,52% : 0

Para el 30% : 221

Para el 38,54%: 0

Para el 40% : -43

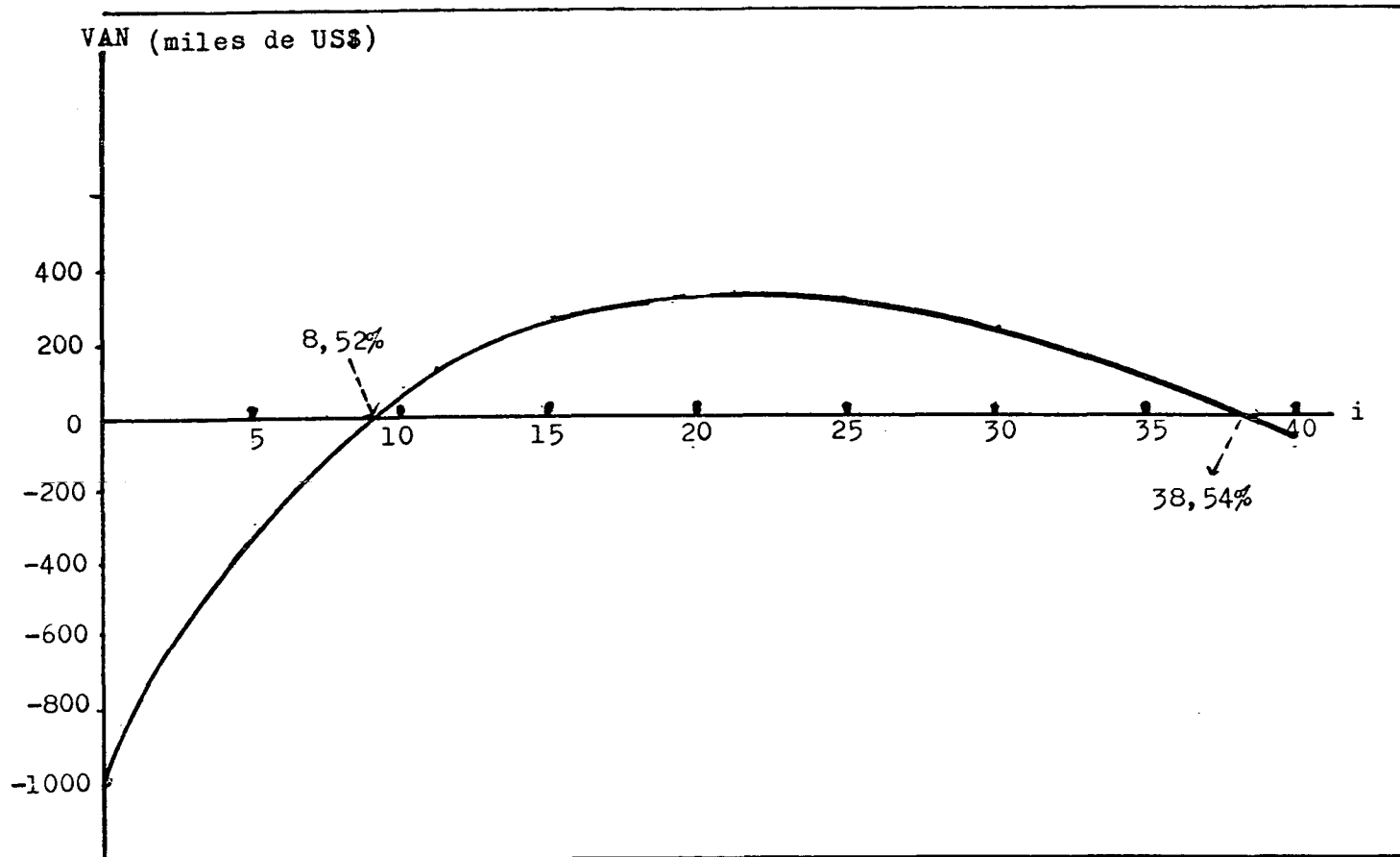
Ejemplo 5

Graficar los VAN obtenidos en los ejemplos 2 y 4.

Solución:

En la gráfica 1. de la página siguiente, están representados los diversos VAN obtenidos:

Tasa:	0	1	5	8,52	10	15	20	30	38,54	40
VAN:	-1000	-829	-301	0	91	282	387	221	0	-43



Gráfica 1

Nótese que la gráfica corta en dos partes al eje de la abscisa:

para 8,52%

y

para 38,54%

ambos valores producen un VAN - 0, lo que está significando:

- 1) que corresponden a la tasa interna de retorno;
- 2) que el FNC estudiado presenta 2 TIR;
- 3) que el TIR del 8,52% corresponde a un punto ascendente de la curva y que dado el signo de los VAN inmediatamente anteriores, no correspondía tomar tasas menores, sino que mayores;
- 4) que la situación presentada en 3) respecto del signo, en el primer tramo de la curva, es a la inversa en la parte final. Para una tasa del 40% el VAN es ligeramente negativo y al elegir una tasa menor, 38,54% en este caso, el VAN se anula y esto sucede cuando la gráfica es descendente.

En los puntos anteriores se señalan algunos de los inconvenientes del TIR, que sólo la práctica y el dominio de otros métodos, permite salvarlos.

ANALISIS DE REGRESION Y
CORRELACION SIMPLE

ANALISIS DE REGRESION Y CORRELACION SIMPLE

1. Generalidades.

Al examinar dos o más conjuntos de variables, en forma simultánea, interesa analizar la relación de dependencia entre las variables en estudio, que es el objeto del análisis de regresión y el grado de asociación entre determinadas variables, objetivo del análisis de correlación. Respecto al número de variables que interesa estudiar simultáneamente, se acostumbra a distinguir:

- Análisis de regresión y correlación simple, si el estudio se limita a dos variables,y
- Análisis de regresión y correlación múltiple, si el estudio contempla más de dos variables.

Atendiendo al tipo de función matemática que liga a las variables en estudio, hay que distinguir entre:

- Regresión lineal, si la función es lineal entre las variables,y
- Regresión no lineal, cuando la función matemática que liga a las variables no es de la forma lineal.

En líneas generales, en el análisis de regresión y correlación se presentan las siguientes posibilidades:

- Análisis de regresión y correlación simple lineal;
- Análisis de regresión y correlación simple no lineal;
- Análisis de regresión y correlación múltiple lineal; y,
- Análisis de regresión y correlación múltiple no lineal.

2. Modelo lineal de dos variables.

El análisis de regresión simple gira en torno al diagrama de dispersión, figura en la cual cada par de observaciones se representa gráficamente como un punto en el plano XY. Su fin es determinar (por inspección) si allí existe una relación lineal aproximada entre la variable dependiente o predictando (Y) y la variable independiente o predictor (X), del tipo:

$$Y = a_0 + a_1X \quad (1)$$

La función (1) es conocida con el nombre de recta de regresión mínimo cuadrático, porque los estimadores a_0 y a_1 se calculan a través de las ecuaciones normales derivadas del método de los mínimos cuadrados. Las ecuaciones normales que permiten resolver a_0 y a_1 (recuerde que son incógnitas), son las siguientes:

$$\begin{cases} \Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X \\ \Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 \end{cases} \quad (2)$$

Todas las sumatorias que intervienen en este sistema son conocidas y se obtienen a partir de conjuntos de valores de X_i e Y_i observados. Las columnas necesarias para cuantificar el sistema (2), son las siguientes:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
x_1	y_1	$x_1 y_1$	x_1^2
x_2	y_2	$x_2 y_2$	x_2^2
•	•	•	•
•	•	•	•
x_n	y_n	$x_n y_n$	x_n^2
Σx_i^2	Σy_i^2	$\Sigma x_i y_i$	Σx_i^2

Una vez cuantificadas las columnas del cuadro anterior, se procede a determinar los valores de a_0 y a_1 resolviendo el sistema (2) por cualquiera de los métodos conocidos: matricial, por determinantes, por sustitución, por eliminación, etc. o bien, reemplazando directamente en las relaciones (3), obtenidas de resolver el sistema (2) en términos generales:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} & a_1 &= \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

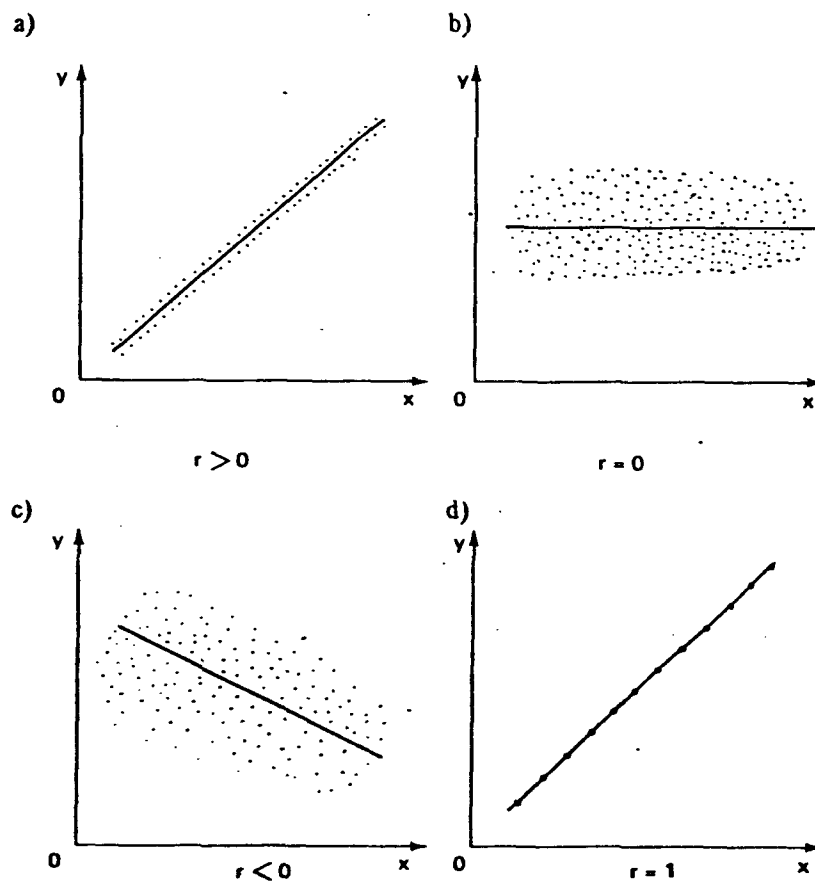
3. Coeficiente de correlación.

El coeficiente de correlación muestral r , calculado a partir de una muestra de n pares de observaciones de X e Y , mide la cantidad de dispersión en torno de la ecuación lineal ajustada por el método de los mínimos cuadrados. El coeficiente r es una estimación del parámetro ρ que es el coeficiente poblacional.

El coeficiente de correlación r es una medida cuyo valor se situa en el intervalo comprendido por los valores -1 y $+1$

$$-1 \leq r \leq 1$$

La figura que sigue muestra algunos casos posibles de valores de r



Una vez hallada la línea de regresión de la muestra

$$Y^* = a_0 + a_1 X$$

interesa conocer su utilidad, por ejemplo, cuando se da un valor de X , ¿con qué seguridad se puede estimar Y ? Para esta y otras preguntas, la inferencia estadística dispone de un vasto arsenal estadístico-matemático que permiten respuestas consistentes. Dada la brevedad de estas notas, centraremos la atención sólo en algunos elementos de fácil manejo y gran utilidad.

Al analizar un diagrama de dispersión con la recta de ajuste incorporada, se observan 3 tipos de desvíos:

$(Y - \bar{Y})$ que representa el error total y se puede considerar como el error entre un valor individual de Y y \bar{Y} que es su estimador cuando no se usa la recta de regresión;

$(Y^* - \bar{Y})$ que representa el error explicado y se considera como la cantidad de error que se elimina cuando Y^* se ajusta a la nube de puntos; y

$(Y - Y^*)$ que representa el error no explicado o residual que permanece luego de ajustada la recta de regresión mínimo cuadrática.

Los 3 desvíos anteriores, adquieren gran relevancia en el análisis de la regresión lineal cuando se considera la suma al cuadrado de las mismas, estableciéndose la siguiente relación:

$$\sum(Y - \bar{Y})^2 = \sum(Y - Y^*)^2 - \sum(Y^* - \bar{Y})^2 \quad (4)$$

Al dividir la expresión (4) por $\sum(Y - \bar{Y})^2$, hacer las reducciones pertinentes y designar el cociente por r^2 se obtiene:

$$r^2 = \frac{\sum(Y^* - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}$$

a la que se llama coeficiente de determinación muestral y su interpretación como medida de la fuerza de la relación lineal es más sencilla de hacerse que para r (definido anteriormente).

Para calcular el coeficiente de correlación lineal, se emplean diversas fórmulas, de las cuales se prefieren, entre otras, las siguientes:

$$r = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} \quad (5)$$

$$r = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{[\Sigma(X - \bar{X})^2][\Sigma(Y - \bar{Y})^2]}} \quad (6)$$

Se debe tener presente que el signo de r está dado por la pendiente de la recta de regresión (si la pendiente es negativa, r será negativo y a la inversa). Además, cuando de regresión lineal se trata, recuérdese que existen 2 rectas de regresión:

- 1) Cuando X opera como variable independiente o predictor e Y como variable dependiente o predictando; y
- 2) Cuando Y opera como variable independiente o predictor y X como variable dependiente o predictando.

Por tanto, habrá 2 coeficientes de regresión: el de X sobre Y y el de Y sobre X . Ambos coeficientes tienen siempre el mismo signo. Jamás signos distintos.

Designando por $b_{y.x}$ el coeficiente de regresión de y sobre X y por $b_{x.y}$ el coeficiente de regresión de X sobre Y se tiene la siguiente relación:

$$r_{x.y} = r_{y.x} = \sqrt{b_{x.y} b_{y.x}} \quad (7)$$

La fórmula (7) es conceptualmente interesante, porque establece que el coeficiente de correlación es igual para las 2 rectas de regresión mínimo cuadráticas y porque r se puede definir como la media geométrica de los 2 coeficientes de regresión.

4. Varianza residual y error estándar

La varianza residual se define así:

$$S_{y \cdot x}^2 = \frac{\sum (y_i - y_i^*)^2}{n - 2} \quad (8)$$

Para su cómputo es más conveniente la siguiente fórmula que evita el cálculo de las desviaciones entre cada valor observado y su correspondiente estimación desde la línea de regresión:

$$S_{y \cdot x}^2 = \frac{\sum y_i^2 - a \sum y_i - b \sum x_i y_i}{n - 2} \quad (9)$$

Extrayendo la raíz cuadrada de (9) se obtiene el error estándar de estimación de la información muestral. El estadígrafo $s_{y \cdot x}$ es un estimador insesgado de $\sigma_{y \cdot x}$ que se calcula con dos grados de libertad (n-2) debido a que la recta de regresión tiene dos constantes: a_0 y a_1 , que son los estimadores de los parámetros poblacionales y que tradicionalmente se designan con α al parámetro estimado por a_0 y por β al parámetro estimado por a_1 .

Con $s_{y \cdot x}$ se construye el intervalo de estimación y predicción para el predictando (Y), dado un valor del predictor (X):

$$Y^* \pm t s_{y \cdot x} \quad (10)$$

en que t es el estadígrafo que se obtiene de la distribución t-Student, cuando $n < 30$. Cuando $n > 30$ se utiliza el estadígrafo z que se obtiene de la distribución normal, por tanto, la expresión (10) se transforma en:

$$Y^* \pm z s_{y \cdot x} \quad (11)$$

Los estadígrafos t y z se encuentran tabulados en los Apéndices I y III, respectivamente.

Ejemplo 1

En un campo experimental se tomaron 10 muestras del rendimiento en kgs/há de cierta variedad de trigo candeal, resultante del uso de un nuevo fertilizante (kgs./ha). Los resultados de las muestras aparecen en las columnas (1) y (2) del Cuadro 1, donde X representa la cantidad de fertilizante (kgs./há) e Y la cantidad de trigo producida (kg./há). En el cuadro 1 que sigue aparecen, además, una serie de columnas que permiten valorar las ecuaciones normales para obtener la recta de regresión.

CUADRO 1

	Y	X	XY	Y ²	X ²	Y*
	1	2	3	4	5	6
1	1215	5.0	6075.0	1 476 225	25.0	1 302
2	670	3.0	2010.0	448 900	9.0	800
3	825	3.5	2887.5	680 625	12.25	925
4	215	1.0	215.0	46 225	1.0	297
5	325	1.5	487.5	105 625	2.25	423
6	1070	4.0	4280.0	1 144 900	16.00	1 051
7	1350	4.5	6075.0	1 822 500	20.25	1 176
8	920	3.0	2760.0	846 400	9.00	800
9	480	1.0	480.0	230 400	1.00	297
10	550	2.0	1100.0	302 500	4.00	549
Σ	7620	28.5	26 370.0	7 104 300	99.75	7 620

Con los datos de Cuadro 1, se pide:

- 1) Determinar la ecuación de regresión.
- 2) Estimar el rendimiento de trigo que se obtendría, al emplear 2,8 kgs. de fertilizante.
- 3) Calcular el error estándar de estimación
- 4) Construir un intervalo de predicción del 95% para una utilización de 4 kg. de fertilizante
- 5) Calcular el coeficiente de determinación.
- 6) Calcular la ecuación de regresión considerando el fertilizante como como predictando.

Solución.

1) Para determinar la recta de regresión se utilizarán las cifras del cuadro 1, las que permitirán resolver el sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{array}{l} 7\ 620 = 10a_0 + 28,5a_1 \\ 26\ 370 = 28,5a_0 + 99,75a_1 \end{array}$$

1.1 Se procede al cálculo del determinante principal:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 28,5 \\ 28,5 & 99,75 \end{vmatrix} = 185,25$$

1.2 Se procede al cálculo de a_0 :

$$Da_0 = \begin{vmatrix} 7\ 620 & 28,5 \\ 26\ 370 & 99,75 \end{vmatrix} = 8\ 550$$

$$a_0 = \frac{8\ 550}{185,25} = 46,1538$$

1.3 Se procede al cálculo de a_1 :

$$Da_1 = \begin{vmatrix} 10 & 7\ 620 \\ 28,5 & 26\ 370 \end{vmatrix} = 46\ 530$$

$$a_1 = \frac{46\ 530}{185,25} = 251,1741$$

En resumen, la ecuación de regresión es: $Y^* = 46,2 + 251,2X$

Si en esta ecuación se reemplazan todos y cada uno de los valores de X (columna 2) se obtienen los valores de Y* de la columna 6, cuyas sumas son idénticas (7 620). Siempre las sumas de los valores originales debe coincidir con la suma de los valores calculados (teóricos) obtenidos a través de la línea de regresión. Por ejemplo, para la muestra # 4 se tiene $X_4=1.0$, reemplazando:

$$Y^* = 46,2 + (251,2)(1) \approx 297$$

2) Para estimar el rendimiento de trigo que se obtendría al emplear 2,8 kgs. de fertilizante, se procede en forma similar a la anterior:

$$Y^* = 46,2 + (251,2)(2,8) \approx 749,6$$

3) Para calcular el error estándar de estimación, basta reemplazar en la fórmula (9):

$$S_{y.x} = \sqrt{\frac{7\ 104\ 300 - (46,1)(7\ 620) - (251,2)(26\ 370)}{10 - 2}} \approx 127,3$$

4) Para construir un intervalo de predicción del 95% para una utilización de 4kg., es preciso calcular el valor de Y*

$$Y^* = 46,2 + (251,2)(4) \approx 1\ 051$$

luego, reemplazar en (10)

$$1\ 051 \pm t(127,3)$$

el valor de t se halla tabulado en el Apéndice III. Se busca para 10 - 2 gl (grados de libertad) en la columna del 0,975 (esto corresponde al 97,5%) y no al 0,95 que es lo pedido, pero como se trata de una estimación que involucra una banda, en que cierto valor se suma una vez y luego se resta una vez y dada la estructura de la Tabla, es que se procede en esta forma para dar cumplimiento a la condición del 95%.

$$1\ 051 \pm (2,31)(127,3)$$

$$1\ 051 \pm 294$$

$$P(757 < f(x) < 1\ 345) \approx 95\%$$

Una cantidad de 4 kgs. de fertilizante, provocará un rendimiento que oscilará entre 757 y 1 345 kg/há con una probabilidad de 95%.

5) Para calcular r^2 , se puede reemplazar en (5), por ejemplo y el cociente elevarlo al cuadrado:

$$r = \frac{10(26\ 370) - (28,5)(7\ 620)}{\sqrt{[10(99,75) - (28,5)^2][10(7\ 104\ 300) - (7\ 620)^2]}} = 0,9489$$

Por tanto, $r^2 \approx 0,90$. Como estimación puntual se puede concluir que el 90% de la varianza de la producción de trigo, se explica estadísticamente por el empleo del fertilizante y que dado el uso del fertilizante, un 10% de su varianza queda sin explicar.

- 6) Para calcular la regresión que considera la variable fertilizante como predictando, se procede igual que en 1), sólo que debemos usar la siguiente ecuación:

$$X^* = a_0 + a_1 Y$$

cuantificando en la misma forma que en 1), se obtiene:

$$X^* = 0,11 + 0,003585Y$$

Aprovechando el cálculo de esta última recta, calcularemos el coeficiente de determinación según (7). Esto es, la primera recta calculada tiene un coeficiente de regresión de 251,2 y la segunda: 0,003585 (ambos positivos, es decir, del mismo signo), por tanto, reemplazando en (7):

$$r^2 = 251,2 \times 0,003585 \approx 0,90$$

MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Introducción

Una matriz es una disposición rectangular de elementos distribuidos en filas y columnas, encerrados entre corchetes, como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

en que los números a_{ij} se llaman elementos de la matriz. El primer subíndice (i) indica la fila y el segundo (j) la columna a la que corresponde el referido elemento.

La matriz anterior tiene m filas y n columnas y se denomina matriz de orden $m \times n$ (eme por ene). Cuando $m = n$ se llama matriz cuadrada de orden n . En una matriz cuadrada, como la que se presenta a continuación, la diagonal principal es la línea formada por los elementos a_{11} , a_{22} , a_{33} , a_{44} , a_{55} .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Cuando una matriz está conformada de una sola fila o columna se denomina vector. Así, una matriz de orden $1 \times n$ representa un vector fila y una matriz de orden $n \times 1$ representa un vector columna.

Las matrices ordinariamente se representan con letras mayúsculas y los vectores con letras minúsculas. De este modo AB indica la multiplicación de las matrices A y B ; y $c - d$ indica la sustracción de los vectores c y d .

Los siguientes son ejemplos de vectores columnas:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_j \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

Los siguientes son ejemplos de vectores filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada A , se denomina triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, y se dice triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Si la matriz cuadrada, es simultáneamente triangular inferior y triangular superior, se llama matriz diagonal.

Ejemplos de este último tipo de matrices:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz triangular superior}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz triangular inferior}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz diagonal}$$

Si en la matriz anterior (D) se cumple que:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = \dots = a_{nn} = k$$

la matriz se denomina escalar; y si $k=1$, D recibe el nombre de matriz unitaria o matriz identidad, la cual se representa por I.

Ejemplos de este tipo de matrices:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz unitaria}$$

$$\text{var-cov}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz escalar}$$

2. Operaciones matriciales

2.1 Suma algebraica de matrices

Sean A y B dos matrices de orden $m \times n$, la suma algebraica de ambas, $A \pm B$, es otra matriz C, de orden $m \times n$, en la que cada elemento de C es igual a la suma o diferencia de los elementos correspondientes de A y B.

Ejemplo: Calcular $A+B$ de las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} =$$
$$A+B = \begin{bmatrix} 1+1 & (-2)+0 & 3+1 & 4+2 \\ 5+0 & 6+1 & 7+2 & 8+(-3) \end{bmatrix} =$$
$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Calcular $C+D$ de las siguientes matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = C+D \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 10 \\ 7 & 8 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2 Multiplicación de matrices

Sea A una matriz de $m \times n$ y B otra de $n \times p$. El producto AB se define como la matriz C de orden $m \times p$ tal que el elemento en la i -ésima fila y en la j -ésima columna de C se obtiene multiplicando los elementos de la i -ésima fila de A por los elementos correspondientes de la j -ésima columna de B y sumando todos los términos. Para que la multiplicación de matrices exista, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.

Ejemplo: Calcular AB, si

$$\begin{matrix} \mathbf{A} = \\ 2 \times 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} \mathbf{B} = \\ 3 \times 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} (3 \times 2) + (4 \times 3) + (7 \times 6) & (3 \times 1) + (4 \times 5) + (7 \times 2) \\ (5 \times 2) + (6 \times 3) + (1 \times 6) & (5 \times 1) + (6 \times 5) + (1 \times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 37 \\ 34 & 37 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Calcular AB, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} (5 \times -3) + (2 \times 4) + (1 \times 2) & (5 \times 9) + (2 \times 0) + (1 \times -5) & (5 \times 7) + (2 \times 8) + (1 \times 7) \\ (6 \times -3) + (9 \times 4) + (-2 \times 2) & (6 \times 9) + (9 \times 0) + (-2 \times -5) & (6 \times 7) + (9 \times 8) + (-2 \times 7) \\ (4 \times -3) + (-1 \times 4) + (0 \times 2) & (4 \times 9) + (-1 \times 0) + (0 \times -5) & (4 \times 7) + (-1 \times 8) + (0 \times 7) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -5 & 40 & 58 \\ 14 & 64 & 100 \\ -16 & 36 & 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Efectuar el producto de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{5}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{5}{5} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

El desarrollo de esta multiplicación es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{5}{5} - \frac{4}{5} & \frac{1}{5} + \frac{5}{5} - \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} + \frac{5}{5} - \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \frac{5}{5} + \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} - \frac{5}{5} + \frac{9}{5} \\ -\frac{6}{5} + \frac{5}{5} + \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{5}{5} - \frac{2}{5} & \frac{3}{5} + \frac{5}{5} - \frac{3}{5} \end{bmatrix} =$$

El resultado es una matriz unitaria (1).

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Este resultado corresponde a la multiplicación de una matriz por su inversa. En símbolos: $A^{-1}A = I = AA^{-1}$, importante relación que será tratada en páginas siguientes.

2.2.1 Multiplicación por escalar

Un escalar es una magnitud que queda completamente determinada por un número real. El producto de un escalar k y una matriz A , es la resultante de multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar.

Ejemplo. Multiplicar la siguiente matriz A por el escalar $k=9$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$
$$kA = 9A = \begin{bmatrix} (9)(1) & (9)(0) & (9)(5) \\ (9)(3) & (9)(1) & (9)(2) \\ (9)(4) & (9)(5) & (9)(0) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 45 \\ 27 & 9 & 18 \\ 36 & 45 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Multiplicación vectorial

La multiplicación de un vector fila (columna) por un vector columna (fila), requiere como condición que los vectores posean el mismo número de elementos.

Un vector fila postmultiplicado por un vector columna es un escalar.

Ejemplo. Realizar la multiplicación que se indica:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$
$$(2)(5) + (4)(3) + (6)(1) + (6)(2) + (7)(9) = 103$$

Un vector columna postmultiplicado por un vector fila es una matriz.

Ejemplo. Efectuar la multiplicación indicada a continuación:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix} =$$
$$ab = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 & a_1 b_5 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 & a_2 b_5 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 & a_3 b_5 \\ a_4 b_1 & a_4 b_2 & a_4 b_3 & a_4 b_4 & a_4 b_5 \\ a_5 b_1 & a_5 b_2 & a_5 b_3 & a_5 b_4 & a_5 b_5 \end{bmatrix}$$

Nótese que la matriz ab es de orden 5×5 , siendo la resultante de multiplicar un vector columna de 5×1 y un vector fila de 1×5 . Una matriz postmultiplicada por un vector columna es un vector columna.

Ejemplo. Efectuar la multiplicación que se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 & 3 \\ 10 & 9 & 12 & 5 \\ 30 & 22 & 40 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 341 \\ 1030 \end{bmatrix}$$

El resultado se obtuvo ejecutando las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} 5 \times 10 - 7 \times 5 - 10 \times 8 - 3 \times 20 &= 225 \\ 10 \times 10 - 9 \times 5 - 12 \times 8 - 5 \times 20 &= 341 \\ 30 \times 10 - 22 \times 5 - 40 \times 8 - 15 \times 20 &= 1030 \end{aligned}$$

3. Determinantes

Sea A una matriz cuadrada de orden n, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \hline & & & \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{array} \right]$$

El determinante correspondiente a la matriz cuadrada A, se presenta escribiendo los elementos de ésta entre dos segmentos de rectas paralelas a las columnas de A. Así:

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

Se llaman elementos, filas, columnas, etc de un determinante, a los elementos filas, columnas, etc. de la matriz correspondiente.

El determinante de la matriz $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ se indica por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

y su valor se define por: $a_1 b_2 - a_2 b_1$

Esta expresión denomínase determinante de 2o. orden y se designa por Δ .

Por tanto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Determinante de 3r. orden es el que corresponde a la matriz de 3 filas y 3 columnas, esto es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Por definición el valor de este determinante de 3r. orden es:

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Al desarrollar estos productos se tiene:

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

El desarrollo anterior se obtiene aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccccccc} & a_1 & b_1 & c_1 & & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & a_2 & b_2 \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & a_3 & b_3 \\ - & - & - & & + & + & + \end{array}$$

Ejemplo. Calcular el siguiente sistema de ecuaciones por medio de determinantes:

$$\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{array} \quad \mathbf{I}$$

i) Se calcula el determinante principal:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 5$$

El desarrollo de los cálculos es el siguiente:

$$(2)(1)(-3) + (1)(1)(1) + (-1)(1)(-2) - (1)(1)(1) - (-2)(1)(2) - (-3)(1)(1) = -6 + 1 + 2 + 1 + 4 + 3 = 5$$

Luego, el determinante principal (Δ) = 5

ii) Se calcula $D(x_1)$:

$$D(x_1) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D(x_1) = -9 + 4 + 2 + 4 + 6 + 3 = 10$$

$$x_1 = \frac{D(x_1)}{D} = \frac{10}{5} = 2$$

iii) Se calcula $D(x_2)$:

$$D(x_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D(x_2) = -6 + 3 - 4 + 1 - 8 + 9 = -5$$

$$x_2 = \frac{D(x_2)}{D} = \frac{-5}{5} = -1$$

iv) Se calcula $D(x_3)$:

$$D(x_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D(x_3) = 8 + 1 - 6 - 3 + 4 - 4 = 0$$

$$x_3 = \frac{D(x_3)}{D} = \frac{0}{5} = 0$$

v) Luego, el conjunto de valores $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 0$ verifica el sistema **I**

4. Inversión de matrices

El álgebra matricial constituye un instrumento valioso en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, haciendo posible su expresión en forma compacta; procurando la metodología para saber si el sistema tiene solución antes de emprender la búsqueda de la misma; proporcionando los métodos para resolver los mencionados sistemas, etc. Es por ello que su estudio es necesario en diversos campos por la multiplicidad de aplicaciones que tiene, sea en modelos econométricos, análisis de insumos y productos, programación lineal, análisis de regresión y correlación simple lineal, análisis de regresión y correlación múltiple lineal, etc.

En esta parte del capítulo se entra en el meollo mismo del asunto, al tratar sobre la inversión de matrices. En los puntos anteriores se entregaron en forma sucinta diversos conceptos que permiten enfrentar este desafío; pero todavía resta por definir dos o tres cuestiones básicas para su culminación, explicando el cómo y por qué funcionan estos conceptos sin necesidad de exagerar en cuanto a notación complicada y deducciones innecesarias de fórmulas.

4.1 Matriz traspuesta

La matriz traspuesta de una matriz de orden $m \times n$ es la matriz A' (traspuesta de A) de orden $n \times m$ que se obtiene permutando las filas por las columnas.

Ejemplo. Dada la siguiente matriz A , determinar su traspuesta A' :

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{bmatrix}$$

4.2 Matriz de cofactor

El cofactor $|C_{ij}|$ del elemento a_{ij} en un determinante C es $(-1)^{i-j}$ veces el determinante de la submatriz de orden $n-1$ resultante cuando se elimina la i -ésima fila y la j -ésima columna de C .

Ejemplo. Supóngase el siguiente determinante C :

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El cofactor C_{11} del elemento a_{11} es el determinante que se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna con signo positivo, ya que $(-1)^{1+1} = 1$ esto es:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aplicando igual procedimiento para C_{21} , se tiene:

$$C_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

Matriz de cofactor es, entonces, aquella en que cada elemento a_{ij} se reemplaza por su respectivo cofactor $|C_{ij}|$.

Ejemplo. Dada la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

determinar la matriz C de cofactores:

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & -|C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & -|C_{23}| \\ |C_{31}| & -|C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

El paso siguiente es evaluar la matriz C, calculando cada uno de los cofactores. Por razones pedagógicas se entregará, en esta oportunidad, el desarrollo exhaustivo de cada cofactor C_{ij} :

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

En la práctica, el desarrollo de la matriz C, es el siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

4.3 Matriz adjunta

La matriz adjunta, que se designa $\text{Adj } A$, es la matriz traspuesta de la matriz de cofactores, esto es, $\text{Adj } A = C'$. Por tanto, la matriz adjunta de la matriz A que se está desarrollando es:

$$\text{Adj } A = C' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

4.4 Matriz inversa

Si A es una matriz cuadrada no singular, su inversa A^{-1} se puede hallar como sigue:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)$$

Esta matriz A satisface la siguiente importante relación:

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

que indica que el producto de una matriz por su inversa es igual a la matriz unitaria.

Una matriz cuadrada A recibe el nombre de singular cuando $|A| \neq 0$.

En la práctica, para invertir una matriz, se recomienda seguir los siguientes pasos:

- i) Verificar que se trata de una matriz cuadrada;
- ii) Si se cumple i), hallar el determinante de A . Si es $\neq 0$ (matriz no singular), se prosigue con el paso siguiente;
- iii) Calcular la matriz de cofactores de A ;
- iv) Determinar la matriz traspuesta de la matriz de cofactores, para obtener la matriz adjunta;
- v) Dividir cada elemento de la matriz adjunta por $|A|$ para determinar la inversa (A^{-1}); y,
- vi) Verificar la exactitud de las operaciones realizadas, multiplicando $A^{-1}A$, debiéndose obtener la matriz unitaria (I).

Ejemplo. Invertir la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Conforme a las recomendaciones anteriores:

- i) Se trata de una matriz cuadrada (3 x 3).
- ii) Se calcula el determinante de la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

iii) Se calcula la matriz de cofactores de A. Ello es posible, debido a que el $|A|$ es diferente de 0 :

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

Resolviendo internamente en la matriz se tiene:

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 5 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

iv) De la matriz de cofactores recién obtenida, se intercambian filas por columnas. Producto de esta transposición es la matriz adjunta, Adj A, que a veces se designa por A':

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & -5 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

v) En esta penúltima etapa se procede a calcular la matriz inversa, puesto que se dispone de todos los elementos para ello:

$$A^{-1} = \frac{1}{A} \text{Adj } A, \text{ o sea:}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{5}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{5}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

vi) Se verifica si $A^{-1} \cdot A = I$, esto es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{5}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{5}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{5}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{5}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{5}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{5}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{5}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{5}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{5}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{5}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{5}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{matrix} / \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}$$

Haciendo las reducciones correspondientes, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

verificándose que la matriz:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{5}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{5}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

es efectivamente la inversa de:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

4.4 Método gaussiano para invertir la matriz

El método que se describirá a continuación, se utiliza tanto para resolver ecuaciones lineales, como para invertir matrices elementales, mediante sucesivas transformaciones de filas. Como etapa previa, se crea una matriz aumentada, formada por la matriz primitiva y la matriz unitaria. Matriz aumentada, es un par de matrices separadas por una línea.

Ejemplo. Empleando el método gaussiano, invertir la matriz 4.4.

Primera etapa. Se escribe la matriz 4.4 y la matriz unitaria, separadas por una barra:

A	B	C	D	E	F	
2	1	-1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	2
1	-2	-3	0	0	1	3
.....						
.....						
1	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	10
0	1	0	$\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{3}{5}$	11
0	0	1	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	12

Segunda etapa. En esta etapa se transforma la columna A, líneas 1, 2 y 3 en un vector columna unitario.

- Para ello se divide toda la línea 1 por 2, obteniéndose la línea 4;
- Para que en la columna A líneas 5 y 6 aparezcan 0's (ceros), se multiplica la línea 4 por (-1) y se suma a la línea 2, generando la línea 5;

- Para obtener el 0 en la columna A línea 6, se multiplica la línea 4 por (-1) y se suma con la línea 3, para generar la línea 6:

A	B	C	D	E	F	
2	1	-1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	2
1	-2	-3	0	0	1	3
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	5
0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	6

Tercera etapa. En esta etapa se debe obtener un vector columna unitario en la columna B, líneas 7, 8 y 9, para lo cual se multiplica por 2 (dos) toda la línea 5. Esta línea 5 pasa a constituir la línea 8.

- Para obtener 0 en la columna B línea 7, se multiplica por (-1/2) toda la línea 8 y se suma a la línea 4 para generar la fila 7;
- Para obtener 0 en la columna B, línea 9, se multiplica toda la línea 8 por (5/2) y se suma a la fila 6, para generar la hilera 9.

A	B	C	D	E	F	
2	1	-1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	2
1	-2	-3	0	0	1	3
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	5
0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	6
1	0	-2	1	-1	0	7
0	1	3	-1	2	0	8
0	0	5	-3	5	1	9

Cuarta etapa. En esta etapa se debe obtener un vector columna unitario en la columna C, líneas 10, 11 y 12, para lo cual se divide la fila 9 por 5. Esta línea 9 pasa a constituir la fila 12.

- Para obtener 0 en la columna C línea 11, se multiplica toda la línea 12 por (-3) y se suma a la línea 8, para generar la línea 11;
- Para obtener 0 en la columna C, fila 10, se multiplica toda la fila 12 por (2) y se suma a la fila 12. Esta adición genera la fila 10, culminando todo el proceso.

En resumen:

- Las columnas A, B y C líneas 10, 11 y 12 pasaron a constituir una matriz unitaria; y,
- Las columnas D, E y F líneas 10, 11 y 12 se convirtieron en la matriz inversa de 4.4

A	B	C	D	E	F	
2	1	-1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	2
1	-2	-3	0	0	1	3
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	5
0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	6
1	0	-2	1	-1	0	7
0	1	3	-1	2	0	8
0	0	5	-3	5	1	9
1	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	10
0	1	0	$\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{3}{5}$	11
0	0	1	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	12

4.5 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Supóngase la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad 4.5.1$$

Efectuando el producto matricial del primer miembro:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right\} \quad 4.5.2$$

se desprende que la notación matricial se puede utilizar para expresar sistemas lineales. La igualdad 4.5.1 se puede expresar en forma simbólica, así:

$$Ax = b \quad 4.5.3$$

multiplicando 4.5.3 por A^{-1} y recordando que $A^{-1} \cdot A = I$:

$$x = A^{-1} \cdot b \quad 4.5.4$$

en que la solución de 4.5.4 la da el producto de la inversa por el vector de las constantes.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{array} \right\} \quad 4.5.5$$

Expresando el sistema 4.5.5 en forma matricial :

$$\begin{matrix} & \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

se pasa directamente a 4.5.4 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

recordando que \mathbf{A}^{-1} está calculada en la tabla anterior:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{5}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{5}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} + \frac{5}{5} + \frac{8}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{5}{5} + \frac{12}{5} \\ -\frac{9}{5} + \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$

ELEMENTOS DE PROGRAMACION LINEAL

•
•
•

•
•
•

ELEMENTOS DE PROGRAMACION LINEAL

1. Introducción

La programación lineal (PL) forma parte de un grupo de técnicas englobadas bajo la denominación de Investigación Operativa (IO) o Investigación de Operaciones (1), entendiéndose por tal, la aplicación del método científico al estudio y solución, en lo posible optimizante, de problemas de toma de decisiones.

En la definición anterior, se dice en forma dubitativa: "en lo posible optimizante", porque muchas veces es imposible identificar todas las variables que deben intervenir en un modelo, constituyendo éste sólo una aproximación a la realidad, lo que no resta validez a la(s) solución(es) encontradas, sino que los resultados se deben considerar con las limitaciones correspondientes y la calidad de las mismas dependerá de lo acertado de los supuestos y de la representatividad de las variables consideradas.

La IO usa diversas técnicas que son las que le proporcionan la posibilidad de resolver los modelos creados. Merecen destaque, la Econometría, la Estadística y la Programación Matemática, las que con el apoyo del computador (ordenador) hacen posible el procesamiento de la información y la implementación del modelo, como así también la solución ligada al tipo de modelo. Soluciones que pueden ser Analíticas, numéricas o por simulación.

Entre las técnicas que forman parte del acervo del IO se pueden mencionar:

- Programación lineal
- Programación no lineal
- Programación cuadrática
- Programación dinámica determinística
- Análisis de redes

(1) En Inglés: Operations Research.

- Teoría de juegos
- Programación dinámica estocástica
- Cadenas finitas de Markov
- Teoría de colas, etc.

2. Definición

La programación lineal (PL) es un conjunto de técnicas orientadas a resolver problemas de optimización restringida, para hallar el máximo o el mínimo de una función lineal llamada "función objetivo", tal como:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_m X_m$$

sujeta a las restricciones lineales

$$\sum_j a_{ij} X_j = b_i \quad \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, m \end{array}$$
$$X_j \geq 0$$

en los que C , a_{ij} , b_i , son constantes.

Cada problema de maximización está ligado con su correspondiente problema de minimización que recibe el nombre de dual (el problema de maximización recibe, en este caso, el nombre de primal). Por otra parte, cada problema de minimización (primal) está ligado con su correspondiente problema de maximización denominado su dual.

3. El problema general de maximización

El problema general de maximización en PL se plantea de la siguiente manera:

maximizar: $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_m X_m$

con las condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1m} X_m \leq b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2m} X_m \leq b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{k1} X_1 + a_{k2} X_2 + \dots + a_{km} X_m \leq b_k \end{array} \right\} X_j \geq 0$$

Supóngase la siguiente restricción:

$$X_1 + 3X_2 \leq 100 \quad 3.1$$

Imagínese que el lado izquierdo es el modelo correspondiente a la cantidad de componentes nacionales para producir un cierto volumen de fertilizante; que el lado derecho de la restricción representa la cantidad máxima de fertilizante para obtener el rendimiento deseado.

La restricción 3.1 se convierte en igualdad al adicionársele una determinada cantidad de X_3 , que estaría representando cierta cantidad de otro componente nacional que no está siendo utilizado en el producto final, esto es, en el fertilizante. Por tanto, 3.1 se puede escribir así:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 100$$

El mismo principio se puede aplicar a las restricciones del problema general, transformándolas en igualdades lineales, mediante la adición de las variables X_{m+1}, \dots, X_{m+k} denominadas variables de holgura. Estas variables de holgura se incorporan, además, a la función objetivo, con coeficientes 0, no alterando la función objetivo ni a la naturaleza de las restricciones. Por tanto, el planteo general del problema de maximización, se modifica así:

$$\text{Maximizar: } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_m X_m + 0X_{m+1} + 0X_{m+2} + \dots + 0X_{m+k}$$

Sujeto a:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1m} X_m + X_{m+1} = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2m} X_m + X_{m+2} = b_2$$

.....

$$a_{k1} X_1 + a_{k2} X_2 + \dots + a_{km} X_m + X_{m+k} = b_k$$

con todas las variables no negativas

Una vez que las restricciones fueron transformadas en igualdades, se verifican las siguientes condiciones:

- que cada componente de b sea no-negativo ($b \geq 0$), y
- que los coeficientes de las variables de holgura formen una matriz unitaria.*

Cumplidas estas dos condiciones, más la transformación de las restricciones en igualdades, se dice que el modelo está en forma estándar y en condiciones de ser resuelto. El método más generalizado para resolver

problemas de PL es el conocido con el nombre de método simplex.

El cuadro que sigue, muestra ordenadamente los coeficientes de las restricciones originales, la matriz unitaria formada por los coeficientes de las variables de holgura y en la primera fila, los coeficientes de la función objetivo (este cuadro corresponde a la tabla preparatoria del método simplex) :

C^T	C_1	C_2	C_3	C_m	0	0	0	0
b	X_1	X_2	$X_3 \dots X_m$	X_{m+1}	X_{m+2}	X_{m+3}	$\dots X_{m+k}$	
b_1	a_{11}	a_{12}	$a_{13} \dots a_{1m}$	1	0	0	$\dots 0$	
b_2	a_{21}	a_{22}	$a_{23} \dots a_{2m}$	0	1	0	$\dots 0$	
b_3	a_{31}	a_{32}	$a_{33} \dots a_{3m}$	0	0	1	$\dots 0$	
			$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$				
b_k	a_{k1}	a_{k2}	$a_{k3} \dots a_{km}$	0	0	0	$\dots 1$	

* En algunas ocasiones es posible incluir algunas de las columnas de coeficientes de las variables originales en la matriz unitaria.

4. El problema general de minimización

El problema general de minimización en PL se plantea de la siguiente manera:

minimizar: $Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m$

con las condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1m}X_m \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2m}X_m \geq b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{k1}X_1 + a_{k2}X_2 + \dots + a_{km}X_m \geq b_k \end{array} \right\} X_j \geq 0$$

Al igual que en el problema de maximización, se requiere transformar las restricciones en ecuaciones, restando del primer miembro una variable no negativa que recibe el nombre de superflua y representa la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de la inecuación. Suponiendo que las restricciones sean todas mayores o a lo sumo iguales que (\geq), los coeficientes de las variables formarán una matriz escalar cuya diagonal es (-1). Como los requerimientos matemáticos para la solución del modelo requieren de una matriz unitaria, entonces será necesario agregar una nueva variable, denominada variable artificial, en el primer miembro de la ecuación de restricción, excepto donde exista una variable de holgura, ya que ésta tiene ponderación unitaria y contribuye a la formación de la matriz unitaria.

Tanto las variables superfluas, como las variables artificiales, se integran a la función objetivo. Las superfluas con coeficiente 0 y las artificiales con un coeficiente +M si el problema es de minimización y -M si es de maximización. En los dos casos ($\pm M$) representa una cantidad positiva, más grande que cualquier otra que intervenga en el problema. Esta característica se torna relevante cuando la búsqueda de la solución al modelo se procesa en un ordenador. Para algunos programas, por ejemplo, debe asignársele a M un valor numérico 3 ó 4 veces mayor que cualquier otro valor numérico registrado en el programa.

5. El método gráfico

Se plantearán dos problemas típicos: uno de máximo y el otro de mínimo, para ser resueltos mediante el método gráfico, que tiene la ventaja de presentar en forma muy simple e intuitiva los principales conceptos y términos que intervienen en cualquier problema de PL. Para utilizar este método se requiere que el problema esté restringido a 2 variables; sin embargo, cuando intervienen 3, su representación se deberá hacer en una gráfica tridimensional, en la cual la función objetivo y las restricciones estarán representadas por superficies planas. En resumen, la utilidad de este método es esencialmente didáctica y no se pretende que los problemas presentados tengan sentido práctico.

5.1 Problema de máximo

Una cooperativa agrícola produce diariamente dos tipos de alimentos concentrados para cerdos. El tipo I y el tipo II, con características y precio distintos. El cuadro que sigue suariza la situación:

Materias primas	Tipo de concentrado en kgs. x unidad		Cantidad disponible en Kgs.
	I	II	
A	20	10	160
B	10	20	110
C	10	30	150
Utilidad generada x unid. \$	300	500	

Cuántas unidades (sacos) de cada tipo de concentrado se deberá producir diariamente para maximizar la utilidad? Se parte de la base que el mercado absorbe toda la producción.

Planteamiento del modelo

Denotando por X_1 y X_2 las producciones del tipo I y del tipo II, respectivamente, el problema se expresa formalmente así:

Maximizar: $Z = 300X_1 + 500X_2$

con las restricciones:

i. $20X_1 + 10X_2 \leq 160$

ii. $10X_1 + 20X_2 \leq 110$

iii. $10X_1 + 30X_2 \leq 150$

iv. $X_1 \geq 0$

v. $X_2 \geq 0$

La función objetivo (Z) expresa la intención de maximizar la utilidad mediante la participación de X_1 y X_2 . Las 2 últimas restricciones (iv y v) plantean el hecho de que las cantidades producidas no pueden ser negativas.

Solución

La solución mediante el método gráfico consiste en representar gráficamente en el primer cuadrante de un sistema de ejes coordenados, las zonas del plano definidas por las inecuaciones de restricción, con el objeto de determinar un conjunto de puntos que satisfaga todas y cada una de ellas. La graficación se hace considerando las inecuaciones anteriores (i. hasta v.) en forma de ecuaciones, esto es:

i. $20X_1 + 10X_2 = 160$

ii. $10X_1 + 20X_2 = 110$

iii. $10X_1 + 30X_2 = 150$

iv. $x_1 = 0$

v. $X_2 = 0$

Una vez graficadas las ecuaciones anteriores (ver gráfico 1), se determina la figura cuyas fronteras están expresadas por las mismas y que tiene la característica de satisfacer todas las restricciones del modelo.

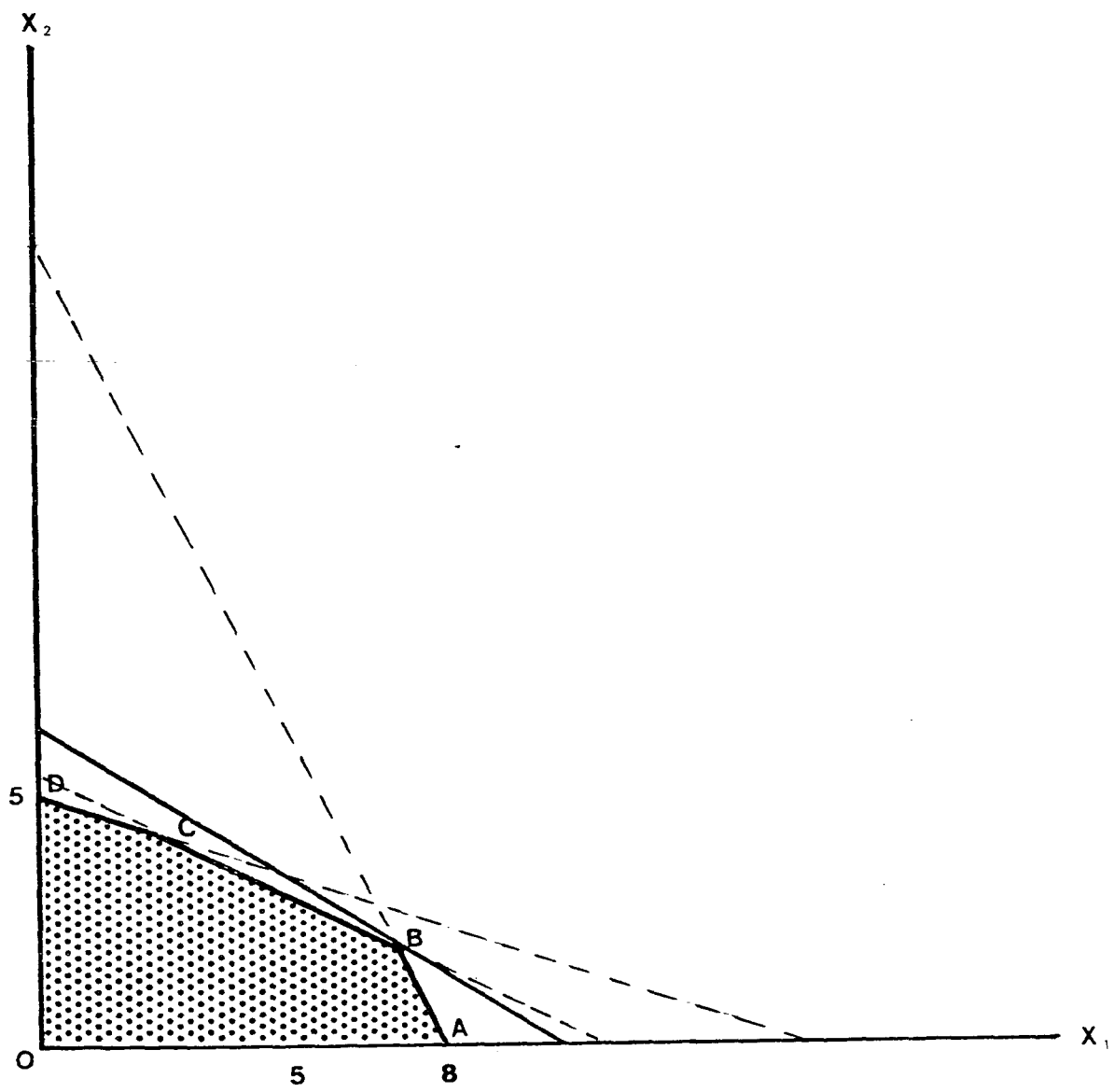


Gráfico 1

En la gráfica anterior, el área determinada por OABCD es el área factible, puesto que todos sus puntos representan sistemas de producción que satisfacen las restricciones del modelo.

La fase siguiente consiste en determinar las coordenadas de los vértices OABCD (denominados, también, puntos esquina).

1) Vértice O

Este vértice tiene coordenadas (0,0), corresponde a las ecuaciones iv y v.

2) Vértice A

Este vértice tiene coordenadas (8,0), corresponde a la ecuación i) :

$$20X_1 + 10X_2 = 160$$

cuando $X_1 = 8$; $X_2 = 0$

3) Vértice B

Tiene coordenadas (7,2), corresponde a la resolución simultánea de las ecuaciones i) y ii):

$$\begin{array}{l} 20X_1 + 10X_2 = 160 \\ 10X_1 + 20X_2 = 110 \end{array}$$

cuando $X_1 = 7$ $X_2 = 2$

4) Vértice C

Tiene coordenadas (3,4), corresponde a la resolución simultánea de las ecuaciones ii) y iii) :

$$\begin{array}{l} 10X_1 + 20X_2 = 110 \\ 10X_1 + 30X_2 = 150 \end{array}$$

cuando $X_1 = 3$ $X_2 = 4$

5) Vértice D

Tiene coordenadas (0,5), corresponde a la ecuación iii),

$$10X_1 + 30X_2 = 150$$

cuando $x_1 = 0$ $X_2 = 5$

Tabulando estos resultados e incluyendo la función objetivo, se tiene:

VERTICE	X_1	X_2	$Z = 300X_1 + 500X_2$
O	0	0	0
A	8	0	2 400
B	7	2	3 100*
C	3	4	2 900
D	0	5	2 500

Del cuadro anterior, se deduce que el óptimo (la utilidad máxima) se obtiene cuando se producen 7 unidades (sacos) del concentrado tipo I y 2 unidades del concentrado tipo II, generando una utilidad de \$ 3 100 diarios.

Desde el punto de vista del gráfico, para ubicar el óptimo, consiste en dibujar la función objetivo que corresponde a una contribución determinada y desplazarla en la dirección en que aumenta el valor de su contribución, hasta que dicha función corte el último punto contenido en el dominio de las soluciones realizables (OABCD). En la figura 1, dicha recta pasa por el punto B de coordenadas (7,2). Se pudo haber asignado un valor cualquiera, 2 000, por ejemplo, y desplazarla paralelamente hasta que corte el punto de optimización (B en este caso).

5.2 Problema de mínimo

Una empresa exportadora de frutas, debe enviar al puerto de embarque 450 m^3 de frutas que requieren refrigeración y 600 m^3 que no precisan de frío. Existen dos tipos de camiones que pueden llevar la carga y cuyas características se describen a continuación:

Tipo de camión	Espacio disponible en cada camión (en ton.)		Necesidades de transporte (tons.)
	I	II	
Espacio			
Refrigerado	10	15	450
No refrigerado	20	15	600

Cuántos camiones de cada tipo se debe fletar, para minimizar los costos, sabiendo que:

- el valor del flete del camión tipo I es de \$ 30 p.km., y
- el valor del flete del camión tipo II es de \$ 40 p. km.

Planteamiento del problema

Denotando por X_1 y X_2 el número de camiones del tipo I y del tipo II, respectivamente, que debe fletarse para minimizar los costos, el problema se expresa formalmente así:

$$\text{Minimizar : } Z = 30X_1 + 40X_2$$

con las restricciones :

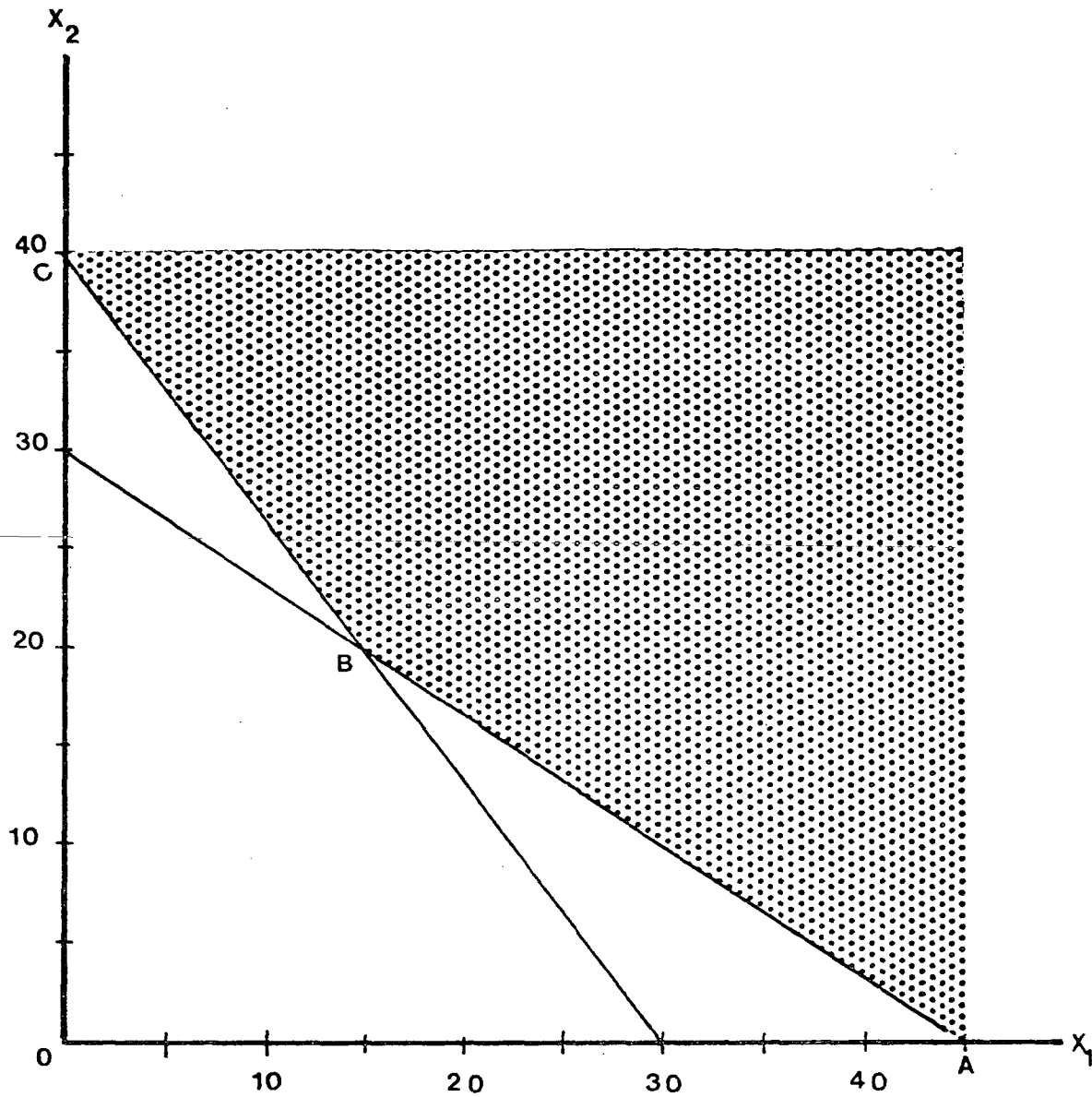
- i. $10X_1 + 15X_2 \geq 450$
- ii. $20X_1 + 15X_2 \geq 600$
- iii. $X_1 \geq 0$
- iv. $X_2 \geq 0$

Solución

Se procede al igual que en el problema de máximo, sólo que el área factible se presenta al revés. Ver gráfico 2. Las coordenadas de los vértices OABC están tabuladas en el cuadro que sigue, el cual incluye la función objetivo:

VERTICE	X_1	X_2	$Z = 30X_1 + 40X_2$
O	0	0	0
A	45	0	1350
B*	15	20	1250
C	0	40	1600

* Las coordenadas de esta esquina se obtuvieron resolviendo simultáneamente las ecuaciones i) y ii). Recuérdese que las restricciones se transforman en ecuaciones, tal como se procedió en el problema de máximo, pero que en este caso se omitió.



En consecuencia, el costo mínimo del flete se produce en B(15, 20), valor coordenadas que representan el óptimo, dentro de todas las soluciones factibles. Esta solución óptima alcanza a \$ 1250 p.km. y se logra fletando 15 camiones del tipo I, que es aquel que puede transportar simultáneamente 10 toneladas en refrigeración y 20 toneladas sin limitaciones térmicas, y 20 camiones del tipo II, que puede movilizar 15 toneladas en refrigeración y 15 toneladas en forma normal.

5.3 Observación general

Las restricciones en los problemas de máximo, se caracterizan por sus desigualdades menores o a lo sumo iguales que (\leq) y los problemas de mínimo por sus desigualdades mayores o a lo sumo iguales que (\geq); sin embargo, en la práctica pueden darse o presentarse modelos con signos iguales (=), problemas de máximo que contengan signos \geq y problemas de mínimos que contengan signos \leq

Ejemplo

Poner el siguiente modelo en forma estándar:

$$\text{Minimizar: } Z = X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

con las condiciones:

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_3 &\leq 7 \\ 7X_1 + X_2 + 3X_3 &= 8 \\ 2X_1 + 5X_3 &\geq 4 \end{aligned}$$

con todas sus variables no negativas.

El modelo estándar debe quedar así :

$$\text{Minimizar : } Z = X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 0X_4 + 0X_5 + MX_6$$

con las condiciones:

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_3 + X_4 &= 7 \\ 7X_1 + X_2 + 3X_3 &= 8 \\ 8X_1 + 5X_3 - X_5 + X_6 &= 4 \end{aligned}$$

El modelo se puso en forma estándar agregando una variable de holgura en la primera restricción (X_4), sin modificar la restricción segunda, ya que se aprovechó la variable X_2 por tener coeficiente unitario. En la tercera restricción, para transformarla en igualdad, hubo que restar una variable superflua y sumar una variable artificial (X_6).

BIBLIOGRAFIA

- DAGUM, Camilo y BEE de DAGUM, Estela. Introducción a la econometría, México, Siglo Veintiuno Editores, 1980.
- DE FARO, Clóvis. Matemática financeira, Porto Alegre, Livraria Sulina, 1967.
- DOWLING, Edward T. Matemáticas para economistas, Series de Compendios Schaum, McGraw-Hill, Colombia, 1982.
- GUJARATI, Damodar. Econometría, McGraw-Hill, Colombia, 1978.
- KAZMIER, Leonard. Estadística aplicada a la administración y la economía, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, Colombia, 1978.
- LIPSCHUTZ, Seymour. Matemáticas finitas, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, Colombia, 1972.
- PUCCINI, Abelardo de Lima. Engenharia económica e análise de investimentos. Rio de Janeiro, Forum, 1969.
- SPIEGEL, Murray. Estadística, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, Colombia, 1969.
- ULLMANN, John. Métodos cuantitativos en administración, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, México, 1979.
- YAMANE, Taro. Estadística, México, Harla, S.A., 1979.
-

A P E N D I C E

0
0
0

0
0
0

APENDICE II

TABLA 1

Monto de 1 a interés compuesto $M(n) = (1+i)^n$

n	3 per cent	3½ per cent	4 per cent	4½ per cent	n
1	1.0300 000 000	1.0350 000 000	1.0400 000 000	1.0450 000 000	1
2	1.0609 000 000	1.0712 250 000	1.0816 000 000	1.0920 250 000	2
3	1.0927 270 000	1.1087 178 750	1.1248 640 000	1.1411 661 250	3
4	1.1255 088 100	1.1475 230 006	1.1698 585 600	1.1925 186 006	4
5	1.1592 740 743	1.1876 863 056	1.2166 529 024	1.2461 819 377	5
6	1.1940 522 965	1.2292 553 263	1.2653 190 185	1.3022 601 248	6
7	1.2298 738 654	1.2722 792 628	1.3159 317 792	1.3608 618 305	7
8	1.2667 700 814	1.3168 090 370	1.3685 690 504	1.4221 006 128	8
9	1.3047 731 838	1.3628 973 533	1.4233 118 124	1.4860 951 404	9
10	1.3439 163 793	1.4105 987 606	1.4802 442 849	1.5529 694 217	10
11	1.3842 338 707	1.4599 697 172	1.5394 540 563	1.6228 530 457	11
12	1.4257 608 868	1.5110 686 573	1.6010 322 186	1.6958 814 328	12
13	1.4685 337 135	1.5639 560 604	1.6650 735 073	1.7721 960 972	13
14	1.5125 897 249	1.6186 945 225	1.7316 764 476	1.8519 449 216	14
15	1.5579 674 166	1.6753 488 308	1.8009 435 055	1.9352 824 431	15
16	1.6047 064 391	1.7339 860 398	1.8729 812 457	2.0223 701 530	16
17	1.6528 476 323	1.7946 755 512	1.9479 004 956	2.1133 768 099	17
18	1.7024 330 612	1.8574 891 955	2.0258 165 154	2.2084 787 664	18
19	1.7535 060 531	1.9225 013 174	2.1068 491 760	2.3078 603 108	19
20	1.8061 112 347	1.9897 888 635	2.1911 231 430	2.4117 140 248	20
21	1.8602 945 717	2.0594 314 737	2.2787 680 688	2.5202 411 560	21
22	1.9161 034 089	2.1315 115 753	2.3699 187 915	2.6336 520 080	22
23	1.9735 865 111	2.2061 144 804	2.4647 155 432	2.7521 663 483	23
24	2.0327 941 065	2.2833 284 877	2.5633 041 649	2.8760 138 340	24
25	2.0937 779 297	2.3632 449 843	2.6658 363 315	3.0054 344 565	25
26	2.1565 912 675	2.4459 585 587	2.7724 697 847	3.1406 790 071	26
27	2.2212 890 056	2.5315 671 083	2.8833 685 761	3.2820 095 624	27
28	2.2879 276 757	2.6201 719 571	2.9987 033 192	3.4296 999 927	28
29	2.3565 655 060	2.7118 779 756	3.1186 514 519	3.5840 364 924	29
30	2.4272 624 712	2.8067 937 047	3.2433 975 100	3.7453 181 345	30
31	2.5000 803 453	2.9050 314 844	3.3731 334 104	3.9138 574 506	31
32	2.5750 827 557	3.0067 075 863	3.5080 587 468	4.0899 810 359	32
33	2.6523 352 384	3.1119 423 518	3.6483 810 967	4.2740 301 825	33
34	2.7319 052 955	3.2208 603 342	3.7943 163 406	4.4663 615 407	34
35	2.8138 624 544	3.3335 904 459	3.9460 889 942	4.6673 478 100	35
36	2.8982 783 280	3.4502 661 115	4.1039 325 540	4.8773 784 615	36
37	2.9852 266 778	3.5710 254 254	4.2680 898 561	5.0968 604 922	37
38	3.0747 834 782	3.6960 113 152	4.4388 134 504	5.3262 192 144	38
39	3.1670 269 825	3.8253 717 113	4.6163 659 884	5.5658 990 790	39
40	3.2620 377 920	3.9592 597 212	4.8010 206 279	5.8163 645 376	40
41	3.3598 989 258	4.0978 338 114	4.9930 614 531	6.0781 009 418	41
42	3.4606 958 935	4.2412 579 948	5.1927 839 112	6.3516 154 842	42
43	3.5645 167 703	4.3897 020 246	5.4004 952 676	6.6374 381 810	43
44	3.6714 522 734	4.5433 415 955	5.6165 150 783	6.9361 228 991	44
45	3.7815 958 417	4.7023 585 513	5.8411 756 815	7.2482 484 296	45
46	3.8950 437 169	4.8669 411 006	6.0748 227 087	7.5744 196 089	46
47	4.0118 950 284	5.0372 840 392	6.3178 156 171	7.9152 684 913	47
48	4.1322 518 793	5.2135 889 805	6.5705 282 418	8.2714 555 734	48
49	4.2562 194 356	5.3960 645 948	6.8333 493 714	8.6436 710 742	49
50	4.3839 060 187	5.5849 268 557	7.1066 833 463	9.0326 362 725	50

TABLA 2

Valor actual de 1 a interés compuesto $v^n = (1+i)^{-n}$

n	3 per cent	3½ per cent	4 per cent	4½ per cent	n
1	0.9708 737 864	0.9661 835 749	0.9615 384 615	0.9569 377 990	1
2	0.9425 959 091	0.9335 107 004	0.9245 562 130	0.9157 299 512	2
3	0.9151 416 594	0.9019 427 057	0.8889 963 587	0.8762 966 041	3
4	0.8884 870 479	0.8714 422 277	0.8548 041 910	0.8385 613 436	4
5	0.8626 087 844	0.8419 731 669	0.8219 271 068	0.8024 510 465	5
6	0.8374 842 567	0.8135 006 443	0.7903 145 257	0.7678 957 383	6
7	0.8130 915 113	0.7859 909 607	0.7599 178 132	0.7348 284 577	7
8	0.7894 092 343	0.7594 115 562	0.7306 902 050	0.7031 851 270	8
9	0.7664 167 323	0.7337 309 722	0.7025 867 356	0.6729 044 277	9
10	0.7440 939 149	0.7089 188 137	0.6755 641 688	0.6439 276 820	10
11	0.7224 212 766	0.6849 457 137	0.6495 809 316	0.6161 987 388	11
12	0.7013 798 802	0.6617 832 983	0.6245 970 496	0.5896 638 649	12
13	0.6809 513 400	0.6394 041 529	0.6005 740 861	0.5642 716 410	13
14	0.6611 178 058	0.6177 817 903	0.5774 750 828	0.5399 728 622	14
15	0.6418 619 474	0.5968 906 186	0.5552 645 027	0.5167 204 423	15
16	0.6231 669 392	0.5767 059 117	0.5339 081 757	0.4944 693 228	16
17	0.6050 164 458	0.5572 037 794	0.5133 732 459	0.4731 763 854	17
18	0.5873 946 076	0.5383 611 396	0.4936 281 210	0.4528 003 688	18
19	0.5702 860 268	0.5201 556 904	0.4746 424 240	0.4333 017 884	19
20	0.5536 757 542	0.5025 658 844	0.4563 869 462	0.4146 428 597	20
21	0.5375 492 759	0.4855 709 028	0.4388 336 021	0.3967 874 255	21
22	0.5218 925 009	0.4691 506 308	0.4219 553 866	0.3797 008 857	22
23	0.5066 917 484	0.4532 856 336	0.4057 263 333	0.3633 501 298	23
24	0.4919 337 363	0.4379 571 339	0.3901 214 743	0.3477 034 735	24
25	0.4776 055 693	0.4231 469 893	0.3751 168 023	0.3327 305 967	25
26	0.4636 947 274	0.4088 376 708	0.3606 892 329	0.3184 024 849	26
27	0.4501 890 558	0.3950 122 423	0.3468 165 701	0.3046 913 731	27
28	0.4370 767 532	0.3816 543 404	0.3334 774 713	0.2915 706 919	28
29	0.4243 463 623	0.3687 481 550	0.3206 514 147	0.2790 150 162	29
30	0.4119 867 595	0.3562 784 106	0.3083 186 680	0.2670 000 155	30
31	0.3999 871 452	0.3442 303 484	0.2964 602 577	0.2555 024 072	31
32	0.3883 370 341	0.3325 897 086	0.2850 579 401	0.2444 999 112	32
33	0.3770 262 467	0.3213 427 136	0.2740 941 731	0.2339 712 069	33
34	0.3660 448 997	0.3104 760 518	0.2635 520 896	0.2238 958 917	34
35	0.3553 833 978	0.2999 768 617	0.2534 154 707	0.2142 544 419	35
36	0.3450 324 251	0.2898 327 166	0.2436 687 219	0.2050 281 740	36
37	0.3349 829 360	0.2800 316 102	0.2342 968 479	0.1961 992 096	37
38	0.3252 261 524	0.2705 619 422	0.2252 854 307	0.1877 504 398	38
39	0.3157 535 460	0.2614 125 046	0.2166 206 064	0.1796 654 926	39
40	0.3065 568 408	0.2525 724 682	0.2082 890 447	0.1719 287 011	40
41	0.2976 280 008	0.2440 313 702	0.2002 779 276	0.1645 250 728	41
42	0.2889 592 240	0.2357 791 017	0.1925 749 303	0.1574 402 611	42
43	0.2805 429 360	0.2278 058 953	0.1851 682 023	0.1506 605 369	43
44	0.2723 717 825	0.2201 023 143	0.1780 463 483	0.1441 727 626	44
45	0.2644 386 238	0.2126 592 409	0.1711 984 118	0.1379 643 661	45
46	0.2567 365 279	0.2054 678 656	0.1646 138 575	0.1320 233 169	46
47	0.2492 587 650	0.1985 196 769	0.1582 825 553	0.1263 381 023	47
48	0.2419 988 009	0.1918 064 511	0.1521 947 647	0.1208 977 055	48
49	0.2349 502 922	0.1853 202 426	0.1463 411 199	0.1156 915 842	49
50	0.2281 070 798	0.1790 533 745	0.1407 126 153	0.1107 096 500	50

TABLA 3

Monto de una renta de 1 por período $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \sum_{n=1}^n i$

n	3 per cent	3½ per cent	4 per cent	4½ per cent	n
1	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1
2	2.0300 000 000	2.0350 000 000	2.0400 000 000	2.0450 000 000	2
3	3.0909 000 000	3.1062 250 000	3.1216 000 000	3.1370 250 000	3
4	4.1836 270 000	4.2149 428 750	4.2464 640 000	4.2781 911 250	4
5	5.3091 358 100	5.3624 658 756	5.4163 225 600	5.4707 097 256	5
6	6.4684 098 843	6.5501 521 813	6.6329 754 624	6.7168 916 633	6
7	7.6624 621 808	7.7794 075 076	7.8982 944 809	8.0191 517 881	7
8	8.8923 360 463	9.0516 867 704	9.2142 262 601	9.3800 136 186	8
9	10.1591 061 276	10.3684 958 073	10.5827 953 105	10.8021 142 314	9
10	11.4638 793 115	11.7313 931 606	12.0061 071 230	12.2882 093 718	10
11	12.8077 956 908	13.1419 919 212	13.4863 514 079	13.8411. 787 936	11
12	14.1920 295 615	14.6019 616 385	15.0258 054 642	15.4640 318 393	12
13	15.6177 904 484	16.1130 302 958	16.6268 376 828	17.1599 132 721	13
14	17.0863 241 618	17.6769 863 562	18.2919 111 901	18.9321 093 693	14
15	18.5989 138 867	19.2956 808 786	20.0235 876 377	20.7840 542 909	15
16	20.1568 813 033	20.9710 297 094	21.8245 311 432	22.7193 367 340	16
17	21.7615 877 424	22.7050 157 492	23.6975 123 889	24.7417 068 870	17
18	23.4144 353 747	24.4996 913 004	25.6454 128 845	26.8550 836 970	18
19	25.1168 684 359	26.3571 804 960	27.6712 293 998	29.0635 624 633	19
20	26.8703 744 890	28.2796 818 133	29.7780 785 758	31.3714 227 742	20
21	28.6764 857 236	30.2694 706 768	31.9692 017 189	33.7831 367 990	21
22	30.5367 802 954	32.3289 021 505	34.2479 697 876	36.3033 779 550	22
23	32.4528 837 042	34.4604 137 257	36.6178 885 791	38.9370 299 629	23
24	34.4264 702 153	36.6665 282 061	39.0826 041 223	41.6891 963 113	24
25	36.4592 643 218	38.9498 566 933	41.6459 082 872	44.5652 101 453	25
26	38.5530 422 515	41.3131 016 776	44.3117 446 187	47.5706 446 018	26
27	40.7096 335 190	43.7590 602 363	47.0842 144 034	50.7113 236 089	27
28	42.9309 225 246	46.2906 273 446	49.9675 829 796	53.9933 331 713	28
29	45.2188 502 003	48.9107 993 017	52.9662 862 987	57.4230 331 640	29
30	47.5754 157 063	51.6226 772 772	56.0849 377 507	61.0070 696 564	30
31	50.0026 781 775	54.4294 709 819	59.3283 352 607	64.7523 877 909	31
32	52.5027 585 228	57.3345 024 663	62.7014 686 711	68.6662 452 415	32
33	55.0778 412 785	60.3412 100 526	66.2095 274 180	72.7562 262 774	33
34	57.7301 765 169	63.4531 524 044	69.8579 085 147	77.0302 564 599	34
35	60.4620 818 124	66.6740 127 386	73.6522 248 553	81.4966 180 005	35
36	63.2759 442 668	70.0076 031 844	77.5983 138 495	86.1639 658 106	36
37	66.1742 225 948	73.4578 692 959	81.7022 464 035	91.0413 442 720	37
38	69.1594 492 726	77.0288 947 212	85.9703 362 596	96.1382 047 643	38
39	72.2342 327 508	80.7249 060 365	90.4091 497 100	101.4644 239 787	39
40	75.4012 597 333	84.5502 777 478	95.0255 156 984	107.0303 230 577	40
41	78.6632 975 253	88.5095 374 689	99.8265 363 264	112.8466 875 953	41
42	82.0231 964 511	92.6073 712 804	104.8195 977 794	118.9247 885 371	42
43	85.4838 923 446	96.8486 292 752	110.0123 816 906	125.2764 040 213	43
44	89.0484 091 149	101.2383 312 998	115.4128 769 582	131.9138 422 022	44
45	92.7198 613 884	105.7816 728 953	121.0293 920 365	138.8499 651 013	45
46	96.5014 572 300	110.4840 314 466	126.8705 677 180	146.0982 135 309	46
47	100.3965 009 469	115.3509 725 473	132.9453 904 267	153.6726 331 398	47
48	104.4083 959 753	120.3882 565 864	139.2632 060 438	161.5879 016 311	48
49	108.5406 478 546	125.6018 455 669	145.8337 342 855	169.8593 572 045	49
50	112.7968 672 902	130.9979 101 618	152.6670 836 570	178.5030 282 787	50

TABLA 4

Valor actual de 1 por año a interés compuesto

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1 - v^n)}{i}$$

n	3 per cent	3½ per cent	4 per cent	4½ per cent	n
1	0.9708 737 864	0.9661 835 749	0.9615 384 615	0.9569 377 990	1
2	1.9134 696 955	1.8996 942 752	1.8860 946 746	1.8726 677 503	2
3	2.8286 113 549	2.8016 369 809	2.7750 910 332	2.7489 643 543	3
4	3.7170 984 028	3.6730 792 086	3.6298 952 243	3.5875 256 979	4
5	4.5797 071 872	4.5150 523 755	4.4518 223 310	4.3899 767 444	5
6	5.4171 914 439	5.3285 530 198	5.2421 368 567	5.1578 724 827	6
7	6.2302 829 552	6.1145 439 805	6.0020 546 699	5.8927 009 404	7
8	7.0196 921 895	6.8739 555 367	6.7327 448 750	6.5958 860 674	8
9	7.7861 089 219	7.6076 865 089	7.4353 316 105	7.2687 904 951	9
10	8.5302 028 368	8.3166 053 226	8.1108 957 794	7.9127 181 771	10
11	9.2526 241 134	9.0015 510 363	8.7604 767 109	8.5289 169 159	11
12	9.9540 039 936	9.6633 343 346	9.3850 737 605	9.1185 807 808	12
13	10.6349 553 336	10.3027 384 875	9.9856 478 466	9.6828 524 218	13
14	11.2960 731 394	10.9205 202 778	10.5631 229 295	10.2228 252 840	14
15	11.9379 350 868	11.5174 108 964	11.1183 874 322	10.7395 457 263	15
16	12.5611 020 260	12.0941 168 081	11.6522 956 079	11.2340 150 491	16
17	13.1661 184 718	12.6513 205 876	12.1656 688 537	11.7071 914 346	17
18	13.7535 130 795	13.1896 817 271	12.6592 969 747	12.1599 918 034	18
19	14.3237 991 063	13.7098 374 175	13.1339 393 988	12.5932 935 918	19
20	14.8774 748 605	14.2124 033 020	13.5903 263 450	13.0079 364 515	20
21	15.4150 241 364	14.6979 742 048	14.0291 599 471	13.4047 238 770	21
22	15.9369 166 372	15.1671 248 355	14.4511 153 337	13.7844 247 627	22
23	16.4436 083 857	15.6204 104 691	14.8568 416 671	14.1477 748 925	23
24	16.9355 421 220	16.0583 676 030	15.2469 631 414	14.4954 783 660	24
25	17.4131 476 913	16.4815 145 923	15.6220 799 437	14.8282 089 627	25
26	17.8768 424 187	16.8903 522 631	15.9827 691 766	15.1466 114 476	26
27	18.3270 314 745	17.2853 645 054	16.3295 857 467	15.4513 028 206	27
28	18.7641 082 277	17.6670 188 458	16.6630 632 180	15.7428 735 126	28
29	19.1884 545 900	18.0357 670 008	16.9837 146 326	16.0218 885 288	29
30	19.6004 413 495	18.3920 454 114	17.2920 333 007	16.2888 885 443	30
31	20.0004 284 946	18.7362 757 598	17.5884 935 583	16.5443 909 515	31
32	20.3887 655 288	19.0688 654 684	17.8735 514 984	16.7888 908 627	32
33	20.7657 917 755	19.3902 081 820	18.1476 456 715	17.0228 620 695	33
34	21.1318 366 752	19.7006 842 338	18.4111 977 611	17.2467 579 613	34
35	21.4872 200 731	20.0006 610 955	18.6646 132 318	17.4610 124 031	35
36	21.8322 524 981	20.2904 938 121	18.9082 819 537	17.6660 405 772	36
37	22.1672 354 351	20.5705 254 223	19.1425 788 016	17.8622 397 868	37
38	22.4924 615 874	20.8410 873 645	19.3678 642 323	18.0499 902 266	38
39	22.8082 151 334	21.1024 998 691	19.5844 848 388	18.2296 557 192	39
40	23.1147 719 742	21.3550 723 373	19.7927 738 834	18.4015 844 203	40
41	23.4123 999 750	21.5991 037 075	19.9930 518 110	18.5661 094 931	41
42	23.7013 591 990	21.8348 828 092	20.1856 267 413	18.7235 497 542	42
43	23.9819 021 349	22.0626 887 046	20.3707 949 436	18.8742 102 911	43
44	24.2542 739 174	22.2827 910 189	20.5488 412 919	19.0183 830 536	44
45	24.5187 125 412	22.4954 502 598	20.7200 397 038	19.1563 474 198	45
46	24.7754 490 691	22.7009 181 254	20.8846 535 613	19.2883 707 366	46
47	25.0247 078 341	22.8994 378 023	21.0429 361 166	19.4147 038 389	47
48	25.2667 066 350	23.0912 442 535	21.1951 308 814	19.5356 065 444	48
49	25.5016 569 272	23.2765 644 961	21.3414 720 013	19.6512 931 286	49
50	25.7297 640 070	23.4556 178 706	21.4821 846 167	19.7620 077 785	50

TABLA 5

Renta cuyo valor actual a interés compuesto es 1

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{1 - v^n}$$

n	3 per cent	3½ per cent	4 per cent	4½ per cent	n
1	1.0300 000 000	1.0350 000 000	1.0400 000 000	1.0450 000 000	1
2	0.5226 108 374	0.5264 004 914	0.5301 960 784	0.5339 975 550	2
3	0.3535 303 633	0.3569 341 806	0.3603 485 392	0.3637 733 601	3
4	0.2690 270 452	0.2722 511 395	0.2754 900 454	0.2787 436 479	4
5	0.2183 545 714	0.2214 813 732	0.2246 271 135	0.2277 916 395	5
6	0.1845 975 005	0.1876 682 087	0.1907 619 025	0.1938 783 875	6
7	0.1605 063 538	0.1635 444 938	0.1666 096 120	0.1697 014 680	7
8	0.1424 563 888	0.1454 766 466	0.1485 278 320	0.1516 096 533	8
9	0.1284 338 570	0.1314 460 051	0.1344 929 927	0.1375 744 700	9
10	0.1172 305 066	0.1202 413 679	0.1232 909 443	0.1263 788 217	10
11	0.1080 774 478	0.1110 919 658	0.1141 490 393	0.1172 481 817	11
12	0.1004 620 855	0.1034 839 493	0.1065 521 727	0.1096 661 886	12
13	0.0940 295 440	0.0970 615 726	0.1001 437 278	0.1032 753 528	13
14	0.0885 263 390	0.0915 707 287	0.0946 689 731	0.0978 203 160	14
15	0.0837 665 805	0.0868 250 693	0.0899 411 004	0.0931 138 081	15
16	0.0796 108 493	0.0826 848 306	0.0858 199 993	0.0890 153 694	16
17	0.0759 525 294	0.0790 431 317	0.0821 985 221	0.0854 175 833	17
18	0.0727 086 959	0.0758 168 408	0.0789 933 282	0.0822 368 975	18
19	0.0698 138 806	0.0729 403 252	0.0761 386 184	0.0794 073 443	19
20	0.0672 157 076	0.0703 610 768	0.0735 817 503	0.0768 761 443	20
21	0.0648 717 765	0.0680 365 870	0.0712 801 054	0.0746 005 669	21
22	0.0627 473 948	0.0659 320 742	0.0691 988 111	0.0725 456 461	22
23	0.0608 139 027	0.0640 188 042	0.0673 090 568	0.0706 824 930	23
24	0.0590 474 159	0.0622 728 303	0.0655 868 313	0.0689 870 299	24
25	0.0574 278 710	0.0606 740 354	0.0640 119 628	0.0674 390 280	25
26	0.0559 382 903	0.0592 053 963	0.0625 673 805	0.0660 213 675	26
27	0.0545 642 103	0.0578 524 103	0.0612 385 406	0.0647 194 616	27
28	0.0532 932 334	0.0566 026 452	0.0600 129 752	0.0635 208 051	28
29	0.0521 146 711	0.0554 453 825	0.0588 799 342	0.0624 146 147	29
30	0.0510 192 593	0.0543 713 316	0.0578 300 991	0.0613 915 429	30
31	0.0499 989 288	0.0533 723 998	0.0568 553 524	0.0604 434 459	31
32	0.0490 466 183	0.0524 415 048	0.0559 485 897	0.0595 631 962	32
33	0.0481 561 219	0.0515 724 220	0.0551 035 665	0.0587 445 281	33
34	0.0473 219 634	0.0507 596 583	0.0543 147 715	0.0579 819 119	34
35	0.0465 392 916	0.0499 983 478	0.0535 773 224	0.0572 704 478	35
36	0.0458 037 942	0.0492 841 628	0.0528 868 780	0.0566 057 796	36
37	0.0451 116 244	0.0486 132 454	0.0522 395 655	0.0559 840 206	37
38	0.0444 593 401	0.0479 821 414	0.0516 319 191	0.0554 016 920	38
39	0.0438 438 516	0.0473 877 506	0.0510 608 274	0.0548 556 712	39
40	0.0432 623 779	0.0468 272 823	0.0505 234 893	0.0543 431 466	40
41	0.0427 124 089	0.0462 982 174	0.0500 173 765	0.0538 615 804	41
42	0.0421 916 731	0.0457 982 765	0.0495 402 007	0.0534 086 759	42
43	0.0416 981 103	0.0453 253 914	0.0490 898 959	0.0529 823 492	43
44	0.0412 298 469	0.0448 776 816	0.0486 645 444	0.0525 807 056	44
45	0.0407 851 757	0.0444 534 334	0.0482 624 558	0.0522 020 184	45
46	0.0403 625 878	0.0440 510 817	0.0478 820 488	0.0518 447 107	46
47	0.0399 605 065	0.0436 691 944	0.0475 218 855	0.0515 073 395	47
48	0.0395 777 738	0.0433 064 580	0.0471 806 476	0.0511 885 821	48
49	0.0392 131 383	0.0429 616 664	0.0468 571 240	0.0508 872 235	49
50	0.0388 654 944	0.0426 337 096	0.0465 502 004	0.0506 021 459	50

TABLA 6

Panel Financiero i: 10%

n	$(1+i)^n$	$(1+i)^{-n}$	$a_{\overline{n} i}$	$\delta_{\overline{n} i}$
1	1.100000000000	0.909090909091	0.909090909091	1.000000000000
2	1.210000000000	.826446280992	1.735537190083	2.100000000000
3	1.331000000000	.751314800902	2.486851990985	3.310000000000
4	1.464100000000	.683013455366	3.169865446350	4.641000000000
5	1.610510000000	.620921323060	3.790786769409	6.105100000000
6	1.771561000000	.564473930054	4.355260699463	7.715610000000
7	1.948717100000	.513158118231	4.868418817693	9.487171000000
8	2.143588810000	.466507380210	5.334926197903	11.435888100000
9	2.357947691000	.424097618373	5.759023816276	13.579476910000
10	2.593742460100	.385543289430	6.144567105705	15.937424601000
11	2.853116706110	.350493899482	6.495061005187	18.531167061100
12	3.138428376722	.318630817711	6.813691822897	21.384283767210
13	3.452271214394	.289664379737	7.103356202634	24.522712143932
14	3.797498335833	.263331254307	7.366667456940	27.974983358325
15	4.177248169416	.239392043370	7.606079506309	31.772481694157
16	4.594972986358	.217629135791	7.823708642099	35.949729863573
17	5.054470284993	.197844668901	8.021553310999	40.544702849930
18	5.559917313493	.179858789910	8.201412100908	45.599173134923
19	6.115909044842	.163507990827	8.364920091735	51.159090448415
20	6.727499949326	.148643628025	8.513563719759	57.274999493256
21	7.400249944259	.135130570932	8.648694290690	64.002499442582
22	8.140274938684	.122845973574	8.771540264264	71.402749386840
23	8.954302432553	.111678157795	8.883218422058	79.543024325524
24	9.849732675808	.101525597995	8.984744020053	88.497326758077
25	10.834705943389	.092295998178	9.077040018230	98.347059433884
26	11.918176537728	.083905452889	9.160945471118	109.181765377273
27	13.109994191500	.076277684444	9.237223155562	121.099941915000
28	14.420993610650	.069343349495	9.306566505056	134.209936106500
29	15.863092971715	.063039408632	9.369605913688	148.630929717150
30	17.449402268887	.057308553302	9.426914466989	164.494022688865

TABLA 7

Panel Financiero $i:12\%$

n	$(1+i)^n$	$(1+i)^{-n}$	$a_{\overline{n} i}$	$\delta_{\overline{n} i}$
1	1.120000000000	0.892857142858	0.892857142858	1.000000000000
2	1.254400000000	.797193877552	1.690051020409	2.120000000000
3	1.401928000000	.711784247814	2.401831268222	3.371400000000
4	1.573519360000	.635518078405	3.037349346627	4.779328000000
5	1.762341683200	.567426855719	3.604776202346	6.352817360000
6	1.973822685185	.506631121178	4.111407323523	8.115189043200
7	2.210681407407	.452349215337	4.563756538860	10.089011728385
8	2.475963176295	.403887227980	4.967639766839	12.299693135791
9	2.773078757451	.360610024982	5.328249791821	14.775656312085
10	3.105848208345	.321973236591	5.650223028111	17.548735069536
11	3.478549993346	.287476104099	5.937699132510	20.651583277880
12	3.895975992547	.256675092946	6.194374225456	24.133133271225
13	4.363493111653	.229174190130	6.423548415585	28.029109263772
14	4.887112285051	.204619812616	6.628168228201	32.392602375425
15	5.473565759258	.182696261265	6.810864489466	37.279714660476
16	6.130393650368	.163121661844	6.973986151309	42.753280419733
17	6.866040888413	.145644340932	7.119630492240	48.883674070101
18	7.689965795022	.130039590118	7.249670082357	55.749714958513
19	8.612761690425	.116106776891	7.365776859247	63.439680753534
20	9.646293093275	.103666765081	7.469443624328	72.052442443958
21	10.803848264468	.092559611680	7.562003236007	81.698735537233
22	12.100310056205	.082642510428	7.644645746435	92.502583801701
23	13.552347262949	.073787955740	7.718433702174	104.602893857905
24	15.178628934503	.065882103339	7.784315805513	118.155241120854
25	17.00064406643	.058823306553	7.843139112065	133.333870055356
26	19.040072135440	.052520809422	7.895659921487	150.333934461099
27	21.324880791693	.046893579841	7.942553501327	169.374006597438
28	23.883866486696	.041869267715	7.984422769042	190.698887389131
29	26.749930465100	.037383274746	8.021806043788	214.582753875827
30	29.959922120912	.033377923880	8.055183967668	241.332684340926

TABLA 8

Panel Financiero i: 18%

n	$(1+i)^n$	$(1+i)^{-n}$	$a_{\overline{n} i}$	$s_{\overline{n} i}$
1	1.180000000000	0.847457627119	0.847457627119	1.000000000000
2	1.392400000000	.718184429762	1.565642056881	2.180000000000
3	1.643032000000	.608630872680	2.174272920560	3.572400000000
4	1.938777700000	.515788875152	2.690061804712	5.215432000000
5	2.287757756800	.437109216231	3.127171020942	7.154209760000
6	2.699554153025	.370431539179	3.497602560121	9.441967516500
7	3.185473900569	.313925033202	3.811527593323	12.141521669825
8	3.758859202671	.266038163731	4.077565757053	15.326995570393
9	4.435453859152	.225456070959	4.303021828011	19.085854773063
10	5.233835553799	.191064460914	4.494086294925	23.521308632215
11	6.175925953483	.161919039758	4.656005334682	28.755144186013
12	7.287592625110	.137219525219	4.793224859900	34.931070139496
13	8.599359297629	.116287733236	4.909512593136	42.218662704605
14	10.147243971202	.098548926471	5.008961519607	50.818022062234
15	11.973747886019	.083516039383	5.091577558989	60.965266033435
16	14.129022505502	.070776304562	5.162353863550	72.939013919454
17	16.672246556492	.059979919120	5.222333782670	87.068036424955
18	19.673250936661	.050830439932	5.273164222601	103.740282981447
19	23.214436105260	.043076644011	5.316240866611	123.413533918108
20	27.393034604206	.036505630517	5.352746497128	146.627970023367
21	32.323780832964	.030936975015	5.383683472143	174.021004627573
22	38.142061382697	.026217775436	5.409901247579	206.344785460536
23	45.007632431818	.022218453760	5.432119701338	244.486846843432
24	53.109006269545	.018829198102	5.450948899439	289.494479275250
25	62.668627398063	.015956947544	5.466905846982	342.603485544795
26	73.948980320715	.013522830902	5.480428683883	405.272112942858
27	87.259796789063	.011460031273	5.491888715155	479.221093272572
28	102.966500211095	.009711890909	5.501600606064	566.480590061634
29	121.500541049092	.008230416025	5.509831022088	669.447450272728
30	143.370638437928	.006974928835	5.516805950922	790.947991321819

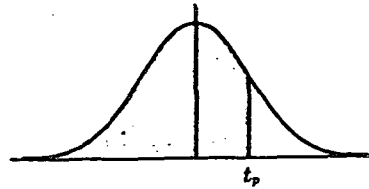
TABLA 9

Panel Financiero i: 20%

n	$(1+i)^n$	$(1+i)^{-n}$	$a_{\overline{n} i}$	$\delta_{\overline{n} i}$
1	1.200000000000	0.833333333334	0.833333333334	1.000000000000
2	1.440000000000	.694444444445	1.527777777778	2.200000000000
3	1.725000000000	.578703703704	2.106481481482	3.640000000000
4	2.073600000000	.482253086420	2.588734567902	5.368000000000
5	2.488320000000	.401877579017	2.990612139918	7.441600000000
6	2.985984000000	.334897976681	3.325510116599	9.929920000000
7	3.583180800000	.279081647234	3.603591763832	12.915904000000
8	4.299816960000	.232568039362	3.837159803194	16.499084800000
9	5.159780352000	.193806699468	4.030966502661	20.798901760000
10	6.191736422400	.161505582890	4.192472085551	25.958682112000
11	7.430083706880	.134587985742	4.327060071293	32.150418534400
12	8.916100448257	.112156654785	4.439216726077	39.580502241280
13	10.699320537908	.093463878988	4.532680605065	48.496602689537
14	12.839184645489	.077886565823	4.610567170887	59.195923227444
15	15.407021574587	.064905471519	4.675472642406	72.035107872932
16	18.488425889504	.054087892933	4.729560535339	87.442129447519
17	22.186111067405	.045073244111	4.774633779449	105.930555337022
18	26.623333280896	.037561036759	4.812194816207	128.116666404427
19	31.94799937063	.031300863966	4.843495680173	154.739999685312
20	38.337599924475	.026084053305	4.869579733478	186.687999622374
21	46.005119909370	.021736711088	4.891316444565	225.025599546849
22	55.206143891244	.018113925906	4.909430370471	271.030719456219
23	66.247372669493	.015094938255	4.924525308726	326.236863347462
24	79.496847203391	.012579115213	4.937104423938	392.484236016955
25	95.396216644069	.010482596011	4.947587019949	471.981083220345
26	114.475459972883	.008735496676	4.956322516624	567.377299864414
27	137.370551967460	.007279580563	4.963602097167	681.852759837297
28	164.844662360952	.006066317136	4.969668414322	819.223311804757
29	197.813594833142	.005055264280	4.974723678602	984.067974165708
30	237.376313799770	.004212720234	4.978936398835	1181.881568998848

A P E N D I C E III

PERCENTILES (t_p)
DE LA
DISTRIBUCION t DE STUDENT
CON ν GRADOS DE LIBERTAD
(AREA SOMBRADA = p)



ν	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.975}$	$t_{0.95}$	$t_{0.90}$	$t_{0.80}$	$t_{0.75}$	$t_{0.70}$	$t_{0.60}$	$t_{0.55}$
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,03	3,36	2,57	2,02	1,48	0,920	0,727	0,559	0,267	0,132
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3,00	2,36	1,90	1,42	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40	0,889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35	0,870	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,77	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,42	2,02	1,68	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2,00	1,67	1,30	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,62	2,36	1,98	1,66	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126
∞	2,58	2,33	1,96	1,645	1,28	0,842	0,674	0,524	0,253	0,126

1
2
3
4

5
6
7
8

PUBLICACIONES DE PROCADES

SERIE LECTURAS SOBRE DESARROLLO AGRICOLA

Tomo 1: Teorías Económicas y Análisis Histórico del Desarrollo Agrícola.

Tomo 2: Agricultura Comparada.

Tomo 3: Recursos Naturales en el Desarrollo Agropecuario.

Tomo 4: Desarrollo Rural Integrado. DRI

SERIE LECTURAS SOBRE PLANIFICACION AGROPECUARIA

Tomo 1: Aspectos Metodológicos.

Tomo 2: Políticas de Precios Agrícolas.

SERIE LECTURAS SOBRE PROYECTOS AGRICOLAS

Tomo 1: Formulación, Evaluación y Administración de Proyectos de Desarrollo Rural.

SERIE LECTURAS SOBRE ABASTECIMIENTO ALIMENTARIO

Tomo 1: El Problema de Abastecimiento Alimentario.

Tomo 2: Programación del Abastecimiento Alimentario: Algunas Experiencias en América Latina.

SERIE LECTURAS SOBRE APLICACION DE LA INFORMATICA AL ANALISIS DE PROYECTOS

Tomo 1: Introducción a la Informática.

SERIE LECTURAS SOBRE METODOLOGIAS PARA LA CAPACITACION

Tomo 1: Conceptos sobre Capacitación y Orientaciones Metodológicas.

SERIE TALLERES Y ESTUDIOS DE CASOS

Tomo 1: Planificación del Desarrollo Regional.

Tomo 2: Proyectos de Desarrollo Agrícola y Rural.

Tomo 3: Proyectos Agroindustriales.

SERIES TEACHING DOCUMENTS FOR TRAINING ACTIVITIES IN ENGLISH SPEAKING CARIBBEAN COUNTRIES

Volumen 1: Development and Regional Planning.

Volumen 2: Project Analysis.
