

INT-1740

v.1

CÉPAL/CELADE(1740)

v.1

NACIONES UNIDAS  
CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFÍA (CELADE)

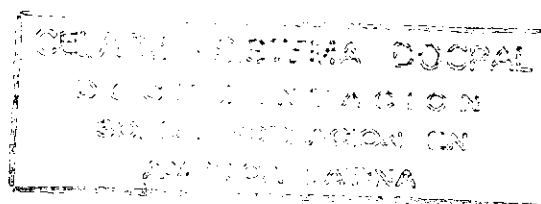


**XX CURSO REGIONAL INTENSIVO  
DE ANÁLISIS DEMOGRÁFICO  
1997**

**1. MÉTODOS CUANTITATIVOS  
MATEMÁTICAS: MATERIAL DOCENTE**

**MATERIAL DOCENTE**

*(Para uso exclusivo de los alumnos)*



Santiago de Chile

CURSO INTERNACIONAL INTENSIVO DE  
DEMOGRAFIA



MATEMATICAS

Organiza: Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad de Antofagasta.

Patrocinan:



REPUBLICA DE CHILE  
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA  
FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA



NACIONES UNIDAS  
CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA



CURSO INTERNACIONAL INTENSIVO DE  
D E M O G R A F I A

APUNTES DE

MATEMATICAS

Dr. Héctor Rojo Jeraldo  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad de Antofagasta

Mg. Pedro Huerta Marín  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad de Antofagasta

CELADE - SISTEMA OCOPAL  
DE REGISTRO Y ESTADÍSTICA  
DE LA PoblACION EN

## I. FUNCIONES Y GRAFICAS

### Definición:

Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos de números reales. Una función,  $f$  es una regla que asigna a cada número  $x$  en  $X$  un único valor  $f(x)$  en  $Y$ . El conjunto  $X$  es llamado el dominio de  $f$ . El conjunto de imágenes de elementos de  $X$  es llamado el rango de  $f$ .

En otras palabras, una función es una regla que asigna a cada  $x$  en el dominio de  $f$  un único número  $y$  en el rango de  $f$ . Usualmente este se escribe como

$$y = f(x) \quad (1)$$

Cuando el dominio de una función no es dado, el dominio debe tomarse como el conjunto de valores para los cuales la ecuación (1) tiene sentido. Por ejemplo, sea  $f$  la función dada por  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ . Puesto que la expresión  $\frac{1}{x-1}$  no está definida para  $x = 1$ , el número uno no está en el dominio de  $f$ . Sin embargo,  $\frac{1}{x-1}$  está definida para todo  $x \neq 1$ , de tal forma que el dominio de  $f$  es el conjunto de todos los números reales excepto el uno. Por otra parte,  $\frac{1}{x-1}$  puede tomar cualquier valor real, excepto el cero. Esto indica que el rango de  $f$  es el conjunto de los números reales excepto el cero. Podemos resumir esto anotando:

$$\text{Dominio de } f = \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Rango de } f = \text{Rang } f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ejemplo: Sea  $f(x) = \sqrt{3x + 4}$

- Encontrar el dominio de  $f$
- Evaluar  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(10)$ ,  $f(-2)$
- Encontrar el rango de  $f$ .

### Solución:

- Para que la imagen  $f(x)$  sea un número real, la cantidad subradical  $3x + 4$  no debe ser negativa, de tal forma que debe cumplirse

$$3x + 4 \geq 0 \quad 6$$

$$3x \geq -4$$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

Así entonces,  $\text{Dom } f = \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$

b)  $f(0) = \sqrt{3 \cdot 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$

$f(-1) = \sqrt{3(-1) + 4} = \sqrt{1} = 1$

$f(10) = \sqrt{3 \cdot 10 + 4} = \sqrt{34}$

$f(-2)$  no está definido, pues  $-2 \notin \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$

c)  $\sqrt{3x + 4}$  denota una raíz cuadrada positiva, de tal manera que

$f(x) = \sqrt{3x + 4} \geq 0, \forall x \in \text{Dom } f$ , y así entonces

$\text{Rang } f = [0, \infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Definición: La gráfica de una función  $f$  es el conjunto de pares ordenados

$\{(x, f(x)) : x \in \text{Dom } f\}$ .

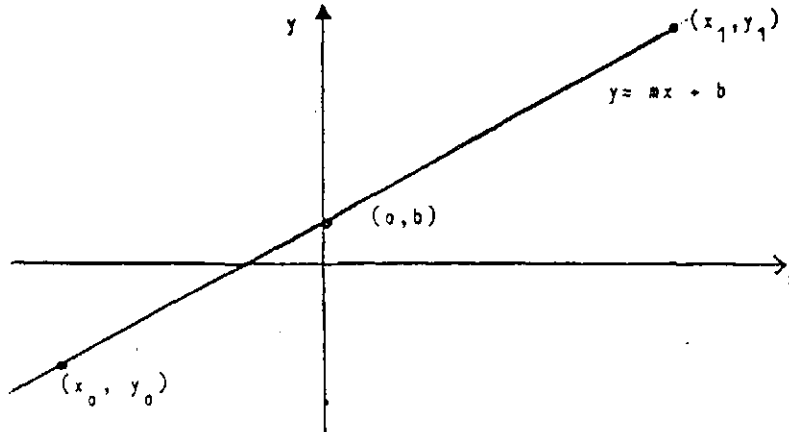
Ejemplo.

Una función lineal tiene la forma

$y = m x + b$

con  $\text{Dom } f = \text{Rang } f = \mathbb{R}$

La gráfica de una función lineal corresponde a una línea recta en el plano cartesiano y luce como



En la ecuación  $y = m x + b$ , el parámetro  $m$  representa la pendiente de la recta. Si  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  son dos puntos distintos sobre la recta, en tonces esta pendiente  $m$  se puede calcular mediante la expresión

$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad x_0 \neq x_1$

- Si  $m > 0$  , la gráfica de la línea recta es oblicua hacia arriba cuando nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de eje  $x$ .
- Si  $m < 0$  , la gráfica de la línea recta es oblicua hacia abajo cuando nos movemos de izquierda a derecha a lo largo del eje  $x$ .
- La pendiente de una línea recta vertical no está definida (esta gráfica no corresponde a una función).
- Si  $L_1$  y  $L_2$  son dos líneas rectas no paralelas a los ejes coordenados, con pendientes  $m_1$ , y  $m_2$  respectivamente, entonces

a)  $L_1$  paralela a  $L_2$  si y sólo si  $m_1 = m_2$

b)  $L_1$  perpendicular a  $L_2$  si y sólo si  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

- Si se conocen un punto  $(x_0, y_0)$  sobre una recta  $L$  y la pendiente  $m$  de ella, es posible encontrar la función que define a la recta mediante la fórmula:

$$y - y_0 = m ( x - x_0 ).$$

- Si  $(x_0, y_0)$  ,  $(x_1, y_1)$  son dos puntos sobre una recta  $L$  , entonces la distancia  $d$  entre  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  está dada por :

$$d = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

Ejemplo: La función  $y = a x^2 + b x + c$  ,  $a \neq 0$  , tiene como gráfica una parábola con eje de simetría paralelo al eje  $y$ . La parábola se abre hacia arriba si  $a > 0$  ; se abre hacia abajo si  $a < 0$  . Tal vez el punto más significativo sobre la parábola es su vértice. La abscisa del vértice está dada por :

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

y su correspondiente ordenada  $y_v$  se obtiene reemplazando este valor de  $x$  en la ecuación dada. Con esta información, más el cómputo de algunos puntos sobre la parábola permiten dibujar su gráfica. Así entonces, si la ecuación de una parábola es:

$$y = -x^2 + 6x$$

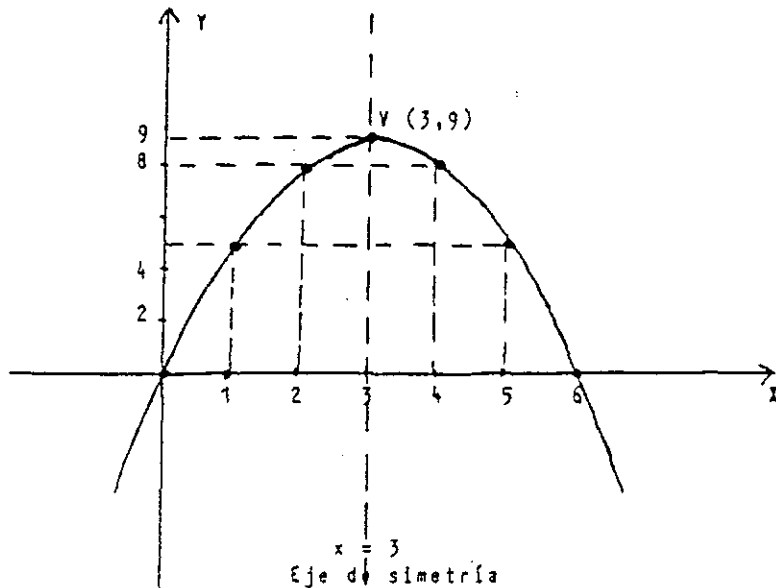
tenemos que  $a = -1$ ,  $b = 6$ ,  $c = 0$ . Como  $a < 0$ , la parábola se abre hacia abajo (es decir, es cóncava hacia abajo). Para encontrar el vértice de ella, hacemos

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3. \quad \text{Luego calculamos}$$

$$y_v = -3^2 + 6(3) = -9 + 18 = 9$$

Además podemos calcular algunos otros puntos, asignando valores a  $x$ , de preferencia simétricos al eje de simetría de la parábola que es  $x = 3$ .

x	y
2	8
4	8
1	5
5	5
0	0
6	0



Las funciones pueden ser sumadas, multiplicadas ó divididas, de acuerdo a las siguientes definiciones: sean  $f, g$  dos funciones, entonces

a) La suma  $f + g$  se define por  
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x).$

b) El producto  $f g$  se define por  
 $(f g)(x) = f(x) g(x).$

c) El cociente  $\frac{f}{g}$  se define por  
 $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Además  $f + g$ ,  $f g$  están definidas para todo  $x$  para el cual  $f$  y  $g$  están definidas, y  $\frac{f}{g}$  está definida donde  $f$  y  $g$  lo están y además  $g(x) \neq 0$  (así no dividimos por cero).

Ejemplo Sea  $f(x) = \sqrt{x+1}$  y  $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

Se tiene que  $\text{Dom } f = [-1, \infty)$  y

$\text{Dom } g = [-2, 2]$

Entonces

$\text{Dom } (f + g) = \text{Dom } fg = [-1, \infty) \cap [-2, 2] = [-1, 2]$

y

$\text{Dom } \frac{f}{g} = [-1, 2] - \{-2, 2\} = [-1, 2)$ .

Estas funciones son

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x^2}$

$(f g)(x) = f(x) g(x) = \sqrt{x+1} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{(x+1)(4-x^2)}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\frac{x+1}{4-x^2}}$

A menudo es necesario trabajar con funciones de funciones. Si  $f$  y  $g$  son funciones, entonces su composición,  $f \circ g$ , se define por

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

y el dominio de  $f \circ g = \{x : x \in \text{dom } g \wedge g(x) \in \text{dom } f\}$

Esto es,  $(f \circ g)(x)$  está definida para todo  $x$  tal que  $g(x)$  y  $f(g(x))$  estén definidos.

Ejemplo: Sea  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x^2 + 1$

Entonces  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$

y además

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

ahora,  $\text{dom } f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $\text{dom } g = \mathbb{R}$ , entonces

$\text{dom } (f \circ g) = \{x : g(x) = x^2 + 1 \in \text{dom } f\}$



como  $x^2 + 1 > 0$ , entonces  $x^2 + 1$  pertenece a  $\text{dom } f$  para todo  $x$  real, de forma que

$$\text{dom } (f \circ g) = \mathbb{R}$$

Para encontrar el dominio de  $g \circ f$ , tenemos que

$$\text{dom } (g \circ f) = \{ x \in \text{dom } f \wedge f(x) \in \text{dom } g \},$$

pero  $f$  está definida sólo para  $x \geq 0$ , luego

$$\text{dom } (g \circ f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

### La función exponencial.

Sea  $a$  un número real positivo ( $a > 0$ ).

La función

$$y = f(x) = a^x$$

es llamada función exponencial con base  $a$ , con  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{Rang } f = \mathbb{R}^+$ .

Esta función exponencial posee las siguientes propiedades:

a)  $a^x > 0$  (Es decir  $\text{Rang } a^x = \mathbb{R}^+$ )

b)  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

c)  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

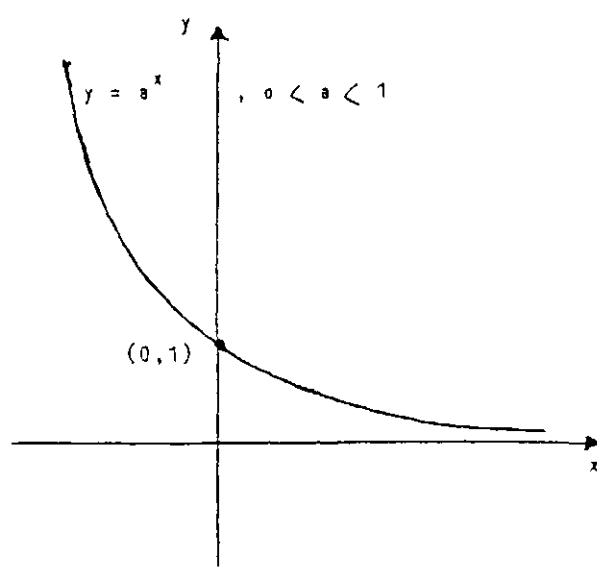
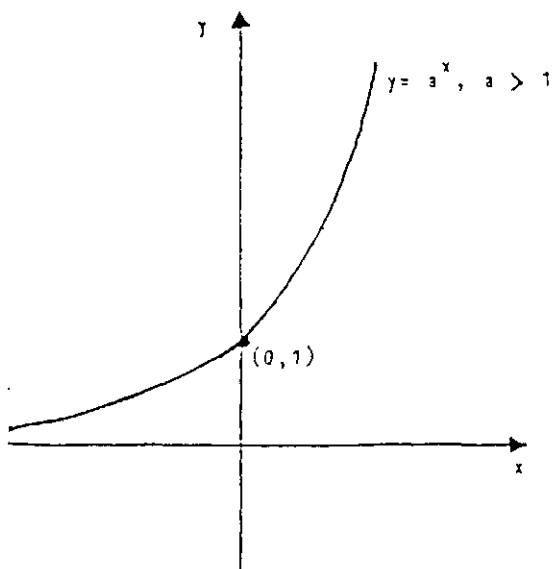
d)  $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

e)  $a^0 = 1$

f)  $(a^x)^y = a^{xy}$

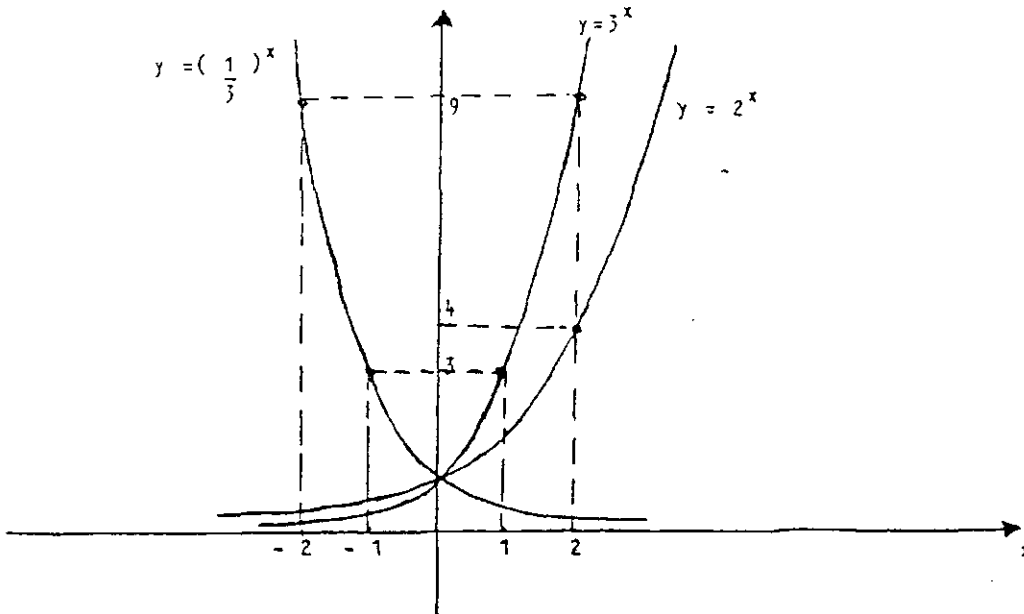
g) si  $a > 1$ ,  $a^x$  es creciente

h) si  $0 < a < 1$ ,  $a^x$  es decreciente.



Ejemplo.

En el siguiente gráfico, están representadas las funciones  $y = 3^x$ ,  $y = 2^x$ ,  $y = (\frac{1}{3})^x$



Una función exponencial es particularmente importante. Esta es la función exponencial cuya base es el número e. La letra e es usada para denotar el número irracional

$$e = 2.71828128.....$$

Ejemplo. La población de cierta ciudad crece continuamente a una razón de 6% anual. Si la población en 1980 fue de 250.000 habitantes, cuál será la población en 1990? ¿ En 2010 ?

Solución

Las palabras "razón de 6% anual" significan que el crecimiento de la población es igual a 6% de la población. Si  $P(t)$  denota la población en  $t$  años después del año inicial 1980, entonces podemos escribir

$$\frac{dP}{dt} = 0.06 P(t)$$

( no justificamos lo anterior por ahora ). Al resolver esta ecuación diferencial (que más tarde analizaremos) , resulta que

$$P(t) = 250.000 e^{0.06 t}$$

Puesto que 1990 es 10 años después de 1980, tenemos que

$$P(10) = 250.000 e^{0.6} = 250.000 ( 1.8221188 )$$

$$P(10) = 455530.$$

Similarmente

$$\text{población en 2010} = P(30) = 250.000 e^{0.06(30)} = 250.000 e^{1.8}$$

$$P(30) = 250.000 ( 6.049647464 ) = 1512412$$

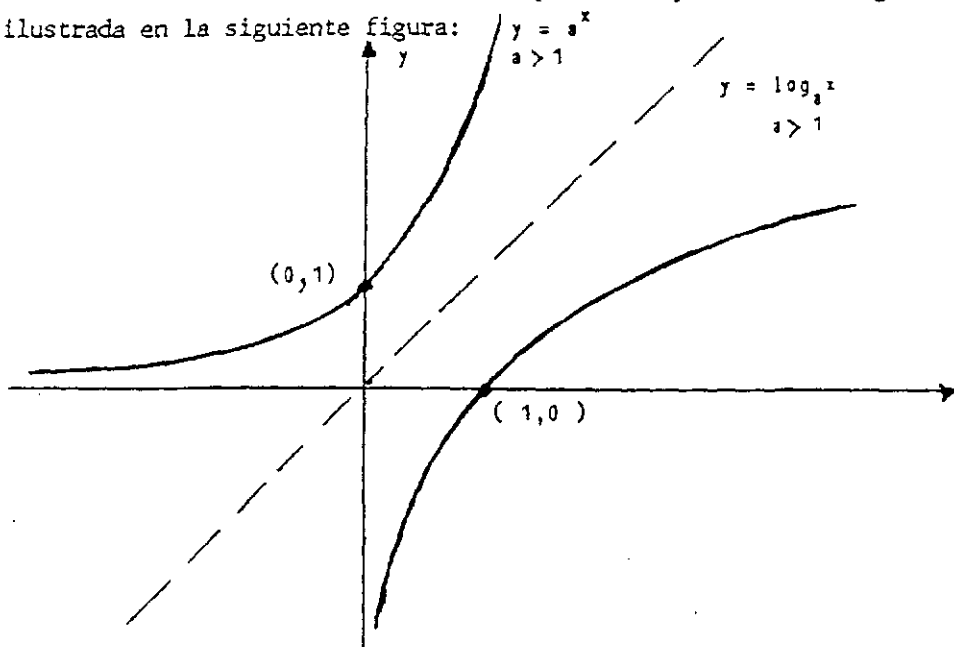
En ambas respuestas se ha redondeado al entero más cercano.

### La función logarítmica

Si  $x = a^y$ , entonces el logaritmo en la base  $a$  del número  $x$  es  $y$ . Esto se escribe como

$$y = \log_a x \quad ( a > 0, a \neq 1 )$$

La relación entre la función exponencial y la función logarítmica es ilustrada en la siguiente figura:



La gráfica de  $y = \log_a x$  puede obtenerse como la simétrica de  $y = a^x$  respecto de la recta bisectriz  $x = y$ . Las dos funciones  $\log_a x$  y  $a^x$  son llamadas funciones inversas.

Entonces podemos escribir

$y = \log_a x$  es equivalente a  $x = a^y$ ,  
y además

$y = a^x$  es equivalente a  $x = \log_a y$

Si pensamos en  $y = \log_a x$  y nos preguntamos ¿a qué potencia debe elevarse  $a$  para obtener el número  $x$ ? La respuesta es inmediata,

$$a^{\log_a x} = x, \text{ para todo real positivo } x.$$

además

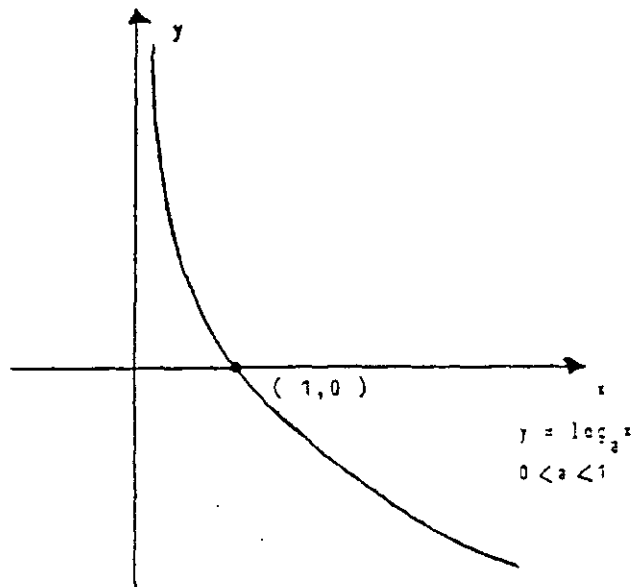
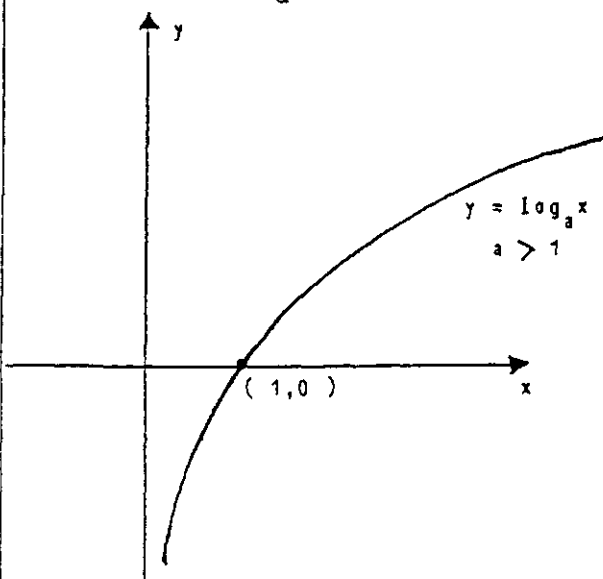
$$\log_a a^x = x, \text{ para todo real } x$$

$$y \quad \text{Dom}(\log_a x) = \{x: x > 0\}$$

$$\text{Rang}(\log_a x) = \mathbb{R}$$

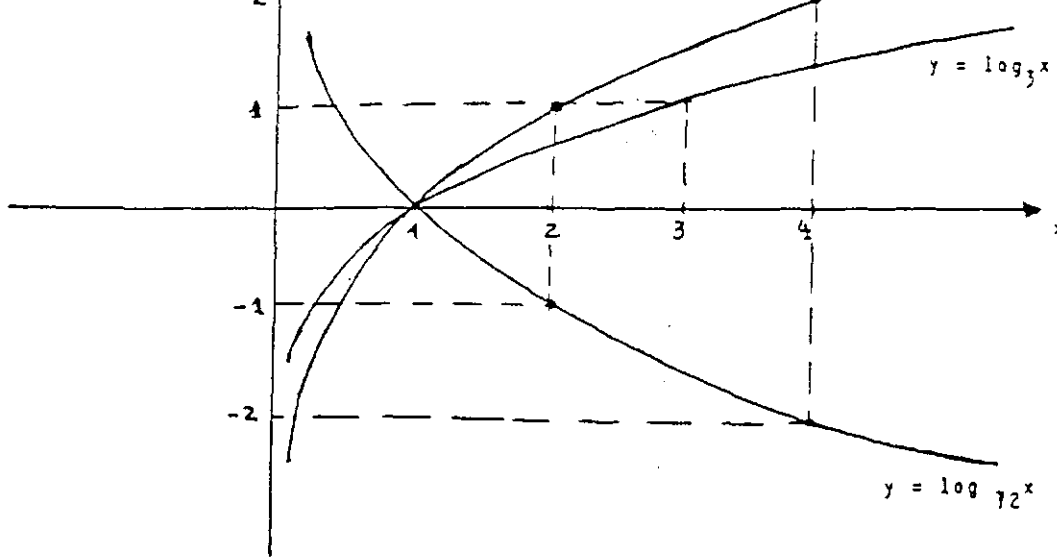
En la función logarítmica  $y = \log_a x$  pueden distinguirse las siguientes propiedades:

- a)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- b)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- c)  $\log_a 1 = 0$
- d)  $\log_a a = 1$
- e)  $\log_a x^y = y \log_a x$
- f)  $\log_a x$  es creciente para  $a > 1$
- g)  $\log_a x$  es decreciente para  $0 < a < 1$ .



Ejemplo

En el siguiente gráfico están representadas las funciones  $y = \log_2 x$  ;  
 $y = \log_3 x$  ,  $\log_{1/2} x$



Aunque todo entero positivo distinto de uno puede ser usado como base para un logaritmo, dos bases son las más frecuentes. Si la base 10 es usada, entonces se habla de logaritmo común y se denota por

$$y = \log_{10} x$$

La segunda y más importante base para logaritmos es la base  $e$ ; se habla ahora de logaritmos naturales y se denotan por

$$y = \log_e x = \ln x.$$

Ejemplo

Resolver para  $x$

a)  $e^{2(x-5)} = 30$       y      b)  $3 \ln x + \ln 5 = 4$

Solución

a) Puesto que  $e^{2(x-5)} = 30$ , entonces

$$\ln e^{2(x-5)} = \ln 30,$$

$$2(x-5) \ln e = \ln 30$$

$$2(x-5) = \ln 30$$

$$2x = \ln 30 + 10$$

$$x = \frac{1}{2} (\ln 30 + 10) \approx 6.7$$

b) como  $3 \ln x + \ln 5 = 4$ , entonces

$$\ln x^3 + \ln 5 = 4$$

$$\ln 5 x^3 = 4$$

$$5 x^3 = e^4$$

$$x^3 = \frac{1}{5} e^4$$

$$x = \left[ \frac{1}{3} e^4 \right]^{1/3} \approx 2.2186.$$

Ejercicios.

1) Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos

- a) (1,2) , (3,6)      b) (-2,3) , (4,-1)      c) (0,a) , (a,0) , a ≠ 0

Respuestas

- a)  $y = 2x$                       b)  $2x + 3y = 5$                       c)  $x + y = a$

2) Determinar si las rectas determinadas por cada par de puntos son paralelas, perpendiculares ó ninguna condición anterior.

- a) (3, -1) , (2, 4) ; (2, 0) , (5, 7)      b) (0,5),(2,-1) ; (0,0) ; (-1,3)  
c) (1, -2) , (2, 4) ; (4, 1) , (-8,2)      d) (3,1),(3,7) ; (2,4) , (-1,4)

Respuestas

- a) nada                              b) paralelas  
c) nada                              d) perpendiculares.

3. Determinar el punto de intersección de las líneas rectas (si existe)

- a)  $x - y = 7$  ;  $2x + 3y = 1$                       b)  $4x - 6y = 7$  ;  $6x - 9y = 12$   
c)  $3x + y = 4$  ;  $y - 5x = 2$                       d)  $x - 3y = 1$  ;  $2x - 6y = 2$

Respuestas

- a)  $\left( \frac{22}{5} , -\frac{13}{5} \right)$                       b) no intersección  
c)  $\left( \frac{1}{4} , \frac{13}{4} \right)$                       d) infinitas soluciones

4. Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados:

- a)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  ;  $f(0)$  ,  $f(1)$  ,  $f(-2)$  ,  $f(-5)$   
b)  $f(z) = 1 + z + z^2$  ;  $f(0)$  ,  $f(2)$  ,  $f(2)$  ,  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Respuestas

- a)  $1$  ;  $\frac{1}{2}$  ;  $-1$  ;  $-\frac{1}{4}$                       b)  $1$  ;  $7$  ;  $\frac{13}{9}$  ;  $\frac{3}{4}$

5. Encontrar dominio y rango de las siguientes funciones:

- a)  $s = 4t - 5$                       b)  $v = \frac{1}{u^2}$   
c)  $y = \frac{1}{x+1}$                       d)  $y = \sqrt{x^3 - 1}$

$$e) y = \frac{1}{|x|}$$

$$f) y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Respuestas

- a) dominio = rango =  $\mathbb{R}$
- b) dominio  $\mathbb{R} - \{0\}$ , rango  $\mathbb{R}^+$
- c) dominio  $\mathbb{R} - \{1\}$ , rango  $\mathbb{R} - \{0\}$
- d) dominio  $[1, \infty)$ , rango  $[0, \infty)$
- e) dominio  $\mathbb{R} - \{0\}$ , rango  $\mathbb{R}^+$
- f) dominio  $\mathbb{R}$ , rango  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

6. Graficar

$$a) y = (x - 1)^2$$

$$b) y = -2x^2$$

$$c) y = 1 + 2x^2$$

$$d) y = \sqrt[3]{x}$$

$$e) y = x^4$$

$$f) y = |x|$$

$$g) y = e^{x-1}$$

$$h) y = 10^x$$

$$i) y = \ln(x-1)$$

$$j) y = \ln(x+2)$$

$$k) y = e^{-x}$$

$$l) y = 10 e^{-x}$$

m) ¿Cuál es el dominio y rango de las seis últimas funciones?

7. Para los siguientes pares de funciones, determinar  $f+g$ ;  $fg$  y sus respectivos dominios.

$$a) f(x) = 2x-5; g(x) = -4x$$

$$b) f(x) = \sqrt{x+2}; g(x) = \sqrt{x-2}$$

$$c) f(x) = 1+x^5; g(x) = 1-|x|$$

Respuestas

$$a) (f+g)(x) = -2x+5; \text{ dominio } \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = -8x^2+20x; \text{ dominio } \mathbb{R}$$

$$b) (f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}, \text{ dominio } [-2, 2]$$

$$(fg)(x) = \sqrt{4-x^2}, \text{ dominio } [-2, 2]$$

$$c) (f+g)(x) = 2-|x|+x^5; \text{ dominio } \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = 1-|x|+x^5-|x|x^5, \text{ dominio } \mathbb{R}$$

8. Para los pares de funciones del problema 7, determinar  $f/g$  y sus respectivos dominios.

Respuestas

- a)  $(f/g)(x) = \frac{2x-5}{-4x}$  , dominio  $\mathbb{R} - \{0\}$   
b)  $(f/g)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$  , dominio  $[-2, 2)$   
c)  $(f/g)(x) = \frac{1+x^5}{1-|x|}$  , dominio  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

9. Cambiar a forma exponencial

- a)  $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$                       b)  $\log_{1/2} 8 = -3$   
c)  $\log_{12} 1 = 0$                       d)  $\log_{10} 10 = 1$

Respuestas

- a)  $16^{1/2} = 4$                       b)  $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$   
c)  $12^1 = 12$                       d)  $10^1 = 10$

10. Cambiar a forma logaritmica

- a)  $3^4 = 81$                       b)  $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$   
c)  $4^{-2} = \frac{1}{16}$                       d)  $2^{1/2} = \sqrt{2}$

Respuestas

- a)  $\log_3 81 = 4$                       b)  $\log_{1/2} \frac{1}{8} = 3$   
b)  $\log_4 \frac{1}{16} = -2$                       d)  $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

11. Resolver

- a)  $\log_x 64 = 3$                       b)  $\log_x 32 = -5$   
b)  $2e^x = 8$                       d)  $e^x e^{x+1} = 2$   
e)  $3 \ln 2x = 1$                       f)  $2 \ln x + 3 = 0$   
g)  $e^{x^2+2x-8} = 1$  ,  $x > 0$                       h)  $\ln x - \ln(x-1) = 2$   
i)  $\ln(x+3) = \ln(2x-5)$                       j)  $\frac{1}{4} \ln x = 3$

Respuestas

- a) 4                      b) 1/2                      c)  $\ln 4$                       d)  $(\ln^2 - 1)/2$   
e)  $\frac{1}{2} e^{1/3}$                       f)  $e^{-3/2}$                       g) 2                      h)  $\frac{e^2}{e^2-1}$



## II LA FORMULA DEL BINOMIO

Por multiplicación directa, pueden obtenerse las siguientes fórmulas:

$$(u + v)^1 = u + v$$

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u + v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$$

$$(u + v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$$

Una inspección de estos desarrollos revela ciertas propiedades que pueden aplicarse al desarrollarse de  $(u + v)^n$ , donde  $n$  es un entero positivo. Estas propiedades son:

1. El primer término del desarrollo es  $u^n$ .
2. El segundo término del desarrollo es  $n u^{n-1} v$ .
3. El exponente de  $u$  decrece una unidad término a término, el exponente de  $v$  aumenta una unidad término a término, y la suma de los exponentes de  $u$  y  $v$  en cada término del desarrollo es  $n$ .
4. Si se multiplica el coeficiente de cualquier término por el exponente de  $u$  en ese término y si se divide este producto por el número de orden del término, el cociente da el coeficiente del término siguiente.
5. Hay  $n + 1$  términos en el desarrollo de  $(u + v)^n$ .
6. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos del desarrollo son iguales.

Estas observaciones nos permiten escribir el desarrollo de  $(u + v)^n$ , para  $n$  entero positivo como:

$$\begin{aligned}
 (u + v)^n = & u^n + n u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{2} u^{n-2} v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} u^{n-3} v^3 \\
 & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} u^{n-4} v^4 + \dots + v^n
 \end{aligned}$$

### Ejemplo

El desarrollo de  $(2x + y)^8$  corresponde a

$$\begin{aligned}
 (2x + y)^8 &= (2x)^8 + 8(2x)^7 y + \frac{8 \cdot 7}{2} (2x)^6 y^2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} (2x)^5 y^3 \\
 &+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} (2x)^4 y^4 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} (2x)^3 y^5 + \frac{8 \cdot 7}{2} (2x)^2 y^6 \\
 &+ 8(2x)^1 y^7 + y^8 \\
 &= 256x^8 + 1024x^7 y + 1792x^6 y^2 + 1792x^5 y^3 + 1120x^4 y^4 \\
 &+ 448x^3 y^5 + 112x^2 y^6 + 16xy^7 + y^8.
 \end{aligned}$$

Notar que los coeficientes en la forma final de este desarrollo no corresponden a los coeficientes del binomio, en realidad corresponden a los productos de los coeficientes del binomio por las potencias de los coeficientes de u y v.

Ejemplo

El desarrollo de  $(ax - by)^7$  corresponde a

$$\begin{aligned}
 (ax - by)^7 &= (ax)^7 + 7(ax)^6 (-by)^1 + \frac{7 \cdot 6}{2} (ax)^5 (-by)^2 \\
 &\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} (ax)^4 (-by)^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} (ax)^3 (-by)^4 + \frac{7 \cdot 6}{2} (ax)^2 (-by)^5 \\
 &+ 7(ax)^1 (-by)^6 + (-by)^7 \\
 &= a^7 x^7 - 7 a^6 b x^6 y + 21 a^5 b^2 x^5 y^2 - 35 a^4 b^3 x^4 y^3 \\
 &+ 35 a^3 b^4 x^3 y^4 - 21 a^2 b^5 x^2 y^5 + 7 a b^6 x y^6 - b^7 y^7.
 \end{aligned}$$

Ejercicios

Desarrollar los siguientes binomios

- |                    |                            |
|--------------------|----------------------------|
| a) $(a + b)^7$     | b) $(2x^2 + y^3)^5$        |
| c) $(-x + 2y^2)^4$ | d) $(ax^{-1} - by^{-2})^5$ |

Respuestas

a)  $a^7 + 7 a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$

b)  $32x^{10} + 80x^8 y^3 + 80x^6 y^6 + 40x^4 y^9 + 10x^2 y^{12} + y^{15}$

c)  $x^4 - 8x^3 y^2 + 24x^2 y^4 - 32xy^6 + 16y^8$

d)  $a^5 x^{-5} - 5a^4 b x^{-4} y^{-2} + 10a^3 b^2 x^{-3} y^{-4} - 10a^2 b^3 x^{-2} y^{-6} + 5ab^4 x^{-1} y^{-8} - b^5 y^{-10}$

Los coeficientes en el desarrollo de  $(u + v)^n$  pueden obtenerse a través del triángulo de Pascal

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	25	25	21	7	1	

etc.

En el desarrollo del binomio  $(u + v)^n$ , el término que contiene a  $v^r$  tiene como coeficiente a la expresión

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (1)$$

donde  $r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (r-2)(r-1)r$  y  $0! = 1$  por definición.

Podemos amplificar por  $(n-r)!$  la expresión (1) para obtener

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

expresión que es el coeficiente del término que contiene a  $u^{n-r} v^r$  en el desarrollo de  $(u + v)^n$ , que corresponde al término de orden  $(r + 1)$ .  
Entonces, el  $(r + 1)$ -ésimo término del desarrollo de  $(u + v)^n$  es

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} u^{n-r} v^r$$

y en forma compacta,  $(u + v)^n$  puede escribirse como

$$(u + v)^n = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} u^{n-r} v^r$$

Ejemplo

Encontrar el término que contiene a  $y^5$  en el desarrollo de  $(2x^2 + y)^{10}$

Solución En este caso  $r = 5$  y corresponde al sexto término del desarrollo que es

$$\frac{10!}{5! (10-5)!} (2x^2)^5 y^5 = \frac{10!}{5! 5!} 2^5 x^{10} y^5$$
$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! 5!} 2^5 x^{10} y^5 = 8064 x^{10} y^5$$

Ejercicios

Encontrar el término especificando en cada caso.

1. El término que contiene  $y^3$  en  $(x^2 + y)^9$
2. El término que contiene  $y^{18}$  en  $(a x^{1/2} - b y^3)^{15}$
3. El quinto término de  $(3x - \frac{y}{2})^7$
4. El término central de  $(x + y^2)^8$
5. El séptimo término de  $(x - \frac{y^2}{2})^9$
6. El término decimoséptimo de  $(x - \frac{1}{x})^{20}$
7. El término independiente de  $x$  en  $(x^2 - \frac{1}{x})^{12}$

Respuestas

1.  $-84 x^{12} y^3$
2.  $5005 a^9 b^6 x^{\frac{9}{2}} y^{18}$
3.  $\frac{945}{16} x^3 y^4$
4.  $70 x^4 y^8$
5.  $\frac{21}{16} x^3 y^{12}$
6.  $\frac{4845}{x^{12}}$
7. 495.

Quando  $n$  es cualquier real, entonces puede demostrarse que

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} x^2 + n \frac{(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} x^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} a^{n-4} x^4 + \text{-----} \end{aligned}$$

y esta suma tiene un valor finito cuando  $x^2 < a^2$ . Puede usarse un número finito de sumandos en este desarrollo para aproximar el valor de  $(a+x)^n$  y, en general, mientras mayor sea el número de términos que se usan, mejor será la aproximación.

### III LIMITES Y CONTINUIDAD

#### Definición

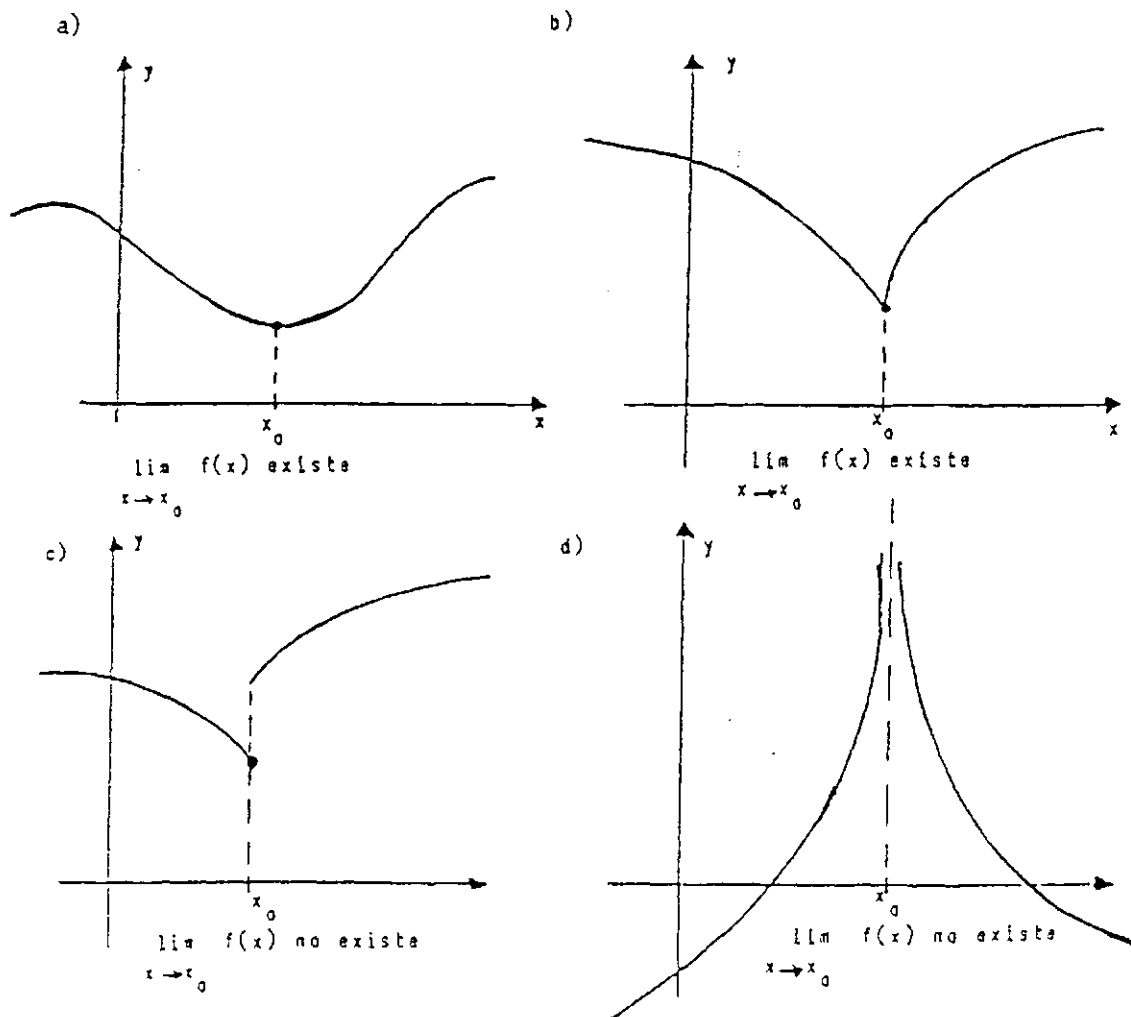
Sea  $L$  un número real y supongamos que  $f(x)$  está definida en un intervalo abierto que contiene a  $x_0$ , pero no necesariamente en  $x_0$ . Decimos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es  $L$ , denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

si al tender  $x$  a  $x_0$ , por la izquierda o por la derecha, con  $x \neq x_0$ ,  $f(x)$  tiende a  $L$ .

#### Ejemplo

Analizamos los siguientes casos.



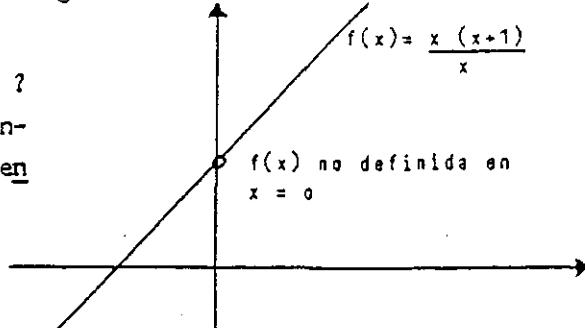
El límite existe en  $x_0$  en las figuras a y b porque  $f(x)$  se aproxima al mismo valor cuando  $x$  se aproxima a  $x_0$  por la izquierda o por la derecha. El límite no existe en  $x_0$  en la figura c porque se obtienen distintos valores al tender  $x$  a  $x_0$  por la izquierda o por la derecha. En la figura d, el límite en  $x_0$  no existe pues  $f(x)$  llega a ser infinitamente grande cuando  $x$  tiende a  $x_0$ .

Ejemplo Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x}$$

Puesto que no podemos dividir por cero, esta función está definida para todo número real, excepto para  $x = 0$ . Puesto que  $\frac{x}{x} = 1$ , para  $x \neq 0$ , entonces  $f(x) = x + 1$  para  $x \neq 0$ . El gráfico de esta función se muestra a continuación.

¿Qué sucede cuando  $x$  tienda a  $x_0$ ? Ilustramos este hecho con la siguiente tabla. Notar que cuando  $x \neq 0$ , entonces  $f(x) = x + 1$ .



$x$	$f(x) = \frac{(x+1)x}{x} = x+1$	$x$	$f(x) = \frac{(x+1)x}{x} = x+1$
1	2	-1	0
0.5	1.5	-0.5	0.5
0.1	1.1	-0.1	0.9
0.05	1.05	-0.05	0.95
0.01	1.01	-0.01	0.99
0.001	1.001	-0.001	0.999

Es claro que cuando  $x$  tiende a 0,  $f(x)$  se aproxima al valor 1. En notación matemática

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1$$

Es claro también en este ejemplo que el valor del límite no se obtiene evaluando la función en  $x = 0$ .

El cálculo de límites frecuentemente es tedioso. Afortunadamente, hay un número de teoremas que hacen los cálculos mucho más simples.

Algunos de estos teoremas son:

- 1) Sea  $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  un polinomio.

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n$$

- 2) Sea  $c$  un número real y supongamos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe. Entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x)$  existe y además

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- 3) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existe, entonces existe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ y además}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- 4) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existen, entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x)$

existe y además

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- 5) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n$

$$\text{existe y además } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$$

- 6) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existe y es distinto de cero,

$$\text{entonces existe } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y además } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$



Ejemplos

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x(x+1)}{x} + 4x^3 + 3 \right]$

Solución

Por el ejemplo anterior tenemos que

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1$  ; además por el teorema 1 se tiene

$\lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 + 3) = 4 \cdot 0^3 + 3 = 3$  ; luego

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} + 4x^3 + 3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 + 3)$   
 $= 1 + 3 = 4$

Ejemplo Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)^4$

Solución

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)^4 = \left[ \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) \right]^4 = (2^2 + 1)^4 = 625$

Ejemplo Calcular  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^2 - 3x + 5}$

Solución

$\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - x^2 - 3) = 64 - 16 - 3 = 45$

$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x + 5) = 16 - 12 + 5 = 9 \neq 0$

luego

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^2 - 3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{45}{9} = 5$

Definición

El límite cuando x tiende a infinito de f(x) es L, denotado por,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

si f(x) está definida para grandes valores de x y si f(x) se aproxima a L cuando x crece sin cota superior.

Ejemplo Calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$

Solución

Cuando  $x$  crece,  $x^2$  crece y  $\frac{1}{x^2}$  decrece, lo que hace que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Nota Cuando  $f(x)$  es de la forma racional  $f(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$ , donde  $p(x)$  y  $r(x)$  son polinomios, una técnica de uso frecuente en el cálculo de límites de  $f(x)$  cuando  $x$  tienda a infinito es dividir el numerador y el denominador de  $f(x)$  por la máxima potencia de  $x$  que aparezca en la expresión para  $f(x)$ ; luego aplicar límite cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Ejemplo Calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 9}{4x^3 - 3x + 16}$

Solución Simplificando la fracción por  $x^3$ , tenemos

$$\frac{3x^3 + 5x^2 - 9}{4x^3 - 3x + 16} = \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^3}}{4 - \frac{3}{x^2} + \frac{16}{x^3}}$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 9}{4x^3 - 3x + 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^3}}{4 - \frac{3}{x^2} + \frac{16}{x^3}} = \frac{3}{4}$$

Ejercicios

En los ejercicios siguientes calcular cada uno de los límites (si existen); en caso contrario explicar por qué no existen.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 17x + 45)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5 + 6x + 2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 4} (25 - x^2)^3$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , si  $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq 0 \\ x - 3, & x < 0 \end{cases}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , si  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$

8.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{1 + x + x^2 + x^3}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 4}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^3 + 4}$

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 - 2x^5 + 3}{5x^4 + 3x + 1}$

Respuestas

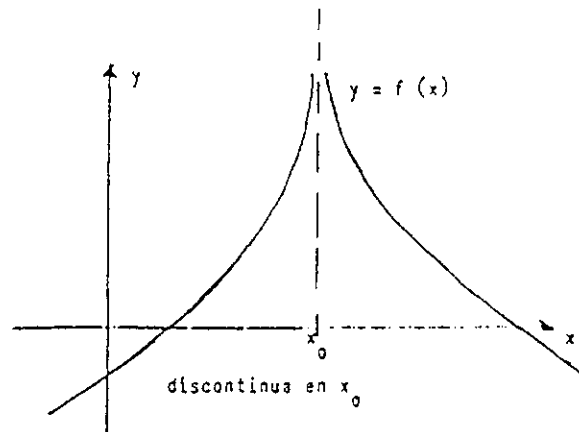
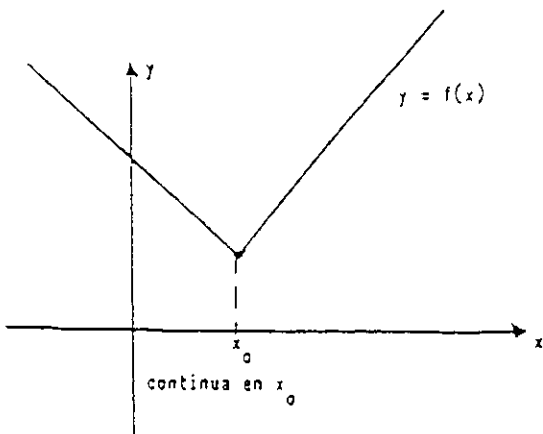
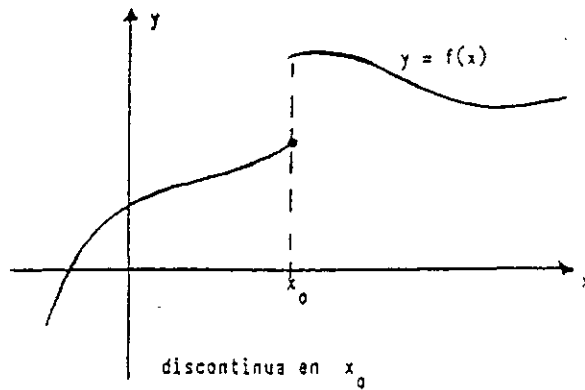
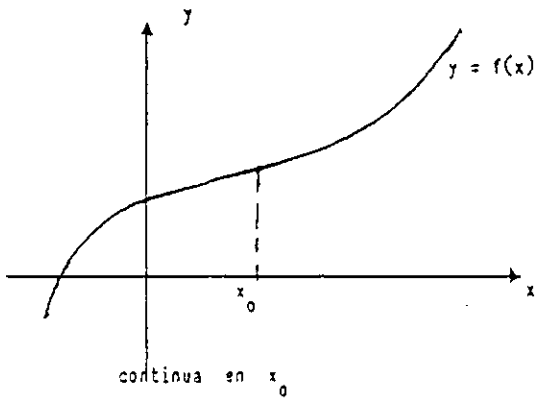
- |                  |                  |        |                   |
|------------------|------------------|--------|-------------------|
| 1. 45            | 2. $\frac{1}{2}$ | 3. 729 | 4. $\frac{1}{2}$  |
| 5. $\frac{1}{2}$ | 6. No existe.    | 7. 0   | 8. $-\frac{1}{5}$ |
| 9. $\infty$      | 10. No existe.   | 11. 0  | 12. $\infty$      |

Ejercicio.

- a) Grafique la curva  $y = 5 - x^2$
- b) Dibuje (en su gráfico) la recta que une los puntos  $(-3, -4)$  y  $(-4, -11)$ .
- c) Dibuje (en su gráfico) la recta que une los puntos  $(-3, -4)$  y  $(-3, -7.25)$
- d) Si  $\Delta x \neq 0$  ¿ qué representa el cociente  $\frac{5 - (-3 - \Delta x)^2 + 4}{-\Delta x}$  ?
- e) Calcular  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5 - (-3 - \Delta x)^2 + 4}{-\Delta x}$
- f) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = 5 - x^2$  en el punto  $(-3, -4)$  ?

Veamos ahora el concepto de continuidad. El concepto de continuidad es una de las nociones de mayor relevancia en matemáticas. Intuitivamente, una función es continua en un punto si está definida en este punto y si su gráfico no presenta una "rotura" en ese punto.

Ejemplos



Definición

Sea  $f(x)$  definida para todo  $x$  en un intervalo abierto que contiene a  $x_0$ . Entonces  $f$  es continua en  $x_0$  si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1.  $f(x_0)$  existe
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Nota: La condición (3) nos dice que si una función  $f$  es continua en  $x_0$ , entonces podemos calcular  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  por simple evaluación.

Definición Una función  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  si  $f$  es continua en cada punto del intervalo  $(a, b)$ .

Ejemplo

$f(x) = \sqrt{x}$  es continua en el intervalo  $(0, \infty)$

Ejemplo

$f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ) es continua en  $\mathbb{R}$

Ejemplo

$f(x) = \ln x$  es continua en  $(0, \infty)$

Ejemplo

$f(x) = |x|$  es continua en  $\mathbb{R}$

Ejercicios

En los problemas siguientes, encontrar los puntos (si existen) donde la función dada es discontinua. Indicar el mayor intervalo ó intervalos sobre los cuales es continua.

1.  $f(x) = x^2 - 3$

2.  $f(x) = \frac{1}{4-x}$

3.  $f(x) = \frac{x}{x+1}$

4.  $f(x) = x^{17} - 3x^{15} + 2$

5.  $f(x) = x^{1/4}$

6.  $f(x) = \frac{-17x}{x^2 - 1}$

7.  $f(x) = \frac{2x}{x^3 - 8}$

8.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$

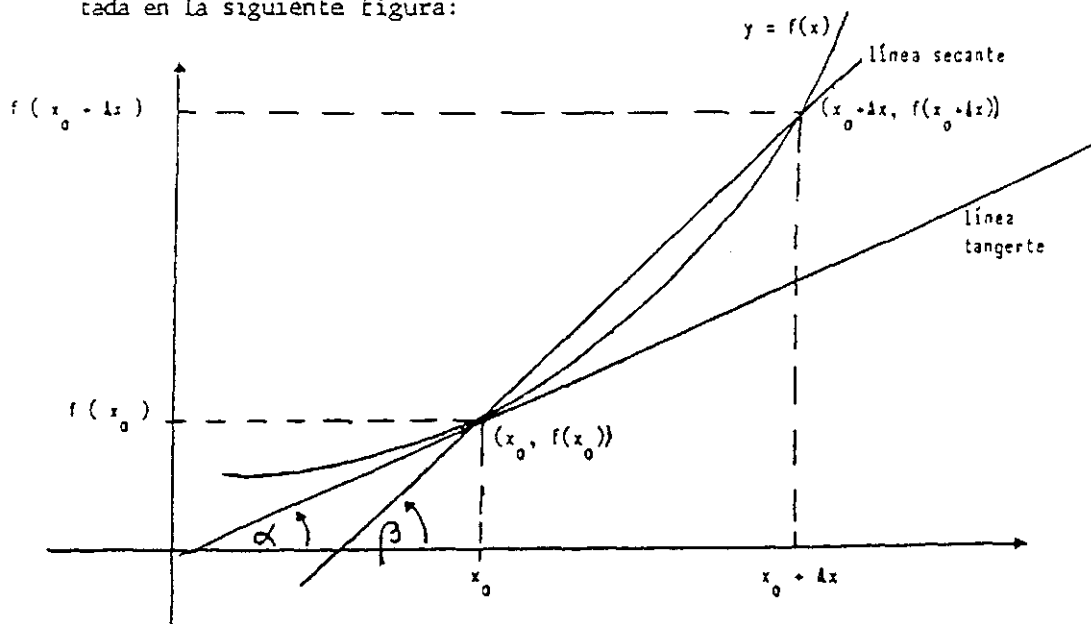
9. Dada la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \text{ no entero} \\ x^2 & , x \text{ entero} \end{cases}$$

¿ Para qué valores enteros de  $x$  la función  $f$  es continua ?

IV LA FUNCION DERIVADA

Consideramos ahora una función  $f$ , y una parte de su gráfica representada en la siguiente figura:



Sea  $(x_0, f(x_0))$  un punto fijo en la gráfica de  $f$ . Si  $\Delta x$  es pequeño (positivo ó negativo), entonces  $x_0 + \Delta x$  está cerca de  $x_0$ . Al movernos de  $x_0$  a  $x_0 + \Delta x$ , el valor de  $f$  se moverá de  $f(x_0)$  a  $f(x_0 + \Delta x)$ . La línea que une los puntos  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  se llama línea secante. ¿Cuál es su pendiente? Si definimos  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  y si usamos la notación  $m_s$  para denotar tal pendiente, tenemos que

$$m_s = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \beta$$

¿Qué tiene que ver esta pendiente con la pendiente de la línea tangente? Intuitivamente, podemos observar que cuando  $\Delta x$  se hace pequeño, la línea secante se acerca más y más a la línea tangente, de tal forma que

$$m_{\text{tg}} = \text{tg } \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Así entonces podemos definir:

Definición Si el límite siguiente existe, la derivada de la función f en el punto  $x_0$  está dada por

$$\text{derivada de } f \text{ en } x_0 = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si este límite existe, f se dice diferenciable en  $x_0$ .

En la definición anterior, estamos trabajando con un punto fijo,  $x_0$ . Sin embargo, la definición se puede generalizar para un punto cualquiera x, obteniendo una nueva función, llamada función derivada. Así entonces la función derivada de f es la función definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El dominio de  $f'$  es un conjunto de puntos para los cuales el límite anterior existe. Además  $f'(x)$  no está definido si  $f(x)$  no está definido.

NOTAS 1) La definición de derivada en un punto puede usarse para definir la línea tangente de la siguiente forma:

Si  $f'(x_0)$  existe, entonces la línea tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$  es la única recta que pasa por  $(x_0, f(x_0))$  de pendiente  $f'(x_0)$ .

2) La derivada  $f'(x_0)$  representa la razón de cambio instantánea de y con respecto a x en el punto  $x = x_0$ .

El siguiente ejemplo ilustra la nota 1.

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  en el punto (9,3).

Solución

Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , entonces  $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$ ;

luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}; \text{ amplificando por } (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})$$

tenemos que



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}, \text{ entonces}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{entonces } f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

La ecuación de la línea tangente pedida es por tanto

$$y - 3 = \frac{1}{6} (x - 9)$$

$$6y - 18 = x - 9$$

$$x - 6y + 9 = 0$$

El siguiente ejemplo ilustra la nota 2

Ejemplo

Si  $P(t)$  representa la población de cierta ciudad después de  $t$  años, ¿ Cuán rápido crece la población de la ciudad después de 3 años, si  $P(t) = 150.000 + 4t^2$  ?

Solución

Se pregunta por la razón instantánea de crecimiento de la población cuando  $t = 3$  años. Esta está dada por

$$P'(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(3 + \Delta t) - P(3)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{150.000 + 4(3 + \Delta t)^2 - 150.000 - 4 \cdot 9}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4(9 + 6\Delta t + \Delta t^2) - 36}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4(6\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4 \Delta t (6 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4(6 + \Delta t) = 24$$

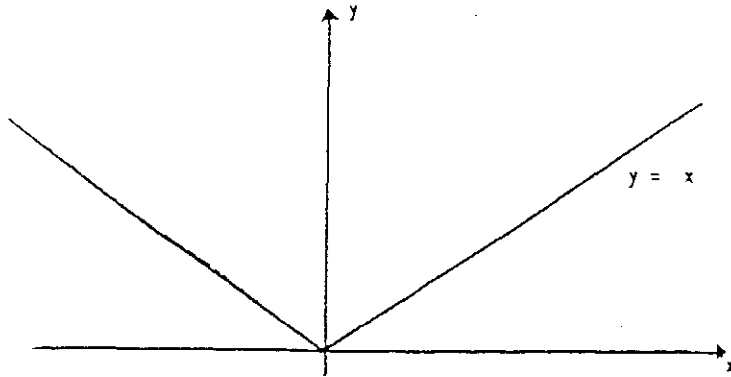
Así entonces, la población está creciendo a razón de 24 individuos por año, cuando  $t = 3$  años.

Se puede demostrar sin mucha dificultad el siguiente hecho de relevancia:

Funciones diferenciales son continuas

Sin embargo, funciones que son continuas no son necesariamente diferenciales, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Sea  $y = |x|$ , de gráfica



Esta función es continua en  $x = 0$ ; pero si calculamos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

y ocurre que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad ; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

luego  $f'(0)$  no existe para  $y = |x|$ .

#### Ejercicios

En los siguientes problemas, encontrar la ecuación de la línea tangente a la curva dada en el punto indicado:

1.  $f(x) = -4x + 6$ ; (3, -6)

2.  $y = x^3$ ; (2, 8)

3.  $f(x) = x^2 - x + 2$ ; (1, 2)

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; ( $\frac{1}{3}$ , 3)

5. Si  $P(t)$  denota la población de una colonia de bacterias después de  $t$  horas. ¿ Cuán rápido crece la población de bacterias, si  $P(t) = 100 - t^4$  cuando  $t = 3$  años ?

Respuestas

1.  $y = -4x + 6$

2.  $y = 12x - 16$

3.  $y = x + 1$

4.  $y = -9x + 6$

5. 108 bacterias por hora.

El proceso de calcular derivadas usando la definición involucra a veces un algebra tediosa antes de aplicar límites. Afortunadamente, existen fórmulas que permiten el cálculo de derivadas directamente; el precio que debe pagarse para utilizarlas directamente, es que hay que memorizarlas. Algunas de estas fórmulas son:

1. Si  $r$  es un real cualquiera, entonces

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^r) = r x^{r-1}$$

Ejemplo  $y = x^{2/3}$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

2. Si  $c$  es una constante y  $f$  es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} (c f) = c \frac{df}{dx}$$

Ejemplo  $\frac{d}{dx} (3 x^7) = 21 x^6$

3. Si  $f$  y  $g$  son diferenciales, entonces

$$\frac{d}{dx} (f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (4 x^3 - 20 x^{-2}) &= 4 \frac{d}{dx} (x^3) - 20 \frac{d}{dx} (x^{-2}) \\ &= 12 x^2 + 40 x^{-3} = 12 x^2 + \frac{40}{x^3} \end{aligned}$$

4. Si  $f$  y  $g$  son diferenciales, entonces

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sqrt{x} (x^4 + 3)) &= \frac{d}{dx} \sqrt{x} \cdot (x^4 + 3) + \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx} (x^4 + 3) \\ &= \frac{1}{2} x^{-1/2} (x^4 + 3) + \sqrt{x} (4x^3) \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^4 + 3}{\sqrt{x}} + 4x^3 \sqrt{x} = \frac{9x^4 + 3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

5. Si  $f$  y  $g$  son diferenciales y  $g(x) \neq 0$ , entonces

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 5} &= \frac{(x^2 - 5)(3x^2 + 1) - (x^3 + x + 1)(2x)}{(x^2 - 5)^2} \\ &= \frac{x^4 - 16x^2 - 2x - 5}{x^4 - 10x^2 + 25} \end{aligned}$$

6. (Regla de la cadena)

Si  $y = f(u)$  con  $u = f(x)$ , entonces

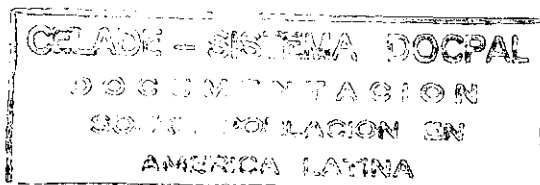
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + x}) = \frac{d}{dx} \sqrt{u}, \text{ con } u = x^2 + x$$

luego

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$



7. Si  $g$  es diferenciable, entonces para todo real  $r$  se tiene

$$\frac{d}{dx} \{g(x)\}^r = r \{g(x)\}^{r-1} g'(x)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + x} &= \frac{d}{dx} (x^2 + x)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + x)^{-1/2} (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2 \sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$

8. Si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$\frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

(En particular  $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$ )

Ejemplo

$$\frac{d}{dx} (e^{x^2}) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{2x}$$

9. Si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

(En particular  $\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$ )

Ejemplo

$$\frac{d}{dx} (\ln x^2) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

10. Para expresiones de la forma  $v^u$ , con  $u$  y  $v$  funciones de  $x$ , es necesario la aplicación de la función logarítmica:

$$y = v^u$$

$$\ln y = \ln v^u = u \ln v$$

luego  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \ln v + \frac{u}{v} \frac{dv}{dx}$

y se despeja  $\frac{dy}{dx}$

Ejemplo  $y = x^x$ , luego

$$\ln y = x \ln x, \text{ luego}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + 1, \text{ luego}$$

$$\frac{dy}{dx} = y (\ln x + 1)$$

$$= x^x (1 + \ln x).$$

Ejercicios

Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

1.  $y = 3x^2 - 6x + 2$

2.  $y = x^{5/7}$

3.  $y = (1 + \sqrt{x})(1 - x^2)$

4.  $y = e^{3x}$

5.  $y = \ln(1 + 4x)$

6.  $y = (1 - e^x)/(1 - e^{-x})$

7.  $y = (1 + x + x^5)^{3/4}$

8.  $y = (1 + x + x^2)/(1 + x + x^3)$

9.  $y = (1 + x)^4 (1 - x^2)^{5/7}$

10.  $y = x^{x^2}$

Respuestas

1.  $6x - 6$

2.  $\frac{5}{7} x^{-2/7}$

3.  $\frac{1}{2} x^{-1/2} - 12$

4.  $3 e^{3x}$

5.  $4 / (1 + 4x)$

6.  $2 e^x / (1 - e^x)$

7.  $\frac{3}{4} (1 + x + x^5)^{-1/4} (1 + 5x^4)$

$$8. \left\{ (1+x+x^3)(1+2x) - (1+x+x^2)(1+3x^2) \right\} / (1+x+x^3)^2$$

$$9. -\frac{10}{7}x(1+x)^4(1-x^2)^{-\frac{2}{7}} + 4(1+x)^3(1-x^2)^{\frac{5}{7}}$$

$$10. x^{x^2} (x + 2x \ln x)$$

Derivadas de Orden Superior

Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable. Entonces la derivada

$$y' = f' = \frac{dy}{dx}$$

es también una función de  $x$ . Esta nueva función de  $x$ ,  $f'$ , puede o no ser una función diferenciable de  $x$ . Si lo es, la derivada de  $f'$  es llamada la segunda derivada de  $f$  (es decir, la derivada de la derivada) y se denota por  $f''$ . Otras notaciones usuales para la segunda derivada son:

$$y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

En forma similar, si  $f''$  es diferenciable, entonces se puede calcular  $f'''$ , con notaciones

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

y se puede continuar indefinidamente, tanto como las derivadas sucesivas sean diferenciables.

Ejemplo Sea  $y = \frac{1}{x}$ , entonces

$$y' = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad y'' = \frac{2}{x^3} \quad ; \quad y^{(3)} = -\frac{6}{x^4} \quad ; \quad y^{(4)} = \frac{24}{x^5} \quad ; \quad \text{es decir}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Ejercicios

En los problemas siguientes, determinar  $y''$ ,  $y^{(3)}$ .

1.  $y = 3$

2.  $y = 4x^2$

3.  $y = \sqrt{x}$

4.  $y = (x+1)^{2/3}$

5.  $y = \sqrt{1-x^2}$

6.  $y = x^r$  ( $r$  real)

7.  $y = ax^2 + bx + c$

8.  $y = (x+1)^{-5}$

9. Una partícula se mueve a lo largo de una línea de tal forma que su posición en el tiempo  $t$  está dada por

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 3$$

La posición inicial ocurre cuando  $t = 0$

- a) ¿Cuál es la posición inicial ?
- b) ¿Cuál es su velocidad inicial ?
- c) ¿Cuál es su aceleración inicial ?
- d) ¿En qué tiempo la partícula deja de desacelerar y empieza a acelerar ?

Resuestas

1. 0 ; 0

2. 8 ; 0

3.  $-\frac{1}{4}x^{-3/2}$  ;  $\frac{3}{8}x^{-5/2}$

4.  $\frac{2}{9}(x+1)^{-1/3}$  ;  $-\frac{2}{27}(x+1)^{-4/3}$

5.  $-x^2(1-x^2)^{-3/2} - (1-x^2)^{-1/2}$  ;  $-3x^3(1-x^2)^{-5/2} - 3x(1-x^2)^{-3/2}$

6.  $r(r-1)x^{r-2}$  ;  $r(r-1)(r-2)x^{r-3}$

7.  $2a$  ; 0

8.  $30(x+1)^{-7}$  ;  $-210(x+1)^{-8}$

9. a) 3 ; b) 2 ; c) -8 ; d)  $\frac{2}{3}$



Diferenciación Implícita.

En todos los ejemplos ilustrados hasta ahora, la variable  $y$  ha sido dada como una función explícita de la variable  $x$ . Como por ejemplo:

$$y = 3x + 6 \quad ; \quad y = \sqrt{x+1} \quad ; \quad y = x(x^2 + 1)^3 \quad ; \text{ etc.}$$

Sin embargo, frecuentemente las variables  $x$ ,  $y$  están dadas implícitamente por determinadas ecuaciones, por ejemplo:

$$x^3 + y^3 = 6xy^4 \quad ; \quad xy = 1 \quad ; \quad (x+y) / \sqrt{x^2 - y^2} = 16y^5 \quad ; \text{ etc.}$$

Si se supone que  $y$  es una función diferenciable de  $x$ , una técnica usual en el cálculo de  $\frac{dy}{dx}$ , consiste en derivar ambos miembros de la ecuación que relaciona  $x$  e  $y$ ; finalmente se despeja algebraicamente para  $\frac{dy}{dx}$ .

Ejemplo. Sea  $x^2 + x^3 = y + y^4$

Entonces, por regla de la cadena, al derivar ambos miembros se tiene

$$\frac{d}{dx} (x^2 + x^3) = \frac{d}{dx} (y + y^4)$$

$$2x + 3x^2 = \frac{dy}{dx} + 4y^3 \frac{dy}{dx}$$

y entonces resolviendo para  $\frac{dy}{dx}$  se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3x^2}{1 + 4y^3}$$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, calcular  $\frac{dy}{dx}$  empleando la diferenciación implícita.

1.  $x^3 + y^3 = 3$

2.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$

3.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

4.  $(x+y)^{12} = (x^2 + y)^{13}$

5.  $(x^2 + y^2)^{-12} = 4$

6.  $(3xy + 1)^5 = x^2$

7. Encontrar la ecuación de la línea tangente a la curva  $(x+y)/(x-y) = 5$  en el punto (3,2).

Respuestas

1.  $-x^2 / y^2$

2.  $-\sqrt{y} / \sqrt{x}$

3.  $-y^2 / x^2$

4.  $[(2x/3)(x^2 + y)^{2/3} - (x-y)^{-1/2} / 2] / [(x+y)^{-1/2} 2 - (x^2 - y^2)^{-2/3} / 3]$

5.  $-x/y$

6.  $2 / [15(3xy + 1)^4] - y/x$

7.  $y = 2x / 3.$

Derivadas de Funciones Trigonométricas

Es posible demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } x - 1}{x} = 0$$

Luego, aplicando la definición de derivada, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \text{sen } x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos } h - 1}{h} + \text{cos } x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \\ &= \text{sen } x \cdot 0 + \text{cos } x \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Así entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\text{sen } x) = \text{cos } x}$$

además, puesto que

$$\text{cos } x = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right), \text{ tenemos que}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \text{cos } x &= \frac{d}{dx} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= (-1) \text{cos} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -\text{cos} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -\text{sen } x \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\frac{d}{dx} \text{cos } x = -\text{sen } x}$$

Aplicando las reglas hasta ahora conocidas, es posible probar que

$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$
$\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$
$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

Ejemplos a)  $\frac{d}{dx} \cos^3 x = 3 \cos^2 x \frac{d}{dx} \cos x$   
 $= -3 \cos^2 x \operatorname{sen} x$

b)  $\frac{d}{dx} \sqrt{\operatorname{sen} x} = \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x)^{1/2} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x$   
 $= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x)^{-1/2} \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

c)  $\frac{d}{dx} (\operatorname{cotg} x) = \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$   
 $= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

Ejercicios

Calcular  $\frac{dy}{dx}$  para

1.  $y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$

2.  $y = \sec(\ln x)$

3.  $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

4.  $y = \operatorname{sen}(x + y)$

Resueltas

1.  $\frac{\operatorname{tg} \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{x}$

2.  $\frac{\sec(\ln x) \operatorname{tg}(\ln x)}{x}$

3.  $\sec x$

4.  $\frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}$

V. MAXIMOS Y MINIMOS LOCALES

Dos de las más importantes aplicaciones de la derivada de una función son : la obtención del gráfico de la función y los valores máximos y mínimos de la función. Estas dos aplicaciones están estrechamente relacionadas como lo veremos a continuación. Para esto necesitamos de algunas definiciones previas.

Función creciente:

$f'(x) > 0$  para  $x \in (a, b)$  si y sólo si  $f$  es creciente en  $(a, b)$ .

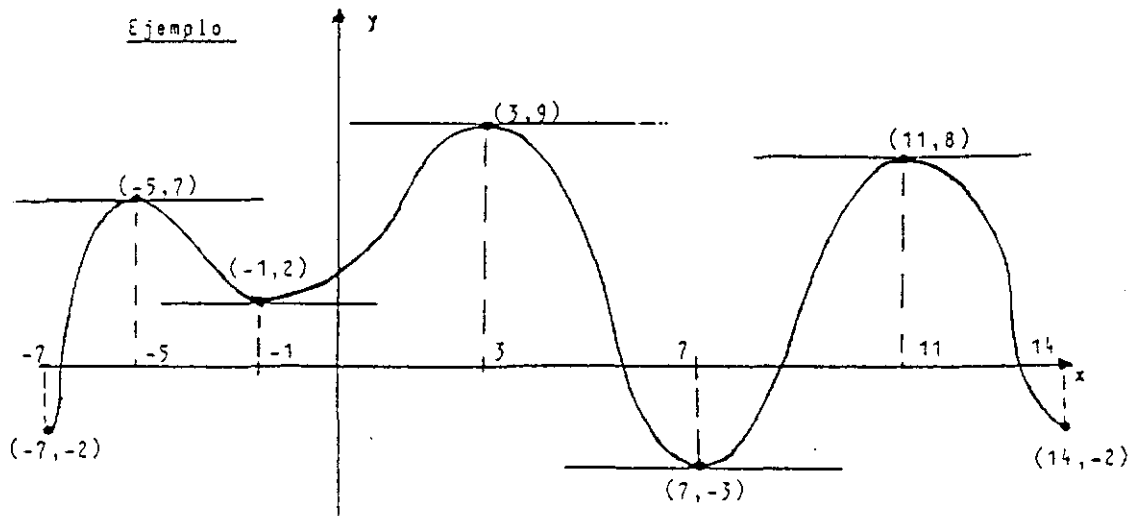
Función decreciente:

$f'(x) < 0$  para  $x \in (a, b)$  si y sólo si  $f$  es decreciente en  $(a, b)$ .

Punto crítico: ✓

Si  $f$  está definida en un punto  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto crítico de  $f$  si

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ó} \quad f'(x_0) \text{ no existe.}$$



La función  $f$  graficada en la figura anterior es creciente en los intervalos  $(-7, -5)$ ,  $(-1, 3)$  y  $(7, 11)$ . Es decreciente en los intervalos  $(-5, -1)$ ,  $(3, 7)$ ,  $(11, 14)$ . Los puntos críticos son  $-5$ ,  $-1$ ,  $3$ ,  $7$  y  $11$  pues  $f'$  en estos puntos es cero.

Ejemplo: Sea  $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ . Graficar la curva.

Solución: tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$$

entonces  $\frac{dy}{dx} = 0$  para  $x = -3$ ,  $x = 1$  (puntos críticos)

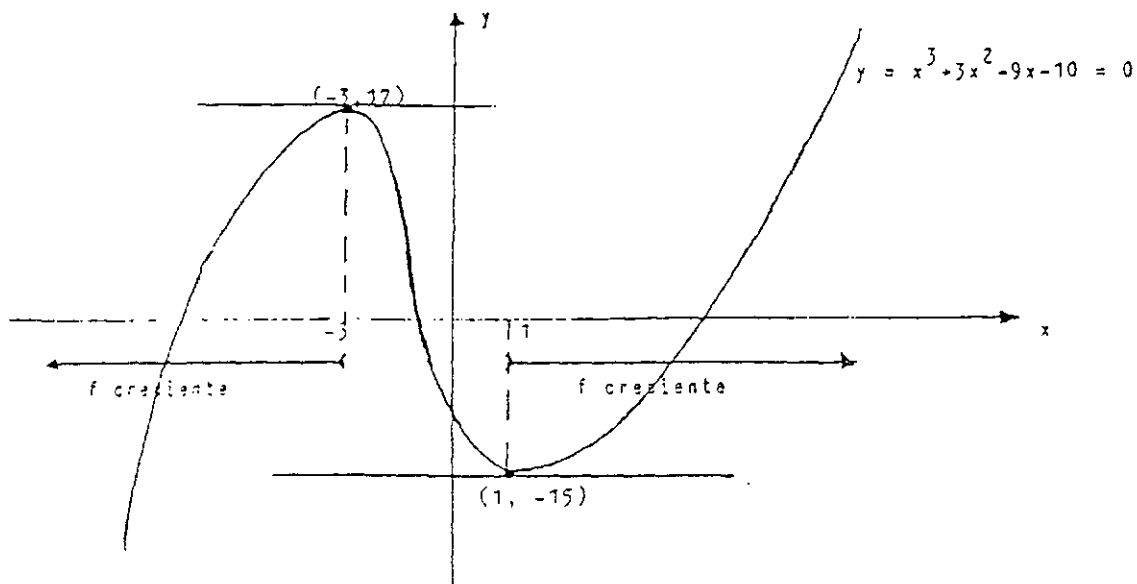
Por otra parte, tenemos que

	$-\infty$	$-3$	$1$	$\infty$
$x + 3$	-	+	+	
$x - 1$	-	-	-	
$(x+3)(x-1)$	+	-	+	

Como  $(x+3)(x-1)$  es positivo en  $(-\infty, -3)$  y  $(1, \infty)$ , la función es creciente en estos intervalos. El producto  $(x+3)(x-1)$  es negativo en  $(-3, 1)$ , luego es decreciente en  $(-3, 1)$ .

Además  $f(-3) = 17$ ;  $f(1) = -15$

La gráfica luce como



Definición:

La función  $f$  tiene

- a) Un máximo local en  $x_0$  si  $f$  cambia de creciente a decreciente en  $x_0$ . ✓
- b) Un mínimo local en  $x_0$  si  $f$  cambia de decreciente a creciente en  $x_0$ . ✓
- c) Un máximo global en  $x_0$  si  $f(x_0) \geq f(x)$  para todo  $x$  en el dominio de  $f$ . ✓

d) Un mínimo global en  $x_0$  si  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x$  en el dominio de  $f$ .

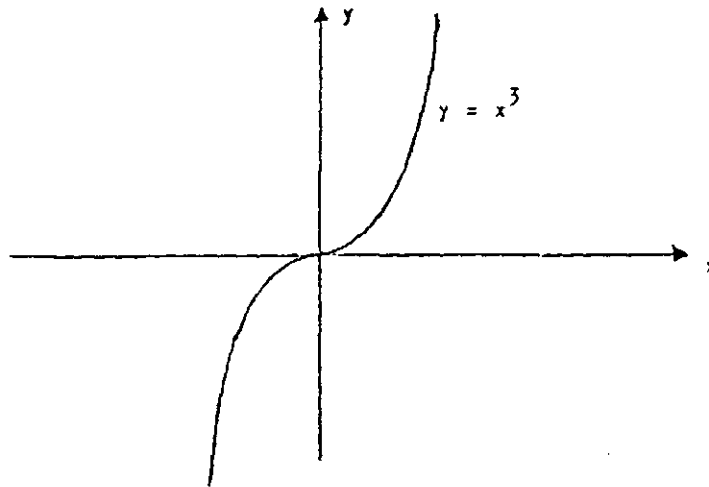
Ejemplo. En el ejemplo anterior, la función  $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = 0$  tiene un máximo local en  $x = -3$  y un mínimo local en  $x = 1$ . No tiene ni máximo global ni mínimo global.

Un hecho de importancia relativo a la teoría de máximos y mínimos es el siguiente:

Si  $f$  tiene un máximo o mínimo local en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto crítico de  $f$ . ✓

Sin embargo, el recíproco de esta afirmación no es siempre cierta, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo Sea  $y = x^3$ ; entonces  $y' = 3x^2$ , la cual es siempre positiva excepto en el punto crítico  $x = 0$ . Si  $x < 0$ , entonces  $f(x) < 0$  y si  $x > 0$  entonces  $f(x) > 0$  por lo que la gráfica de  $f$  luce como



Así, este ejemplo muestra que en el punto crítico  $x = 0$ , la función no posee ni máximo ni mínimo.

Ejemplo. Para  $y = |x|$ , sabemos que  $f'(0)$  no está definida, luego  $x = 0$  es un punto crítico de  $f$ . Observando la gráfica de  $y = |x|$ , vemos que  $x = 0$  es un mínimo (global) de  $f$ .

Una pregunta resulta en forma natural:

¿Cómo determinar si un punto crítico de  $f$  es un valor extremo de  $f$ ?

Ejemplo Sea  $y = x^3$   
 $y' = 3x^2$ ; luego  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$   
 y  $f$  no tiene ni máximo ni mínimo en  $x = x_0$ .

Ejemplo  $f(x) = x^4$ ; se tiene  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$  y  $f$  tiene un mínimo de en  $x = 0$ .

Ejemplo  $f(x) = -x^4$ ; se tiene que  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$  y  $f$  tiene un máximo en  $x = 0$ .

Ejemplo Graficar  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

Solución

a) Calculamos  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$   
 Los puntos críticos de  $f$  son  $x = 2$ ,  $x = -1$ .

Además

	-∞	-1	2	+∞
$x + 1$	-	+	+	
$x - 2$	-	-	+	
$(x-2)(x+1)$	+	-	+	

Luego  $f$  es creciente en  $(-\infty, -1)$ ,  $(2, \infty)$   
 $f$  es decreciente en  $(-1, 2)$ .

b) Calculamos  $f''(x) = 6(2x-1)$ , luego  
 $f''(x) > 0$  para  $x > \frac{1}{2}$   
 $f''(x) < 0$  para  $x < \frac{1}{2}$ ;  $f''(x) = 0$  para  $x = \frac{1}{2}$

Por lo tanto la curva es

cóncava hacia arriba para  $x > \frac{1}{2}$

cóncava hacia abajo para  $x < \frac{1}{2}$

y tiene un punto de inflexión en  $x = \frac{1}{2}$ .

c) Evaluamos  $f''(x)$  en los puntos críticos  
 $f''(-1) = -18 < 0$ , luego  $x = -1$  es un máximo local para  $f$ .  
 $f''(2) = 18 > 0$ , luego  $x = 2$  es un mínimo local para  $f$ .

Por los puntos a), b), c) anteriores, la gráfica luce como:

VI. INTEGRACION

Definición. Sea  $f$  definida en  $[a,b]$ . Supongamos que existe una función diferenciable  $F$  definida en  $[a,b]$  tal que

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$$

entonces  $F$  es llamada una antiderivada ó integral indefinida de  $f$  en el intervalo  $[a,b]$  y escribimos

$$F = \int f(x) dx$$

Ejemplo Encontrar  $\int 3x^2 dx$

Solución Puesto que  $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ , tenemos que

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

Pero la derivada de una constante es cero, luego  $x^3 + C$  es también una integral indefinida de  $3x^2$ , para cualquier valor de la constante  $C$ .

Por tanto, podemos escribir

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Mostramos ahora como ciertas integrales pueden ser calculadas.

Como  $\frac{d}{dx}(x^r) = r x^{r-1}$ ,

entonces  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \right] = x^r$ , lo que

significa que si  $r \neq -1$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Ejemplo Calcular  $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$



Algunas de las técnicas analíticas para encontrar antiderivadas se dan a continuación.

1) Si  $f$  y  $g$  son integrables y si  $k$  es una constante, entonces  $kf$  y  $f + g$  son integrables y se tiene que

$$i) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$ii) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int \left[ \frac{3}{x^2} + 6x^2 \right] dx &= \int \frac{3}{x^2} dx + \int 6x^2 dx \\ &= 3 \int x^{-2} dx + 6 \int x^2 dx = 3 \frac{x^{-1}}{-1} + 6 \frac{x^3}{3} + C \\ &= -\frac{3}{x} + 2x^3 + C \end{aligned}$$

2) Integración por sustitución: en general, para calcular  $\int f(x) dx$  por sustitución, conviene, si es posible, realizar los siguientes pasos:

- Hacer una sustitución  $u = g(x)$  de tal forma que el integrando pueda expresarse en la forma  $u^r du$
- Calcular  $du = g'(x) dx$
- Escribir  $\int f(x) dx$  como  $\int u^r du$
- Integrar
- Sustituir  $g(x)$  por  $u$  para obtener la respuesta en términos de  $x$ .

Ejemplo

Calcular  $\int x \sqrt[3]{1+x^2} dx$

Solución

Sea  $u = 1 + x^2$ , entonces  $du = 2x dx$  y así  $x dx = \frac{1}{2} du$ .

Por tanto

$$\begin{aligned} \int x \sqrt[3]{1+x^2} dx &= \int \sqrt[3]{u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{1/3} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{4/3} + C \end{aligned}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + c,$$

donde la integral  $\int x e^{x^2} dx$  ha sido calculada por sustitución.

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales indefinidas.

- |   |                                      |                               |
|---|--------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\int \sqrt{9+x} dx$                   | 2. $\int (1+2x)^{3/2} dx$            | 3. $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ |
| 4. $\int \frac{t+3t^2}{\sqrt{t^2+2t}} dt$ | 5. $\int p^2 \sqrt{a^3-p^3} dp$      | 6. $\int \frac{dx}{5+x}$      |
| 7. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$              | 8. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$ | 9. $\int \frac{e^x}{x} dx$    |
| 10. $\int x e^{3x} dx$                    | 11. $\int x^2 e^{x/4} dx$            | 12. $\int x^3 \ln x dx$       |

Respuestas

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\frac{2}{3} (9+x)^{3/2} + c$                   | 2. $\frac{1}{5} (1+2x)^{5/2} + c$               |
| 3. $\frac{3}{8} (1+x^2)^{4/3} + c$                 | 4. $(t^2+2t)^{3/2} + c$                         |
| 5. $-\frac{2}{9} (a^3-p^3)^{3/2} + c$              | 6. $\ln  x+5  + c$                              |
| 7. $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$                    | 8. $\frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + c$              |
| 9. $-\frac{1}{e^x} + c$                            | 10. $\frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c$ |
| 11. $4x^2 e^{x/4} - 32x e^{x/4} + 128 e^{x/4} + c$ |   |
| 12. $\frac{x^4 (4 \ln x - 1)}{16} + c$             |   |

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{x=1} - \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{x=0} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Notación

$$f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Por tanto, en el ejemplo anterior tenemos que

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

i Hay que ser cuidadosos al hacer sustituciones en las integrales definidas! Al hacer una sustitución en una integral definida, los límites de integración deben ser cambiados también.

Ejemplo Calcular  $\int_{-1}^4 x \sqrt[3]{1+x^2} dx$

Solución a) Una antiderivada para  $f(x) = x \sqrt[3]{1+x^2}$  es  
 $F(x) = \frac{3}{8} (1+x^2)^{4/3}$ . Luego

$$\int_{-1}^4 x \sqrt[3]{1+x^2} dx = \left. \frac{3}{8} (1+x^2)^{4/3} \right|_{-1}^4 = \frac{3}{8} (17^{4/3} - 2^{4/3})$$

b) Si en la sustitución  $u = 1+x^2$ ,  $du = 2x dx$ , dejamos la integral definida en función de la variable  $u$ , tenemos que

$$\int_{-1}^4 x \sqrt[3]{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_2^{17} u^{1/3} du$$

pues cuando  $x = -1$ , entonces  $u = 2$

cuando  $x = 4$ , entonces  $u = 17$ , por tanto

$$\int_{-1}^4 x \sqrt[3]{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} u^{4/3} \Big|_2^{17} = \frac{3}{8} (17^{4/3} - 2^{4/3})$$

Ejercicios Calcular

1)  $\int_1^8 \left[ \frac{1}{3\sqrt{x}} + 7\sqrt[3]{x} \right] dx$  Resp.:  $83 \frac{1}{4}$

En el caso de no exigir que  $f$  sea no negativa, el área acotada por la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  está dada por

$$A_a^b = \int_a^b |f(x)| dx$$

Ejemplo Calcular el área acotada por las curvas  $y = x^3$ , el eje  $x$ , y las líneas  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

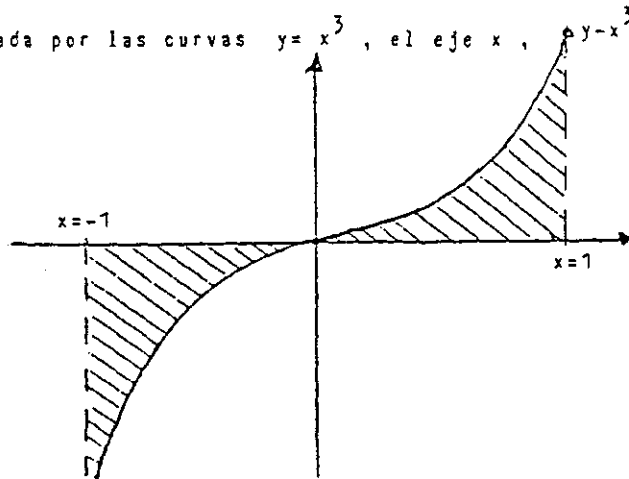
Solución

Puesto que  $|f(x)| = |x^3|$  está dado por

$$|x^3| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

se tiene que

$$A_a^b = \int_{-1}^0 (-x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



Ejercicios

1) Calcular el área limitada por la curva  $y = \sqrt{x}$ , y el eje  $x$ , desde  $x = 0$  a  $x = 5$

Resp.  $\frac{10}{3} \sqrt{5}$

2) Calcular el área acotada por la curva  $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  y el eje  $x$ .

Resp.  $\frac{1}{2}$

3) Calcular el área entre la curva  $y = e^{-x}$ , y el eje  $x$  para  $x$  entre 0 y 100.

Resp.  $\approx 1$ .

Se puede generalizar los resultados anteriores para calcular el área entre las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ , entre  $x = a$  y  $x = b$  ( $a < b$ ), obteniéndose la fórmula:

Puesto que  $-x^2 + 5x + 9 \geq x^2 + 3x + 5$ ,  $\forall x \in [-1, 3]$   
tenemos que

$$A = \int_{-1}^3 [(-x^2 + 5x + 9) - (x^2 + 3x + 5)] dx = 9,$$

donde  $f(x) = -x^2 + 5x + 9$ ;  $g(x) = x^2 + 3x + 5$ .

Ejercicios En los problemas siguientes, calcular el área acotada por las curvas y líneas dadas.

1.  $y = x^2$ ;  $y = x$  Resp.:  $\frac{1}{6}$
2.  $y = 3x^2 + 6x + 8$ ;  $y = 2x^2 + 9x + 18$  Resp.:  $\frac{343}{6}$
3.  $y = x$ ;  $y = x^4 + x - 81$  Resp.:  $388 \frac{4}{5}$
4.  $y = x^2$ ;  $y = x^3$ ;  $x = 3$  Resp.:  $\frac{137}{12}$

Integración Numérica

Consideremos el problema de evaluar las integrales

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \quad \text{ó} \quad \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Puesto que ambos integrandos son continuos en  $[0,1]$ , sabemos que ambas integrales definidas existen. Ellas representan las áreas bajo las curvas  $y = \sqrt{1+x^3}$  e  $y = e^{x^2}$ , para  $x$  entre 0 y 1. El problema que se presenta es que ningún método estudiado nos permite encontrar una antiderivada de  $\sqrt{1+x^3}$  ó  $e^{x^2}$ . De hecho, existe un gran número de funciones continuas para las cuales es imposible calcular una antiderivada y así entonces no podemos evaluarlas para conocer el valor de la integral definida. Por esta razón, muchos métodos numéricos han sido desarrollados para aproximar el valor de una integral definida; éstas técnicas se conocen con el nombre de integración numérica. Presentaremos sólo dos de estas técnicas: la regla del trapecio y la regla de Simpson.

El error en la fórmula del trapecio se define como la diferencia entre el valor exacto de la integral y su valor aproximado dado por la regla del trapecio ; se puede demostrar que este error, denotado por  $E^T$ , está acotado por

$$|E^T| \leq M \frac{(b-a)^3}{12 n^2}$$

donde  $M$  es tal que  $|f''(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$

Ejemplo Encontrar una cota para el error en el cálculo de  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  utilizando la regla del trapecio para  $n = 10$ .

Solución

Si  $f(x) = \frac{1}{x}$ , entonces  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ . Luego  $f''(x)$  está acotada por 2 en  $[1, 2]$ . Empleando la estimación del error, tenemos que

$$|E^T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12 \cdot 2} = \frac{1}{6 n^2}$$

luego, para  $n = 10$ , una cota del error es

$$|E^T| \leq \frac{1}{6 \cdot 100} = \frac{1}{600} \approx 0.0017$$

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

donde  $n$  es par.

Una cota para el error en la regla de Simpson es

$$|E^S| \leq M \frac{(b-a)^5}{180 n^4}$$

## VII INTERPOLACION

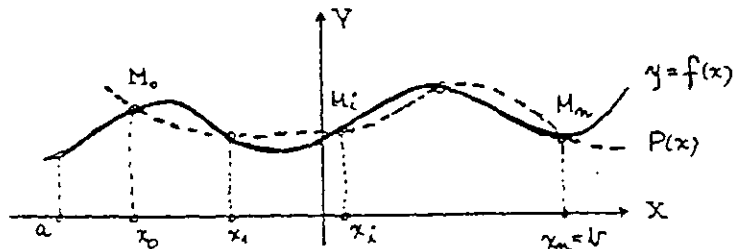
Podemos resumir la idea de Interpolación en los siguientes términos

En un intervalo  $[a, b]$  se hallan especificados  $(n+1)$  valores distintos de un argumento :  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , además se conocen los valores correspondientes de una función  $y = f(x)$ , es decir,  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ . Se requiere construir una función  $F(x)$  ( función de interpolación ) que pertenezca a una clase conocida ( polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, racionales ) que tome los mismos valores que  $f(x)$  en los puntos de interpolación, esto es :  $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$ .

En este trabajo se pretende desarrollar rápidamente el concepto de interpolación polinómica, es decir, encontrar un polinomio  $P(x)$ , tal que:

- i)  $\text{gr} [ P(x) ] \leq n$
- ii)  $P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$

Geométricamente, esto significa que la gráfica del polinomio  $P(x)$  debe coincidir con la gráfica de la función  $y = f(x)$  en los puntos  $M_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n$ ; como lo ilustra la siguiente figura :



### A FORMA DE LAGRANGE

TEOREMA Dada una función de valores reales  $f(x)$  y  $(n+1)$  puntos distintos

$x_0, x_1, \dots, x_n$  existe exactamente un polinomio  $L(x)$  tal que

- i)  $\text{gr} [ L(x) ] \leq n$
- ii)  $L(x_j) = f(x_j); j = 0, 1, 2, \dots, n$

i)  $\text{gr} [ Q (x) ] \leq n$

ii)  $Q (x_j) = f (x_j), j = 0, 1, 2, \dots, n$

Si consideramos  $H (x) = L (x) - Q (x)$  entonces también el grado de  $Q (x)$  es menor o igual que  $n$  y además  $H (x_j) = L (x_j) - Q (x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0, j=0, 1, \dots, n$ , es decir el polinomio  $H (x)$  tiene  $(n+1)$  ceros y su grado no excede  $n$ , por lo tanto  $H (x) \equiv 0 (x)$ , donde  $0 (x)$  es el polinomio cero.

Luego  $L (x) \equiv Q (x)$  es decir  $L (x)$  es único, con lo que queda probado el teorema.

La fórmula

$$L (x) = \sum_{k=0}^n f (x_k) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

se conoce como la FORMA DE LAGRANGE del polinomio interpolante y los polinomios definidos por

$$l_k (x) = \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

son los POLINOMIOS DE LAGRANGE para los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Consideraremos el caso particular en que  $n = 1$ , es decir, se conoce  $f (x)$  en dos puntos distintos  $x_0$  y  $x_1$ . La forma de Lagrange es entonces la ecuación de la recta  $y = L (x)$  que pasa por dichos puntos. Luego :

$$L (x) = \sum_{k=0}^1 f (x_k) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^1 \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = f (x_0) \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f (x_1) \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$= \frac{f (x_0) (x-x_1) + f (x_1) (x-x_0)}{x_0-x_1} = f (x_0) + \frac{f (x_1) - f (x_0)}{x_1-x_0} (x-x_0)$$

La fórmula

$$L (x) = f (x_0) + \frac{f (x_1) - f (x_0)}{x_1-x_0} (x-x_0) \quad (1.2)$$



Observe que los datos de la tabla corresponden a la función  $f(x) = e^{-x^2} - x^2 \operatorname{sen} x$  y que  $f(2.5) = -3.7385$  redondeado a cuatro cifras decimales, lo que se puede considerar como una aproximación de fi-  
ciente.

EJERCICIOS

1.- Encontrar el polinomio de interpolación en su forma de Lagrange a partir de la siguiente tabla

x	-2	0	1	2
y	4	10	10	16

Respuesta :  $x^3 - x + 10$

2.- A partir de la tabla de valores

x	1	3	4	6
y	-7	5	8	14

Calcular  $y(0)$

Respuesta : - 18.4

B. FORMA DE NEWTON

DEFINICION Se llaman DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE ORDEN n a los cocientes

$$f [ x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n} ] = \frac{f [ x_{i+1}, \dots, x_{i+n} ] - f [ x_i, \dots, x_{i+n-1} ]}{x_{i+n} - x_i}$$

(  $n = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, \dots$  )

Conveniéndolo que  $f [ x_i ] = : f (x_i)$  entonces tenemos

en particular que  $f [ x_i, x_{i+1} ] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad ( i = 0, 1, \dots )$

definen las DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE PRIMER ORDEN.

La definición anterior nos permite generar todas las diferencias  $d_i$

Luego la tabla de diferencias divididas es :

$x_i$	$f [ x_i ]$	$f [ , ]$	$f [ , , ]$
0	1	-2.3094	
2	-3.6188	2.3488	1.5527
3	-1.27		

LEMA Si  $P(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , su diferencia dividida de orden  $(n+1)$  es idénticamente cero, esto es

$$P [ x, x_0, x_1, \dots, x_n ] \equiv 0$$

para cualquier conjunto de números distintos  $x, x_0, x_1, \dots, x_n$

La utilización de este lema permite encontrar el polinomio interpolante en su forma de Newton, el cual es :

$$L(x) = \sum_{k=0}^n f [ x_0, x_1, \dots, x_k ] \prod_{j=0}^{k-1} (x-x_j)$$

donde:

i)  $gr [ L(x) ] \leq n$

ii)  $L(x_k) = f(x_k), (k=0, 1, \dots, n)$

EJEMPLO Si consideramos la tabla de diferencias divididas del ejemplo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} L(2.5) &= \sum_{k=0}^2 f [ x_0, x_1, \dots, x_k ] \prod_{j=0}^{k-1} (2.5-x_j) \\ &= f(x_0) + f [ x_0, x_1 ] (2.5-x_0) + f [ x_0, x_1, x_2 ] \\ &\quad (2.5-x_0) (2.5-x_1) \\ &= 1 + (-2.3094) (2.5-0) + 1.5527 (2.5-0) (2.5-2) \\ &= -2.8326; \text{ lo que está de acuerdo con el resultado antes ob} \end{aligned}$$

tenido.

Haciendo uso de este lema, el polinomio Newton toma ahora la forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^i f_0}{i! h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

En términos, tenemos :

$$x-x_j = (s-j) \cdot h, \text{ luego}$$

$$P_n(x) = P_n(x_0 + s \cdot h) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^i f_0}{i! h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (s-j) \cdot h$$

$$P_n(x_s) = \sum_{i=0}^n \Delta^i f_0 \binom{s}{i}$$

TABLA DE DIFERENCIAS FINITAS O PROGRESIVAS

$x_{-2}$	$f_{-2}$				
		$\Delta f_{-2}$			
$x_{-1}$	$f_{-1}$		$\Delta^2 f_{-2}$		
		$\Delta f_{-1}$		$\Delta^3 f_{-2}$	
$x_0$	$f_0$		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$
		$\Delta f_0$		$\Delta^3 f_{-1}$	
$x_1$	$f_1$		$\Delta^2 f_0$		
		$\Delta f_1$		$\Delta^4 f_{-1}$	
$x_2$	$f_2$		$\Delta^3 f_0$		
		$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_1$		
$x_3$	$f_3$			$\Delta^4 f_0$	
		$\Delta f_3$	$\Delta^3 f_1$		
$x_4$	$f_4$		$\Delta^2 f_2$		

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)}{6} \Delta^3 f_0$$

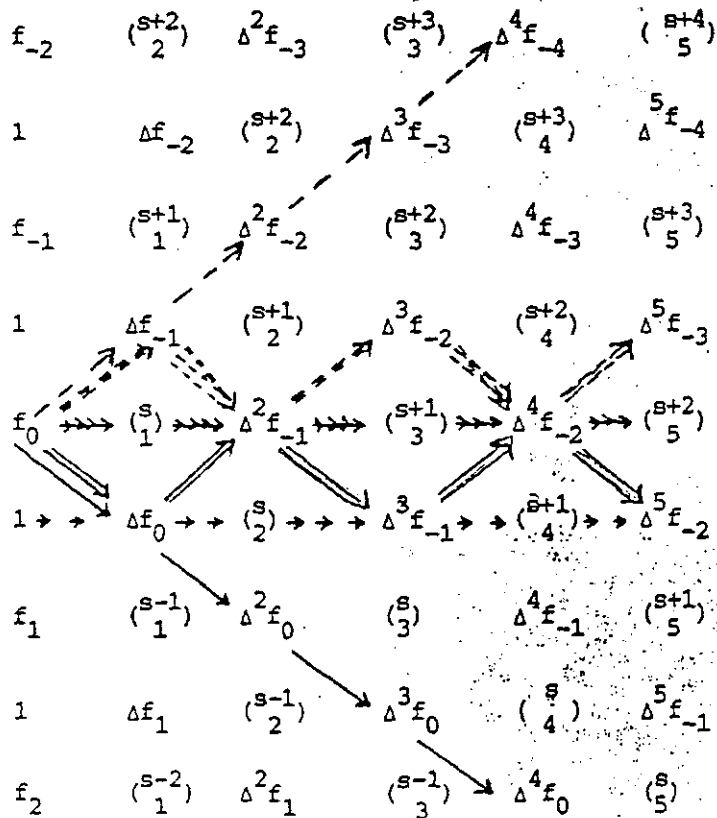
haciendo  $x_0 = 0$  y  $s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{2.5-0}{1} = 2.5$  entonces

$$\begin{aligned} P(2.5) &= 1 + 2.5(-1.4736) + \frac{2.5 \cdot 1.5}{2} (-1.6716) + \frac{2.5 \cdot 1.5 \cdot 0.5}{6} (7.1656) \\ &= 1 - 3.684 - 3.13425 + 2.23925 \\ &= -3.579 \end{aligned}$$

B. OTROS POLINOMIOS DE INTERPOLACION

Existe una gran variedad de fórmulas de interpolación además de las que se han mencionado, todas las cuales difieren sólo en el orden en que aparecen los puntos de interpolación y en las trayectorias seguidas en las tablas de diferencias. Un esquema práctico que sintetiza esta situación es el DIAGRAMA DIAMANTE cuya tabla mostramos enseguida:

DIAGRAMA DIAMANTE PARA POLINOMIOS DE INTERPOLACION



$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \Delta^3 f_{-2} +$$

$$+ \binom{s+2}{4} \Delta^4 f_{-2} + \dots + \binom{s + \lfloor n/2 \rfloor}{n} \Delta^n f_{- \lfloor (n+1)/2 \rfloor}$$

5. STIRLING (ajusta desde  $x_{- \lfloor n/2 \rfloor}$  hasta  $x_{\lfloor n/2 \rfloor}$  si  $n$  es par):

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{\binom{s+1}{2} + \binom{s}{2}}{2} \Delta^2 f_{-1} +$$

$$\binom{s+1}{3} \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \dots$$

$$+ \begin{cases} \frac{\binom{s + \lfloor n/2 \rfloor}{n} + \binom{s + \lfloor (n-1)/2 \rfloor}{n}}{2} \cdot \Delta^n f_{- \lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ es par} \\ \binom{s + \lfloor (n-1)/2 \rfloor}{n} \frac{\Delta^n f_{- \lfloor (n-1)/2 \rfloor} + \Delta^n f_{- \lfloor n/2 \rfloor}}{2} & \text{si } n \\ & \text{es impar} \end{cases}$$

6. BESSEL (ajusta desde  $x_{- \lfloor n/2 \rfloor}$  hasta  $x_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$  si  $n$  es impar);

$$P_n(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{\binom{s-1}{1} + \binom{s}{1}}{2} \Delta f_0 + \binom{s}{2}$$

$$\frac{\Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_{-1}}{2} + \frac{\binom{s}{3} + \binom{s+1}{3}}{2} \Delta^3 f_{-1} +$$

$$+ \binom{s+1}{4} \frac{\Delta^4 f_{-1} + \Delta^4 f_{-2}}{2} + \dots + \begin{cases} \binom{s + \lfloor (n-2)/2 \rfloor}{n} \frac{\Delta^n f_{- \lfloor (n-2)/2 \rfloor} + \Delta^n f_{- \lfloor n/2 \rfloor}}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{\binom{s + \lfloor n-2 \rfloor}{n} + \binom{s + \lfloor n/2 \rfloor}{n}}{2} \Delta^n f_{- \lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La fórmula para el polinomio de Stirling nos dice :

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{\binom{s+1}{2} + \binom{s}{2}}{2} \Delta^2 f_{-1}$$

como  $x_0 = 0.2$ , entonces

$$s = \frac{0.24 - 0.2}{0.2} = 0.2$$

Luego

$$\begin{aligned} P(0.2) &= 1987 + 0.2 \frac{1987 + 1907}{2} + \frac{(0.2)^2}{2} (-80) \\ &= 1987 + 389.4 - 1.6 = 2375 \end{aligned}$$

### EJERCICIOS

1) Para la tabla

x	0.0	0.2	0.4	0.6
y	0	1987	1907	1752

Encontrar  $y(0.3)$  con ayuda del polinomio de Bessel

RESPUESTA 2955.18

2) Para la tabla

x	0	1	2	3	4
y	5	8	17	44	101

Encontrar el polinomio de interpolación de Newton-Gregory hacia adelante.

RESPUESTA  $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

v) Si  $r < 0$

i) Nuevamente (1) es una función positiva, esto es:

$$N(t) = N(0) e^{rt} > 0, \text{ para todo } t.$$

ii)  $N'(t) = N(0) \cdot r e^{rt} < 0$  entonces (1) es una función decreciente

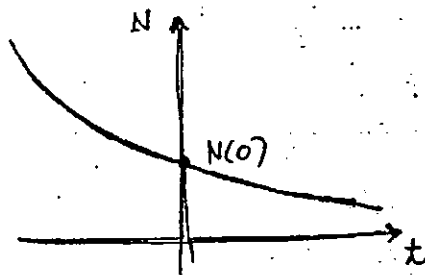
$$\text{iii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(0) e^{rt} = 0^+$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} N(0) e^{rt} = N(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} N(0) e^{rt} = +\infty$$

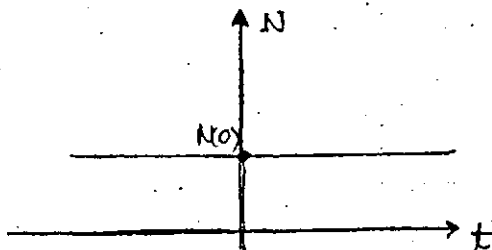
iv)  $N''(t) = N(0) r^2 e^{rt} > 0$  entonces (1) es cóncava hacia arriba en todo su recorrido.

Su representación gráfica está dada por:



c) Si  $r = 0$

En este caso  $N(t) = N(0) e^{0t}$ , esto es:  $N(t) = N(0)$  (función constante). Gráficamente:



OBSERVACION Usualmente (1) es reemplazada por:

$$N(t) = N(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \quad (2)$$

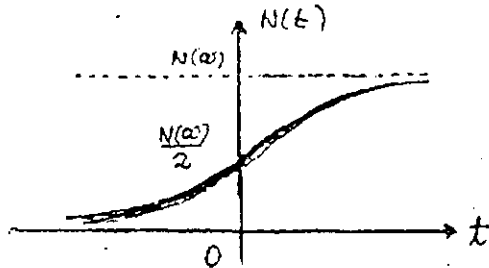
En este caso el incremento de población se obtiene para intervalos finitos anuales. Para un intervalo de  $1/m$  de año cualquiera, se tendrá

$$N(t) = N(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

y en el límite, para el número de subintervalos  $m$  del año tendiendo a infinito, se tiene:

Como  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\lambda t} = +\infty$  entonces  $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 0$

Esto significa que las rectas  $N(t) = 0$  y  $N(t) = N(\infty)$  son asíntotas horizontales de la gráfica de  $N(t)$ , cuyo comportamiento es:



### 3] LA DERIVADA

#### a) INCREMENTO ANUAL DE LA POBLACION EN t

Si  $N(t)$  denota la función población total en un momento  $t$ , entonces la diferencia

$$\Delta N(t) = N(t_1) - N(t_0)$$

representa el incremento de la población entre  $t_0$  y  $t_1$ ; y el cociente

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

da el incremento medio anual de la población en dicho intervalo.

Por lo tanto, la derivada:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

demográficamente representa el incremento anual de la población en  $t$ .

Esta derivada se denomina: densidad anual de incremento en  $t$ .

EJEMPLO: Dada la función

$$N(t) = 6000 + 234t + 9t^2 + 2t^3$$

obtener el crecimiento anual de la población en el momento  $t_0 = 1$ .

Derivando:

$$N'(t) = 234 + 18t + 6t^2$$

luego

$$N'(1) = 234 + 18 + 6 = 258$$

#### b) TASA ANUAL DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION

La tasa anual media de crecimiento de la población correspondiente a un intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$  es igual a:



e) DENSIDAD DE DISTRIBUCION POR EDADES

Denotando por  $C(x_0, x_1)$  la proporción de personas con edades comprendidas entre  $x_0$  y  $x_1$ , se define la densidad de distribución por edades, por:

$$c(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x_0, x_1)}{x_1 - x_0}$$

También se conoce como coeficiente de distribución por edades.

Este concepto que se refiere a una variación continua de la edad, se corresponde con la distribución por grupos de edades en el campo discreto.

f) TASA ANUAL INSTANTANEA DE FECUNDIDAD

Dada la tasa de fecundidad por grupo de edades

$${}_m f_x = \frac{B(x, x+m)}{N(x, x+m)}$$

donde:  $B(x, x+m)$  son los nacimientos de mujeres con edades comprendidas entre  $x$  y  $x+m$ ;  $N(x, x+m)$  es la población femenina de ese grupo de edades, su límite

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow 0} {}_m f_x = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{B(x, x+m)}{N(x, x+m)} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\frac{B(x, x+m)}{m}}{\frac{N(x, x+m)}{m}} = \frac{B(x)}{N(x)}$$

se denomina tasa anual instantánea de fecundidad. En este caso,  $B(x)$  es la densidad de nacimientos de mujeres de edad  $x$ ,  $N(x)$  es la densidad de personas de edad  $x$ .

La función  $f(x)$  del campo continuo, se corresponde con la  ${}_m f_x$  en el campo discreto.

**C** GRAFICA DE FUNCIONES

Una de las aplicaciones de la derivada consiste en la determinación de los valores extremos (máximos y mínimos) de una función, los intervalos donde la función es creciente o decreciente, los intervalos donde la gráfica de una función es cóncava o convexa, es decir, mediante la derivada es posible graficar una función con un alto grado de fidelidad. Enseguida se aplicarán estas técnicas para obtener la gráfica de algunas relaciones entre variables demográficas.

Rueop:  $f''(26) = C(156 - 222) < 0$  (máximo)  
 $f''(48) = C(288 - 222) > 0$  (mínimo)

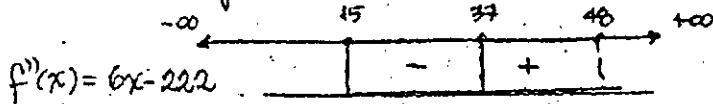
Como  $f(26) = C(26-15)(48-26)^2 = 5324C$  y  
 $f(48) = C(48-15)(48-48)^2 = 0$ .

entonces la función  $f(x)$  presenta:  
 máximo en el punto  $(26, 5324C)$   
 mínimo en el punto  $(48, 0)$

Además  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow C(6x - 222) = 0$   
 $x = 37$

como  $f'''(x) = 6C \neq 0$  entonces  $f(x)$  presenta un punto de inflexión en  $(37, 2662C)$

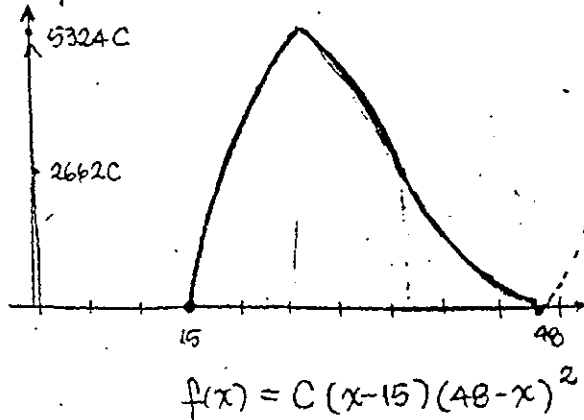
Finalmente analizando el signo de  $f''(x)$  se deducen los intervalos de concavidad, en efecto:



Si  $15 \leq x < 37$  entonces  $f''(x) < 0$  (cóncava)

Si  $37 < x \leq 48$  entonces  $f''(x) > 0$  (convexa)

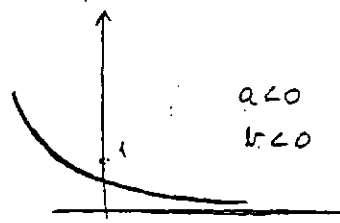
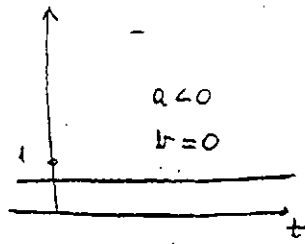
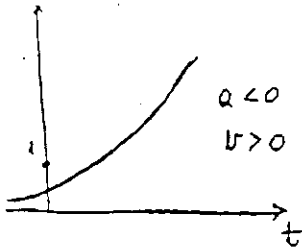
Por lo tanto, en base a las conclusiones anteriores, la representación gráfica de  $f(x)$  es:



b) Sea la función  $m = 10^{a+bt}$

donde:  $m$  es la tasa de mortalidad de un grupo de edad cualquiera  
 $t$  es el tiempo  
 $a$  y  $b$  son parámetros

Esta función ha sido utilizada para proyectar las tasas de mortalidad por edad a través del tiempo. También se usa para ajustar



La forma exacta de las curvas depende de los valores numéricos de  $a$  y  $b$ .

**D** INTEGRALES

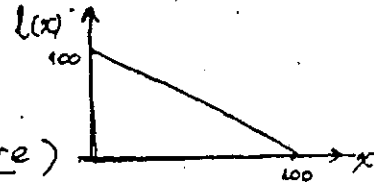
El cálculo integral se basa fundamentalmente en el concepto de integral. La integral definida de una función  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  se denota por  $\int_a^b f(x) dx$  y geométicamente representa el área encerrada por la curva  $y = f(x)$ , el eje de las abscisas y las ordenadas  $a$  y  $b$ , si  $f(x) \geq 0$ . Enseguida se presentan algunas aplicaciones de este concepto al campo de la Demografía:

TIEMPO VIVIDO

Dada la función:

$$L(x) = 100 - x$$

(que se conoce como la ley de mortalidad de De Moivre)



que representa el número de sobrevivientes a sucesivas edades de una generación inicial  $l(0) = 100$ , calcular:

- i) El tiempo vivido por esta generación entre los 10 y 15 años
- ii) El tiempo vivido desde los 10 años hasta que la generación se extingue
- iii) El número de años que en promedio viven las personas que llegan con vida a la edad exacta 10.

Demográficamente el concepto de tiempo vivido es el número de años-personas vividos por la generación  $l(0)$  entre dos edades  $x_0$  y  $x_1$ . Se denota por  ${}_x L_{x_1}$  y coincide con el concepto de integral definida, esto es;  $\int_{x_0}^{x_1} l(x) dx$ . Por lo tanto:

$$i) {}_5 L_{10} = \int_{10}^{15} l(x) dx = \int_{10}^{15} (100 - x) dx = 100x - \frac{x^2}{2} \Big|_{10}^{15} = \left(100 \cdot 15 - \frac{15^2}{2}\right) - \left(100 \cdot 10 - \frac{10^2}{2}\right)$$

$$= 437.5 \text{ años-persona}$$

ii) El tiempo vivido por la generación desde la edad 10 hasta  $w$ , se se-

$${}_4T_1 = {}_1T_1 + {}_1T_2 + {}_1T_3 + {}_1T_4$$

$$= 91\,108 + 89\,527 + 88\,597 + 88\,086 = 357\,268 \text{ años-persona.}$$

Por otra parte, si se aplica el método de Simpson, cuya fórmula es:

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3} (y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m)$$

para el mismo problema anterior, se tiene:

$${}_4T_1 = \int_1^5 l_x dx \approx \frac{1}{3} (l_1 + 4l_2 + l_3) + \frac{1}{3} (l_3 + 4l_4 + l_5)$$

$$= \frac{1}{3} (92\,107 + 4 \cdot 90\,110 + 88\,944) + \frac{1}{3} (88\,944 + 4 \cdot 88\,249 + 87\,823)$$

$$= 357\,085 \text{ años-persona.}$$

Notar que el método de Simpson no permite calcular el tiempo vivido dentro de cada subintervalo.

