42/64

INSTITUTO LATINOAMERICANO DE
PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL
Santiago, abril de 1964

NOCIONES ELEMENTALES SOBRE MATRICES Y DETERMINANTES*

APENDICE I

* Preparado por el profesor Manuel Balboa para el Programa de Capacitación CEPAL/DOAT, Santiago, noviembre de 1961.

APENDICE I

Nociones elementales sobre matrices y determinantes

1. Consideraciones generales

En estas lecciones de contabilidad económica se usan, con cierta frecuencia, operaciones elementales del álgebra de matrices para analizar esquemas contables que demuestran las relaciones entre los sectores económicos en un cuadro de conjunto de la economía.

El álgebra de matrices es un útil instrumento de análisis macroeconómico, cuyo empleo creciente ha contribuído al esclarecimiento y a la sistematización de estudios básicos.

La contabilidad es, en esencia, un método de registración de los hechos económicos; de tal modo que a poco que se avance en su sistematización y generalización se pasa, de una manera natural, a la expresión algebráica con las evidentes ventájas que ella ofrece para la "economía de la expresión y del pensamiento" y para asegurar la compatibilidad de las soluciones, dadas determinadas hipótesis o esquemas económicos conceptuales.

El entusiasmo de la contabilidad económica por esta rama de la matemática se explica porque ella proporciona un instrumento sencillo para el análisis coherente de las variables macroeconómicas entre sí y en relación con los sub-agregados y unidades (elementales) que las componen, manteniendo, siempre, sus vinculaciones con la economía en su conjunto. Era natural, entonces, que cuando el estudio del producto y del ingreso penetrara en el análisis de sus componentes y de sus íntimas interrelaciones, mediante variables macroeconómicas de distinto nivel de agregación, aplicara los principios elementales del álgebra de matrices.

Aunque existe una bibliografía ya muy abundante sobre el álgebra de matrices y la teoría de determinantes, se ha comprobado la necesidad de agregar en este apéndice algunas explicaciones sobre operaciones y teoremas, imprescindibles para comprender las aplicaciones que se hacen en el curso de estas lecciones. Teniendo, pues, este apéndice esos propósitos muy limitados, el tema se desarrolla del modo más elemental y se trata de evitar demostraciones rigurosas.

/2. Definición

2. Definición y notación de matrices

Se llama matriz a un conjunto ordenado de números o funciones. La ordenación se efectúa en forma rectangular, ubicando a los números o funciones en líneas horizontales y en columnas.

A continuación se representa una matriz en la forma usual:

$$\begin{bmatrix} a & h & g & h \\ d & i & j & d \\ k & l & a & e \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Las letras encerradas en los corchetes, pueden representar cualquier clase de números o funciones, y se llaman elementos de la matriz. La matriz (1) consta de tres filas o líneas y de cuatro columnas de elementos; contiene, por lo tanto, 12 elementos.

Atendiendo al número de filas y de columnas se define el orden de la matriz; así se dice que la matriz (1) es de orden 3 x 4; es usual indicar en primer lugar el número de filas horizontales y en segundo lugar el número de columnas. 1/

Como lo establece la definición, el orden de los elementos, en las líneas o columnas, es una propiedad esencial de una matriz; por ello, una matriz que tenga los mismos elementos, por ejemplo, que la matriz (1), pero con una ordenación distinta, aunque fuera del mismo número de líneas y columnas, constituiría otra matriz.

Así, si se intercambian las dos primeras columnas de la matriz (1) se obtendría una nueva matriz (2).

$$\begin{bmatrix} h & a & g & h \\ i & d & j & d \\ l & k & a & e \end{bmatrix} \qquad (2)$$

1/ Los autores no emplean símbolos idénticos para indicar los entes y las operaciones del álgebra de matrices, aunque con su difusión se comprueba una fuerte tendencia hacia la uniformidad. En este apéndice se sigue en general la notación de Aitken, (A.C. Aitken, Determinante y Matrices, versión castellana de la 4a. edición inglesa, Editorial Dossat, S.S.), y de R.G.D. Allen (Mathematical Economics, N. York St. Martin's Press, 1957) autores de quienes se toma, además, algunas demostraciones.

/De esto

De esto se deriva que para identificar una matriz es necesario indicar, además del orden, la ubicación de sus elementos. Ello se efectúa mediante índices que señalan el orden de la línea (fila) y de la columna a que pertenece cada elemento. La matriz (2) se representa así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

El primer subíndice indica la fila contando hacia abajo y el segundo subíndice indica la columna contando hacia la derecha: a_{23} representa el elemento ubicado en la fila 2 y columna 3 y a_{34} el elemento ubicado en la fila 3 y columna 4. Esta sistematización permite simplificar la notación de las matrices del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{para: } \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \text{ y } 4 \end{array} \qquad (4)$$

También es común representar a las matrices por las letras mayúsculas A, B, C, ..., pero en estos casos sería necesario dar por conocido el orden de la matriz, o dar como sobrentendido el significado concreto del conjunto de elementos que contiene.

En síntesis, las siguientes notaciones son equivalentes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = A_{ij} = A \quad (5)$$

$$\text{para: } \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \text{ y } 4 \end{array}$$

En general:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = A_{ij} = A \quad (6)$$

$$\text{para: } \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{array}$$

/En (6)

En (6) se presenta una matriz de m filas horizontales y n columnas. Con frecuencia se representan, también, las matrices indicando explícitamente en los subíndices el número de filas y de columnas. Así, la matriz (5) sería a_{34} y la (6) a_{mn}, o A_{34} y A_{mn}, respectivamente.

3. Matrices rectangulares y cuadradas, vectores y submatrices

Se llama matriz cuadrada la que consta de un mismo número de líneas y de columnas (i = j), por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad i = j = 1, 2, 3 \qquad (7)$$

Matriz rectangular es la que tiene una cantidad distinta de líneas y de columnas (i = j); por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 3 \qquad (8)$$

En general $\left(a_{mn} \right)$ es cuadrada para m = n y es rectangular para m = n.

Las matrices compuestas de una sola fila y de más de un elemento, es decir, que son de un orden 1 x m - para (m 1) - se llaman "vectores filas" y se representan:

$$\left(a_1 \quad a_2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots \ a_m \right) \qquad (9)$$

A su vez, las matrices que constan de una sola columna y varios elementos, o sea, que son de orden m x 1, se llaman "vectores columnas" y se representan, en una u otra, de las formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ : \\ : \\ b_m \end{pmatrix} = \left\{ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \ \cdots\cdots\cdots\cdots \ b_m \right\} \qquad (10)$$

/Es común

Es común, asimismo, indicar los vectores, matrices de una sola fila o de una sola columna, mediante letras minúsculas, así como a las matrices se las representa con letras mayúsculas. Por ejemplo, B es una matriz cuadrada o rectangular, de acuerdo con su orden, en cambio b es el vector columna (10). Cuando se adopta esta última convención es necesario aclarar la notación que se empleará para los vectores filas; se suele resolver ello empleando la misma letra minúscula, pero indicando con un signo especial que los elementos tienen una ordenación transpuesta a la del vector columna.

Así:

$$\begin{aligned} b' &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots & b_m \end{bmatrix} \\ b &= \begin{Bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots & b_m \end{Bmatrix} \end{aligned} \qquad (11)$$

Una matriz de un sólo elemento, o lo que es lo mismo de una sola línea y de una sola columna, representa un número o una función.

Se puede descomponer una matriz en <u>submatrices</u>; estas submatrices de elementos de la matriz dada serán de un orden menor y pueden ser, por lo tanto, rectangulares, cuadradas, vectores o escalares (de un solo elemento).

A continuación se da un ejemplo de una matriz "Particionada" en submatrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots\cdots & a_{110} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots\cdots & a_{210} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots\cdots & a_{310} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots\cdots & a_{410} \end{array}\right] = A_{4.10} \qquad (12)$$

$$A_{4.10} = \left[\begin{array}{cc} A_{22} & A_{28} \\ & Y \\ \hline A_{12} & A_{18} \\ \hline A_{12} & A_{18} \end{array}\right] \qquad (13)$$

/Esta especificación

Esta especificación de submatrices es de particular utilidad en el análisis económico, pues, como se verá más adelante, se utiliza para el estudio de sectores determinados, sin desvincularlos de sus íntimas conexiones con el esquema global.

Por otra parte, desde el punto de vista formal, una matriz puede considerarse como el conjunto ordenado de vectores (filas o columnas).

Así la matriz (12) podría representarse:

$$A_{4.10} = \left\{ A_{(1} \quad A_{(2} \quad A_{(3} \quad A_{(4} \cdots\cdots A_{(10} \right\} \qquad (14)$$

En general, se define a una submatriz como aquella formada por elementos de líneas y columnas de la matriz dada, aunque esas líneas y columnas no sean contiguas. Este apéndice sólo tratará de participaciones de matrces que mantienen la ordenación de los elementos de la matriz total, salvo mención en contrario.

4. Representación matricial de algunos esquemas económicos

Considérese un esquema de contabilidad económica que registra para un período dado las ventas que las entidades productoras realizan a otras entidades productoras, a las familias, al Gobierno y al exterior. Supóngase, por ejemplo, que todas las entidades productoras pueden clasificarse en sectores y que se representan por V_{ij} las ventas que las entidades del sector i hacen al sector j.

Un esquema contable de esta naturaleza es el siguiente:

/Cuadro de

Cuadro de transacciones intersectoriales

(15)

Sectores económicos que efectúan las ventas	Sectores de producción y demás entidades que adquieren los bienes					
	Sectores de producción			Familias $n + 1$	Gobierno $n + 1$	Exterior $n + 3$
	1	2	3 ...n			
1	V_{11}	V_{12}	$V_{13} \ldots V_{1n}$	$V_{1n} + 1$	$V_{1n} + 2$	$V_{1n} + 3$
2	V_{21}	V_{22}	$V_{23} \ldots V_{2n}$	$V_{2n} + 1$	$V_{2n} + 2$	$V_{2n} + 3$
3	V_{31}	V_{32}	$V_{33} \ldots V_{3n}$	$V_{3n} + 1$	$V_{3n} + 2$	$V_{3n} + 3$
4	V_{41}	V_{42}	$V_{43} \ldots V_{4n}$	$V_{4n} + 1$	$V_{4n} + 2$	$V_{4n} + 3$
:	:	:	: ...:	:	:	:
:	:	:	: ...:	:	:	:
n	V_{n1}	V_{n2}	$V_{n3} \ldots V_{nn}$	$V_{nn} + 1$	$V_{nn} + 2$	$V_{nn} + 3$

En la línea 1 se indican las ventas que el sector 1 hace a cada uno de los demás sectores 2, 3, ... n, a las familias, al Gobierno y al exterior; en la línea 2, las ventas de bienes que se originan en el sector económico 2, y así para los demás sectores económicos, hasta la línea n que especifica las ventas de bienes que se originan en el sector n.

El cuadro de transacciones intersectoriales (15) indica que existen ventas intrasectoriales; es decir, que entidades de un sector efectúan transacciones reales con otras entidades que están clasificadas en el mismo sector. Estas transacciones se representan por V_{11}, V_{22}, V_{33} ...... V_{nn}.

En el cuadro se utiliza una notación de carácter general, pero es obvio que algunas de esas transacciones pueden tener un valor absoluto nulo.

Si se da por establecida una clasificación sistemática de las actividades y un orden de ubicación, por ejemplo, el que se indica en (15), podrían tomarse los valores numéricos de ese cuadro para presentarlos en una matriz y realizar luego, las operaciones que exija el análisis, economizando tiempo y esfuerzo mental y asegurándose coherencia en las soluciones.

Se tendría una matriz de transacciones, cuyos elementos representarían valores absolutos de ventas entre los sectores:

$$/V_{n,n+3}$$

$$V_{n,n+3} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots\dots & V_{1n} & V_{1n+1} & V_{1n+2} & V_{1n+3} \\ V_{21} & V_{22} & \dots\dots & V_{2n} & V_{2n+1} & V_{2n+2} & V_{2n+3} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots\dots & V_{nn} & V_{nn+1} & V_{nn+2} & V_{nn+3} \end{pmatrix} \qquad (16)$$

En esta matriz podrían identificarse cuatro submatrices: una submatriz cuadrada de orden n x n que representa los valores de las transacciones entre los sectores de producción.

$$V_{nn} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots\dots\dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots\dots\dots & V_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots\dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots\dots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots\dots\dots & V_{nn} \end{pmatrix} \qquad (16a)$$

Un vector columna que indica las compras de las familias a cada uno de los n sectores económicos.

$$V_{(n+1} = \left\{ V_{1n+1} \quad V_{2n+1} \quad V_{3n+1} \quad \dots\dots \quad V_{nn+1} \right\} \qquad (16b)$$

Un segundo vector columna que indica las ventas al Gobierno

$$V_{(n+2} = \left\{ V_{1n+2} \quad V_{2n+2} \quad V_{3n+2} \quad \dots\dots \quad V_{nn+2} \right\} \qquad (16c)$$

y un tercero y último vector columna que indica las ventas al exterior

$$V_{(n+3} = \left\{ V_{1n+3} \quad V_{2n+3} \quad V_{3n+3} \quad \dots\dots \quad V_{nn+3} \right\} \qquad (16d)$$

La matriz de transacciones intersectoriales (16) puede representarse, en consecuencia, así:

$$V_{n,n+3} = \left(V_{nn} \;\middle|\; V_{(n+1} \;\middle|\; V_{(n+2} \;\middle|\; V_{(n+3} \right) \qquad (17)$$

Otro ejemplo de esquema contable que puede analizarse mediante la operatoria matricial es el del comercio internacional.

Los datos de las exportaciones e importaciones por países se pueden ordenar en una tabla de doble entrada, tomando como referencia, por ejemplo, a las exportaciones. Si se especifican los n países que comprende el mercado internacional, se puede anotar por líneas las exportaciones que un país hace a cada uno de los demás; en las columnas aparecerán las compras (o importaciones) de cada país. El cuadro con las cifras absolutas tendría la siguiente ordenación y las cantidades E_{ij} indican las exportaciones que el país i efectúa al país j.

/Cuadro de

Cuadro de comercio internacional

Países exportadores	Países importadores				
	1	2	3	....	n
1	—	E_{12}	E_{13}	....	E_{1n}
2	E_{21}	—	E_{23}	....	E_{2n}
3	E_{31}	E_{32}	—	....	E_{3n}
:	:	:	:	....	:
:	:	:	:	....	:
n	E_{n1}	E_{n2}	E_{n3}	....	—

Este esquema estadístico podría sistematizarse tratándolo en una matriz de comercio internacional, en la cual podría interesar destacar submatrices que correspondan al comercio de determinados grupos geográficos, políticos, económicos o financieros de países.

$$E_{ij} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & E_{12} & E_{13} & \cdots\cdots & E_{1n} \\ E_{21} & 0 & E_{23} & \cdots\cdots & E_{2n} \\ \hline E_{31} & E_{32} & 0 & \cdots\cdots & E_{3n} \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ \hline E_{n1} & E_{n2} & E_{n3} & \cdots\cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{sr} & E_{sh} & E_{su} \\ \hline E_{tr} & E_{th} & E_{tu} \\ \hline E_{er} & E_{eh} & E_{eu} \end{array}\right) \qquad (19)$$

La matriz podría representarse por sus vectores filas que indican las exportaciones de cada uno de los países; o por sus vectores columnas que indican las exportaciones de los distintos países a un país dado.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} E_{1)} \\ E_{2)} \\ E_{3)} \\ : \\ : \\ : \\ E_{n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{(1} & E_{(2} & E_{(3} & \cdots\cdots\cdots & E_{(n} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

/En la

En la matriz (19) no se registran cifras absolutas en la diagonal principal (la de sentido izquierda derecha) porque es obvio que las exportaciones al mismo país son nulas.

Sin embargo, cabe pensar en un esquema contable de "Producción y comercio internacional" que registrase en cada una de las líneas la "producción final" de cada país y especificase, tal como lo hace el esquema (18), las exportaciones a los demás países.

Una forma de presentación, que no excluye otras, sería la de registrar en las líneas la producción nacional de utilización final, integrada por dos partes: a) demanda final interna de bienes nacionales y b) exportaciones, especificadas según países adquirientes. La demanda final interna (consumo + inversión bruta) se ubicaría en la diagonal principal, en el lugar correspondiente de la línea de cada país.

Ese tipo de esquema sería útil para analizar, en términos comparativos internacionales, producción y comercio exterior.

5. Operaciones de adición y sustracción de matrices

a) Igualdad de matrices

Matrices iguales son las de un mismo orden y de elementos homólogos iguales.

$$A = B$$

si tanto A como B son del mismo orden m x n, y, además, $a_{mn} = b_{mn}$ para todos los valores de m y de n.

b) Suma y sustracción

Para sumar o restar matrices se requiere que las matrices sean del mismo orden. La operación se define como una nueva matriz, cuyos elementos resultan de la suma o resta de los elementos homólogos de las matrices "sumandos":

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & = & C & & \\ \left(a_{ij}\right) & + & \left(b_{ij}\right) & = & \left(c_{ij}\right) & = & \left(a_{ij} + b_{ij}\right) \end{array} \qquad (21)$$

/Ejemplos:

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

6. <u>Operaciones de multiplicación de matrices</u>

<u>Multiplicación escalar:</u> Es la operación por la cual una matriz se multiplica por un número dado (escalar):

$$eA = e \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea_{ij} \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Ejemplos:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 12 & -15 & 0 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La multiplicación escalar produce una nueva matriz, cuyos elementos constituyen el producto de los elementos homólogos de la matriz dada por el escalar.

Se define así, la <u>combinación lineal de matrices</u>, como una suma de matrices con coeficientes escalares.

$$e_1A + e_2B + e_3C = \begin{pmatrix} e_1a_{ij} + e_2b_{ij} + e_3c_{ij} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Ejemplo:

$$2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$$

La multiplicación escalar es conmutativa, o sea, que el resultado no se altera si se modifica el orden de los factores; pero esta propiedad no se verifica en la multiplicación de matrices, salvo en casos especiales.

b) <u>Multiplicación de matrices, caso general</u>

El producto de la multiplicación de matrices es una nueva matriz, cuyos elementos resultan de la multiplicación de los elementos de filas de la matriz que premultiplica por los elementos de cada una de las columnas de la matriz que posmultiplica del modo siguiente:

/1)

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3 & 1 \times 0 + 2 \times 1 = 2 \\ 3 \times 1 + 1 \times 1 = 4 & 3 \times 0 + 1 \times 1 = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x1+1x2 = 3 & 1x0+1x2 = 2 & 1x1+1x0 = 1 \\ 0x1+2x2 = 4 & 0x0+2x2 = 4 & 0x1+2x0 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir que los elementos de la primera fila de la matriz que premultiplica se multiplican, uno a uno, con los elementos de la primera columna de la matriz que posmultiplica, se suman los productos y se obtiene el elemento de la fila 1, columna 1, de la matriz producto. Esos mismos elementos de la primera fila de la matriz multiplicador se aplican a la segunda columna, haciendo las operaciones de multiplicación, elemento con elemento; se suman los productos, y se obtiene un nuevo elemento que se ubica en la segunda columna de la primera fila de la matriz producto. Si se realiza la misma operación con la tercera columna de la matriz que posmultiplica, tal como puede verse en el ejemplo 2, se obtiene un elemento que corresponderá a la primera fila y tercera columna de la matriz producto. Así se irán obteniendo elementos de la primera fila de la matriz producto hasta terminar de operar sobre sucesivas columnas de la matriz que posmultiplica.

Se continúa la operación trabajando con la segunda línea de la matriz que premultiplica. Los elementos de la segunda línea - tómese como referencia el ejemplo 1 - multiplicados por la primera columna de la matriz que posmultiplica y sumados esos productos parciales ($3x1+1x1 = 4$) dan el primer elemento de la segunda fila de la matriz producto. Si se opera sobre la segunda columna se obtiene el elemento de la fila 2 y columna 2 de la matriz producto. En el ejemplo 2, al operar sobre la columna tercera ($0x1 + 2x0 = 0$) se obtiene el elemento de la segunda fila y tercera columna de la matriz producto.

Se comprueba, por lo tanto, que los elementos de la matriz producto aparecen en el orden siguiente: los elementos de la primera fila resultan de operar con la primera fila de la matriz que premultiplica; los de la segunda fila, de las operaciones de la tercera fila de la matriz producto resultan de las operaciones que se efectúan con la tercera fila de la matriz que premultiplica, y así, sucesivamente.

De esto se deduce una primera conclusión: la matriz producto tendrá un número de filas horizontales igual al número de filas de la matriz que premultiplica.

/El orden

El orden de los elementos de cada una de las filas de la matriz producto está dado por el orden de las columnas de la matriz que posmultiplica y sobre las cuales se va operando; el primer elemento --columna 1-- resulta de operar sobre la primera columna de la matriz que posmultiplica; el segundo elemento --columna 2-- resulta de operar sobre la segunda columna; el tercer elemento, hacia la derecha, de una fila de la matriz producto, resulta de operar sobre la tercera columna de la matriz que posmultiplica; y así en adelante.

De esto se deriva una segunda conclusión: el número de columnas de la matriz producto es igual al número de columnas de la matriz que posmultiplica.

En consecuencia, para que la operación de multiplicación se pueda efectuar es condición necesaria que el número de elementos de las filas de la matriz que premultiplica sea igual al número de elementos de las columnas de la matriz que posmultiplica, o, lo que es equivalente, la matriz que premultiplica debe tener un número de columnas igual al número de líneas de la matriz que posmultiplica.

Es conveniente generalizar estos tres requisitos de la operación de multiplicación:

Tómese el caso de un producto C de la matriz A por la matriz B.

$$A \cdot B = C$$

Para que este producto haya podido efectuarse es necesario que en el orden de A, el número de columnas, n, sea igual al número de filas en B. En la matriz C, habrá un número de filas, m, igual al número de filas de A, y el número de columnas de C será igual al número de columnas de B.

Si se indica el orden de las matrices con subíndices que señalan al mismo tiempo el número (absoluto) de líneas y columnas, se puede escribir

$$A_{mn} \cdot B_{nr} = C_{mr} \qquad (24)$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots m$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots r$$

/Si se

Si se asigna a los subíndices el significado que se acaba de señalar es fácil verificar, desde el principio, si dos matrices pueden multiplicarse; pues el segundo subíndice de la matriz A que premultiplica (n) debe ser igual al primer subíndice de la matriz B que posmultiplica.

La primera fila de elemtntos de C se obtiene, según se señaló, multiplicando la primera fila de A por cada una de las columnas de B; esta operación puede indicarse así:

Fila 1 de A por matriz B = Fila 1 de C.

Si se representa con a_{mn}, b_{nr} y c_{mr} los elementos de las matrices se tiene:

$$a_{1)} \cdot b_{(1} = c_{11} = \sum_{1}^{n} a_{1n} b_{n1}$$

$$a_{1)} \cdot b_{(2} = c_{12} = \sum_{1}^{n} a_{1n} b_{n2}$$

$$a_{1)} \cdot b_{(3} = c_{13} = \sum_{1}^{n} a_{1n} b_{n3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{1)} \cdot b_{(r} = c_{1r} = \sum_{1}^{n} a_{1n} b_{nr}$$

Fila 2 de A por la matriz B = Fila 2 de C.

$$a_{2)} \cdot b_{(1} = c_{21} = \sum_{1}^{n} a_{2n} b_{n1}$$

$$a_{2)} \cdot b_{(2} = c_{22} = \sum_{1}^{n} a_{2n} b_{n2}$$

$$a_{2)} \cdot b_{(3} = c_{23} = \sum_{1}^{n} a_{2n} b_{n3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2)} \cdot b_{(r} = c_{2r} = \sum_{1}^{n} a_{2n} b_{nr}$$

/Fila 3

Fila 3 de A por matriz B = Fila 3 de C.

$$a_{3)} \circ b_{(1} = c_{31} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{3n}\, b_{n1}$$

$$a_{3)} \bullet b_{(2} = c_{32} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{3n}\, b_{n2}$$

$$a_{3)} \circ b_{(3} = c_{33} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{3n}\, b_{n3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{3)} \bullet b_{(r} = c_{3r} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{3n}\, b_{nr}$$

Operando con la última fila (m) de A se obtendrá la última fila de C.
Fila (m) de A por matriz B = Fila (m) de C.

$$a_{(m))} \bullet b_{(1} = c_{(m)1} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{(m)n}\, b_{n1}$$

$$a_{(m))} \bullet b_{(2} = c_{(m)2} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{(m)n}\, b_{n2}$$

$$a_{(m))} \circ b_{(3} = c_{(m)3} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{(m)n}\, b_{n3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{(m))} \bullet b_{(r} = c_{(m)r} = \left(\overset{n}{\underset{1}{S}} a_{(m)n}\, b_{nr} \right]$$

Estos desarrollos se pueden escribir en una forma simplificada:

$$A_{mn} \bullet B_{nr} = C_{mr} = \overset{n}{\underset{1}{S}} a_{mn}\, b_{nr} \qquad (25)$$

Para: m = 1, 2, ... m
r = 1, 2, ... r

/Es oportuno

Es oportuno anotar otra propiedad sobre la multiplicación de matrices.

Conforme se acaba de demostrar, cada uno de los elementos de la matriz producto se origina de la multiplicación de una fila de A por una columna de B; en consecuencia, si se particiona la matriz A en submatrices (ordenadas) que representen a cada una de sus filas, y se particiona, a su vez, a la matriz B en submatrices (ordenadas) que representen a sus columnas, y si la matriz C se presenta particionada en submatrices que representan cada uno de sus elementos, la multiplicación de matrices constituye, en sí misma, un caso de multiplicación de matrices particionadas, pues cada elemento de la matriz producto puede considerarse como el resultado de una multiplicación de matrices.

Si se tiene presente la notación que se indicó en párrafos anteriores, la proposición que se acaba de establecer puede representarse así:

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} {}^{A}{}_{1)} \\ {}^{A}{}_{2)} \\ {}^{A}{}_{3)} \\ : \\ : \\ {}^{A}{}_{(m)} \end{bmatrix} ; \quad B_{nr} = \begin{bmatrix} {}^{B}{}_{(1} & {}^{B}{}_{(2} & {}^{B}{}_{(3} & \cdots\cdots\cdots & {}^{B}{}_{(r} \end{bmatrix}$$

$$A_{mn} \cdot B_{nr} = \begin{bmatrix} A_{1)}B_{(1} & A_{1)}B_{(2} & A_{1)}B_{(3} & \cdots\cdots\cdots & A_{1)}\,B_{(r} \\ A_{2)}B_{(1} & A_{2)}B_{(2} & A_{2)}B_{(3} & \cdots\cdots\cdots & A_{2)}\,B_{(r} \\ A_{3)}B_{(1} & A_{3)}B_{(2} & A_{3)}B_{(3} & \cdots\cdots\cdots & A_{3)}\,B_{(r} \\ : & : & : & & : \quad : \\ : & : & : & & : \quad : \\ A_{(m)}B_{(1} & A_{(m)}B_{(2} & A_{(m)}B_{(3} & \cdots\cdots\cdots & A_{(m)}\,B_{(r} \end{bmatrix}$$

/Un razonamiento

Un razonamiento semejante podría efectuarse operando en una forma distinta pero que conduce a idéntico resultado final. Consiste en obtener los elementos de la matriz producto por columnas, en lugar de hacerlo por filas según se ha venido explicando.

7. La propiedad no conmutativa de la multiplicación de matrices

Se demostró que la operación de multiplicación matricial sólo se puede realizar en el caso de que el número de columnas de la matriz que premultiplica es igual al número de líneas de la matriz que posmultiplica.

En consecuencia:

$$A_{mn} \cdot B_{nr} = C_{mr}$$

En cambio, no se puede realizar la multiplicación BA, si el número r de columnas en B es distinto al número m de líneas en A. Sin embargo, la operación podría realizarse en el caso especial de que ambas matrices A y B tuvieran invertidos los subíndices, o sea, que el número de filas de A fuera igual al número de columnas de B, y que, además, el número de columnas de A fuera igual al número de filas de B. Por ejemplo:

$$A_{mn} \cdot B_{nm} = C_{mm}$$

La conmutación de factores:

$$B_{nm} \cdot A_{mn} = C_{nn}$$

Es decir que, en este caso de subíndices invertidos, se puede efectuar la operación de multiplicación, conmutando los factores, pero se obtiene una matriz producto distinta.

Véase un ejemplo numérico:

1)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

/Finalmente, también

Finalmente, también en el caso de que las matrices factores sean cuadradas se puede efectuar la multiplicación con los factores conmutados, pero los resultados (matrices) no tienen necesariamente que ser iguales.

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Queda, pues, demostrada la propiedad general no conmutativa de la multiplicación matricial; por lo cual siempre es necesario señalar si el factor pre o pos multiplica.

8. <u>La matriz unidad y las matrices escalares, diagonales, triangulares y simétricas.</u>

a) <u>Matriz unidad o matriz idéntica</u>

Es la matriz cuadrada, cuyos elementos son nulos, con excepción de los correspondientes a la diagonal principal que son de valor uno. Se representa generalmente con I (i mayúscula latina).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Se suelen utilizar puntos (.) en lugar de cero (0) para indicar los elementos de valor absoluto nulo.

Se llama diagonal principal de una matriz a la indicada por los elementos que desciende del extremo superior izquierdo al extremo inferior derecho.

La matriz unidad puede representarse por:

$$1 = d_{re} \quad ; \quad \text{siendo } d = o \text{ para } r \neq s, \text{ y } d = 1 \text{ para } r = s.$$

b) <u>Vectores unitarios</u>

Se suelen definir como vectores unitarios a aquellos que poseen un elemento de valor absoluto 1 y los demás son ceros. Por ejemplo:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

/Tanto para

Tanto para la matriz idéntica como para los vectores unitarios debe sobreentenderse o indicarse su orden.

Tienen difundida aplicación en el análisis económico los vectores (filas o columnas) de elementos de valor absoluto sino que se suelen simbolizar con la letra i. Por ejemplo:

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

La matriz unidad (I) tiene las mismas propiedades que la unidad en el álgebra conocida. Así, una matriz no se altera, si se pre o multiplica por la matriz unidad, I. Por lo tanto, para este caso especial de multiplicación, se pueden conmutar los factores.

$$AI = A = IA$$

Ejemplos:

1) $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

/4)

4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Véase en los ejemplos 3) y 4) como ha cambiado el orden de la matriz idéntica, en correlación con el orden de las matrices.

De acuerdo con las propiedades de la matriz I, se deduce que se pueden suprimir o incluir las matrices I, sin alterar los resultados.

c) Matrices escalares

Son las matrices cuadradas que tienen un escalar constante en su diagonal principal y nulos todos los demás elementos.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad (30)$$

Se verifica que

$$aI = Ia = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad (31)$$

Es evidente la proposición de que la multiplicación por matrices escalares es conmutativa.

d) Matrices diagonales

Son matrices cuadradas que tienen nulos todos sus elementos excepto los de la diagonal principal. Por lo tanto, estas matrices también se suelen llamar casi escalares. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (32)$$

Las matrices diagonales se suelen representar con la letra D y cuando se trata de un análisis o aplicación específica se suele utilizar la notación concreta que corresponde al significado de los elementos de la diagonal

/principal con

principal con un acento circunflejo. Así $\hat{P}$, puede representar una matriz diagonal de precios, $\hat{X}$ una matriz diagonal de cantidades, etc.

Las matrices diagonales son de uso frecuente en el análisis económico.

Así cuando se necesita multiplicar los elementos de cada una de las líneas de una matriz por un factor constante (que difiere de línea a línea), la operación se puede realizar mediante una premultiplicación con una matriz de constantes d_i,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Si, en cambio, son las columnas de una matriz A las que se desean multiplicar por una constante (que difiere de columna a columna) se puede recurrir a la operación de posmultiplicación por una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & a_{13}d_3 \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & a_{23}d_3 \\ a_{31}d_1 & a_{32}d_2 & a_{33}d_3 \end{pmatrix} \quad (34)$$

La misma operación se puede realizar con un vector fila:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 & a_2d_2 & a_3d_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Es evidente que si el problema consistiese en obtener un vector fila de elementos multiplicados cada uno de ellos por una constante, se trataría simplemente de una multiplicación escalar.

La multiplicación de matrices diagonales entre sí posee la propiedad conmutativa; en cambio (33) y (34) demuestran que esa propiedad no se verifica en la multiplicación de una matriz general por una diagonal.

/Véase el

Véase el caso de multiplicación de matrices diagonales:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_2b_2 & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3a_3 \end{pmatrix}$$

Es decir que se obtiene una nueva matriz diagonal, cuyos elementos resultan del producto de los elementos homólogos de las matrices diagonales factores.

e) <u>Matrices triangulares</u>

Son matrices cuadradas que tienen nulos todos los elementos de un lado de la diagonal principal. Se suelen representar por T.

Ejemplos:

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

El producto de matrices triangulares de igual forma, entre sí, es una nueva matriz triangular, cuya diagonal principal es el producto de los elementos homólogos de las diagonales de las matrices factores.

El producto de estas matrices, no es conmutativo.

Ejemplos numéricos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

/3. 0 0

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Matrices simétricas

Son matrices cuadradas que tienen idénticos sus elementos homólogos, a uno y otro lado de la diagonal principal: $a_{rs} = a_{sr}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \tag{38}$$

g) Matrices antisimétricas

Son matrices cuadradas, en las que se verifica que:

$$\begin{pmatrix} a_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{sr} \end{pmatrix}$$

En consecuencia los elementos de la diagonal principal son necesariamente nulos.

$$\begin{pmatrix} o & b & c \\ -b & o & d \\ -c & -d & o \end{pmatrix} \tag{39}$$

En una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal son necesariamente nulos, en virtud de la definición.

9. Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices

En la multiplicación de tres o más matrices se verifica la propiedad asociativa, en el sentido de que se pueden efectuar productos parciales para obtener el producto total, con la restricción de que se debe mantener el orden de la pre y posmultiplicación.

$$ABC = E = A(BC) = (AB)C \tag{40}$$

$$ABCD = E = A(BCD) = (AB)\ (CD) = (ABC)D$$

$$A(BC.D) = A(B.CD) = (AB.C)D = (A.B$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 14 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 61 \\ 13 \end{pmatrix}$$

/= 2 1

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 61 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Véase en este ejemplo numérico como se origina un caso especial en que el orden de los factores matriciales no altera el producto.

10. Propiedad distributiva de la multiplicación de matrices con respecto a la suma

Lo mismo que en el álgebra conocida, se resuelve la siguiente operación matricial:

$$(A + B)C = AC + BC \tag{41}$$

Sin embargo, el orden de los factores no debe alterarse. De modo que el resultado anterior, en general, no es igual a

$$C(A + B) = CA + CB$$

11. La prueba en la multiplicación de matrices.

Si, cuando se hace la operación $A.D = C$, se aumenta el número de filas de la matriz A con una nueva fila, cuyos elementos representan la suma, por columnas, de los elementos de la matriz A; y, por otra parte, se agrega una columna a la matriz B, cuyos elementos constituyen la suma, por filas, de los elementos de la matriz B; se obtendrá la misma matriz C, con una línea y una columna adicionales. Los elementos de la línea adicional representarán la suma por columnas de los elementos de la matriz C, y los elementos de la columna adicional representarán la suma, por líneas, de los elementos de la matriz C.

/Ejemplo:

Ejemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 5 \quad 4 \quad 3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ 14 \quad 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ 26 \end{array} \qquad (42)$$

12. Intercambio de líneas y columnas de una matriz

a) Se define una matriz $E_{(rs)}$ que se obtiene de la matriz unidad intercambiando las filas "r" y "s".

$E_{(31)}$ procede de la matriz I llevando la fila I al lugar de la fila 3, y, a la vez, la fila 3 al lugar de la I. De ello se deduce que la matriz es, por lo menos, de orden 3.

$$E_{(31)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (43)$$

Se comprueba que $E_{(31)}$ es simétrica y que, además, en relación con la matriz I, tiene intercambiadas las columnas 3 y 1.

Véanse demostradas estas propiedades en una matriz de orden 4.

$$E_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La operación de intercambio de líneas y columnas de una matriz se efectúa aplicando las matrices $E_{(rs)}$.

El intercambio de líneas, pre multiplicando, y el intercambio de columnas, pos multiplicando.

Véase la solución del problema intercambiar las líneas y las columnas 2 y 3 de la matriz A:

1 0 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \tag{44}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix}$$

13. <u>Combinación de lineal de líneas y columnas</u>

a) Se define una matriz $H_{(rs)}$ que procede de I reemplazando el elemento nulo r,s por una cantidad h

$$H_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

b) Las matrices H son operadores que premultiplicados a una matriz realizan la operación de adicional a una línea combinaciones lineales de otras y que posmultiplicando por sus traspuestas hacen el mismo trabajo con las columnas.

Considérese el problema de agregar a la línea dos de la matriz A, h veces la línea 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-ha_{31} & a_{22}-ha_{32} & a_{23}-ha_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{46}$$

/Véase la

Véase la solución del mismo problema con respecto a las columnas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+ha_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ha_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ha_{33} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (47)$$

Ejemplo numérico:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Pueden generalizarse las matrices H para realizar las operaciones de combinación lineal con cualquier número de líneas y columnas. Por ejemplo:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 1 & h_3 \\ h_4 & h_5 & 1 \end{pmatrix} \qquad (48)$$

La premultiplicación por H de una matriz A_{33} origina una nueva matriz, cuyas líneas significan:

i) la primera línea será: una suma de la primera línea de A más h_1 veces la segunda línea y h_2 veces la tercera línea.

ii) la segunda línea: una suma de la segunda línea de A más h_3 veces la tercera línea de A, y

iii) la tercera línea: una suma de la tercera línea de A más h_4 veces su primera línea y h_5 veces su segunda línea.

A continuación se incluye un ejemplo que consiste en obtener una nueva matriz, cuyas:

/a) primera

a) primera línea, resulta de una resta de la primera con la segunda.

b) segunda línea, se mantiene inalterable, y

c) tercera línea, resulta de una resta de la tercera con la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Es útil comprobar la ubicación que tiene el factor h en la matriz H. En efecto, está en la línea que se ha de modificar y en el lugar 1, 2, ...n que corresponde con las líneas 1, 2, 3, ... n que se han de combinar (adicionar) con la línea dada.

14. Multiplicación específica de líneas o columnas por un escalar

a) Se definen matrices $K_{(r)}$ obtenidas de la matriz I, sustituyendo el elemento 1 de la fila r por una cantidad k.

$$k_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (49)$$

Las matrices K se utilizan para obtener matrices, procedentes de la A, cuyas líneas o columnas son productos escalares de las líneas o columnas de la A.

Véase un ejemplo de multiplicación de la primera línea:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (50)$$

Véase, ahora, la multiplicación de la primera columna de A.

/(51)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}k & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}k & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (51)$$

La generalización de matrices K en matrices diagonales K permite, efectuar la operación de multiplicar líneas o columnas por cantidades determinadas.

Ejemplo numérico:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (3x2) & (1x3) & (9x4) \\ (1x2) & (1x3) & (1x4) \\ (0x2) & (2x3) & (0x4) \end{pmatrix}$$

15. <u>Reducción del orden de la matriz mediante suma de líneas y columnas</u>

a) una forma particular de matrices H permite, mediante la operación de multiplicación, transformar una matriz en otra cuyas líneas y columnas resultan de adiciones de líneas y columnas de la primera.

b) Sea una matriz A_{44} que se desea transformar en otra matriz A_{24} cuya primera línea adicione la primera y segunda de A_{44} y cuya segunda línea adicione la tercera y cuarta de A_{44}. La solución es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} \quad (52)$$

c) Si la matriz A_{44} se desea transformar en otra matriz A_{42} cuya primera columna adicione la primera y segunda de A_{44}, y cuya segunda columna adicione la tercera y cuarta de A_{44}; la solución se logra posmultiplicando por la matriz transpuesta que se utilizó en la operación anterior:

/(53)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} \qquad (53)$$

d) Las matrices que realizan esta operación pueden adaptarse para efectuar cualquier combinación de líneas o columnas.

e) Si el problema consiste en combinar a la vez líneas y columnas homólogas en una segunda matriz de orden reducido, se selecciona la matriz H de este tipo para efectuar la adición de líneas y luego se posmultiplica por la transpuesta.

El ejemplo anterior ilustra este caso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \qquad (54)$$

f) De este ejemplo pueden deducirse las propiedades de estas matrices H referidas a la que premultiplica:

i) El número de líneas es igual al número de líneas de la matriz reducida que se deba obtener y el número de columnas es igual al número de líneas de la matriz de que se parte.

ii) Sus elementos son nulos o unitarios. Los elementos unitarios se ubican en cada línea en un orden concordante con las líneas que se desean sumar para construir la matriz agregada.

Asíñ si la primera línea de la matriz H es:

1 0 1 0 1

resultará una suma de las líneas 1) + 3) + 5) de A para construir la primera línea de la matriz agregada.

Si la segunda y última línea de H es

0 1 0 1 0

/indicará que

indicará que se suman la segunda y cuerta línea de A para construir la segunda línea de la matriz agregada.

iii) La suma de la (1 (3 y (5 columna de A que origina la primera columna de la matriz agregada y la suma de la (2 y (4 columnas de A que crean la segunda columna de la matriz agregada, se logra posmultiplicando por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la transpuesta de la que premultiplica.

16. <u>Agregación o combinación de cuenta de una matriz de transacciones</u>

La operación anterior se puede aplicar en la contabilidad económica para establecer cuentas que adicionen transacciones de entidades que se agrupan en clases definidas según determinados criterios.

Sea, por ejemplo, T una matriz de transacciones de entidades, cuyas líneas comprenden los elementos de las corrientes que se originan en la entidad y afluyen en las n-1 restantes, las de T_{nn} indicarán, a la vez, las afluencias a cada entidad.

Si el problema consiste en adicionar diversas líneas y columnas para establecer las cuentas combinadas de ciertas clases de entidades, en una matriz T_{sr} de clases o sectores de entidades, la solución es:

$$H_{sn} \quad T_{nn} \quad H_{ns} = T_{ss} \tag{55}$$

a) <u>Obtención de la matriz de insumo producto partiendo de la matriz de contabilidad económica</u>

De acuerdo con lo explicado en el capítulo IV, de una matriz de contabilidad económica, cuyo extremo superior izquierdo contiene una sub-matriz de orden n x n que representa las cuentas de producción y m líneas y columnas subsiguientes que representan las cuentas de ingreso y capital, se puede derivar la matriz de insumo producto adicionando en una línea y en una columna, respectivamente, las m cuentas mencionadas.

/Para efectuar

Para efectuar esa operación debe premultiplicarse por una matriz H del tipo siguiente:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Es decir una matriz que puede particionarse así:

$$H = \begin{pmatrix} I_{nn} & 0_{nm} \\ \hline 0_{1n} & I_{1m} \end{pmatrix} \quad (57)$$

Su transpuesta de pos-multiplicaciones

$$H' = \begin{pmatrix} I_{nn} & 0_{nl} \\ \hline 0_{mn} & I_{ml} \end{pmatrix} \quad (58$$

A su vez, la matriz de contabilidad económica puede representarse por una matriz T de orden (n+m) x (n+m):

$$T = \begin{pmatrix} T_{nn} & T_{nm} \\ \hline T_{mn} & T_{mm} \end{pmatrix} \quad (59)$$

La determinación de la matriz de insumo-producto resulta de la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} I_{nn} & 0_{nm} \\ \hline 0_{1n} & I_{1m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{nn} & T_{nm} \\ \hline T_{mn} & T_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{nn} & 0_{nl} \\ \hline 0_{mn} & I_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{nn} & T_{nl} \\ \hline T_{1n} & T_{11} \end{pmatrix} \quad (60)$$

/b) Obtención

b) <u>Obtención de la matriz de cuentas nacionales partiendo de la matriz de contabilidad económica</u>

El problema consiste en este caso en adicionar en una sóla línea y en una sóla columna las corrientes reales que en la matriz (59) de transacciones se representan en el extremo superior izquierdo T_{nn}.

La matriz de adición de líneas que premultiplicará es:

$$H = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \cdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 1 \end{array}\right) \qquad (61)$$

Esta matriz H se particiona:

$$H = \left(\begin{array}{cc} I_{1n} & O_{1m} \\ \hline O_{mn} & I_{mm} \end{array}\right) \qquad (62)$$

La matriz H' que posmultiplica es:

$$H' = \left(\begin{array}{cc} I_{n1} & O_{nm} \\ \hline O_{m1} & I_{mm} \end{array}\right) \qquad (63)$$

La operación de obtención de las cuentas nacionales es en consecuencia:

$$\left(\begin{array}{cc} I_{1n} & O_{1m} \\ \hline O_{mn} & I_{mm} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} T_{nn} & T_{nm} \\ \hline T_{mn} & T_{mm} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} I_{n1} & O_{nm} \\ \hline O_{m1} & I_{mm} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} T_{11} & T_{1m} \\ \hline T_{m1} & T_{mm} \end{array}\right) \qquad (64)$$

/17. Análisis

17. Análisis de precios y cantidades en las transacciones intersectoriales

Una matriz de valores de transacciones intersectoriales puede expresarse mediante una multiplicación matricial de los factores precios y cantidades:

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & 0 & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}P_1 & C_{13}P_1 & \cdots & C_{1n}P_1 \\ C_{21}P_2 & 0 & C_{23}P_2 & \cdots & C_{2n}P_2 \\ C_{31}P_3 & C_{32}P_3 & 0 & \cdots & C_{3n}P_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{n1}P_n & C_{n2}P_n & C_{n3}P_n & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (65)$$

La matriz producto del segundo miembro podría indicar en cada una de sus filas (líneas horizontales) el valor de la venta de un bien a cada una de las n entidades del sistema estudiado. En el primer miembro la matriz que premultiplica incluye en su diagonal principal los precios de venta de cada uno de los n bienes y los elementos de la matriz que posmultiplica representan las cantidades (físicas) vendidas. La matriz de precios que contiene elementos de valor absoluto nulo con excepción de los ubicados en la diagonal principal es una matriz diagonal. En notación más abreviada, la operación anterior se puede representar así:

$$\hat{P}_n \cdot C_{nn} = V_{nn} \qquad (66)$$

/Si se

Si se deseara obtener las sumas totales de las ventas en cada uno de los sectores, sólo habría que posmultiplicar cada uno de los miembros de la igualdad por un vector columna de 1 que tuviera una extensión de orden n, o sea:

$$\hat{P}_n \cdot C_{nn} i = V_{nn} i \qquad (67)$$

Es interesante observar cómo puede resolverse la multiplicación de tres factores del primer miembro, aplicando la propiedad asociativa.

$$\hat{P}_n \cdots (C_{nn} i) = \hat{P}_n C_{nn} i$$

$$C_{nn} i = \begin{pmatrix} C & C_{12} & C_{13} & \cdots\cdots & C_{1n} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & \cdots\cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & 0 & \cdots\cdots & C_{3n} \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots\cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ : \\ : \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{1}^{n} C_{ij} \\ \sum_{1}^{n} C_{2j} \\ \sum_{1}^{n} C_{3j} \\ : \\ : \\ \sum_{1}^{n} C_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_n C_{nn} i = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots\cdots & 0 \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{1}^{p} C_{1j} \\ \sum_{1}^{n} C_{2j} \\ \sum_{1}^{n} C_{3j} \\ : \\ : \\ \sum_{1}^{n} C_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \sum_{1}^{n} C_{1j} \\ P_2 \sum_{1}^{n} C_{2j} \\ P_3 \sum_{1}^{n} C_{3j} \\ : \\ : \\ P_n \sum_{1}^{n} C_{nj} \end{pmatrix}$$

/Está demás

Está demás decir que este análisis presupone que cada uno de los bienes son objetos homógenos cuyas cantidades se pueden sumar y multiplicar por un precio idéntico.

Si se deseara obtener una matriz del valor de las transacciones intersectoriales que registrara además los totales por columna (compras de cada sector) y por filas (ventas de cada sector) la operación de multiplicación de precios por cantidades debiera ordenarse así:

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & P_n \\ P_1 & P_2 & P_3 & \cdots\cdots & P_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & \cdots\cdots & C_{1n} & \sum_{1}^{n} C_{1j} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & \cdots\cdots & C_{2n} & \sum_{1}^{n} C_{2j} \\ C_{31} & C_{32} & 0 & \cdots\cdots & C_{3n} & \sum_{1}^{n} C_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots\cdots & \cdot & \sum_{1}^{n} C_{nj} \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & C_{12}P_1 & C_{13}P_1 & \cdots\cdots\cdots & C_{1n}P_1 & \sum^{n} C_{ij}P_1 \\ C_{21}P_2 & 0 & C_{23}P_2 & \cdots\cdots\cdots & C_{2n}P_2 & \sum_{1}^{n} C_{2j}P_2 \\ C_{31}P_3 & C_{32}P_3 & 0 & \cdots\cdots\cdots & C_{3n}P_3 & \sum_{1}^{n} C_{3j}P_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ C_{(n)1}P_{(n)} & C_{(n)2}P_{(n)} & C_{(n)3}P_{(n)} & \cdots\cdots\cdots & 0 & \sum_{1}^{n} C_{(n)j}P_{(n)} \\ \sum_{1}^{n} C_{i1}P_i & \sum_{1}^{n} C_{i2}P_i & \sum_{1}^{n} C_{i3}P_i & \cdots\cdots\cdots & \sum_{1}^{n} C_{i(n)}P_i & \sum_{11}^{nn} C_{ij}P_i \end{pmatrix}$$

/18. Determinación

18. <u>Determinación del producto bruto total en una economía cerrada</u>

a) La determinación analítica del producto bruto de una economía cerrada puede efectuarse operando de dos maneras:

Un procedimiento consiste en restar de los valores de producción bruta de cada sector las ventas de utilización intermedia y sumar las diferencias. Estas diferencias representan las ventas de cada sector para consumo e inversión.

El primer paso es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots\cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots\cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

El vector x representa la producción bruta (sectorial) de cada uno de los bienes. La matriz X_{nn} indica las ventas a los sectores de producción. El vector unidad i opera sumando los elementos de cada una de las filas de la matriz. El vector y representa, en consecuencia, las ventas sectoriales a la demanda final (consumo e inversión bruta).

El segundo paso consistiría en sumar las ventas de demanda final para llegar al <u>producto bruto</u> (total). Esta operación se efectúa premultiplicando por un vector fila de elementos unitarios $i' = 111 \ldots 1$

En símbolos abreviados:

$$i' (x - Xi) = i'y$$

/b) Otro

b) Otro modo de operar consiste en efectuar la sustracción del monto de los insumos de bienes del valor de la producción de cada sector. El desarrollo de la fórmula es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 111 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ : \\ : \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{n2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{n3} \\ : & : & : & \cdots & : \\ : & : & : & \cdots & : \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ : \\ : \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 111 & \ldots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ : \\ : \\ v_n \end{pmatrix} \qquad (70)$$

La matriz cuadrada n x n tiene filas y columnas ordenadas en forma transpuesta con relación a la matriz de transacciones intersectoriales. Cada una de sus filas indica - ahora- los insumos de cada sector, de tal modo que la diferencia entre el valor de la producción y los insumos representa el valor agregado sectorial que se indica por el vector (columna) v.

La ecuación (70) puede expresarse en forma abreviada así:

$$i' \,(x - x'i) \;= i'v \qquad (71)$$

Ahora bien, se sabe que para el conjunto de una economía cerrada:

$$i'v = i'y \qquad (72)$$

En consecuencia, si se comparan las ecuaciones (69) y (71) se obtiene:

$$i' \,(x - Xi) = i' \,(x - X'i) \qquad (73)$$

Es interesante analizar esta ecuación (73). En el paréntesis del primer miembro se obtiene un vector (columna) cuyos elementos representan las ventas para utilización final; el paréntesis del segundo miembro, a su vez, indica otro vector columna de elementos que representan valores agregados sectoriales.

De acuerdo con las reglas del álgebra "conocida" se estaría tentado a eliminar de cada uno de los miembros los vectores idénticos i'que premultiplican. De ello seguiría que los dos vectores que incluyen los

/paréntesis serían

paréntesis serían iguales y, en consecuencia, sus elementos homólogos también; lo que significaría que las ventas sectoriales para utilización final serían iguales a los valores agregados de cada uno de los idénticos sectores.

Es obvio, lo incorrecto de esta conclusión, no obstante el aparente rigor del método de deducción. Sin embargo, debe anticiparse que los vectores i´no pueden eliminarse en el álgebra de matrices, como se lo haría en el álgebra conocida. No existe una inversa de estos vectores, o lo que es lo mismo no se puede efectuar la operación de división por esos vectores. Este ejercicio es de interés en el análisis de la contabilidad económica porque demuestra una equivalencia para el conjunto de la economía que no se verifica en cada uno de sus sectores de actividad.

El primer procedimiento a) de determinación analítica del producto interno de una economía cerrada puede expresarse de otro modo, como se demuestra a continuación.

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 111 \cdots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & \cdots X_{n2} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & \cdots X_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \cdots X_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \tag{74}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 y_2 y_3 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

/La expresión

La expresión abreviada de (74) es:

$$(x' - i\ 'X)\ i = y'i \qquad (75)$$

En este caso especial, es evidente que si se suprime el vector (columna) i quedarían en cada uno de los miembros vectores filas cuyos elementos homólogos son iguales, y, en consecuencia, también lo son los vectores; pero - es conveniente repetir - ello no significa que se pueda dividir por i cada uno de los miembros. Se verá más adelante en que condiciones se efectúa la operación de división de matrices.

Por otra parte es de interés formal y conceptual comparar las ecuaciones (75) y (69); se verá más adelante que una puede derivarse de la otra de un modo directo mediante la llamada operación de transposición.

19. Definición y notación de determinantes

Se suele definir al determinante como la función única de una matriz; si se toma como ejemplo, a una matriz cuyos elementos son números absolutos, el determinante de esa matriz es un escalar.

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Su determinante: $(A) = 1 \times 5 - 4 \times 3 = -7$

En general dada una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ : & : & : & \cdots\cdots & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$|A| = S \pm a_{1A}\ a_{2B} \cdots\cdots a_{nZ} \qquad (76)$$

O sea, una suma de factor real n (n!) de términos. Estos términos constan de n elementos de la matriz. Cada uno de ellos se forma mediante permutaciones de elementos de líneas y columnas en la forma

/señalada por

señalada por la expresión (76). Es decir que en cada sumando hay un elemento de cada línea, seleccionando entre los n! sumandos, según las permutaciones que se pueden efectuar con el orden progresivo de las columnas: 1, 2, 3, ... n, representadas en la expresión (76) por A, B, ...Z.

Si se toma una matriz cuadrada de orden 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Su determinante tendrá 2 términos que se construirán sobre la base de: a_{1A} a_{2B}. Las letras A y B indican las permutaciones para las columnas 1 y 2.

En consecuencia los términos son:

$$a_{11}\ a_{22}\ ;\ a_{12}\ a_{21}$$

Los signos positivo y negativo de cada uno de los términos se determinan así: Si el número de inversiones de los segundos subíndices A, B .... Z es par le corresponde el signo positivo; si es impar se le asigna el signo negativo._7 /_El orden par o impar de una permutación se determina por el número de lugares en que se encuentran desplazadas las columnas con respecto a su orden natural. En el caso especial de que no hay inversión alguna se asigna el signo positivo.

a_{11} a_{22} : lleva signo positivo

a_{12} a_{21} : tiene una inversión o transposición de orden 1; o sea impar, y llevará el signo negativo.

En consecuencia:

$$\left| A \right| = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

/Una consecuencia

Una consecuencia directa de la definición de determinantes es la de que ellos sólo existen para matrices cuadradas.

Considérese el determinante de una matriz cuadrada de orden 3.

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = S \pm a_{1A} \; a_{2B} \; a_{3C} \qquad (77)$$

Las permutaciones de A, B, C: 1, 2, 3 son las siguientes:

(+) 1 2 3	(-) 1 3 2
(+) 3 1 2	(-) 2 1 3
(+) 2 3 1	(-) 3 2 1

$$A = + a_{11} \, a_{22} \, a_{33} + a_{13} \, a_{21} \, a_{32} + a_{12} \, a_{23} \, a_{31}$$
$$- a_{11} \, a_{23} \, a_{32} - a_{12} \, a_{21} \, a_{33} - a_{13} \, a_{22} \, a_{31}$$

El número de términos de la sumatoria es igual al número de permutaciones que se pueden efectuar con n elementos, o sea n!. El número de sumandos positivos son $\frac{n!}{2}$ y los sumandos negativos son $\frac{n!}{2}$

20. Desarrollo de la determinante en términos de cofactores

a) Determinantes menores complementarios

Son los que se obtienen mediante la eliminación de una línea y una columna de un determinande dado,

Sea el determinante

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (78)$$

Si se suprime la línea 1 y columna 1, cuya intersección es a_{11}, se obtiene:

$$|M_{11}| = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (79)$$

/Si se

Si se suprime, línea 2, columna 2, cuya intersección es a_{22}, se obtiene:

$$\left| M_{22} \right| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

b) Cofactores adjuntos

Son los menores de un determinante con un signo (+) o (-) según que la suma de los subíndices sea par o impar

$$\left| A_{sr} \right| = -1^{(s+r)} \left| M_{sr} \right| \qquad (80)$$

c) El valor de un determinante se establece mediante la suma de los productos de los elementos de una línea o columna por sus correspondientes factores

$$\left| A \right| = S_{1}^{n} a_{rs} \left| A_{rs} \right| \qquad (81)$$

Ejemplo (1):

$$\left| A \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Se puede calcular tomando como base de cofactores la línea 1.

$$\left| A \right| = 2 \times 0 + 1 \times 1 \; (-1^{1+2}) = 0 - 1 = -1$$

Ejemplo (2):

$$\left| A \right| \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Se aplicará la fórmula (81), pero en lugar de desarrollar el cálculo por una línea, se lo hará por una columna. Se tomará la columna (3) pues en este caso, simplifica las operaciones.

$/ A = 0(-1^{1+3})$

$$|A| = 0(-1^{1+3}) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\,(-1^{2+3}) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\,(-1^{3+3}) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Se comprueba que los términos primero y tercero son nulos.

$$|A| = -\left\{ 3x2 + 1x1\ (-1^{2+1}) \right\} = -(6-1) = -5$$

Para determinantes de 2° y 3° orden existen reglas prácticas para efectuar el cálculo.

21. Cálculo de determinantes de segundo y tercer orden

Los determinantes de segundo orden se calculan mediante la diferencia de dos productos algebraicos: el minuendo es el producto algebraico de los elementos de la diagonal principal, y el sustraendo es el producto de los dos elementos de la otra diagonal.

Así por ejemplo

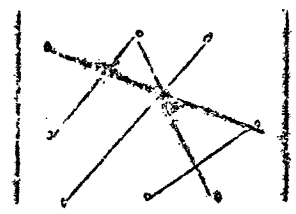
$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-2x4) - (-1x3) = -8-(-3) = -5$$

Los determinantes de tercer orden se calculan mediante la regla de Sarrus. Los tres términos con signos positivos son los productos algebraicos que se obtienen:

a) con los elementos de la diagonal principal, y
b) con los elementos de las diagonales paralelas a la principal y el del vértice opuesto, según se indica a continuación:

Los tres términos con signos negativos se obtienen:

a) con los elementos de la diagonal secundaria, y
b) con los elementos de las diagonales paralelas a la diagonal secundaria y el elemento del vértice opuesto, según se indica a continuación:



Ejemplo numérico de cálculo de un determinante de orden tercero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = + (1.1.3) + (0.1.0) + (2.1.3) - (0.1.3) - (-2.0.3) - (1.1.1)$$

$$= 3 + 0 - 6 - 0 - 0 - 1 = -4$$

22. Propiedades de los determinantes

a) Los determinantes de matrices transpuestas son iguales

$$|A| = |A'|$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad |A'| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = 2 \neq 0 \neq 0 - 3 - 0 - 0 = -1$$

$$A' = 2 \neq 0 \neq 0 - 3 - 0 - 0 = -1$$

b) Si se invierten líneas o columnas el determinante no cambia su valor absoluto; sólo su signo cuando la inversión es impar.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \qquad (83)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad -3 = -1$$

/El determinante

El determinante B se ha obtenido del determinante A llevando la primera fila debajo de la fila 2, o sea, efectuando una inversión y después llevando la tercera fila al lugar de la primera, o sea, mediante 2 inversiones; en total se han efectuado 3 inversiones; el mismo número de inversiones se efectuó con el determinante B para obtener C, mediante el intercambio de la primera y tercera columnas. Véanse otros ejemplos:

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = + 1$$

El D se obtuvo de A mediante dos inversiones de su tercera columna y su valor no se ha alterado. E se obtuvo de B mediante dos inversiones de su tercera fila y su valor absoluto tampoco se ha alterado.

c) Una consecuencia del lema b) es que un determinante que tiene iguales los elementos de dos líneas o columnas es de valor absoluto cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 -2 = 0 \qquad (84)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 2 -12 = 0$$

d) Una propiedad general que incluye a la propiedad c) dice que es nulo todo determinante que tenga una línea o columna cuyos elementos son una combinación lineal de otras líneas o columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 4 -4 = 0 \qquad (85)$$

/La tercera

La tercera fila de A es equivalente al doble de la primera fila más la segunda.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

La tercera fila de A es una combinación lineal de la primera y segunda.

e) El determinante de una matriz diagonal se reduce a un sólo término (afectado de signo positivo) constituído por el producto algebraíco de los elementos de la diagonal principal.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -24 \qquad (86)$$

El determinante de la matriz unitaria I es 1, y el determinante de la matriz diagonal de orden n: $aI = a^m$.

f) El determinante de una matriz producto escalar de orden n es igual al determinante de la matriz multiplicado por una potenciación n del escalar.

$$|ha| = h^n \ |A|$$

$$|B| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad (87)$$

$$|B| = 2^3 \ |A| = 8\ (-1) = -8$$

$$|B| = 16 - 24 = -8$$

Esta propiedad puede utilizarse para simplificar el cálculo de determinantes.

g) El determinante de una matriz producto de otras cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices factores.

/ $|A \ B \ C \ldots\ldots|$

l) Un determinante puede expresarse como suma de otros determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & 1+1 & 0+0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad (93)$$

$$|A| = 3 = (6 - 3) + (3 - 3)$$

Esta propiedad suele utilizarse para abreviar el cálculo de determinantes, como se demuestra en el ejemplo precedente.

La primera línea de $|A|$ se expresa por sumandos parciales y el determinante se expresa luego como suma de dos determinantes que tienen las mismas filas 2a. y 3a. de $|A|$; en tanto que la primera fila está constituída en cada uno de los determinantes por los elementos parciales sumandos de la fila que se desagregó en el determinante $|A|$.

En el ejemplo (93) uno de los determinantes parciales es nulo, porque tiene dos filas idénticas.

m) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 5 = 10 \qquad (94)$$

La demostración es evidente si el determinante se desarrolla por columnas.

n) Son equivalentes los determinantes de matrices diagonales y triangulares, que tienen elementos de valor absoluto igual en la diagonal principal; aunque no lo sean los homólogos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad (95)$$

o) Es nula la suma de los productos de una línea o columna de un determinante por cofactores ajenos.

r
/Sa nr
n

$$\sum_{1}^{r} a_{nr} \quad A_{sr} = 0 \; ; \quad \text{para} \quad n \neq s \qquad (96)$$

$$\sum_{1}^{n} a_{nr} \quad A_{ns} = 0 \; ; \quad \text{para} \quad r \neq s$$

Ejemplo:

$$\left| A \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si se multiplica los elementos de la primera columna por los cofactores de la tercera columna, se obtiene:

$$2 \times 3 + 3 \times (-1) + 1 \times (-3) = 6 - 3 - 3 = 0$$

23. <u>Cálculo general de determinantes</u>

El desarrollo de los determinantes por el método de los cofactores y las propiedades que se enuncian en el apartado precedente se utilizan para abreviar el cálculo de determinantes. Ello es útil - en particular - para determinantes de orden mayor de 3, pues para los de orden menor se aplican las reglas conocidas. El método consiste en simplificar los valores absolutos de los elementos hasta llevar una línea o columna del determinante a valores nulos excepto uno de ellos con valor uno. De este modo un determinante de orden n puede calcularse mediante otro determinante de orden (n-1); este es el procedimiento conocido por el nombre de Chio.

Véase un caso de simplificación, sea el determinante A

$$\left| A \right| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

/a) Si

a) Si se resta a la primera línea la cuarta se obtiene, sin alterar el valor.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & -6 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

b) Se puede dividir la tercera columna por 2 y multiplicar por 2

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

c) A la cuarta columna puede sumársele (-3) veces la tercera sin alterar el valor del determinante.

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -6 \\ 5 & 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

d) El determinante puede calcularse por desarrollo de cofactores de la primera línea, aprovechando, ahora, la circunstancia de que, excepto uno, todos los elementos son nulos.

$$|A| = 2 \left\{ -2 \; (-1^{1+3}) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$|A| = \{2 \; -2 \, (-6 \; -120 \; + \; 108 \; + \; 16)\} \; = \; 8$$

La regla general de Ohio para reducir el orden del determinante puede expresarse así:

a) Escoger una línea y columna del determinante cuya intersección tenga un elemento de valor absoluto 1; si no existe transformar el determinante en otro de igual orden dividiendo una línea por uno de sus

/elementos y

elementos y multiplicando al determinante por ese elemento.

b) Operar, luego, de tal modo que los demás elementos de la línea se hagan nulos.

c) Calcular el determinante mediante el cofactor (transformado) del elemento 1.

Las operaciones que se requieren son las siguientes.

Sea el A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Supóngase que se elige a_{13} como elemento pivotal

$$|A| = a_{13} \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{a_{13}} & \frac{a_{12}}{a_{13}} & 1 & \frac{a_{14}}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad (97)$$

Tómese $\frac{a_{11}}{a_{13}} = \alpha_{11}$; $\frac{a_{12}}{a_{13}} = \alpha_{12}$; $\frac{a_{14}}{a_{13}} = \alpha_{14}$ (98)

El determinante puede transformarse dividiendo cada una de las columnas por su correspondiente α en:

$$/A = a_{13}\, \alpha_{11}\, \alpha_{12}\, \alpha_{14}$$

$$A = a_{13}\,\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{14}\left|\begin{array}{cc:c:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \dfrac{a_{21}}{\alpha_{11}} & \dfrac{a_{22}}{\alpha_{12}} & a_{23} & \dfrac{a_{24}}{\alpha_{14}} \\ \dfrac{a_{31}}{\alpha_{11}} & \dfrac{a_{32}}{\alpha_{12}} & a_{33} & \dfrac{a_{34}}{\alpha_{14}} \\ \dfrac{a_{41}}{\alpha_{11}} & \dfrac{a_{42}}{\alpha_{12}} & a_{43} & \dfrac{a_{44}}{\alpha_{14}} \end{array}\right| \tag{99}$$

De cada una de las columnas se resta la columna pivotal y el determinante no se altera

$$A = a_{13}\,\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{14}\left|\begin{array}{cc:c:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \dfrac{a_{21}}{\alpha_{11}} - a_{23} & \dfrac{a_{22}}{\alpha_{12}} - a_{23} & a_{23} & \dfrac{a_{24}}{\alpha_{14}} - a_{23} \\ \dfrac{a_{31}}{\alpha_{11}} - a_{33} & \dfrac{a_{32}}{\alpha_{12}} - a_{33} & a_{33} & \dfrac{a_{34}}{\alpha_{14}} - a_{33} \\ \dfrac{a_{41}}{\alpha_{11}} - a_{43} & \dfrac{a_{42}}{\alpha_{12}} - a_{43} & a_{43} & \dfrac{a_{44}}{\alpha_{14}} - a_{43} \end{array}\right| \tag{100}$$

Los factores que multiplican al determinante se pueden introducir teniendo en cuenta que son cocientes (véase ecuaciones (98) de los elementos de la línea pivotal y el elemento pivote a_{13}, de tal modo que se obtiene:

$$|A| = a_{13}\left|\begin{array}{cc:c:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_{21} - a_{23}\,\alpha_{11} & a_{22} - a_{23}\,\alpha_{12} & a_{23} & (a_{24} - a_{23}\,\alpha_{14}) \\ a_{31} - a_{33}\,\alpha_{11} & a_{32} - a_{33}\,\alpha_{12} & a_{33} & (a_{34} - a_{33}\,\alpha_{14}) \\ a_{41} - a_{43}\,\alpha_{11} & a_{42} - a_{43}\,\alpha_{12} & a_{43} & (a_{44} - a_{43}\,\alpha_{14}) \end{array}\right| \tag{101}$$

Se demuestra, pues, un método rutinario del cálculo de reducción de determinantes de Chio que se expone en los libros de cálculo numérico y textos de álgebra; pues

$$|A| = a_{13}\ (-1)^{sj}\ \triangle \tag{102}$$

/Siendo

Siendo Δ el determinante adjunto de tercer orden.

Véase el cálculo por este método del ejemplo numérico anterior: Se escoge como elemento pivotal a_{13}

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = 2{,}5; \ \alpha_{12} = 3; \ \alpha_{14} = 1$$

$$|A| = 2 \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ (3 - 2x2{,}5) & (4 - 2x3) & 2 & 3 - 2x1 \\ (4 - 6x2{,}5) & (2 - 6x3) & 6 & 3 - 6x1 \\ (5 - 6x2{,}5) & (6 - 6x3) & 6 & 8 - 6x1 \end{array}$$

$$|A| = 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -11 & -16 & -3 \\ -10 & -12 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(64 - 60 + 132 - 160 + 72 - 44) = 8$$

24. <u>La matriz adjunta y la matriz inversa o recíproca</u>

a) <u>Matriz adjunta</u>

Es la matriz transpuesta de los cofactores de una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj. } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (103)$$

/Recuérdese que

Recuérdese que los cofactores son los menores complementarios con un signo $(-1)^{i+j}$

b) Matriz inversa o recíproca A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj. } A \tag{104}$$

En consecuencia, sólo existen inversas para las matrices cuadradas cuyo determinante no es nulo (matrices no singulares).

25. Propiedades de las matrices inversas (Allen)

a) La pre o pos multiplicación de una matriz por su inversa de la matriz idéntica.

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} A \tag{105}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix} = I_{nn}$$

La demostración del caso de premultiplicación es ahora obvia.

b) La matriz inversa es la única que produce la matriz idéntica al pre o pos multiplicar por ella la matriz de que se deriva.

Demostración: si se supone que existe otra matriz B, tal que:

$$A \cdot B = I$$

Se tiene:

$$A^{-1} = A^{-1} I = A^{-1} (AB) = (A^{-1} a) B = IB = B \tag{106}$$

c) La inversa de una matriz inversa es la matriz

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{107}$$

d) La inversa de un producto de matrices es igual al producto de orden invertido de las inversas de cada matriz.

$$C = AB$$

$$C^{-1} = B^{-1} A^{-1} \tag{108}$$

/e) La inversa

e) La inversa de la matriz transpuesta es igual a la transpuesta de la inversa de la matriz.

$$\left(A'\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)' \qquad (109)$$

f) El determinante de una matriz inversa es igual a la inversa del determinante de la matriz.

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} \qquad (110)$$

g) La inversa de una matriz triangular es otra matriz triangular de igual forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ 0 & Z_{22} & Z_{23} \\ 0 & 0 & Z_{33} \end{pmatrix} \qquad (111)$$

h) La inversa de la matriz idéntica es la misma idéntica.

$$I^{-1} = I \qquad (112)$$

26. Un método para calcular matrices inversas

Hay varios métodos para calcular las inversas evitando la tarea de determinar cada uno de los cofactores y el determinante de la matriz, de acuerdo con la definición.

Uno de ellos consiste en efectuar operaciones elementales sobre la matriz mediante sucesivas multiplicaciones hasta reducirla a la matriz idéntica.

En consecuencia, las matrices que han premultiplicado hasta completar esa reducción, proporcionan la inversa.

Sea la matriz A, cuya inversa se propone obtener:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

/Se comprueba

La operación $G_{(1)} \ A = A_{(1)}$ es:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & (a_{22} - a_{21}\alpha_{12}) & (a_{23} - a_{21}\alpha_{13}) \\ 0 & (a_{32} - a_{31}\alpha_{12}) & (a_{33} - a_{31}\alpha_{13}) \end{pmatrix}$$

Incidentalmente puede comprobarse como las operaciones realizadas con la matriz A han conducido a una matriz $A_{(1)}$, cuyo determinante se puede calcular por otro de orden inferior; las operaciones efectuadas son similares a las que se explicarion con el nombre de método de Chio; de tal modo que el paso anterior puede utilizarse como una demostración de la reducción de un determinante equivalente, en efecto:

$$G_{(1)} \ A = A_{(1)}$$

$$A = G_{(1)}^{-1} \ A_{(1)}$$

$$\left| A \right| = \left| G_{(1)} \right|^{-1} \left| A_{(1)} \right|$$

El $\left| G_{(1)} \right|$ es inmediato pues se trata de una matriz triangular, cuyo valor equivale al producto de los elementos de la diagonal principal.

Si se continúa con el problema del cálculo de la inversa y se cambian los símbolos de $A_{(1)}$ para simplificar la notación, el segundo paso será:

$$G_{(2)} \ A_{(1)} = A_{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\alpha_{12}}{22} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{22} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha_{32}}{\alpha_{22}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\alpha_{13} - \alpha_{12}\beta_{23}) \\ 0 & 1 & \beta_{23} \\ 0 & 0 & (\alpha_{33} - \alpha_{32}\beta_{23}) \end{pmatrix}$$

/El tercero

El tercero y último paso es

$$G_{(3)} \quad A_{(2)} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_{13}/\beta_{33} \\ 0 & 1 & -\beta_{23}/\beta_{33} \\ 0 & 0 & 1/\beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_{13} \\ 0 & 1 & \beta_{23} \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vale decir que: $G_{(3)} \quad G_{(2)} \quad A_{(1)} = I$

$$G_{(3)} \quad G_{(2)} \quad G_{(1)} \quad A = I$$

$$G_{(3)} \quad G_{(2)} \quad G_{(1)} = A^{-1}$$

Si la matriz hubiera sido de orden "n" se habrían obtenido n matrices que premultiplican formando la inversa.

Incidentalmente, se demuestra que el $|A|$ se puede obtener como el producto de las inversas de los determinantes G.