

INT-1742

v. 4

~~CEPAL/CELADE (1742)~~

v. 4

NACIONES UNIDAS
CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFÍA (CELADE)



**XX CURSO REGIONAL INTENSIVO
DE ANÁLISIS DEMOGRÁFICO
1997**

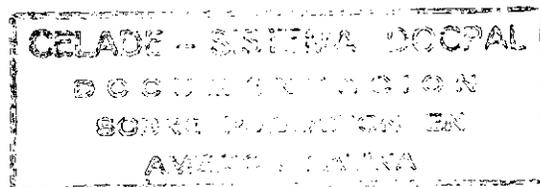
4. MORTALIDAD

TABLAS DE MORTALIDAD

(ANTONIO ORTEGA)

MATERIAL DOCENTE

(Para uso exclusivo de los alumnos)



Santiago de Chile

Centro Latinoamericano de Demografía
(CELADE)

Edificio Naciones Unidas
Avenida Dag Hammarskjöld
Casilla 91, Santiago, Chile

Apartado Postal 833-2050
San Pedro de Montes de Oca
San José, Costa Rica

P.O. Box 1113
Puerto España, Trinidad y Tobago

Casilla de Correo 4191
1000 Buenos Aires, Argentina

Las opiniones y datos que figuran en este trabajo son responsabilidad de su autor,
sin que el Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE) sea necesariamente
partícipe de ellos.

TABLAS DE MORTALIDAD

Antonio Ortega



Centro Latinoamericano de Demografía

San José, Costa Rica. 1987

CELADE – SISTEMA DOCPAL
DOCUMENTACION
SOBRE POBLACION EN
AMERICA LATINA

2

3

4

5

PROLOGO

La tabla de mortalidad o tabla de vida, es la herramienta más completa para el análisis de la mortalidad de una población, siendo su estudio de interés tanto para los demógrafos como para los diversos profesionales vinculados a los temas de salud pública y planificación, en una gran variedad de problemas, entre los cuales pueden mencionarse, la estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad, los análisis sobre mortalidad por causas, los estudios de fecundidad, estructura, dinámica y crecimiento de la población, y el análisis de diversas características socioeconómicas, tales como, la composición de la fuerza de trabajo, la población en edad escolar y la regulación de los sistemas de jubilaciones y pensiones para las personas que pasan a la edad de retiro.

El presente libro constituye una versión revisada, de los apuntes preparados en 1981 para facilitar el desarrollo de las clases de esta materia, en el Curso Regional Intensivo de Demografía, que se imparte en el Centro Latinoamericano de Demografía, CELADE San José, durante el segundo semestre de cada año, para estudiantes de los países de América Central, Panamá y el Caribe. En esta nueva versión, se han agregado varios temas complementarios, que no son desarrollados en el Curso Regional. Entre los antecedentes principales de aquellos apuntes y esta publicación, es necesario mencionar las clases y los apuntes del profesor Jorge L. Somoza, uno de los demógrafos que más ha contribuido al desarrollo de la demografía en los países de América Latina.

Las primeras ideas sobre la tabla de vida fueron desarrolladas por John Graunt en su libro "Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality", publicado en 1662, en el cual se presentó información referida a una generación de personas, la cual se reducía gradualmente por defunciones. Como aspecto de interés histórico valga mencionar que dicha tabla de sobrevivientes partía de 100 personas de edad 0, de las cuales sobrevivían 64 a la edad 6, 40 a la edad 16 y sólo 25 a la edad de 26 años. Un cálculo aproximado efectuado a principios de este siglo por Lotka, indica que esta información corresponde a una esperanza de vida al nacer de 18 años, la cual es tomada frecuentemente como una cifra límite, representativa de condiciones máximas de mortalidad. Esta tabla de Graunt, aunque presentada todavía en forma muy burda, representó un tremendo avance, desde la simple tasa bruta de mortalidad, a un nuevo modo de representar los patrones de mortalidad por edad.

El siguiente evento importante en la historia de las tablas de vida, es la elaboración de las llamadas tablas de vida de Halley, publicadas por el famoso astrónomo Edmond Halley en 1693, basadas en los registros de nacimientos y defunciones, de los años 1687 a 1691, de la ciudad polaca de Breslau. Mas adelante, durante todo el siglo dieciocho se elaboraron varias tablas, utilizando procedimientos todavía rudimentarios e información de defunciones exclusivamente.

La primera tabla construida sobre los principios modernos actuales, tomando en cuenta la información de defunciones y la población expuesta al riesgo de muerte, fue elaborada por Milne en 1815, para la ciudad inglesa de Carlisle. Se obtuvo con ella una esperanza de vida al nacer de 38.7 años, para los dos sexos combinados. Desde entonces se ha publicado un gran número de tablas, las

primeras de ellas referidas fundamentalmente a los países de Europa, pero luego se fueron extendiendo gradualmente hacia todos los países del mundo. Puede encontrarse una lista bastante completa de las tablas de vida nacionales disponibles, en los Anuarios Demográficos de las Naciones Unidas.

Respecto a los países de América Latina, aunque se han elaborado tablas de mortalidad para todos los países de la región, puesto que resultan necesarias para realizar los diversos estudios en los cuales la mortalidad está involucrada, su grado de confiabilidad es muy variable. Por un lado existen países que tienen una cierta tradición censal y buenos registros vitales, en los cuales pueden utilizarse los procedimientos más refinados de elaboración de tablas completas, mientras que en otros, las estadísticas demográficas contienen todavía deficiencias de cierta importancia, que obligan a recurrir a procedimientos más burdos, o bien, a los llamados métodos indirectos.

Se analizan en este documento, algunos conceptos introductorios, las diversas funciones de la tabla de vida, las probabilidades de vida y de muerte, el modelo de población estacionaria, las relaciones de supervivencia necesarias para hacer proyecciones de población, las tablas modelo de mortalidad, las diversas metodologías que pueden usarse en los países de América Latina para la construcción de tablas abreviadas y completas, y algunas aplicaciones de la tabla de mortalidad en estudios de población. Tales temas constituyen la base del análisis demográfico y el punto de partida para otros estudios. Al término de cada capítulo se presentan algunos ejemplos ilustrativos, cuyas soluciones aparecen en la parte final del libro. Para complementar el estudio de cada uno de los temas considerados, se recomienda consultar la bibliografía indicada.

Con el fin de simplificar los trabajos inherentes a la preparación de este libro, se ha utilizado directamente como versión final para la imprenta, el borrador escrito en microcomputador, con ayuda de un procesador de palabras, lo cual, si bien es cierto que no proporciona la calidad de impresión de los libros tradicionales, tiene la ventaja de que reduce sustancialmente los costos, evita el trabajo de levantado de texto y facilita el proceso de diagramación. Esta publicación se ha efectuado con la valiosísima cooperación de la Imprenta Nacional de Costa Rica, que ha realizado el trabajo como una actividad de cooperación institucional, a precio de costo.

La preparación de material docente para la enseñanza de la demografía en los países de América Latina, es realizada por el CELADE, atendiendo las recomendaciones efectuadas en los diversos seminarios y reuniones realizadas en varios países de la región, en los cuales se ha expresado la necesidad de elaborar material bibliográfico en castellano, adaptado a las condiciones demográficas de los países en desarrollo.

*
* *

C O N T E N I D O

	Página
PROLOGO.....	vii
Capítulo I. CONCEPTOS Y FUNCIONES DE LA TABLA.....	1
1.1 Concepto de tabla de mortalidad.....	1
1.2 Diversos tipos de tablas.....	5
1.3 Diagrama de Lexis.....	7
1.4 Funciones de la tabla de mortalidad: Sobrevivientes, Defunciones, Probabilidades de vida y de muerte.....	14
1.5 Restantes funciones de la tabla de mortalidad: Tiempo vivido. Esperanza de vida.....	24
1.6 Resumen de las funciones de la tabla.....	39
1.7 Interpretación de las funciones de la tabla de vida en el diagrama de Lexis.....	40
1.8 Funciones continuas de la tabla de vida: Tasa instantánea de mortalidad por edad.....	42
1.9 Comparación gráfica de p_x y q_x	47
Ejercicios del capítulo 1.....	50
Capítulo 2. POBLACION ESTACIONARIA.....	53
2.1 Conceptos introductorios.....	53
2.2 Población Estacionaria: Principales características.....	55
2.3 La composición por edades de la población estacionaria.....	59
2.4 Interpretación de las funciones de la población estacionaria en el diagrama de Lexis....	61
2.5 Verificación de la relación (24) para el cálculo del tiempo vivido de las primeras edades mediante el factor de separación.....	63
2.6 Relación entre la tasa central de mortalidad y la probabilidad de muerte.....	67
2.7 Relaciones de supervivencia.....	73
2.8 Estimación de la esperanza de vida al nacer a partir de las relaciones de supervivencia..	81
2.9 Efecto de la composición por edades de la población estacionaria.....	83
Ejercicios del capítulo 2.....	89

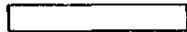
	Página
Capítulo 3. TABLAS MODELO DE MORTALIDAD.....	93
3.1 Concepto y objetivos de las Tablas Modelo...	93
3.2 Las Tablas Modelo de las Naciones Unidas....	94
3.3 Las Tablas Modelo de Coale y Demeny.....	98
3.4 El Sistema de Tablas de Vida de Brass.....	111
3.5 Breve referencia a otras tablas modelo.....	117
3.6 Uso de las Tablas Modelo.....	120
Ejercicios del capítulo 3.....	125
Capítulo 4. METODOS DE CONSTRUCCION DE TABLAS ABREVIADAS.....	129
4.1 Introducción.....	129
4.2 Métodos clásicos.....	130
4.2.1 Método de Greville.....	132
4.2.2 Método de Reed y Merrell.....	134
4.2.3 Método de referencia a una tabla estándar.....	138
4.3 Procedimiento completo de construcción de una tabla de vida abreviada.....	140
4.4 Métodos indirectos de construcción de tablas abreviadas.....	152
Ejercicios del capítulo 4.....	163
Capítulo 5. TABLAS COMPLETAS DE MORTALIDAD.....	169
5.1 Introducción.....	169
5.2 Ajuste preliminar de los datos.....	171
5.3 Cálculo de las probabilidades de muerte.....	172
5.4 Suavizamiento de las probabilidades de muerte Fórmula de Whittaker-Henderson, tipo A.....	184
Fórmula de Whittaker-Henderson, tipo B.....	191
5.5 Cálculo de las restantes funciones de la tabla completa.....	196
Ejercicios del capítulo 5.....	198

Capítulo 6. APLICACION DE LA TABLA DE MORTALIDAD EN ESTUDIOS DE POBLACION.....	203
6.1 Introducción.....	203
6.2 Estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad.....	204
6.3 Análisis de la mortalidad por causas de muerte.....	216
6.4 Estimaciones demográficas mediante probabi- lidades de vida y de muerte.....	223
6.5 Estudios sobre estructura por edad de la población.....	225
6.6 Estudios de fecundidad, reproductividad y crecimiento.....	229
6.7 Fijación de metas y evaluación de programas de salud.....	231
6.8 Uso de las tablas de vida para hacer proyec- ciones de población.....	235
6.9 Análisis de características socioeconómicas mediante tablas de decremento múltiple.....	237
Ejercicios de repaso general.....	246
RESPUESTA A LOS EJERCICIOS.....	249
ANEXO DE TABLAS BASICAS.....	279
BIBLIOGRAFIA.....	289



Capítulo 1

CONCEPTO Y FUNCIONES
DE LA TABLA



1.1 Concepto de tabla de mortalidad.

La tabla de mortalidad, también llamada tabla de vida, es un instrumento o esquema teórico que permite medir las probabilidades de vida y de muerte de una población, en función de la edad. Dicho esquema provee la más completa descripción estadística de la mortalidad, constituye la base del modelo de población estacionaria y su técnica es muy usada por los demógrafos, actuarios y otros investigadores en una gran variedad de problemas. La descripción de la tabla de vida comprende una parte considerable de toda la notación y las relaciones básicas utilizadas en demografía.

A continuación se indican cinco características principales de la tabla de mortalidad, en su utilización dentro del campo demográfico.

■ La primera de ellas, permite describir el comportamiento de la mortalidad por edades, lo cual es de importancia, porque la mortalidad es muy diferencial según esta variable. Idealmente la mortalidad debería ser nula o casi nula en las primeras edades, aumentando después de los 60 o 70 años (gráfico 1a), pero en la práctica está muy lejos de este comportamiento. Como se sabe, la mortalidad es alta al comienzo de la vida, luego baja rápidamente hasta un mínimo cercano a cero a los 10 o 12 años, después aumenta en forma relativamente lenta hasta los 35 o 40 años y de ahí en adelante crece más rápidamente, llegando a superar incluso los niveles de las primeras edades (gráfico 1b).

Gráfico 1 a

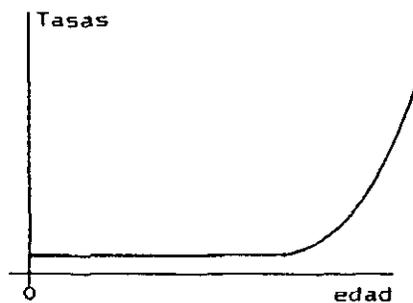
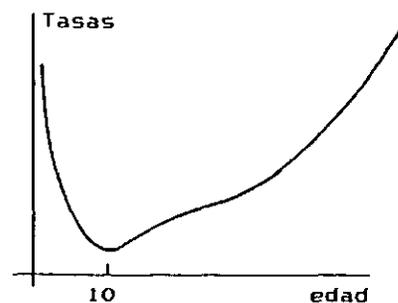


Gráfico 1 b



Esta forma de U es más o menos general entre los países, pero el nivel, así como la relación entre los diversos tramos de edades varía considerablemente, encontrándose países que tienen una mortalidad infantil y juvenil relativamente baja en relación con la mortalidad de las edades adultas y avanzadas, o bien situaciones contrarias.

Desde mediados del siglo 17, cuando se empezó a contar con información estadística sobre defunciones, el comportamiento de la mortalidad por edades fue objeto de investigación científica. Así por ejemplo, ya en 1725, Huguenot y De Moivre conjeturaron la primera ley de variación de la mortalidad por edades, según la cual el número de sobrevivientes de una población decrecía en progresión aritmética ¹. También es muy conocida la ley de Gompertz ²,

$$(1) \quad y = k \cdot b^{c^x}$$

y otras relaciones establecidas en el pasado por diversos autores, para tratar de explicar el comportamiento de la mortalidad a lo largo de la vida. Más adelante, en la sección 1.8, se verá que si el número de sobrevivientes decrece según la relación (1) de Gompertz, la tasa de mortalidad aumenta en forma exponencial.

■ La segunda característica destacable de las tablas de vida, es que permiten obtener probabilidades y otras medidas convencionales de la mortalidad, que son más apropiadas que las tasas de mortalidad $({}_n m_x)$, sea para calcular los sobrevivientes de una población, para combinarlas con probabilidades de otros grupos de edades, o para derivar relaciones analíticas entre las diversas variables demográficas. Tal es el caso, por ejemplo, de la relación (48) del capítulo 2, donde se combina la probabilidad de sobrevivir desde el nacimiento hasta la edad x , con los nacimientos del pasado, para obtener el número total de personas en un momento determinado.

¹ De Moivre, A. Annuities on Lives, London, 1725.

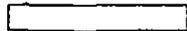
² Gompertz, B., "On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality", Philosophical Transactions of the Royal Society, Part II, 1825.

■ Además de describir el comportamiento de la mortalidad por edades, la tabla de vida proporciona una medida resumen de la mortalidad, la esperanza de vida al nacer, que es el mejor indicador del nivel general de mortalidad de una población. La tasa bruta de mortalidad, como se sabe, tiene la ventaja de ser un indicador sencillo y único, pero también el inconveniente de estar afectado por la distribución por edades de la población. A su vez, las tasas de mortalidad por edades están más o menos libres del efecto de dicha distribución, pero el nivel de la mortalidad viene dado por el conjunto de las tasas de los diversos grupos de edades, lo cual dificulta su comparación. En cambio la esperanza de vida al nacer participa de las ventajas de estos dos indicadores.

■ Cuarta característica, la tabla de mortalidad puede ser asimilada a un modelo teórico de población, llamado población estacionaria, al cual se llega manteniendo la mortalidad por edades y los nacimientos constantes en el tiempo. Como consecuencia de estos supuestos, la población total y la distribución por edades permanecen invariables, la tasa de natalidad es igual a la de mortalidad, y por tanto, la tasa de crecimiento natural es igual a cero. Dicho modelo proporciona las relaciones de supervivencia necesarias para proyectar la población por edades, y permite hacer estudios de la estructura y la dinámica de la población.

■ Por último, dado que la medición de la mortalidad está involucrada en la mayoría de los estudios demográficos, la tabla de vida permite efectuar diversas aplicaciones en una gran variedad de problemas, entre los cuales puede mencionarse, la estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad, la evaluación de programas de salud, los estudios de fecundidad, migración, estructura

y crecimiento. Asimismo, la tabla puede ser usada, en el análisis de diversas características socioeconómicas de la población, tales como la fuerza de trabajo, la población en edad escolar y la regulación de los sistemas de jubilaciones y pensiones, para las personas de la tercera edad.



1.2 Diversos tipos de tablas.

Entre los diversos tipos de tablas disponibles, se mencionarán aquí dos clasificaciones principales:

- de acuerdo al período de tiempo o de referencia que comprenden, y
- según la extensión del intervalo de edades en que los datos son presentados.

■ De acuerdo al período de referencia que cubren, las tablas de mortalidad pueden clasificarse en tablas por generaciones y tablas del momento.

Las tablas por generaciones, corresponden al concepto original de tabla de vida. Son aquellas en las cuales se sigue una generación o cohorte ³ de personas a lo largo del tiempo, determinando a cada edad el número de sobrevivientes, hasta que se extingue. Dichas tablas

³ La demografía emplea de un modo preciso la palabra generación, para designar el conjunto de personas nacidas en un mismo período, usualmente un año civil o calendario. Generalizando la idea de generación se llega a la de cohorte, que es el conjunto de personas que han vivido un acontecimiento similar en el transcurso de un mismo período de tiempo. Por ejemplo, la cohorte de las personas que han nacido, que se han casado, que han entrado a la actividad económica, etc. en el transcurso del mismo año. De acuerdo con estas definiciones, suele hablarse indistintamente de generación o cohorte, para designar los sobrevivientes de una tabla de mortalidad.

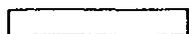
se llaman por generaciones, porque siguen una generación real a lo largo de su existencia. En consecuencia, los sobrevivientes son sometidos a las condiciones de mortalidad de cada uno de los años por los cuales efectivamente van pasando. Estas tablas casi no se utilizan, ya que para elaborarlas se hace necesario seguir la generación por mucho tiempo, hasta que fallece el último sobreviviente, proporcionando además una medición referida a condiciones muy diferentes de mortalidad. Son útiles para ciertos propósitos específicos, como por ejemplo, para estudiar las condiciones de mortalidad de personas de más de 60 años.

Las tablas más usuales son las del momento o de contemporáneos, las cuales se basan en la experiencia de mortalidad observada durante un corto periodo de tiempo (usualmente un año o un promedio de dos o tres años), por todas las generaciones de una población real. En este caso, se forma una cohorte hipotética de personas, las cuales se someten a las condiciones de mortalidad de la población, en el periodo de tiempo considerado. En general, cuando se habla de tablas de mortalidad, se está haciendo referencia a este último tipo de tablas.

■ Por otra parte, de acuerdo a la extensión del intervalo de edades en que los datos son presentados, las tablas se clasifican en completas y abreviadas.

Se denominan tablas completas, aquéllas en que las diferentes funciones se elaboran para cada año de edad. Esto es una simple convención, ya que una tabla donde se presenten las funciones por meses sería más completa que la anterior.

Por su parte, las tablas abreviadas son aquéllas en que las diferentes funciones se calculan por grupos de edades, corrientemente grupos quinquenales. No obstante, dentro del grupo de 0 a 5 años de edad de la mayoría de las tablas abreviadas, se incluyen las diversas funciones por edades simples, como en las tablas completas, ya que dentro de dicho intervalo la mortalidad varía mucho con la edad y esta información resulta de gran utilidad para el estudio de las condiciones de vida de la población infantil y juvenil, para la planificación de la salud, y otros propósitos.



1.3 Diagrama de Lexis.

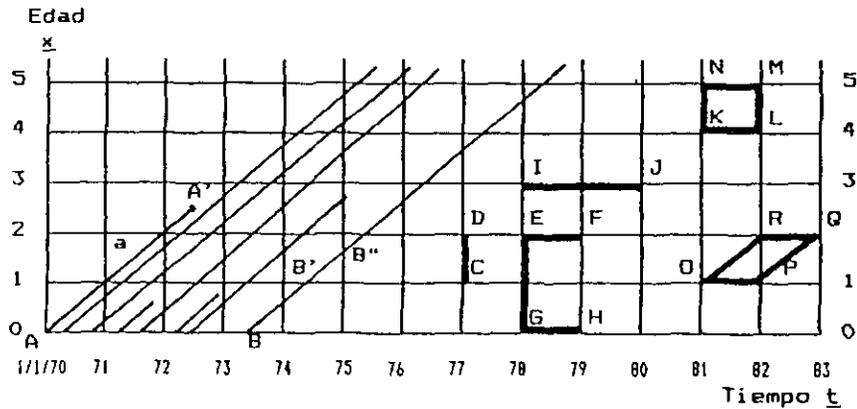
El Diagrama de Lexis se utiliza para representar fenómenos demográficos en el tiempo y facilitar la interpretación de diversas tasas y otros indicadores demográficos. Fue introducido por el estadístico alemán Wilhem Lexis, en su libro Introducción a la Teoría de la Estadística Demográfica, escrito en 1875 ⁴. Tiene la forma indicada en el gráfico 2.

En el eje horizontal se representa el tiempo t , y en el vertical la edad x desde el momento del nacimiento, aunque también podrían incluirse otras variables, como la duración del matrimonio o la participación en la actividad económica.

⁴ Lexis, W., Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik. Strasbourg: Trubner, 1875.

Gráfico 2

DIAGRAMA DE LEXIS. REPRESENTACION DE FENOMENOS DEMOGRAFICOS EN EL TIEMPO.



Si los dos ejes están medidos en la misma escala, cada individuo de una población se representa por una línea de 45 grados a cada uno de los ejes, partiendo de la edad x igual a cero, y del momento del nacimiento en t . Por ejemplo, un nacimiento ocurrido el 10 de enero de 1970, se ubica en el punto A, es decir, en $x=0$ y $t=1/1/70$.

■ A medida que transcurre el tiempo, el punto se desplaza por la línea a llamada línea de vida, que se detiene cuando el niño fallece. Si este niño fallece, supongamos, el 30 de junio de 1972, la línea se detiene en A', que corresponde en la abscisa a esa fecha, y en la ordenada a la edad de 2 años y medio. De igual modo pueden representarse otras líneas de vida, tal como se indica en el gráfico 2, donde unas líneas continúan hasta después de los 5 años y otras se interrumpen a diversas edades.

Las líneas horizontales del diagrama representan aniversarios o cumpleaños y las líneas verticales el paso de un año civil a otro. Por ejemplo la persona B, nacida

el 30 de junio de 1973, pasa de la edad 0 a la edad 1 en B', al atravesar la línea horizontal, mientras que en B", al atravesar la línea vertical, pasa del año 1974 a 1975.

■ Un segmento cualquiera del diagrama, representa el número de líneas de vida que cruzan por ese segmento. Hay segmentos verticales y horizontales.

■ Los segmentos verticales representan las personas de edad cumplida, y se simbolizan con la letra N. Por ejemplo,

$\overline{CD} = N_1^{77}$ representa el número de personas que tienen un año cumplido al 1º de enero de 1977

$\overline{GE} = N_{0-1}^{78}$ representa el número de personas que tienen 0 y 1 años cumplidos al 1º de enero de 1978. Se simboliza también ${}_2N_0^{78}$.

■ Por su parte los segmentos horizontales representan las personas de edad exacta, y se simbolizan con la letra E. Por ejemplo:

$\overline{EF} = E_2^{78}$ es el número de personas que alcanzan la edad 2 durante 1978.

$\overline{GH} = E_0^{78}$ es igual al número de nacimientos ocurridos durante 1978. Se simboliza también por B^{78} .

$\overline{IJ} = E_3^{78-79}$ representa el número de personas que alcanzan la edad 3 durante 1978 y 1979.

■ Una superficie cualquiera del diagrama, comprende el número de personas cuyas líneas de vida se interrumpen dentro de esa área. Se simboliza con la letra Q.

Por ejemplo:

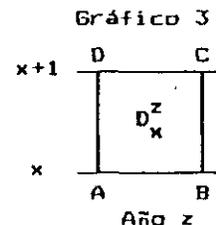
Sup $KLMN = D_4^{81}$ representa el número de defunciones de personas de 4 años cumplidos, ocurridas en 1981.

Sup $KLM = {}_{\alpha}D_4$ comprende el número de defunciones de personas de 4 años cumplidos, ocurridas en 1981, provenientes de las personas que alcanzaron los 4 años durante dicho año.

Sup $KMN = {}_{\delta}D_4$ representa el número de defunciones de personas de 4 años cumplidos, ocurridas en 1981, provenientes de las personas que ya tenían 4 años de edad a comienzos de dicho año.

■ Por último, cuando así se indica expresamente, una superficie puede hacer referencia al tiempo vivido por una población dentro del tramo considerado. Por ejemplo, si se supone que nacen 3 personas en 1980, dos de las cuales llegan con vida a la edad 2 y la tercera fallece a la edad de un año y medio, tal como se muestra en el mismo gráfico 2, el tiempo vivido por esas tres personas en el tramo de 1 a 2 años de edad, o sea en la superficie $OPQR$, será de dos años y medio.

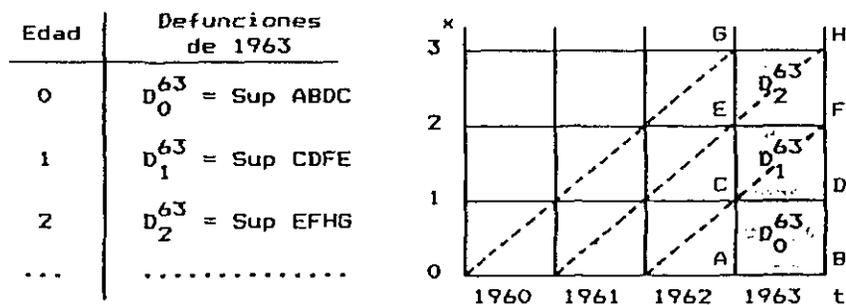
El concepto de tiempo vivido es muy útil para la definición precisa de diversas tasas demográficas. Así por ejemplo, si se desea calcular la tasa de mortalidad de las personas de x años de edad para un año z cualquiera, teóricamente habría que relacionar el número de defunciones ocurridas en el cuadrado $ABCD$ del gráfico 3, con el tiempo vivido por la población dentro de dicha superficie. En la práctica, sin embargo, la informa-



ción sobre tiempo vivido no se dispone (salvo en los casos de encuestas o estudios especiales), por lo cual se utilizan diversas aproximaciones para el cálculo de las tasas, la más común de las cuales es tomar la población de edad x a mitad del año z .

■ Las estadísticas vitales proporcionan información de defunciones por edades, para cada año civil, lo cual en el diagrama de Lexis corresponde a la parte sombreada del gráfico 4. La superficie ABDC de dicho gráfico, corresponde a las defunciones de menores de un año ocurridas en 1963, la superficie CDFE a las defunciones de personas con un año cumplido, etc. Este tipo de información comprende, para cada edad, defunciones de dos generaciones; así por ejemplo, para la edad 2, o sea en el cuadro EFHG $\approx D_2^{63}$, las defunciones del triángulo superior EHG se refieren a nacimientos de 1960, mientras que las del triángulo inferior EFH corresponden a nacimientos de 1961.

Gráfico 4

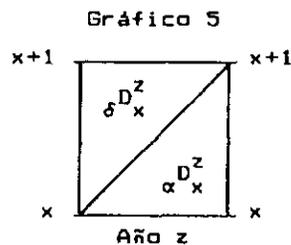


Debido a esta circunstancia, de que las estadísticas vitales mezclan la información de dos generaciones distintas, en algunos países desarrollados se presentan

los cuadros de defunciones clasificados según dos variables: la edad al fallecer y el año de nacimiento, con las cuales se puede separar las defunciones de cada generación.

En los países de América Latina donde los datos básicos contienen errores de cierta importancia que no justifican tanto refinamiento, las defunciones se presentan sólo por edades, sin distinguir el año de nacimiento. En este caso, cuando se necesitan separar las defunciones de cada generación, se recurre a los denominados factores de separación. Siendo para una edad x y un año z cualesquiera:

$$(2) \quad D_x^z = \alpha D_x^z + \delta D_x^z$$



se denomina factor de separación (f_x) a la relación

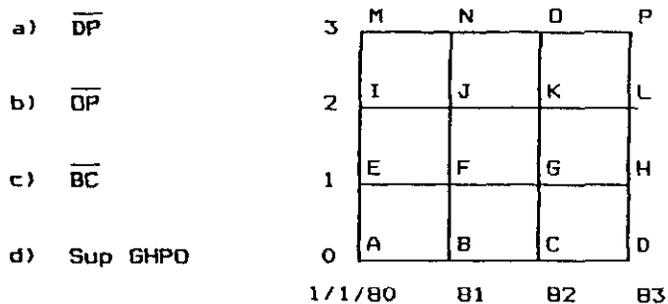
$$(3) \quad f_x^z = \frac{\delta D_x^z}{D_x^z}$$

Teniendo las defunciones por edades y los factores de separación, se pueden estimar las muertes αD_x y δD_x de cada generación. A su vez, conociendo los nacimientos, las defunciones por edades y los factores de separación, se puede estimar la población a una edad cumplida (N_x), o a una edad exacta (E_x) de esas generaciones. Es frecuente hacer dichas estimaciones para el cálculo de probabilidades de muerte de menores de cinco años, tal como se verá en el capítulo 4.

Ejercicio

Dado el siguiente diagrama de Lexis, indicar con símbolos y con palabras, a qué funciones de la población corresponden los siguientes segmentos y superficies:

Gráfico 6



- a) \overline{DP}
 b) \overline{OP}
 c) \overline{BC}
 d) Sup GHPO

Respuesta:

$$a) \overline{DP} = N_{0-2}^{83} = {}_3N_0^{83}$$

Número de personas que tienen de 0 a 2 años cumplidos, al 12 de enero de 1983.

$$b) \overline{OP} = E_3^{82}$$

Número de personas que alcanzan la edad exacta 3, durante 1982.

$$c) \overline{BC} = E_0^{81} = {}_8B^{81}$$

Número de nacimientos ocurridos durante 1981.

$$d) \text{Sup GHPO} = D_{1-2}^{82} = {}_2D_1^{82}$$

Número de defunciones de personas de 1 y 2 años cumplidos, ocurridas en 1982.

1.4 Funciones de la tabla de mortalidad:
Sobrevivientes, Defunciones,
Probabilidades de vida y de muerte.

Se considerarán ahora las diversas funciones que contiene una tabla de mortalidad, su significado, la fórmula de cálculo y el comportamiento gráfico de cada una de ellas. Tal conocimiento es de importancia, porque las funciones de la tabla son de uso frecuente en diversos problemas demográficos.

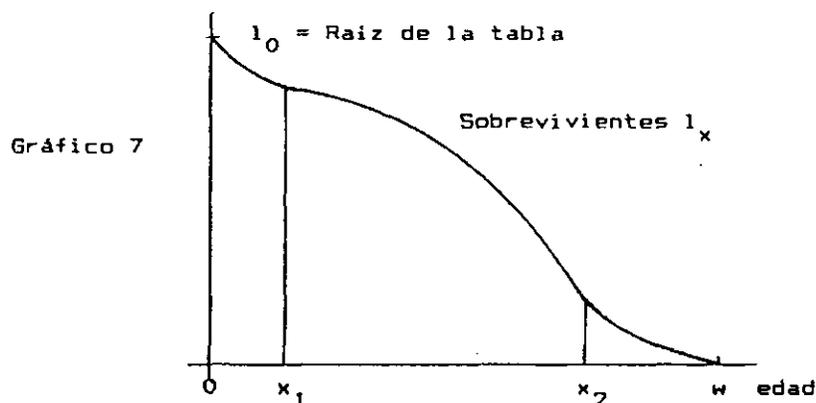
En esta sección se verán las primeras cuatro funciones: los sobrevivientes, las defunciones, y las probabilidades de vida y de muerte, referidas a personas de edad exacta x , mientras que en la sección siguiente se consideran las tres funciones restantes.

1.4.1 **FUNCION 1: Sobrevivientes (l_x)**

Representa el número de personas que alcanzan con vida la edad exacta x , de una generación inicial de l_0 nacimientos. Se dice que esta función muestra "la extinción de una generación por muerte". El valor inicial l_0 se conoce como la raíz de la tabla.

Por su naturaleza se trata de una función positiva, decreciente. Aunque su forma varía de un país a otro, generalmente presenta una curvatura hacia arriba hasta los 10 o 12 años -debido a la mortalidad decreciente de los primeros años de la vida-, luego una curvatura hacia abajo hasta los 60 o 70 años, y nuevamente hacia arriba en las últimas edades.

Su comportamiento gráfico es el siguiente:



Se acostumbra fijar como raíz de la tabla una constante arbitraria tal como 100 000 o la unidad. Una vez fijada dicha raíz, esta función depende solamente de la edad x , a diferencia de la mayoría de las funciones de la tabla, que depende tanto de la edad x como de la amplitud del intervalo n .

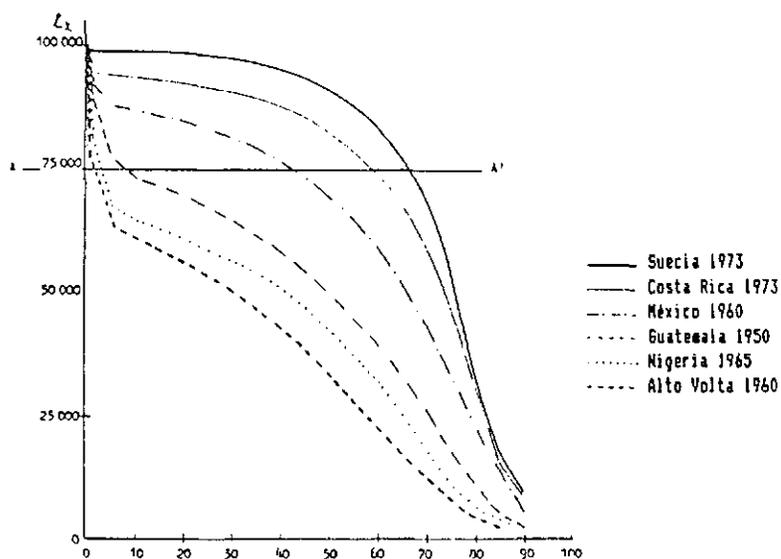
Se designa con w (omega), la edad en la cual el número de sobrevivientes se hace igual a cero. Usualmente w toma valores cercanos a los 100 años, pero este punto no tiene mayor importancia para propósitos demográficos, donde generalmente se trabaja con la población de las últimas edades en forma agrupada, por lo cual las tablas corrientemente se elaboran hasta una edad suficientemente avanzada, como por ejemplo 85 o 90 años, incluyéndose luego un grupo abierto final.

Los sucesivos valores de l_x de la tabla no resultan de la observación directa de una población, estableciendo el número de sobrevivientes a cada una de las edades, sino que se calculan a partir de otras funciones de la tabla, del modo que se indica más adelante.

■ En el gráfico 8 se presentan los valores de la función l_x correspondientes a varios países seleccionados, lo cual permite observar el comportamiento real de esta función para diferentes niveles de mortalidad. Haciendo un corte horizontal en AA' se puede observar que mientras en Suecia la generación l_x se reduce al 75 por ciento alrededor de los 65 años de edad, en las tablas de mayor mortalidad consideradas dicha reducción ocurre antes de alcanzar los 5 años.

Por otra parte, a pesar de las grandes diferencias de mortalidad existentes entre los diversos países considerados en el gráfico, las curvas mantienen los patrones generales de mortalidad indicados, alcanzando niveles cercanos a cero alrededor de los 100 años de edad, donde mueren los últimos sobrevivientes de la cohorte original.

Gráfico 8
COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION l_x EN VARIOS PAISES SELECCIONADOS



Fuente: Naciones Unidas, Anuario Demográfico, 1974.

1.4.2 **FUNCION 2: Defunciones (d_x)**

Representa el número de muertes ocurridas, a una generación inicial de l_0 nacimientos, entre las edades exactas x y $x+1$. Se denominan también "defunciones de la tabla", por oposición a las muertes observadas.

Es por lo tanto:

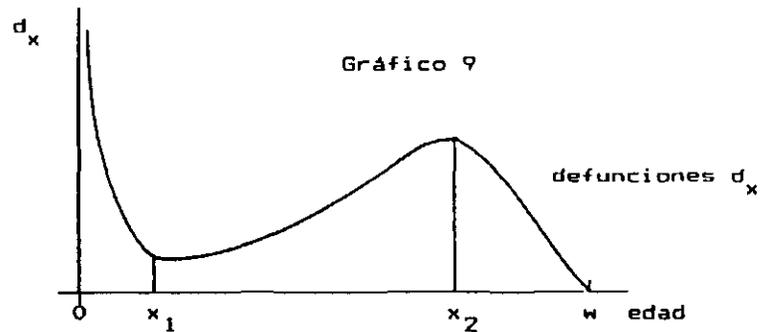
$$(4) \quad d_x = l_x - l_{x+1}$$

Si las defunciones se calculan para un intervalo de edades cualquiera n , puede escribirse la fórmula más general

$$(5) \quad {}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

que representa el número de muertes ocurridas entre los componentes del grupo l_x entre las edades exactas x y $x+n$.

El comportamiento gráfico de esta función es el siguiente:



donde los puntos x_1 y x_2 corresponden a las edades en que la función l_x cambia de curvatura.

La edad x_2 en la cual se produce el máximo relativo de la curva de las muertes, en las edades adultas, se conoce como la edad modal de las defunciones. Esta edad tiende a aumentar a medida que la mortalidad disminuye, oscilando corrientemente entre los 65 y los 80 años. Así por ejemplo, entre las tablas de mortalidad incluidas en el anexo, la tabla masculina de Guatemala de 1950, presenta la edad modal de las defunciones en el grupo de 65 a 69 años, mientras que la tabla masculina de Costa Rica de 1973, que tiene una mortalidad menor, presenta el máximo a la edad de 77 años.

Después de la edad x_2 el número de defunciones disminuye, no por descenso de la mortalidad, sino más bien, porque el número de sobrevivientes de la generación l_x es cada vez más reducido.

■ De las relaciones (4) o (5) se deduce fácilmente que la suma de las defunciones, desde la edad x en adelante, hasta el final de la vida, da la función l_x , vale decir:

$$(6) \quad l_x = \sum_{a=x}^{w-1} d_a = d_x + d_{x+1} + \dots + d_{w-1}$$

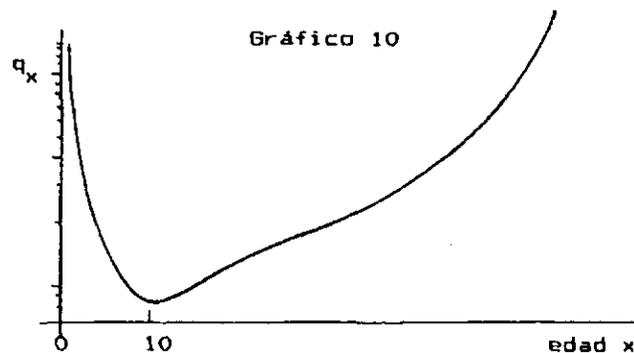
1.4.3. FUNCION 3: Probabilidad de muerte (q_x).

Representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x , de fallecer dentro del año que sigue al momento en que alcanza dicha edad. En símbolos:

$$(7) \quad q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Como toda probabilidad, se trata de una relación entre los casos favorables (al acontecimiento) y los casos posibles, donde los casos favorables son parte de los posibles. Por lo tanto, dicha probabilidad varía entre 0 y 1, según que no fallezca ninguno, o mueran todas las l_x personas en el intervalo considerado.

Su comportamiento gráfico es el siguiente:



Si la probabilidad se calcula para un intervalo de edades de n años, la fórmula sería

$$(8) \quad nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{n d_x}{l_x}$$

En particular, para $x=0$ y $n=1$, se obtiene la probabilidad de muerte del primer año de vida, llamada tasa de mortalidad infantil:

$$(9) \quad q_0 = \frac{l_0 - l_1}{l_0} = \frac{d_0}{l_0}$$

Las probabilidades de muerte nq_x no se calculan en la práctica en la forma sugerida por la relación (8), o sea, a partir de los valores conocidos de l_x y $n d_x$, sino

mas bien, el punto de partida son las probabilidades de muerte ${}_nq_x$, a partir de las cuales se calculan los sobrevivientes y las defunciones, en la forma indicada a continuación.

Si se conocen los valores de ${}_nq_x$ para cada edad o grupos de edades, y una raíz arbitraria l_0 , se pueden obtener los sucesivos valores de l_x y ${}_nd_x$, mediante las siguientes relaciones:

$$(10) \quad l_x \cdot {}_nq_x = {}_nd_x$$

$$(11) \quad l_x - {}_nd_x = l_{x+n}$$

De esta manera, conociendo l_0 y q_0 , aplicando la relación (10) se obtiene d_0 :

$$l_0 \cdot q_0 = d_0$$

Una vez obtenido d_0 , utilizando la relación (11) se obtiene l_1 :

$$l_0 - d_0 = l_1$$

y así sucesivamente.

■ De acuerdo con la notación establecida, cuando la amplitud del intervalo de edades \underline{n} es igual a $\underline{1}$, este valor no se escribe. Sin embargo, es necesario distinguir el caso de las funciones d_x y q_x , que tienen un $\underline{1}$ implícito a la izquierda, al de la función l_x que no lo lleva por ser una función que depende sólo de la edad.

1.4.4 FUNCION 4: Probabilidad de sobrevivencia (p_x)

Representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x , de sobrevivir un año, es decir, de llegar con vida a la edad $x+1$. En símbolos:

$$(12) \quad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Dado que cada componente del grupo l_x o sobrevive a la edad $x+1$ o muere antes de alcanzar esa edad, deberá verificarse necesariamente que

$$(13) \quad p_x + q_x = 1$$

de donde

$$(14) \quad p_x = 1 - q_x$$

En forma más general, para un intervalo de n años, la fórmula sería:

$$(15) \quad \boxed{{}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$$

si $n = 0$, ${}_0 p_x = 1$; mientras que si $n = w-x$, ${}_{w-x} p_x = 0$.

■ ¿Qué pasa si se multiplican probabilidades de sobrevivir de edades sucesivas, por ejemplo $p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2}$?

$$p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} = \frac{l_{x+3}}{l_x} = {}_3 p_x$$

Es decir, si se multiplican probabilidades de sobrevivir de grupos de edades contiguos, se obtiene una probabilidad de sobrevivir referida al intervalo total.

En general, puede decirse que:

$$(16) \quad n p_x \cdot m p_{x+n} = {}_{n+m} p_x$$

Esto no ocurre con las probabilidades de muerte. En efecto,

$$q_0 \cdot q_1 = \frac{d_0}{l_0} \cdot \frac{d_1}{l_1} \neq {}_2 q_0$$

Si se conoce q_0 y q_1 y se desea obtener ${}_2 q_0$, el cálculo debe hacerse a través de las probabilidades de sobrevivir, en la siguiente forma:

$$(1-q_0) \cdot (1-q_1) = p_0 \cdot p_1 = {}_2 p_0$$

$${}_2 q_0 = 1 - {}_2 p_0$$

■ Por último cabe mencionar que todos los símbolos utilizados, corresponden a la notación internacional de los actuarios, los cuales han sido adoptados en demografía. La única diferencia de notación que se introducirá más adelante, en el capítulo 2, es la probabilidad de sobrevivencia desde el nacimiento hasta la edad x (en notación actuarial ${}_x p_0$), la cual se simboliza frecuentemente en demografía como $p(x)$. Se tiene de este modo:

$$(17) \quad p(x) = {}_x p_0 = \frac{l_x}{l_0}$$

Ejercicios

1. Utilizando la tabla de mortalidad femenina de Guatemala de 1950 presentada en el anexo, calcular:

- La probabilidad de que una persona de 20 años exactos llegue con vida a los 40 años.
- La probabilidad de que una persona de 20 años exactos, fallezca entre los 30 y los 45.

Respuesta

$$a) \quad {}_{20}p_{20} = \frac{l_{40}}{l_{20}} = \frac{52\ 931}{64\ 870} = \underline{0.81595}$$

- b) Para cumplirse esta probabilidad, la persona debe sobrevivir primero de los 20 a los 30 años, y luego fallecer en los 15 años siguientes, es decir:

$$\begin{aligned} ({}_{10}p_{20}) \cdot ({}_{15}q_{30}) &= \frac{l_{30}}{l_{20}} \cdot \frac{l_{30} - l_{45}}{l_{30}} = \frac{l_{30} - l_{45}}{l_{20}} \\ &= \frac{59\ 218 - 49\ 592}{64\ 870} = \underline{0.14839} \end{aligned}$$

2. A partir de la siguiente información de una tabla de vida

$$\begin{aligned} l_{15} &= 66\ 572 \quad ; \quad l_{10}d_5 = 5\ 359 \quad ; \quad {}_{20}p_{15} = 0.84092 \\ {}_{25}q_5 &= 0.17927 \end{aligned}$$

calcular:

- El número de sobrevivientes a la edad exacta 35,
- El número de sobrevivientes a la edad exacta 30,
- La probabilidad de sobrevivir de la edad exacta 30 a la edad exacta 35.

Respuesta

$$a) \quad {}_1l_{35} = {}_1l_{15} \cdot {}_20p_{15} = (66\ 572) (0.84092) = \underline{55\ 982}$$

$$b) \quad {}_1l_{30} = ({}_1l_{15} + {}_{10}d_{15}) \cdot (1 - {}_{25}q_{15}) = \\ = (71\ 931) \cdot (0.82073) = \underline{59\ 036}$$

$$c) \quad {}_5p_{30} = \frac{{}_1l_{35}}{{}_1l_{30}} = \frac{55\ 982}{59\ 036} = \underline{0.94827}$$

1.5 Restantes funciones de la tabla de mortalidad:Tiempo vivido entre x, x+n. Tiempo vivido entre x, wEsperanza de vida a edades sucesivas.

Estas funciones son muy usadas en demografía, para el cálculo de las relaciones de supervivencia referidas a personas de edad cumplida x necesarias para proyectar la población por edades, como asimismo, para determinar el nivel general de mortalidad de una población.

1.5.1 FUNCION 5: Tiempo vivido entre x, x+n (${}_nL_x$)

Veamos primero, con un ejemplo, el significado demográfico de esta función, antes de definirla.

■ Ejemplo ilustrativo: Supongamos que se desea calcular el tiempo vivido entre las edades 30 y 35 (${}_5L_{30}$), conociendo el número de sobrevivientes y las defunciones:

$${}_1l_{30} = 86\ 606 \quad ; \quad {}_1l_{35} = 85\ 112 \quad ; \quad {}_5d_{30} = 1\ 494$$

El número de años vividos por esta generación entre los 30 y 35 años, es aportado por las 86 606 personas que llegan con vida a la edad 30, de las cuales 85 112 sobreviven a la edad 35. Cada una de estas 85 112 que llegan con vida al final del intervalo, vivieron 5 años dentro

del grupo 30-34, o sea, aportaron un tiempo total de

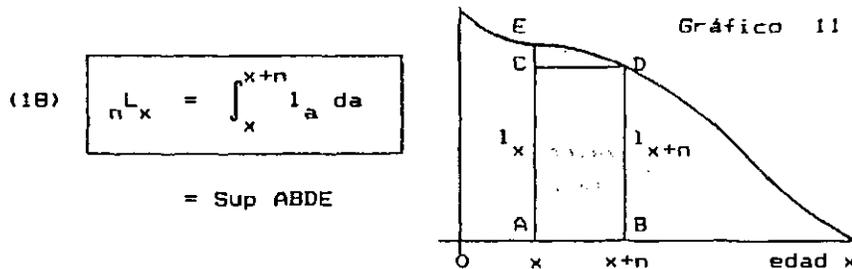
$$85\ 112 * 5 = \underline{425\ 560} \text{ años.}$$

A este valor hay que agregar, los años vividos dentro del grupo 30-34, por las 1 494 personas que fallecen dentro del mismo. Cada una de estas personas vive un período variable, menor de 5 años, promediando alrededor de 2 años y medio (si las muertes se distribuyen uniformemente a lo largo del grupo de edades, sería exactamente 2.5 años). Se tiene entonces que el tiempo aportado por las personas que fallecen resulta

$$1\ 494 * 2.5 = \underline{3\ 735} \text{ años}$$

lo cual, sumado a los 425 560 años vividos por los que llegaron con vida a los 35 años da el total ${}_5L_{30} = 429\ 295$.

■ Definición: Dada la función l_x , su integral entre dos edades cualesquiera x , $x+n$, es igual matemáticamente a la superficie encerrada por la curva, el eje de las x y las ordenadas l_x y l_{x+n} . En términos demográficos esta superficie se denomina tiempo vivido entre x y $x+n$, y representa el número de años vividos por la generación l_0 entre las edades x , $x+n$. Se simboliza ${}_nL_x$.



donde se ha utilizado a como variable de integración, con el fin de distinguirla de los límites x , $x+n$, que corresponden al intervalo de edades.

■ Este tiempo puede descomponerse para fines analíticos en el tiempo vivido por las personas que sobreviven al final del intervalo y los que mueren dentro de él. En términos gráficos estas partes corresponden a las siguientes superficies:

Sup ABDC, que representa el tiempo vivido dentro del intervalo $x, x+n$ por las l_{x+n} personas que llegan con vida a la edad $x+n$. Es igual a:

$$n \cdot l_{x+n}$$

Sup CDE, que es el tiempo vivido dentro del intervalo $x, x+n$ por las ${}_n d_x$ personas que fallecen dentro del mismo. Suponiendo que cada una de estas personas vive en promedio ${}_n k_x$ años, el tiempo vivido por las ${}_n d_x$ personas sería:

$${}_n k_x \cdot {}_n d_x$$

De este modo, se puede establecer la igualdad

(19)

$${}_n L_x = n \cdot l_{x+n} + {}_n k_x \cdot {}_n d_x$$

donde n es la amplitud del intervalo de edades, l_{x+n} las personas que sobreviven a la edad $x+n$, ${}_n d_x$ las personas fallecidas entre $x, x+n$ y ${}_n k_x$ el tiempo medio vivido dentro del intervalo por cada una de las ${}_n d_x$ personas que fallecen.

Con los valores del ejemplo dado al comienzo de esta sección, la fórmula (19) resulta:

$${}_5 L_{30} = 5 * 85\ 112 + 2.50 * 1\ 494 = 429\ 295$$

Si las muertes se distribuyen uniformemente a lo largo del grupo de edades, como en este ejemplo, $k = n/2$. Caso contrario, es un poco mayor o menor.

Más adelante, en la sección 2.5, se relaciona este coeficiente ${}_n k_x$ con el tiempo vivido y el factor de separación. Asimismo, en la sección 2.6 se lo utiliza para establecer una relación entre las tasas de mortalidad por edad y las probabilidades de muerte.

Cálculo del tiempo vivido

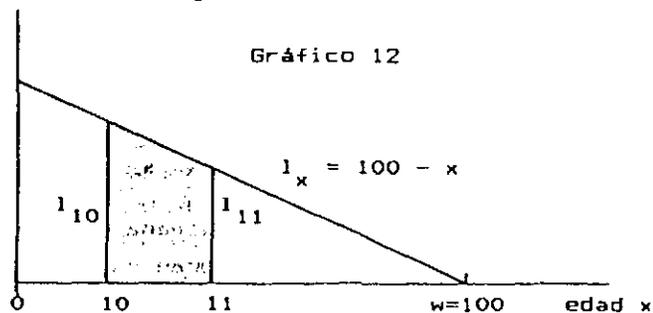
Resulta evidente que si la función l_x tiene una forma matemática conocida, el valor del tiempo vivido ${}_n L_x$ puede calcularse exactamente; bastaría con resolver la integral correspondiente.

Por ejemplo, si el número de sobrevivientes decrece en forma lineal con la edad, según la siguiente relación:

$$(20) \quad l_x = 100 - x \quad (\text{Ley de De Moivre})$$

el tiempo vivido entre los 10 y 11 años exactos es el siguiente:

$$\begin{aligned} L_{10} &= \int_{10}^{11} l_x \, dx = \int_{10}^{11} (100 - x) \, dx \\ &= 100x - \frac{x^2}{2} \Big|_{10}^{11} = 100(11-10) - \frac{11^2 - 10^2}{2} \\ &= 100 - \frac{121 - 100}{2} = \underline{89.5 \text{ años.}} \end{aligned}$$



Generalmente esto no sucede, es decir, la función l_x no tiene una forma matemática conocida, sino que solamente se conoce su valor para determinadas edades exactas 0, 1, 2, etc. En este caso es necesario recurrir a fórmulas aproximadas.

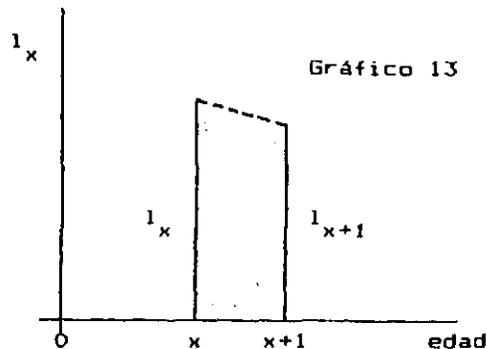
Se verán por separado las fórmulas de cálculo utilizadas para los grupos centrales, en las primeras edades y para el grupo abierto final.

■ a) Grupos centrales ($x \geq 5$ años)

En el caso más sencillo de tablas completas, es decir, cuando el intervalo de edades n es igual a uno, el cálculo del tiempo vivido puede efectuarse con suficiente exactitud, admitiendo que en cada intervalo $x, x+1$ la función de sobrevivencia l_x es lineal.

Bajo este supuesto, el tiempo vivido en cada edad es igual al área de un trapecio, siendo la fórmula de cálculo la siguiente:

$$(21) \quad L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$



Esta es la fórmula más empleada, para el cálculo del tiempo vivido, cuando se elaboran tablas completas de mortalidad.

Si el intervalo de edades es -en general -igual a n años, la fórmula de los trapecios toma la forma:

$$(22) \quad {}_nL_x \approx \frac{l_x + l_{x+n}}{2} * n$$

A medida que la amplitud del intervalo de edades aumenta, el error que se comete al aplicar la fórmula de los trapecios tiende a ser mayor y la fórmula se vuelve inaplicable.

En el caso de tablas abreviadas, donde corrientemente se trabaja por grupos quinquenales, la relación más empleada para el cálculo del tiempo vivido, es la que se deriva de la tasa central de mortalidad (${}_5m_x$). Según se verá más adelante (en pág 67),

$${}_5m_x = \frac{{}_5d_x}{{}_5L_x}$$

de donde:

(23)

$${}_5L_x = \frac{{}_5d_x}{{}_5m_x}$$

De esta manera, conociendo la tasa central de mortalidad (que es la información básica en la construcción de la tabla de vida), y una vez que se ha obtenido la probabilidad de muerte y las defunciones de la tabla, se puede calcular el tiempo vivido de los sucesivos grupos de edades.

Sin embargo la fórmula (23) no siempre puede aplicarse, ya que algunas veces no se conoce la tasa central de mortalidad, como por ejemplo, cuando se preparan tablas modelo de mortalidad, o cuando se elaboran tablas de vida relacionando la población por edades de dos censos sucesivos. En tal caso, la fórmula (22) suele emplearse en su reemplazo.

■ b) Primeras edades ($x = 0, 1, 2, 3, 4$)

En las primeras edades las muertes se distribuyen más irregularmente, por lo cual la fórmula de los trapecios no proporciona buenos resultados. En dicho tramo, la relación más utilizada para el cálculo del tiempo vivido es la siguiente:

$$(24) \quad L_x = f_x l_x + (1 - f_x) l_{x+1}$$

donde f_x es el factor de separación de las muertes. Esta relación se comprobará más adelante, en la sección 2.5, una vez visto el concepto de población estacionaria.

La relación anterior es muy usada para calcular el tiempo vivido del primer año de vida, es decir, bajo la forma:

$$(25) \quad L_0 = f_0 l_0 + (1 - f_0) l_1$$

donde el factor de separación f_0 vale alrededor de 0.10 a 0.35, dependiendo del nivel de la mortalidad.

Para las edades 1, 2, 3 y 4 los factores de separación son cercanos a 0.50 y más difíciles de calcular por falta de información adecuada, debido a lo cual, en la mayoría de las tablas, el cálculo del tiempo vivido se hace tomando directamente $f_x = 0.5$, lo cual equivale a la fórmula de los trapecios. En otras tablas se han usado los factores de separación de Glover 5 siguientes, ob-

* Greville, Thomas M.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States, Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1946.

tenidos en base a estadísticas de Alemania de comienzos de siglo:

FACTORES DE SEPARACION DE GLOVER

x....	1	2	3	4
f_x ...	0.41	0.47	0.48	0.48

Por otra parte, despejando en la relación (25) el valor de f_x se obtiene

$$(26) \quad f_0 = \frac{L_0 - l_1}{d_0}$$

fórmula que permite obtener el valor del factor de separación del primer año de vida, implícito en una tabla de mortalidad.

■ c) Grupo abierto final (x_+)

Para el cálculo del tiempo vivido correspondiente al grupo abierto final $L_{x_+} = {}_wL_x$, donde x es generalmente igual a 75, 80 u 85 años, suelen usarse las siguientes relaciones:

1. El procedimiento más usual es el derivado de la tasa central de mortalidad bajo la forma especial

$$(27) \quad {}_wL_x = \frac{{}_w d_x}{{}_w m_x} = \frac{l_x}{{}_w m_x}$$

donde ${}_w m_x$ es la tasa central de mortalidad del grupo abierto de x a w años. En algunos casos, especialmente cuando no se conoce el valor de ${}_w m_x$, o cuando éste último está visiblemente afectado por los errores de la información básica, se emplean otras relaciones.

2. Para la elaboración de las Tablas Modelo de las Naciones Unidas ⁶ se calcularon tablas con un grupo abierto final de 85 años y más, obteniéndose el tiempo vivido mediante la fórmula:

$$(28) \quad L_{85+} = l_{85} \cdot \log l_{85}; \text{ siendo } l_0 = 100\ 000$$

Esta es una relación empírica aproximada. Para los países de América Latina tiende, en general, a subestimar el valor de L_{85+} . Además, no puede aplicarse cuando la edad inicial del intervalo abierto final es diferente de 85.

3. En la construcción de las Tablas Modelo de Coale y Demeny 7, las tablas se elaboraron con un grupo abierto final de 80 años y más. La relación usada para el cálculo del tiempo vivido fue la siguiente:

$$(29) \quad L_{80+} = (3.725 + 0.0000\ 625\ l_{80})^{1/80};$$

siendo $l_0 = 100\ 000$.

Según las tablas de vida disponibles para los países de América Latina, esta relación tiende también a subestimar el cálculo del tiempo vivido. Por ejemplo, para la tabla masculina de México 1970, presentada en el anexo, el tiempo vivido L_{80+} es igual a 179 005, en tanto que utilizando la fórmula (29) de Coale-Demeny resulta igual a 132 235.

⁶ Naciones Unidas, Manual III. Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad. ST/SOA/Serie A/25.

⁷ Coale, A.J. y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton, New Jersey, 1966.

4. Dados los problemas señalados y teniendo en cuenta que no se dispone de relaciones para otras edades, se calcularon aquí tres fórmulas adicionales, utilizando como base 44 tablas de mortalidad de diversos países de América I, con las cuales se calcularon, por mínimos cuadrados, ecuaciones de regresión de la forma:

$$(30) \quad L_{x+} / l_x = a + b \cdot l_x$$

para las edades 75+, 80+ y 85+. De esta manera se obtuvieron las relaciones:

$$(31) \quad L_{75+} = (5.731 + 0.0000654 l_{75}') l_{75}$$

$$(32) \quad L_{80+} = (4.769 + 0.0000536 l_{80}') l_{80}$$

$$(33) \quad L_{85+} = (3.862 + 0.0000466 l_{85}') l_{85}$$

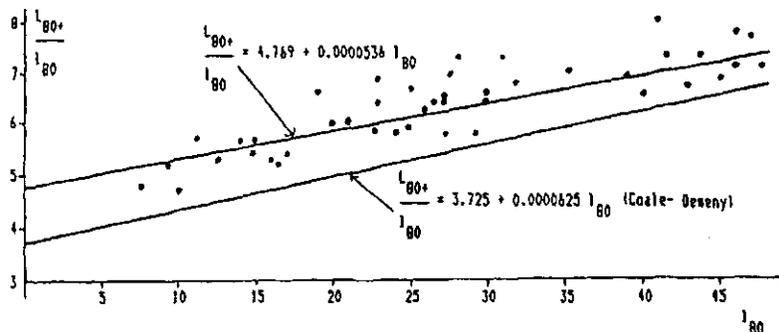
siendo, como en los casos anteriores, $l_0 = 100\ 000$.

En el gráfico 14 se presentan los puntos observados, correspondientes a las 44 tablas, y la ecuación lineal ajustada, para el grupo 80 y más. En dicho gráfico se incluye también la relación de Coale-Demeny. Puede verse que para las 44 tablas consideradas, la relación de Coale Demeny subestima el cálculo del tiempo vivido del grupo abierto final. Asimismo, a medida que crece el número de sobrevivientes l_{80}' , las dos rectas de ajuste tienden a ser cada vez más parecidas.

* Son las tablas de uno y otro sexo de Argentina 1947 y 1960; Costa Rica 1950, 1963 y 1973; Cuba 1970; Chile 1952-53, 1960-61 y 1969-70; Guatemala 1950 y 1964; México 1940, 1950 y 1960; Panamá 1960 y 1970; Canadá 1966 y 1971; Estados Unidos 1970 y 1972; Uruguay 1974-76 y Venezuela 1981.

Gráfico 14

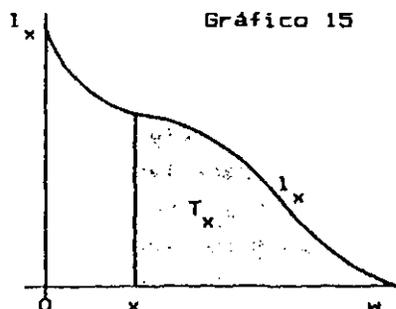
ECUACION DE REGRESION PARA EL CALCULO DEL TIEMPO VIVIDO DEL GRUPO 80 Y MAS

1.5.2 **FUNCION 6: Tiempo vivido entre x y w (T_x)**

Se ha visto ya el número de años vividos por la generación o cohorte entre las edades x y $x+n$ (${}_nL_x$). Haciendo ahora el límite superior $x+n = w$ se obtiene:

(34)

$$T_x = \int_x^w l_a da$$



que representa el número total de años vividos por la generación de l_0 nacimientos entre las edades x y w . Como en el caso de la función ${}_nL_x$, se ha utilizado a como variable de integración, con el fin de distinguirla de los límites x, w , que corresponden al intervalo de edades.

Descomponiendo el intervalo de edades se tiene:

$$(35) \quad T_x = \int_x^{x+1} l_a da + \int_{x+1}^{x+2} l_a da + \dots$$

$$= L_x + L_{x+1} + \dots$$

$$(36) \quad T_x = \sum_{a=x}^{w-1} L_a$$

Vale decir que la función T_x puede expresarse en términos de L_x y calcularse acumulando dicha función desde la edad final w hacia arriba. Por ejemplo:

Edad	L_x	T_x	$T_{85} = L_{85+} = 80\ 140$
82	23 212	142 034	$T_{84} = 80\ 140 + 18\ 083$
83	20 599	118 822	$= 98\ 223$
84	18 083	98 223	$T_{83} = 98\ 223 + 20\ 599$
85+	80 140	80 140	$= 118\ 822$
			...



Ejercicio

Indicar si las siguientes relaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- a) $T_{60} > T_{50}$ ()
- b) ${}_{20}L_{40} = T_{40} - T_{60}$ ()
- c) $T_{82} - L_{82} = L_{83} + T_{84}$ ()

Respuesta:

- a) F ; b) V ; c) V.

1.5.3 **FUNCION 7: Esperanza de vida a la edad x (e_x^0)**

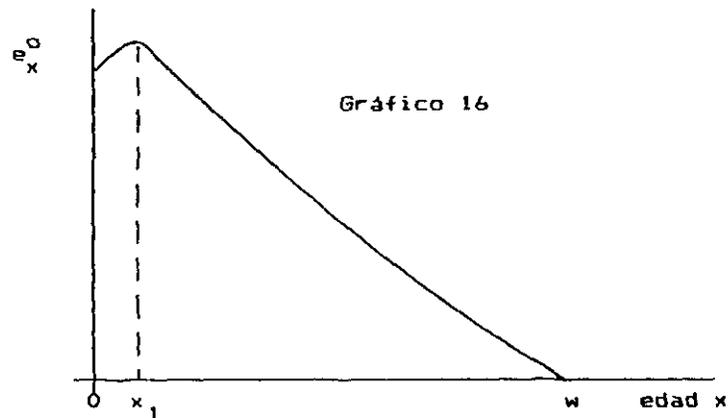
Dividiendo el tiempo vivido T_x por el número de personas l_x se obtiene una función particularmente importante, la esperanza de vida a la edad x ,

$$(37) \quad e_x^0 = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_x^w l_a da}{l_x}$$

que representa el número de años que en promedio vive una persona desde la edad x en adelante, hasta el final de la vida. La esperanza de vida a la edad x suele denominarse también "vida media a la edad x ".

En particular si $x = 0$, se llega a la esperanza de vida al nacer (e_0^0), que es una medida resumen de la mortalidad general, la cual no está afectada por la estructura por edades de la población.

El comportamiento gráfico de esta función es el siguiente:



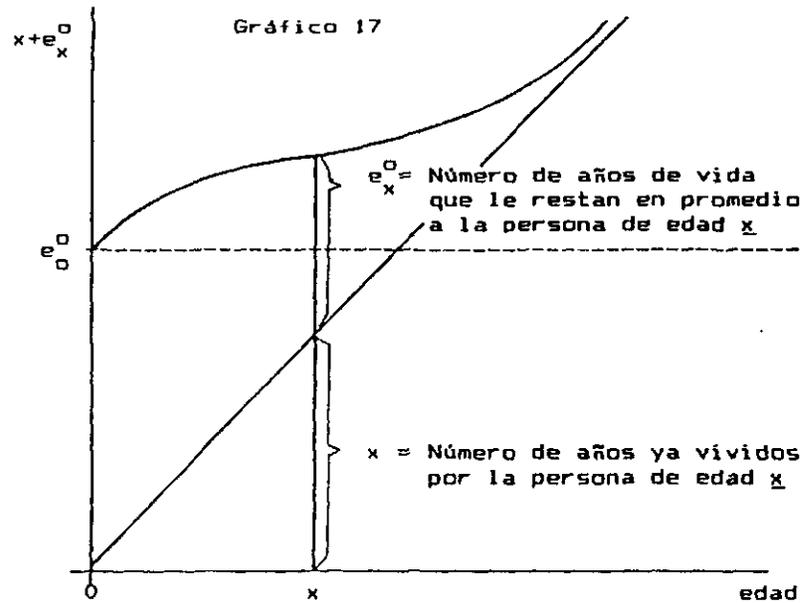
Debido a la mortalidad relativamente alta de los primeros años, la esperanza de vida aumenta en las primeras edades, para luego decrecer en forma continua hasta el final de la vida. Esta función toma su valor máximo a una edad x , comprendida entre 0 y 5, dependiendo del nivel de la mortalidad, siendo la edad menor, a medida que la mortalidad disminuye. Entre las tablas presentadas en el anexo, la esperanza de vida de Guatemala presenta el máximo a la edad 4, la de México a la edad 2, y la de Costa Rica a la edad 1. En otras tablas de más baja mortalidad, como por ejemplo en la tabla de Holanda de 1973, que tiene una mortalidad infantil igual a 10 por mil, la esperanza de vida decrece continuamente desde la edad 0 (aunque si se calculara esta función por meses, dentro del primer año de vida, el máximo se situaría entre la edad 0 y 1).

■ Asociado al concepto de esperanza de vida a la edad x , que como se ha dicho representa el número de años que en promedio vive una persona desde la edad x en adelante, está el concepto del número total de años que en promedio vive una persona de edad x , desde el nacimiento hasta el final de la vida. Es igual a:

$$(38) \quad x + e_x^0$$

El comportamiento gráfico de esta función es el indicado en el gráfico 17.

Para cada edad x , el valor que está por debajo de la diagonal representa los años ya vividos, mientras que el tramo que está por encima, corresponde a los años de vida, que le restan en promedio, a la persona de edad x .



El número total de años que se espera que viva una personas de edad $x > 0$ cualquiera, es mayor que la esperanza de vida al nacer, debido a que dicha persona ha superado el riesgo de morir desde el nacimiento hasta la edad x . Así por ejemplo, según la tabla de vida masculina de México de 1970, presentada en el anexo, la esperanza de vida al nacer es igual a 60.05 años, en tanto que el total de años que se espera que viva una personas que llega con vida a los 50 años es

$$x + e_x^0 = 50 + 24.19 \approx 74.18 \text{ años}$$

Este total de 74.18 años, es igual al valor de e_{50}^0 que se obtendría en una tabla que se construyera haciendo todas las probabilidades de muerte, desde el nacimiento hasta los 50 años de edad, iguales a 0, y tomando luego las probabilidades de muerte de las edades subsiguientes, de la tabla de México ya mencionada.



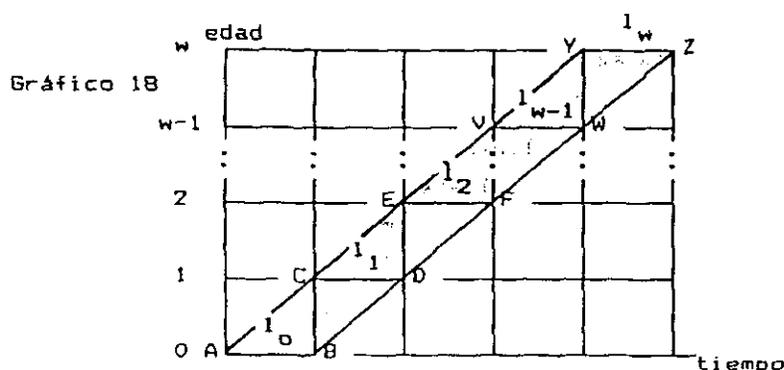
1.6 Resumen de las funciones de la tabla.

En resumen, el significado de cada una de las funciones de la tabla de vida es el siguiente:

- l_x : Representa el número de personas que alcanzan con vida la edad exacta x , de una generación inicial de l_0 nacimientos.
- ${}_n d_x$: Representa el número de muertes ocurridas a una generación inicial de l_0 nacimientos, entre las edades exactas x y $x+n$.
- ${}_n q_x$: Es la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x , de fallecer antes de alcanzar la edad $x+n$.
- ${}_n p_x$: Es la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x , de llegar con vida a la edad $x+n$.
- ${}_n L_x$: Representa el número de años vividos por la generación de l_0 nacimientos entre las edades x y $x+n$.
- T_x : Es el número total de años vividos por la generación de l_0 nacimientos entre las edades x y w .
- e_x^o : Representa el número de años que en promedio vive una persona desde la edad x en adelante, hasta el final de la vida.

1.7 Interpretación de las funciones de la tabla de vida en el diagrama de Lexis.

Cuando se representa la tabla de vida en un diagrama de Lexis, suele suponerse que los nacimientos (o sea, la raíz de la tabla), se distribuyen uniformemente a lo largo de un año. En estas condiciones se tiene el siguiente diagrama, donde las líneas de vida de la generación inicial de l_0 nacimientos se desplazan dentro de la superficie de la diagonal ABZY.



A continuación se indica, la interpretación que tienen las principales funciones de la tabla, en dicho diagrama.

■ Sobrevivientes l_x

La generación inicial compuesta por los l_0 nacimientos se ubica en el segmento \overline{AB} ; estos nacimientos se distribuyen uniformemente a lo largo de dicho segmento. Los sobrevivientes a la edad exacta 1, corresponden al número de líneas de vida que cruzan por el segmento \overline{CD} ; y así sucesivamente. En consecuencia:

$$l_0 = \overline{AB} ; \quad l_1 = \overline{CD} ; \quad l_2 = \overline{EF} ; \quad \dots ; \quad l_w = \overline{YZ} = 0$$

■ Defunciones d_x

Las defunciones de la tabla de vida ocurridas dentro del primer año de vida, d_0 , corresponden en el diagrama al número de líneas de vida que se interrumpen dentro de la superficie ABDC. Análogamente, las defunciones d_1 corresponden al número de líneas de vida que se interrumpen dentro de la superficie CDFE; etc. Se tiene por tanto:

$$d_0 = \text{Sup ABDC} ; d_1 = \text{Sup CDFE} ; \dots ; d_{w-1} = \text{Sup VWZY}$$

■ Tiempo vivido L_x

El tiempo vivido por la generación l_0 en el primer año de la vida, L_0 , corresponde en el diagrama de Lexis a la suma de los años vividos por cada una de ellas dentro de la superficie ABDC (las personas que sobreviven a la edad 1 aportan un año, mientras que las que fallecen aportan una fracción). La interpretación es similar para las edades subsiguientes. En consecuencia:

$$L_0 = \text{Tiempo vivido dentro de la superficie ABDC}$$

$$L_1 = \text{Tiempo vivido dentro de la superficie CDFE}$$

.....

$$L_{w-1} = \text{Tiempo vivido dentro de la superficie VWZY}$$

■ La representación gráfica de las restantes funciones de la tabla, en el diagrama de Lexis, se deducen de las anteriores. Por ejemplo,

$$q_0 = \frac{d_0}{l_0} = \frac{\text{Sup ABDC}}{\overline{AB}}$$

[]

1.8 Funciones continuas de la tabla de vida:

Tasa instantánea de mortalidad por edad (μ_x)

Las probabilidades de muerte q_x y ${}_nq_x$ descritas en las secciones anteriores, corresponden al campo discreto o discontinuo, en el sentido que se refieren a intervalos finitos de edades, de 1 y n años, respectivamente.

Sin embargo, en el desarrollo teórico de diversos temas demográficos, se trabaja frecuentemente con funciones del campo continuo. Tal es el caso, por ejemplo, de la definición del modelo de población estacionaria presentado al comienzo del capítulo 2, o la derivación de relaciones que permiten estimar la mortalidad al comienzo de la vida, la tasa de crecimiento de la población, etc. En estos casos, se emplea una tasa de mortalidad del campo continuo, denominada tasa instantánea de mortalidad por edad, la cual se obtiene a partir de la probabilidad de muerte ${}_nq_x$, haciendo algunas transformaciones convenientes, y tomando luego el límite para el intervalo de edades tendiendo a cero. Veamos la deducción de esta fórmula y el significado de la misma.

■ Como se sabe, la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x de fallecer antes de alcanzar la edad exacta $x+n$ es:

$$(8) \quad {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Esta probabilidad depende no sólo de la edad, sino también de la amplitud del intervalo. Bastará con tomar n suficientemente reducido, para que la probabilidad anterior sea todo lo pequeña que se desee, cualquiera sea la edad x considerada.

Una medida de la mortalidad en un año de edades se obtiene dividiendo por n la tasa de mortalidad definida anteriormente. Puede escribirse en tal caso, haciendo algunos cambios algebraicos convenientes:

$$\frac{{}_nq_x}{n} = \frac{l_x - l_{x+n}}{n \cdot l_x} = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{l_{x+n} - l_x}{n}$$

Pasando al campo continuo, es decir, tomando límite para n tendiendo a cero, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_nq_x}{n} = -\frac{1}{l_x} \left[\lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_{x+n} - l_x}{n} \right]$$

Dentro del corchete se tiene el límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento de la variable, para el incremento de la variable tendiendo a cero, o sea, la derivada de la función l_x . Resulta por tanto,

$$= -\frac{l'_x}{l_x}$$

Como la función l_x es decreciente, su derivada es negativa, de modo que la expresión $-l'_x$ es una cantidad positiva. Su valor da una medida de las defunciones en un año de edades, en función de lo observado en un pequeño intervalo en torno al punto x .

Dividiendo dichas defunciones por el número de personas l_x , se obtiene una tasa de mortalidad, llamada tasa instantánea de mortalidad por edad, que se simboliza con μ_x .

$$(39) \quad \mu_x = - \frac{l'_x}{l_x} = - \frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{dx} = - \frac{d}{dx} \ln l_x$$

La tasa instantánea de mortalidad μ_x del campo continuo, guarda correspondencia con la probabilidad de muerte q_x del campo discreto o discontinuo. Ambas dan una medida anual de la mortalidad: la q_x en función de lo observado en un año de edades x a $x+1$, en tanto que la μ_x en función de lo observado en torno al punto x . La μ_x es una medida más precisa, ya que indica el valor de la tasa de mortalidad en cada momento, en tanto que la q_x da un promedio referido a un intervalo finito.

■ Conociendo la tasa instantánea de mortalidad por edad μ_x , se pueden calcular otras funciones de la tabla de mortalidad. De la ecuación básica (39) se obtiene:

$$\frac{d l_x}{l_x} = - \mu_x dx$$

la cual, después de integrar entre 0 y x da:

$$(40) \quad \ln l_x - \ln l_0 = - \int_0^x \mu_a da$$

$$l_x = l_0 \cdot e^{- \int_0^x \mu_a da}$$

obteniéndose así el número de sobrevivientes, en función de la tasa instantánea de mortalidad por edad. Si en lugar de integrar entre 0 y x , se lo hace entre x y $x+n$, se llega a la probabilidad de sobrevivencia ${}_n p_x$.

Aplicación práctica: Funciones de Gompertz y Makeham

Demostrar que la función de Gompertz, según la cual el número de sobrevivientes decrece según la ley:

$$(1) \quad l_x = k \cdot b^{c^x},$$

equivale a suponer que la tasa instantánea de mortalidad por edad μ_x aumenta en forma exponencial.

Respuesta:

De acuerdo a la definición de μ_x dada en (39) la tasa instantánea de mortalidad es igual a

$$\mu_x = - \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d l_x}{dx}$$

Tomando logaritmos en la relación (1) de Gompertz y derivando con respecto a x se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln l_x &= \ln k + (\ln b) \cdot c^x \\ \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d l_x}{dx} &= (\ln b) \cdot (\ln c) \cdot c^x \end{aligned}$$

De aquí resulta:

$$\begin{aligned} \mu_x &= - (\ln b) \cdot (\ln c) \cdot c^x \\ (41) \quad \mu_x &= B \cdot c^x \end{aligned}$$

es decir, la tasa de mortalidad crece en forma exponencial con la edad.

■ Una variante de la ley de Gompertz fue desarrollada por Makeham en 1860⁹. En términos de l_x la función de Makeham toma la siguiente forma:

$$(42) \quad l_x = k \cdot a^x \cdot b^{c^x}$$

⁹ Makeham, W.M., "On the Law of Mortality and Construction of Annuity Tables", Journal of the Institute of Actuaries, 8:301 (1860).

de donde, la tasa de mortalidad por edad resulta, procediendo en forma análoga al caso anterior:

$$\ln l_x = \ln k + x \cdot (\ln a) + c^x (\ln b)$$

$$\frac{1}{l_x} \cdot \frac{d l_x}{dx} = (\ln a) + (\ln b)(\ln c) \cdot c^x$$

$$\mu_x = - (\ln a) - (\ln b)(\ln c) \cdot c^x$$

$$(43) \quad \mu_x = A + B \cdot c^x$$

En particular si $a=1$, o lo que es lo mismo $A=0$, se llega a la función de Gompertz.

Las fórmulas de Gompertz y Makeham son muy utilizadas en demografía, para describir el comportamiento de la mortalidad, la población total y la fecundidad por edades. Para mayor información sobre el empleo de estas fórmulas pueden consultarse, por ejemplo, los artículos de Bocaz ¹⁰ y Chackiel ¹¹, publicados en la revista *Notas de Población*, y el libro de Spiegelman ¹².

En resumen:

- Función de Gompertz:

$$(1) \quad l_x = k \cdot b^{c^x} \quad (41) \quad \mu_x = B - c^x$$

- Función de Makeham:

$$(42) \quad l_x = k \cdot a^x \cdot b^{c^x} \quad (43) \quad \mu_x = A + B - c^x$$

¹⁰ Bocaz, A., "El uso de la ley de Makeham como función demográfica", en *Notas de Población*, No. 6, diciembre de 1974.

¹¹ Chackiel, J., "Estructura de la fecundidad por edades: ajuste y proyección mediante la función de Gompertz linealizada", en *Notas de Población*, No. 20, agosto de 1979.

¹² Spiegelman, M., *Introducción a la Demografía*, Fondo de Cultura Económica, México 1972. Secciones 5.3.2 y 6.3.0.

1.9 Comparación gráfica de las funciones μ_x y q_x .

La relación entre la tasa instantánea de mortalidad por edad (μ_x) y la probabilidad de muerte (q_x), depende de la forma de la curva de la función de supervivencia l_x . En general se verifica que en las primeras edades, hasta los 10 años aproximadamente, y en las últimas edades, después de los 70 o 75 años, la función l_x es cóncava hacia arriba (o sea, hacia el sentido positivo del eje de las ordenadas), mientras que entre los 10 y 70 o 75 años, la función l_x es cóncava hacia abajo.

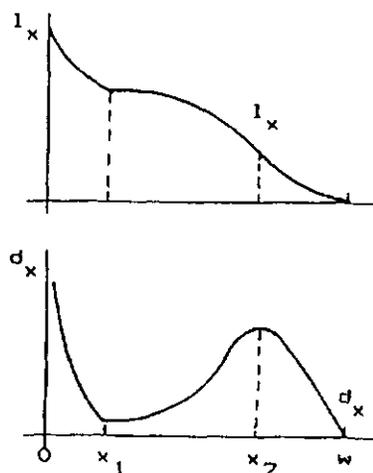
Dicho comportamiento coincide con los tramos en que las defunciones son decrecientes y crecientes, respectivamente, tal como se indica en el esquema presentado en el gráfico 19. Este comportamiento gráfico puede variar en algunos países, sin que ello tenga importancia para propósitos de la comparación que aquí se está efectuando.

Gráfico 19

Función l_x :

-cóncava hacia arriba
en $(0, x_1)$ y (x_2, w)

-cóncava hacia abajo
en (x_1, x_2)



Veamos la relación entre q_x y μ_x en un tramo donde la función l_x es cóncava hacia arriba. Dicho tramo se representa en el gráfico 20. En este gráfico:

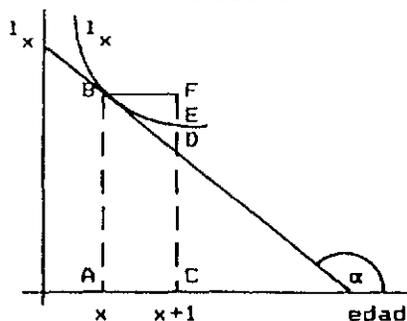
$$l_x = \overline{AB},$$

$$l_{x+1} = \overline{CE},$$

$$d_x = \overline{EF}$$

$$\frac{d l_x}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \overline{FD} \text{ (neg.)}$$

Gráfico 20



En la última expresión, la derivada de l_x es igual a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en el punto, con el sentido positivo del eje de las x , o sea es igual a $\operatorname{tg} \alpha = \overline{FD}$, que es un valor negativo. Por tanto,

$$(44) \quad q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$$

$$(45) \quad \mu_x = - \frac{\frac{d l_x}{dx}}{l_x} = - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_x} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AB}}$$

Dado que $\overline{DF} > \overline{EF}$, resulta:

$$(46) \quad \mu_x > q_x$$

En consecuencia, en los tramos donde la función l_x es cóncava hacia arriba, o sea, en las primeras y en las últimas edades, la tasa instantánea de mortalidad es mayor que la probabilidad de muerte.

En forma totalmente análoga podría demostrarse que, en los tramos en que l_x es cóncava hacia abajo, o sea en las edades centrales, la tasa instantánea de mortalidad es menor que la probabilidad de muerte.

Estos resultados están de acuerdo con lo esperado. Si l_x es cóncava en el intervalo $x, x+1$, eso significa que las defunciones correspondientes a cada fracción del año son decrecientes, mientras que la derivada supone que las defunciones se mantienen constantes, ya que da una medida de las defunciones en un año en función de lo observado a la edad x , suponiendo que esa intensidad permanece igual a lo largo del año. Por ejemplo, si fallecen 100 personas en el primer mes, 95 en el segundo, 90 en el tercero, y así sucesivamente, decreciendo de 5 en 5, se obtendría un total de 880 defunciones en el año, en tanto que la derivada daría 1200. De este modo las defunciones teóricas son mayores que las reales de la tabla y la tasa instantánea de mortalidad por edad resulta mayor.

En resumen,

- si l_x es cóncava hacia arriba:

$$(46) \quad \mu_x > q_x$$

- si l_x es cóncava hacia abajo:

$$(47) \quad \mu_x < q_x$$

■ A continuación se incluyen algunos ejercicios de repaso de temas vistos en este capítulo, principalmente los referidos a la interpretación y cálculo de las diversas funciones de la tabla de vida. Las respuestas correspondientes se presentan al final del libro.



EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 1
(Ver respuestas al final del libro)

1. -Indicar con símbolos a qué es igual cada una de las siguientes probabilidades y explicar con palabras su significado:

a) ${}_5P_{30}$; b) ${}_5^q_{17}$

2. -Utilizando la tabla completa de mortalidad masculina de Costa Rica de 1972-1974 presentada en el anexo, calcular el valor de las probabilidades indicadas en el ejercicio anterior.

3. -En la misma tabla de vida, encontrar los siguientes valores:

- a) El número de defunciones entre los 2 y los 5 años exactos.
 b) La edad modal de las defunciones.
 c) El tiempo vivido por la generación l_x entre los 43 y los 54 años exactos.
 d) El número de años que se espera que viva una persona, una vez que alcanza los 65 años de edad.

4. -Obtener la probabilidad de sobrevivir ${}_5P_{30}$, a partir de la siguiente información:

$${}_5P_{10} ; {}_{10}^d_0 ; {}_{15}^q_{15} ; {}_{20}P_{15}$$

5. Dado los valores de $q_0 = 0.05365$; $q_1 = 0.00867$; $q_2 = 0.00323$ y la raíz arbitraria $l_0 = 100\ 000$, calcular los valores de l_1 , l_2 , d_1 y d_2 .

6. -Sabiendo que $q_0 = 0.05520$ y ${}_5q_0 = 0.06720$ calcular el valor de ${}_4q_1$.

7. -Indicar si las siguientes relaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

a) $L_x > l_{x+1}$ ()

b) $T_{80} < T_{85}$ ()

c) $l_x = d_x + l_{x+1}$ ()

d) $L_B + L_9 = T_B - T_{10}$ ()

e) $q_0 + p_0 \cdot q_1 = 2q_0$ ()

8. -Calcular el factor de separación f_0 implícito en la tabla masculina de Guatemala de 1950.

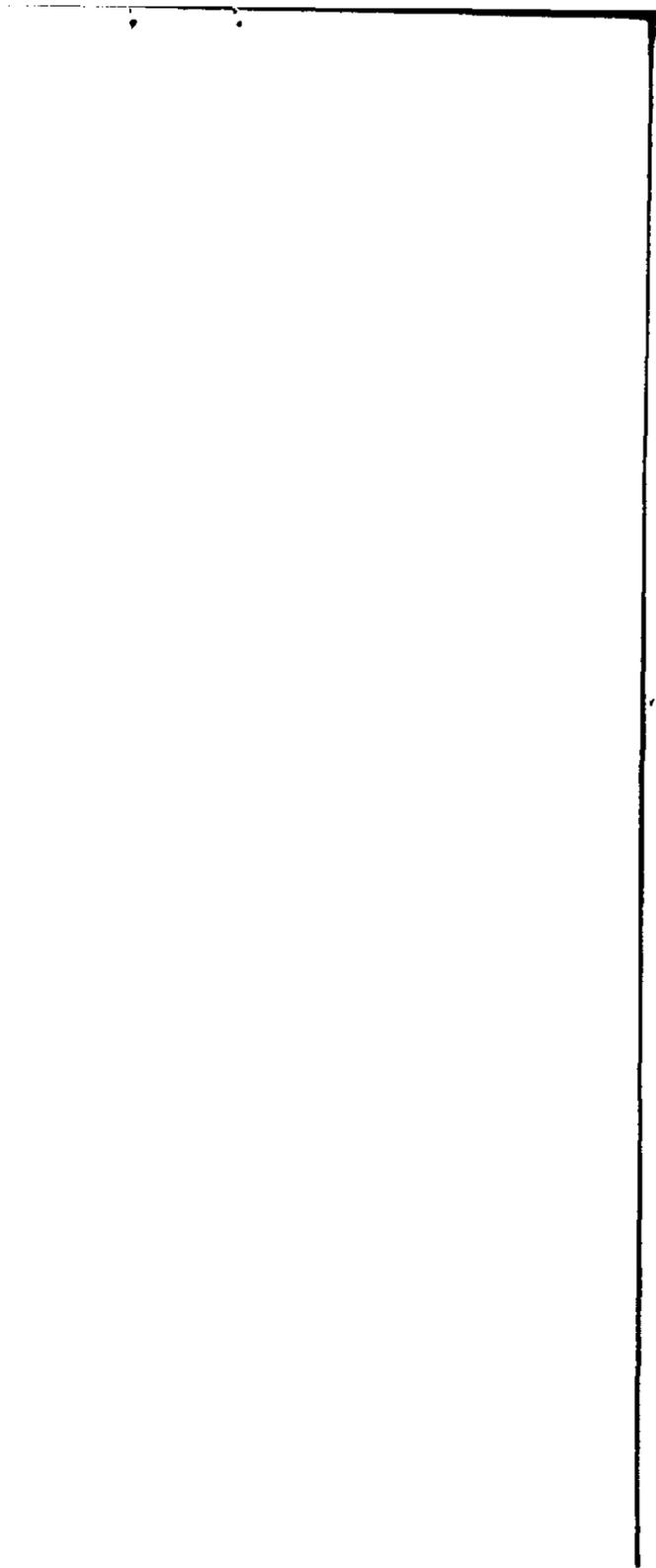
9. -Calcular la función de supervivencia l_x y la esperanza de vida e_x^0 , bajo el supuesto de que la tasa instantánea de mortalidad es constante con respecto a la edad.

10. -Suponiendo que los nacimientos de los años 1969 y 1970 de una determinada región, son iguales a 1 200 y 1 250 respectivamente, que las defunciones de 0 y 1 año de edad son:

<u>Edad</u>	<u>1969</u>	<u>1970</u>
0	90	80
1	40	36

y que los factores de separación valen $f_0 = 0.30$, $f_1 = 0.50$, calcular con la ayuda del diagrama de Lexis, el número de personas menores de un año y con un año cumplido, al 12 de enero de 1971.







Capítulo 2

POBLACION ESTACIONARIA



2.1 Conceptos introductorios

Se ha visto ya el concepto de tabla de mortalidad, que consiste en seguir una generación o cohorte hipotética de personas a través del tiempo, sometiéndola a determinadas condiciones de mortalidad y estableciendo a cada edad el número de sobrevivientes.

Una segunda interpretación de la tabla de vida resulta al considerarla como un modelo de población estacionaria. Una población estacionaria es un modelo teórico en el cual la población total así como la distribución por edades no cambia en el tiempo. En este modelo la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad, y, en consecuencia, la tasa de crecimiento natural es igual a

cero. Tal población hipotética puede ser obtenida suponiendo que los nacimientos anuales son constantes e iguales a l_0 , y sometiéndolos a la ley de mortalidad invariable de la tabla de vida.

A fin de derivar las principales características del modelo de población estacionaria (vale decir, la población total, el número de defunciones, la tasa de natalidad, etc.), se obtendrán primero cuatro relaciones básicas, suponiendo que la mortalidad por edad se mantiene constante en el tiempo. Estas relaciones, que corresponden a las fórmulas (48) a (51) siguientes, fueron tomadas del clásico libro de demografía teórica de Lotka ¹³. Posteriormente, en la sección 2.2, agregando el supuesto de que los nacimientos anuales en t son iguales a l_0 , se llegará al caso particular de la población estacionaria. Veamos primero las cuatro relaciones básicas.

■ Designando $N(t)$ la población total en el momento t , $B(t)$ los nacimientos anuales en t , y $p(x) = l_x/l_0$ la probabilidad de sobrevivir desde el nacimiento hasta la edad x , la cual se supone constante en el tiempo, entonces el producto

$$B(t-x) \cdot p(x) = N(x, t)$$

representa el número de personas que tienen edad x en el momento t .

La población total en el momento t , $N(t)$, está formada por la suma de toda las personas que habiendo nacido en $t-x$, han sobrevivido hasta el momento t , teniendo entonces la edad x . Esta suma se obtiene dando a x todos

¹³ Lotka, Alfred, J. Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, No.5, Santiago, Chile, páginas 63 y siguientes.

los valores posibles desde 0 a w , es decir, integrando entre 0 y w . Se obtiene así:

$$(48) \quad N(t) = \int_0^w B(t-x) p(x) dx$$

■ Haciendo un simple cambio de los límites de la integral, se obtiene el número de personas de un grupo de edades cualquiera; por ejemplo para las edades $x, x+n$ es:

$$(49) \quad N^t(x, x+n) = \int_x^{x+n} B(t-a) p(a) da$$

■ Análogamente, las defunciones totales $D(t)$ se obtienen multiplicando las personas que han sobrevivido a la edad x en el momento t , o sea $B(t-x) p(x)$, por la tasa instantánea de mortalidad por edad $\mu(x)$, y sumando todas las edades, es decir:

$$(50) \quad D(t) = \int_0^w B(t-x) p(x) \mu(x) dx$$

■ Finalmente las defunciones de un grupo de edades $x, x+n$ se obtienen, como en el caso de la población por edades, cambiando los límites de la integral:

$$(51) \quad D^t(x, x+n) = \int_x^{x+n} B(t-a) p(a) \mu(a) da$$

2.2 Población estacionaria: Principales características

Las cuatro relaciones anteriores se basan en el supuesto de mortalidad por edad constante. Agregando ahora el supuesto de que los nacimientos anuales en t son iguales a l_0 , se llega entonces a la población estacionaria, cuyas características son las siguientes:

1. Haciendo $B(t-x) = l_0$ en la relación (48) se obtiene la población total:

$$(52) \quad N(t) = \int_0^w l_0 \frac{l_x}{l_0} dx = \int_0^w l_x dx = T_0 = \text{constante}$$

Este resultado indica que en la población estacionaria, el número total de personas se mantiene constante en el tiempo, y su valor numérico es igual al valor T_0 de la tabla de vida correspondiente al nivel de mortalidad $p(x)$ considerado.

2. Análogamente, reemplazando los nacimientos $B(t-x) = l_0$ en la relación (49), se obtiene la población estacionaria por edades:

$$(53) \quad N(x, x+n) = \int_x^{x+n} l_a da = {}_nL_x = \text{constante}$$

Es decir, el número de personas de un grupo de edad cualquiera $x, x+n$, es constante en el tiempo e igual al valor numérico de la función ${}_nL_x$ de la tabla de vida.

3. Por su parte las defunciones totales resultan, reemplazando los nacimientos en la relación (50) y recordando la definición de $\mu(x)$ dada en la sección 1.8 (página 44):

$$(54) \quad D(t) = - \int_0^w l_0 \frac{l_x}{l_0} \cdot \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d l_x}{dx} dx = - \int_0^w d l_x \\ = - (l_w - l_0) = l_0$$

Esto significa que en la población estacionaria el número total de defunciones que ocurre cada año es constante, e igual al número de nacimientos anuales.

4. Finalmente las defunciones por edades se obtienen reemplazando l_0 en la relación (51), o bien directamente integrando entre x y $x+n$ en la (54). Se obtiene de esta manera:

$$(55) \quad D(x, x+n) = - \int_x^{x+n} d l_a = - (l_{x+n} - l_x) = {}_n d_x$$

Se verifica así, que el número de muertes de cada grupo de edades de la población estacionaria, es igual al número de defunciones de la tabla de vida correspondiente. Dicho sea de paso, dado que la suma de todas las defunciones de la tabla es igual a l_0 , se llega al mismo resultado obtenido anteriormente en la relación (54).

5. Con esta información se pueden derivar las tasas de natalidad y mortalidad. La tasa bruta de natalidad, que es igual al cociente entre los nacimientos anuales y la población total, será:

$$(56) \quad b = \frac{B(t)}{N(t)} = \frac{l_0}{T_0} = \frac{1}{e_0^0}$$

e igualmente la tasa bruta de mortalidad:

$$(57) \quad d = \frac{D(t)}{N(t)} = \frac{l_0}{T_0} = \frac{1}{e_0^0}$$

En otras palabras, en la población estacionaria las tasas de natalidad y mortalidad son iguales, permanecen constantes en el tiempo y su valor numérico es igual a la recíproca de la esperanza de vida al nacer, de la tabla de mortalidad utilizada en la elaboración del modelo.

6. Por último, la tasa de crecimiento natural, que es la diferencia entre las tasas brutas de natalidad y mortalidad, será igual a cero

$$(58) \quad r = b - d = 0$$

■ En resumen, si se tiene una población en la cual la mortalidad por edad es constante y los nacimientos anuales en t son iguales a l_0 , entonces la población total, así como la población por edades, permanecen invariables, la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad, y las diversas características (T_0 , ${}_nL_x$, d_x , etc.), corresponden a la tabla de mortalidad considerada. Dicho modelo se denomina población estacionaria.

■ La interpretación de las funciones de la tabla de vida en la población estacionaria, es la siguiente:

l_x : Es el número de personas que alcanza la edad exacta x en cada año. Tiene una significación similar al valor de E_x de una población real.

${}_n d_x$: Es el número de personas que fallece cada año con edades comprendidas entre x y $x+n$. Tiene un significado similar al valor de ${}_n D_x$ de una población real.

${}_n L_x$: Representa el número de personas que en cualquier momento tiene edades comprendidas entre x y $x+n$. Su significado es análogo al valor de ${}_n N_x$ de una población real.

T_x : Es el número de personas que en cualquier momento tiene edades comprendidas entre x y w . Su significado es similar al valor de ${}_w N_x$ de una población real.

Por su parte las funciones ${}_nq_x$ y e_x^0 tienen en la población estacionaria la misma interpretación que en la tabla de vida.

2.3 La composición por edades de la población estacionaria

En la sección anterior, donde se han presentado las principales características de la población estacionaria, se ha visto que en dicho modelo la población por grupos de edades es igual a la función ${}_nL_x$ de la tabla de vida, la cual se mantiene constante a través del tiempo:

$$(53) \quad N(x, x+n) = \int_x^{x+n} l_a da = {}_nL_x = \text{constante}$$

Dividiendo dicha función por la población estacionaria total $N(t) = T_0$, se obtiene la distribución relativa por grupos de edades, la cual es también constante.

$$(59) \quad C(x, x+n) = \frac{{}_nL_x}{T_0} = \text{constante}$$

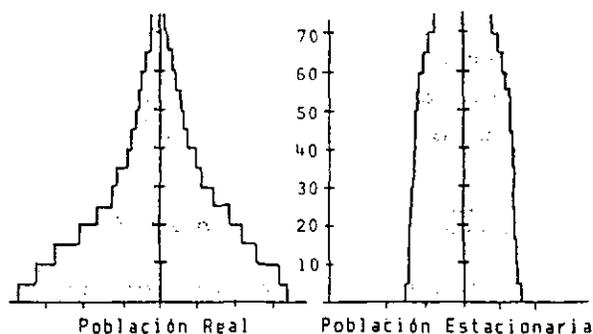
Esta distribución teórica, es, en general, bastante más envejecida que las estructuras reales correspondientes a los países de América Latina, tal como se ilustra en el gráfico 21, donde se presenta la población de Honduras de 1983 y la población estacionaria correspondiente a la tabla de vida elaborada para dicho país, con datos de ese año.

Ello se debe a que la composición por edades es tanto más joven cuanto mayor es la tasa de crecimiento de la población, haciéndose luego más envejecida, a me-

da que ésta disminuye. La tasa de crecimiento de la población de Honduras es en la actualidad superior al 3 por ciento anual, y en general, el promedio de los países de América Latina es todavía del orden del 2 al 3 por ciento, en tanto que la población estacionaria -como se ha indicado en la sección anterior-, tiene una tasa de crecimiento igual a cero.

Gráfico 21

HONDURAS: POBLACION REAL Y ESTACIONARIA, 1983
(distribución relativa)

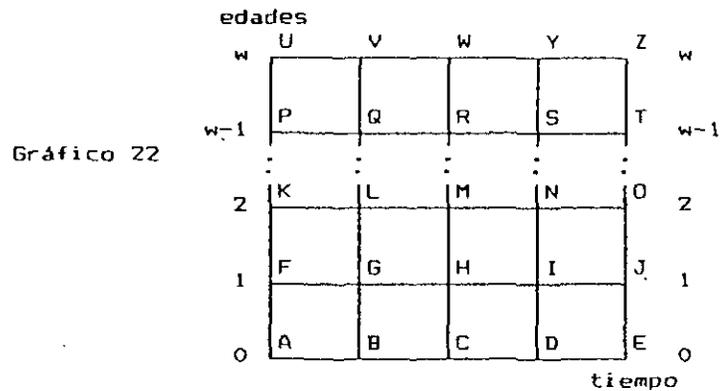


Es necesario tener presente este diferente comportamiento, al utilizar el modelo de población estacionaria. Más adelante, en la sección 2.9, se ilustra su efecto en el cálculo de relaciones de supervivencia.

Por otra parte, dado que las tasas de crecimiento de las poblaciones reales no pueden mantenerse permanentemente positivas, ya que el número de personas crecería indefinidamente, necesariamente las tasas de crecimiento tenderán a mediano y largo plazo hacia cero, con lo cual, la composición por edades y las restantes características de las poblaciones reales tenderán a parecerse cada vez más, a las características de la población estacionaria. Por ello, este modelo irá cobrando cada vez mayor importancia en el futuro.

2.4 Interpretación de las funciones de la población estacionaria en el diagrama de Lexis

Para facilitar la interpretación de las diferentes relaciones de la población estacionaria definidas en las secciones anteriores, se indica a continuación el significado de las mismas en el diagrama de Lexis presentado en el gráfico 22. Como podrá verse, la interpretación es similar a las que tienen las diversas funciones de una población real.



- a) Los nacimientos anuales de la población estacionaria, son constantes e iguales a I_0 . Por tanto:

$$I_0 = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$$

- b) La población total es igual a T_0 y se mantiene constante en el tiempo, es decir:

$$T_0 = \overline{AU} = \overline{BV} = \overline{CW} = \dots$$

- c) La población por edades es igual a ${}_n L_x$ y permanece también invariable:

$$L_0 = \overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \dots$$

$$L_1 = \overline{FK} = \overline{GL} = \overline{HM} = \dots$$

- d) Las defunciones totales son iguales a l_0 y se mantienen constantes a través del tiempo.

$$w^d_0 = l_0 = \text{Sup ABVU} = \text{Sup BCWV} = \dots$$

- e) Las defunciones por edades son iguales a n^d_x y permanecen invariables.

$$d_0 = \text{Sup ABGF} = \text{Sup BCHG} = \dots$$

$$d_1 = \text{Sup FGLK} = \text{Sup GHML} = \dots$$

La composición por edades, así como las tasas de natalidad, mortalidad y crecimiento, se derivan de las anteriores.



Ejercicio

Dado el siguiente diagrama de Lexis, indicar a qué funciones de la población estacionaria corresponden los siguientes segmentos y superficies:

- a) \overline{AB} ; e) \overline{AC}
 b) \overline{HL} ; f) Sup BCGF
 c) \overline{CD} ; g) Sup FGON
 d) \overline{GH} ; h) Sup FHLJ

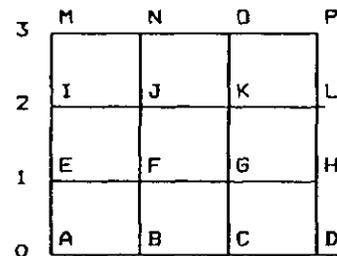


Gráfico 23

Respuesta:

- a) l_0 ; e) $2 \cdot l_0$
 b) L_1 ; f) d_0
 c) 3^L_0 ; g) 2^d_1
 d) l_1 ; h) $2 \cdot d_1$

2.5 Verificación de la relación (24) para el cálculo del tiempo vivido de las primeras edades, mediante el factor de separación. Relación entre ${}_n f_x$ y ${}_n k_x$

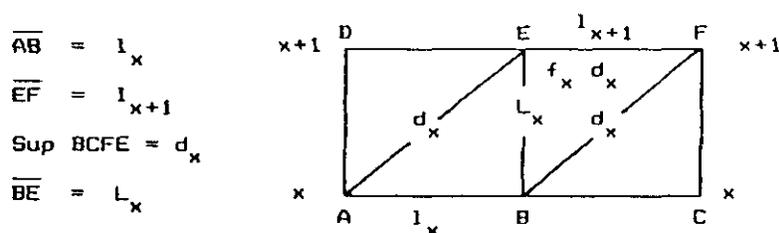
En la sección 1.5 (pág 30) se ha visto la relación

$$(24) \quad L_x = f_x l_x + (1-f_x) l_{x+1}$$

para el cálculo del tiempo vivido de las primeras edades, conociendo el factor de separación f_x . Una vez visto el concepto de población estacionaria, se comprobará aquí dicha relación, que es sumamente utilizada, en particular para el cálculo del tiempo vivido del primer año de vida.

De acuerdo con la interpretación de las funciones de la tabla de vida y de la población estacionaria en el diagrama de Lexis, se puede establecer la siguiente relación entre los valores de l_x , d_x y L_x :

Gráfico 24



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= l_x \\ \overline{EF} &= l_{x+1} \\ \text{Sup BCFE} &= d_x \\ \overline{BE} &= L_x \end{aligned}$$

A su vez, según la definición del factor de separación (pág 12), las defunciones del triángulo superior BFE son iguales a $f_x \cdot d_x$. De aquí resulta:

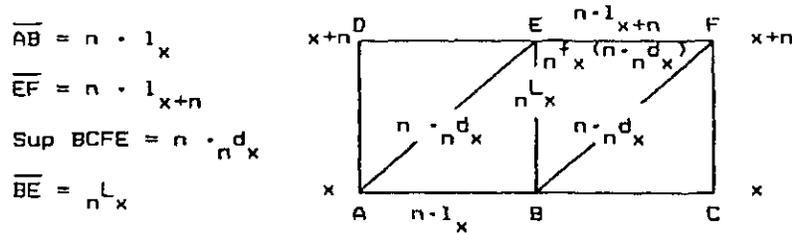
$$(60) \quad L_x = l_{x+1} + f_x \cdot d_x = l_{x+1} + f_x \cdot (l_x - l_{x+1})$$

$$L_x = f_x \cdot l_x + (1-f_x) \cdot l_{x+1}$$

que es la relación ya indicada.

■ Si el intervalo de edades considerado es de n años, el diagrama de Lexis toma la siguiente forma, análoga al caso anterior:

Gráfico 25



$$\overline{AB} = n \cdot l_x$$

$$\overline{EF} = n \cdot l_{x+n}$$

$$\text{Sup BCFE} = n \cdot d_x$$

$$\overline{BE} = nL_x$$

Dado que se está trabajando con periodos de n años de edad y tiempo, las funciones l_x y d_x resultan multiplicadas por n . Asimismo, de acuerdo con la definición del factor de separación, las defunciones del triángulo superior BFE son iguales a $n f_x (n - d_x)$. De aquí resulta:

$$(61) \quad nL_x = n \cdot l_{x+n} + n f_x (n - d_x)$$

$$(62) \quad nL_x = (n - f_x) l_x + (n - n - f_x) l_{x+n}$$

fórmula esta última que permite el cálculo del tiempo vivido de un grupo de edades cualquiera $x, x+n$, conociendo el factor de separación de la muertes de dicho grupo.

Las anteriores fórmulas (61) y (62), también pueden expresarse en términos de ${}_n k_x$, o sea, del tiempo medio vivido dentro del intervalo $x, x+n$, por cada una de las ${}_n d_x$ personas que fallecen dentro del mismo. En efecto, al definir en el capítulo 1 el tiempo vivido ${}_n L_x$, se obtuvo la relación (19):

$$(19) \quad {}_nL_x = n \cdot l_{x+n} + {}_n k_x \cdot {}_n d_x$$

de donde, reemplazando las defunciones en términos de l_x , se obtiene la siguiente fórmula, que permite el cálculo del tiempo vivido en función de ${}_n k_x$:

$$(63) \quad \boxed{{}_n L_x = {}_n k_x \cdot l_x + (n - {}_n k_x) \cdot l_{x+n}}$$

A su vez, despejando el valor de ${}_n k_x$ en la relación (19), presentada arriba, se obtiene la siguiente fórmula para el cálculo del tiempo medio vivido:

$$(64) \quad {}_n k_x = \frac{{}_n L_x - n \cdot l_{x+n}}{{}_n d_x}$$

■ Por último, de acuerdo con las expresiones anteriores, se puede establecer una relación, entre el coeficiente ${}_n k_x$ y el factor de separación de las muertes ${}_n f_x$. Comparando las fórmulas (62) y (63) [o bien (19) y (61)], se tiene que ${}_n k_x = n \cdot {}_n f_x$, de donde

(65)

$$\boxed{{}_n f_x = \frac{{}_n k_x}{n}}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que ${}_n k_x$ representa el tiempo medio vivido dentro del intervalo $x, x+n$ por cada una de las personas que fallecen, entonces el factor de separación ${}_n f_x$ puede interpretarse también como la proporción del tiempo medio vivido en el intervalo $x, x+n$, por cada una de las ${}_n d_x$ personas.

Si $n = 1$, entonces $f_x = k_x$. El factor de separación f_x representa el tiempo medio vivido en el intervalo $x, x+1$, por cada una de las personas que fallecen dentro del mismo.

**Ejercicio:**

Utilizando la tabla masculina de mortalidad de México de 1970 presentada en el anexo, calcular los valores de ${}_4k_1$ y ${}_4f_1$ implícitos en dicha tabla.

Respuesta:

a) Cálculo de ${}_4k_1$:

Partiendo de la relación (64), para $x=1$ y $n=4$, y reemplazando los valores de la tabla masculina de México presentada en el anexo, resulta:

$${}_4k_1 = \frac{{}_4L_1 - 4 \cdot l_5}{4^d_1},$$

$${}_4k_1 = \frac{362\ 764 - 4 (89\ 675)}{3\ 104} = \underline{1.31}$$

Esto significa que las 3 104 personas que en la tabla mencionada fallecen entre los 1 y 5 años de edad, viven cada una, dentro del intervalo considerado, un promedio de 1.31 años. Si hubieran sobrevivido todas hasta el final del intervalo, cada una habría vivido 4 años.

b) Cálculo de ${}_4f_1$:

$${}_4f_1 = \frac{{}_4k_1}{4} = \frac{1.31}{4} = \underline{0.33}$$

lo cual indica que cada una de las 3 104 personas de la tabla, que fallecen dentro del grupo 1-4, viven en promedio una proporción del 33 por ciento del tiempo total posible.

2.6 Relación entre la tasa central de mortalidad ${}_n m_x$ y la probabilidad de muerte ${}_n q_x$.

Esta comparación es de gran importancia, ya que la fase fundamental en la construcción de una tabla de vida, según se verá posteriormente, es la conversión de las tasas centrales de mortalidad, en probabilidades de muerte, de cada grupo de edades establecido.

Empecemos por definir estas funciones:

$${}_n q_x = \frac{d_x}{I_x}; \quad {}_n m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

La función ${}_n q_x$ es una probabilidad, o sea es igual a los casos favorables divididos por los casos posibles. El numerador siempre constituye una parte del denominador y, en los casos extremos, puede comprender a ninguno o todos los valores del denominador; por lo tanto la probabilidad varía entre 0 y 1.

En la función ${}_n m_x$, por su parte, tenemos en el numerador las defunciones y en el denominador la población estacionaria con edades entre x y $x+n$, lo que es igual al tiempo vivido por la población de ese grupo de edades. Esta función varía también entre 0 y 1, aunque excepcionalmente puede tomar valores superiores.

De acuerdo con la definición de estas funciones, cuando $n = 1$ la probabilidad de muerte es ligeramente inferior a la tasa central de mortalidad, cuando $n = 5$ es casi 5 veces, y en general, para un n cualquiera, la probabilidad de muerte es algo menos de n veces el valor de la tasa central de mortalidad, tal como puede verse en

el ejemplo siguiente, con datos de la tabla masculina de Costa Rica de 1973.

$x, x+n$	n	${}_nq_x$	${}_nm_x$	$\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x}$
50-51	1	0.00704	0.00706	0.997
50-55	5	0.04071	0.00830	4.905
50-60	10	0.10033	0.01049	9.564

Tanto ${}_nm_x$ como ${}_nq_x$ pueden ser expresadas en términos de l_x :

$$(66) \quad {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} l_a da}$$

$$(67) \quad {}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Esto significa que si se conoce la forma de l_x , la función que relaciona los dos tipos de tasas podría ser determinada explícitamente. Pero la función l_x tiene una forma matemática compleja y varía entre una y otra población, de modo que no es fácil de establecer. Lo que se acostumbra en la práctica, es establecer relaciones aproximadas, correspondientes a ciertos supuestos simplificadores.

Veamos la relación entre ${}_nm_x$ y ${}_nq_x$ suponiendo primero que la función l_x varía en forma lineal, luego que l_x varía en forma exponencial, y por último, suponiendo que se conocen los factores de separación ${}_nf_x$, o los coeficientes ${}_nk_x$.

2.6.1 Si se postula que l_x varia en forma lineal en el intervalo $x, x+n$, lo cual equivale a decir que las muertes se distribuyen uniformemente dentro del intervalo, se tiene:

$${}_n m_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} l_a da} = \frac{l_x - l_{x+n}}{\frac{l_x + l_{x+n}}{2} \cdot n}$$

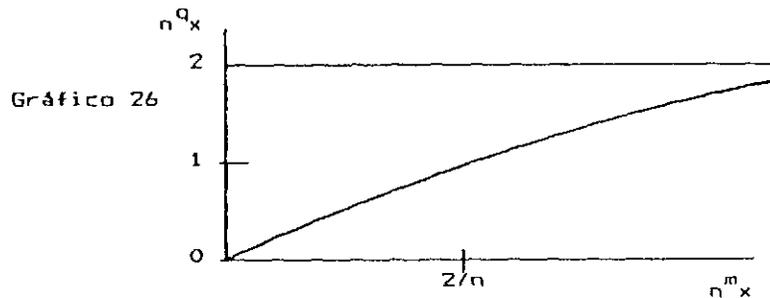
Multiplicando numerador y denominador por $\frac{2}{l_x}$:

$${}_n m_x = \frac{2 {}_n q_x}{n(1 + {}_n p_x)} = \frac{2 {}_n q_x}{n(2 - {}_n q_x)}$$

Despejando ${}_n q_x$, en esta última expresión resulta:

$$(68) \quad \boxed{{}_n q_x = \frac{2 {}_n m_x}{2 + {}_n m_x}}$$

que es la relación entre ${}_n m_x$ y ${}_n q_x$ bajo el supuesto de que l_x varia en forma lineal en el intervalo $x, x+n$. Dicha relación tiene el siguiente comportamiento gráfico:



Cuando ${}_n m_x$ vale cero, ${}_n q_x$ también vale cero, pero cuando ${}_n m_x$ crece, la curva tiende hacia 2, en tanto que la probabilidad de muerte no puede ser superior a uno,

por lo cual la fórmula (68) no es válida para tasas centrales muy elevadas. Despejando el valor de ${}_n m_x$ para el cual dicha relación es menor o igual a uno, se obtiene el campo de variación posible de ${}_n m_x$:

$$0 \leq {}_n m_x \leq 2/n$$

en cuyo intervalo la probabilidad de muerte varía entre 0 y 1.

En particular, si $n = 1$, la relación (67) toma la forma siguiente, muy usualmente empleada en la construcción de tablas completas:

$$(69) \quad q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x}$$

2.6.2 Si se supone que l_x varía en forma exponencial en el intervalo $x, x+n$:

$$l_x = e^{\alpha + \beta x}$$

se tiene el siguiente desarrollo que puede verse en Reed y Merrell 14:

$${}_n m_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} l_a da} = \frac{e^{\alpha + \beta x} - e^{\alpha + \beta(x+n)}}{\int_x^{x+n} e^{\alpha + \beta a} da}$$

¹⁴ Reed, Lowell J. y Merrel, Margaret, Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D. No. 49, Santiago, Chile.

Resolviendo la integral por sustitución (haciendo $u = \alpha + \beta x$) se llega a la siguiente expresión:

$$n^m_x = \frac{e^{\alpha + \beta x} - e^{\alpha + \beta(x+n)}}{\frac{1}{\beta} [e^{\alpha + \beta(x+n)} - e^{\alpha + \beta x}]} = -\beta$$

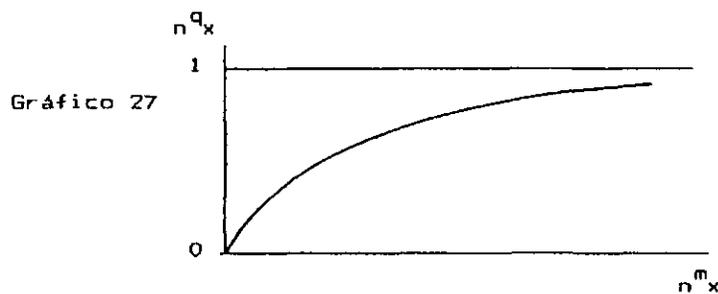
A su vez:

$$n^q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{e^{\alpha + \beta x} - e^{\alpha + \beta(x+n)}}{e^{\alpha + \beta x}} = 1 - e^{-\beta n}$$

Reemplazando $\beta = -\frac{m_x}{n}$, se obtiene:

$$(70) \quad n^q_x = 1 - e^{-n \frac{m_x}{n}}$$

que es la relación entre la tasa central de mortalidad y la probabilidad de muerte, bajo el supuesto que l_x varía en forma exponencial entre x , $x+n$. En este caso la fórmula toma el siguiente comportamiento gráfico:



es decir, para $n^m_x = 0$, $n^q_x = 0$, y su límite superior es igual a 1, lo cual está de acuerdo con los valores que puede tomar la probabilidad de muerte n^q_x . Por lo tanto, esta relación es válida para todo valor de n^m_x .

2.6.3 Relación a través del factor de separación. Por último, si se conocen los factores de separación ${}_n f_x$, o los coeficientes ${}_n k_x$, entonces se puede establecer la siguiente relación entre los valores de la probabilidad de muerte y de la tasa central de mortalidad de la población estacionaria.

Ya se ha visto en la sección 2.5 (págs 64-65) que:

$$(62) \quad {}_n L_x = ({}_n f_x) l_x + (n - {}_n f_x) l_{x+n}$$

$$(63) \quad = {}_n k_x l_x + (n - {}_n k_x) l_{x+n}$$

donde ${}_n f_x$ es el factor de separación de las muertes y ${}_n k_x = n {}_n f_x$ es el tiempo medio vivido en el intervalo $x, x+n$, por cada una de las ${}_n d_x$ personas que fallecen en el mismo.

Reemplazando el tiempo vivido, definido mediante la relación (63), en la tasa central de mortalidad, se tiene:

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \frac{{}_n d_x}{{}_n k_x l_x + (n - {}_n k_x) l_{x+n}}$$

Dividiendo numerador y denominador por l_x y despejando ${}_n q_x$, se llega a la relación final:

$$(71) \quad \boxed{{}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{1 + (n - {}_n k_x) {}_n m_x}}$$

fórmula que permite calcular los valores de ${}_n q_x$ conociendo las tasas centrales de mortalidad ${}_n m_x$ y los factores de separación o los coeficientes ${}_n k_x$. En el caso de que estos últimos no se conozcan, pueden obtenerse de otra tabla de referencia que tenga un nivel de mortalidad comparable.

Por otra parte, si la función l_x es lineal en el intervalo $x, x+n$, en cuyo caso

$${}_n^f_x = 0.50, \quad \text{o bien} \quad {}_n^k_x = n/2,$$

reemplazando el valor de ${}_n^k_x$ en la relación (71), se llega a la fórmula (67) ya vista.

Se han obtenido así tres relaciones que vinculan la tasa central de mortalidad con la probabilidad de muerte, las cuales serán retomadas más adelante, en la construcción de tablas abreviadas.

2.7 Relaciones de supervivencia

En el capítulo 1 hemos visto las probabilidades de sobrevivir de la forma ${}_n^p_x = l_{x+n} / l_x$, referidas a personas de edad exacta x . Para propósitos demográficos se utilizan más frecuentemente otro tipo de probabilidades que veremos ahora, las cuales permiten obtener los sobrevivientes de un grupo de personas con edad cumplida x , llamadas relaciones de supervivencia.

Mientras las probabilidades de sobrevivir dependen de la edad inicial x y del periodo que comprende la probabilidad n , las relaciones de supervivencia dependen de tres variables: la edad inicial del intervalo x , la amplitud del intervalo de edades n y el periodo que comprende la probabilidad m .

Consideremos primero las relaciones de supervivencia para intervalos de cinco años ($n = m = 5$) y luego el caso general referido a un intervalo de edades y de tiempo cualesquiera.

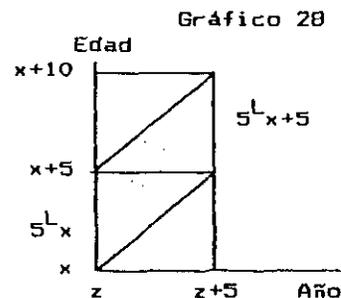
2.7.1 Relaciones de supervivencia para intervalos de cinco años.

Estas son las relaciones más comúnmente utilizadas para proyecciones de población.

En una población estacionaria, el número de personas que en un momento determinado tienen x a $x+4$ años cumplidos, son 5^L_x . Al cabo de cinco años el total de sobrevivientes de este grupo está dado por 5^L_{x+5} . La relación entre estas dos cantidades, representa la probabilidad que tienen las personas de x a $x+4$ años cumplidos, de la población estacionaria, de estar con vida cinco años después. Se simboliza con $5^P_{x,x+4}$, donde el subíndice de la derecha representa el grupo de edades en años cumplidos y el de la izquierda el periodo que comprende la probabilidad.

Es por lo tanto,

$$(72) \quad 5^P_{x,x+4} = \frac{5^L_{x+5}}{5^L_x}$$



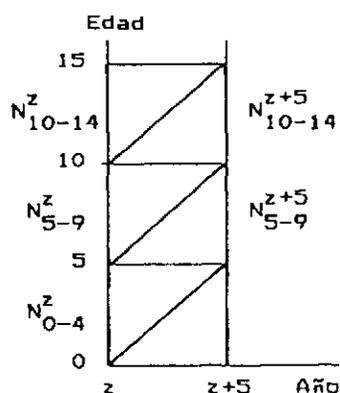
Por ejemplo, con datos de la tabla de vida femenina de Guatemala, año 1950, para el grupo 0-4 resulta:

$$5^P_{0-4} = \frac{5^L_5}{5^L_0} = \frac{351\ 446}{399\ 003} = 0.88081$$

Factores de esta forma son los que se aplican a la población por grupos de edades de un año z cualquiera, a fin de obtener el número esperado de sobrevivientes cinco años después, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 N_{0-4}^z \cdot {}_5P_{0-4} &= N_{5-9}^{z+5} \\
 N_{5-9}^z \cdot {}_5P_{5-9} &= N_{10-14}^{z+5} \\
 N_{10-14}^z \cdot {}_5P_{10-14} &= N_{15-19}^{z+5} \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots
 \end{aligned}$$

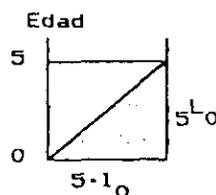
Gráfico 29



■ Para obtener los sobrevivientes de los nacimientos ocurridos en el quinquenio considerado, se utiliza otro tipo de relación, obtenida también de la población estacionaria, llamada relación de supervivencia al nacimiento. Se simboliza con ${}_5P_b$, donde b (inicial de la palabra inglesa "births"), indica que se trata de una relación de supervivencia referida a los nacimientos, mientras que el subíndice 5 de la izquierda, representa el número de años de nacimientos considerados, que es igual al período de tiempo proyectado.

Gráfico 30

$$(73) \quad {}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{{}_5I_0}$$



Esta relación de supervivencia al nacimiento ${}_5P_b$, representa la probabilidad que tienen los niños nacidos durante un quinquenio, de la población estacionaria, de estar con vida al final del mismo. Puede observarse que esta probabilidad es de diferente naturaleza que las anteriores, ya que el período de supervivencia es variable para los niños nacidos en diferentes momentos del quinquenio, en tanto que para los otros grupos de edades, todos deben sobrevivir 5 años.

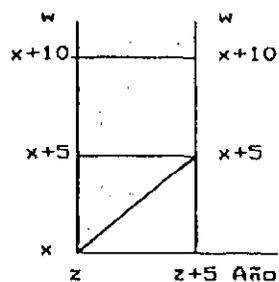
Aplicando esta relación a los nacimientos de un quinquenio de una población real, se pueden obtener los sobrevivientes al término de dicho período:

$$B^{z, z+5} \cdot {}_5P_b = N_{0-4}^{z+5}$$

Finalmente para el grupo abierto final de edades, la relación de supervivencia toma la forma:

$$(74) \quad {}_5P_{x \text{ y más}} = \frac{L_{x+5 \text{ y más}}}{L_{x \text{ y más}}} \\ = \frac{T_{x+5}}{T_x}$$

Gráfico 31



Representa la probabilidad que tienen las personas de x años y más, de la población estacionaria, de estar con vida cinco años después.

Si por ejemplo, $x = 80$,

$${}_5P_{80 \text{ y más}} = \frac{L_{85 \text{ y más}}}{L_{80 \text{ y más}}} = \frac{T_{85}}{T_{80}}$$

Con datos de la tabla femenina de Guatemala de 1950 resulta:

$${}_5P_{80 \text{ y más}} = \frac{20\ 832}{61\ 285} = 0.33992$$

Multiplicando relaciones de supervivencia de este tipo por la población real del grupo abierto final, se obtienen los sobrevivientes de este último tramo de edades:

$$N_{80 \text{ y más}}^z \cdot {}_5P_{80 \text{ y más}} = N_{85 \text{ y más}}^{z+5}$$

■ Resumiendo: las relaciones de supervivencia para grupos quinquenales de edades, proyectadas por cinco años, son las siguientes:

$$(73) \quad {}_5P_b = \frac{5L_0}{5 \cdot l_0}$$

$$(72) \quad {}_5P_{x, x+4} = \frac{5L_{x+5}}{5L_x}$$

$$(74) \quad {}_5P_x \text{ y más} = \frac{L_{x+5} \text{ y más}}{L_x \text{ y más}} = \frac{T_{x+5}}{T_x}$$

**Ejercicio:**

Dada la siguiente información

$$T_{40} = 1\,371\,548 ; \quad e_{35}^0 = 29.37 \text{ años}$$

$${}_5L_{30} = 288\,113 ; \quad l_{35} = 55\,982$$

calcular el valor de la relación de supervivencia para las personas de 30 a 34 años de edad, al cabo de 5 años.

Respuesta:

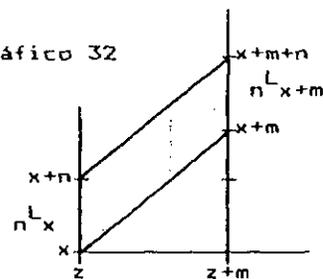
$$\begin{aligned} {}_5P_{30-34} &= \frac{{}_5L_{35}}{{}_5L_{30}} = \frac{e_{35}^0 \cdot l_{35} - T_{40}}{{}_5L_{30}} \\ &= \frac{29.37(55\,982) - 1\,371\,548}{288\,113} = 0.94631 \end{aligned}$$

2.7.2 Caso general: Intervalo de edad cualquiera n , proyectado por m años.

En este caso la relación de supervivencia toma la siguiente forma:

$$(75) \quad {}_mP_{x, x+n-1} = \frac{nL_{x+m}}{nL_x}$$

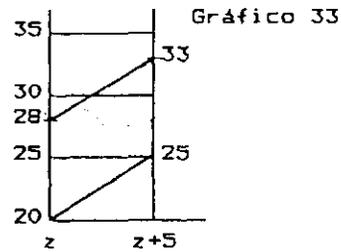
Gráfico 32



donde x es la edad, n la amplitud del intervalo de edades y m el período proyectado. Representa la probabilidad que tienen las personas de x a $x+n-1$ años cumplidos, de la población estacionaria, de estar con vida m años después.

Por ejemplo:

$${}_5P_{20-27} = \frac{e^{L_{25}}}{e^{L_{20}}}$$



■ Para los nacimientos, la relación de supervivencia toma la forma:

$$(76) \quad {}_m P_b = \frac{m \cdot l_0}{m \cdot l_0}$$

que representa la probabilidad que tienen los niños nacidos durante un periodo de m años, de la población estacionaria, de estar con vida al final del mismo.

■ Para el grupo abierto final la relación de supervivencia resulta

$$(77) \quad {}_m P_{x+} = \frac{L_{(x+m)+}}{L_{x+}} = \frac{T_{x+m}}{T_x}$$

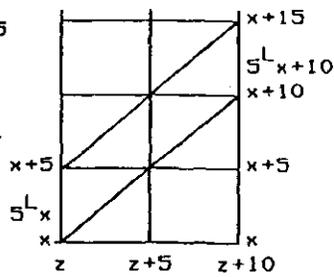
que representa la probabilidad que tienen las personas de x años y más, de la población estacionaria, de estar con vida m años después.

CAPITULO 2: POBLACION ESTACIONARIA

■ Por otra parte, se pueden hacer diversos tipos de combinaciones con relaciones de supervivencia conocidas, para obtener otras. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 ({}_5P_{x,x+4})({}_5P_{x+5,x+9}) &= \frac{{}_5L_{x+5}}{5L_x} \cdot \frac{{}_5L_{x+10}}{5L_{x+5}} \\
 &= \frac{{}_5L_{x+10}}{5L_x} = \\
 &= {}_{10}P_{x,x+4}
 \end{aligned}$$

Gráfico 34



■ Resumen del caso general:

(76) ${}_mP_b = \frac{{}_mL_0}{m \cdot l_0}$

(75) ${}_mP_{x,x+n-1} = \frac{{}_nL_{x+m}}{nL_x}$

(77) ${}_mP_x = \frac{L_{(x+m)+}}{L_{x+}} = \frac{T_{x+m}}{T_x}$

n = intervalo de edades
 m = periodo proyectado



2.8 Estimación de la esperanza de vida al nacer a partir de las relaciones de supervivencia

Resulta de gran utilidad disponer de una fórmula rápida para calcular la esperanza de vida al nacer a partir de las relaciones de supervivencia por edades, sin necesidad de pasar por las restantes funciones de la tabla de vida. Tal necesidad se presenta por ejemplo, al hacer proyecciones de población, donde las ${}_5^P_x, x+4$ estimadas deben ajustarse en cada quinquenio a un nivel de esperanza de vida preestablecido.

Sean las siguientes relaciones de supervivencia quinquenales, a partir de las cuales se desea calcular la esperanza de vida al nacer:

$${}_5^P_b; {}_5^P_{0-4}; {}_5^P_{5-9}; {}_5^P_{10-14}; \dots; {}_5^P_{80-84}; {}_5^P_{85+}$$

El procedimiento que sigue, consiste en expresar los sucesivos valores de ${}_5^L_x$ en términos de estos valores conocidos.

De acuerdo a la definición de las relaciones de supervivencia, dado un l_0 arbitrario pueden calcularse los valores de ${}_5^L_0, {}_5^L_5, \dots, {}_5^L_{85}, L_{90+}$ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} {}_5^P_b &= \frac{{}_5^L_0}{5l_0} ; & \text{de donde:} & \quad {}_5^L_0 = 5l_0 \cdot {}_5^P_b \\ \\ {}_5^P_{0-4} &= \frac{{}_5^L_5}{5l_0} ; & \text{de donde:} & \quad {}_5^L_5 = 5l_0 \cdot {}_5^P_{0-4} \\ & & & \quad = 5l_0 \cdot {}_5^P_b \cdot {}_5^P_{0-4} \\ \dots\dots\dots & & & \quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots & \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\ 5^{P_{80-84}} &= \frac{5^{L_{85}}}{5^{L_{80}}}; & \text{de donde:} & \quad 5^{L_{85}} = 5^{L_{80}} \cdot 5^{P_{80-84}} \\ & & & \quad = 5^1_0 \cdot 5^P_b \cdot 5^{P_{0-4}} \cdot 5^{P_{5-9}} \cdot 5^{P_{80-84}} \end{aligned}$$

Para el grupo abierto final, es necesario expresar L_{90+} en función de $5^{L_{85}}$ y $5^{P_{85+}}$, lo cual puede lograrse mediante la siguiente transformación algebraica:

$$\begin{aligned} L_{90+} / L_{85+} &= 5^{P_{85+}} \\ L_{90+} &= L_{85+} \cdot 5^{P_{85+}} = (5^{L_{85}} + L_{90+}) \cdot 5^{P_{85+}} \\ L_{90+} (1 - 5^{P_{85+}}) &= 5^{L_{85}} \cdot 5^{P_{85+}} \\ L_{90+} &= 5^{L_{85}} \frac{5^{P_{85+}}}{1 - 5^{P_{85+}}} \end{aligned}$$

Como en los casos anteriores, este resultado puede expresarse, en términos de las relaciones de supervivencia conocidas:

$$= 5^1_0 \cdot 5^P_b \cdot 5^{P_{0-4}} \cdots 5^{P_{80-84}} \frac{5^{P_{85+}}}{1 - 5^{P_{85+}}}$$

Reemplazando cada uno de los valores de 5^{L_x} en:

$$T_0 = 5^{L_0} + 5^{L_5} + \dots + 5^{L_{85}} + L_{90+}$$

y dividiendo por 1_0 , se llega a la fórmula final:

$$(78) \quad e^0_0 = 5^1_0 + 5^P_b + 5^P_b \cdot 5^{P_{0-4}} + 5^P_b \cdot 5^{P_{0-4}} \cdot 5^{P_{5-9}} + 5^P_b \cdot 5^{P_{0-4}} \cdot 5^{P_{5-9}} \cdots 5^{P_{80-84}} \frac{5^{P_{85+}}}{1 - 5^{P_{85+}}}$$

El primer término del segundo miembro corresponde al valor de 5^{L_0} (con $1_0 = 1$), el segundo término a 5^{L_5} y así sucesivamente. Para el cálculo de esta fórmula basta

multiplicar en cadena las sucesivas relaciones de supervivencia, comenzando con ${}_5S_b^P$, enviando cada vez el resultado a memoria.

La relación anterior también suele expresarse en la siguiente forma, a la cual se llega sacando factor común ${}_5S_b^P$, luego ${}_5S_{0-4}^P$, etc. En este caso el cálculo se inicia desde la parte derecha.

$$(79) \quad e_0^0 = {}_5S_b^P (1 + {}_5S_{0-4}^P (1 + {}_5S_{5-9}^P \dots (1 + {}_5S_{80-84}^P (1 + \frac{{}_5S_{85+}^P}{1 - {}_5S_{85+}^P}) \dots)))$$

2.9 Efecto de la composición por edades, al utilizar relaciones de supervivencia tomadas de la población estacionaria

Como se ha indicado en la sección 2.3, la población estacionaria tiene una composición por edades bastante más envejecida que las correspondientes a las poblaciones reales de los países de América Latina.

Debido a esta circunstancia, al utilizar relaciones de supervivencia por grupos de edades tomadas de la población estacionaria, para calcular el número de sobrevivientes de poblaciones reales, se produce un error en el número de sobrevivientes, en la medida en que dentro de cada grupo considerado la población real tenga una composición por edades diferente de la estacionaria.

2.9.1 Para ilustrar este error veamos un ejemplo concreto. Para ello, se ha tomado la población femenina de Costa Rica, de 65 a 69 años de edad, del censo de población de 1973, la cual se ha proyectado por un período de cinco años, de dos maneras diferentes. Primero, utilizando una relación única de supervivencia del grupo quinquenal de edades (${}_5P_{65-69}$), tomada de la población estacionaria, con la cual se obtiene una estimación afectada por el error indicado más arriba. Luego se ha repetido el cálculo, considerando esta vez la población y las relaciones de supervivencia por edades simples, con el fin de eliminar, en gran parte, el efecto de la diferente composición por edades (el efecto no se elimina completamente, porque subsiste un pequeño error por la diferente distribución dentro de cada edad). Los resultados son los siguientes:

- (1) Utilizando una relación de supervivencia única por grupos quinquenales:

$$\begin{aligned} N_{70-74}^{78} &= N_{65-69}^{73} \cdot {}_5P_{65-69} \\ &= 11\ 979 (0.85190) = \underline{10\ 201} \end{aligned}$$

- (2) Considerando relaciones de supervivencia por edades simples:

Edad	N_x^{73}	${}_5P_x$	Edad	N_{x+5}^{78}
65	3 149	0.87986	70	2 771
66	2 664	0.86667	71	2 309
67	2 310	0.85202	72	1 968
68	2 012	0.83625	73	1 683
69	1 844	0.81955	74	1 511
65-69	11 979		70-74	<u>10 242</u>

De esta manera, el cálculo efectuado utilizando la relación de supervivencia agrupada, subestima en 41 personas el número estimado de sobrevivientes. Esta diferencia se produce, porque dentro del grupo 65-69, la población real considerada tiene una estructura más joven que la estacionaria. Si las 11 979 personas de 65 a 69 años de edad se distribuyeran dentro de este grupo, conforme a la distribución por edades de la población estacionaria de la cual se obtuvo las relaciones de supervivencia, se llegaría al mismo resultado obtenido proyectando por grupos quinquenales (10 201 sobrevivientes), tal como se ve a continuación:

Edad	N_x^{73*}	S_x^P	Edad	N_{x+5}^{78}
65	2 506	0.87986	70	2 205
66	2 455	0.86667	71	2 128
67	2 401	0.85202	72	2 045
68	2 341	0.83625	73	1 958
69	2 276	0.81955	74	1 865
65-69	11 979		70-74	<u>10 201</u>

* Población real de 65-69 distribuida por edades según la estructura de la población estacionaria.

Comparando este cuadro con el anterior, se observa que la diferencia entre el valor considerado correcto (10 242) y el valor aproximado (10 201), se debe a que la población estacionaria -por ser más envejecida- tiene una menor proporción de personas de 65 y 66 años, donde las relaciones de supervivencia son más altas, y una mayor proporción de personas de 68 y 69 años, donde ocurre lo contrario, subestimando de este modo el número de sobrevivientes.

Si se hiciera el mismo cálculo para grupos quinquenales más jóvenes, tales como 20-24 o 40-44, resultaría un error menor, debido a que las relaciones de supervivencia serían más cercanas a uno, y variarían menos de una edad a otra. Asimismo, si la población considerada tuviera una tasa de crecimiento más próxima a cero, la estructura por edades de la población real sería más parecida a la estacionaria, y los errores mencionados también disminuirían.

Por ello, las relaciones de supervivencia por grupos quinquenales conducen, en general, a resultados suficientemente aproximados. Además, la población censada por edades simples, suele estar afectada por errores en la declaración de la edad, de modo que no siempre los resultados por edades simples conducen a errores menores.

2.9.2 Hay sin embargo dos casos, en los cuales los errores tienen mayor importancia numérica.

■ El primero de ellos se presenta, cuando se utilizan relaciones de supervivencia por grandes grupos de edades. Por ejemplo, proyectando la población femenina de Costa Rica de 60 a 79 años de edad, por un período de cinco años, utilizando relaciones de supervivencia por edades simples, como en el ejercicio anterior, se obtiene un total de 38 711 sobrevivientes. En cambio, si se hace la misma estimación utilizando una sola relación de supervivencia para el tramo de 20 años de edad (${}_5P_{60-79}$), se obtienen sólo 37 577 sobrevivientes, lo cual representa una diferencia absoluta de 1 134 personas, que significa el 2.9 por ciento del total.

De acuerdo con estos resultados, debería evitarse la utilización de relaciones de supervivencia por grandes grupos de edades, especialmente cuando la estructura por edades es diferente de la estacionaria. Por ejemplo, cuando la tasa de crecimiento es mayor del 2 por ciento.

■ El segundo caso, aún más importante, corresponde al uso de relaciones de supervivencia para el grupo abierto final (${}_5P_{x+}$).

Para ilustrar la importancia de este error, se ha proyectado la población femenina de Costa Rica de 60 años y más, 65 y más, 70 y más, y 75 y más, tanto por edades simples, como utilizando relaciones de supervivencia abiertas, únicas, para esos cuatro grupos de edades. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Grupo abierto final	Valores proyectados		Diferencias	
	Por edades simples	Con relación única	Valores absolutos	Porcentaje
75 y más	6 208	6 155	53	0.9
70 y más	13 732	13 249	483	3.5
65 y más	23 987	23 051	936	3.9
60 y más	41 324	39 088	2 236	5.4

En conclusión, las relaciones de supervivencia abiertas ${}_5P_{70+}$, ${}_5P_{65+}$ y ${}_5P_{60+}$ producen subestimaciones de importancia creciente, en la estimación del número de sobrevivientes.

Quando se proyecta la población por edades, lo usual es utilizar relaciones de supervivencia por grupos quinquenales, con un grupo abierto final a los 75 u 80 años, lo cual conduce a resultados suficientemente aproximados. Si en cambio, el grupo abierto final se emplea para edades más jóvenes, de acuerdo con lo visto anteriormente, se producen errores de cierta importancia.

En el caso de países donde la tasa de crecimiento es más cercana a cero (y en consecuencia la estructura por edades de la población real es más parecida a la estacionaria), los errores que resultan al aplicar estas relaciones de supervivencia abiertas son menores.





EJERCICIOS DEL CAPITULO 2
(Ver respuestas al final del libro)

1. -Indicar con simbolos a qué es igual cada una de las siguientes relaciones de supervivencia, y expresar con palabras su significado.

a) 5^P_{15-19} ; b) 5^P_b ; c) 5^P_{70} y más

2. -Calcular las siguientes relaciones de supervivencia a partir de los valores de ${}_nL_x$ de la tabla de mortalidad femenina de Guatemala de 1950 presentada en el anexo.

1^P_b ; 5^P_{20-24} ; 10^P_{35-39} ; 15^P_{70} y más

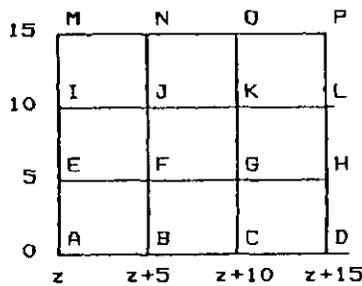
3. -Indicar con simbolos a qué es igual cada una de las siguientes relaciones de supervivencia.

2^P_b ; 4^P_{7-9} ; 9^P_{16-23} ; 10^P_{75} y más

4. -Dado el siguiente gráfico de Lexis, referido a una población estacionaria, indicar con simbolos de la tabla de vida, el significado de las relaciones siguientes:

- a) $\overline{AM} = \overline{BN}$
- b) $\overline{FG} = \overline{GH}$
- c) $\text{Sup } \overline{FGKJ}$
- d) $\overline{LP} / \overline{GK}$
- e) $\overline{KO} / \overline{AE}$
- f) $\overline{HP} / \overline{CK}$

Gráfico 35



5. -Indicar si las siguientes relaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

a) $m_x < q_x$ ()

b) ${}_5P_{0-4} {}_5P_{5-9} = {}_{10}P_{0-4}$ ()

c) ${}_5P_b < {}_5P_0$ ()

d) $\frac{{}_5P_{85 \text{ y más}}}{1 - {}_5P_{85 \text{ y más}}} = \frac{L_{90 \text{ y más}}}{5L_{85}}$ ()

e) $P_b = \frac{l_0 - (1-f_0) d_0}{l_0}$ ()

6. -Dadas las siguientes relaciones de supervivencia quinquenales:

$x, x+4$	${}_5P_{x,x+4}$	$x, x+4$	${}_5P_{x,x+4}$
b	0.94096	40-44	0.97599
0-4	0.98908	45-49	0.96597
5-9	0.99627	50-54	0.94945
10-14	0.99503	55-59	0.92152
15-19	0.99189	60-64	0.87596
20-24	0.99018	65-69	0.81179
25-29	0.98891	70-74	0.73011
30-34	0.98638	75-79	0.62643
35-39	0.98240	80 y+	0.40760

- a) Calcular los valores de ${}_5L_0$, ${}_5L_5$ y L_{85} +
 b) Verificar el valor de la esperanza de vida al nacer, utilizando la relación (78) o (79)..

7. -Calcular el valor del tiempo medio vivido en el intervalo 50,55 (${}_5k_{50}$) implícito en la tabla de vida femenina de México de 1970, presentada en el anexo, y el factor de separación ${}_5f_{50}$ correspondiente.

8. -A continuación se indican algunos valores de funciones de la tabla de vida. Deberá señalarse si esta información disponible es suficiente o insuficiente para calcular la relación de supervivencia del grupo 25-29 al cabo de 10 años (${}_{10}P_{25-29}$). Si es suficiente indique la forma de realizar el cálculo; si no es suficiente señale cuál es el dato que hace falta.

a) T_{30} ; T_{40} ; T_{25} ; ${}_5q_{30}$; l_{30} ; l_{50} ; ${}_{10}d_{30}$

b) ${}_5L_{30}$; ${}_5P_{25-29}$; ${}_5L_{35}$; l_{30} ; l_{40}

Nota: Entre ${}_nL_x$ y l_x rige la relación ${}_nL_x = \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n})$

9. -Dada la tasa central de mortalidad $m_{80-84} = 0.1060$, tomada de la tabla femenina de Costa Rica de 1973, calcular la probabilidad de muerte ${}_5q_{80}$ utilizando las relaciones aproximadas (67) y (70). Comparar los resultados con el valor correcto ${}_5q_{80} = 0.41797$ obtenido en dicha tabla.

10. -Dada la siguiente información sobre la población masculina de 0 a 4 años de edad de Guatemala, estimada para 1960, y la población estacionaria de 0 a 9 años de edad de la tabla de mortalidad masculina de 1964:

Población real		Pob. estacionaria (10 = 100 000)			
Edad	N_x^{60}	Edad	L_x^c	Edad	L_x
0	83 192	0	91 611	5	78 863
1	79 144	1	86 095	6	78 248
2	75 336	2	82 793	7	77 692
3	73 288	3	80 829	8	77 184
4	70 153	4	79 553	9	76 716
0-4	382 113	0-4	420 881	5-9	388 703

Se pide:

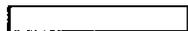
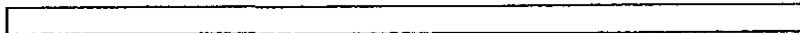
- a) calcular el número de sobrevivientes N_{5-9}^{65} utilizando una relación de supervivencia única por grupos quinquenales, ${}_5P_{0-4}$.
- b) Rehacer el cálculo considerando la población y las relaciones de supervivencia por edades simples ${}_5P_x$, siendo $x = 0, 1, 2, 3$ y 4 , para determinar si la relación de supervivencia por grupos quinquenales subestima o sobreestima el número de sobrevivientes.





Capítulo 3

TABLAS MODELO DE MORTALIDAD



3.1 Concepto y objetivos de las tablas modelo.

Como se sabe, no existen datos confiables de mortalidad en gran parte de los países en desarrollo, lo que dificulta su utilización para fines de análisis demográfico y planificación económica y social.

Para suplir en parte esta deficiencia, se han preparado diversos modelos teóricos que tratan de resumir la forma de variación de la mortalidad, denominados tablas modelo de mortalidad, los cuales muestran la transición de la mortalidad general y por edades, al variar desde los niveles más altos a los más bajos conocidos.

Dichas tablas modelo normalmente se elaboran en base a un número relativamente grande de tablas de mortalidad reales, de países que tienen información confiable.

No representan, por tanto, las condiciones particulares de un determinado país, sino más bien la experiencia promedio general, de los diversos niveles considerados.

Las tablas modelo de mortalidad constituyen un instrumento de gran utilidad dentro del análisis demográfico, principalmente para hacer estimaciones de la mortalidad en países con datos fragmentarios, como marco general de referencia en el estudio de la mortalidad, y para fines de proyecciones de población.

Dada la utilidad de las mismas, a través del tiempo se han desarrollado diversos sistemas de tablas modelo de mortalidad, entre los cuales pueden mencionarse las Tablas Modelo de Naciones Unidas, las Tablas Modelo Regionales de Coale y Demeny, el Sistema Logito de Brass, el Sistema de Tablas Modelo de Lederman, y las nuevas Tablas Modelo de Naciones Unidas para Países en Desarrollo. En los puntos siguientes se hace referencia a los principales de estos sistemas, mientras que al final del capítulo se mencionan algunos usos de las tablas modelo en el campo demográfico.

3.2 Las Tablas Modelo de Mortalidad de las Naciones Unidas.

Fueron preparadas en 1955 ¹³, siendo las primeras que se han construido, las que dejaron establecida la gran utilidad de esta herramienta demográfica, y la base para otras tablas modelo más refinadas preparadas con posterioridad.

¹³ Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad. Tablas modelo de mortalidad para países insuficientemente desarrollados. ST/SOA/Serie A/22, y Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad. ST/SOA/Serie A/25. Manual III.

Para su elaboración se utilizaron 158 tablas de mortalidad correspondientes al periodo 1900 a 1950, publicadas en los Anuarios Demográficos de las Naciones Unidas. La selección se hizo teniendo en cuenta la más amplia extensión geográfica posible, una distribución adecuada en el tiempo, la exclusión de periodos de mortalidad particularmente elevada y una escala uniforme de grupos de edades. Estos propósitos no se lograron cabalmente, ya que la mayoría de las tablas utilizadas pertenecen a países de Europa y América del Norte, estando muy poco representados los países en desarrollo.

Las tablas consideradas comprenden una gama de mortalidad que va desde poco más de 20 años de esperanza de vida para las tablas de la India de principios de siglo, hasta más de 70 años en algunas tablas de los Países Bajos, Reino Unido y Nueva Zelanda.

Para cada tabla de vida se calcularon las probabilidades de muerte $q_0, {}_5q_0, \dots, {}_5q_{85}$, correspondientes a la población de ambos sexos.

En una serie de diagramas de dispersión se graficaron las probabilidades de muerte en pares sucesivos. Se comenzó la serie con las tasas q_0 y ${}_5q_0$, luego ${}_5q_0$ con ${}_5q_5$, después ${}_5q_5$ con ${}_5q_{10}$ y así sucesivamente. En cada caso, estas observaciones se ajustaron por medio de una función de segundo grado, empleándose el método de los mínimos cuadrados. En los gráficos 36 y 37 se presentan las dos primeras relaciones calculadas. Cada punto de estos gráficos corresponde a una tabla de vida.

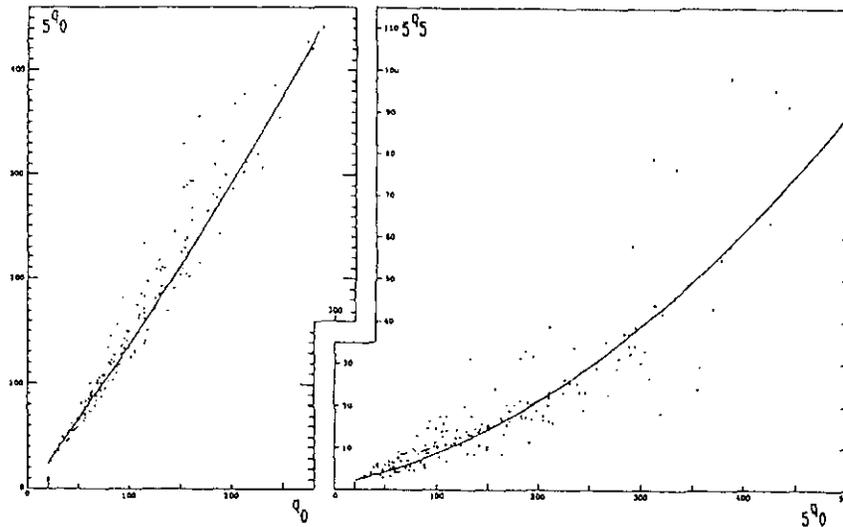
Con las 17 ecuaciones de regresión así calculadas, y valores arbitrarios de q_0 , se elaboraron 40 modelos de mortalidad, correspondientes a la población de ambos sexos, cubriendo el rango de mortalidad observada en la

Gráficos 36-37

RELACION ENTRE LAS PROBABILIDADES DE MUERTE DE LOS
PRIMEROS GRUPOS DE EDADES

Gráfico 36

Gráfico 37



$$5q_0 = 23.832 + 1.349406(q_0 - 20) + 0.002841(q_0 - 20)^2$$

$$5q_5 = 7.477 + 0.059439(5q_0 - 20) + 0.000255(5q_0 - 20)^2$$

especie humana. El primero de ellos corresponde a una probabilidad de muerte $q_0 = 20$ por mil, que es un nivel un poco inferior al más bajo encontrado en las 158 tablas. Los 16 modelos siguientes corresponden a niveles de q_0 que van de 25 a 100 por mil, variando de 5 en 5 por mil, mientras que los restantes 23 modelos corresponden a niveles de mortalidad infantil de 110 a 330 por mil, variando de 10 en 10 por mil.

Una vez obtenida la serie de valores de $5q_x$ de todas las edades, para los diferentes niveles de mortalidad infantil anteriormente indicados, se calculó el tiempo vivido, la esperanza de vida al nacer y las restantes funciones de los 40 modelos.

Luego se obtuvieron tablas de vida separadas para cada sexo, en base a índices de mortalidad masculina y femenina, por edades, tomados de las 158 tablas.

Por último, en el Manual III de las Naciones Unidas se adaptaron estas tablas de mortalidad de modo que representarían una sucesión cronológica de tablas, en una situación típica de mortalidad decreciente, principalmente para fines de proyecciones de población. En diversos países se ha observado que cuando la mortalidad es moderada o alta, se logra en promedio una ganancia de 2.5 años en la esperanza de vida por quinquenio. Por lo tanto los valores de q_x se interpolaron para intervalos correspondientes a esperanzas de vida de 20, 22.5, 25, etc. años. Después de los 65 años de esperanza de vida, la ganancia supuesta por quinquenio es menor, conforme a la tendencia observada en los países de más baja mortalidad. En total aparecen en el Apéndice del Manual III, 24 modelos de mortalidad por sexo, con esperanzas de vida que van desde 20 a 73.9 años para la población de ambos sexos.

■ Las tablas modelo de Naciones Unidas han sido sumamente utilizadas, durante muchos años, para los más variados propósitos. Sin embargo, su procedimiento de construcción ha sido objeto de varias críticas. Gabriel y Ronen, en un artículo publicado en 1958 ¹⁶, critican la técnica usada para la construcción de estas tablas modelo, mediante ecuaciones de recurrencia sucesivas, las cuales introducirían un sesgo acumulado.

¹⁶ Gabriel, K.R. y Ronen, I., Estimación de la mortalidad a partir de tasas de mortalidad infantil, CELADE, Serie DS No. 22. Traducción del artículo "Estimates of mortality from infant mortality rates", publicado en Population Studies, Vol XI, No. 2, 1958.

En vez de ello, estos autores calcularon los valores de ${}_5q_x$, utilizando las mismas 158 tablas, mediante ecuaciones lineales sobre q_0 de la forma:

$$(80) \quad {}_5q_x = a + b \cdot q_0$$

Comparando las estimaciones de esperanza de vida al nacer de las Tablas Modelo de Naciones Unidas, con las calculadas de esta manera, se encontraron que aquéllas sobreestimaban la esperanza de vida de 1 a 3 años, para valores de q_0 comprendidos entre 40 y 200 por mil.

Por otra parte, las Tablas de Naciones Unidas son modelos de un solo parámetro, en el sentido de que una vez fijado el nivel de mortalidad de una edad cualquiera, queda determinada una única tabla de mortalidad. Esto no corresponde estrictamente con la realidad, donde un nivel dado de mortalidad en las primeras edades puede estar asociado con niveles de mortalidad muy diferentes en las edades intermedias y avanzadas.

3.3 Las Tablas Modelo Regionales de Coale y Demeny.

Las críticas encontradas en la aplicación de las tablas de Naciones Unidas y la nueva información disponible en los años subsiguientes, llevaron a Coale y Demeny a elaborar en 1966 las Tablas Modelo Regionales ¹⁷, que son las más utilizadas en la actualidad.

¹⁷ Coale, A.J. y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966.

Dichas tablas modelo fueron preparadas en base a 192 tablas de mortalidad por sexo (seleccionadas de un grupo inicial de 326), pertenecientes a las siguientes regiones:

- 140 tablas de países de Europa,
- 17 de Estados Unidos y Canadá,
- 19 de Australia y Nueva Zelanda,
- 12 de países de Asia, y
- 4 de Africa del Sur.

En consecuencia, los países de América Latina no están representados en este modelo.

Respecto a la ubicación en el tiempo, 39 de estas tablas, se refieren al siglo pasado, 84 al período 1900-1945, y las 69 restantes cubren el período posterior a la segunda guerra mundial, hasta 1960.

Para su construcción se calculó primero un modelo preliminar de un solo parámetro, graficando las 326 tablas y promediando las tasas que tenían un mismo rango de mortalidad. Luego se examinaron las desviaciones de cada tabla de vida, con respecto al modelo preliminar. En esta etapa se eliminaron todas aquellas tablas que mostraban desviaciones muy grandes e injustificadas, quedando las 192 ya indicadas.

■ Como resultado de este análisis preliminar se pudo distinguir cuatro patrones de mortalidad por edad, llamados Familia Norte, Sur, Este y Oeste, porque comprenden fundamentalmente la experiencia de mortalidad de esas regiones de Europa. Las tablas que comprenden estas cuatro familias y las características de la mortalidad por edad predominantes, son las siguientes:

1. Familia Norte

-Comprende 9 tablas de mortalidad de Noruega, Suecia hasta 1920 e Islandia.

-Con respecto a las tablas de mortalidad promedio preliminares, se caracteriza por tener una baja mortalidad infantil y después de los 45 o 50 años de edad.

2. Familia Sur

-Comprende 22 tablas de España, Portugal y Sur de Italia.

-Muestran una alta mortalidad entre los menores de 5 años, baja mortalidad de 40 a 60 años, y alta mortalidad nuevamente después de los 65.

3. Familia Este

-Comprende 31 tablas de Alemania, Austria, Checoslovaquia, Norte y Centro de Italia, Hungría y Polonia.

-Muestran una alta mortalidad infantil y después de los 50 años.

4. Familia Oeste.

-Comprende 130 tablas de Australia, Canadá, Estados Unidos, Israel, Japón, Nueva Zelanda, Sudáfrica y los países de Europa Occidental.

-No muestran un patrón persistente y sistemático de desviación, con respecto a las tablas modelo preliminares. En otras palabras, es un grupo residual que queda después de haber eliminado las tablas de los grupos Norte, Sur y Este. Dado que comprende la mayoría de las tablas, representa el patrón de mortalidad más general, entre los cuatro considerados.

■ Para cada una de estas cuatro familias de tablas, se calcularon, por sexo, ecuaciones de regresión lineales de ${}_nq_x$ y $\log {}_nq_x$, con respecto a la esperanza de vida a la edad 10, empleando relaciones de la siguiente forma:

$$(81) \quad {}_nq_x = A_x + B_x \cdot e_{10}^0$$

$$(82) \quad \log {}_nq_x = A'_x + B'_x \cdot e_{10}^0$$

donde los parámetros A_x , B_x , A'_x y B'_x , se determinaron para cada grupo de edades, en base a la información de las tablas de mortalidad conocidas.

Después de un análisis de los resultados obtenidos con estas regresiones, los autores derivaron las probabilidades de muerte a partir de la relación (81) para valores bajos de e_{10}^0 , de la relación (82) para valores altos de e_{10}^0 , y mediante un promedio de las relaciones (81) y (82) en el rango intermedio. De esta manera se obtuvieron diversos juegos de probabilidades de muerte de todos los grupos de edades, entrando con valores convenientes de e_{10}^0 . Una vez calculados los valores de ${}_nq_x$, se determinaron las restantes funciones de las diversas tablas modelo establecidas.

En total se elaboraron para cada familia 24 tablas modelo por sexo, con un nivel mínimo de esperanza de vida al nacer de la población femenina de 20 años para el llamado Nivel 1, luego 22.5 años de esperanza de vida para el Nivel 2, y así sucesivamente, hasta 77.5 años para el Nivel 24. En el caso de la población masculina la esperanza de vida resultó un poco inferior (74.4 años en la familia Norte, 73.6 en la Sur, 72.7 en la Este y 73.9 en la Oeste).

Para la Familia Oeste, los valores de esperanza de vida al nacer y las diferencias por sexo, de algunos niveles seleccionados, son los siguientes:

Nivel	Esperanza de vida al nacer		Diferencia por sexo
	Femenina	Masculina	
1	20.0	18.0	2.0
2	22.5	20.4	2.1
5	30.0	27.7	2.3
10	42.5	39.7	2.8
15	55.0	51.8	3.2
20	67.5	63.6	3.9
21	70.0	66.0	4.0
22	72.5	68.6	3.9
23	75.0	71.2	3.8
24	77.5	73.9	3.6

La esperanza de vida del nivel 1 es más baja que las observadas en las regiones de mayor mortalidad, por lo cual estas tablas modelo pueden emplearse en los países de mortalidad moderada y alta, sin mayores dificultades. En cambio la esperanza de vida de los niveles 23 y 24, ya han sido superadas por los países de menor mortalidad, tales como Francia, que tiene una esperanza de vida femenina de 78.5 años y masculina de 70.4, Holanda, con 79.3 y 72.7, Islandia, con 79.4 y 73.9, y Japón, con 79.7 y 74.2, respectivamente ¹⁰, lo cual origina algunos problemas en su aplicación a los países de baja mortalidad, por ejemplo, para hacer estimaciones de mortalidad futura.

En relación con la diferencia de esperanza de vida al nacer por sexo, llama la atención que ésta tiende a

¹⁰ Naciones Unidas, Anuario Demográfico 1983.

disminuir en los últimos niveles, contrario a la tendencia observada en la mayoría de los países, donde la diferencia generalmente crece a medida que aumenta la esperanza de vida. Este comportamiento se verifica también en las tres restantes familias.

■ Las Tablas Modelo de Coale y Demeny constituyen un modelo más flexible que el de Naciones Unidas, ya que ofrece cuatro patrones diferentes de mortalidad por edad, de modo que puede seleccionarse entre ellos un modelo más apropiado o afín con las características de la población que se está estudiando.

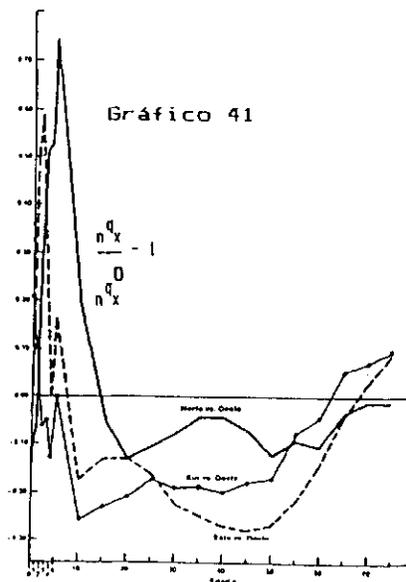
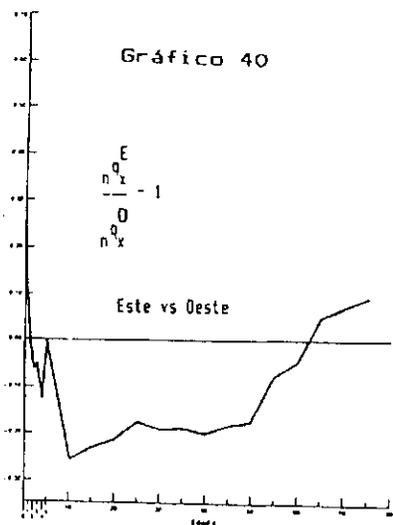
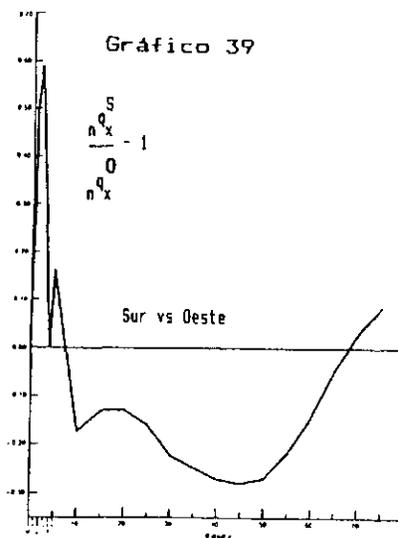
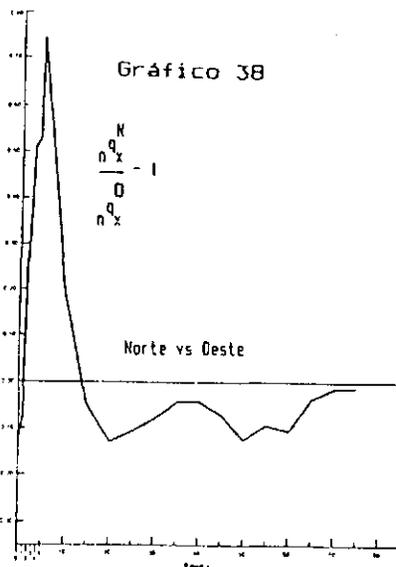
Entre las diferentes tablas modelo existentes, las de Coale y Demeny son las más usadas en la actualidad. Los autores sugieren utilizar el modelo Oeste, en su aplicación a los países en desarrollo, cuando no haya información confiable para determinar los patrones de mortalidad por edad que prevalecen.

■ Con el fin de ilustrar más claramente la relación entre los patrones de mortalidad por edad de las cuatro familias, en los gráficos 38 a 41, tomados del Manual X de Naciones Unidas 19, se muestran los desvíos relativos de las familias Norte, Sur y Este, con respecto a la familia Oeste, que representa aproximadamente la experiencia promedio. Dichos gráficos se refieren a la población femenina, nivel 9. Los desvíos positivos significan que la mortalidad de la familia considerada es mayor en esa edad que la Oeste y los negativos corresponden al caso contrario.

¹⁹ Naciones Unidas, Técnicas Indirectas de Estimación Demográfica, Manual X, N. York, 1986.

Gráficos 38-41

DESVIACIONES RELATIVAS DE LAS PROBABILIDADES DE MUERTE POR EDADES, DE LOS MODELOS NORTE, SUR Y ESTE CON RESPECTO AL MODELO OESTE. POBLACION FEMENINA, NIVEL 9



Fuente: Naciones Unidas, Técnicas Indirectas de Estimación Demográfica, Manual I, N. York, 1986.

Los gráficos 38 y 41 muestran que la Familia Norte se caracteriza por una mortalidad infantil más baja que la Oeste, una mortalidad juvenil (de 1 a 10 años) bastante más elevada, una mortalidad adulta (de 20 a 50 años) más baja que la Oeste pero mayor que las familias Este y Sur, y que dicha familia presenta la mortalidad más baja en las últimas edades (65 años y más).

Por su parte los gráficos 39 y 41 permiten apreciar el comportamiento de la Familia Sur, la cual se caracteriza por una mayor mortalidad que la familia Oeste al comienzo de la vida (hasta los 5 años), la más baja mortalidad adulta de todos los modelos, y una mortalidad más alta que las familias Oeste y Norte en las últimas edades.

Por último los gráficos 40 y 41 muestran el patrón de mortalidad de la Familia Este, la cual exhibe una mortalidad infantil relativamente alta, la más baja mortalidad juvenil de todas las familias, una mortalidad adulta relativamente baja, y la mayor mortalidad de los cuatro modelos en las últimas edades.

De esta manera las tablas modelo de Coale y Demeny presentan una variada gama de variación de los patrones de mortalidad por edad, aunque probablemente los patrones de muchos países no estén representados. Precisamente, entre las 326 tablas de mortalidad utilizadas inicialmente para la construcción de estas tablas modelo, había 33 tablas de los países de América Latina, las cuales no fueron incluidas entre las 192 finalmente seleccionadas, probablemente porque no se adaptaban a ninguna de las cuatro familias.

■ Para tener una idea del comportamiento de la mortalidad en los países de América Latina, en los gráficos 42 y 43, se compara la mortalidad por edades de 4 países seleccionados, con respecto al modelo de Coale-Demeny, familia Deste. Para este propósito se han tomado las probabilidades de muerte de las tablas femeninas de Argentina 1959-1961, Costa Rica 1972-1974, México 1969-1971 y Honduras 1971-1972, las cuales se han comparado con la misma función de las tablas modelo, interpoladas de acuerdo al nivel de esperanza de vida. Los gráficos tienen la misma significación que los anteriores, es decir, se han representado los desvíos relativos de dichas probabilidades de muerte.

Gráficos 42-43

DESVIACIONES RELATIVAS DE LAS PROBABILIDADES DE MUERTE POR EDADES, DE LAS TABLAS FEMENINAS DE CUATRO PAISES DE AMERICA LATINA, CON RESPECTO AL MODELO DESTE

Gráfico 42

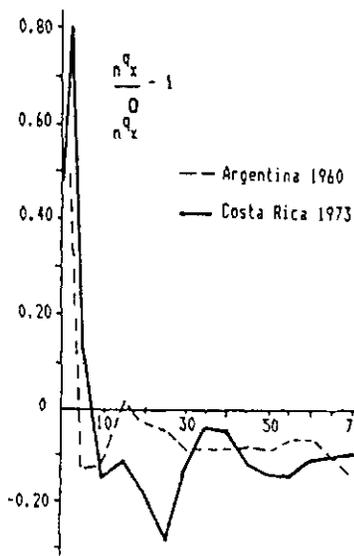
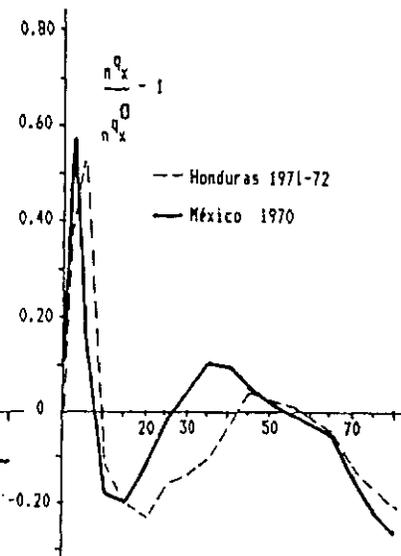


Gráfico 43



Dejando de lado ciertas características especiales de la mortalidad por edad prevaleciente en cada país, estos gráficos ponen de manifiesto que los cuatro países de América Latina considerados, se caracterizan por tener una mortalidad al comienzo de la vida más alta que la del modelo Deste, y una mortalidad más baja en las últimas edades. Sería necesario hacer un estudio más exhaustivo para todos los países de la región.

■ Entre las ventajas de las Tablas Modelo de Coale y Demeny pueden mencionarse:

a) La metodología utilizada, empleando ecuaciones de regresión sobre e_{10}^0 , es más apropiada que la empleada en las tablas de Naciones Unidas, donde se calcularon ecuaciones de recurrencia sucesivas que introducen un sesgo acumulado.

b) Constituyen un modelo más flexible que el de Naciones Unidas, ya que ofrecen cuatro patrones diferentes de mortalidad por edad, de modo que puede seleccionarse entre ellos un modelo más apropiado o afín con las características de la población que se está considerando.

c) Las Tablas de Coale y Demeny fueron elaboradas con tablas de mortalidad más confiables y más recientes que las de Naciones Unidas.

■ Por su parte, entre las limitaciones de las Tablas Modelo de Coale y Demeny pueden citarse:

a) Los niveles más bajos de mortalidad considerados ya han sido superados por los países de menor mortalidad. Anteriormente (en pág 102) se han citado ejemplos, en términos de esperanza de vida; de la misma manera, las

tasas de mortalidad infantil correspondientes al nivel 24 de la familia Oeste, es de 11 muertes por cada mil nacimientos, en tanto que los países más desarrollados ya han llegado a tasas de 7 u 8 por mil.

b) Para su elaboración, no se ha tomado en cuenta las tablas de mortalidad de los países de América Latina.

c) Aunque las tablas modelo presentan cuatro patrones diferentes de mortalidad por edad, en la realidad hay patrones distintos a los contemplados en dichas tablas.

d) Han sido construidas hace ya bastante tiempo, por lo cual no incluyen la experiencia de mortalidad de los últimos 25 años.

■ En el año 1983 se publicó una Segunda Edición de las Tablas Modelo de Coale y Demeny ²⁰, las cuales contienen información desglosada por edades hasta los 100 años y un nivel adicional 25.

En las tablas originales publicadas en 1966, la información por edades llega hasta el grupo 75-79, con un grupo abierto final 80 y más, lo cual a juicio de los autores resulta ahora insuficiente, especialmente para los países de baja mortalidad, donde la proporción de sobrevivientes desde el nacimiento hasta la edad 80 es superior al 50 por ciento.

Por su parte el nivel adicional 25, corresponde a una esperanza de vida al nacer de 80 años para la población femenina (el valor correspondiente a la población masculina depende de la familia considerada). Este nivel

²⁰ Coale, A.J. y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Second Edition, Academic Press, N. York, 1983.

se ha obtenido básicamente mediante extrapolación de los anteriores, ya que las tablas de mortalidad utilizadas como base para la construcción de estas tablas modelo, no contienen niveles de esperanza de vida tan elevados.

Por último cabe señalar que, debido al procedimiento de cálculo utilizado en la elaboración de esta segunda edición, la mayoría de los valores presentados en estas nuevas tablas presentan pequeñas diferencias con respecto a las anteriores.



Ejercicio.

Utilizando las Tablas Modelo de Coale-Demeny, Familia Oeste, ajustar las siguientes probabilidades de muerte masculinas,

$$q(2)=0.07204 ; q(3)=0.09264 ; q(5)=0.09650$$

obtenidas a partir de la información sobre hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes. Para ello:

- a) Calcular los valores de l_x correspondientes a las probabilidades de muerte dadas,
- b) Determinar el nivel al cual corresponde cada uno de estos tres valores y su promedio.
- c) Obtener los valores de l_x correspondientes al nivel medio, mediante interpolación en las tablas modelo,
- d) Calcular finalmente los valores de $q(2)$, $q(3)$ y $q(5)$ ajustados.

Respuesta:

- a) Cálculo de los valores de l_x .

A partir de la información básica presentada en la columna (2), se ha obtenido en la columna (3)

el número de sobrevivientes, suponiendo la raíz $l_0=100\ 000$.

b) Cálculo del nivel medio.

Interpolando los valores de l_x , en las tablas modelo de Coale-Demeny, se obtuvieron los niveles presentados en la columna (4), y su promedio que resulta igual a 18.4.

c) Cálculo de los valores de l_x ajustados.

Estos valores, que se presentan en la columna (5), se calculan interpolando en las tablas modelo el nivel medio 18.4 obtenido anteriormente.

d) Cálculo de los valores de $q(x)$ ajustados.

Finalmente, empleando la relación

$$q(x) = \frac{l_0 - l_x}{l_0}$$

se obtienen los valores de $q(2)$, $q(3)$ y $q(5)$ ajustados, los cuales se presentan en la columna (6).

Edad x	P. muerte $q(x) = q_0$	Sobrev. l_x	Nivel en C-D	Valores ajustados l_x	Valores ajustados $q(x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
2	0.07204	92 796	19.0	91 919	0.08081
3	0.09264	90 736	18.0	91 374	0.08626
5	0.09650	90 350	18.2	90 698	0.09302
Nivel medio			18.4		

3.4 El Sistema de Tablas de Vida Modelo de Brass.

William Brass señala que en la realidad hay situaciones mucho más extremas que las que Coale y Demeny han supuesto. Cita el caso de países como Turquía, la URSS y Bulgaria con experiencias de mortalidad que, comparadas con las de Coale-Demeny, muestran una mortalidad mucho más alta en la niñez y mucho más baja en la población adulta. En otros casos la relación o el desvío es contrario.

Señala además que las tablas modelo obtenidas en la forma indicada en las secciones anteriores, dependen en gran medida de los datos básicos que las generan. Esto lo llevó a crear el denominado "sistema logito" ²¹ ²² ²³, el cual utilizó para el análisis de la mortalidad de los países del Africa.

El Sistema de Tablas de Vida Modelo de Brass es distinto de los anteriores, en el sentido de que no comprende un conjunto de tablas de vida modelo, sino que es una relación matemática que puede generar un infinito sistema de relaciones.

Dicho sistema vincula matemáticamente dos diferentes tablas de vida. Brass encontró que una cierta transformación de los valores de la función de sobrevivencia

²¹ Brass, W., Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados, CELADE, Serie E, No. 14, 1974.

²² Brass, W., Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (fecundidad y mortalidad), San José, Costa Rica, 16-24 de septiembre de 1971. Serie DS No. 9.

²³ Chackiel, J., "El modelo de mortalidad de Brass", Notas de Población, No. 25, CELADE, abril de 1981.

l_x de una tabla de mortalidad cualquiera, tiene una relación aproximadamente lineal con los de otra. Dicha transformación es el logito de $1-l_x$, que es igual a

$$(83) \quad \text{logito } (1-l_x) = (1/2) \ln \frac{1-l_x}{l_x}$$

■ La relación fundamental de este sistema es la siguiente:

$$(84) \quad Y(x) = \alpha + \beta \cdot Y_S(x)$$

siendo

$$(85) \quad Y(x) = \text{logito } (1-l_x) = (1/2) \ln \frac{1-l_x}{l_x}$$

$$(86) \quad Y_S(x) = \text{logito } (1-l_x^S) = (1/2) \ln \frac{1-l_x^S}{l_x^S}$$

donde l_x corresponde a la función de sobrevivencia que se desea describir con el modelo, y l_x^S corresponde a una tabla de referencia, llamada tabla estándar. Para efecto de los cálculos se toma $l_0 = 1$, de modo que l_x es un valor comprendido entre 0 y 1. Dada una tabla de vida estándar l_x^S , cada par de valores de α y β genera una tabla de vida distinta.

Si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, los valores de l_x coinciden con los de la tabla estándar. Variando α se modifica el nivel, es decir se obtienen valores de l_x más altos o más bajos que los de la tabla estándar, mientras que cambiando β se modifican los patrones de mortalidad por edad.

Reemplazando las relaciones (85) y (86) en la (84), se obtiene

$$(1/2) \ln \frac{1-l_x}{l_x} = \alpha + \beta (1/2) \ln \frac{1-l_x^5}{l_x^5}$$

de donde

$$(87) \quad l_x = \frac{1}{1 + e^{2\alpha + \beta \ln \frac{1-l_x^5}{l_x^5}}}$$

De este modo, dado un conjunto de valores l_x de una tabla de vida estándar cualquiera, y un par de valores de α y β , puede ser obtenido otro conjunto de valores l_x de otra tabla.

Por ejemplo, dado el valor de $l_5^5 = 0.92320$, calcular el valor de l_5 de otra tabla vinculada a la anterior por los parámetros $\alpha = 0.30$ y $\beta = 1.00$.

$$l_5 = \frac{1}{1 + e^{2 \cdot (0.30) + 1.00 \ln \frac{1-0.92320}{0.92320}}}$$

resultando, en consecuencia

$$l_5 = 0.86837$$

Dicho sea de paso, este resultado pone de manifiesto, que si α toma valores positivos, se obtienen valores de l_x más bajos que los de la tabla estándar.

■ Brass utiliza generalmente como estándar dos tipos de tablas ²⁴, una llamada "estándar general", derivada de las Tablas Modelo de Naciones Unidas, y una "estándar africana", que tiene una mortalidad infantil más baja y juvenil más alta que la general. Sin embargo, puede utilizarse como estándar cualquier tabla apropiada, incluso una tabla modelo. En este último caso, haciendo $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, se reproduciría dicha tabla modelo, mientras que variando β se cambia el patrón de mortalidad, con lo cual se pone de manifiesto la mayor flexibilidad de este sistema.

Otra ventaja del modelo de Brass, es que permite respetar, en mayor medida que otros modelos, los datos observados de un país. Así por ejemplo, se puede construir una tabla de vida en base a información fragmentaria disponible sobre mortalidad al comienzo de la vida y para determinadas edades adultas, reproduciendo tales niveles.

Entre las limitaciones del sistema de Brass puede mencionarse, que las estimaciones están bastante afectadas por la tabla estándar que se elija, y por otra parte, que si la información básica utilizada contiene errores, entonces la mayor flexibilidad del sistema puede conducir a valores más alejados de la realidad y de la experiencia promedio de otros países.

Otra limitación es que la relación matemática utilizada, puede no ser suficiente para describir el comportamiento relativamente complejo de la mortalidad en todos los tramos de la vida, observada en los diferentes países.

²⁴ Brass, W., "Métodos ..." op.cit., págs 63 y 146.

Ejercicio

Utilizando el Sistema Logito de Brass, ajustar las mismas probabilidades de muerte masculinas ya ajustadas anteriormente mediante las tablas modelo de Coale-Demeny,

$$q(2)=0.07204 \quad ; \quad q(3)=0.09264 \quad ; \quad q(5)=0.09650$$

utilizando la relación

$$(84) \quad Y(x) = \alpha + \beta \cdot Y_{\text{S}}(x)$$

haciendo $\beta=1$, y tomando como estándar la tabla de mortalidad masculina de Costa Rica de 1973 presentada en el anexo. Para ello:

- a) Calcular los valores de l_x correspondientes a las probabilidades de muerte dadas (suponiendo $l_0 = 1$), y los logitos $Y(x)$.
- b) Obtener los logitos de la tabla estándar $Y_{\text{S}}(x)$.
- c) Calcular los valores de $\alpha = Y(x) - Y_{\text{S}}(x)$ para las tres edades consideradas, y su promedio $\bar{\alpha}$.
- d) Obtener los valores ajustados $Y(x) = \bar{\alpha} + Y_{\text{S}}(x)$.
- e) Calcular los valores ajustados de l_x .
- f) Obtener finalmente las probabilidades de muerte ajustadas.

Respuesta

- a) Cálculo de los valores de l_x y los logitos $Y(x)$. Los valores de l_x derivados de las probabilidades de muerte dadas, se incluyen en la columna (2), a partir de los cuales se han calculado los logitos correspondientes, en la columna (3), empleando la relación

$$Y(x) = (1/2) \cdot \ln \frac{1-l_x}{l_x}$$

- b) Cálculo de los logitos $Y_S(x)$ de la tabla estándar.

Los valores de l_x^S presentados en la columna (4), fueron tomados de la tabla masculina de Costa Rica de 1973 que aparece en el anexo, utilizada como estándar, suponiendo $l_0=1$, mientras que los logitos $Y_S(x)$ correspondientes se incluyen en la columna (5).

- c) Cálculo del valor medio de α .

Teniendo en cuenta que para este tipo de ajustes se hace $\beta=1$, de la relación (84) resulta:

$$\alpha = Y(x) - Y_S(x).$$

Por lo tanto, haciendo la diferencia de los logitos de las columnas (3) y (5) se obtienen en la columna (6) los valores de α , para las tres edades consideradas. Promediando estos valores resulta

$$\bar{\alpha} = 0.15967$$

- d) Cálculo de los valores ajustados

$$Y(x) = \bar{\alpha} + Y_S(x).$$

Sumando el promedio 0.15967 a los logitos $Y_S(x)$ de la columna (5), se obtienen los valores de $Y(x)$ presentados en la columna (7).

- e) Cálculo de los valores de l_x ajustados.

Estos valores, presentados en la columna (8), se obtienen empleando la relación [igual a la (87)]

$$l_x = 1 / [1 + e^{2-Y(x)}]$$

- f) Cálculo de los valores de $q(x)$ ajustados.

Por último, en la columna (9) se han calculado los valores de $q(x)$ ajustados, haciendo directa-

mente la diferencia: $1-l_x$, ya que $l_0=1$.

Edad x	Sobrev l_x	Logito Y(x)	Tabla estándar l_x^s	$Y_s(x)$	$\bar{\alpha} = Y(x) - Y_s(x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
2	0.92796	-1.27788	0.93852	-1.36280	0.08492
3	0.90736	-1.14091	0.93561	-1.33812	0.19721
5	0.90350	-1.11837	0.93280	-1.31526	0.19689
Nivel medio de α					$\bar{\alpha} = 0.15967$

Edad x	Valores ajustados		
(1)	$Y(x) = \bar{\alpha} + Y_s(x)$	l_x	$q(x) = q_0$
(1)	(7)	(8)	(9)
2	-1.20313	0.91730	0.08270
3	-1.17845	0.91348	0.08652
5	-1.15559	0.90980	0.09020

3.5 Breve referencia a otras tablas modelo.

Finalmente se hará una ligera referencia a algunas otras tablas modelo de mortalidad, entre ellas, las nuevas Tablas Modelo elaboradas recientemente por la División de Población de las Naciones Unidas para los Países en Desarrollo.

■ Lederman y Breas, en un trabajo publicado en 1959²⁵ han desarrollado una metodología en base al análisis

²⁵ Lederman, S., y Breas, J., "Les dimensions de la mortalité", *Population*, 14 année, octobre-décembre 1959, No. 4.

de los componentes principales, el cual permite determinar los factores más importantes que explican el nivel y los patrones de mortalidad por edad. Dichos autores determinaron cinco componentes principales: el primero asociado con el nivel de la mortalidad general, el segundo referido a la relación entre la mortalidad infantil y la mortalidad adulta, el tercero relacionado con el patrón de mortalidad de las últimas edades, el cuarto asociado al patrón de mortalidad de los menores de cinco años, y el quinto, que refleja la diferencia entre la mortalidad masculina y femenina entre los 5 y los 70 años.

Bourgeois-Pichat, por su parte, ha elaborado tres series de tablas modelo, introduciendo desviaciones, en uno y otro sentido, en los patrones de mortalidad por edad de las tablas modelo de Naciones Unidas. Estas tablas fueron utilizadas para derivar estimaciones de diversos parámetros demográficos en países con estadísticas incompletas ²⁶.

A su vez Sully Lederman, en un documento publicado por el INED en 1969 ²⁷, desarrolló una nueva metodología para elaborar tablas modelo, utilizando técnicas de regresión múltiple para estimar las probabilidades de muerte en función de la esperanza de vida al nacimiento y de la mortalidad de determinadas edades.

■ Teniendo en cuenta que los patrones de mortalidad de los países en desarrollo frecuentemente difieren de

²⁶ Naciones Unidas, El concepto de población estable, ST/SOA/Serie A/39, Anexo II.

²⁷ Lederman, S., Nouvelles tables-types de mortalité, INED, Travaux et Documents, Paris, 1969.

aquéllos prevalecientes en los países desarrollados (que son los utilizados en la construcción de las tablas modelo existentes), la División de Población de las Naciones Unidas ha preparado nuevas Tablas Modelo de Mortalidad para Países en Desarrollo, publicadas en 1982 ²⁸, basadas en tablas de vida seleccionadas de países de América Latina, Asia y África.

Para la construcción de estas tablas modelo, se usaron 36 tablas de vida por sexo (16 de ellas de América Latina, 19 de Asia y 1 de África), y la metodología ya mencionada de los componentes principales.

El análisis de las tablas básicas permitió distinguir cuatro patrones principales de mortalidad, designados como Patrón Latinoamericano, Chileno, de Asia del Sur y del Lejano Oriente, además de un Patrón Promedio General.

Con respecto a las tablas modelo de Coale y Demeny familia Oeste, el patrón Latinoamericano se caracteriza por tener una mayor mortalidad en los primeros 15 o 20 años de edad, y una baja mortalidad en las últimas edades. El patrón Chileno presenta una muy alta mortalidad infantil, combinada con una baja mortalidad de 1 a 4 años y en las últimas edades. El patrón de Asia del Sur presenta, por su parte, una mortalidad alta en las primeras y últimas edades, mientras que el patrón del Lejano Oriente se caracteriza por una baja mortalidad a edades jóvenes, asociada con una mortalidad muy alta en las edades avanzadas. En cada caso se elaboraron 41 tablas modelo para cada sexo, con esperanzas de vida al nacer de 35, 36, ..., hasta 75 años.

²⁸ United Nations, Model Life Tables for Developing Countries, New York, 1982.

Aunque resulta muy atinada la idea de preparar nuevas tablas modelo que representen la experiencia de países en desarrollo y que tomen en cuenta las tablas de mortalidad más recientes, en la práctica estas tablas modelo tienen el problema de que se basan en muy pocas tablas de mortalidad y varias de ellas corresponden a países que no tienen registros vitales suficientemente completos. Tal es el caso, por ejemplo, entre los países de América Central, de las tablas de El Salvador de 1970-1972, Honduras 1960-62 y 1973-75. Por ello, las tablas modelo de Coale y Demeny, continúan siendo las más utilizadas en los países de América Latina.

3.6 Uso de las Tablas Modelo.

Las tablas modelo de mortalidad constituyen una herramienta muy utilizada para diversos propósitos demográficos, entre los cuales pueden mencionarse:

- 1. Para obtener estimaciones de la mortalidad en países con datos escasos o poco fidedignos.

Este es uno de los principales usos, ya que no existen datos confiables sobre mortalidad en gran parte de los países en desarrollo, lo que obliga a efectuar estimaciones combinando la información fragmentaria disponible, o los datos recogidos mediante encuestas especiales, con los patrones de mortalidad promedio de las tablas modelo.

Por ejemplo, si a través de una encuesta demográfica, se obtienen estimaciones de la mortalidad al comienzo de la vida, puede entrarse con esta información a una tabla modelo, a fin de seleccionar un nivel de mortalidad para todas las edades. Asimismo, si además de conocerse la mortalidad al comienzo de la vida, se contara con estimaciones de mortalidad adulta, las tablas modelo permitirían determinar un patrón de mortalidad coherente con la información conocida en esos dos tramos de edades.

■ 2. Como marco general de referencia para el estudio de la mortalidad.

Cuando se están haciendo estudios de mortalidad, resulta muy útil tener a mano un esquema general promedio, de la forma en que varía la mortalidad por grupos de edades para los diferentes niveles de esperanza de vida, que es la información proporcionada por las tablas modelo.

Así por ejemplo, si se obtienen estimaciones de las tasas de mortalidad por edades de un determinado país o región, se pueden comparar estas tasas con las de una tabla modelo de un nivel similar, para determinar el nivel general de la mortalidad, establecer si hay algunos grupos en los cuales la mortalidad estimada es particularmente alta o baja en relación con la experiencia promedio, o bien, para suavizar las tasas obtenidas.

Análogamente, si como consecuencia de un programa de salud, se logra reducir la tasa de mortalidad de los niños de 1 a 4 años de edad, digamos de 80 a 40 por mil, con ayuda de una tabla modelo se podría establecer a qué niveles corresponden estas dos estimaciones, evaluando de este modo la ganancia, en relación con el promedio reflejado por dichas tablas.

■ 3. Para fines de proyecciones de población.

Este es otro campo en el cual se han utilizado extensamente las tablas modelo, tanto en los países con información incompleta, como en los países desarrollados.

Para ello se necesita, como punto de partida, una tabla de mortalidad para el momento actual o el pasado reciente, la cual proporciona las relaciones de supervivencia básicas por grupos de edades, ${}_5P_{x,x+4}$. Luego dichas relaciones de supervivencia deben ser proyectadas hacia el futuro, lo cual suele hacerse con ayuda de las tablas modelo de mortalidad, avanzando en los diferentes niveles.

Tanto en las tablas modelo de Naciones Unidas, como en las de Coale-Demeny, los sucesivos niveles se han calculado con diferencias en la esperanza de vida de 2.5 años, que es la ganancia media por quinquenio observada en los países de mortalidad moderada o alta. Sin embargo, si la ganancia esperada para un determinado país fuera menor o mayor, puede interpolarse de manera conveniente entre los diversos niveles de las tablas modelo.

En el caso de las tablas modelo de Brass, la proyección de la mortalidad se efectúa modificando los parámetros α y β .

■ 4. Para elaborar diversos métodos de estimación y ajustar información demográfica.

Estos son otros dos usos frecuentes de las tablas modelo. El primer caso corresponde a la derivación teórica de los diversos métodos de estimación demográfica, para lo cual suelen usarse las tablas modelo, a fin de describir los patrones de mortalidad por edad necesarios.

Tal es el caso, por ejemplo, de la estimación de la mortalidad infantil y juvenil, por el conocido método de Brass ²⁹, el cual permite transformar la proporción de hijos fallecidos declarados por las mujeres de 15-19, 20-24, etc. años, $D(i)$, en probabilidades de muerte convencionales, desde el nacimiento hasta ciertas edades 2, 3, 5, ..., $q(x)$. La fórmula básica de esta ecuación es:

$$q(x) = k(i) D(i)$$

donde los multiplicadores $k(i)$ se determinan con ayuda de las tablas modelo de mortalidad. En algunas variantes de este método se han calculado estos multiplicadores para las cuatro familias de las tablas modelo de Coale-Demeny, con el propósito de que el usuario utilice la familia que considere más apropiada.

El segundo caso, o sea, el ajuste de información demográfica por medio de modelos, se efectúa con bastante frecuencia, para eliminar las irregularidades de las estimaciones efectuadas.

Por ejemplo, en el método de Brass para estimar la mortalidad infantil y juvenil mencionado anteriormente, se obtienen valores de $q(2)$, $q(3)$ y $q(5)$, que suelen mostrar una evolución irregular de la mortalidad por edad, debido a que tales estimaciones provienen de información suministrada por mujeres de diferentes grupos de edades. Un ajuste de estas tasas puede lograrse, entrando a las tablas modelo para determinar el nivel al cual corresponde cada una de ellas, y adoptando las tres estimaciones correspondientes al nivel medio, tal como se ha visto en los ejercicios presentados anteriormente, en las secciones 3.3 y 3.4.

²⁹ Brass, W., Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados CELADE, Serie E, No. 14. 1974.

■ 5. Para elaborar tablas modelo estables.

Las tablas modelo de mortalidad constituyen también la base para la elaboración de las tablas modelo estables. Una población estable es aquella a la cual se llega manteniendo constante la fecundidad y la mortalidad por edades a través del tiempo. Tal modelo tiene una composición por edades constante, la población total crece o decrece según la ley exponencial, y sus diversas características son bastante parecidas a las prevalecientes en las poblaciones reales, por lo cual es uno de los modelos más utilizados para estudiar las relaciones analíticas entre las diferentes variables demográficas y hacer estimaciones en países con estadísticas incompletas.

Para elaborar las tablas modelo estables, basta con combinar las tablas modelo de mortalidad, con diferentes niveles de fecundidad o diferentes tasas de crecimiento de la población, para valores seleccionados que van desde los niveles más bajos hasta los más altos observados en las poblaciones reales.





EJERCICIOS DEL CAPITULO 3
(Ver respuestas al final del libro)

1. -En relación con las Tablas Modelo de Mortalidad de las Naciones Unidas, calcular los valores de ${}_5q_x$ de ambos sexos, para $x=0$ y 5 correspondiente al modelo No. 3, partiendo de una mortalidad infantil $q_0 = 30$ por mil, y utilizando las ecuaciones de regresión calculadas para tal fin, que aparecen en los gráficos 36 y 37 (pág 96).
2. -A partir de q_0 y ${}_5q_0$ obtenidos en el ejercicio anterior calcular la probabilidad de muerte ${}_4q_1$ correspondiente al mismo modelo No. 3.
3. -Se conocen los siguientes valores de la función l_x de una tabla de mortalidad masculina y de una tabla de mortalidad femenina

x	l_x^h	l_x^m
0	100 000	100 000
1	85 622	87 625
5	80 180	82 136

Se postula que ocurren 105 nacimientos de hombres por cada 100 de mujeres. Con base en estos datos, calcular los valores de l_x para las edades indicadas, que refleje la mortalidad del conjunto de la población (ambos sexos) y que tenga una raíz a la edad 0 igual a 100 000.

4. Utilizando las siguientes ecuaciones lineales sobre q_0 calculadas por Gabriel y Ronen, presentadas en el cuadro 2 del documento DS No. 22 de Celade,

$${}_5q_{10} = -0.001516 + 0.1352 q_0$$

$${}_5q_{30} = 0.001856 + 0.2878 q_0$$

$${}_5q_{50} = 0.025698 + 0.4376 q_0$$

- a) calcular las probabilidades de muerte de esos tres grupos de edades, correspondientes a una mortalidad infantil $q_0 = 0.080$.
- b) indicar si, de acuerdo con lo afirmado por Gabriel y Ronen, esos valores deben ser superiores o inferiores a los obtenidos en las tablas modelo de Naciones Unidas.

5. Utilizando las Tablas Modelo de Coale y Demeny, obtener el valor de las probabilidades de muerte femeninas

- del primer año de vida (q_0)

- la mortalidad juvenil (${}_4q_1$),

- y la relación $q_0 / {}_4q_1$

correspondientes a las familias Norte, Sur, Este y Oeste, nivel 9 ($e_0^{\square} = 40$ años), con el fin de verificar si las cuatro familias tienen la misma relación entre la mortalidad infantil y juvenil.

6. Para un determinado país se ha obtenido una estimación del número de sobrevivientes femeninos a la edad exacta 2, $l_2 = 91\ 318$.

Estimar la tasa de mortalidad infantil correspondiente, suponiendo que entre la edad 1 y la edad 2 la estructura de la mortalidad de dicho país es igual a la que rige en las Tablas Modelo de Coale Demeny, familia Oeste.

7. Dado el valor de $l_1 = 0.90650$ de una tabla estándar, se pide, calcular:

- a) el logito correspondiente
- b) el logito $Y(1)$ de otra tabla vinculada a la anterior por los parámetros $\alpha = 0.20$ y $\beta = 1.10$
- c) el valor de l_1 de esta nueva tabla.

8. Indicar si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

- a) Las tablas modelo de Naciones Unidas y de Coale-Demeny se elaboraron en base a un número relativamente grande de tablas de mortalidad de los países en desarrollo

Verdadero ()

Falso ()

- b) Para la construcción de las tablas modelo de Coale-Demeny no se utilizaron tablas básicas de mortalidad de los países de América Latina.

Verdadero ()

Falso ()

- c) La metodología utilizada en la elaboración de las tablas de Coale-Demeny, empleando ecuaciones lineales de cada una de las probabilidades de muerte sobre la e_{10}^0 , es más apropiada que la empleada en las tablas modelo de Naciones Unidas, donde se obtuvieron ecuaciones de recurrencia sucesivas.

Verdadero ()

Falso ()

d) Las tablas modelo de mortalidad pueden usarse para elaborar diversos métodos de estimación y ajustar información demográfica.

Verdadero ()

Falso ()

9. -Ajustar las siguientes probabilidades de muerte masculinas,

$$q(2)=0.08465 ; q(3)=0.09135 ; q(5)=0.09289$$

obtenidas a partir de la información sobre hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes, utilizando las tablas modelo de Naciones Unidas, familia Oeste.

10. -Ajustar las mismas probabilidades de muerte del ejercicio anterior, esta vez utilizando el sistema logito de Brass, es decir, la relación

$$(84) \quad Y(x) = \alpha + \beta \cdot Y_{\square}(x)$$

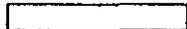
haciendo $\beta=1$, y tomando como estándar la tabla de mortalidad masculina de Costa Rica de 1973 presentada en el anexo.





Capítulo 4

MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ABREVIADAS



4.1 Introducción

La tabla de vida es la herramienta más útil y práctica, para medir la mortalidad de una población, por lo cual resulta de gran utilidad conocer algunos procedimientos confiables usados corrientemente para elaborar tablas abreviadas y completas.

Las tablas abreviadas de mortalidad, a las cuales se dedicará este capítulo, son las más usualmente empleadas en los países de América Latina, por ser las más fáciles de construir, porque proporcionan una desagregación suficientemente para la mayoría de los propósitos demográficos, y especialmente, porque la información básica del censo y las estadísticas vitales, contiene todavía errores que no justifican tanto refinamiento.

Con ellas se puede analizar la evolución de la mortalidad en periodos cortos de tiempo, comparar las condiciones de mortalidad de diversas regiones o países, y obtener las estimaciones básicas necesarias para otros trabajos demográficos, reservándose la metodología de la tabla completa para la elaboración de las tablas que se realizan cada decenio, cuando se efectúa un nuevo censo nacional de población, especialmente en aquellos países que cuentan con información estadística más confiable.

Los principales métodos utilizados en demografía para construir tablas abreviadas, son los denominados métodos clásicos, los cuales se emplean cuando las estadísticas de muertes, nacimientos y población son de buena calidad, o tienen omisiones de poca importancia que pueden evaluarse y corregirse. En caso contrario, cuando los errores de la información básica son de mayor significación, suele recurrirse a los llamados métodos indirectos, que utilizan exclusivamente la población por edades de dos o más censos, o información obtenida mediante preguntas especiales incluidas en censos o encuestas.

4.2 Métodos clásicos.

Los métodos clásicos, que son los mejores y más confiables, son aquéllos que emplean información básica proveniente del censo de población y de las estadísticas vitales. El punto de partida de todos ellos son las tasas centrales de mortalidad de la población real, a partir de las cuales se calculan las probabilidades de muerte y las restantes funciones de la tabla.

Dada la gran utilidad de la tabla de vida para propósitos demográficos y de salud pública, se han desarrollado numerosos métodos rápidos para construir tablas abreviadas, entre los cuales pueden mencionarse los métodos de Greville 30, Reed y Merrell 31, la construcción de tablas mediante referencia a una tabla tipo 32, los métodos desarrollados por Doering y Forbes 33, King 34, y el procedimiento especial utilizado en la elaboración de la tabla de vida de los Estados Unidos de 1959-1961 35.

En esta sección se verán los tres primeros métodos mencionados, mientras que en la sección siguiente, se desarrollará el mecanismo completo de construcción de una tabla de vida abreviada, siguiendo el procedimiento más corrientemente utilizado en los países de América Latina, que es una combinación de alguno de los métodos de Greville en las primeras edades, con el de Reed y Merrell desde los cinco años de edad en adelante.

³⁰ Greville, T.M.E., "Short Methods of Constructing Abridged Life Tables", Record of the American Institute of Actuaries, 32:29 (junio, 1943). CELADE ha publicado una reproducción de este artículo en la Serie D, No. 10.

³¹ Reed, L.J. y Merrell, M., "A Short Method for Constructing an Abridged Life Table", American Journal of Hygiene, 30:33 (septiembre 1939). CELADE ha publicado una reproducción de este artículo en la Serie D, No.49, Santiago, Chile.

³² U.S. National Center for Health Statistics, Serie 2, N24, Comparison of Two Methods of Constructing Abridged Life Tables by Reference to a Standard Table, March 1966.

³³ Doering, C.R. and Forbes, A.L. "A Skeleton Life Table", Proceedings of National Academy of Sciences, Vol 24; 400-405, 1938.

³⁴ King, G., "On a Short Method of Constructing an Abridged Mortality Table", Journal of the Institute of Actuaries, 48:294 (julio 1914).

³⁵ U.S. National Center for Health Statistics, Life Tables: 1959-61, Vol 1, Methodology of the National, Regional and State Life Tables for the United States:1959-1961, Washington, 1967.

4.2.1 Método de Greville.

En vista del creciente interés por la utilización de la tabla de vida, que condujo al desarrollo de diversos métodos rápidos para la construcción de tablas abreviadas, Greville escribió en 1943, un artículo en la revista especializada "Record of the American Institute of Actuaries" 36, comentando las diversas fórmulas empleadas para la elaboración de estos métodos aproximados, especialmente las fórmulas utilizadas por Reed y Merrell.

En dicho artículo Greville desarrolla, además, un procedimiento propio para construir tablas abreviadas, aplicable cuando el valor de n cambia entre un grupo y otro. El procedimiento, no requiere el cálculo de funciones exponenciales, lo cual constituía una indudable ventaja para la época en que fue elaborado, cuando no existían las facilidades de las calculadoras actuales.

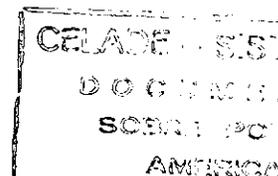
La relación desarrollada por Greville para convertir las tasas centrales de mortalidad (${}_n m_x$) en probabilidades de muerte (${}_n q_x$) es la siguiente:

$$(88) \quad {}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{\frac{1}{n} + {}_n m_x \left[\frac{1}{2} + \frac{n}{12} ({}_n m_x - \ln c) \right]}$$

donde c proviene del supuesto de que ${}_n m_x$ sigue la ley de Gompertz, vista en la sección 1.8, según la cual, la tasa de mortalidad varía con la edad de la siguiente forma:

$$(89) \quad {}_n m_x = B \cdot c^x$$

* Greville, T.M.E., "Short Methods ...", *op.cit.*



Dado que los valores de c tienen poco efecto en la estimación de los valores de ${}_nq_x$, excepto para edades avanzadas, en las cuales las tasas de mortalidad siguen la ley de Gompertz muy estrechamente, los valores de c pueden ser tomados como una constante en toda la tabla. Según Greville, en la gran mayoría de las aplicaciones el $\ln c$ está comprendido entre 0.080 y 0.104, por lo cual puede hacerse directamente igual a 0.09. Otra posibilidad, es obtener el valor de c , a partir de la relación (89) dada anteriormente, mediante el promedio de las tasas de mortalidad de las últimas edades:

$$\frac{{}_n m_{x+n}}{{}_n m_x} = \frac{B c^{x+n}}{B c^x} = c^n$$

de donde

$$(90) \quad c = \left(\frac{{}_n m_{x+n}}{{}_n m_x} \right)^{1/n}$$

De este modo, conociendo las tasas centrales de mortalidad de la población real, pueden derivarse las probabilidades de muerte de todos los grupos de edades con la fórmula (88) de Greville, calculándose luego las restantes funciones de la tabla, por medio de las relaciones usuales. Teniendo en cuenta que la información censal de los menores de cinco años suelen estar afectadas por errores, las probabilidades de muerte de las primeras edades pueden derivarse por cualquier otro procedimiento basado en información de nacimientos y defunciones, como por ejemplo, los que se explican más adelante en las secciones 4.3.2.a y 5.3.1.

TEMA DOCPAL
 NACION
 LACION EN
 LATINA

4.2.2 Método de Reed y Merrell.

Este método, publicado hace ya medio siglo 37, en 1939, es el más corrientemente utilizado para elaborar tablas abreviadas de mortalidad, por lo cual será comentado aquí con mayor detalle. A juicio de Greville, "constituye incuestionablemente el método más satisfactorio de este tipo, entre todos los sugeridos" 38.

a) La relación fundamental empleada por Reed y Merrell para convertir las tasas centrales de mortalidad en probabilidades de muerte, desde los 5 años de edad en adelante, es la siguiente:

$$(91) \quad nq_x = 1 - e^{-n m_x - 0.008 n^3 m_x^2}$$

Para llegar a la misma, dichos autores calcularon primero la relación entre $n m_x$ y $n q_x$ bajo el supuesto de que l_x varía en el intervalo $x, x+n$ en forma lineal y exponencial, llegando a las siguientes relaciones, ya vistas en la sección 2.6 (págs 69 a 71):

$$(68) \quad nq_x = \frac{2 n m_x}{2 + n m_x} \quad ; \quad (l_x \text{ lineal})$$

$$(70) \quad nq_x = 1 - e^{-n m_x} \quad ; \quad (l_x \text{ exponencial})$$

Luego representaron en un gráfico los valores de $n m_x$ contra los de $n q_x$, correspondientes a 33 tablas de

³⁷ Reed, L.J. y Merrell, M., 'A Short Method for ...', op.cit.

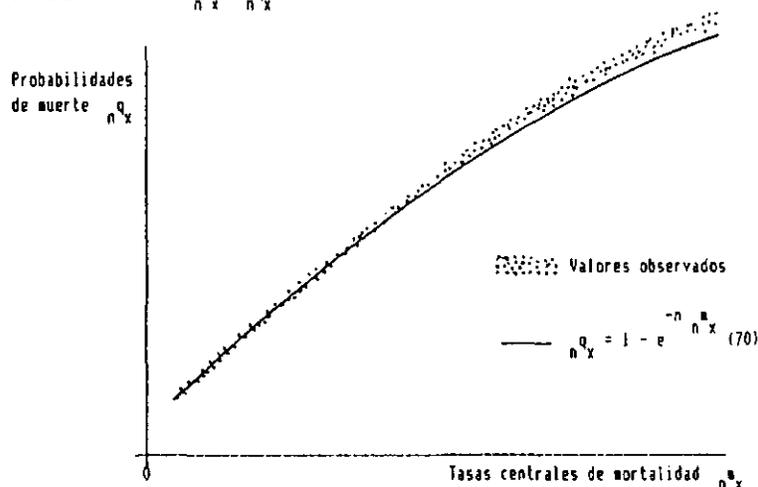
³⁸ Greville, T.M.E., 'Short Methods of ...', op.cit.

de vida de 1910 construidas por Glover para los Estados Unidos, por sexo, color, área geográfica y combinaciones de estos atributos. Los puntos de este diagrama tienden a una curva suave y poco dispersa, lo cual muestra que existe un grado bastante elevado de asociación entre la tasa de mortalidad de un intervalo de edades y la probabilidad de muerte del mismo intervalo, cualquiera sea la edad, el color, u otros factores involucrados.

En el mismo gráfico se representaron las relaciones (68) y (70), encontrándose una cierta concordancia con los puntos observados, aunque con algunas diferencias: la ecuación (70) empieza a caer por debajo de los puntos observados para los valores de ${}_n m_x$ más elevados (en el caso de tasas quinquenales la caída se produce cuando ${}_5 m_x$ es mayor de 20 por mil). Por su parte la relación (68) varía en forma menos consistente y no tiene la curvatura adecuada. En el gráfico siguiente se ilustra el comportamiento de la relación exponencial (70), con respecto a los valores observados.

Gráfico 44

RELACION ENTRE LOS VALORES DE ${}_n q_x$ Y ${}_n m_x$ OBSERVADOS Y DERIVADOS MEDIANTE LA RELACION EXPONENCIAL



En base a estas observaciones, Reed y Merrell agregaron en el exponente de la relación (70) un término correctivo de la forma:

$$(92) \quad -a \cdot n^3 - \frac{m^2}{n \cdot x}$$

para levantar la última parte de la curva. El mejor ajuste fue logrado por los autores para $a = 0.008$. De este modo se llegó a la relación general (91) ya indicada.

b) Respecto a las primeras edades, Reed y Merrell sostienen que la relación (91) sería también aplicable, si no fuera por la omisión de personas en el empadronamiento. Debido a la existencia de tales omisiones, proponen dos soluciones alternativas:

■ Una de ellas consiste en corregir la información básica y aplicar directamente la relación general (91), sea por edades simples o agrupadas. Sin embargo, Greville indica que en el tramo de mortalidad decreciente, el parámetro a de la relación (92) es negativo, y en consecuencia, la corrección que debe introducirse en el exponente, para estas primeras edades, debe ser positiva ³⁹.

Aunque el ajuste que se introduce con este término correctivo no es de mucha importancia para un intervalo de edad de solamente un año, según criterio de Greville sería preferible el uso de la relación (68) o (70) en este caso, ya que el ajuste adicional tiene una dirección equivocada.

³⁹ Greville, T.M.E., "Short Methods ...", op.cit.

■ La segunda opción sugerida por Reed y Merrell, consiste en desarrollar nuevas relaciones para estos grupos de edades, en las que el factor de corrección por omisiones esté incorporado, en cuyo caso los valores observados de ${}_n m_x$ pueden ser directamente usados para llegar a los valores de ${}_n q_x$. Tales relaciones son las siguientes:

$$(93) \quad q_0 = 1 - e^{-m_0(0.9539 - 0.5509 m_0)}$$

$$(94) \quad q_1 = 1 - e^{-m_1(0.9510 - 1.921 m_1)}$$

$$(95) \quad {}_3q_2 = 1 - e^{-3 \cdot {}_3m_2 - 0.008 (3) {}_3m_2^2}$$

donde la última expresión corresponde a la relación general (91), para un intervalo de edades $n=3$, ya que la omisión anteriormente mencionada no se considera usualmente presente en este grupo.



Ejercicio:

Dada la tasa central de mortalidad de la tabla masculina de Guatemala de 1950: ${}_5m_{80} = 0.1620$, calcular la probabilidad de muerte utilizando la relación exponencial (70) y la fórmula de Reed y Merrell (91). Calcular también el valor de la corrección que introduce el término correctivo (92).

Respuesta:

$$\text{Rel. (70): } {}_5q_{80} = 1 - e^{-5(0.1620)} = \underline{0.55514}$$

$$\begin{aligned} \text{Rel. (91): } {}_5q_{80} &= 1 - e^{-5(0.1620) - 0.008(5)^3(0.1620)^2} \\ &= 1 - e^{-0.8100 - 0.0262} \\ &= 1 - (0.44486)(0.97414) = \underline{0.56664} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el exponente del término correctivo vale en este caso particular -0.0262 , con lo cual el segundo término de la función exponencial resulta disminuido al 97.4 % y la probabilidad de muerte calculada con la fórmula de Reed y Merrell resulta un 2.1 % mayor. Si los cálculos se efectuaran para una edad más joven, o un país de menor mortalidad, las diferencias entre los valores obtenidos con las fórmulas (70) y (91) serían menores.

4.2.3 Método de referencia a una tabla estándar

En el capítulo 2, al analizar la relación entre la tasa central de mortalidad (${}_n m_x$) y la probabilidad de muerte (${}_n q_x$), se obtuvo la siguiente relación:

$$(71) \quad {}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{1 + (n - {}_n k_x) {}_n m_x}$$

que permiten calcular los valores de ${}_n q_x$, conociendo las tasas centrales de mortalidad y el número medio de años vividos en el grupo $x, x+n$ (${}_n k_x$).

Sobre la base de esta relación, se puede elaborar una tabla de vida tomando los valores de ${}_n k_x$ de otra tabla de mortalidad de un nivel de mortalidad similar, empleando la siguiente fórmula, vista en la sección 2.5:

$$(64) \quad {}_n k_x = \frac{{}_n L_x - n \cdot l_{x+n}}{{}_n d_x}$$

Tal procedimiento supone que los valores de ${}_n k_x$ de la tabla utilizada como base, son aplicables a la nueva tabla que va a ser construida.

Este método de elaboración de tablas mediante referencia a una tabla tipo, ha sido usado en la construcción de la serie anual de tablas abreviadas los Estados Unidos de 1946 a 1953, empleando como estándar la tabla completa de 1939-41. Posteriormente, la serie de tablas anuales de dicho país se continuó, utilizando como estándar la tabla completa de 1949-51 y siguientes. 40



Ejercicio:

Dado el valor de $5^m_{65} = 0.03506$, calcular la probabilidad de muerte 5^q_{65} correspondiente, por el procedimiento de referencia a una tabla estándar, utilizando como tipo la tabla completa masculina de Costa Rica de 1973, presentada en el anexo.

Respuesta:

Aplicando primero la relación (64), se obtiene:

$$5^k_{65} = \frac{313\ 704 - 5(57\ 216)}{10\ 509} = 2.629$$

Reemplazando luego los valores de 5^k_{65} y 5^m_{70} en la relación (71) resulta:

$$5^q_{65} = \frac{5(0.03506)}{1 + (5-2.629)0.03506} = \underline{0.16185}$$

Dicho sea de paso, el valor $5^m_{65} = 0.03506$ fue obtenido de la tabla masculina de México de 1970 presentada en el anexo. Puede verse allí que la probabilidad de muerte correspondiente es igual a 0.16182, un valor muy cercano al obtenido aquí.

* Shryock, H.S., and Siegel, J.S., The Methods and Materials of Demography, U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, 1971. Volumen 2, pág 445.

[]

4.3 Procedimiento completo de construcción de una tabla de vida abreviada

Después de haber visto algunos métodos principales para la elaboración de tablas abreviadas, en esta sección se resumirá el mecanismo completo de construcción de una tabla de vida abreviada, siguiendo el procedimiento más corrientemente utilizado en los países de América Latina.

Este procedimiento comprende una combinación de dos métodos, según el siguiente detalle:

- a) Para los menores de 5 años, se emplea
- el método de Greville de 1940 ⁴¹, (que se describe en 4.3.2.a), o bien
 - el método de Greville de 1970 ⁴², (que se describe en 5.3.1 y 5.3.2).
- b) Para mayores de 5 años, se emplea el método de Reed y Merrell ⁴³ (descrito en 4.2.2.a).

⁴¹ Greville, T.M.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1946.

⁴² National Center for Health Statistics, Methodology of the National and States Life Tables for the United States: 1969-1971, Maryland, 1975.

⁴³ Reed, L.J. y Merrell, M., "A Short Method for Constructing an ...", op.cit.

En general, para la elaboración de tablas de mortalidad pueden considerarse tres fases principales: la evaluación preliminar de las estadísticas de población, nacimientos y defunciones; el cálculo de las probabilidades de muerte de cada grupo de edades; y la derivación de las restantes funciones de la tabla.

4.3.1 Evaluación y ajuste preliminar de los datos.

Esta primera fase de la construcción de una tabla, está destinada a evaluar y corregir los errores y problemas de diverso tipo que presenta la información básica, especialmente las que se refieren a la omisión de personas censadas, y del número de muertes registradas, lo cual afecta directamente el nivel de mortalidad estimado.

El censo de población generalmente presenta omisiones de niños menores de cinco años, omisiones de hombres jóvenes, una exageración del número de personas de 60 años y más, y una subenumeración general de personas de todas las edades. Las estadísticas vitales, por su parte, contienen generalmente errores más importantes que los censos, por lo cual, en los países de América Latina, resulta siempre necesario hacer una evaluación de los datos básicos antes de construir una tabla de vida, o realizar otros trabajos donde interviene información demográfica.

Los diferentes procedimientos existentes para evaluar y ajustar los datos demográficos, son tema de otro curso dentro del Celade. Para mayores detalles puede consultarse el texto de Chackiel y Macció ⁴⁴ sobre el tema,

⁴⁴ Chackiel, J., y Macció, G., Evaluación y corrección de datos demográficos, CELADE, Serie B, No. 39, Santiago, Chile.

donde se citan también otros manuales y referencias. Se supone aquí, que la información básica se encuentra ya evaluada y corregida.

Otro problema de menor importancia, vinculado con la corrección preliminar de los datos, es el relativo al ajuste de la población, desde la fecha del censo hasta mediados de año. Para este propósito debe trasladarse la población hasta el 30 de junio del año al cual se refiere la tabla, para lo cual puede calcularse primero la población total al 30 de junio, mediante una tasa de crecimiento (r) apropiada -que puede ser la tasa de crecimiento intercensal-, ajustándose luego la población por edades en forma proporcional al número de personas.

En lo que se refiere al desglose por edades, las tablas abreviadas se elaboran generalmente por edades simples hasta los 5 años, y por grupos quinquenales a partir de esta edad, con un grupo abierto final alrededor de los 85 o 90 años.

En cuanto a la fecha a la cual se refiere la tabla de vida, lo más usual es hacer la tabla para el año en el cual se levantó el censo de población, a fin de tener una información más confiable del número de personas de cada grupo de edades. Respecto a las defunciones, se toma generalmente las muertes de 3 años alrededor del censo, con el propósito de disminuir el efecto de variaciones aleatorias, o bien de años que tengan una mortalidad particularmente alta o baja.

4.3.2 Cálculo de las probabilidades de muerte.

En general, todos los métodos de construcción de tablas, consideran por separado el cálculo de las probabilidades de muerte de 0 a 4 años de edad, y desde los 5 años en adelante, en vista de la distinta metodología utilizada. Para los menores de 5 años las tasas normalmente se obtienen a partir de la información de nacimientos y muertes de niños de 0 a 4 años, ya que la población censada de estas edades está frecuentemente subenumerada. En cambio desde los 5 años de edad en adelante, las tasas se calculan utilizando como información básica la población por grupos de edades proporcionada por el censo, y el número de muerte de cada grupo de edades obtenida del registro de defunciones.

a) Cálculo de las probabilidades de muerte de 0 a 4 años

Tal como se ha indicado anteriormente, para los menores de 5 años se emplea generalmente, en los países de América Latina, el método utilizado por Greville para la construcción de las tablas de mortalidad de los Estados Unidos de 1939-1941, o bien, el método seguido por el mismo autor para la elaboración de las tablas de 1969-1971. En esta sección se explicará el primero de ellos, mientras que en las secciones 5.3.1 y 5.3.2 del capítulo siguiente, dedicado a las tablas completas de mortalidad, se expone el segundo. En ambos casos las probabilidades se calculan por edades simples.

El método utilizado por Greville para la construcción de las tablas de vida de los Estados Unidos de 1939-

1941 45, consiste básicamente en descomponer el cálculo de las probabilidades de vida de cada edad en dos partes (que se simbolizan con las letras α y δ), con el propósito de tomar en consideración la experiencia completa de mortalidad de cada uno de los tres años considerados. A continuación se detallan las relaciones básicas necesarias y la forma de cálculo.

La probabilidad de muerte q_x puede escribirse:

$$(96) \quad q_x = 1 - p_x \quad ; \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3 \text{ y } 4$$

donde p_x representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta x de sobrevivir un año. Sobre la base de esta relación pueden obtenerse las probabilidades de muerte entre 0 y 5 años, expresando las p_x en función de dos probabilidades, en la siguiente forma:

$$(97) \quad p_x = \alpha^p p_x \cdot \delta^p p_x$$

siendo

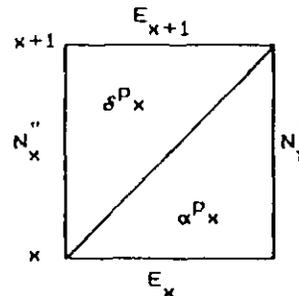
$$(98) \quad \alpha^p p_x = \frac{N'_x}{E_x}$$

$$(99) \quad \delta^p p_x = \frac{E_{x+1}}{N''_x}$$

donde:

$N'_x = N_x^z + N_x^{z+1} + N_x^{z+2}$ representa el número de personas de edad comprendida entre x y $x+1$ al 1º de enero de los años $z, z+1, z+2$

Gráfico 45



** Greville, T.M.E., "United States Life Tables and...", op.cit.

$N_x'' = N_x^{z-1} + N_x^z + N_x^{z+1}$ es el número de personas de edad comprendida entre x y $x+1$ al 1º de enero de los años $z-1$, z , $z+1$.

$E_x = E_x^{z-1} + E_x^z + E_x^{z+1}$ es el número de personas que alcanzan la edad x durante el período $z-1$ a $z+1$.

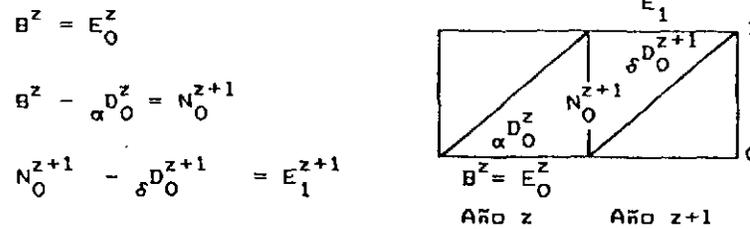
Conceptualmente ${}_a p_x$ representa la probabilidad que tiene una persona que alcanza la edad x durante el período $z-1$ a $z+1$, de llegar con vida al término del año en que cumple dicha edad, mientras que ${}_\delta p_x$ representa la probabilidad de que una persona de edad alcanzada x al principio de los años $z-1$, z y $z+1$, llegue con vida a la edad $x+1$. El producto de estas dos probabilidades da una probabilidad de sobrevivir referida a un intervalo de un año de edades.

Para el cálculo de los valores de E_x , N_x' y N_x'' se requieren los nacimientos de los años $z-6$ a $z+1$ (o sea de 8 años), corregidos por omisión, las defunciones corregidas de 0 a 4 años de edad para los mismos años calendario, y los factores de separación para las mismas edades y años.

Los factores de separación más importantes son los de menores de un año, puesto que sus valores varían mucho de un país a otro; para el resto de las edades puede tomarse directamente 0.50, o bien pueden utilizarse los factores de separación de Glover indicados en pág 31. Multiplicando las defunciones de cada edad por los factores de separación, se obtienen las muertes de cada generación ${}_a D_x$ y ${}_\delta D_x$.

Luego, restando los nacimientos de las defunciones de cada generación, se puede calcular (bajo el supuesto de población cerrada), la población a una edad cumplida (N_x), o exacta (E_x). Por ejemplo,

Gráfico 46



y así sucesivamente. Un diagrama de Lexis como el presentado en la página 163 puede facilitar los cálculos.

Una vez obtenidos los valores de E_x , N_x' y N_x'' , aplicando las relaciones (96) a (99) se obtienen las probabilidades de muerte q_x para las edades 0, 1, 2, 3 y 4.

b) Cálculo de las probabilidades de muerte desde los 5 años de edad en adelante.

Conforme a lo indicado en los puntos anteriores, en este tramo de edades se utiliza generalmente, en los países de América Latina, el método de Reed y Merrell 46. Aunque dicho procedimiento puede utilizarse para un intervalo de edades cualquiera, se considerará directamente en lo que sigue, el caso más frecuente de grupos quinquenales.

** Reed, L.J. y Merrell, M., "A Short Method for Constructing an ...", *op.cit.*

El punto de partida para el cálculo de las probabilidades de muerte en estas edades, son las tasas centrales de mortalidad de la población real, definidas en la siguiente forma:

$$(100) \quad 5^m_x = \frac{5^D_x}{5^N_x}$$

En el numerador se toma un promedio de las defunciones de los años $z-1$ a $z+1$, con el propósito de disminuir el efecto de las variaciones aleatorias. En el denominador, por su parte, se incluye la población media al 30 de junio del año z , siendo z el año en el cual se levantó el censo. Para trasladar la población a mediados de año, se utiliza generalmente la fórmula exponencial, con una tasa de crecimiento (r) apropiada, ajustándose luego la población por edades, en forma proporcional al número de personas.

Por ejemplo, si se levantó un censo de población el 5 de abril de 1980, se puede estimar la población total al 30 de junio de ese año mediante la relación:

$$N^{30-06-80} = N^{05-04-80} \cdot e^{r \cdot t}$$

siendo: r igual a la tasa de crecimiento intercensal, y

$$t = 86/365 = 0.2356.$$

Luego se puede calcular un coeficiente k , igual a la relación entre la población total a mediados de año con respecto al total censado,

$$k = \frac{N^{30-06-80}}{N^{05-04-80}} = e^{r \cdot t}$$

Multiplicado este coeficiente k , por la población censada de cada grupo de edades, se obtiene una estimación de la población por edades, trasladada a mediados de año.

■ Una vez calculadas las tasas centrales de mortalidad, es conveniente ajustarlas, para evitar que las irregularidades se trasladen a las diversas funciones de la tabla. Para ello el procedimiento más usado es el ajuste gráfico, imponiéndose la condición de que que las tasas ajustadas ${}_5m_x^a$, al ser aplicadas a la población, deben reproducir aproximadamente el total de defunciones de 5 años y más:

$$(101) \quad \sum_{x=5}^w {}_5N_x \cdot ({}_5m_x^a) \approx \sum_{x=5}^w {}_5N_x \cdot ({}_5m_x) = D_{5+}$$

Es conveniente controlar además, que el cociente entre las tasas de mortalidad de los grupos de edades sucesivos ${}_5m_{x+5}^a / {}_5m_x^a$ varien con cierta regularidad en el tramo de mortalidad creciente. Por ejemplo, no sería apropiado que entre los 50 y los 80 años de edad, esta relación diera alternativamente valores crecientes y decrecientes, lo cual muy probablemente se debería a errores de lectura gráfica.

El siguiente cuadro de trabajo puede facilitar los cálculos:

Grupos de edades	Población al 30-6-2	Defunciones medias	Tasas de mortalidad		Defunciones ajustadas	Cociente de tasas de ${}_5m_{x+5}^a / {}_5m_x^a$
	${}_5N_x$	${}_5D_x$	observadas ${}_5m_x$	ajustadas ${}_5m_x^a$	${}_5D_x = {}_5N_x \cdot {}_5m_x^a$	
5 - 9						variación suave
10 - 14						
15 - 19						
.....						
80 - 84						
85 y más						
Total		D_{5+}			D_{5+}^a	

■ La etapa fundamental en la elaboración de la tabla de mortalidad, es la conversión de las tasas centrales de mortalidad en probabilidades de muerte. Tan es así, que podría decirse que un método clásico de construcción de tablas abreviadas difiere de otro, según el supuesto que relaciona estas dos funciones.

La relación general desarrollada por Reed y Merrell para un intervalo de edades n cualquiera, es la (91), la cual, para el caso de grupos quinquenales, toma la forma:

$${}_5q_x = 1 - e^{-5 {}_5m_x - 0.008 (5) {}_5m_x^2}$$

$$(102) \quad \boxed{{}_5q_x = 1 - e^{-5 {}_5m_x - 5m_x^2}}$$

Para facilitar su aplicación, Reed y Merrell calcularon tablas con los valores de ${}_5m_x$ (de milésimo en milésimo), los valores correspondientes de ${}_5q_x$ y el incremento de ${}_5q_x$, los cuales se reproducen en la tabla 6 del anexo. Sin embargo, si se dispone de una calculadora que incluya la función e^x , los cálculos pueden efectuarse más fácilmente, sin recurrir al procedimiento más lento de la interpolación.

4.3.3 Cálculo de las restantes funciones de la tabla abreviada

Una vez obtenidos los valores de ${}_nq_x$, las restantes funciones de la tabla se calculan fijando como raíz de la tabla $l_0 = 100\ 000$ (u otro valor apropiado), y utilizando las relaciones siguientes, ya vistas en los capítulos 1 y 2:

a) Número de muertes entre x , $x+n$:

$$(10) \quad l_x \cdot nq_x = n^d_x$$

b) Número de sobrevivientes de edad $x+n$:

$$(11) \quad l_x - n^d_x = l_{x+n}$$

c) Tiempo vivido por la generación entre las edades x , $x+n$:

i. Para $x = 0, 1, 2, 3, 4$

$$(24) \quad L_x = f_x l_x + (1 - f_x) l_{x+1}$$

siendo f_x el factor de separación de las muertes.

ii. Para $x \geq 5$

$$(23) \quad {}_5L_x = \frac{{}_5^d_x}{{}_5^m_x}$$

iii. Para el grupo abierto final

$$(27) \quad {}_wL_x = \frac{{}_w^d_x}{{}_w^m_x} = \frac{l_x}{{}_w^m_x}$$

d) Relación de supervivencia de las personas de x a $x+4$ años, al cabo de 5 años:

i. Para las edades centrales:

$$(72) \quad {}_5^P_{x, x+4} = \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x}$$

ii. Para los nacimientos:

$$(73) \quad S^P_b = \frac{S^L_0}{5 \cdot l_0}$$

iii. Para el grupo abierto final:

$$(74) \quad S^P_{x \text{ y más}} = \frac{L_{x+5 \text{ y más}}}{L_{x \text{ y más}}} = \frac{T_{x+5}}{T_x}$$

e) Tiempo vivido por la generación entre las edades x , w :

$$(36) \quad T_x = \sum_{a=x}^w n^L_a$$

f) Esperanza de vida a la edad x :

$$(37) \quad e^o_x = \frac{T_x}{l_x}$$

[]

4.4 Métodos indirectos de construcción de tablas abreviadas

En varios países en desarrollo las estadísticas de muertes contienen todavía omisiones de importancia, que impiden derivar tablas de mortalidad por los denominados métodos clásicos. Para suplir en parte estas deficiencias, se han desarrollado algunos métodos alternativos para hacer estimaciones y elaborar tablas de mortalidad a partir de otras fuentes.

En esta sección se expondrá primero el método de las relaciones de supervivencia intercensales y luego se hará una ligera referencia a la elaboración de tablas a partir de preguntas especiales incluidas en censos o encuestas.

4.4.1 El método de las relaciones de supervivencia intercensales fue utilizado por primera vez en los países de América Latina por Giorgio Mortara, para hacer estimaciones de la mortalidad del Brasil, a partir de los censos de 1940-47. En los últimos años William Brass ha propuesto una variante del mismo, ajustando la información mediante el sistema logito, con ayuda de una tabla de referencia 48.

La idea del método es muy simple. Se basa en el supuesto de que si se tiene dos censos de población sepa-

⁴⁷ Mortara, G., La mortalidad de la población nativa del Brasil, CELADE, Serie D. No. 32, Santiago, Chile.

⁴⁸ Brass, W., 'Seminario sobre métodos...', Op.cit.

rados por n años, bajo ciertas condiciones, las personas que en el segundo censo tienen $x+n$ años, son los sobrevivientes de aquéllas que en el primero tenían x años. En lo que sigue se considerarán tres casos, para $n=5$, $n=10$, y finalmente para un n cualquiera.

a) Caso en que $n=5$.

Supóngase en primer lugar que se cuenta con dos censos de población levantados en los años z y $z+5$, cuya población por grupos de edades es la siguiente:

Grupos de edades	$N_{x, x+4}^z$	$N_{x, x+4}^{z+5}$
0-4	N_{0-4}^z	N_{0-4}^{z+5}
5-9	N_{5-9}^z	N_{5-9}^{z+5}
10-14	N_{10-14}^z	N_{10-14}^{z+5}
.....

i. Si se considera que las personas de 5 a 9 años de edad del segundo censo son los sobrevivientes de las personas de 0 a 4 años del primero, entonces pueden establecerse relaciones de supervivencia de la forma:

$$(103) \quad {}_5P_{0-4}^{z, z+5} = \frac{N_{5-9}^{z+5}}{N_{0-4}^z}$$

o, en general, para un grupo de edades cualquiera:

$$(104) \quad \boxed{{}_5P_{x, x+4}^{z, z+5} = \frac{N_{x+5, x+9}^{z+5}}{N_{x, x+4}^z}}$$

ii. Para que sea aplicable, este método requiere de algunos supuestos, los más importantes de los cuales son los siguientes:

- 1) Que la población sea cerrada, o sea que no haya movimientos migratorios (o que éstos sean de poca importancia).
- 2) Que no haya mala declaración de la edad.
- 3) Que no haya omisión, o bien que la omisión sea proporcionalmente igual en los dos censos.

En el primer caso -si ocurre una inmigración de personas-, el problema del cálculo de las relaciones de supervivencia puede solucionarse considerando la población nativa. Por su parte la mala declaración de la edad produce relaciones de supervivencia irregulares, que en algunos casos llegan a ser superiores a la unidad, aunque los errores se compensan unos con otros. El supuesto más importante es el tercero, ya que si la omisión de los censos es muy diferente, entonces el método no puede aplicarse.

iii. Una limitación importante del método así planteado, es que no proporciona información para el cálculo de la relación de supervivencia al nacimiento ${}_5P_b$, la cual tiene mucha incidencia en el nivel general de la mortalidad.

■ Una estimación de la mortalidad al comienzo de la vida ${}_5P_b$ puede derivarse a partir de las relaciones de supervivencia de los primeros 30 o 35 años de edad, ya obtenidas, estimando el nivel de cada una de ellas en una tabla modelo y seleccionando luego la mediana de dichos niveles. Por ejemplo, dadas las relaciones de supervivencia masculinas de los primeros siete grupos de edades, en el cuadro siguiente se han obtenido los niveles de

cada una de ellas en las tablas de Coale-Demeny, familia Oeste, y el número de orden de dichos niveles; el nivel más alto corresponde a la relación de supervivencia del grupo 20-24, el segundo al grupo 15-19, etc., correspondiendo la mediana al nivel 17.5:

Grupos de edades	$P_{5^x, x+4}$	Nivel en Coale-Demeny	Número de orden del nivel
0-4	0.9774	18.0	3
5-9	0.9905	<u>17.5</u>	4 (mediana)
10-14	0.9887	17.0	6
15-19	0.9878	19.0	2
20-24	0.9866	19.5	1
25-29	0.9744	16.0	7
30-34	0.9733	17.1	5

Interpolando este nivel 17.5 en las tablas modelo de Coale-Demeney, resulta una relación de supervivencia al nacimiento igual a 0.9092. Se obtiene de esta manera, una estimación de la relación de supervivencia al nacimiento, en función de los niveles de mortalidad intercensales de la población juvenil y adulta.

■ Una mejor estimación de la mortalidad al comienzo de la vida se puede calcular, si en el segundo censo se han incluido las preguntas sobre el número total de hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes, que se formulan a las mujeres de 15 años y más. A partir de esta información puede obtenerse las probabilidades de muerte desde el nacimiento hasta los 2, 3 y 5 años de edad, las cuales están

** Brass, W., Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados, CELADE, Serie E. No.14, Santiago, Chile, 1974.

estrechamente relacionadas con la relación de supervivencia al nacimiento, que puede derivarse con ayuda de una tabla modelo. Por ejemplo, a partir de las probabilidades de muerte masculinas dadas en el siguiente cuadro, se han obtenido primero los valores de l_x , luego el nivel de cada uno de estos valores en las tablas de Coale-Demeny, familia Oeste, y su nivel promedio 18.4, el cual corresponde, en las tablas modelo, a una relación de supervivencia al nacimiento igual a 0.9218.

Edad x	q_x masculinas	l_x	Nivel en Coale-Demeny
2	0.07204	92 796	19.0
3	0.09264	90 736	18.0
5	0.09650	90 350	18.2
Nivel medio.....			18.4
s_b^p (del nivel medio 18.4).....			= 0.9218

De esta manera, a través de las preguntas sobre hijos nacidos vivos y sobrevivientes, o de la mediana de las relaciones de supervivencia intercensales, puede completarse una estimación de la mortalidad para todas las edades.

iv. En general, las relaciones de supervivencia intercensales, obtenidas por este método, contienen irregularidades que es necesario ajustar. Para ello pueden representarse en un gráfico, junto a las relaciones de supervivencia de una tabla modelo y de una o dos tablas de mortalidad de otros países de la región de mortalidad

similar. Con toda esta información se hace un ajuste gráfico a mano alzada, tratando de no alterar el nivel general de mortalidad, y se leen las relaciones de supervivencia ajustadas. El juego de valores de ${}_5P_{x,x+4}$ así obtenido, representa una estimación del nivel de la mortalidad, que puede utilizarse para fines de proyecciones de población, o para estimar el nivel general de mortalidad implícito (es decir, de la esperanza de vida al nacer), mediante las fórmulas (78) o (79) de las páginas 82 y 83.

v. Una vez obtenidas las relaciones de supervivencia ajustadas, se calculan las restantes funciones de la tabla.

■ Siguiendo el orden lógico -de acuerdo con la información disponible-, se calcula primero el tiempo vivido (o la población estacionaria) ${}_5L_x$. Partiendo de la definición de las relaciones de supervivencia, se tiene:

$${}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{5 \cdot l_0} ; \text{ de donde: } {}_5L_0 = 5 l_0 \cdot {}_5P_b$$

$${}_5P_{0-4} = \frac{{}_5L_5}{{}_5L_0} ; \text{ de donde: } {}_5L_5 = {}_5L_0 \cdot {}_5P_{0-4}$$

y así sucesivamente.

■ Luego se obtiene la función l_x . El paso de ${}_5L_x$ a l_x es la etapa más crítica de la construcción de una tabla por este procedimiento, por falta de una relación general que resulte válida para todos los niveles de mortalidad. La fórmula siguiente, derivada por Bocaz 50,

** Bocaz, A., Cálculo de los valores de l_x , conocidos los ${}_5L_x$, CELADE, inédito.

se ha utilizado en varias oportunidades con resultados bastante satisfactorios:

$$(105) \quad {}_30l_x = 2 {}_5L_{x-5} + 5 {}_5L_x - 5L_{x+5}$$

La función l_x también podría obtenerse desagregando los valores de ${}_5L_x$ por edades simples, mediante alguna fórmula corriente (por ejemplo usando los multiplicadores de Beers), y luego haciendo un promedio simple de los dos valores vecinos de ${}_1L_x$.

$$(106) \quad l_x = \frac{{}_1L_{x-1} + {}_1L_x}{2} ; \text{ para } x = 5, 10, 15, \dots$$

■ Teniendo los valores de l_x , las restantes funciones pueden calcularse sin dificultad, mediante las siguientes relaciones conocidas:

$$(5) \quad n^d_x = l_x - l_{x+n}$$

$$(8) \quad n^q_x = \frac{n^d_x}{l_x}$$

$$(36) \quad T_x = \sum_{a=x}^w n^L_a$$

$$(37) \quad e_x^o = \frac{T_x}{l_x}$$

b) Caso en que $n = 10$.

Si el período entre los dos censos es de 10 años, entonces las relaciones de supervivencia intercensales toman la siguiente forma:

$$(107) \quad 10^P_{x,x+4} = \frac{N_{x+10, x+4}^{z+10}}{N_{x,x+4}^z}$$

En este caso se hace necesario derivar relaciones de supervivencia por un periodo de 5 años (${}_5^P_{x,x+4}$), lo cual puede efectuarse de la manera siguiente:

Dado que

$$10^P_{x,x+4} = ({}_5^P_{x,x+4}) ({}_5^P_{x+5,x+9})$$

$$10^P_{x-5,x+1} = ({}_5^P_{x-5,x-1}) ({}_5^P_{x,x+4})$$

entonces el producto de dos relaciones de supervivencia por grupos quinquenales de edades, proyectadas por diez años, puede verse como el producto de cuatro relaciones quinquenales, es decir,

$$({}_{10}^P_{x-5,x-1}) ({}_{10}^P_{x,x+4}) = ({}_5^P_{x-5,x-1}) ({}_5^P_{x,x+4}) ({}_5^P_{x,x+4}) ({}_5^P_{x+5,x+9})$$

Este producto es aproximadamente igual a $({}_5^P_{x,x+4})^4$ y por lo tanto su raíz cuarta daría:

$$(108) \quad {}_5^P_{x,x+4} = \sqrt[4]{({}_{10}^P_{x-5,x-1}) ({}_{10}^P_{x,x+4})}$$

que es la llamada fórmula de la raíz cuarta. Permite calcular las relaciones de supervivencia por 5 años, a partir de las relaciones intercensales correspondientes a un periodo de 10 años. Dicha fórmula tiene la ventaja adicional de que permite efectuar un primer suavizamiento de la información.

Una vez obtenidos los valores de ${}_5^P_{x,x+4}$, éstos se ajustan y se calculan las restantes funciones de la tabla en la forma ya mencionada en las págs 156-158.

c) Caso en que n ≠ 10.

Si se supone, por último, que el intervalo intercensal es un valor n cualquiera, como 8, 11 o 12 años, entonces se puede aplicar el siguiente procedimiento que ha sido propuesto por Brass 51.

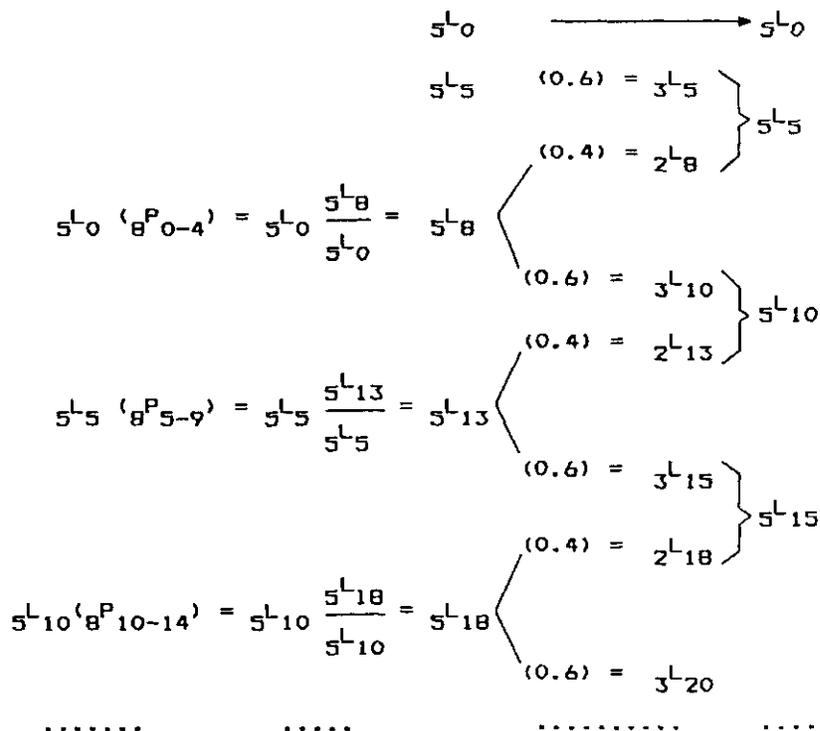
Supóngase para simplificar que $n = 8$. En este caso se obtendrán relaciones de supervivencia intercensales de la siguiente forma:

$${}_8P_{0-4} ; {}_8P_{5-9} ; {}_8P_{10-14} ; \dots$$

Como en los casos anteriores, se requiere una estimación complementaria de la mortalidad al comienzo de la vida, la cual se obtiene con la información de hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes, o bien, si estas preguntas no se investigaron en el segundo censo, mediante la mediana de las relaciones de supervivencia intercensales, en la forma ya vista. Una vez determinado el nivel medio de una tabla modelo, por interpolación se estiman los valores de ${}_5L_0$ y ${}_5L_5$.

Con esta información y las relaciones de supervivencia intercensales, se pueden calcular los valores de ${}_5L_x$, mediante las siguientes relaciones en cadena. Para el primer grupo de edades, se toma directamente el valor de ${}_5L_0$ obtenido anteriormente con ayuda de la tabla modelo. A su vez, multiplicando el valor estimado de ${}_5L_5$ por 0.6, se obtiene una estimación aproximada de ${}_3L_5$. Luego el producto de ${}_5L_0$ por ${}_8P_{0-4}$ da una estimación de ${}_5L_8$, la cual se descompone en dos partes, ${}_2L_8$ y ${}_3L_{10}$, con los factores 0.4 y 0.6. Sumando ${}_3L_5$ con ${}_2L_8$, se estima ${}_5L_5$, y así sucesivamente:

⁵¹ Brass, W., "Seminario sobre metodos...", Op.cit.



Una vez obtenidos los valores de 5^L_x , para $x = 0, 5, 10\dots$, pueden seguirse dos caminos. El primero, es calcular las relaciones de supervivencia $5^P_{x,x+4}$, las cuales se ajustan en forma similar a los casos anteriores (ver págs 156-157), calculándose luego las restantes funciones de la tabla. El segundo, consiste en ajustar directamente los valores de 5^L_x , con ayuda de una tabla estándar de referencia, utilizando el sistema logito. Este procedimiento puede verse en el documento DS, N^o 9, referido al seminario sobre métodos para medir variables demográficas, de W. Brass 52.

** Brass, W., "Seminario sobre métodos...", *Op.cit.*, págs. 105 a 117.

4.4.2 Elaboración de tablas a partir de preguntas especiales

Este procedimiento, como el anterior, se utiliza cuando las estadísticas vitales contienen deficiencias de importancia. Ante la necesidad de obtener estimaciones de la mortalidad (y la fecundidad) en los países de América Latina, se han desarrollado en los últimos años varios métodos para hacer estimaciones a través de preguntas demográficas especiales incluidas en censos o encuestas. En relación con la mortalidad, las preguntas más empleadas son las de hijos nacidos vivos, hijos sobrevivientes y orfandad de madre. Las dos primeras, como ya se ha indicado, permiten estimar la mortalidad al comienzo de la vida, mientras que la última está asociada con la mortalidad femenina adulta. Combinando esta información se puede derivar una tabla de mortalidad femenina para todas las edades 53 54.

Con carácter más experimental se han incluido en censos de prueba y en diversas encuestas demográficas otras preguntas, como las de orfandad de padre, viudez del primer cónyuge, orfandad del hijo mayor y sobrevivencia de hermanos, con las cuales se pueden elaborar tablas para la población masculina.

Para una explicación detallada de estos métodos puede consultarse las referencias (10), (24) y (26), citadas en la bibliografía final.

⁵³ Brass, M., 'Seminario sobre métodos...', Op.cit.

⁵⁴ Chackiel, J., y Ortega, A., Tablas de mortalidad femenina de Guatemala, Honduras y Nicaragua, CELADE, Serie A. No.1033, San José, Costa Rica.

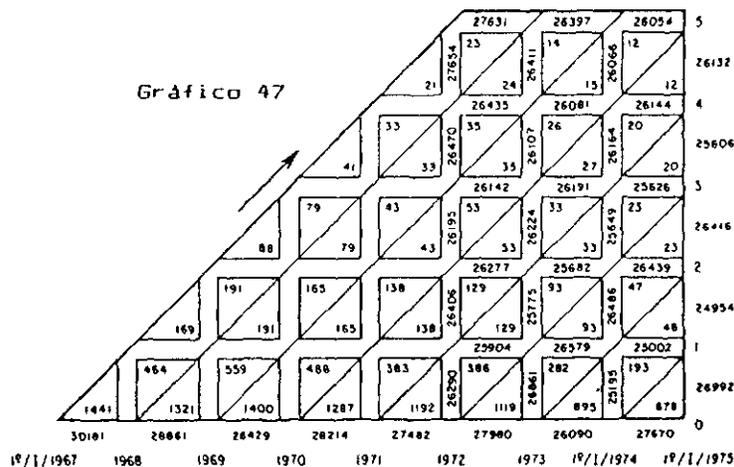


EJERCICIOS DEL CAPITULO 4
(Ver respuestas al final del libro)

1. -A partir de la información sobre nacimientos, defunciones y población por edades corregida, correspondiente a la población femenina de Costa Rica, presentada en el diagrama de Lexis siguiente, calcular las probabilidades de muerte

q_x ; para $x = 0, 1, 2, 3$ y 4 ,

del periodo 1972-1974, por el método de Greville presentado en la sección 4.3.2.a).



2. -En base a las probabilidades de muerte
- $q_0 = 0.04356$; $q_1 = 0.00689$; $q_2 = 0.00278$
- obtenidas en el ejercicio anterior, calcular la probabilidad de muerte conjunta, para los primeros tres años de vida (${}_3q_0$).

3. -Empleando la fórmula de Reed y Merrell para $n = 5$,

$$(102) \quad {}_5q_x = 1 - e^{-5({}_5m_x - 5m_x^2)}$$

calcular las probabilidades de muerte ${}_5q_x$, correspondientes a las siguientes tasas centrales de mortalidad:

Grupos de edades	${}_5m_x$
5- 9	0.000715
10-14	0.000440
15-19	0.000736
20-24	0.000960

4. -Utilizando las probabilidades de muerte de 0 a 25 años de edad, obtenidas en los ejercicios 1 y 3 (pueden tomarse directamente de las respuestas a tales ejercicios),

a) calcular los valores de l_x , ${}_n d_x$ y ${}_n L_x$.

b) verificar que el tiempo total vivido en el tramo de 0 a 25 años de edad, sea ${}_{25}L_0 = 2\ 353\ 140$.

Conforme al procedimiento utilizado habitualmente, para el cálculo del tiempo vivido, se usará el factor de separación en el primer año de vida ($f_0 = 0.2390$), trapecios para las edades 1, 2, 3 y 4, y la fórmula derivada de la tasa central de mortalidad en los grupos quinquenales restantes.

5. -Dadas las siguientes tasas centrales de mortalidad, para cuatro grupos de edades seleccionados, tomadas de la tabla femenina de Guatemala de 1950, se pide:

- a) calcular las probabilidades de muerte correspondientes, empleando la fórmula de Greville:

$$(88) \quad n^q_x = \frac{n^m_x}{\frac{1}{n} + n^m_x \left[\frac{1}{2} + \frac{n}{12} (n^m_x - \ln c) \right]}$$

suponiendo $\ln c = 0.09$.

- b) Comparar los resultados con las probabilidades de muerte obtenidas por el método de Reed y Merrell, que también se incluyen.

Grupos de edades	5^m_x	5^q_x (R y Merrell)
10-14	0.00600	0.02959
30-34	0.01080	0.05268
50-54	0.01780	0.08544
70-74	0.06400	0.27682

6. -Recalcular la probabilidad de muerte del grupo 50-54 del ejercicio anterior, por el mismo método de Greville, suponiendo esta vez que $\ln c$ es igual a 0.08 y 0.10, con el fin de determinar el efecto de este parámetro en las probabilidades de muerte que se derivan.

7. -Demostrar que $\frac{d}{dx} n^L_x = -n^d_x$

(Esta relación es utilizada por Greville para deducir la relación (88), que permite convertir las tasas centrales de mortalidad en probabilidades de muerte).

8. -Dada la tasa central de mortalidad $m_0 = 0.05762$, tomada de la tabla masculina de Costa Rica de 1973 presentada en el anexo, calcular la probabilidad de muerte del primer año de vida q_0 ,

a) empleando la fórmula exponencial aproximada:

$$(70) \quad {}_nq_x = 1 - e^{-n {}_n m_x}$$

b) utilizando la relación general de Reed y Merrell

$$(91) \quad {}_nq_x = 1 - e^{-n {}_n m_x - 0.008 n^3 {}_n m_x^2}$$

c) a partir de la fórmula (93) desarrollada por Reed y Merrell para el primer año de vida, la cual incorpora un factor de corrección por omisiones.

$$(93) \quad q_0 = 1 - e^{-m_0(0.9539 - 0.5509 m_0)}$$

Comparar los resultados con la probabilidad de muerte $q_0 = 0.05520$, correspondiente a la tabla de vida de Costa Rica mencionada.

9. -Conociendo el valor de la tasa central de mortalidad $5m_{50} = 0.013455$, obtenida de la tabla masculina de México de 1970 presentada en el anexo, calcular la probabilidad de muerte $5q_{50}$, por el procedimiento de referencia a una tabla estándar, utilizando como tipo la tabla abreviada femenina de México de la misma fecha. Comparar el resultado con la probabilidad de muerte $5q_{50} = 0.06523$, obtenida en dicha tabla masculina.

10. -Dada la información presentada en el cuadro 1, correspondiente a la población nativa de El Salvador, masculina, por grupos de edades, según los censos de 1961 y 1971, se pide:

a) Calcular las relaciones de supervivencia intercensales ${}_{10}P_{x,x+4}$

b) Estimar relaciones de supervivencia referidas a períodos de 5 años, mediante la relación aproximada:

$$(108) \quad {}_5P_{x,x+4} \approx \sqrt[4]{({}_{10}P_{x-5,x-1}) ({}_{10}P_{x,x+4})}$$

c) Obtener una estimación de ${}_5P_b$ y ${}_5P_{0-4}$. Para ello:

i. Se utilizarán los valores de $l_2 = 0.8531$, $l_3 = 0.8481$ y $l_5 = 0.8224$ estimados a partir de la información censal sobre hijos nacidos vivos e hijos sobrevivientes.

ii. Entrando con estos valores en las tablas modelo de Coale-Demeny, familia Oeste, se determinará un nivel promedio de mortalidad que correspondería al nivel de las dos relaciones de supervivencia buscadas.

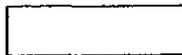
d) Utilizando la relación (78) o (79) de las páginas 82 y 83, obtener una estimación de la esperanza de vida al nacer.

Cuadro 1

EL SALVADOR: POBLACION NATIVA MASCULINA, SEGUN LOS CENSOS DE 1961 Y 1971. CALCULO DE RELACIONES DE SUPERVIVENCIA INTERCENSALES.

Grupos de edades	Población nativa		Relaciones de supervivencia	
	1961	1971	$10^P_{x,x+4}$	$5^P_{x,x+4}$
S^P_b			
0-4	241 398	-		
5-9	193 586	-		
10-14	159 828	238 492		
15-19	117 358	174 058		
20-24	101 369	142 697		
25-29	80 798	108 893		
30-34	72 849	98 303		
35-39	69 931	90 014		
40-44	54 748	73 923		
45-49	43 556	58 549		
50-54	37 066	47 341		
55-59	24 577	33 594		
60-64	28 620	33 473		
65-69	14 078	20 791		
70-74	10 181	18 044		
75-79	12 840 ^a	8 847		
80-84		5 182		
85 y+		4 095		

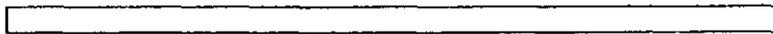
a Población de 75 años y más.





Capítulo 5

TABLAS COMPLETAS DE MORTALIDAD



5.1 Introducción

Aunque las tablas abreviadas de mortalidad proporcionan información suficiente para la mayoría de los propósitos demográficos, hay diversos problemas que requieren del auxilio de tablas completas. Tal es el caso por ejemplo, de la elaboración de proyecciones de población por edades simples, la estimación del número de personas en edad escolar, la estimación retrospectiva del número de nacimientos de cada año a partir de información censal, y, en general, cualquier análisis en que las edades o el período de tiempo que se consideran no son múltiplos de cinco, en cuyo caso la información básica necesaria no aparece en las tablas abreviadas.

Entre los diversos métodos disponibles para elaborar tablas completas, cabe destacar los elaborados por Greville para la preparación de las tablas nacionales y regionales de los Estados Unidos de 1940, 1960 y 1970 ⁵⁵ 56, 57. Los respectivos informes, citados al pie de página, contienen una detallada exposición del método aplicado, la información básica necesaria y los resultados alcanzados. En especial el primero de estos documentos, publicado en 1946, constituye un verdadero modelo de informe sobre esta materia.

En este capítulo se explicarán las diversas fases que comprende la construcción de una tabla completa, siguiendo la metodología utilizada por Greville en la construcción de las tablas de los Estados Unidos de 1970. Dicha metodología comprende cuatro aspectos principales: el ajuste preliminar de los datos, las fórmulas necesarias para el cálculo de las probabilidades de muerte, el suavizamiento de dichas tasas, y la derivación de las restantes funciones de la tabla.

De estos cuatro aspectos cabe destacar, el método de suavizamiento de las tasas de mortalidad utilizado por Greville, que resulta de gran interés para el suavizamiento de cualquier información demográfica, puesto que permite al usuario respetar la información básica en la medida deseada. Por ello se lo describe aquí con bastante detalle, en la sección 5.4.

⁵⁵ Greville, T.M.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, 1946

⁵⁶ U.S. Department of Health, Education and Welfare, Methodology of the National, Regional and State Life Tables for the United States: 1959-1961, Volumen I, No.4, Washington, D.C. 1967.

⁵⁷ National Center for Health Statistics, Methodology of the National and States Life Tables for the United States: 1969-1971, Maryland, 1975.

5.2 Ajuste preliminar de los datos

Esta primera etapa está destinada a corregir los errores y problemas de diverso tipo que afecta a la información, especialmente aquellos que se refieren a la omisión de personas tanto en el censo como en las estadísticas vitales, el ajuste de la población desde la fecha del censo hasta mediados del período al cual se refiere la tabla, la distribución del número de personas y de las defunciones de edad desconocida, etc., puntos sobre los cuales ya se hizo mención en la sección 4.3.1 del capítulo 4, referido a la construcción de tablas abreviadas.

Para la construcción de la tabla de mortalidad de los Estados Unidos de 1969-1971, se tomó directamente la población censada en 1970, con un pequeño ajuste efectuado por la Oficina de Censos ⁵⁸, principalmente en lo referido al número de personas de edad avanzada, mientras que en las defunciones sólo se hizo una distribución de las muertes de edad desconocida en forma proporcional al número de muertes de cada grupo.

Los datos básicos utilizados en dicha tabla fueron: las defunciones ocurridas de los años 1969 a 1971, la población corregida del censo efectuado el 10 de abril de 1970 y los nacimientos registrados de 1967 a 1971. La población y las defunciones estaban disponibles por edades simples de 1 a 5 años y por grupos quinquenales en las edades siguientes. Se contaba también con las defunciones para cuatro subdivisiones del primer año: menores de un día, 1 a 6 días, 7 a 27 días y 28 a 364 días.

⁵⁸ Greville, T.N.E., "United States Life Tables and ...", *Op.Cit.*

El cálculo de las tasas se hizo directamente con la población al 19 de abril de 1970, teniendo en cuenta que la corrección que resultaba al desplazarla a mediados de año era muy pequeña (del orden del 0.3 por ciento) y las posibilidades de error subyacente en los datos básicos.

5.3 Cálculo de las probabilidades de muerte

Se considera por separado el cálculo de las probabilidades de muerte de los menores de 2 años, de 2 a 4 años y desde los 5 años de edad en adelante, en cuyos tramos se utilizaron procedimientos distintos.

5.3.1 Probabilidades de muerte para menores de dos años.

En estas edades los cálculos se apoyan en las estadísticas de nacimientos y defunciones, dejando de lado los datos del censo, los cuales generalmente están subestimados en estas primeras edades. Además, la metodología basada en información de nacimientos tiene la ventaja de obtener un denominador más confiable, referido a todo el periodo de 3 años, que el provisto por la población enumerada, que se refiere sólo al momento del censo.

En primer lugar se calcularon los valores de t_x^d , el número de muertes ocurridas entre las edades exactas x y $x+t$ en la tabla de vida, mediante la fórmula:

(109)

$$t_x^d = l_0 t_x^D / t_x^E$$

donde l_0 es la raíz de la tabla, t_x^D simboliza el número de muertes ocurridas en la población real, en los años

1969 a 1971, entre las edades exactas $x, x+t$, y ${}_tE_x$ simboliza un denominador apropiado que, para los intervalos de edades considerados, toma la forma indicada en el cuadro 2. Estos valores de ${}_tE_x$ están basados en el supuesto de distribución uniforme de los nacimientos, dentro de cada uno de los años, y de las defunciones, dentro de cada intervalo de edades considerado. Los intervalos están dados en edades exactas.

Cuadro 2

DENOMINADORES ${}_tE_x$ USADOS PARA EL CALCULO DE LAS DEFUNCIONES DE MENORES DE DOS AÑOS

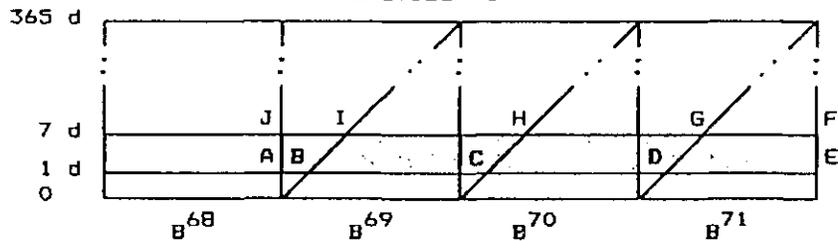
Intervalo de edades x a $x+t$	Denominadores (${}_tE_x$)
0-1 día...	$\frac{1}{730} (B^{1968} + 730B^{1969} + 730B^{1970} + 729B^{1971})$
1-7 días..	$\frac{1}{730} (8 B^{1968} + 730B^{1969} + 730B^{1970} + 722B^{1971})$
7-28 días.	$\frac{1}{730} (35B^{1968} + 730B^{1969} + 730B^{1970} + 695B^{1971})$
28-365 días	$\frac{1}{730} (393B^{1968} + 730B^{1969} + 730B^{1970} + 729B^{1971})$
1-2 años..	$\frac{1}{2} (B^{1967} + 2 B^{1968} + 2 B^{1969} + B^{1970})$

Si el cálculo de ${}_1d_0$ se hace sin considerar subdivisiones dentro del primer año de vida, lo cual es más frecuente para propósitos demográficos, entonces el denominador ${}_1E_0$ debe calcularse utilizando el factor de separación f_0 , resultando:

$$(110) \quad {}_1E_0 = f_0 B^{68} + B^{69} + B^{70} + (1-f_0) B^{71}$$

Los valores numéricos de los coeficientes de los denominadores ${}_tE_x$ pueden reproducirse fácilmente con ayuda de un diagrama de Lexis. Por ejemplo, para el intervalo de 1 a 7 días, las defunciones de 1969-1971 corresponden en el diagrama siguiente, al área sombreada AEFJ.

Gráfico 48



De ese total se tiene que:

- a) Las defunciones ocurridas en la superficie ABIJ corresponden a nacimientos de 1968. Dicha superficie representa

$$\frac{1}{365} + \frac{1}{2} \frac{6}{365} = \frac{8}{730}$$

de la superficie (del grupo de 1 a 7 días) correspondiente a un año completo.

- b) Las defunciones ocurridas en BCHI corresponden a nacimientos de 1969. Dicha superficie corresponde a un año completo.
- c) Las defunciones ocurridas en CDGH corresponden a nacimientos de 1970. Dicha superficie comprende también un año completo.
- d) Por último las defunciones ocurridas en el área DEFG corresponden a nacimientos de 1971. Esta superficie representa

$$\frac{358}{365} + \frac{1}{2} \frac{6}{365} = \frac{722}{730}$$

de la superficie de un año completo.

De este modo el denominador de 1 a 7 días resulta:

$$t^E_x = \frac{8}{730} 8^{68} + 8^{69} + 8^{70} + \frac{722}{730} 8^{71}$$

que es la relación presentada en el cuadro 2.

Una vez obtenidos los valores de t^d_x , se calculan luego las funciones l_x y t^q_x hasta la edad 2 mediante las fórmulas usuales:

(111)

$$l_{x+t} = l_x - t^d_x$$

(112)

$$t^q_x = t^d_x / l_x = 1 - l_{x+t} / l_x$$

5.3.2 Probabilidades de muerte de 2 a 4 años.

Desde los 2 años de edad, el cálculo de las probabilidades de muerte se realiza a partir de las tasas centrales de mortalidad (m_x), vale decir, mediante las estadísticas de población y muertes.

Bajo el supuesto de que las defunciones se distribuyen uniformemente dentro de cada año de edad, la relación que vincula la tasa central de mortalidad (m_x) con la probabilidad de muerte (q_x) viene dada, según se ha visto en el capítulo 2 (pág. 70), por la siguiente relación, que es suficientemente aproximada cuando el intervalo de edades es de un año:

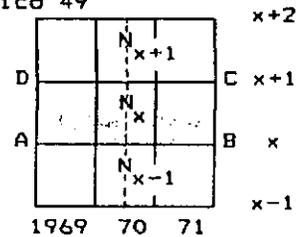
$$(69) \quad q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x}$$

Si se simboliza con D_x el número de defunciones de edad cumplida x , ocurridas en 1969-1971 y N_x representa la población de edad x a mitad de dicho periodo, se tiene entonces aproximadamente:

$$(113) \quad m_x = \frac{D_x}{3 N_x}$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que las defunciones de edad x , ocurridas durante 1969-1971, provienen básicamente de tres cohortes consecutivas de población, Greville considera que la exactitud del cálculo de las tasas m_x podría mejorarse reemplazando $3 N_x$, en el denominador de (113), por la suma de las poblaciones de edad cumplida $x-1$, x y $x+1$ a mitad del periodo considerado. Como puede verse en el gráfico 49, la población de estas tres edades, está más asociada con las defunciones de edad x del periodo 1969-71, representadas por la Sup ABCD. Se tiene entonces:

Gráfico 49



$$(114) \quad m_x = \frac{D_x}{N_{x-1} + N_x + N_{x+1}}$$

Combinando las fórmulas (69) y (114), se llega a la relación única:

$$(115) \quad q_x = \frac{D_x}{N_{x-1} + N_x + N_{x+1} + 1/2 D_x}$$

la cual se utiliza para las edades 2, 3 y 4.

5.3.3 Cálculo de las probabilidades de muerte desde los 5 años de edad en adelante.

El cálculo de estas probabilidades se obtiene, como las de 2 a 4 años, a partir de la información sobre defunciones y población. Combinando la fórmula (69), que vincula la probabilidad de muerte con la tasa central de mortalidad, con la (113), que expresa esta última tasa en función de los datos básicos, se llega a la siguiente relación directa utilizada por Greville:

$$(116) \quad q_x = \frac{D_x}{3 N_x + 1/2 D_x}$$

La información básica sobre población y defunciones por edades simples necesaria para aplicar esta fórmula, suele presentar diversas irregularidades producidas fundamentalmente por la mala declaración de la edad. Por ello, es preferible obtener dichos valores por interpolación de los grupos quinquenales correspondientes, utilizando fórmulas de interpolación osculatriz, que aseguran una variación suave en los puntos de unión de los diversos tramos interpolados.

En la construcción de las tablas de los Estados Unidos de 1940 ⁵⁹, Greville calculó primero tasas de mortalidad pivotaes por edades simples para el valor central de cada grupo de edades y luego efectuó la interpolación osculatriz directamente a dichas tasas, obteniendo así los valores intermedios. En cambio, en la

⁵⁹ Greville, T.W.E., "United States Life Tables...", *Op.cit.*, Parte V.

construcción de las tablas de vida de 1969-1971 interpoló la población y las defunciones separadamente. Este último procedimiento, aunque implica interpolar una función que tiene un comportamiento bastante irregular, como es el caso de las defunciones D_x , tiene como ventaja operacional, que los valores suavizados reproducen exactamente las defunciones observadas (o corregidas), con lo cual no se altera el nivel de la mortalidad. Además, cuando se elaboran tablas por Estados, Provincias u otras subdivisiones, las muertes y la población de cada edad resulta exactamente igual a la suma de todas las subdivisiones consideradas.

La interpolación de las defunciones y de la población de la tabla de 1969-1971, fue efectuada por medio de los multiplicadores de Beers ⁶⁰ presentados en el cuadro 3. Entrando en dicho cuadro con la población o las defunciones por grupos quinquenales, desde 0-4 años en adelante, se obtienen las cifras correspondientes, por edades simples, desde los 5 años de edad.

Para la interpolación de las edades 5 a 14, Greville no utiliza la población y las defunciones reales de 0 a 4 años, sino un valor ficticio estimado de la manera que se indica en los párrafos siguientes. Dicho procedimiento permite obtener valores interpolados que empalman más suavemente con las cifras correspondientes a las edades 2 a 4 años y eliminan el efecto de la alta mortalidad de la infancia, que distorsiona los valores interpolados en estas edades.

⁶⁰ Beers, Henry S., "Six Texas Formulas for Routine Actuarial Interpolation", en The Record of the American Institute of Actuaries, 34:52-61, 1945.

Dicho valor ficticio, para el grupo de edad 0-4, fue determinado de modo que la suma de los valores interpolados para las edades 2-4 debería ser igual al número real de personas o defunciones -según el caso- de estos tres años de edad. La extensión a las edades 2-4 de los multiplicadores de Beers del cuadro 3, se presentan en el cuadro 4.

Cuadro 3

MULTIPLICADORES DE BEERS PARA SUBDIVIDIR VALORES QUINQUE-NALES POR AÑOS SIMPLES DE EDAD. FORMULA DE LA QUINTA DIFERENCIA MINIMIZADA

Edad en años para los cuales se calculan los valores interpolados	Multiplicadores para los valores que comienzan con la edad				
	0	5	10	15	20

(a) Multiplicadores para las edades 5-9

5	0.0404	0.2000	-0.0344	-0.0128	0.0068
6	0.0093	0.2268	-0.0402	0.0028	0.0013
7	-0.0108	0.2272	-0.0248	0.0112	-0.0028
8	-0.0198	0.1992	0.0172	0.0072	-0.0038
9	-0.0191	0.1468	0.0822	-0.0084	-0.0015
	5m-10	5m-5	5m	5m+5	5m+10

(b) Multiplicadores para las edades 10 en adelante

5m	-0.0117	0.0804	0.1570	-0.0284	0.0027
5m + 1	-0.0020	0.0160	0.2200	-0.0400	0.0060
5m + 2	0.0050	-0.0280	0.2460	-0.0280	0.0050
5m + 3	0.0060	-0.0400	0.2200	0.0160	-0.0020
5m + 4	0.0027	-0.0284	0.1570	0.0804	-0.0117

Fuente: Beers, Henry S., "Six Terms Formulas for Routine Actuarial Interpolation", en The Record of The American Institute of Actuaries, 34:52-61, 1945.

Cuadro 4
EXTENSION DEL CUADRO 3 A LAS EDADES 2-4 AÑOS

Edad en años para los cuales se calculan los valores interpolados	Multiplicadores para los valores que comienzan con la edad				
	0	5	10	15	20
2	0.1924	0.0064	0.0184	-0.0256	0.0084
3	0.1329	0.0844	0.0054	-0.0356	0.0129
4	0.0819	0.1508	-0.0158	-0.0284	0.0115
Σ	0.4072	0.2416	0.0080	-0.0896	0.0328

Fuente: Beers, Henry S., "Six Terms Formulas for Routine Actuarial Interpolation", en The Record of The American Institute of Actuaries, 34:52-61, 1945.

Si W_x simboliza la suma quinquenal que comienza con la edad x , y V representa la suma de valores interpolados para las edades 2-4 (suma que se supone igual al número real de personas o defunciones), los multiplicadores del cuadro 4 darían:

$$(117) \quad V = 0.4072 W_0 + 0.2416 W_5 + 0.0080 W_{10} - 0.0896 W_{15} + 0.0328 W_{20}$$

Dando a V el valor correspondiente real de 2 a 4 años, y despejando W_0 , se tiene:

$$(118) \quad W_0 = 2.45580 V - 0.59332 W_5 - 0.01965 W_{10} + 0.22004 W_{15} - 0.08055 W_{20}$$

que es la fórmula que permite calcular los valores ficticios del grupo de 0 a 4 años.



Por ejemplo, dada la siguiente información sobre defunciones por grupos de edades:

$$D_{0-1} = 2\ 636 \quad ; \quad D_{10-14} = 144$$

$$D_{2-4} = 248 \quad ; \quad D_{15-19} = 219$$

$$D_{5-9} = 180 \quad ; \quad D_{20-24} = 256$$

calcular el "valor ficticio" W_0 , utilizado por Greville para interpolar las defunciones por edades simples de 5 a 14 años.

Reemplazando los valores numéricos de \underline{V} y W_x en la relación (11B) se obtiene:

$$\begin{aligned} W_0 &= 2.45580 (248) - 0.59332 (180) - 0.01965 (144) \\ &\quad + 0.22004 (219) - 0.08055 (256) = \underline{527} \end{aligned}$$

Este valor ficticio es sustancialmente inferior al número de defunciones reales de 0 a 4 años (2 884), lo cual permite obtener valores interpolados de 5 a 14 años que empalman más suavemente con las defunciones de 2 a 4 años.

Una vez obtenida la población y las defunciones interpoladas por edades simples N_x y D_x , se calculan las probabilidades de muerte q_x desde los 5 años de edad en adelante, utilizando la relación (116).

Respecto a las últimas edades, en la tabla de mortalidad de los Estados Unidos se calcularon los valores de q_x hasta la edad 110, a la cual el número de sobrevivientes es muy cercano a cero. Sin embargo, para la gran mayoría de los propósitos demográficos es suficiente el cálculo de estas probabilidades hasta los 85 o 90 años, terminando luego con un grupo abierto final.

5.4 Suavizamiento de las probabilidades de muerte

Las probabilidades de muerte obtenidas en la forma indicada, contienen generalmente fluctuaciones y algunas irregularidades después de los 30 o 40 años, las cuales no corresponden a características reales de la población, sino más bien al procedimiento de interpolación y a errores de diverso tipo que presenta la información básica.

En varias tablas completas construidas para diversos países se han mantenido esas pequeñas irregularidades, para evitar el uso de fórmulas que suelen ser muy rígidas, alterando en ciertas edades la concordancia con los valores observados.

Para suavizar las probabilidades de muerte de la tabla de mortalidad de los Estados Unidos de 1967-1971, Greville utilizó la fórmula de Whittaker-Henderson ⁶¹, ⁶², la cual tiene la ventaja de que no sigue una curva analítica predeterminada, permitiendo al usuario regular la graduación dentro de un margen muy amplio que va, desde la reproducción exacta de los valores de q_x observados, en un caso extremo, hasta valores ajustados que siguen el comportamiento de una línea recta, en el otro. De esta manera, el procedimiento permite suavizar la información y mantener la concordancia con los valores observados originales, en la medida deseada.

⁶¹ Miller, M.D., Elements of Graduation, Chicago, Society of Actuaries, 1946, capítulo 5

⁶² Greville, T.W.E., Graduation, Educations and Examination Committee of the Society of Actuaries, 1974

La fórmula de Whittaker-Henderson, implica minimizar la cantidad:

$$(119) \quad \sum W_x (q_x'' - q_x)^2 + k \sum (\Delta^z q_x)^2$$

donde W_x es un coeficiente de ponderación, q_x'' son los valores que se desean suavizar, q_x los valores suavizados y Δ^z representa la diferencia finita de orden z , siendo z generalmente igual a 2 o 3. El primer término mide la proximidad entre las tasas suavizadas y observadas, mientras que el segundo mide la suavidad o regularidad con que cambian las tasas en las sucesivas edades. La constante k regula la importancia que el usuario asigna a la suavidad, frente a la proximidad o concordancia a los datos observados.

Minimizando la expresión (119) precedente, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son las tasas de mortalidad suavizadas q_x .

En las secciones siguientes se presentan dos procedimientos para suavizar los valores de q_x , mediante la fórmula de Whittaker-Henderson. Primero, en la sección 5.4.1, se incluye un procedimiento simplificado, suponiendo que $W_x = 1$, en cuyo caso se obtiene la fórmula llamada "Tipo A", que es apropiada para resolver con una máquina de calcular corriente. Para ilustrar su aplicación se incluye también un ejemplo numérico. Luego, en la sección 5.4.2, se presenta el caso general utilizado por Greville, que corresponde a la fórmula "Tipo B", la cual requiere invertir una matriz relativamente grande, de 50x50 o más, dependiendo del número de valores que se desea suavizar, por lo cual solo puede utilizarse cuando se cuenta con la ayuda de un computador.

5.4.1 Suavizamiento mediante la formula de Whittaker-Henderson, Tipo A.

La resolución de la ecuación (119) utilizada por Greville, implica la solución de n ecuaciones con n incógnitas, siendo n el número de valores de q_x que se desea suavizar, lo cual constituye un procedimiento largo y dificultoso para resolver en forma manual. Sin embargo, si se supone que el coeficiente de ponderación $w_x = 1$, entonces la solución numérica puede obtenerse fácilmente utilizando el método de las ecuaciones en diferencia desarrollado por Whittaker y Henderson.

Con esta simplificación y tomando $z = 2$, que es el valor utilizado por Greville, la relación (119) toma la siguiente forma:

$$(120) \quad \sum (q_x'' - q_x)^2 + k \sum (\Delta^2 q_x)^2$$

Respecto a k , mientras más pequeño sea su valor, las tasas suavizadas serán más cercanas a las q_x'' previamente calculadas. En un caso extremo, si $k \approx 0$, el mínimo se verifica cuando los valores de q_x coinciden con los de q_x'' , mientras que en el otro extremo, si $k = \infty$, entonces los valores suavizados seguirán el comportamiento de una línea recta. En el campo demográfico, donde es conveniente respetar en la mayor medida posible los valores observados, deberá ser k relativamente pequeño (más adelante en la aplicación del método, se indicarán algunos valores posibles de k).

La derivación teórica del procedimiento que permite llegar a las condiciones que minimizan la expresión (120)

puede verse en el libro de Miller ya citado ⁶³, presentándose aquí sólo las dos ecuaciones en diferencia finales resultantes, que permiten obtener los valores suavizados de q_x . Dichas ecuaciones son las siguientes:

$$(121) \quad q'_x = \frac{2a}{a+1} q'_{x-1} - \frac{a}{a+2} q'_{x-2} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} q''_x$$

$$(122) \quad q_x = \frac{2a}{a+1} q_{x+1} - \frac{a}{a+2} q_{x+2} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} q'_x$$

donde a está vinculado con k mediante la siguiente relación:

$$(123) \quad k = \frac{1}{4} a(a+1)^2(a+2)$$

q''_x son los valores calculados a partir de N_x y D_x , q_x las tasas suavizadas y q'_x valores auxiliares.

Si el suavizamiento se efectúa en el tramo $u-v$, conociendo dos valores iniciales q'_{u-1} y q'_{u-2} , se pueden calcular los q'_x desde una edad u cualquiera en adelante hasta otra v , por medio de la relación (121). A su vez, si se conocen los dos valores finales de q_{v-1} y q_v , el resto de los valores suavizados q_x pueden ser derivados por medio de la relación (122). Los dos valores iniciales pueden ser calculados mediante las fórmulas:

$$(124) \quad \begin{aligned} q'_{u-2} &= q''_u - (a+2) \Delta q''_u \\ q'_{u-1} &= q''_{u+1} - (a+2) \Delta q''_u \end{aligned}$$

⁶³ Miller, M.D., "Elements of Graduation...", *Op.cit.* Capítulo 5.

mientras que los dos valores finales se calculan mediante las relaciones:

$$(125) \quad \begin{aligned} q_{v-1} &= q'_{v-1} + a \Delta q'_{v-1} \\ q_v &= q'_v + a \Delta q'_{v-1} \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los valores de q_x suavizados, si se desea puede efectuarse un segundo proceso iterativo, con el fin de asegurar un empalme más suave entre las probabilidades de muerte observadas de las edades 0-u, con las suavizadas del tramo u-v.

Para ello se calculan primero valores corregidos de q''_u y q''_{u+1} mediante las fórmulas:

$$(126) \quad \begin{aligned} q''_u \text{ (corregido)} &= q''_u + 2 (q''_u - q_u) \\ q''_{u+1} \text{ (corregido)} &= q''_{u+1} + 2 (q''_u - q_u) \end{aligned}$$

Con estos nuevos valores de q''_u y q''_{u+1} corregidos se pueden obtener entonces valores revisados de q'_{u-2} y q'_{u-1} por medio de la relación (124) y recalcular con ellos una nueva serie suavizada corregida. Dichos valores dan generalmente muy próximos a los obtenidos en la primera iteración.

Ejemplo numérico



A partir de las probabilidades de muerte observadas (q'') presentadas en la primera columna del cuadro 5 (pág.190), calcular los valores suavizados de q_x de 28 a 84 años, es decir para $u = 28$ y $v = 84$, suponiendo que $a = 3$.

1. Cálculo de los coeficientes de las ecuaciones en diferencias.

Haciendo $a = 3$ en las ecuaciones (121) y (122), se llega a las ecuaciones en diferencia siguientes:

$$(127) \quad q'_x = 1.5 q'_{x-1} - 0.6 q'_{x-2} + 0.1 q''_x$$

$$(128) \quad q_x = 1.5 q_{x+1} - 0.6 q_{x+2} + 0.1 q'_x$$

2. Cálculo de los valores iniciales q'_{26} y q'_{27} mediante la relación (124)

Para el cálculo de estos valores, se requieren los valores observados para las edades 28 y 29:

$$q''_{28} = 1\ 581$$

$$q''_{29} = 1\ 620$$

(todos los valores de q_x se han amplificado por un millón, a fin de simplificar la notación y las operaciones numéricas). Reemplazando estos valores en (124), se tiene:

$$q'_{26} = 1\ 581 - 5(1\ 620 - 1\ 581) = 1\ 386$$

$$q'_{27} = 1\ 620 - 5(1\ 620 - 1\ 581) = 1\ 425$$

3. Cálculo de los valores de q'_x mediante (121)

La relación (121) toma, para $a = 3$, la forma (127). Sustituyendo en esta última el valor observado $q''_{28} = 1\ 581$, y los estimados $q'_{26} = 1\ 386$ y $q'_{27} = 1\ 425$, se tiene:

$$q'_{28} = 1.5(1\ 425) - 0.6(1\ 386) + 0.1(1\ 581) = \underline{1\ 464}$$

En forma análoga para las edades siguientes, resulta:

$$q'_{29} = 1.5(1\ 464) - 0.6(1\ 425) + 0.1(1\ 620) = \underline{1\ 503}$$

$$q'_{30} = 1.5(1\ 503) - 0.6(1\ 464) + 0.1(1\ 666) = \underline{1\ 543}$$

y así sucesivamente. Los valores de q'_x así obtenidos se presentan en la columna (2) del cuadro 5.

4. Cálculo de q_{83} y q_{84} por medio de (125)

$$q_{83} = 84\ 503 + 3(98\ 056 - 84\ 503) = \underline{125\ 162}$$

$$q_{84} = 98\ 056 + 3(98\ 056 - 84\ 503) = \underline{138\ 715}$$

5. Cálculo de los valores suavizados q_x , mediante la relación (122)

Reemplazando los valores de q_{83} , q_{84} y q'_x obtenidos anteriormente, en la fórmula (122), cuyos coeficientes están expresados en forma numérica en (128), se obtienen los valores suavizados de q_x . Dichos valores se calculan desde el final hacia las primeras edades en la siguiente forma:

$$q_{82} = 1.5(125\ 162) - 0.6(138\ 715) + 0.1(72\ 796) = \underline{111\ 794}$$

$$q_{81} = 1.5(111\ 794) - 0.6(125\ 162) + 0.1(63\ 847) = \underline{98\ 978}$$

etcétera. Los valores suavizados se presentan en la columna (3) del cuadro 5.

Puede observarse que los valores iniciales suavizados $q_{28} = 1\ 566$ y $q_{29} = 1\ 606$ tienen una buena aproximación a los valores observados $q''_{28} = 1\ 581$ y $q''_{29} = 1\ 620$, asegurando un empalme suave con las

probabilidades de muerte de las edades anteriores. Si se desea obtener valores más cercanos, se calcula entonces una segunda iteración en la forma indicada en el punto 6 siguiente.

6. Corrección opcional de los valores suavizados

A partir de la relación (126) se obtienen primero valores corregidos de q''_{28} y q''_{29} :

$$q''_{28}(\text{corregido}) = 1\ 581 + 2(1\ 581 - 1\ 566) = 1\ 611$$

$$q''_{29}(\text{corregido}) = 1\ 620 + 2(1\ 581 - 1\ 566) = 1\ 650$$

Luego mediante (124) se obtienen nuevos valores de partida:

$$q'_{26} = 1\ 611 - 5(1\ 650 - 1\ 611) = 1\ 416$$

$$q'_{27} = 1\ 650 - 5(1\ 650 - 1\ 611) = 1\ 455$$

y se repite el procedimiento en la forma ya indicada en los puntos 3, 4 y 5 anteriores, estimándose así una nueva serie suavizada corregida. Se obtienen de esta manera los siguientes valores, que se comparan con los observados y los suavizados en la primera iteración:

Edad	q''_x	q_x primera iteración	q_x segunda iteración
28	1 581	1 566	1 580
29	1 620	1 606	1 617
30	1 666	1 650	1 658
31	1 713	1 698	1 704
32	1 767	1 752	1 756
33	1 827	1 814	1 816
34	1 893	1 885	1 887
35	1 968	1 968	1 969
36	2 054	2 065	2 066
37	2 154	2 178	2 179
38	2 276	2 311	2 311

después de los 38 años los nuevos valores suavizados coinciden con los de la primera iteración.

Cuadro 5
 SUAVIZAMIENTO DE PROBABILIDADES DE MUERTE MEDIANTE LA
 FORMULA DE WHITTAKER-HENDERSON TIPO A
 (Valores amplificados por 1000 000)

x	q_x''	q_x'	q_x	x	q_x''	q_x'	q_x
	(1)	(2)	(3)		(1)	(2)	(3)
26		1 386		56	9 087	7 451	9 457
27		1 425		57	9 864	8 007	10 373
28	1 581	1 464	1 566	58	10 934	8 633	11 412
29	1 620	1 503	1 606	59	12 280	9 374	12 578
30	1 666	1 543	1 650	60	13 821	10 263	13 864
31	1 713	1 584	1 698	61	15 447	11 315	15 258
32	1 767	1 626	1 752	62	17 114	12 526	16 750
33	1 827	1 672	1 814	63	18 725	13 872	18 329
34	1 893	1 721	1 885	64	20 295	15 322	19 995
35	1 968	1 775	1 968	65	21 810	16 841	21 751
36	2 054	1 836	2 065	66	23 460	18 415	23 605
37	2 154	1 904	2 178	67	25 477	20 065	25 568
38	2 276	1 982	2 311	68	28 016	21 851	27 648
39	2 429	2 074	2 463	69	30 968	23 834	29 850
40	2 615	2 183	2 638	70	34 181	26 058	32 186
41	2 836	2 314	2 835	71	37 357	28 523	34 687
42	3 083	2 469	3 054	72	40 341	31 183	37 417
43	3 339	2 649	3 296	73	43 024	33 963	40 485
44	3 596	2 851	3 562	74	45 561	36 791	44 049
45	3 860	3 074	3 854	75	48 289	39 638	48 307
46	4 153	3 315	4 172	76	51 472	42 530	53 485
47	4 487	3 577	4 519	77	55 299	45 542	59 808
48	4 885	3 865	4 898	78	60 318	48 827	67 465
49	5 353	4 186	5 309	79	67 223	52 637	76 574
50	5 899	4 550	5 754	80	77 504	57 410	87 131
51	6 484	4 962	6 234	81	93 148	63 847	98 978
52	7 054	5 418	6 754	82	114 717	72 796	111 794
53	7 562	5 906	7 321	83	136 167	84 503	(125 162)
54	8 040	6 413	7 948	84	149 795	98 056	(138 715)
55	8 514	6 927	8 654				

En el gráfico 50 se presentan los valores observados q_x'' de 24 a 84 años y los q_x suavizados en la primera iteración, pudiendo verse el acuerdo satisfactorio entre ambas series.

Respecto a los valores posibles del parámetro a , para el caso de probabilidades de muerte, puede tomar valores comprendidos entre 2 y 5 aproximadamente. Si $a = 1$, entonces las series suavizadas y no suavizadas prácticamente coinciden, mientras que si $a > 5$, los valores suavizados pueden alejarse demasiado de los originales, particularmente en las primeras y en las últimas edades consideradas.

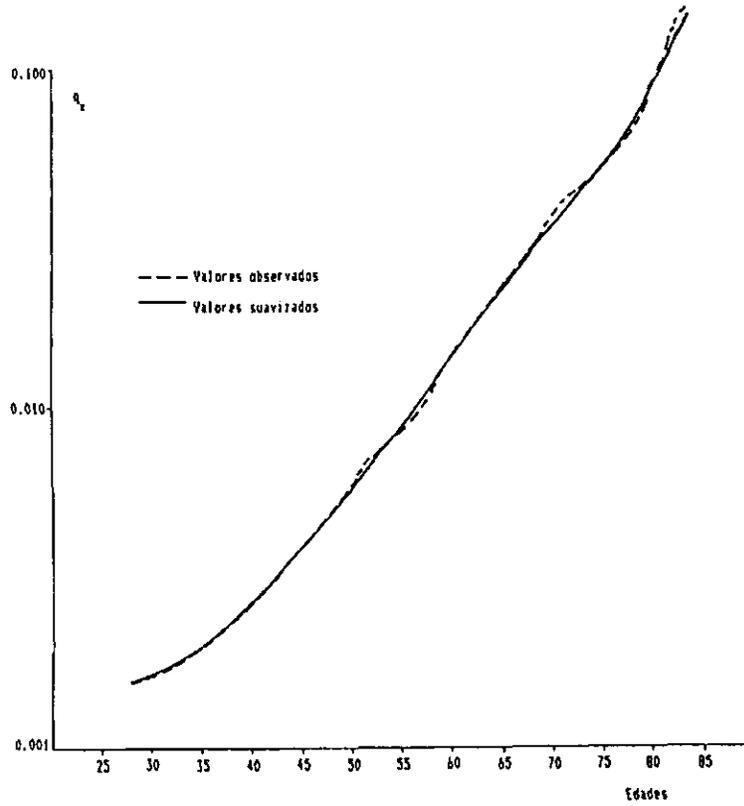
5.4.2 Suavizamiento mediante la fórmula de Whittaker-Henderson, Tipo B

Se considera ahora el procedimiento utilizado por Greville para el suavizamiento de las probabilidades de muerte, en la elaboración de las tablas de mortalidad de los Estados Unidos de 1969-1971. Como ya se ha indicado, la fórmula de Whittaker-Henderson, tipo B, se obtiene minimizando la expresión:

$$(119) \quad \Sigma W_x (q_x'' - q_x)^2 + k \Sigma (\Delta^z q_x)^2$$

siendo W_x un coeficiente de ponderación apropiado y z generalmente igual a 2 o 3. Greville tomó $z = 2$ y $W_x = E_x/q_x''(1-q_x'')$, donde E_x representa la población N_x expuesta al riesgo de muerte. De todas maneras, el procedimiento de resolución es el mismo cualesquiera sean los valores de z y W_x .

Gráfico 50
SUAVIZAMIENTO DE PROBABILIDADES DE MUERTE MEDIANTE LA
FORMULA DE WHITTAKER-HENDERSON, TIPO A



Fuente: Cuadro 5.

Aunque desde hace tiempo se reconoce que esta fórmula produce excelentes resultados, en el pasado ha sido muy poco utilizada, porque implicaba un proceso de trabajo bastante complicado, que requería un considerable esfuerzo. Sin embargo, el desarrollo de las computadoras y del álgebra de matrices ha facilitado enormemente su empleo, que se reduce a una expresión final muy fácil de programar y resolver.

La exposición detallada de este procedimiento, empleando notación matricial, puede verse en el documento "Graduation", Part 5 Study Notes, preparado por Greville para la Sociedad Norteamericana de Actuarios ⁶⁴, presentándose aquí solamente la fórmula final que permite obtener los valores suavizados de q_x . Dicha fórmula es la siguiente:

(129)

$$(W + k K^T K) q = W q''$$

donde W es una matriz diagonal $n \times n$, cuyos elementos son las ponderaciones w_1, w_2, \dots, w_n ; K es una matriz $(n-z) \times n$ que contiene los coeficientes de las $(n-z)$ diferencias de orden z de q_x ; K^T es la matriz traspuesta, q'' es el vector de las probabilidades de muerte no suavizadas y q es el vector de los valores suavizados, que es el único desconocido.

Por ejemplo, para el caso de $n = 5$ y $z = 2$, se tiene que:

⁶⁴Greville, T.N.E., "Graduation", Part 5 Study Notes, Education and Examination Committee of the Society of Actuaries, 1974.

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}; \quad q'' = \begin{bmatrix} q''_1 \\ q''_2 \\ q''_3 \\ q''_4 \\ q''_5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad K^T \cdot K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación matricial (129) representa un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, que son los n elementos de q .

Denominando A a la expresión $W + k K^T K$, se tiene:

$$(130) \quad A q = W q''$$

ecuación que permite obtener el vector desconocido q de los valores suavizados q_x , calculando la inversa A^{-1} .

Una desventaja de la matriz A , es que es "casi singular", o sea que su determinante es muy cercano a cero, por lo cual algunos métodos usuales de resolución no dan resultados satisfactorios. En opinión de Greville, un método recomendable para resolver el sistema de ecuaciones de Whittaker-Henderson es el de la raíz cuadrada o método de Choleski, que consiste en expresar la matriz A

como producto de una matriz triangular inferior por una triangular superior que es su traspuesta.

$$(131) \quad A q = L L^T q = W q''$$

Este procedimiento puede resolverse en dos etapas. Haciendo $q' = L^T q$ se resuelve primero el sistema:

$$(132) \quad L q' = W q''$$

lo cual permite obtener el vector q' . Con estos valores se resuelve luego el sistema:

$$(133) \quad L^T q = q'$$

que da el vector deseado q .

Los elementos l_{ij} de la matriz triangular L se calculan mediante las siguientes fórmulas, donde a_{ij} son los elementos de la matriz A :

$$(134) \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$(135) \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{h=1}^{j-1} l_{ih} l_{jh} \right) ; (i = 2, 3, \dots, n) \\ (j = 1, 2, \dots, i-1)$$

$$(136) \quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{h=1}^{i-1} l_{ih}^2} ; (i = 2, 3, \dots, n)$$

Al final de este capítulo, en el ejercicio 7, se presenta un ejemplo que ilustra el proceso completo de suavizamiento mediante esta fórmula. En dicho ejercicio se han considerado sólo cinco valores, con el fin de facilitar la representación matricial.

Respecto a los valores que puede asumir el parámetro k , éste depende de las ponderaciones W_x . Para evitar la variabilidad de k en diferentes aplicaciones, es conveniente trabajar con cifras relativas $W_x / \sum W_x$. A fin de elegir el mejor suavizamiento, puede darse a k varios valores, haciendo luego una representación gráfica y seleccionando el suavizamiento que se considere más apropiado.

5.5 Cálculo de las restantes funciones de la tabla completa

Una vez obtenidas las probabilidades de muerte para todas las edades, las restantes funciones de la tabla se calculan fijando como raíz de la tabla $l_0 = 100\ 000$ y utilizando las relaciones siguientes:

a) Número de sobrevivientes de edad $x+1$:

$$(137) \quad l_{x+1} = l_x - l_x q_x$$

Es conveniente hacer el cálculo de todos los valores de l_x sin redondear los decimales, y escribirlos redondeados al entero más próxima.

b) Número de muertes entre x , $x+1$:

$$(4) \quad d_x = l_x - l_{x+1}$$

Las defunciones se obtienen por diferencia de los valores redondeados de l_x .

c) Tiempo vivido por la generación entre las edades x , $x+1$.

i) Para $x = 0$

$$(25) \quad L_0 = f_0 l_0 + (1-f_0)l_1; \quad f_0 = \text{factor de separación}$$

Si se consideran subdivisiones dentro del primer año de vida, puede utilizarse directamente la fórmula de los trapecios. Para las subdivisiones consideradas (menores de un día, 1-7, 7-28 y 28-365 días) se tiene:

$$(13B) \quad {}_tL_x = \frac{t}{2} (l_x + l_{x+t})$$

Edad	t
0	1/365
1	6/365
7	21/365
28	337/365

ii) Para $x = 1, 2, \dots, 84$

$$(21) \quad L_x = \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})$$

iii) Para el grupo abierto final

$$(33) \quad L_{85+} = (3.862 + 0.0000466 l_{85})l_{85}$$

d) Tiempo vivido por la generación entre las edades x , w :

$$(36) \quad T_x = \sum_{a=x}^{w-1} L_a$$

e) Esperanza de vida a la edad x :

$$(37) \quad e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$



EJERCICIOS DEL CAPITULO 5
(Ver respuestas al final del libro)

1. -A partir de los nacimientos y las defunciones de la población masculina de Costa Rica, correspondiente al periodo 1972-74, dados a continuación, calcular las siguientes funciones de la tabla de vida, para los dos primeros años de edad, considerando las siguientes subdivisiones de edades: 0-1 día, 1-7 días, 7-28 días, 28-365 días y 1-2 años.

a) Los denominadores ${}_tE_x$, definidos en el cuadro 2 de pág 173.

b) Las defunciones ${}_t d_x$, empleando la relación:

$$(109) \quad {}_t d_x = l_0 \cdot D_x / {}_t E_x$$

c) Los sobrevivientes, las probabilidades de muerte y el tiempo vivido, empleando las relaciones (111), (112), (138) y (21).

Años	Nacimientos	Grupos de edades	Defunciones 1972-1974
1970	29 543	0- 1 día	760
1971	28 856	1- 7 días	777
1972	29 458	7-28 días	649
1973	27 365	28-365 días	2 546
1974	29 099	1- 2 años	539

2. -Repetir los cálculos del ejercicio anterior, sin considerar subdivisiones dentro del primer año de vida, es decir, para las edades 0 y 1, utilizando el factor de separación $f_0 = 0.2390$ calculado con datos reales del país. Para ello:

a) Calcular los denominadores

$$E_0 = f_0 B^{71} + B^{72} + B^{73} + (1-f_0) B^{74}$$

$$E_1 = 0.5 B^{70} + B^{71} + B^{72} + 0.5 B^{73}$$

b) Calcular las defunciones

$$d_0 = l_0 D_0 / E_0$$

$$d_1 = l_0 D_1 / E_1$$

c) Obtener las funciones l_x , q_x y L_x mediante las relaciones (111), (112), (25) y (21).

3. -Comparar los resultados obtenidos en los dos ejercicios anteriores, es decir, según que se consideren, o no, subdivisiones, dentro del primer año de vida. Efectuar dicha comparación para las siguientes funciones:

$$l_1 ; d_0 ; q_0 ; e_0^o ; L_0 ; L_1 ; P_b ; P_0 ; f_0$$

Para el cálculo de la esperanza de vida al nacer, tomar $T_1 = 6\ 530\ 435$. A su vez, para el cálculo del factor de separación f_0 implícito en la tabla, utilizar la relación (26) de pág 31.

4. -Indicar cuál sería la forma de los denominadores ${}_tE_x$ presentados en el cuadro 2, de pág. 173, si se consideraran las siguientes subdivisiones dentro del primer año de vida:

a) 0-1 día, 1-7 días, 7-28 días, 28-180 días, 180-365 días.

b) 0-1 mes, 1-3 meses, 3-6 meses y 6-12 meses.

5. -Calcular las probabilidades de muerte para las edades 2, 3 y 4, empleando la relación (115) de Greville, a partir de la siguiente información sobre población y defunciones, correspondiente a la población masculina de Costa Rica de 1972-1974:

Edad	Población a mediados de 1973	Defunciones de 1972-1974
1	27 130	
2	26 866	251
3	26 925	141
4	27 076	103
5	28 532	

6. -Dada la información sobre población y defunciones presentada en el cuadro siguiente, calcular:

- El "valor ficticio" de la población y las defunciones del grupo 0-4, el cual es utilizado por Greville para interpolar las edades 5-14. Comparar en cada caso el valor obtenido, con el correspondiente a la población real.
- Obtener por interpolación, mediante los multiplicadores de Beers presentados en la pág 179, la población y las defunciones por edades simples de 5 a 19 años.
- Calcular las probabilidades de muerte de 5 a 19 años, empleando la relación:

$$(116) \quad q_x = \frac{D_x}{3 N_x + 1/2 D_x}$$

Grupos de Edades	Población a mediados de 1973	Defunciones de 1972-1974
0 - 1	54 239	5 271
2 - 4	80 868	495
5 - 9	144 840	360
10 - 14	135 747	288
15 - 19	111 958	438
20 - 24	86 243	513
25 - 29	64 369	393

7. -Suavizar los siguientes valores de u''_x , mediante la fórmula de Whittaker-Henderson, Tipo B, utilizando $k = 300$, y las ponderaciones w_x indicadas a continuación:

x	u''_x	w_x	$w_x \cdot u''_x$
1	40	4	160
2	43	7	301
3	45	10	450
4	56	15	840
5	59	20	1180

Nota: En este ejercicio se utilizan sólo 5 valores, para facilitar la representación matricial, e ilustrar en forma completa el procedimiento de resolución.

8. -Dada la siguiente población masculina de 8 años de edad:

$$N_B^{73} = 23\ 218$$

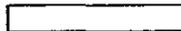
estimar el número de sobrevivientes dos años después, utilizando la ley de mortalidad correspondiente a la tabla completa masculina de Costa Rica de 1973 presentada en el anexo.

9. -Escribir el valor de las siguientes funciones, en función de l_x :

$$d_x \quad ; \quad q_x \quad ; \quad m_x \quad ; \quad T_x$$

10. -Indicar a qué probabilidades o relaciones de supervivencia, corresponden los siguiente cocientes:

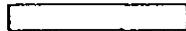
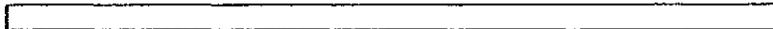
$$\frac{L_{40}}{l_{40}} \quad ; \quad \frac{{}_7L_{14}}{{}_7L_{10}} \quad ; \quad \frac{T_{85}}{T_{73}}$$





Capítulo 6

APLICACION DE LA TABLA DE MORTALIDAD EN ESTUDIOS DE POBLACION



6.1 Introducción

Dado que la medición de la mortalidad está involucrada en la mayoría de los estudios demográficos, la tabla de vida puede ser utilizada en una gran variedad de problemas, entre los cuales puede mencionarse: la estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad; los análisis sobre mortalidad por causas; los estudios de fecundidad, reproductividad, estructura y crecimiento de la población; las estimaciones y proyecciones demográficas, y el análisis de diversas características sociales y económicas.

En los puntos siguientes se presentan algunas aplicaciones de la tabla de vida a los temas indicados, mientras que al final del capítulo se incluyen varios ejercicios de repaso general de la materia, con las respuestas correspondientes.

6.2 Estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad

La aplicación más frecuente de la tabla de vida, consiste en medir el nivel y la tendencia de la mortalidad de una población a través del tiempo, o establecer comparaciones entre los niveles de diferentes países o regiones. Para este propósito suelen utilizarse diversos indicadores, entre los cuales pueden mencionarse, la esperanza de vida al nacer, la proporción de sobrevivientes, la edad modal de las defunciones y las tasas de mortalidad por grupos de edades.

6.2.1 La esperanza de vida al nacer

La esperanza de vida al nacer o vida media (e_0^D), es el mejor indicador del nivel general de mortalidad de una población, ya que es una medida única y no está afectada por la composición por edades, lo cual permite hacer comparaciones directas entre diferentes países, o para un mismo país a través del tiempo. Algunas veces las estimaciones de mortalidad suelen resumirse también en términos de esperanza de vida a la edad 1 o 5, para aislar el fuerte peso que tiene la mortalidad infantil y los errores de diverso tipo que suele afectar a la información básica de las primeras edades. También se utiliza la esperanza de vida a los 15 años, que corresponde aproximadamente al comienzo de la vida activa y reproductiva, y la esperanza de vida a los 65 años, que mide la mortalidad en el periodo de retiro, en el cual se concentra la mayoría de las muertes en los países de mortalidad moderada y baja.

A título de ejemplo de utilización de este indicador, para medir el nivel y la tendencia de la mortalidad

general, en el cuadro 6 se resumen los niveles de esperanza de vida al nacer de los países de América Latina, y su evolución en el período 1950-85, según estimaciones efectuadas por el CELADE. De acuerdo con los valores de este cuadro, la vida media de los países de América Latina oscila actualmente entre los 50 y los 73 años, habiéndose logrado en el período, una ganancia media anual de casi medio año de vida por cada año calendario.

Cuadro 6
ESPERANZA DE VIDA AL NACER DE LOS PAISES DE AMERICA
LATINA DEL PERIODO 1950-1985

Países	P e r i o d o s			
	1950-55	1960-65	1970-75	1980-85
Argentina	62.7	65.5	67.3	69.7
Bolivia	40.4	43.4	46.7	50.7
Brasil	51.0	55.9	59.8	63.4
Colombia	50.6	56.2	60.4	63.6
Costa Rica	56.0	61.6	66.0	73.0
Cuba	58.8	65.1	70.9	73.4
Chile	54.1	57.6	64.2	67.0
Ecuador	46.9	51.8	57.1	62.6
El Salvador	45.3	52.3	59.1	64.8
Guatemala	42.7	48.2	54.6	60.7
Haití	37.6	43.6	48.5	52.7
Honduras	42.2	47.9	54.1	59.9
México	50.8	58.6	62.2	65.7
Nicaragua	42.3	48.5	54.7	59.8
Panamá	55.3	62.0	66.3	71.0
Paraguay	51.9	56.6	63.1	65.1
Perú	43.7	48.8	55.0	59.1
Rep. Dominicana	45.1	52.6	57.9	62.6
Uruguay	66.3	68.4	69.8	70.3
Venezuela	52.3	58.9	64.5	67.8

Fuente: CELADE, Proyecciones de población de los respectivos países.

6.2.2 La esperanza de vida temporaria

Para medir la evolución de la mortalidad en tramos de vida seleccionados, o bien para eliminar el efecto de la mortalidad de las últimas edades, que está más afectada por errores, suele utilizarse la denominada esperanza de vida temporaria, que mide el número de años que en promedio vive la generación de l_x personas en el grupo de edades considerado.

Se define la esperanza de vida temporaria entre las edades x , $x+n$, mediante la expresión:

$$(139) \quad n e_x^o = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x}$$

Por ejemplo, para el tramo de 0 a 5 años de edad, la esperanza de vida temporaria de la población masculina de Guatemala de 1950, resulta, de acuerdo con la tabla de vida presentada en el anexo:

$$\begin{aligned} 5 e_0^o &= \frac{T_0 - T_5}{l_0} = \frac{3\,958\,833 - 3\,567\,298}{100\,000} \\ &= 3.92 \text{ años.} \end{aligned}$$

Si la mortalidad entre 0 y 5 años fuera nula, el resultado sería 5. Debido a las condiciones de mortalidad prevalecientes en este tramo de edades, los integrantes de la generación inicial l_0 , pierden un promedio de 1.08 años por persona.

Mediante la esperanza de vida temporaria, se puede comparar la mortalidad de un país, en dos momentos diferentes, para determinar el aporte de los diferentes tramos de edades a la ganancia de la esperanza de vida total.

Por otra parte, la esperanza de vida a una edad x cualquiera, puede expresarse en función de la esperanza de vida temporaria del intervalo $x, x+n$ y la esperanza de vida total a la edad $x+n$, mediante la relación:

$$(140) \quad e_x^0 = {}_n e_x^0 + {}_n p_x \cdot e_{x+n}^0$$

En efecto:

$$\begin{aligned} e_x^0 &= \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x} + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{T_{x+n}}{l_{x+n}} \\ &= \frac{T_x}{l_x} \end{aligned}$$

Una relación similar a la (140), se emplea más adelante, en la pág 241, para calcular la esperanza de vida activa de un trabajador.

6.2.3 La proporción de sobrevivientes

Otra función de la tabla, frecuentemente utilizada para comparar la mortalidad de diferentes países, o de un mismo país a través del tiempo, es la función de sobrevivencia l_x . Para ello suelen representarse en un gráfico las curvas que se desean comparar, haciendo luego un corte horizontal para determinar la edad a la cual el número de sobrevivientes se reduce al 50 o 75 por ciento, o bien un corte vertical para obtener el número de sobrevivientes a una edad seleccionada.

En el gráfico 51 se presenta un ejemplo del primer tipo, determinándose la edad en que el número de sobrevivientes se reduce al 75 por ciento, con datos de las tablas masculinas de Costa Rica de 1963 y Guatemala 1964.

En tanto que en Costa Rica, la generación de 100 000 personas se reduce al 75 por ciento alrededor de los 55 años de edad, en la población masculina de Guatemala, debido a la mayor mortalidad, se produce la misma reducción antes de los 15 años.

En el gráfico 52, por su parte, se presenta un ejemplo del segundo tipo, calculándose el número de sobrevivientes que llegan con vida a los 40 años, con datos tomados de las tablas masculinas de Guatemala de 1950 y 1964. De acuerdo con las condiciones de mortalidad prevalentes, de 100 000 nacidos vivos, en la tabla de 1950 sólo 52 820 llegan con vida a los 40 años, en tanto que, en la tabla de 1964, sobreviven 64 067 a la misma edad. De aquí puede concluirse que las 11 247 personas adicionales que sobreviven en la segunda tabla, deben su vida, a la mejora ocurrida en las condiciones de mortalidad de Guatemala entre 1950 y 1964.

Gráfico 51

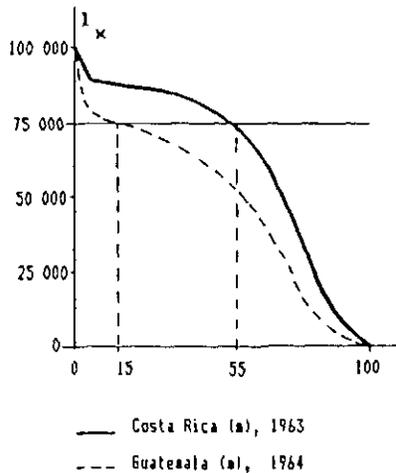
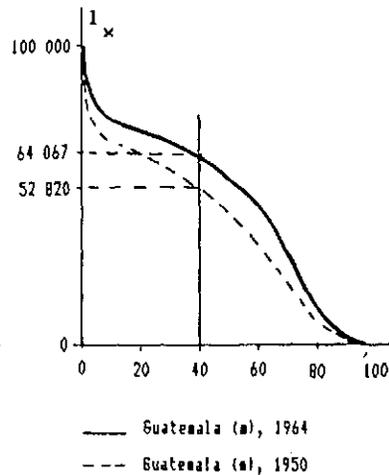


Gráfico 52



El nivel de la mortalidad medido a través de la función de sobrevivencia l_x , también es utilizado como punto de partida, para la elaboración de tablas de decremento múltiple, tales como las tablas de vida activa, de nupcialidad, de vida escolar, etc., donde se combina la mortalidad con otras variables sociales o económicas. Las tablas de decremento múltiple son tratadas más adelante en la sección 6.9.

6.2.4 La edad modal de las defunciones

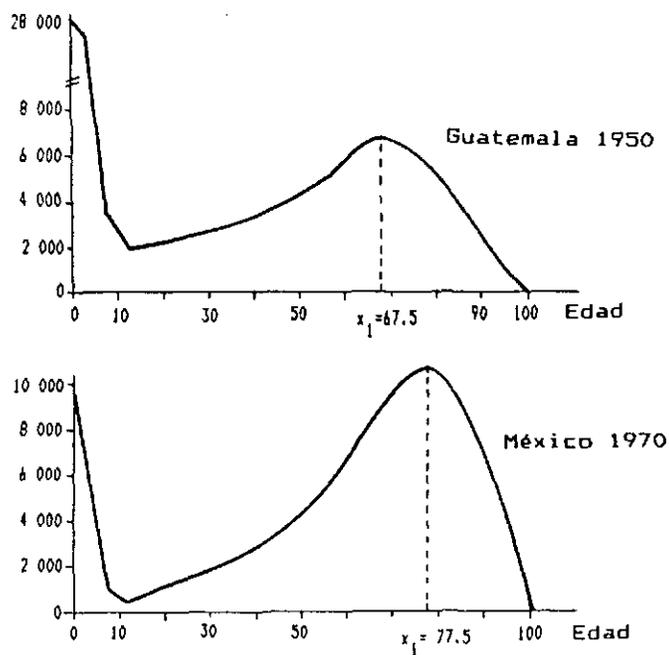
Otro indicador de la tabla de vida asociado con el nivel de la mortalidad, es la edad modal de las defunciones, la cual, según fue indicado en el capítulo 1, corresponde a la edad adulta a la cual se produce el máximo relativo de la curva de las muertes. Dicho máximo se produce corrientemente entre los 65 y los 80 años.

El Diccionario Demográfico Multilingüe define este concepto y le asigna gran importancia, al señalar que "la distribución por edad de las defunciones correspondiente a la tabla de fallecidos, presenta generalmente varios máximos de los cuales uno está situado hacia el final de la edad adulta o en la vejez. La edad que corresponde a ese máximo recibe el nombre de edad modal de las defunciones o edad normal al morir y la duración de la vida correspondiente se llama a veces vida normal. Este índice representa mejor el concepto corriente de duración de la vida humana que los de vida mediana o vida media".⁶⁵

⁶⁵ Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y Centro Latinoamericano de Demografía, Diccionario Demográfico Multilingüe, Versión en Español, Lieja, Bélgica, 1985.

En el gráfico 53 se presenta la curva de las muertes y la edad modal de las defunciones de dos tablas de diferente mortalidad presentadas en el anexo. La primera de ellas corresponde a la tabla masculina de Guatemala de 1950, que tiene una esperanza de vida al nacer de 39.6 años, en la cual la edad modal de las defunciones se produce en el grupo de 65-69 años. La segunda corresponde a la tabla masculina de México de 1970, que tiene una esperanza de vida al nacer de 60.0 años, en la cual la edad modal se presenta en el grupo de 75-79 años.

Gráfico 53
DISTRIBUCION POR EDAD DE LAS MUERTES Y EDAD MODAL DE LAS DEFUNCIONES
EN LAS TABLAS MASCULINAS DE GUATEMALA 1950 Y MEXICO 1970



Como puede verse en este gráfico, a medida que la mortalidad disminuye, las defunciones se van desplazando hacia las últimas edades, produciendo el máximo a una edad mayor. En la tabla de vida de Guatemala, donde se concentra una mayor cantidad de muertes en las primeras edades, el máximo correspondiente a las edades adultas se produce a los 67.5 años (grupo 65-69); después de esa edad el número de integrantes de la cohorte que quedan con vida es ya muy reducido para que el número de defunciones siga creciendo. En cambio, en la tabla de vida de México, donde ocurre una cantidad de muertes bastante menor en las edades infantiles y juveniles, el número de defunciones sigue aumentando hasta una edad más avanzada, presentándose la edad modal en el grupo 75-79, o, en forma simplificada, a los 77.5 años.

■ Otra característica notable de la curva de las muertes, o sea, de la función d_x , es que la edad media de esta distribución representa la esperanza de vida al nacer.

$$(141) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^w \bar{x}_i \cdot d_i}{\sum_{i=0}^w d_i}$$

En efecto, en el numerador se tiene el producto de las defunciones ocurridas en cada grupo de edades, por la edad media de cada grupo, lo cual da el total de años vividos por todos los componentes de la generación l_0 de la tabla de vida. Dividiendo dicho valor por la suma de las defunciones de todas las edades, que es igual a l_0 , se obtiene el número medio de años vividos por cada persona, es decir, la esperanza de vida al nacer.

Dado el interés de esta relación, en el cuadro 7 se presenta el cálculo de la edad media de las defunciones de la tabla masculina de Guatemala de 1950, según dos supuestos.

Primero, en forma más burda, tomando como edad media de cada grupo de edades la edad central, es decir, 0.5, 1.5, etc. Se obtiene de esta manera una edad media de las defunciones igual a 39.51 años, que es bastante similar a la esperanza de vida al nacer de la tabla de vida considerada, que es de 39.59 años.

Luego, en las dos últimas columnas del cuadro, se ha repetido el cálculo, tomando esta vez el valor exacto de la edad media de cada grupo, que es igual a $x + \frac{k_x}{n_x}$ (ya que x da el número de años vividos por las n_x personas entre las edades 0 y x , mientras que k_x representa el número medio de años vividos por esas personas, en el intervalo $x, x+n$). En este caso la edad media de las defunciones resulta exactamente igual a la esperanza de vida al nacer (39.59 años).

6.2.5 Las tasas de mortalidad por edades

Por último, cuando se desea conocer el comportamiento y la tendencia de la mortalidad por edades, con el fin de determinar los niveles de cada grupo y los tramos donde se han producido las mayores ganancias, las comparaciones suelen efectuarse en términos de tasas de mortalidad por edad. Generalmente las comparaciones se hacen por grupos quinquenales, aunque también pueden considerarse tramos de edades más amplios.

Cuadro 7
 CALCULO DE LA EDAD MEDIA DE LAS DEFUNCIONES DE LA TABLA DE MORTALIDAD
 MASCULINA DE GUATEMALA DE 1950, SEGUN DOS SUPUESTOS

Grupos de edades $x, x+n$	Defunciones de la tabla $\frac{d}{n} x$	Supuesto 1		Supuesto 2	
		Edad media de c/grupo $\bar{x}=x+n/2$	Producto $\bar{x} \cdot \frac{d}{n} x$	Edad media de c/grupo $\bar{x}=x+k$	Producto $\bar{x} \cdot \frac{d}{n} x$
		0 - 1	17 170	0.5	8 585
1 - 2	4 682	1.5	7 023	1.5	7 023
2 - 3	3 055	2.5	7 638	2.5	7 368
3 - 4	1 874	3.5	6 559	3.5	6 559
4 - 5	1 288	4.5	5 796	4.5	5 796
5 -10	3 525	7.5	26 438	7.67	27 037
10 -15	1 834	12.5	22 925	12.67	23 237
15 -20	2 241	17.5	39 218	17.67	39 598
20 -25	2 557	22.5	57 532	22.66	57 942
25 -30	2 738	27.5	75 295	27.69	75 815
30 -35	3 054	32.5	99 255	32.69	99 835
35 -40	3 162	37.5	118 575	37.68	119 144
40 -45	3 852	42.5	163 710	42.66	164 326
45 -50	4 229	47.5	200 878	47.66	201 554
50 -55	4 780	52.5	250 950	52.65	251 667
55 -60	5 248	57.5	301 760	57.64	302 495
60 -65	6 337	62.5	396 062	62.61	396 760
65 -70	6 777	67.5	457 448	67.58	457 990
70 -75	6 607	72.5	479 008	72.54	479 272
75 -80	6 035	77.5	467 712	77.48	467 592
80 -85	5 074	82.5	418 605	82.35	417 844
85 - w	3 881	87.5	339 588	88.83	344 749
Total	100 000		3 950 560		3 958 737
Edad media de las defunciones (\bar{x}):			39.51		39.59
Esperanza de vida al nacer de la tabla masculina de Guatemala de 1950:					39.59

En el cuadro 8 se presenta una aplicación de este tipo. Utilizando como base las probabilidades de muerte de las tablas de mortalidad de Costa Rica de 1963 y 1973, se han determinado, en la columna (4), los porcentajes de reducción ocurridos en cada uno de los grupos de edades, en el periodo considerado. Se observa allí que las mayores ganancias corresponden a los primeros 15 años de vida, decreciendo luego estos porcentajes hacia las últimas edades, donde las mejoras en las condiciones de mortalidad han sido muy pequeñas.

En el mismo cuadro se ha hecho una comparación con las probabilidades de muerte de las tablas modelo de Coale y Demeny, familia Oeste, Nivel 25 (que es el de menor mortalidad), con el fin de determinar cuáles son las edades que tienen mayores posibilidades de continuar disminuyendo en el futuro. La última columna del cuadro permite observar, de acuerdo con la experiencia de mortalidad representada por el modelo, que las mayores posibilidades de reducción de la mortalidad de Costa Rica se presenta en las edades jóvenes. En particular, la mortalidad de 1 a 5 años podría reducirse casi en su totalidad (96.1 por ciento), de acuerdo con el comportamiento prevaleciente en los países de mas baja mortalidad, representados por el nivel 25 del modelo.

Respecto a la ganancia de las últimas edades, el profesor Bourgeois-Pichat señala, en un interesante libro que acaba de ser publicado por el CELADE ⁶⁶, que en los próximos años muy probablemente se logren avances importantes sobre el proceso de envejecimiento, en cuyo caso se lograrían cambios sustanciales, tanto en los patrones

⁶⁶ Bourgeois-Pichat, Jean, Nuevas fronteras de la demografía, CELADE, Serie E N930, Santiago, Chile, octubre de 1985. Capítulo II.

Cuadro 8

REDUCCION EN LAS PROBABILIDADES DE MUERTE POR EDADES
SEGUN LAS TABLAS DE VIDA DE COSTA RICA DE 1963 Y 1973.
POSIBILIDADES DE REDUCCION FUTURA.

Grupos de Edades	Probabilidades de muerte 1000 · nq_x			Porcentaje de reducción	
	C.Rica 1963	C.Rica 1973	C-D, Oeste Nivel 25	1963-73	1973-CD
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	80.2	49.5	5.8	38.3	88.3
1-4	31.1	12.8	0.5	58.8	96.1
5-9	7.6	4.0	0.4	47.4	90.0
10-14	4.2	2.9	0.4	31.0	86.2
15-19	5.7	5.1	0.8	10.5	84.3
20-24	8.1	7.2	1.2	11.1	83.3
25-29	10.0	7.7	1.2	23.0	84.4
30-34	12.5	9.9	1.5	20.8	84.8
35-39	15.5	13.0	2.2	16.1	83.1
40-44	20.6	17.4	3.9	15.5	77.6
45-49	28.2	24.0	8.0	14.9	66.7
50-54	39.3	34.5	14.8	12.2	57.1
55-59	61.2	52.1	27.8	14.9	46.6
60-64	95.4	83.0	47.7	13.0	42.5
65-69	149.7	133.7	86.1	10.7	35.6
70-74	227.6	207.6	151.1	8.8	27.2
75-79	316.8	302.2	255.7	4.6	15.4
80-84	437.6	427.3	392.4	2.4	8.2

de mortalidad por edad, como en la composición por edades de la población. Dadas las promisorias perspectivas que allí se presentan, confiamos que esos cambios se produzcan en el futuro cercano.

6.3 Análisis de la mortalidad por causas de muerte

Otra aplicación usual de la tabla, es el estudio de la mortalidad por causas de muerte. Mediante la técnica de la tabla de vida se puede determinar cuántos años de vida pierde una población, debido al efecto de una o varias causas de muerte, o recíprocamente, cuántos años se ganarían en la esperanza de vida si algunas de estas causas, o varias causas combinadas, fueran eliminadas o disminuidas. Por medio de tales tablas se pueden calcular también otras medidas, como la probabilidad eventual de morir por una causa de muerte determinada. Las primeras aplicaciones de este tema fueron efectuados por Makeham en 1875 ⁶⁷, y más recientemente por Dublin, Lotka y Spiegelman ⁶⁸.

Siguiendo este enfoque, se han realizado varias aplicaciones con datos de mortalidad por causas de varios países de América Latina. Por ejemplo Cerisola ⁶⁹, en un trabajo publicado en 1968, utilizando datos de mortalidad por causas de la población masculina de Argentina de 1960, calculó la esperanza de vida que resultaría eliminando diversas causas de muerte. En este trabajo puede verse también una explicación detallada de esta metodología. Algunos resultados principales se presentan en el cuadro 9.

⁶⁷ Makeham, W.M., "On an Application of the Theory of the Composition of Decrement Forces", Journal of the Institute of Actuaries, Vol 18, 1875.

⁶⁸ Dublin, L., Lotka, A., y Spiegelman, M., Length of Life. A Study of the Life Table, New York, The Ronald Press Company, 1949.

⁶⁹ Cerisola, M.J.E., República Argentina: Análisis de la mortalidad por causas, 1960. CELADE, Serie C. No. 109, Santiago, Chile, 1968.

De las cuatro causas de muerte consideradas (enfermedades infecciosas, cáncer, cardiovasculares y accidentes), la erradicación de muertes por enfermedades cardiovasculares es la que produciría un impacto mayor sobre la esperanza de vida al nacer, que pasaría de 63.2 a 66.4 años, con una ganancia de 3.2 años. El efecto que tiene la eliminación de una determinada causa de muerte sobre la esperanza de vida a distintas edades, depende de la distribución por edades de las muertes; por ejemplo, la eliminación de la mortalidad por causas infecciosas, ocasiona una ganancia de 1.9 años en la esperanza de vida al nacer, pero tiene un impacto mucho menor sobre la esperanza de vida a los 15 y 65 años, por tratarse de enfermedades propias de las primeras edades.

Cuadro 9

EFFECTO SOBRE LA ESPERANZA DE VIDA POR LA ELIMINACION DE DETERMINADAS CASUAS DE MUERTE. POBLACION MASCULINA DE ARGENTINA, 1960

Causa de muerte	e_0^o	e_{15}^o	e_{65}^o	Ganancia a la edad x		
				0	15	65
<u>Total del país</u>	<u>63.2</u>	<u>53.8</u>	<u>12.7</u>			
Eliminando infecciones.....	65.1	54.6	13.0	1.9	0.8	0.3
Eliminando cáncer	66.2	57.0	14.6	3.0	3.2	1.9
Eliminando cardiog vasculares.....	66.4	57.1	14.7	3.2	3.3	2.0
Eliminando acci - dentes.....	65.2	55.6	12.9	2.0	1.8	0.2

Fuente: Cerisola, E., República Argentina: Análisis de la mortalidad por causas, 1960. CELADE, Serie C. No. 109. Santiago, Chile, 1968.

■ El procedimiento utilizado para determinar el número de años que se gana en la esperanza de vida, al eliminar una o más causas de muerte, se apoya en el supuesto principal de que las personas salvadas de morir por una causa determinada tienen la misma probabilidad de morir por las otras causas que cualquier individuo de la población. La metodología es relativamente sencilla, comprendiendo los siguientes pasos:

1. Se requiere como punto de partida una tabla de mortalidad corriente y las defunciones por causa de muerte clasificadas por grupos de edades.

2. Se distribuyen las defunciones de la tabla, de cada grupo de edades (${}_n d_x$), según causas de muerte, de acuerdo con las proporciones observadas en la población real. Si se separan las defunciones en dos grupos, los que mueren por la causa i y los que mueren por las otras causas ($-i$) se tiene:

$$(142) \quad {}_n d_x = {}_n d_x^i + {}_n d_x^{(-i)}$$

3. Se calcula la probabilidad de muerte corregida ${}_n q_x'$, que resulta una vez eliminada una causa i de muerte cualquiera. Dicha probabilidad corregida es igual a:

$$(143) \quad {}_n q_x' = \frac{{}_n d_x - {}_n d_x^i}{l_x - 1/2 {}_n d_x^i}$$

o sea, los casos favorables al acontecimiento, que son las personas que han muerto por las otras causas, dividido por los casos posibles, que son las personas que han estado expuestas a ese riesgo de muerte. En el numerador se restan los fallecidos por la causa i que ahora se eliminan, mientras que en el denominador se resta la mitad de esas defunciones, bajo el supuesto de que las

muerres por la causa i se distribuyen uniformemente dentro del intervalo $x, x+n$, en cuyo caso esas personas no han estado expuestas al riesgo de morir por las otras causas durante la mitad del tiempo.

4. Por último, se calculan las restantes funciones de la tabla de mortalidad corregida, eliminando las muertes por la causa i , suponiendo una raíz arbitraria $l'_0 = 100000$, y aplicando las siguientes relaciones ya conocidas:

$$a) \quad {}_n d'_x = l'_x \cdot n q'_x$$

$$b) \quad l'_{x+n} = l'_x - {}_n d'_x$$

$$c) \quad L'_0 = f_0 l'_0 + (1-f_0) l'_1$$

f_0 se obtiene de la tabla de mortalidad base

$$d) \quad {}_4 L'_1 = {}_4 k_1 l'_1 + (4 - {}_4 k_1) l'_5$$

${}_4 k_1$ se obtiene de la tabla de mortalidad base

$$e) \quad {}_5 L'_x = 5/2 (l'_x + l'_{x+n})$$

$$f) \quad L'_{85+} = 3.862 l'_{85} + 0.0000466 (l'_{85})^2$$

$$g) \quad T'_x = \sum_n L'_x$$

$$h) \quad e'_x = \frac{T'_x}{l'_x}$$

Por ejemplo, en los cuadros 10 y 11 se presenta el cálculo de la esperanza de vida resultante, al eliminar las muertes por enfermedades infecciosas de la población masculina de Argentina de 1960. En las columnas (1) a (4) del cuadro 10 se presentan las funciones básicas de la

tabla de vida de Argentina. En la columna (5) se indica el porcentaje que representan las defunciones por enfermedades infecciosas, con respecto al total de muertes, en cada grupo de edad. Multiplicando las columnas (3) y (5) se obtienen en la columna (6) las defunciones de la tabla referidas a la causa *i*. Luego, aplicando la fórmula (143) se obtienen las probabilidades de muerte corregidas.

Con estas probabilidades de muerte, en el cuadro 11 se ha calculado la tabla resultante, al eliminar las muertes por causas infecciosas. Las esperanzas de vida a edades sucesivas, se comparan con las obtenidas en la tabla corriente. En particular para la edad 0 se obtiene una ganancia de 1.97 años, que es igual al valor ya presentado en el cuadro 9 (pág 217). Otras funciones de la tabla pueden compararse directamente con la tabla de mortalidad de todas las causas, presentada en las primeras columnas del cuadro 10.

■ Recientemente, Preston, Keyfitz y Schoen ⁷⁰, han calculado tablas de mortalidad por causas de muerte, para unos 50 países del mundo por sexo y diferentes fechas. En cada caso se ha calculado cuatro tablas: una con las tasa de mortalidad por edad de las 12 causas principales de muerte, otra con la tabla de vida para todas las causas combinadas, una tercera con las probabilidades de morir según cada una de esas 12 causas, y una cuarta con los valores de la función l_x que resultaría al eliminar cada causa particular de muerte y el número de años que agregaría a la esperanza de vida. Dichas tablas proporcionan información valiosa para hacer análisis más documentados sobre este tema.

⁷⁰ Preston, S., Keyfitz, N. y Schoen, R., Causes of Death, Life Tables for National Populations, Seminar Press, New York, 1972.

Cuadro 10

CALCULO DE LAS PROBABILIDADES DE MUERTE ELIMINANDO LAS DEFUNCIONES
POR ENFERMEDADES INFECCIOSAS. ARGENTINA, POBLACION MASCULINA, 1960.

Grupos de edades $x, x+n$	Tabla de vida masculina de Argentina de 1960, todas las causas				Porcentaje de muertes por causa i	Muertes Infecciosas $\frac{d^i}{n^i_x}$	$\frac{d^i}{n^i_x} - \frac{d^i}{n^i_x}$ $l_x - 1/2 \frac{d^i}{n^i_x}$
	n^0_x	l_x	$\frac{d}{n^0_x}$	e^0_x			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0.06146	100 000	6 146	63.16	18.17	1 116	0.05059
1 - 4	0.01468	93 854	1 378	66.28	34.22	472	0.00968
5 - 9	0.00463	92 476	424	63.25	24.95	106	0.00345
10 -14	0.00397	92 052	365	58.53	17.36	63	0.00328
15 -19	0.00724	91 687	664	52.76	12.84	85	0.00631
20 -24	0.00967	91 023	880	49.13	12.31	108	0.00849
25 -29	0.01099	90 143	991	44.59	13.16	130	0.00956
30 -34	0.01307	89 152	1 165	40.05	12.87	150	0.01139
35 -39	0.01780	87 987	1 566	35.55	12.32	193	0.01562
40 -44	0.02549	86 421	2 203	31.14	9.41	207	0.02312
45 -49	0.03901	84 218	3 285	26.89	8.44	277	0.03577
50 -54	0.05907	80 933	4 781	22.87	6.82	326	0.05516
55 -59	0.08821	76 152	6 717	19.14	5.81	390	0.08330
60 -64	0.12824	69 435	8 904	15.73	5.87	523	0.12115
65 -69	0.18402	60 531	11 139	12.66	5.17	557	0.17562
70 -74	0.26711	49 392	13 193	9.93	5.00	769	0.25349
75 -79	0.38051	36 199	13 774	7.61	5.83	803	0.36232
80 -84	0.51563	22 425	11 563	5.75	6.97	806	0.48847
85 - w	1.00000	10 862	10 862	4.32	8.33	905	1.00000

Cuadro 11

TABLA DE MORTALIDAD EXCLUIDAS LAS MUERTES POR ENFERMEDADES INFECCIOSAS.
ARGENTINA, POBLACION MASCULINA, 1960.

$x, x+n$	${}_nq'_x$	l'_x	${}_nd'_x$	L'_x	T'_x	$(e'_x)^0$	e'_x	Diferencia
0	0.05059	100 000	5 059	96 162	6 512 530	65.13	63.16	1.97
1 - 4	0.00968	94 941	919	377 283	6 416 368	67.58	66.28	1.30
5 - 9	0.00345	94 022	324	469 300	6 039 085	64.23	63.25	0.98
10 -14	0.00328	93 698	307	467 722	5 569 785	59.44	58.53	0.91
15 -19	0.00631	93 391	589	465 482	5 102 063	54.63	52.76	0.87
20 -24	0.00849	92 802	788	462 040	4 636 581	49.96	49.13	0.83
25 -29	0.00956	92 014	880	457 870	4 174 541	45.37	44.59	0.78
30 -34	0.01139	91 134	1 038	453 075	3 716 671	40.78	40.05	0.73
35 -39	0.01562	90 096	1 407	446 962	3 263 596	36.22	35.55	0.67
40 -44	0.02312	88 689	2 050	438 320	2 816 634	31.76	31.14	0.62
45 -49	0.03577	86 639	3 099	425 448	2 378 314	27.45	26.89	0.56
50 -54	0.05516	83 540	4 608	406 180	1 952 866	23.38	22.87	0.51
55 -59	0.08330	78 932	6 575	378 222	1 546 686	19.60	19.14	0.46
60 -64	0.12115	72 357	8 766	339 870	1 168 464	16.15	15.73	0.42
65 -69	0.17562	63 591	11 168	290 035	828 594	13.03	12.66	0.37
70 -74	0.25349	52 423	13 289	228 892	538 559	10.27	9.93	0.34
75 -79	0.36232	39 134	14 179	160 222	309 667	7.91	7.61	0.30
80 -84	0.48847	24 955	12 190	94 300	149 445	5.99	5.75	0.24
85 - w	1.00000	12 765	12 765	55 145	55 145	4.32	4.32	0.00

$f_0 = 0.2414$, ${}_4k_1 = 1.30$, fueron tomados de la tabla que incluye todas las causas.

[]

6.4 Estimaciones demográficas mediante probabilidades de vida y de muerte

Las probabilidades de vida y de muerte de la tabla de vida permiten estudiar las diversas relaciones analíticas que pueden establecerse entre las diferentes variables demográficas, y realizar estimaciones que facilitan su comprensión.

Por ejemplo, el siguiente ejercicio permite apreciar el efecto que tiene el descenso de la mortalidad, en el aumento de la fecundidad de la población.

Suponiendo que un hombre de 20 años se casa con una mujer de 15, calcular la probabilidad de que la pareja sobreviva los próximos 35 años, según dos supuestos:

- a) En el caso de que la mortalidad sea igual a la prevaleciente en las tablas de vida por sexo de Costa Rica de 1950.
- b) Suponiendo que la mortalidad es igual a la obtenida en las tablas de vida de Costa Rica de 1973.

Luego, comparar la ganancia en la probabilidad individual, con respecto al aumento de la probabilidad conjunta de la pareja.

a) Con las tablas de Costa Rica de 1950, las probabilidades de sobrevivir del hombre, la mujer y la pareja, resultan, respectivamente:

$${}_{35}P_{20}^h = \frac{l_{55}}{l_{20}} = \frac{64\ 372}{81\ 451} = 0.79032$$

$${}_{35}P_{15}^m = \frac{l_{50}}{l_{15}} = \frac{70\ 994}{84\ 004} = 0.84513$$

$$({}_{35}P_{20}^h) ({}_{35}P_{15}^m) = (0.79032) (0.84513) = 0.66792$$

b) Por su parte, con las tablas de vida de Costa Rica de 1973, las mismas probabilidades resultan:

$${}_{35}P_{20}^h = \frac{l_{55}}{l_{20}} = \frac{80\ 041}{91\ 935} = 0.87063$$

$${}_{35}P_{15}^m = \frac{l_{50}}{l_{15}} = \frac{87\ 859}{93\ 861} = 0.93605$$

$$({}_{35}P_{20}^h)({}_{35}P_{15}^m) = (0.87063)(0.93605) = 0.81495$$

Comparando los resultados obtenidos en a) y b) resultan las siguientes ganancias en la probabilidad de sobrevivir del hombre, la mujer y la pareja:

	Tabla de 1950	Tabla de 1973	Relación 1973/1950
Hombre	0.79032	0.87063	1.10
Mujer	0.84513	0.93605	1.11
Pareja	0.66792	0.81495	1.22

La reducción de la mortalidad ocurrida entre 1950 y 1973, aumenta alrededor del 10 por ciento el número de hombres y mujeres sobrevivientes, mientras que la probabilidad conjunta se eleva más del 20 por ciento. Esto significa, que el descenso de la mortalidad tiene una incidencia más que proporcional en la sobrevivencia de la pareja, lo cual ocasiona -suponiendo que los demás factores permanecen constantes- un aumento en la fecundidad, medido a través de la tasa global de fecundidad, la tasa bruta de reproducción, etc. Este efecto de la reducción de la mortalidad sobre la fecundidad, es uno de los factores que ha explicado el aumento de la fecundidad ocurrido en Costa Rica durante la década de 1950.

6.5 Estudios sobre estructura por edad de la población

La tabla de vida, interpretada como una población estacionaria, constituye un importante instrumento, para el análisis de la estructura por edades y la dinámica de la población.

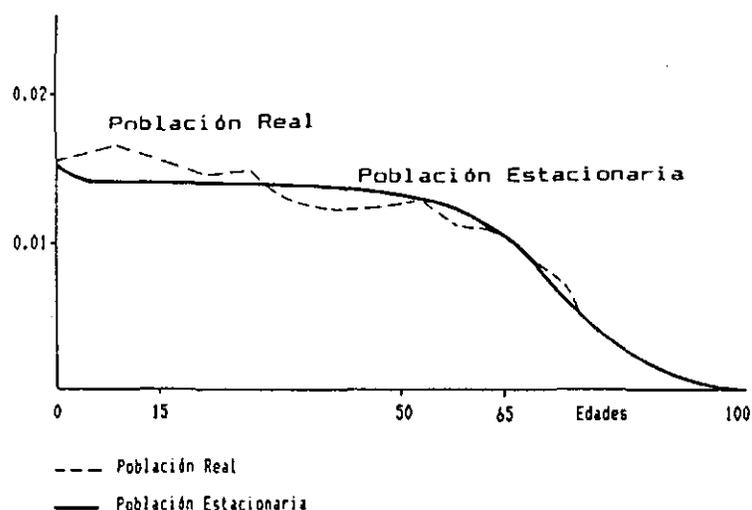
Tal como se ha indicado en el capítulo 2, una población estacionaria se obtiene manteniendo un número anual constante de nacimientos, bajo el régimen fijo de la tabla de mortalidad por edades. En este modelo, la población total permanece constante en el tiempo, la estructura por edades es proporcional a la función ${}_nL_x$ de la tabla de vida, la tasa de crecimiento es igual a cero, y las tasas de natalidad y mortalidad son iguales a la recíproca de la esperanza de vida al nacer.

■ En los países desarrollados la tasa de crecimiento de la población es muy cercana a cero, por lo cual las características reales de la población, son muy similares a las del modelo de población estacionaria correspondiente a la tabla de mortalidad de cada país.

Este comportamiento puede verse en el gráfico 54 donde se presenta la distribución por edades de la población de Inglaterra y Gales según el censo de 1971, la cual resulta muy próxima a la población estacionaria correspondiente a la tabla de mortalidad de dicho país, del período 1970-72. Asimismo, la tasa bruta de mortalidad del país era igual en dichos años a 12.1 por mil, en tanto que en la población estacionaria resulta:

$$(144) \quad d = \frac{1}{e_0} = \frac{1}{71.95} = 13.9 \text{ por mil.}$$

Gráfico 54
DISTRIBUCION POR EDADES DE LA POBLACION DE INGLATERRA Y
GALES DE 1971 Y LA POBLACION ESTACIONARIA DE 1970-72.



■ Esta característica de las poblaciones reales, de acercarse al modelo de población estacionaria, deberá verificarse también en el futuro en los actuales países en desarrollo, ya que no pueden mantenerse permanentemente tasas de crecimiento positivas, con las cuales la población crecería indefinidamente.

En el cuadro 12 y gráfico 55 se presenta la estructura por grandes grupos de edades de la población de Costa Rica, según el censo de 1973 y la población estacionaria correspondiente a la tabla de vida de 1972-1974. Debido a que el país tiene una tasa de crecimiento positiva (del orden del 2.5 por ciento anual), su distribución resulta más joven que la correspondiente a la población estacionaria.

De acuerdo con los valores del cuadro, a medida que la tasa de crecimiento de la población de Costa Rica se aproxime hacia cero, bajará en forma notoria la proporción de personas de 0 a 14 años, a menos de la mitad del valor actual, aumentará ligeramente la proporción de personas de 15 a 49 años (especialmente por el aumento del grupo 35 a 49), se duplicará la proporción de 50 a 64 (constituida por personas próximas al retiro), y aumentará más de cuatro veces la proporción de población pasiva de 65 años y más.

Tales cambios deberán preverse con la anticipación necesaria, a fin de realizar la planificación correspondiente, en los programas de educación, salud, actividad económica y atención del número creciente de personas de edad avanzada.

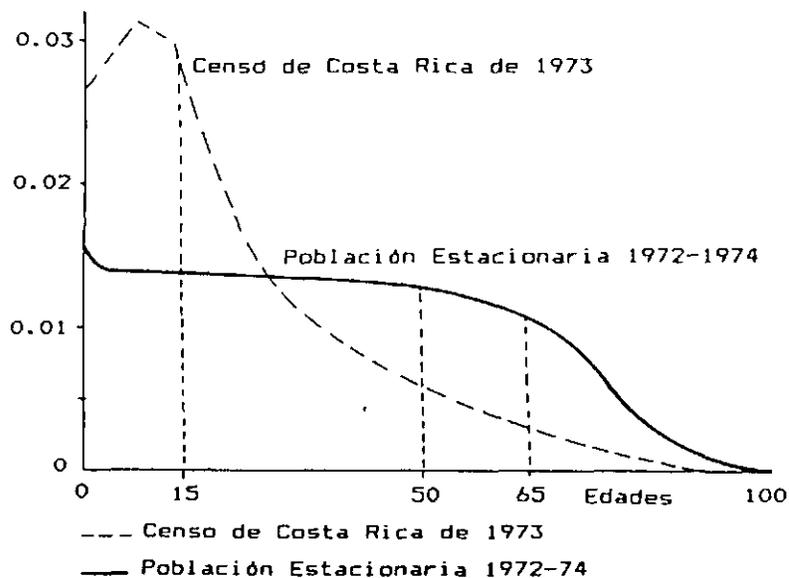
■ Por otra parte, la población estacionaria se puede combinar con distintas tasas de crecimiento o diversas leyes de fecundidad por edad, para reproducir modelos teóricos más parecidos a las poblaciones reales que prevalecen actualmente en los países en desarrollo. Tales modelos son de gran utilidad para estudiar las relaciones analíticas entre las diversas variables demográficas, como por ejemplo, para determinar el comportamiento de la estructura por edad de la población, frente a diferentes tasas de crecimiento. También suelen utilizarse, para hacer estimaciones demográficas en países con estadísticas incompletas y para evaluar las estimaciones que se realizan periódicamente, de las diversas características demográficas de las poblaciones reales.

Cuadro 12
DISTRIBUCION POR EDADES DE LA POBLACION DE COSTA RICA,
SEGUN EL CENSO DE 1973 Y LA POBLACION ESTACIONARIA
DE 1972-1974

Grupos de edades	Distribución por edades (por cien)		Cociente: Estacionaria real
	Censo 1973	Población estacionaria 1972-1974	
0 - 14	44.05	20.61	0.47
15 - 49	45.32	46.33	1.02
50 - 64	7.10	17.57	2.47
65 y más	3.53	15.49	4.40
Total	<u>100.00</u>	<u>100.00</u>	<u>1.00</u>

Gráfico 55

DISTRIBUCION POR EDAD DE LA POBLACION DE COSTA RICA,
SEGUN EL CENSO DE 1973 Y LA POBLACION ESTACIONARIA
DE 1972-1974.



[REDACTED]

6.6 Estudios de fecundidad, reproductividad y crecimiento de la población

Las diversas funciones de la tabla de vida, así como su técnica de análisis, son de frecuente aplicación también, en estudios de fecundidad, reproductividad y crecimiento de la población.

6.6.1 Como ejemplo de utilización de la tabla en estudios de fecundidad, puede mencionarse el procedimiento de análisis del intervalo intergenésico, que permite estudiar el proceso de construcción de la familia, mediante una serie de etapas, donde la mujer pasa sucesivamente del matrimonio al primer hijo, del primero al segundo, y así sucesivamente, hasta alcanzar el tamaño de familia completa. Mediante la técnica de la tabla de vida se puede determinar la probabilidad que tienen las mujeres de cada paridad, de tener un hijo adicional, así como el tiempo o intervalo medio entre uno y otro nacimiento. Generando tablas separadas para varios subgrupos de una población, definidas en término de la edad, cohorte, período de tiempo, lugar de residencia, educación, estatus ocupacional y otras variables, se pueden hacer diversos estudios diferenciales de fecundidad. Rodríguez y Hobcraft ⁷¹, han realizado un valioso estudio piloto en este campo, en el marco de la Encuesta Mundial de Fecundidad, para el análisis del intervalo intergenésico mediante la tabla de vida. El estudio se refiere a Colombia, y sus resultados han mostrado que este tipo de análisis es más sensible que los métodos convencionales para indentificar el comienzo de la declinación de la fecundidad en los diversos sectores de la población.

⁷¹ Rodríguez, B., y Hobcraft, J., Illustrative Analysis: Life Table Analysis of Birth Intervals in Colombia, WFS, Scientific Reports, International Statistical Institute, London, 1980.

6.6.2 Por otra parte, combinando la tabla de vida con las tasas de fecundidad por edad, se obtienen diversos indicadores fundamentales para medir la reproductividad y el crecimiento de una población. Entre estos indicadores cabe destacar la tasa neta de reproducción, que representa la relación entre los nacimientos totales de dos generaciones sucesivas y la tasa intrínseca de crecimiento, la cual mide la capacidad de crecimiento de una población sin estar afectada por la distribución por edad arbitraria.

En el cuadro 13 se presenta el cálculo de la tasa neta de reproducción (TNR), con los datos de la población de Honduras del período 1975-1980.

Cuadro 13
TASA NETA DE REPRODUCCION CALCULADA A PARTIR DE LA POBLACION ESTACIONARIA FEMENINA Y LAS TASAS DE FECUNDIDAD FEMENINAS DE LA POBLACION DE HONDURAS DEL PERIODO 1975-1980

Grupos de edades exactas $x, x+5$	Población estacionaria femenina $a/$ 5^L_x	Tasas de fecundidad femeninas $a/$ 5^F_x	Producto $5^L_x \cdot 5^F_x$
15-20	4.23886	0.0729	0.3090
20-25	4.18816	0.1525	0.6387
25-30	4.12056	0.1596	0.6576
30-35	4.03626	0.1415	0.5711
35-40	3.93922	0.1045	0.4116
40-45	3.82916	0.0561	0.2148
45-50	3.69771	0.0095	0.0351
Tasa neta de reproducción $\Sigma 5^L_x \cdot 5^F_x$			2.8379

$a/$ Secretaría Técnica del Consejo Superior de Planificación Económica y Centro Latinoamericano de Demografía, Honduras: Proyecciones de población. Volumen I, San José, Costa Rica, abril de 1981.

Se obtiene en este caso una TNR = 2.838, lo cual significa que, de acuerdo con los niveles de fecundidad de Honduras de 1975-1980, cada 1 000 mujeres son reemplazadas por 2 838 en la generación siguiente. Una TNR = 1, significa que la población tiene un nivel combinado de mortalidad y fecundidad tal, que le permite mantener un número constante de personas, mientras que los valores mayores y menores que uno corresponden, respectivamente, a poblaciones crecientes y decrecientes.



6.7 Fijación de metas y evaluación de programas de salud

Entre los diferentes tipos de análisis que pueden hacerse con la tabla de vida, cabe mencionar, para tener un panorama referido a diversos campos, la elaboración de metas y evaluación de programas de salud.

6.7.1 En el "Plan Decenal de Salud para las Américas", elaborado por la OPS en 1973 ²², se establecieron diversas metas para ser cumplidas en los diez años subsiguientes, por cada uno de los países de la región. Entre estas metas se citaba:

- a) Reducir la mortalidad de menores de un año en un 40 por ciento, con rango de 30 a 50 por ciento.
- b) Reducir la mortalidad de los niños de 1 a 4 años en un 60 por ciento, con rango de 50 a 70 por ciento.

²² Organización Panamericana de Salud, Plan Decenal de Salud para las Américas. Oficina Sanitaria Panamericana, Documento Oficial Nº 118, Washington, enero de 1973.

c) Reducir la mortalidad por sarampión, tosferina y tétanos a 1.0, 1.0 y 0.5 por cien mil habitantes, respectivamente.

d) Reducir la mortalidad materna en un 40 por ciento, con rango de 30 a 50 por ciento.

Sobre esta base, y a fin de fijar las metas del Plan Decenal de Salud de Costa Rica, se hizo un análisis ⁷³, por medio de las tablas de vida y las tablas modelo, que permitió determinar las posibilidades de alcanzar estas metas, el impacto que tendría cada una de ellas sobre el nivel general de la mortalidad, y la fijación de una meta única, en términos de un indicador global, que es la esperanza de vida al nacer.

Combinando los diferentes porcentajes de reducción, fijados en el plan decenal, dentro de los rangos establecidos, se obtuvo diversas tablas de vida, con ayuda de un computador. Cada una de estas tablas constituía una meta posible, al cabo del decenio, entre las cuales se eligió posteriormente el plan considerado más plausible o apropiado.

6.7.2 Otra aplicación de la tabla de vida, estrechamente vinculada con la anterior, es la evaluación de un programa de salud. A título de ejemplo se comenta aquí la evaluación del programa de salud rural efectuado en Costa Rica en la década de 1970. Para este propósito se clasificaron los 80 cantones del país, según el porcentaje de cobertura y según el número de años de servicio de dicho programa. Para cada grupo de municipios así

⁷³ Ortega, A. y Rincón, M., Algunas estimaciones demográficas sobre la mortalidad para la formulación de las metas del plan de salud de Costa Rica, CELADE, San José, Costa Rica, 1974.

determinados se calcularon las tasas de mortalidad por edad y la tabla de vida correspondiente, para el período inicial 1970-1972, cuando se puso en funcionamiento el programa, y para el período 1974-1976, que eran los últimos años para los cuales se disponía de información cuando se hizo su evaluación. Los resultados en términos de esperanza de vida al nacer se presentan en el cuadro 14.

Cuadro 14

COSTA RICA: EVALUACION DEL PROGRAMA DE SALUD RURAL. GANANCIA EN LA ESPERANZA DE VIDA AL NACER EN LOS DIFERENTES CANTONES DEL PAIS, ENTRE 1970-1972 Y 1974-1976, SEGUN GRADO DE COBERTURA DE LOS PROGRAMAS DE SALUD Y TIEMPO DE SERVICIO DEL PROGRAMA

Cantones según grado de cobertura y tiempo de servicio	Esperanza de vida al nacer		Ganancia (en años)
	1970-72	1974-76	

(a) Según grado de cobertura

Sin cobertura.....	68.76	71.16	2.40
Menos de 25% de cobertura	68.73	71.13	2.40
25 a 50% de cobertura	63.94	67.44	3.50
50 a 75% de cobertura	67.26	71.30	4.04
Más de 75% de cobertura	67.89	72.96	5.07

(b) Según el tiempo de servicio del programa

Sin cobertura.....	68.76	71.16	2.40
Menos de 1 año servicio..	64.36	68.57	4.21
Con 1 año de servicio...	68.47	72.95	4.48
Con 2 años de servicio...	66.67	70.08	3.41
Con 3 años de servicio...	67.92	72.98	5.06

Fuente: Ortega, A., Informe de evaluación del programa de salud rural de Costa Rica entre 1971 y 1975.

En la parte (a) de dicho cuadro puede observarse una clara asociación entre el porcentaje de cobertura y la ganancia de vida alcanzada, siendo por supuesto mayor la ganancia a medida que la proporción de personas incluidas dentro del programa, en cada cantón, es mayor.

A su vez, en la parte (b), donde se han agrupado los cantones según los años de servicio del programa, se encuentra también una relación positiva entre años de servicio y ganancia en la esperanza de vida, con excepción del grupo correspondiente a dos años de servicio, donde se alcanza una reducción menor que lo esperado, debido principalmente a que este grupo está integrado por cantones que tienen en promedio un porcentaje de cobertura más bajo que los restantes ⁷⁴.

En resumen, los resultados del cuadro 14 ponen de manifiesto que las ganancias en la esperanza de vida están asociadas, tanto al grado de cobertura de la población que reside en los diversos cantones, como a los años de servicio de funcionamiento del programa. En especial cuando el porcentaje de cobertura de los cantones es superior al 50 por ciento, o bien cuando el programa tiene más de tres años de servicio, se encuentran los aumentos más sustanciales en la esperanza de vida al nacer, con una ganancia de más de 4 años durante el período de funcionamiento del programa, que representa un notable aumento de más de un año de vida por cada año calendario.

⁷⁴ El porcentaje de cobertura de los grupos es el siguiente: menos de un año de servicio 66 por ciento, un año de servicio 59 por ciento, dos años de servicio 49 por ciento y tres años de servicio 83 por ciento.

[]

6.8 Uso de la tabla de vida para hacer proyecciones de población

El cálculo de los sobrevivientes de una población, conjuntamente con la estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad, son las dos aplicaciones más frecuentes de la tabla de vida. Tal como se ha visto en el capítulo 2 (págs. 73 a 80), mediante el tiempo vivido o la población estacionaria (${}_n L_x$) se pueden calcular relaciones de supervivencia, que permiten estimar el número de sobrevivientes esperados de una fecha a otra.

Si se cuenta con una población por sexo y grupos quinquenales de edades, para un año z cualquiera, multiplicando cada grupo por las relaciones de supervivencia correspondientes, se obtiene una estimación del número de personas sobrevivientes cinco años más adelante. En símbolos:

$$(145) \quad N_{x, x+4}^z ({}_5 P_{x, x+4}) = N_{x+5, x+9}^{z+5}$$

Repitiendo este procedimiento pueden calcularse los sobrevivientes en los años $z+10$ y siguientes. Se puede suponer que la mortalidad será constante en el futuro, o que seguirá una determinada tendencia, que generalmente es decreciente.

Por ejemplo, dada la población masculina de Costa Rica, de 60 años y más, del censo de 1973, estimar el número de sobrevivientes esperados para 1978, suponiendo que dicha población está sujeta a la mortalidad dada por la tabla masculina de Costa Rica de 1972-1974.

Los resultados se resumen en el cuadro siguiente. La población masculina de 60 años y más de 1973 fue tomada del censo levantado el 14 de mayo de dicho año. Las relaciones de supervivencia corresponden a la tabla de vida de Costa Rica presentada en el anexo. Multiplicando los valores correspondientes se obtuvo la población de 1978 estimada:

Grupos de Edades	Censo de 1973 $N_{x,x+4}^{73}$	Relaciones de Supervivencia $S_{x,x+4}^P$	Población Estimada $N_{x,x+4}^{78}$
60-64	19 117	0.87596	
65-69	12 032	0.81179	16 746
70-74	9 863	0.73011	9 767
75-79	5 126	0.51396 a/	7 201
80 y+	5 681		5 554
TOTAL	51 819		39 268

a/ S_{75+}^P

El último grupo se calculó de la siguiente forma:

$$N_{80+}^{78} = (5 126 + 5 681) 0.51396 = 5 554$$

En conjunto, de un total de 51 819 hombres de 60 años y más en 1973, se estima que 39 268 (vale decir poco más del 75 por ciento) estarán vivos 5 años más adelante.

■ Por otra parte, las relaciones de supervivencia suelen utilizarse también, para estimar la población o los nacimientos en forma retrospectiva. Por ejemplo, si se conoce la población de 0-4 años, dividiendo esa población por la relación de supervivencia al nacimiento S_b^P , se obtiene una estimación de los nacimientos de los cinco años precedentes.

[]

6.9 Análisis de características socioeconómicas de la población mediante tablas de decremento múltiple

En las tablas de mortalidad corrientes, vistas hasta ahora, se determina el número de sobrevivientes a cada edad x , de una generación inicial de l_0 nacimientos, la cual disminuye sólo por muertes. En este caso hay, en consecuencia, una única forma de decremento, que es la mortalidad, representada por la función ${}_n d_x$. Dichas tablas suelen denominarse tablas de decremento simple.

Para ciertos estudios demográficos, frecuentemente se desea determinar el número de sobrevivientes de una generación que disminuye como resultado de dos o más factores. Tal es el caso, por ejemplo, de una generación de personas solteras, que puede decrecer por muerte o por matrimonio. Del mismo modo, un grupo de personas que participa en la actividad económica, puede disminuir por muerte, renuncia, o por llegar a la edad de retiro. En tales casos, se pueden construir tablas similares, llamadas tablas de decremento múltiple, las cuales se utilizan para analizar las diversas características socioeconómicas de la población.

Entre las principales tablas de decremento múltiple existentes, pueden mencionarse las tablas de vida activa, tablas de nupcialidad, de vida escolar, de morbilidad, de eficacia y uso de anticonceptivos, etc. Dado que las técnicas de estas tablas son bastante similares, además de que su descripción es bastante extensa, en los puntos siguientes se comenta, como ilustración, sólo la primera de ellas. Para ver el procedimiento seguido en la elaboración de las otras tablas de decremento múltiple, puede consultarse las referencias indicadas en la parte B de la bibliografía final.

6.9.1 Tablas de vida activa

Las tablas de vida activa se obtienen combinando la tabla de mortalidad con las tasas de participación en la actividad económica. Tales tablas permiten calcular el número medio de años de vida activa que tiene una persona de edad x cualquiera, los años de vida inactivos, los ingresos y los retiros de la actividad económica y otros indicadores útiles para estudiar la fuerza de trabajo y para establecer las implicaciones económicas de los cambios en las tasas de actividad y en la estructura por edad de la población 75, 76, 77.

Los principales supuestos en la construcción de una tabla de vida activa son los siguientes:

1. Las entradas a la actividad ocurren hasta una cierta edad m (alrededor de los 35 años), donde la tasa de actividad alcanza su valor máximo.
2. Las salidas de la actividad por causas distintas de la muerte se inician a la misma edad m . A partir de esta edad no se producen nuevas entradas a la actividad económica.
3. La población activa está sometida a la misma ley de mortalidad que la inactiva, es decir, se supone que no hay mortalidad diferencial entre la población activa e inactiva.

⁷⁵ Elizaga, J.C., Dinámica y Economía de la Población, CELADE, Serie E, Nº 27, Santiago, Chile, 1979.

⁷⁶ Rincón, M., Tablas de vida activa, CELADE, Serie B. No. 1008, San José, Costa Rica, 1977.

⁷⁷ Naciones Unidas, Métodos de análisis de los datos censales relativos a las actividades económicas de la población. ST/SOA/Serie A/43, 1969, capítulo I.

Por su parte, los datos básicos para la construcción de una tabla de vida activa son:

- a) Las tasas de actividad por edad ${}_n A_x$, obtenidas del censo de población, a partir de las cuales se obtienen -generalmente en forma gráfica- las tasas suavizadas ${}_n a_x$ y las tasas de actividad a edades exactas a_x .
- b) Una tabla de mortalidad, referida a la fecha del censo, que represente las condiciones de mortalidad de la población estudiada.

En el cuadro 15 siguiente, tomado del libro de Elizaga ya citado ⁷⁸, se presentan las diversas funciones de la tabla de vida activa de la población masculina de Argentina de 1960, cuyos significados son los siguientes:

Columna 1 (a_x). Representa la tasa de actividad a la edad exacta x . Se deriva de la información básica del censo

Columna 2 (l_x). Corresponde al número de sobrevivientes a la edad exacta x , de la tabla de mortalidad básica.

Columna 3 (${}_n L_x$). Es la población estacionaria con edades comprendidas entre x , $x+n$, de la tabla de vida básica.

Columna 4 (l_x^a). Representa el número de sobrevivientes activos a la edad exacta x . Se obtiene multiplicando las columnas (1) y (2).

$$(146) \quad l_x^a = a_x \cdot l_x$$

Por ejemplo, para la edad 20,

$$l_{20}^a = (0.847) 91\ 023 = 77\ 096$$

⁷⁸ Elizaga, J.C., Dinámica y Economía de la Población, op. cit., pág 386.

Columna 5 (${}_n L_x^a$). Representa el número de sobrevivientes activos entre las edades exactas $x, x+n$. Se calcula en forma aproximada integrando por trapecios la columna (4) referida a edades exactas.

$$(147) \quad {}_n L_x^a = \frac{n}{2} (l_x^a + l_{x+n}^a)$$

Para $x = 15$

$${}_5 L_{15}^a = \frac{5}{2} (39\ 059 + 77\ 096) = 290\ 388$$

Columna 6 (T_x^a). Simboliza el número total de años de vida activa vividos por la generación l_x , desde la edad x hasta el final de la vida. Se obtiene acumulando la columna (5) desde el final.

$$(148) \quad T_x^a = \sum_{u=x}^w L_u^a$$

Por ejemplo para $x = 70$:

$$T_{70}^a = 27\ 510 + 75\ 420 = 102\ 930$$

Columna 7 (e_x^0). Es la esperanza de vida a la edad x de la tabla de vida básica. No se utiliza para la construcción de la tabla de vida activa, sino mas bien, para compararla con la vida media activa que se obtiene en las columnas (8) y (9).

Columna 8 [$(e^a)_x$]. Representa la vida media potencialmente activa de una persona de edad x , independientemente de su condición de activa o inactiva. Es igual a

$$(149) \quad (e^a)_x = \frac{T_x^a}{l_x}$$

La diferencia entre esta función y la esperanza de vida a la edad x , da el número medio de años potencialmente inactivos. Por ejemplo, a la edad 15:

$$e_{15}^0 - (e^a)_{15} = 53.7 - 41.4 = 12.3 \text{ años,}$$

lo cual significa que, de acuerdo con las tasas de mortalidad y actividad utilizadas, se espera que un hombre de 15 años, viva un promedio de 53.7 años más, de los cuales pasaría 41.4 como activo y 12.3 años fuera de la actividad.

Columna 9 (e^a_x). Da la esperanza de vida activa de un trabajador de edad exacta x . Es igual a:

$$(150) \quad e^a_x = \frac{T_x^a}{l_x^a}, \quad \text{si } x \geq m$$

o bien

$$(151) \quad e^a_x = \frac{T_x - T_m}{l_x} + \frac{l_m}{l_x} e^a_m \quad \text{si } x < m$$

En la última expresión, el primer término corresponde a una esperanza de vida temporaria, que representa el número de años vividos entre las edades x , $x+m$, ya que en este intervalo sólo hay salidas por muerte, mientras que el segundo es la vida activa diferida, que es igual a la probabilidad de sobrevivir desde la edad x a la edad m multiplicado por la esperanza de vida activa de un trabajador a la edad m .

Esta función representa el número medio de años que en promedio le queda como activo, a una persona de edad x que actualmente está trabajando. La diferencia con la esperanza de vida a la edad x da el número medio de años que le restan como inactivo a un hombre que está ahora trabajando. Por ejemplo para la misma edad 15 considerada anteriormente:

$$e_{15}^a - {}^a a_{15} = 53.7 - 44.5 = 9.2 \text{ años,}$$

significa que un hombre de 15 años que actualmente está trabajando se espera que pase 44.5 años más en actividad y 9.2 años como inactivo.

Columna 10 (${}_n I_x$). Representa el número de entradas o ingresos a la actividad entre las edades exactas $x, x+n$. Por hipótesis, ocurren antes de la edad m . Suponiendo que dichas entradas se distribuyen uniformemente, resulta:

$$(152) \quad {}_n I_x = l_x \cdot n/2 \cdot p_x \cdot (a_{x+n} - a_x) = l_{x+n}/2 \cdot (a_{x+n} - a_x)$$

Por ejemplo para $x=20$,

$${}_5 I_{20} = l_{22.5} (a_{25} - a_{20}) = 90\,583(.096) = 8\,696$$

Columna 11 (${}_n R_x$). Representa el número de salidas por retiro de la actividad económica entre las edades exactas $x, x+n$. Por hipótesis, dichas salidas ocurren después de la edad m . Bajo el supuesto de que las salidas se distribuyen uniformemente, resulta:

$$(153) \quad {}_n R_x = l_x \cdot n/2 \cdot p_x \cdot (a_x - a_{x+n}) = l_{x+n}/2 \cdot (a_x - a_{x+n})$$

Columna 12 (${}_n D_x$). Representa el número de salidas de la actividad por muerte, entre las edades exactas $x, x+n$. Se obtiene mediante las siguientes relaciones:

Si $x < m$:

$$(154) \quad {}_n D_x = l_x^a + {}_n I_x - l_{x+n}^a$$

Si $x \geq m$:

$$(155) \quad {}_n D_x = l_x^a - {}_n R_x - l_{x+n}^a$$

Por ejemplo para $x = 15$:

$${}_5 D_{15} = 39\,059 + 38\,460 - 77\,096 = 423$$

Cuadro 15
ARGENTINA: TABLA ABREVIADA DE VIDA ACTIVA MASCULINA, 1960

Grupos de edades	Tasas de actividad a la edad exacta x		Sobrevivientes			Número acumulado de "años activos" vividos a partir de la edad exacta x	Esperanza de vida a la edad x
	A la edad exacta x	A la edad exacta x	Entre las edades exactas x, x+n	"Activos" a la edad exacta x	"Activos" entre las edades x, x+n		
x, x+n	a_x	l_x	$L_{n,x}$	l_x^a	$L_{n,x}^a$	l_x^a	e_x^0
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(7)	(6)
14	-	91 778	91 733	-	19 530	3 813 868	54.60
15 -19	0.426	91 687	456 671	39 059	290 388	3 794 338	53.73
20 -24	0.847	91 023	453 141	77 096	405 252	3 503 950	49.10
25 -29	0.943	90 143	448 416	85 005	429 820	3 098 698	44.56
30 -34	0.975	89 152	442 966	86 923	433 315	2 668 878	40.03
35 -39	0.982	87 987	436 212	86 403	425 795	2 235 563	35.52
40 -44	0.971	86 421	426 938	83 915	408 333	1 809 768	31.12
45 -49	0.943	84 218	413 468	79 418	381 452	1 401 435	26.86
50 -54	0.904	80 933	393 498	73 163	340 808	1 019 983	22.84
55 -59	0.829	76 152	365 054	63 130	271 350	679 175	19.11
60 -64	0.654	69 435	326 154	45 410	185 255	407 825	15.71
65 -69	0.474	60 531	276 059	28 692	119 640	222 570	12.64
70 -74	0.388	49 392	214 870	19 164	75 420	102 930	9.90
75 -79	0.304	36 199	146 560	11 004	27 510	27 510	7.58

Grupos de edades	Vida media activa		Salidas de la actividad			Tasas de salida		
	"Potencial"	De un trabajador	Entradas a la actividad	Por "retiro"	Por "suerte"	Tasas de entrada	Por "retiro"	Por "suerte"
x, x+n	$o_{(2a)}_x$	o_{ea}_x	$l_{n,x}$	$R_{n,x}$	$D_{n,x}$	$i_{n,x}$	$r_{n,x}$	$d_{n,x}$
	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
14	41.56	45.43	39 078		19	0.5421		0.0010
15 -19	41.38	44.47	38 460		423	0.2313		0.0015
20 -24	38.50	39.78	8 696		787	0.1816		0.0019
25 -29	34.38	35.14	2 869		951	0.1543		0.0022
30 -34	29.94	30.50	620		1 140	0.0642		0.0026
35 -39	25.41	25.87		959	1 529		0.0023	0.0036
40 -44	20.94	21.57		2 389	2 108		0.0059	0.0052
45 -49	16.64	17.65		3 220	3 035		0.0084	0.0080
50 -54	12.60	13.94		5 891	4 142		0.0173	0.0122
55 -59	8.92	10.76		12 739	4 981		0.0469	0.0184
60 -64	5.87	8.98		11 697	5 021		0.0631	0.0271
65 -69	3.68	7.76		4 727	4 801		0.0395	0.0401
70 -74	2.08	5.37		3 595	4 565		0.0477	0.0605
75 -79	0.76	2.50		8 911	2 093		0.3239	0.0761

Fuente: Elizaga, J.C., Dinámica y Economía de la Población, CELADE, Serie E, N°27, Chile, 1979.

Columna 13 (${}_n i_x$). Representa la tasa de entrada a la actividad entre las edades exactas $x, x+n$. Se obtiene dividiendo las entradas del intervalo considerado por la población estacionaria inactiva, que es la que está expuesta al riesgo de ingresar a la actividad.

$$(156) \quad {}_n i_x = \frac{{}_n I_x}{{}_n L_x - {}_n L_x^a}$$

Columna 14 (${}_n r_x$). Representa la tasa de salida por retiro entre las edades exactas $x, x+n$. Dado que los retiros provienen de la población activa, la tasa se calcula dividiendo las salidas de cada grupo de edad por la población estacionaria activa correspondiente.

$$(157) \quad {}_n r_x = \frac{{}_n R_x}{{}_n L_x^a}$$

Columna 15 (${}_n d_x$). Finalmente esta función representa la tasa de salida por muerte entre las edades $x, x+n$. Como en el caso anterior, las tasas se refieren a la población activa. Por tanto, se obtienen dividiendo el número de salidas por muerte, por la población activa correspondiente.

$$(158) \quad {}_n d_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n L_x^a}$$

■ Aplicando la información de la tabla de vida activa, a la población activa e inactiva del censo por grupos de edades, se pueden obtener las entradas y las salidas por retiro y por muerte esperadas para los años subsiguientes:

Las entradas medias anuales serían:

$$(159) \quad I = \sum_n N_x^i n_x^i$$

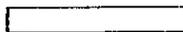
Mientras que las salidas medias anuales se obtienen mediante las relaciones siguientes:

- por retiro:

$$(160) \quad R = \sum_n N_x^a n_x^r$$

- por muerte:

$$(161) \quad D = \sum_n N_x^a n_x^d$$





EJERCICIOS DE REPASO GENERAL
(Ver respuestas al final del libro)

1. -Suponiendo que un hombre de 25 años exactos se casa con una mujer de 20, calcular -utilizando las tablas de mortalidad por sexo de México 1970 presentadas en el anexo- la probabilidad de que, después de 50 años:

- a) Los dos se encuentren con vida.
- b) Sólo el hombre se encuentre con vida.
- c) Sólo la mujer sobreviva.
- d) Los dos hayan fallecido.
- e) Verificar que la suma de estas cuatro probabilidades sea igual a la unidad.

2. -Indicar el significado que tienen en la población estacionaria, los siguientes segmentos, relaciones y áreas del diagrama de Lexis:

- a) \overline{AE}
- b) \overline{FN}
- c) \overline{KL}
- d) $\overline{JN} / \overline{EI}$
- e) $\overline{GO} / \overline{BJ}$
- f) $\overline{KO} / \overline{JK}$
- g) Sup FGN
- h) Sup JLPN

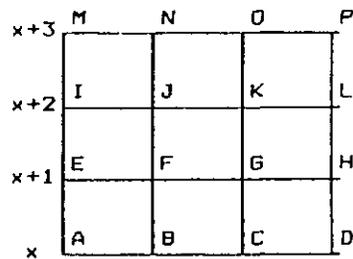


Gráfico 56

3. -Calcular el valor de las siguientes relaciones de supervivencia, utilizando la tabla de vida femenina de Guatemala de 1950 presentada en el anexo.

- a) 5^P_{40-44} ; c) 5^P_{75+}
 b) 5^P_b ; d) 5^P_{65-74}

4. -Definir el significado de la función ${}_nL_x$:

- a) En la tabla de vida
 b) En la población estacionaria.

5. -Indicar si las siguientes relaciones son verdaderas o falsas:

a) $\sum_{a=0}^{x-1} d_a = l_0 - l_x$ ()

b) $P_0 \cdot P_1 = 2^P_0$ ()

c) $q_0 \cdot q_1 = 2^q_0$ ()

d) $5^P_{60-69} \cdot 5^P_{70-74} = 10^P_{60-69}$ ()

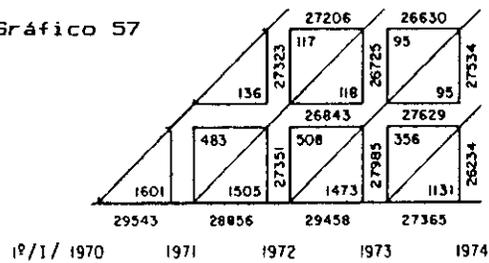
e) $w^k_{85} = e^o_{85}$ ()

6. -Mencionar brevemente las principales limitaciones de las Tablas Modelo de Coale-Demeny.

7. -A partir de la información de la tabla masculina de Guatemala de 1950 presentada en el anexo, indicar cual sería la esperanza de vida al nacer que daría dicha tabla, si la probabilidad de muerte del primer año de vida fuera igual a cero.

8. -Utilizando la información sobre nacimientos, defunciones y población por edades, presentada en el diagrama de Lexis siguiente, calcular las probabilidades de muerte q_0 y q_1 , para el período 1972-73, por el método de Greville de 1940 (presentado en las páginas 143 a 146).

Gráfico 57



9. -A continuación se indican algunos valores de funciones de la tabla de vida. Calcular la probabilidad de muerte entre los 40 y 45 años, utilizando la información que estime necesaria.

$$l_{40} = 87\ 655 \quad ; \quad {}_4p_{40} = 0.98426 \quad ; \quad d_{41} = 334$$

$$l_{41} = 87\ 338 \quad ; \quad {}_3p_{42} = 0.98702 \quad ; \quad q_{40} = 0.00362$$

$$l_{46} = 85\ 449 \quad ; \quad {}_5p_{45} = 0.97162 \quad ; \quad q_{42} = 0.00407$$

10. -Calcular la esperanza de vida temporaria entre los 15 y los 65 años de edad, ${}_{50}e_{15}^o$, con datos de la tabla femenina de México de 1970 presentada en el anexo.

[]

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS



Respuesta a los ejercicios del capítulo 1.

1-1:

$$a) \quad {}_5p_{30} = \frac{l_{35}}{l_{30}}$$

es la probabilidad de que una persona con 30 años exactos llegue con vida a los 35 años (o sobreviva 5 años).

$$b) \quad {}_5q_{17} = \frac{l_{17} - l_{22}}{l_{17}} = \frac{{}_5d_{17}}{l_{17}}$$

es la probabilidad de que una persona con 17 años exactos muera antes de cumplir los 22 años.

1-2:

$$a) \quad {}_5p_{30} = \frac{l_{35}}{l_{30}} = \frac{89\ 025}{90\ 136} = \underline{0.98767}$$

$$b) \quad {}_5q_{17} = \frac{l_{17} - l_{22}}{l_{17}} = \frac{92\ 335 - 91\ 601}{92\ 335} = \frac{734}{92\ 335} = \underline{0.00795}$$

1-3:

$$a) \quad {}_3d_2 = l_2 - l_5 = 93\ 852 - 93\ 280 = \underline{572}$$

b) La edad modal de las defunciones, o sea, la edad adulta a la cual se produce el máximo relativo de las muertes de la tabla de vida, es $x = 77$ años.

$$c) {}_{11}L_{43} = T_{43} - T_{54} = 2\,703\,307 - 1\,778\,116 = \underline{925\,191}$$

$$d) e_{65}^{\sigma} = \underline{14.04} \text{ años}$$

1-4:

$$5P_{30} = \frac{{}_{20}P_{15}}{1 - {}_{15}q_{15}} = \frac{{}_1J_{35}}{1J_{30}}$$

1-5:

x	q _x	l _x	d _x
0	0.05356	100 000	5 356
1	0.00867	94 644	821
2	0.00323	93 823	303

1-6:

$$4d_1 = 5d_0 - d_0 = l_0 (5q_0 - q_0)$$

$$l_1 = l_0 - d_0 = l_0 - l_0 q_0 = l_0 (1 - q_0)$$

$$4q_1 = \frac{4d_1}{l_1} = \frac{5q_0 - q_0}{1 - q_0} = \frac{0.06720 - 0.05520}{1 - 0.05520} = \underline{0.01270}$$

1-7:

a) V; b) F; c) V; d) V; e) V.

1-8:

Partiendo de la relación (26) (de pág 31) y reemplazando los valores de la tabla masculina de Guatemala de 1950 presentada en el anexo, se obtiene:

$$f_0 = \frac{l_0 - l_1}{d_0} = \frac{87\,694 - 82\,830}{17\,170} = \underline{0.2833}$$

1.9:

Si $\mu_x = \mu$, de acuerdo con la relación (39) (pág 44), será:

$$\mu = - \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d l_x}{dx}$$

lo cual resolviendo da:

$$l_x = l_0 e^{-\mu \cdot x}$$

A su vez, según la definición de esperanza de vida, y reemplazando el valor encontrado de l_x se obtiene:

$$e_x^0 = \frac{1}{l_x} \int_x^w l_a da$$

$$e_x^0 = \frac{1}{e^{-\mu \cdot x}} \int_x^w e^{-\mu \cdot a} da = \frac{1}{\mu}$$

es decir que, si la tasa instantánea de mortalidad por edad es independiente de la edad, la esperanza de vida es también constante. En otras palabras, todas las personas de una población, tanto las de 5 años como las de 80, tendrían la misma esperanza de vida futura!

1-10:

$$\begin{aligned} N_0^{71} &= \overline{AB} = 1\ 250 - 56 \\ &= \underline{1\ 194} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1^{71} &= \overline{BC} \\ &= 1\ 200 - 63 - 24 - 18 \\ &= \underline{1\ 095} \end{aligned}$$

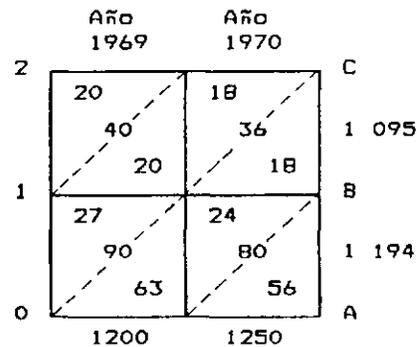


Gráfico 58



Respuesta a los ejercicios del capítulo 2

2-1:

$$a) {}_5P_{15-19} = \frac{{}_5L_{20}}{{}_5L_{15}}$$

Relación de supervivencia para las personas de 15-19 años al cabo de 5 años. Representa la probabilidad que tienen las personas de 15 a 19 años cumplidos, de la población estacionaria, de estar con vida 5 años después.

$$b) {}_5P_b = \frac{{}_5L_0}{5.1_0}$$

Relación de supervivencia al nacimiento. Mide la probabilidad que tienen los niños nacidos durante un quinquenio, de la población estacionaria, de estar con vida al final de dicho quinquenio.

$$c) {}_5P_{70 \text{ y más}} = \frac{L_{75 \text{ y más}}}{L_{70 \text{ y más}}} = \frac{T_{75}}{T_{70}}$$

Relación de supervivencia para el grupo abierto final. Representa la probabilidad que tienen las personas de 70 años y más, de la población estacionaria, de estar con vida 5 años después.

2.2:

$$a) {}_1P_b = \frac{L_0}{1_0} = \frac{89\ 262}{100\ 000} = \underline{0.89262}$$

$$b) {}_5P_{20-24} = \frac{{}_5L_{25}}{{}_5L_{20}} = \frac{304\ 082}{318\ 095} = \underline{0.95595}$$

$$c) {}_{10}P_{35-39} = \frac{{}_5L_{45}}{{}_5L_{35}} = \frac{239\ 662}{273\ 103} = \underline{0.87755}$$

$$d) {}_{15}P_{70 \text{ y más}} = \frac{T_{85}}{T_{70}} = \frac{20\ 832}{243\ 825} = \underline{0.08544}$$

2-3:

$$a) 2^P_b = \frac{2^L_0}{2 \cdot 1_0} \quad ; \quad c) 9^P_{16-23} = \frac{8^L_{25}}{8^L_{16}}$$

$$b) 4^P_{7-9} = \frac{3^L_{11}}{3^L_7} \quad ; \quad d) 10^P_{75y+} = \frac{L_{85+}}{L_{75+}}$$

2-4:

$$a) 15^L_0 \quad ; \quad c) 5 \cdot (5^d_5) \quad ; \quad e) 10^P_{0-4}$$

$$b) 5 \cdot 1_5 \quad ; \quad d) 5^P_{5-9} \quad ; \quad f) 5^P_{0-9}$$

2-5:

$$a) F; \quad b) V; \quad c) F; \quad d) V; \quad e) V$$

2-6:

$$a) 5^L_0 = 5 \cdot 1_0 \cdot 5^P_b = 500 \cdot 000 (0.94096) = \underline{470 \cdot 480}$$

$$5^L_5 = 5^L_0 \cdot 5^P_{0-4} = 470 \cdot 480 (0.98908) = \underline{465 \cdot 342}$$

$$L_{85+} = 5 \cdot 1_0 \cdot 5^P_b \cdot 5^P_{0-4} \cdot 5^P_{5-9} \cdots 5^P_{75-79} \frac{5^P_{80+}}{1 - 5^P_{80+}}$$

$$= \underline{80 \cdot 140}$$

b) Cálculo de la esperanza de vida al nacer, utilizando la relación (78) o (79):

$$e^{\sigma}_0 = \underline{66.26} \text{ años}$$

2-7:

$$a) 5^k_{50} = \frac{5^L_{50} - 5 \cdot 1_{55}}{5^d_{50}} = \frac{383 \cdot 296 - 5 (74 \cdot 745)}{3 \cdot 575} = \underline{2.68}$$

$$b) 5^f_{50} = \frac{5^k_{50}}{5} = \underline{0.54}$$

2-8:

a) Suficiente

$$10^P_{25-29} = \frac{5^L_{35}}{5^L_{25}} = \frac{\frac{5}{2} [(1_{30} - 1_{30} \cdot 5^q_{30}) + (1_{30} - 10^d_{30})]}{T_{25} - T_{30}}$$

b) Suficiente

$$10^P_{25-29} = \frac{5^L_{35}}{5^L_{30} / 5^P_{25-29}} = \frac{5^L_{35}}{5^L_{25}}$$

2-9:

Utilizando la relación (67) se obtiene:

$$5^q_{80} = \frac{2(5) 5^m_{80}}{2 + (5) 5^m_{80}} = \frac{2(5) 0.1060}{2 + (5) 0.1060} = \underline{0.41897}$$

A su vez, empleando la fórmula (70) resulta:

$$5^q_{80} = 1 - e^{-5 5^m_{80}} = 1 - e^{-5(0.1060)} = \underline{0.41140}$$

Dado que el valor correcto de esta probabilidad de muerte es 0.41797, puede concluirse que la fórmula (67), la cual supone que la función de sobrevivencia varía en forma lineal, sobreestima en este tramo de edades la probabilidad de muerte, mientras que la relación (70), que supone una variación exponencial decreciente de la curva de los sobrevivientes, la subestima.

2-10:

$$a) N_{5-9}^{65} = N_{0-4}^{60} \cdot (5^P_{0-4}) = 382\,113(0.92355) = \underline{352\,900}$$

b) En este caso se deben utilizar relaciones de supervivencia por edades simples, proyectadas por 5 años, 5^P_x . Por ejemplo, para $x = 0$:

$$5^P_0 = \frac{1^L_5}{1^L_0} = \frac{78\,863}{91\,611} = 0.86085$$

Se tiene entonces:

Edad	N_x^{60}	S_x^P	Edad	N_{x+5}^{65}
0	83 192	0.86085	5	71 616
1	79 144	0.90089	6	71 300
2	75 336	0.93839	7	70 695
3	73 288	0.95490	8	69 983
4	70 153	0.96434	9	67 651
0-4	382 113		5-9	351 245

Comparando los resultados obtenidos en a) y b), se tiene, en consecuencia, que la relación de supervivencia por grupos quinquenales sobreestima en 1 655 personas el número de sobrevivientes, lo cual se debe a que la población real de 0 a 4 años es más joven que la estacionaria. De este modo, la población estacionaria le da menor ponderación a las edades 0 y 1, que tienen una mortalidad mayor, sobreestimando así el número de sobrevivientes.



Respuesta a los ejercicios del capítulo 3

3-1:

$$\begin{aligned} {}_5q_0 &= 23.832 + 1.349406 (q_0 - 20) + 0.000844 (q_0 - 20)^2 \\ &= 23.832 + 13.494 \quad + 0.0844 \\ &= \underline{37.41} \text{ o/oo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_5q_5 &= 2.427 + 0.059439 ({}_5q_0 - 20) + 0.000255 ({}_5q_0 - 20)^2 \\ &= 2.427 + 1.0348 \quad + 0.0773 \\ &= \underline{3.54} \text{ o/oo} \end{aligned}$$

3-2:

$$\begin{aligned} d_0 &= l_0 \cdot q_0 = 100\ 000 (0.030) = 3\ 000 \\ {}_5d_0 &= l_0 \cdot {}_5q_0 = 100\ 000 (0.03741) = 3\ 741 \\ {}_4d_1 &= {}_5d_0 - d_0 = 741 \quad ; \quad l_1 = l_0 - d_0 = 97\ 000 \\ {}_4q_1 &= \frac{{}_4d_1}{l_1} = \frac{3\ 000}{97\ 000} = \underline{0.03093} \end{aligned}$$

3-3:

Si se postula que ocurren 105 nacimientos masculinos por cada 100 femeninos, basta multiplicar la raíz de la tabla masculina por 1.05, con lo cual todos los valores de la función de sobrevivencia de dicha tabla resultarán multiplicados por ese factor. Luego se suman los valores de la función de sobrevivencia de hombres y mujeres así ponderados, y finalmente se divide el resultado por 2.05 para volver a la raíz convencional 100 000. En símbolos:

$$l_x^{as} = \frac{1.05 l_x^h + l_x^m}{2.05}$$

x	1.05 l _x ^h	l _x ^m	1.05 l _x ^h + l _x ^m	l _x ^{as}
0	105 000	100 000	205 000	100 000
1	89 903	87 625	177 528	86 599
5	84 187	82 136	166 325	81 134

3-4:

$$\begin{aligned} a) \quad {}_5q_{10} &= -0.001516 + 0.1352 (0.080) = \underline{0.00930} \\ {}_5q_{30} &= 0.001856 + 0.2878 (0.080) = \underline{0.02488} \\ {}_5q_{50} &= 0.025698 + 0.4376 (0.080) = \underline{0.06071} \end{aligned}$$

b) Superiores. Gabriel y Ronen indican que las ecuaciones de recurrencia aplicadas en la elaboración de las tablas de Naciones Unidas sobreestiman la esperanza de vida al nacer, o lo que es lo mismo, subestiman las probabilidades de muerte. En efecto, los valores obtenidos en las tablas modelo de Naciones Unidas son:

$$\begin{aligned} {}_5q_{10} &= 0.00711 \\ {}_5q_{30} &= 0.01781 \\ {}_5q_{50} &= 0.04886 \end{aligned}$$

3-5:

Para el nivel 9 de las cuatro familias de tablas modelo femeninas de Coale-Demeny, las probabilidades de muerte del primer año de vida, del grupo 1-4 y la relación entre ambas, son las siguientes:

C-D, Nivel 9, Familia	Probabilidades de muerte 1000·q ₀	1000· ₄ q ₁	Relación q ₀ / ₄ q ₁
Norte	156.5	137.2	1.14
Sur	172.3	166.2	1.04
Este	216.5	113.0	1.92
Oeste	177.7	117.9	1.51

El modelo Este es el que presenta la mayor mortalidad infantil y la menor mortalidad de 1 a 4 años. Las restantes familias también muestran un patrón por edad variable en este primer tramo de la vida, tal como lo indican las relaciones presentadas en la última columna. Es interesante tener presente esta relación variable, al hacer estimaciones de la mortalidad infantil, entrando en estas tablas modelo con la información de mortalidad de 2, 3 o 5 años.

3-6:

En las tablas de Coale Demeny, el número de sobrevivientes a la edad exacta 2, que es igual a 91 318, se encuentra entre los niveles 16 y 17, a los cuales les corresponde los siguientes valores de l₁:

Nivel	l ₂	l ₁
16	89 936	91 823
17	91 419	92 934

Interpolando linealmente resulta:

$$l_1 = 91\ 823 + \frac{91\ 318 - 89\ 936}{91\ 419 - 89\ 936} (92\ 934 - 91\ 823)$$

$$= \underline{92\ 858}$$

En consecuencia, la tasa de mortalidad infantil correspondiente, suponiendo que entre las edades 1 y 2 la estructura de la mortalidad es igual a la que rige en las tablas modelo de Coale-Demeny, familia Oeste, es:

$$q_0 = \frac{100\ 000 - 92\ 858}{100\ 000} = \underline{0.07142}$$

3-7:

$$a) Y_S(1) = (1/2) \ln \frac{1 - l_1}{l_1} = (1/2) \ln \frac{1 - 0.90650}{0.90650} =$$

$$= \underline{-1.13581}$$

$$b) Y(1) = A + B Y_S(1) = 0.20 + 1.10 (-1.13581) =$$

$$= \underline{-1.04940}$$

$$c) Y(1) = (1/2) \ln \frac{1 - l_1}{l_1}$$

de donde, despejando l_1 se obtiene:

$$l_1 = \frac{1}{1 + e^{2Y(1)}} = \frac{1}{1 + e^{2(-1.04940)}} = \underline{0.89079}$$

3-8:

a) F ; b) V ; c) V ; d) V

3-9:

En el cuadro siguiente se resumen los cálculos efectuados, para el ajuste de las probabilidades de muerte $q(x)$ mediante las tablas modelo de Coale-Demeny, siguiendo el detalle ya comentado en el ejercicio presentado al final de la sección 3.3.

Edad x	P. muerte q(x)	Sobrev. l_x	Nivel en Coale-Demeny	Ajustados, N.18.4 l_x	q(x)
2	0.08465	91 535	18.1	91 626	0.08374
3	0.09135	90 865	18.1	91 055	0.08945
5	0.09289	90 711	18.4	90 350	0.09650
Nivel medio			18.2		

3-10:

En el cuadro presentado a continuación, se resumen los cálculos efectuados, para el ajuste de los valores de $q(x)$, utilizando el sistema logito de Brass, de acuerdo con el detalle comentado en el ejercicio presentado al final de la sección 3.4:

Edad x	Sobrev. l_x	Logito $Y(x)$	Tabla estándar		$\alpha =$
			l_x^s	$Y_s(x)$	$Y(x) - Y_s(x)$
2	0.91535	-1.19039	0.93852	-1.36280	0.17241
3	0.90865	-1.14863	0.93561	-1.33812	0.18949
5	0.90711	-1.13942	0.93280	-1.31526	0.17584

Nivel medio de α					$\bar{\alpha} = 0.17925$

(cont.)

Edad x	Valores ajustados		$q(x)$
	$Y(x) = \bar{\alpha} + Y_s(x)$	l_x	
2	-1.18355	0.91428	0.08572
3	-1.15887	0.91034	0.08966
5	-1.13601	0.90653	0.09347



Respuesta a los ejercicios del capítulo 4

4-1:

Edad x	E_x	N'_x	N''_x	$\alpha^p_x = \frac{N'_x}{E_x}$	$\delta^p_x = \frac{E_{x+1}}{N''_x}$	$q_x = 1 - \alpha^p_x \cdot \delta^p_x$
0	81 740	79 048	78 346	0.967066	0.989010	0.043561
1	77 485	77 215	78 667	0.996515	0.996580	0.006892
2	78 398	78 289	78 068	0.998610	0.998604	0.002785
3	77 959	77 877	78 741	0.998948	0.998971	0.002079
4	78 660	78 609	80 131	0.999352	0.999388	0.001260
5	80 082					

4-2:

$$\begin{aligned}
 {}_3q_0 &= 1 - {}_3p_0 = 1 - p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \\
 &= 1 - (1-q_0)(1-q_1)(1-q_2) \\
 &= 1 - (0.95644)(0.99311)(0.99722) = \underline{0.05279}
 \end{aligned}$$

4-3:

Grupos de edades	${}_5q_x$
5 - 9	0.003569
10 - 14	0.002198
15 - 19	0.003674
20 - 24	0.004789

4-4:

Grupos de Edades	${}_5m_x$	${}_nq_x$	l_x	n^d_x	n^L_x
0	-	0.043561	100 000	4 356	96 685
1	-	0.006892	95 644	659	95 315
2	-	0.002785	94 985	265	94 853
3	-	0.002079	94 720	197	94 622
4	-	0.001260	94 523	119	94 464
5-9	0.000715	0.003569	94 404	337	471 329
10-14	0.000440	0.002198	94 067	207	470 455
15-19	0.000736	0.003674	93 860	345	468 750
20-24	0.000960	0.004789	93 515	448	466 667

$${}_{25}L_0 = 2\ 353\ 140$$

4-5:

Grupos de edades	${}_5m_x$	Probabilidades de muerte ${}_5q_x$		Relación
		(R y Merrell)	Greville	$\frac{(1)}{(2)} \times 100$
10-14	0.00600	0.02959	0.02959	100.00
30-34	0.01080	0.05268	0.05267	100.02
50-54	0.01780	0.08544	0.08543	100.01
70-74	0.06400	0.27682	0.27669	100.05

De acuerdo con estos valores, la fórmula de Greville conduce prácticamente a los mismos resultados que la de Reed y Merrell.

4-6:

$ln c$	s^{q50}
0.08	0.08540
0.09	0.08543
0.10	0.08546

En consecuencia, el parámetro c , utilizado en la fórmula (88) de Greville, tiene poca influencia en el cálculo de la probabilidad de muerte.

4-7:

$$\frac{d}{dx} {}_n L_x = \frac{d}{da} \int_x^{x+n} l_a da = l_a \Big|_x^{x+n} = l_{x+n} - l_x = - {}_n d_x$$

4-8:

$$a) \quad (70) \quad {}_n q_x = 1 - e^{-n} {}_n m_x$$

$$q_0 = 1 - e^{-0.05762} = \underline{0.05599}$$

En la tabla de vida de Costa Rica, la probabilidad de muerte del primer año de vida es igual a 0.05520; por lo tanto la relación (70) sobreestima el valor de la probabilidad de muerte.

$$b) \quad (91) \quad {}_n q_x = 1 - e^{-n} {}_n m_x - 0.008 n^3 {}_n m_x^2$$

$$= 1 - e^{-0.05762 - 0.008(0.05762)^2}$$

$$= \underline{0.05602}$$

La relación (91) también sobreestima el valor de la probabilidad de muerte. Asimismo, el resultados es más alto que el obtenido con la relación (70), lo cual confirma que el ajuste adicional del exponente de la fórmula (91) tiene una dirección equivocada en el tramo en que la mortalidad es decreciente con la edad, aunque la diferencia es de poca importancia numérica.

$$\begin{aligned}
 c) \quad (93) \quad q_0 &= 1 - e^{-m_0(0.9539 - 0.5509 m_0)} \\
 q_0 &= 1 - e^{-0.05762 [0.9539 - 0.5509 (0.05762)]} \\
 &= \underline{0.05175}
 \end{aligned}$$

Este valor es bastante más bajo que el obtenido en la tabla de vida de Costa Rica (0.05520). En consecuencia, cuando se aplica la relación (93) con una tasa de mortalidad correcta, se subestima el valor de la probabilidad de muerte, lo cual se debe al hecho de que esta relación incorpora un factor de corrección por omisión de niños menores de un año, es decir supone que la tasa central de mortalidad m_0 está sobreestimada.

4-9:

Calculando primero el valor del tiempo medio vivido en el intervalo de 50 a 55 años por las personas que fallecen dentro del mismo, en base a la relación (64) y la tabla femenina de México de 1970, utilizada como estándar, resulta:

$${}_5k_{50} = \frac{383\,296 - 5(74\,745)}{3\,575} = \underline{2.677}$$

Reemplazando luego los valores de

$${}_5k_{50} = 2.677 \quad \text{y} \quad {}_5m_{50} = 0.013455$$

en la relación (71) resulta:

$${}_5q_{50} = \frac{5(0.013455)}{1 + (5 - 2.677)0.013455} = 0.06524$$

El resultado es prácticamente igual a la probabilidad de muerte del grupo 50-54 de la tabla masculina de México, que es 0.06523.

4-10:

- a) Cálculo de las relaciones de supervivencia intercensales

En base a la información básica dada, se ha calculado en la columna (3) del cuadro 16, las relaciones de supervivencia intercensales de los diferentes grupos quinquenales de edades, 10^P_{0-4} . Para el grupo 0-4 resulta:

$$10^P_{0-4} = \frac{238\ 492}{241\ 398} = 0.98796$$

y así sucesivamente. En algunos casos se obtienen relaciones de supervivencia superiores a la unidad, debido a la mala declaración de la edad y otros errores de la información básica.

- b) Cálculo de relaciones de supervivencia quinquenales

Aplicando la fórmula de la raíz cuarta se obtuvieron las relaciones de supervivencia referidas a un período de 5 años, las cuales se presentan en la columna (4) del cuadro 16. Por ejemplo, para el grupo 5-9 que es el primero que puede calcularse con esta fórmula:

$$5^P_{5-9} = \sqrt[4]{(10^P_{0-4})(10^P_{5-9})} = \sqrt[4]{(0.98796)(0.89912)} = \underline{0.97082}$$

El último valor se calculó mediante la relación aproximada:

$$5^P_{75+} = \sqrt[4]{(10^P_{70+})(10^P_{75+})} = \sqrt[4]{(0.40298)(0.31893)} = \underline{0.59875}$$

Puede verse que esta fórmula de la raíz cuarta produce un primer suavizamiento de las relaciones de supervivencia intercensales.

- c) Cálculo de 5^P_b

x	l_x	Nivel en Coale-Demeny, Familia Oeste
2	0.8531	13.75
3	0.8481	14.14
5	0.8224	13.59
Nivel promedio		13.83

Para ese nivel medio el valor de ${}_5P_b$ resulta:

Nivel	${}_5P_b$
13	0.83749
14	0.85583
13.83	0.85271

Para completar el cálculo de las relaciones de supervivencia de todas las edades hace falta una estimación de la relación de supervivencia del grupo 0-4, que puede obtenerse también de las tablas de Coale y Demeny para el nivel 13.83, resultando:

$${}_5P_{0-4} = 0.95146$$

d) $e_0^0 = \underline{52.54 \text{ años}}$

Cuadro 16
EL SALVADOR: POBLACION NATIVA MASCULINA, SEGUN LOS CENSOS DE 1961 Y 1971. CALCULO DE RELACIONES DE SUPERVIVENCIA INTERCENSALES.

Grupos de edades	Población nativa		Relaciones de supervivencia	
	1961	1971	$10^P_{x,x+4}$	$5^P_{x,x+4}$
	(1)	(2)	(3)	(4)
${}_5P_b$	0.85271
0-4	241 398	-	0.98796	0.95146
5-9	193 586	-	0.89912	0.97082
10-14	159 828	238 492	0.89282	0.94655
15-19	117 358	174 058	0.92787	0.95403
20-24	101 369	142 697	0.96975	0.97395
25-29	80 798	108 893	1.11406	1.01951
30-34	72 849	98 303	1.01474	1.03114
35-39	65 931	90 014	0.88803	0.97431
40-44	54 748	73 923	0.86471	0.93610
45-49	43 556	58 549	0.77128	0.90369
50-54	37 066	47 341	0.90306	0.91355
55-59	24 577	33 594	0.84595	0.93490
60-64	28 620	33 473	0.63047	0.85458
65-69	14 078	20 791	0.62843	0.79338
70-74	10 181	18 044	0.50899	0.75204
75-79	12 840 a	8 847	0.31893 b	0.59875 d
80-84		5 182	0.40298 c	
85 y+		4 095		

a/ N_{75y+}^{1961} ; b/ 10^P_{75y+} ; c/ 10^P_{70y+} ; d/ 5^P_{75y+}



Respuesta a los ejercicios del capítulo 5

5-1:

a) Cálculo de los denominadores ${}_tE_x$

Reemplazando el valor de los nacimientos en las relaciones dadas en el cuadro 2 (pág.173), teniendo en cuenta que se refieren ahora al periodo 1972-1974 (es decir que hay un desplazamiento de 3 años), se tiene para el grupo de 0-1 día:

$$\begin{aligned} {}_1dE_0 &= \frac{1}{730} (B^{71} + 730 B^{72} + 730 B^{73} + 729 B^{74}) \\ &= \frac{1}{730} [28\ 856 + 730(29\ 458) + 730(27\ 365) + 729(29\ 099)] \\ &= \underline{85\ 922} \end{aligned}$$

Los restantes valores de ${}_tE_x$ se presentan directamente en el cuadro 17.

b) Cálculo de las defunciones ${}_td_x$

Aplicando la fórmula:

$$(109) \quad {}_td_x = {}_1d_0 \cdot {}_tD_x / {}_tE_x$$

se tiene:

$${}_1d_0 = 100\ 000 (760) / 85\ 922 = \underline{884.52}$$

Los restantes valores se presentan en la columna (3) del cuadro 17.

c) Cálculo de los valores de ${}_1x_{x+t}$, ${}_tq_x$ y ${}_tL_x$

Para dicho cálculo se emplean las cuatro relaciones siguientes:

$$(111) \quad {}_1x_{x+t} = {}_1x_x - {}_td_x$$

$$(112) \quad {}_tq_x = {}_td_x / {}_1x_x = 1 - {}_1x_{x+t} / {}_1x_x$$

$$(138) \quad tL_x = \frac{t}{2} (l_x + l_{x+t})$$

Edad	t
0	1/365
1	6/365
7	21/365
28	337/365

$$(21) \quad L_1 = \frac{1}{2} (l_1 + l_2)$$

Los resultados se incluyen en las tres últimas columnas del cuadro 17.

Cuadro 17
CALCULO DE LAS DEFUNCIONES, LOS SOBREVIVIENTES, LAS PROBABILIDADES DE MUERTE Y EL TIEMPO VIVIDO DE MENORES DE DOS AÑOS. POBLACION MASCULINA. COSTA RICA, 1972-1974

Intervalo de edades	tE_x	tD_x	t^d_x	l_x	t^q_x	tL_x
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0-1 día..	85 922	760	884.52	100 000	0.008845	273
1-7 días.	85 919	777	904.34	99 115	0.009124	1 622
7-28 días	85 910	649	755.44	98 211	0.007692	5 629
28-365 d.	85 791	2546	2967.68	97 456	0.030451	88 610
1-2 años.	86 768	539	621.20	94 488	0.006574	94 178
2-3 años.				93 867		

5-2:

Intervalo de edades $x, x+1$	tE_x	tD_x	t^d_x	l_x	t^q_x	tL_x
0-1 año	85 864	4 732	5 511.04	100 000	0.055110	95 806
1-2 años	86 768	539	621.20	94 489	0.006574	94 178
2-3 años				93 868		

S-3:

Funciones	Con sub-divisiones (Ejerc. 1)	Sin sub-divisiones (Ejerc. 2)	Relación Porcentual (1)/(2)x100
	(1)	(2)	(3)
Sobrevivientes l_1	94 488	94 489	100.00
Defunciones d_0	5 511.98	5 511.04	100.02
Prob.de muerte q_0	0.055120	0.055110	100.02
Esperanza de vida al nacer e_0^0	66.25	66.26	99.98
Tiempo vivido L_0	96 134	95 806	100.34
L_1	94 178	94 178	100.00
Relación de supervivencia P_b	0.96134	0.95806	100.34
P_0	0.97965	0.98301	100.34
Factor de separación implícito en la tabla f_0	0.2986	0.2390	124.94

- Las funciones: l_1 , d_0 , q_0 , e_0^0 , y L_1 dan prácticamente el mismo resultado, considerando, o no, subdivisiones dentro del primer año de vida.
- Por su parte las funciones: L_0 , P_b , P_0 y f_0 muestran diferencias de cierta importancia. Tales diferencias se deben fundamentalmente, a la integración efectuada por trapecios, para obtener el tiempo vivido, en el caso del ejercicio 1, ya que los tramos considerados son relativamente grandes. Si se repitieran los cálculos considerando subdivisiones adicionales, por ejemplo de 28 a 180 días y de 180 a 365 días, las diferencias resultarían menores.

Para propósitos demográficos, donde debe calcularse frecuentemente la relación de supervivencia al nacimiento y las demás funciones afectadas por el error indicado, resulta preferible calcular las funciones de la tabla del primer año de vida, sin considerar subdivisiones, empleando el factor de separación para el cálculo del tiempo vivido.

se obtiene:

$$q_2 = 251 / 81\ 046.5 = \underline{0.003097}$$

$$q_3 = 141 / 80\ 937.5 = \underline{0.001742}$$

$$q_4 = 103 / 82\ 584.5 = \underline{0.001247}$$

5-6:

a) Utilizando la fórmula (118):

$$W_0 = 2.48580 V - 0.59332 W_5 - 0.01965 W_{10} + \\ + 0.22004 W_{15} - 0.08055 W_{20}$$

y reemplazando los valores numéricos de V y W_x se obtiene, para la población:

$$W_0 = N_{0-4}^F = \underline{127\ 680}$$

y para las defunciones:

$$W_0 = D_{0-4}^F = \underline{1\ 051.}$$

Los valores reales de la población y las defunciones del grupo 0-4 son:

$$N_{0-4}^R = 135\ 107; \quad D_{0-4}^R = 5\ 766$$

lo cual pone de manifiesto que el valor ficticio es sustancialmente diferente al real, especialmente en el caso de las defunciones.

b) Utilizando los multiplicadores de Beers presentados en el cuadro 3 (pág 179), y los valores pivotaes quinquenales de 0-29 años, se obtuvo la población y las defunciones de 5 a 19 años, por edades simples, indicadas en el cuadro siguiente. A su vez, mediante la relación:

$$(116) \quad q_x = \frac{D_x}{3 N_x + 1/2 D_x}$$

se calcularon las probabilidades de muerte presentadas en la última columna.

Edades	N x	D x	q x
5	28 610	102	0.001188
6	29 006	82	0.000942
7	29 175	67	0.000765
8	29 137	57	0.000652
9	28 912	52	0.000599
10	28 517	51	0.000596
11	27 965	53	0.000632
12	27 273	56	0.000684
13	26 456	61	0.000768
14	25 536	67	0.000874
15	24 521	74	0.001005
16	23 450	82	0.001165
17	22 372	89	0.001325
18	21 321	95	0.001484
19	20 294	98	0.001608

5-7:

La relación básica para encontrar los valores suavizados u_x mediante la fórmula de Whittaker-Henderson, Tipo B, es la siguiente:

$$(129) \quad (W + k K^T)u = Wu''$$

o bien:

$$(130) \quad Au = Wu''$$

Con los valores numéricos considerados, las matrices y vectores W , K , K^T , Wu'' y A toman la siguiente forma (siendo $n = 5$, $z = 2$; $k = 300$):

$$W = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^T \cdot K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad W u'' = \begin{bmatrix} 160 \\ 301 \\ 450 \\ 840 \\ 1 \ 180 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 304 & -600 & 300 & 0 & 0 \\ -600 & 1507 & -1200 & 300 & 0 \\ 300 & -1200 & 1810 & -1200 & 300 \\ 0 & 300 & -1200 & 1515 & -600 \\ 0 & 0 & 300 & -600 & 320 \end{bmatrix}$$

A su vez, se tiene que:

$$(131) \quad A u = L L^T u = W u''$$

Los elementos de la matriz L se calculan mediante las relaciones (134) a (136) (pág 195), que corresponden al método de Choleski. Se obtiene de este modo:

$$l_{11} = \sqrt{304} = \underline{17.435596}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-600}{17.435596} = \underline{-34.412360}$$

y así sucesivamente. La matriz L resulta:

$$L = \begin{bmatrix} 17.435596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -34.412360 & 17.966343 & 0 & 0 & 0 \\ 17.206180 & -33.835196 & 19.212675 & 0 & 0 \\ 0 & 16.697889 & -33.052329 & 11.988497 & 0 \\ 0 & 0 & 15.614692 & -6.998214 & 5.215975 \end{bmatrix}$$

(Si se multiplica la matriz L por su traspuesta L^T se verifica que $L \cdot L^T = A$)

Por otra parte, ya se ha visto que:

$$(132) \quad Lu' = Wu''$$

$$(133) \quad L^T u = u'$$

De este modo, la ecuación (132) permite obtener los valores u' . En efecto, reemplazando los valores numéricos se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} 17.435596 u'_1 &= 160 \\ -34.412360 u'_1 + 17.966343 u'_2 &= 301 \\ 17.206180 u'_1 + 33.835196 u'_2 + 19.212675 u'_3 &= 450 \\ 16.697889 u'_2 + 33.052329 u'_3 + 11.988497 u'_4 &= 840 \\ 15.614692 u'_3 + 6.998214 u'_4 + 5.215975 u'_5 &= 1180 \end{aligned}$$

Despejando de arriba hacia abajo, se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} u'_1 &= 9.176629 & u'_4 &= 230.852536 \\ u'_2 &= 34.330274 & u'_5 &= 309.455205 \\ u'_3 &= 75.662385 \end{aligned}$$

Una vez calculados los valores de u'_x , se reemplazan en la relación (133):

$$\begin{aligned}
 17.435596 u_1 - 34.412360 u_2 + 17.206180 u_3 &= 9.176629 \\
 17.966343 u_2 - 38.835196 u_3 + 16.697889 u_4 &= 34.330274 \\
 19.212675 u_2 - 33.052329 u_4 + 15.614692 u_5 &= 75.662385 \\
 11.988487 u_4 - 6.998214 u_5 &= 230.852536 \\
 5.215975 u_5 &= 309.455205
 \end{aligned}$$

Despejando por último, los valores de u_x , esta vez de abajo hacia arriba, se llega a los siguientes valores suavizados u_x :

$$\begin{aligned}
 u_5 &= 59.33 \\
 u_4 &= 53.89 \\
 u_3 &= 48.43 \\
 u_2 &= 43.03 \\
 u_1 &= 37.66
 \end{aligned}$$

5-8:

$$\begin{aligned}
 N_{10}^{75} &= N_B^{73} \cdot 2^{P_B} \\
 2^{P_B} &= \frac{L_{10}}{L_B} = \frac{92\ 875}{93\ 017} = 0.99847 \\
 N_{10}^{75} &= 23\ 218 (0.99847) = \underline{23\ 182}
 \end{aligned}$$

5-9:

$$\begin{aligned}
 d_x &= l_x - l_{x+1} \quad ; \quad q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\
 m_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{\int_x^{x+1} l_a da} \quad ; \quad \Upsilon_x = \int_x^w l_a da
 \end{aligned}$$

5-10:

$$a^{P_{40}} \quad ; \quad 4^{P_{10-16}} \quad ; \quad 12^{P_{73}} +$$



Respuesta a los ejercicios del capítulo 6.

6-1:

Se calculan en primer lugar las probabilidades básicas necesarias que son las siguientes

$${}_{50}p_{25}^h = \frac{175}{125} = \frac{35\ 740}{86\ 050} = 0.41534$$

$${}_{50}p_{20}^m = \frac{170}{120} = \frac{54\ 318}{88\ 775} = 0.61186$$

$${}_{50}q_{25}^h = 1 - {}_{50}p_{25}^h = 0.58466$$

$${}_{50}q_{20}^m = 1 - {}_{50}p_{20}^m = 0.38814$$

Combinando estas probabilidades se obtiene:

a) Probabilidad de que las dos personas estén con vida:

$$({}_{50}p_{25}^h) ({}_{50}p_{20}^m) = (0.41534) (0.61186) = \underline{0.25413}$$

b) Probabilidad de que sólo el hombre sobreviva:

$$({}_{50}p_{25}^h) ({}_{50}q_{20}^m) = (0.41534) (0.38814) = \underline{0.16121}$$

c) Probabilidad de que sólo la mujer sobreviva:

$$({}_{50}q_{25}^h) ({}_{50}p_{20}^m) = (0.58466) (0.61186) = \underline{0.35773}$$

d) Probabilidad de que los dos hayan fallecido

$$({}_{50}q_{25}^h) ({}_{50}q_{20}^m) = (0.58466) (0.38814) = \underline{0.22693}$$

e) Dado que las cuatro probabilidades anteriores comprenden todos los casos posibles, la suma resulta igual a la unidad:

$$0.25413 + 0.16121 + 0.35773 + 0.22693 = 1$$

6-2:

- a) $\overline{AE} = L_x$; e) $\frac{\overline{GO}}{\overline{BJ}} = \frac{2^{L_{x+1}}}{2^{L_x}} = P_{x,x+1}$
- b) $\overline{FN} = 2^{L_{x+1}}$; f) $\frac{\overline{KO}}{\overline{JK}} = \frac{L_{x+2}}{1_{x+2}} = \alpha^p_{x+2}$
- c) $\overline{KL} = 1_{x+2}$; g) $\text{Sup FGON} = 2^d_{x+1}$
- d) $\frac{\overline{JN}}{\overline{EI}} = \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} = P_{x+1}$; h) $\text{Sup JLPN} = 2(d_{x+2})$

6-3

- a) $5^P_{40-44} = \frac{5^{L_{45}}}{5^{L_{40}}} = \frac{239\ 662}{256\ 846} = \underline{0.93310}$
- b) $5^P_b = \frac{5^{L_0}}{51_0} = \frac{399\ 003}{500\ 000} = \underline{0.79801}$
- c) $5^P_{75+} = \frac{T_{80}}{T_{75}} = \frac{61\ 285}{134\ 966} = \underline{0.45408}$
- d) $5^P_{65-74} = \frac{10^{L_{70}}}{10^{L_{65}}} = \frac{182\ 540}{251\ 415} = \underline{0.72605}$

6.4:

- a) En la Tabla de vida, ${}_nL_x$ representa el número de años vividos por la generación l_0 entre las edades x y $x+n$
- b) En la población estacionaria, ${}_nL_x$ representa el número de personas que en un momento x cualquiera tienen edades comprendidas entre x y $x+n$. Su significado es análogo al valor de ${}_nN_x$ de una población real.

6.5:

- a) V; b) V; c) F; d) F; e) V

6.6:

- Los niveles más bajos de mortalidad considerados, ya han sido superados por los países de menor mortalidad.
- Para su elaboración no se han tomado en cuenta las tablas de mortalidad de los países de América Latina.
- En la realidad hay patrones bastante diferentes a los contemplados en dichas tablas.
- No incluyen la experiencia de mortalidad de los últimos 25 años.

6.7:

En la tabla de vida masculina de Guatemala de 1950, la esperanza de vida a la edad 1 es:

$$e_1^0 = \frac{T_1}{l_1} = \frac{3\ 871\ 139}{82\ 830} = 46.74 \text{ años}$$

Si se supone en dicha tabla que la mortalidad infantil es igual a cero, entonces, extrapolando hacia la edad 0 resulta $l_0 = 82\ 830$ y $L_0 = 82\ 830$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} e_0^0 &= \frac{T_0}{l_0} = \frac{82\ 830 + 3\ 871\ 139}{82\ 830} \\ &= 1 + e_1^0 = 47.74 \text{ años.} \end{aligned}$$

Dado que la esperanza de vida al nacer de dicha tabla es de 39.59 años, puede concluirse que la tasa de mortalidad infantil de 171.7 por mil que presenta dicha tabla, reduce la esperanza de vida al nacer en 8.15 años.

6.8:

$${}_a p_0 = \frac{27\ 985 + 26\ 234}{29\ 458 + 27\ 365} = 0.95417$$

$${}_d p_0 = \frac{26\ 843 + 27\ 629}{27\ 351 + 27\ 985} = 0.98439$$

$$q_0 = 1 - ({}_a p_0) ({}_d p_0) = \underline{0.06072}$$

$$q_1 = 1 - (0.99609) (0.99608) = \underline{0.00781}$$

6.9:

$$\begin{aligned}
 {}_1q_{45} &= (1 - d_{41}) {}_3p_{42} \\
 &= (87\ 338 - 334) 0.98792 = 85\ 875 \\
 {}_5q_{40} &= 1 - {}_1q_{45}/{}_1q_{40} = \underline{0.02031}
 \end{aligned}$$

6.10:

$$e_1^{\sigma} = \frac{T_{15} - T_{65}}{l_{15}} = \frac{5\ 031\ 472 - 967\ 288}{82\ 830} = \underline{45.45} \text{ años}$$

Si la mortalidad fuera nula el resultado sería 50. Debido a las condiciones de mortalidad de la población femenina de México prevaleciente en 1970, se pierde un promedio de vida de 4.55 años.



1 2

3

4

5

ANEXO DE TABLAS BASICAS

- Tablas de mortalidad de algunos países seleccionados.
- Tabla de Reed y Merrell

2 2

2

2

Tabla 1
GUATEMALA: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD MASCULINA, 1950

Edad $x, x+n-1$	n^m_x	n^q_x	l_x	n^d_x	n^L_x	T_x	e^o_x
0		0.171696	100 000	17 170	87 694	3 958 833	39.59
1		0.056530	82 830	4 682	80 489	3 871 139	46.74
2		0.039094	78 148	3 055	76 621	3 790 650	48.51
3		0.024961	75 093	1 874	74 156	3 714 029	49.46
4		0.017594	73 219	1 288	72 575	3 639 873	49.71
5-9	0.01003	0.049009	71 931	3 525	351 446	3 567 298	49.59
10-14	0.00543	0.026811	68 406	1 834	337 753	3 215 852	47.01
15-19	0.00684	0.033666	66 572	2 241	327 632	2 878 099	43.23
20-24	0.00810	0.039753	64 331	2 557	315 679	2 550 467	39.65
25-29	0.00905	0.044319	61 774	2 738	302 541	2 234 788	36.18
30-34	0.01060	0.051724	59 036	3 054	288 113	1 932 247	32.73
35-39	0.01160	0.056474	55 982	3 162	272 586	1 644 134	29.37
40-44	0.01510	0.072931	52 820	3 852	255 099	1 371 548	25.97
45-49	0.01800	0.086365	48 968	4 229	234 944	1 116 449	22.80
50-54	0.02250	0.106852	44 739	4 780	212 444	881 505	19.70
55-59	0.02800	0.131323	39 959	5 248	187 429	669 061	16.74
60-64	0.04000	0.182578	34 711	6 337	158 425	481 632	13.88
65-69	0.05400	0.238843	28 374	6 777	125 500	323 207	11.39
70-74	0.07200	0.305931	21 597	6 607	91 764	197 707	9.15
75-79	0.10100	0.402620	14 990	6 035	59 752	105 943	7.07
80-84	0.16200	0.566665	8 955	5 074	31 321	46 191	5.16
85 y+	0.26100	1.000000	3 881	3 881	14 870	14 870	3.83

Fuente: Camisa, Zulma, Las estadísticas demográficas y la mortalidad en Guatemala hacia 1950 y 1964. CELADE, Serie AS N°2, San José, Costa Rica, 1969.

Tabla 2
GUATEMALA: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD FEMENINA, 1950

Edad $x, x+n-1$	n n_x	q n_x	l l_x	d n_x	L n_x	T T_x	e e_x^0
0		0.153989	100 000	15 399	89 262	4 088 951	40.89
1		0.056264	84 601	4 760	82 221	3 999 689	47.28
2		0.040411	79 841	3 226	78 228	3 917 468	49.07
3		0.028090	76 615	2 152	75 539	3 839 240	50.11
4		0.019079	74 463	1 421	73 753	3 763 701	50.54
5-9	0.01026	0.050104	73 042	3 660	356 725	3 689 948	50.52
10-14	0.00600	0.029590	69 382	2 053	342 167	3 333 223	48.04
15-19	0.00743	0.036519	67 329	2 459	330 956	2 991 056	44.42
20-24	0.00840	0.041195	64 870	2 672	318 095	2 660 100	41.01
25-29	0.00980	0.047909	62 198	2 980	304 082	2 342 005	37.65
30-34	0.01080	0.052676	59 218	3 119	288 796	2 037 923	34.41
35-39	0.01160	0.056474	56 099	3 168	273 103	1 749 127	31.18
40-44	0.01300	0.063091	52 931	3 339	256 846	1 476 024	27.89
45-49	0.01480	0.071530	49 592	3 547	239 662	1 219 178	24.58
50-54	0.01780	0.085443	46 045	3 934	221 011	979 516	21.27
55-59	0.02420	0.114483	42 111	4 821	199 215	758 505	18.01
60-64	0.03300	0.153029	37 290	5 706	172 909	559 290	15.00
65-69	0.04500	0.203099	31 584	6 415	142 556	386 381	12.23
70-74	0.06400	0.276819	25 169	6 967	108 859	243 825	9.69
75-79	0.09400	0.380496	18 202	6 926	73 681	134 966	7.41
80-84	0.15000	0.538143	11 276	6 068	40 453	61 285	5.43
85 y+	0.25000	1.000000	5 208	5 208	20 832	20 832	4.00

Fuente: Camisa, Zulma, "Las estadísticas...", Op.cit.

Tabla 3
MEXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD MASCULINA, 1969-1971

Edad $x, x+n-1$	n n^m_x	q n^q_x	l l_x	d n^d_x	L n^L_x	T T_x	e e^0_x
0		0.072214	100 000	7 221	94 758	6 004 831	60.05
1		0.016379	92 779	1 520	91 882	5 910 073	63.70
2		0.008669	91 259	791	90 840	5 818 191	63.75
3		0.005345	90 468	484	90 216	5 727 351	63.31
4		0.003431	89 984	309	89 826	5 637 135	62.65
5-9	0.001973	0.009820	89 675	881	446 528	5 547 309	61.86
10-14	0.001238	0.006171	88 794	548	442 649	5 100 781	57.45
15-19	0.002032	0.010112	88 246	892	438 976	4 658 132	52.79
20-24	0.003006	0.014927	87 354	1 304	433 799	4 219 156	48.30
25-29	0.003971	0.019673	86 050	1 693	426 341	3 785 357	43.99
30-34	0.004878	0.024116	84 357	2 034	416 974	3 359 016	39.82
35-39	0.005996	0.029572	82 323	2 434	405 937	2 942 042	35.74
40-44	0.007621	0.037442	79 889	2 991	392 468	2 536 105	31.75
45-49	0.010092	0.049304	76 898	3 791	375 644	2 143 637	27.88
50-54	0.013455	0.065228	73 107	4 769	354 441	1 767 993	24.18
55-59	0.018226	0.087403	68 338	5 973	327 719	1 413 552	20.68
60-64	0.024794	0.117133	62 365	7 305	294 628	1 085 833	17.41
65-69	0.035060	0.161824	55 060	8 910	254 136	791 205	14.37
70-74	0.050614	0.225572	46 150	10 410	205 674	537 069	11.64
75-79	0.070431	0.300305	35 740	10 733	152 390	331 395	9.27
80-84	0.100848	0.402146	25 007	10 056	99 714	179 005	7.16
85-89	0.150493	0.539347	14 951	8 064	53 584	79 291	5.30
90-94	0.232328	0.703472	6 887	4 845	20 854	25 707	3.73
95-99	0.408176	0.890023	2 042	1 817	4 452	4 853	2.38
100+	0.560474	1.000000	225	225	401	401	1.78

Fuente: Cabrera, A., Gustavo, Ordorica, Manuel, García, Luis, Tabla abreviada de mortalidad de México, 1969-1971. El Colegio de México, C.E.E.D., 1973.

Tabla 4
MEXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD FEMENINA, 1969-1971

Edad $x, x+n-1$	$n \cdot q_x$	$n \cdot q_x$	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
0		0.060625	100 000	6 063	95 732	6 394 880	63.95
1		0.016621	93 937	1 561	93 016	6 299 148	67.06
2		0.009081	92 376	839	91 931	6 206 132	67.18
3		0.005622	91 537	515	91 269	6 114 201	66.79
4		0.003576	91 022	325	90 856	6 022 932	66.17
5-9	0.001831	0.009115	90 697	827	451 666	5 932 076	65.41
10-14	0.000989	0.004935	89 870	444	448 938	5 480 410	60.98
15-19	0.001461	0.007278	89 426	651	445 585	5 031 472	56.26
20-24	0.002134	0.010615	88 775	942	441 425	4 585 887	51.66
25-29	0.002813	0.013973	87 833	1 227	436 189	4 144 462	47.19
30-34	0.003479	0.017253	86 606	1 494	429 434	3 708 273	42.82
35-39	0.004379	0.021673	85 112	1 845	421 329	3 278 839	38.52
40-44	0.005385	0.026592	83 267	2 214	411 142	2 857 510	34.32
45-49	0.006850	0.033715	81 053	2 733	398 978	2 446 368	30.18
50-54	0.009324	0.045646	78 320	3 575	383 296	2 097 390	26.14
55-59	0.013201	0.064034	74 745	4 786	362 548	1 664 094	22.26
60-64	0.019820	0.094702	69 959	6 625	334 258	1 301 546	18.60
65-69	0.030527	0.142354	63 334	9 016	295 345	967 288	15.27
70-74	0.044317	0.200321	54 318	10 881	245 527	671 943	12.31
75-79	0.064094	0.277168	43 437	12 039	187 833	426 416	9.82
80-84	0.093329	0.378333	31 398	11 879	127 281	238 583	7.60
85-89	0.135124	0.500356	19 519	9 767	72 282	111 302	5.70
90-94	0.216343	0.676488	9 752	6 597	30 493	39 020	4.00
95-99	0.355134	0.850699	3 155	2 684	7 558	8 527	2.70
100+	0.486257	1.000000	471	471	969	969	2.06

Fuente: Cabrera, A., Gustavo, Ordorica, Manuel, García, Luis, "Tabla...",
Op.cit.

Tabla 5
COSTA RICA: TABLA COMPLETA DE MORTALIDAD MASCULINA, 1972-1974.

Intervalo de edades $x, x+1$	Probabilidades de muerte entre $x, x+1$ q_x	De 100 000 nacidos vivos		Población estacionaria			Esperanza de vida a la edad x e_x^0
		Sobrevivientes a la edad x l_x	Defunciones entre $x, x+1$ d_x	Tiempo vivido entre $x, x+1$ L_x	Relación de supervivencia P_x	Tiempo vivido entre x, x T_x	
					($P_0=0.95799$)		
0-1	0.05520	100 000	5 520	95 799	0.98295	6 626 234	66.26
1-2	0.00664	94 480	628	94 166	0.99512	6 530 435	69.12
2-3	0.00310	93 852	291	93 706	0.99752	6 436 269	68.58
3-4	0.00187	93 561	175	93 474	0.99849	6 342 563	67.79
4-5	0.00113	93 386	106	93 333	0.99895	6 249 089	66.92
5-6	0.00102	93 280	95	93 235	0.99902	6 155 756	65.99
6-7	0.00094	93 185	88	93 144	0.99911	6 062 521	65.06
7-8	0.00086	93 097	80	93 061	0.99918	5 969 377	64.12
8-9	0.00080	93 017	74	92 985	0.99924	5 876 316	63.17
9-10	0.00073	92 943	68	92 914	0.99930	5 783 331	62.22
10-11	0.00067	92 875	62	92 849	0.99935	5 690 417	61.27
11-12	0.00063	92 813	58	92 789	0.99934	5 597 568	60.31
12-13	0.00060	92 755	63	92 728	0.99926	5 504 779	59.35
13-14	0.00070	92 692	72	92 659	0.99915	5 412 051	58.39
14-15	0.00090	92 620	83	92 580	0.99903	5 319 392	57.43
15-16	0.00103	92 537	95	92 490	0.99889	5 226 812	56.48
16-17	0.00116	92 442	107	92 387	0.99877	5 134 322	55.54
17-18	0.00131	92 335	121	92 273	0.99862	5 041 935	54.60
18-19	0.00144	92 214	133	92 146	0.99849	4 949 662	53.68
19-20	0.00159	92 081	146	92 007	0.99836	4 857 516	52.75
20-21	0.00176	91 935	162	91 856	0.99819	4 765 509	51.84
21-22	0.00187	91 773	172	91 690	0.99811	4 673 653	50.93
22-23	0.00193	91 601	177	91 517	0.99806	4 581 963	50.02
23-24	0.00196	91 424	179	91 339	0.99804	4 490 446	49.12
24-25	0.00197	91 245	180	91 160	0.99803	4 399 107	48.21
25-26	0.00199	91 065	181	90 980	0.99801	4 307 947	47.31
26-27	0.00200	90 884	182	90 799	0.99800	4 216 967	46.40
27-28	0.00202	90 702	183	90 617	0.99796	4 126 168	45.49
28-29	0.00208	90 519	188	90 432	0.99790	4 035 551	44.58
29-30	0.00216	90 331	195	90 242	0.99780	3 945 119	43.67
30-31	0.00227	90 136	205	90 043	0.99769	3 854 877	42.77
31-32	0.00237	89 931	213	89 835	0.99758	3 764 834	41.86
32-33	0.00247	89 718	222	89 618	0.99749	3 674 999	40.96
33-34	0.00258	89 496	231	89 393	0.99737	3 585 381	40.06
34-35	0.00269	89 265	240	89 158	0.99729	3 495 988	39.16
35-36	0.00281	89 025	250	88 916	0.99718	3 406 830	38.27
36-37	0.00293	88 775	260	88 665	0.99703	3 317 914	37.37
37-38	0.00308	88 515	273	88 402	0.99687	3 229 249	36.48
38-39	0.00324	88 242	286	88 125	0.99671	3 140 847	35.59
39-40	0.00342	87 956	301	87 835	0.99649	3 052 722	34.71

Tabla 5 (cont.)
COSTA RICA: TABLA COMPLETA DE MORTALIDAD MASCULINA, 1972-1974.

$x, x+1$	q_x	l_x	d_x	L_x	P_x	T_x	e_x^0
40-41	0.00362	87 655	317	87 527	0.99625	2 964 887	33.83
41-42	0.00382	87 338	334	87 199	0.99604	2 877 360	32.95
42-43	0.00407	87 004	354	86 854	0.99578	2 790 161	32.07
43-44	0.00433	86 650	375	86 487	0.99551	2 703 307	31.20
44-45	0.00464	86 275	400	86 099	0.99523	2 616 820	30.33
45-46	0.00496	85 875	426	85 688	0.99487	2 530 721	29.47
46-47	0.00534	85 449	456	85 248	0.99450	2 445 033	28.61
47-48	0.00572	84 993	486	84 779	0.99411	2 359 785	27.76
48-49	0.00612	84 507	517	84 280	0.99366	2 275 006	26.92
49-50	0.00657	83 990	552	83 746	0.99318	2 190 726	26.08
50-51	0.00704	83 438	587	83 175	0.99267	2 106 980	25.25
51-52	0.00758	82 851	628	82 565	0.99210	2 023 805	24.43
52-53	0.00819	82 223	673	81 913	0.99143	1 941 240	23.61
53-54	0.00890	81 550	726	81 211	0.99069	1 859 327	22.80
54-55	0.00969	80 824	783	80 455	0.98983	1 778 116	22.00
55-56	0.01057	80 041	846	79 637	0.98894	1 697 661	21.21
56-57	0.01152	79 195	912	78 756	0.98791	1 618 024	20.43
57-58	0.01262	78 283	988	77 804	0.98676	1 539 268	19.66
58-59	0.01383	77 295	1 069	76 774	0.98544	1 461 464	18.91
59-60	0.01521	76 226	1 159	75 656	0.98401	1 384 690	18.17
60-61	0.01665	75 067	1 250	74 446	0.98251	1 309 034	17.44
61-62	0.01823	73 817	1 346	73 144	0.98082	1 234 588	16.72
62-63	0.02006	72 471	1 454	71 741	0.97883	1 161 444	16.03
63-64	0.02223	71 017	1 579	70 222	0.97652	1 089 703	15.34
64-65	0.02467	69 438	1 713	68 573	0.97419	1 019 481	14.68
65-66	0.02732	67 725	1 850	66 803	0.97151	950 908	14.04
66-67	0.03010	65 875	1 983	64 900	0.96863	884 105	13.42
67-68	0.03302	63 892	2 110	62 864	0.96566	819 205	12.82
68-69	0.03608	61 782	2 229	60 705	0.96256	756 341	12.24
69-70	0.03924	59 553	2 337	58 432	0.95934	695 636	11.68
70-71	0.04263	57 216	2 439	56 056	0.95583	637 204	11.14
71-72	0.04624	54 777	2 533	53 580	0.95209	581 148	10.61
72-73	0.05013	52 244	2 619	51 013	0.94809	527 568	10.10
73-74	0.05427	49 625	2 693	48 365	0.94380	476 555	9.60
74-75	0.05870	46 932	2 755	45 647	0.93897	428 190	9.12
75-76	0.06381	44 177	2 819	42 861	0.93414	382 543	8.66
76-77	0.06833	41 358	2 826	40 038	0.92899	339 682	8.21
77-78	0.07425	38 532	2 861	37 195	0.92324	299 644	7.78
78-79	0.07976	35 671	2 845	34 340	0.91721	262 449	7.36
79-80	0.08640	32 826	2 836	31 497	0.91025	228 109	6.95
80-81	0.09273	29 990	2 781	28 670	0.90366	196 612	6.56
81-82	0.09989	27 209	2 718	25 908	0.89594	167 942	6.17
82-83	0.10812	24 491	2 648	23 212	0.88743	142 034	5.80
83-84	0.11706	21 843	2 557	20 599	0.87786	118 822	5.44
84-85	0.12740	19 286	2 457	18 083	--	98 223	5.09
85 y+	1.00000	16 829	16 829	80 140	--	80 140	4.76

Tabla 6
 TABLA DE REED Y MERRELL PARA EL CALCULO DE LAS
 PROBABILIDADES DE MUERTE POR GRUPOS QUINQUENALES

s^m_x	s^q_x	Δ	s^m_x	s^q_x	Δ	s^m_x	s^q_x	Δ
		.00			.00			.00
.000	.000 000	4 989	.050	.223 144	3 952	.100	.399 504	3 116
.001	.004 989	4 965	.051	.227 096	3 936	.101	.402 620	3 100
.002	.009 984	4 943	.052	.231 051	3 916	.102	.405 720	3 085
.003	.014 897	4 920	.053	.234 946	3 897	.103	.408 806	3 070
.004	.019 817	4 897	.054	.238 843	3 879	.104	.411 876	3 056
.005	.024 714	4 876	.055	.242 722	3 861	.105	.414 931	3 041
.006	.029 690	4 852	.056	.246 583	3 842	.106	.417 972	3 026
.007	.034 442	4 830	.057	.250 426	3 824	.107	.420 998	3 011
.008	.039 272	4 808	.058	.254 249	3 807	.108	.424 009	2 998
.009	.044 060	4 786	.059	.258 056	3 788	.109	.427 007	2 982
.010	.048 866	4 763	.060	.261 844	3 770	.110	.429 989	2 969
.011	.053 629	4 742	.061	.265 614	3 753	.111	.432 958	2 953
.012	.058 371	4 720	.062	.269 367	3 735	.112	.435 911	2 940
.013	.063 091	4 698	.063	.273 102	3 717	.113	.438 851	2 926
.014	.067 789	4 676	.064	.276 819	3 700	.114	.441 777	2 911
.015	.072 465	4 655	.065	.280 519	3 682	.115	.444 688	2 897
.016	.077 120	4 633	.066	.284 201	3 665	.116	.447 585	2 883
.017	.081 753	4 612	.067	.287 866	3 647	.117	.450 468	2 870
.018	.086 365	4 590	.068	.291 513	3 630	.118	.453 338	2 856
.019	.090 955	4 570	.069	.295 143	3 613	.119	.456 193	2 842
.020	.095 525	4 547	.070	.298 756	3 596	.120	.459 035	2 827
.021	.100 072	4 527	.071	.302 352	3 579	.121	.461 862	2 813
.022	.104 599	4 506	.072	.305 931	3 562	.122	.464 677	2 800
.023	.109 105	4 485	.073	.309 493	3 545	.123	.467 477	2 787
.024	.113 590	4 464	.074	.313 038	3 528	.124	.470 264	2 773
.025	.118 054	4 444	.075	.316 566	3 511	.125	.473 037	2 760
.026	.122 498	4 423	.076	.320 077	3 495	.126	.475 797	2 746
.027	.126 921	4 402	.077	.323 572	3 478	.127	.478 543	2 733
.028	.131 323	4 382	.078	.327 050	3 461	.128	.481 276	2 720
.029	.135 705	4 361	.079	.330 511	3 445	.129	.483 996	2 707
.030	.140 066	4 341	.080	.333 956	3 429	.130	.486 703	2 693
.031	.144 407	4 321	.081	.337 385	3 412	.131	.489 396	2 680
.032	.148 728	4 301	.082	.340 797	3 396	.132	.492 076	2 667
.033	.153 029	4 281	.083	.344 193	3 380	.133	.494 743	2 655
.034	.157 310	4 261	.084	.347 573	3 364	.134	.497 398	2 641
.035	.161 571	4 241	.085	.350 937	3 347	.135	.500 039	2 628
.036	.165 812	4 221	.086	.354 284	3 332	.136	.502 667	2 616
.037	.170 033	4 201	.087	.357 616	3 316	.137	.505 283	2 603
.038	.174 234	4 182	.088	.360 932	3 300	.138	.507 886	2 590
.039	.178 416	4 162	.089	.364 232	3 284	.139	.510 476	2 577
.040	.182 578	4 143	.090	.367 516	3 268	.140	.513 053	2 565
.041	.186 721	4 123	.091	.370 784	3 253	.141	.515 618	2 552
.042	.190 844	4 104	.092	.374 037	3 237	.142	.518 170	2 540
.043	.194 948	4 085	.093	.377 274	3 222	.143	.520 710	2 527
.044	.199 033	4 066	.094	.380 496	3 206	.144	.523 237	2 516
.045	.203 099	4 047	.095	.383 702	3 191	.145	.525 752	2 503
.046	.207 146	4 028	.096	.386 893	3 176	.146	.528 255	2 490
.047	.211 174	4 008	.097	.390 069	3 160	.147	.530 745	2 478
.048	.215 182	3 990	.098	.393 229	3 145	.148	.533 223	2 466
.049	.219 172	3 972	.099	.396 374	3 130	.149	.535 689	2 454
.050	.223 144	3 952	.100	.399 504	3 116	.150	.538 143	2 442

Tabla 6 (cont.)
 TABLA DE REED Y MERRELL PARA EL CALCULO DE LAS
 PROBABILIDADES DE MUERTE POR GRUPOS QUINQUENALES

${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ	${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ	${}_5m_x$	${}_5q_x$	Δ
		.00			.00			.00
.150	.538 143	2 442	.200	.646 645	1 904	.250	.730 854	1 476
.151	.540 585	2 430	.201	.648 449	1 894	.251	.732 330	1 469
.152	.543 015	2 418	.202	.650 343	1 885	.252	.735 799	1 462
.153	.545 433	2 406	.203	.652 228	1 876	.253	.735 261	1 453
.154	.547 839	2 394	.204	.654 104	1 866	.254	.736 714	1 447
.155	.550 233	2 382	.205	.655 970	1 856	.255	.738 161	1 439
.156	.552 616	2 371	.206	.657 826	1 847	.256	.739 600	1 432
.157	.554 988	2 359	.207	.659 673	1 838	.257	.741 032	1 424
.158	.557 346	2 347	.208	.661 511	1 829	.258	.742 456	1 417
.159	.559 692	2 336	.209	.663 340	1 819	.259	.743 873	1 409
.160	.562 028	2 324	.210	.665 159	1 810	.260	.745 282	1 403
.161	.564 352	2 313	.211	.666 969	1 802	.261	.746 685	1 395
.162	.566 665	2 301	.212	.668 771	1 792	.262	.748 080	1 388
.163	.568 966	2 290	.213	.670 563	1 783	.263	.749 468	1 381
.164	.571 256	2 279	.214	.672 346	1 774	.264	.750 849	1 374
.165	.573 535	2 267	.215	.674 120	1 765	.265	.752 223	1 366
.166	.575 802	2 257	.216	.675 885	1 756	.266	.753 589	1 359
.167	.578 059	2 245	.217	.677 641	1 747	.267	.754 949	1 353
.168	.580 304	2 234	.218	.679 388	1 739	.268	.756 302	1 345
.169	.582 538	2 223	.219	.681 127	1 729	.269	.757 647	1 339
.170	.584 761	2 211	.220	.682 856	1 721	.270	.758 988	1 332
.171	.586 972	2 201	.221	.684 577	1 712	.271	.760 318	1 325
.172	.589 173	2 190	.222	.686 289	1 704	.272	.761 643	1 318
.173	.591 363	2 180	.223	.687 993	1 695	.273	.762 961	1 311
.174	.593 543	2 168	.224	.689 688	1 686	.274	.764 272	1 304
.175	.595 711	2 157	.225	.691 374	1 678	.275	.765 576	1 298
.176	.597 868	2 147	.226	.693 052	1 669	.276	.766 874	1 291
.177	.600 015	2 137	.227	.694 721	1 661	.277	.768 165	1 284
.178	.602 152	2 125	.228	.696 382	1 652	.278	.769 449	1 278
.179	.604 277	2 115	.229	.698 034	1 644	.279	.770 727	1 271
.180	.606 392	2 105	.230	.699 678	1 636	.280	.771 998	1 264
.181	.608 497	2 094	.231	.701 314	1 627	.281	.773 262	1 258
.182	.610 591	2 083	.232	.702 941	1 619	.282	.774 520	1 251
.183	.612 674	2 073	.233	.704 560	1 611	.283	.775 771	1 245
.184	.614 747	2 063	.234	.706 171	1 602	.284	.777 016	1 239
.185	.616 810	2 053	.235	.707 773	1 595	.285	.778 255	1 231
.186	.618 863	2 042	.236	.709 368	1 586	.286	.779 486	1 226
.187	.620 905	2 032	.237	.710 954	1 578	.287	.780 712	1 219
.188	.622 937	2 022	.238	.712 532	1 570	.288	.781 931	1 213
.189	.624 959	2 012	.239	.714 102	1 562	.289	.783 144	1 206
.190	.626 971	2 002	.240	.715 664	1 555	.290	.784 350	1 201
.191	.628 973	1 992	.241	.717 219	1 546	.291	.785 551	1 193
.192	.630 965	1 982	.242	.718 765	1 538	.292	.786 744	1 188
.193	.632 947	1 972	.243	.720 303	1 531	.293	.787 932	1 182
.194	.634 919	1 962	.244	.721 834	1 522	.294	.789 114	1 175
.195	.636 881	1 952	.245	.723 356	1 515	.295	.790 289	1 169
.196	.638 833	1 943	.246	.724 871	1 507	.296	.791 458	1 163
.197	.640 778	1 933	.247	.726 378	1 500	.297	.792 621	1 157
.198	.642 709	1 923	.248	.727 878	1 492	.298	.793 778	1 151
.199	.644 632	1 913	.249	.729 370	1 484	.299	.794 929	1 145
.200	.646 545	1 904	.250	.730 854	1 476	.300	.796 074	1 139

BIBLIOGRAFIA



Teoría y construcción de tablas

1. Beers, Henry, S., "Six Terms Formulas for Routine Actuarial Interpolation", en The Record of the American Institute of Actuaries, 34.
2. Benítez, Raúl y Cabrera, Gustavo, Tablas abreviadas de mortalidad de la población de México 1930, 1940, 1950, 1960, El Colegio de México, 1967.
3. Benjamin, B., Elements of Vital Statistics. London. George Allen and Unwin. 1959.
4. Bocaz, A., Cálculo de los valores de l_x , conocidos los nL_x , CELADE, inédito.
5. Brass, W., "Uses of Census and Surveys Data for the Estimation of Vital Rates", en African Seminar on Vital Statistics, Naciones Unidas, Comisión Económica para Africa, Addis Abbeba, 1964.
6. Brass, W., Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (fecundidad y mortalidad). San José, Costa Rica, 16-24 de setiembre de 1971, Serie DS Nº 9.
7. Camisa, Z., Las estadísticas demográficas y la mortalidad en Guatemala hacia 1950 y 1964. CELADE, Serie AS Nº 2, San José, Costa Rica, 1969.
8. Coale, A. J. y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966.

9. Coale, A. J. y Demeny, P., Regional Model Life Tables and Stable Populations, Second Edition, Academic Press, New York, 1983.
10. Chackiel, J., "El modelo de mortalidad de Brass", Notas de Población, Nº 25, CELADE, Abril de 1981.
11. Chackiel, J. y Macció, G., Evaluación y corrección datos demográficos, CELADE, Serie B, Nº 39, Santiago de Chile.
12. Chackiel, J. y Ortega, A., Tablas de mortalidad femenina de Guatemala, Honduras y Nicaragua, CELADE, Serie A, Nº 1033, 1977.
13. Dirección General de Estadística y Censos y CELADE, Tablas de vida de Costa Rica, 1972-1974. San José, Costa Rica, octubre de 1976.
14. Doering, C.R. y Forbes, A.L., "A Skeleton Life Table", Proceedings of National Academy of Sciences, Vol. 24; 400-405, 1938.
15. Dublin, L. y Spiegelman, M., Tablas de mortalidad de contemporáneos versus tablas de mortalidad por generaciones. CELADE, Serie DS, Nº 1.
16. Gabriel, K.R. y Ronen, I., Estimación de la mortalidad a partir de tasas de mortalidad infantil. CELADE, Serie DS Nº 22. Traducción del artículo "Estimates of Mortality from Infant Mortality Rates", publicado por Population Studies, Vol. XI, Nº 2, 1958.
17. Gompertz, B., "On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality", Philosophical Transactions of the Royal Society, Part II, 1825.
18. Greville, T.N.E., Métodos rápidos para la construcción de tablas abreviadas de mortalidad. CELADE, Serie D, Nº 1.
19. Greville, T.N.E., United States Life Tables and Actuarial Tables 1939-1941, United States Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, D.C., USA, 1946.
20. Greville, T.N.E., Methodology of the National, Regional and State Life Tables for the United

- States: 1959-1961, National Center for Health Statistics, Washington D.C., USA, 1967.
21. Greville, T.N.E., Graduation, Education and Examination Committee of the Society of Actuaries, 1974.
 22. Heligman, L., Construction of New United Nations Model Life Table System, Seminar on Methodology and Data Collection in Mortality Studies UIECP, Dakar, Senegal, 7-10 de julio de 1981.
 23. Hernández, R., Metodología simplificada para la construcción de una tabla abreviada de mortalidad. Síntesis del trabajo de Doering y Forbers. (Doering, Carl R. and Forbers, Alice N., "Skeleton Life Table" Harvard's Public Health. Vital Statistics Department, Harvard University, United States, 1969).
 24. Hill, K., Encuesta Demográfica Nacional de Honduras: análisis de preguntas retrospectivas, Dirección General de Estadística y Censos de Honduras y CELADE, 1976.
 25. Hobcraft, John, Sistemas de tablas modelo de mortalidad, en Seminario sobre estimaciones demográficas. CELADE, Serie D, Nº 94, Santiago, Chile.
 26. Jordan, C.W., Life Contingencies. Chicago, Society of Actuaries, 1967.
 27. Keyfitz, N., Introducción a las matemáticas de población, CELADE, Serie E Nº 18, Santiago, Chile, 1979.
 28. King, G., "On a Short Method of Constructing an Abridged Mortality Table", Journal of the Institute of Actuaries, 48:294, (julio 1914).
 29. Lederman, S., Nouvelles Tables Types de Mortalité, Cahier Nº 53, INED, Presses Universitaires de France, 1969.
 30. Lederman, S. y Breas, J., "Les dimensions de la mortalité", Population, 14^e année, Nº 4, octobre-décembre 1959.
 31. Lexis, W., Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik. Strasbourg: Trubner, 1875.

32. Lotka, A.J., Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E Nº 5, Santiago, Chile, 1969.
33. Makeham, W.M., "On the Law of Mortality and Construction of Annuity Tables", Journal of the Institute of Actuaries, 8:301 (1860).
34. Miller, M.D., Elements of Graduation, Chicago, Society of Actuaries, 1946, ch. 5.
35. Mortara, G., La mortalidad de la población del Brasil, CELADE, Serie D Nº 32, Santiago, Chile.
36. Naciones Unidas, Manual X, Técnicas indirectas de estimación demográfica, Nueva York, 1986.
37. Naciones Unidas, El concepto de población estable, ST/SDA/Serie A/39, Anexo II.
38. Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad (Tablas modelo de mortalidad para países insuficientemente desarrollados), ST/SDA/Serie A/22.
39. Naciones Unidas, Manual III, Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, ST/SDA/Serie A/25.
40. Naciones Unidas, "Análisis factorial de las tasas de mortalidad por edad y por sexo", Boletín de Población No. 6, Serie Nº 6, 1962.
41. National Center for Health Statistics, Methodology of the National and State Life Tables for the United States: 1969-71. Maryland, USA, 1975.
42. National Center for Health Statistics, Serie 2, Nº 4, Comparison of Two Methods of Constructing Abridged Life Tables by Reference to a Standard Table, March 1966.
43. Ortega, Antonio, Tablas completas de mortalidad de Cuba 1977-1978, nivel nacional: metodología y resultados. CELADE y Comité Estatal de Estadísticas, 1981.
44. Ortega, A. y Lerda J.C., Tabla de mortalidad por generaciones: México 1960. CELADE, Serie AS, Nº13, San José, Costa Rica, 1971.

45. Pressat, R., El análisis demográfico, capítulo 2, parte 1; capítulo 3, parte 2. Fondo de Cultura Económica, 1967.
46. Reed, Lowell J., y Merrell, M., Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D Nº 49.
47. Sirken, M.G., Comparison of Two Methods of Constructing Abridged Life Tables by Reference to a Standard Table, National Center for Health Statistics, Serie 2, Nº 4, febrero de 1964.
48. Somoza, J.L., Tablas de mortalidad, CELADE, Serie B Nº 14, Santiago, Chile.
49. Somoza, J.L., "Encuesta Demográfica Nacional de Bolivia", Notas de Población, Nº 11, agosto de 1976.
50. Spiegelman, M., Introducción a la Demografía, Fondo de Cultura Económica, México, 1972.
51. Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y Centro Latinoamericano de Demografía, Diccionario Demográfico Multilingüe, Versión en Español, Lieja, Bélgica, 1985.
52. United Nations, Model Life Tables for Developing Countries, New York, 1982.

B Aplicaciones de la Tabla de Mortalidad en Estudios de Población

53. Bocaz, A., "El uso de la ley de Makeham como función demográfica", en Notas de Población, Nº 6, diciembre de 1974.
54. Bourgeois-Pichat, Jean, Nuevas fronteras de la demografía, CELADE, Serie E Nº 30, Santiago, Chile, octubre de 1985, Cap. II.
55. Caraballo, A.L., Tablas de mortalidad y de nupcialidad de Puerto Rico 1950 y 1960, CELADE, Serie C Nº 7, 1964.

56. Cerisola, M.J.E., República Argentina: Análisis de la mortalidad por causas, 1960. CELADE, Serie C Nº 9, 1968.
57. Chackiel, J., "Estructura de la fecundidad por edades: ajuste y proyección mediante la función de Gompertz linealizada", en Notas de Población, Nº 20, agosto de 1979.
58. Díaz A., Erwin R., Causas de muerte en Guatemala, 1960-1979. Tesis de Grado del Programa de Maestría en Demografía, CELADE, Santiago de Chile, diciembre de 1986.
59. Dublin, L., Lotka, A. y Spiegelman, M., Length of Life. A Study of the Life Table, New York, The Ronald Press Company, 1949.
60. Elizaga, J.C., Dinámica y Economía de la Población, CELADE, Serie E, Nº 27, Santiago, Chile, 1979.
61. Gómez, Lilian, Paraguay: Tablas de vida escolar 1950 y 1962. Proyección de la asistencia escolar 1965-1980. Trabajo final de investigación, CELADE, distribución interna, 1974.
62. Grabill, Wilson H., "Attrition Life Tables for the Single Population", Journal of the American Statistical Association, 40(231):364-375. Sept 1945.
63. Holder, Carmen, Brasil: Patrón de escolaridad por sexo, según tablas de vida escolar para 1960 y 1970. Trabajo final de investigación, CELADE, Distribución interna, 1973.
64. Juárez, Fátima, "Examen crítico de la técnica de tablas de vida en las tendencias sobre fecundidad: el caso de México", en Demografía y Economía. Vol. 18, México, 1984.
65. Keyfitz, N., Applied Mathematical Demography, John Wiley, 1977, Cap. 2.
66. Naciones Unidas, Método de análisis de los datos censales relativos a las actividades económicas de la población, ST/SDA/Serie A/43, 1969, capítulo I.

67. Naciones Unidas, The Aging of Populations and its Economic and Social Implications, ST/SOA/Serie A/26.
68. Ortega, A. y Rincón, M., Algunas estimaciones demográficas sobre la mortalidad para la formulación de las metas del plan de salud de Costa Rica, CELADE, San José, Costa Rica, 1974.
69. Potter, R.G., "Application of Life Table Technique to Measurement of Contraception Effectiveness", Demography III, 2, 1966.
70. Preston, S.H., Keyfitz, N. y Schoen, R., Causes of Death. Life Tables for National Populations, Seminar Press, New York, USA, 1972.
71. Rincón, M., Tablas de vida activa, CELADE, Serie B Nº 100B, San José, Costa Rica, 1977.
72. Rodríguez, G. y Hobcraft, J., Illustrative Analysis: Life Table Analysis of Birth Intervals in Colombia, WFS, Scientific Reports, International Statistical Institute, London, 1980.
73. Shryock, H.S. y Siegel, J.S., The Methods and Materials of Demography, U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, 1971, Cap. 15.
74. Somoza, Jorge, Tablas de vida activa. CELADE Serie B Nº 26, Santiago, Chile, 1969.
75. Somoza, Jorge, "El sistema de tablas de vida de Brass: aplicación a la Argentina" en Notas de Población, Nº 5, Año 2, agosto de 1974.
76. Spiegelman, Mortimer, "The Versatility of the Life Table". American Journal of Public Health, 47(3):297-304. Marzo de 1957.
77. Spielman, Evelyn, "Notas sobre la utilización de la función de Gompertz en el estudio de la fecundidad" en Notas de Población, Nº 12, Año 4. diciembre de 1976.

*
* *

ERRATAS ADVERTIDAS EN EL LIBRO DE TABLAS DE MORTALIDAD

DONDE DICE	DEBE DECIR
1. <u>Pág. 38, últimas líneas</u> $x + e_x^0 = 50 + 24.19 =$	$x + e_x^0 = 50 + 24.18 =$
2. <u>Pág. 50, ejercicio 5</u> $q_0 = 0.05365$	$q_0 = 0.05356$
3. <u>Pág. 74, última línea</u> ${}_5P_{0-4} = \frac{{}_5L_5}{{}_5L_0} = \frac{351\ 446}{399\ 003} = 0.88081$	${}_5P_{0-4} = \frac{{}_5L_5}{{}_5L_0} = \frac{356\ 725}{399\ 003} = 0.89404$
4. <u>Pág. 82</u> Fórmula (78)	Falta poner puntos suspensivos entre el tercero y cuarto término: +.....+
5. <u>Pág. 128, ejercicio 9</u> ...las tablas modelo de Naciones Unidas...	...las tablas modelo de Coale-Demeny...
6. <u>Pág. 148, cuadro de la parte inferior</u> ${}_5^D_x = {}_5^N_x \cdot {}_5^M_x =$	${}_5^D_x = {}_5^N_x \cdot {}_5^M_x =$
7. <u>Pág. 162, últimas líneas</u> ...puede consultarse las referencias (10), (24) y (26)	...puede consultarse las referencias (12), (24) y (36)
8. <u>Pág. 148, cuadro 2, intervalo de edades 28-365 días</u> 28-365 días..... + 729B ¹⁹⁷¹)	28-365 días..... + 337B ¹⁹⁷¹)
9. <u>Pág. 255, respuesta 3-2</u> ${}_4q_1 = \frac{{}_4d_1}{l_1} = \frac{3\ 000}{97\ 000} = \underline{0.03093}$	${}_4q_1 = \frac{{}_4d_1}{l_1} = \frac{741}{97\ 000} = \underline{0.00764}$
10. <u>Pág. 277. respuesta 6-10</u> $e_1^0 =$	${}_5n e_{15}^0 =$

4

4

4