

## EL FINANCIAMIENTO DE JUBILACIONES MEDIANTE CAPITALIZACION(\*)

*Jean Bourgeois-Pichat*  
(CICRED)

### RESUMEN

Se proporciona una fórmula que permite estimar el capital poseído por cada generación, en función de la edad. Se efectúa también una aplicación para la población de Francia al primero de enero de 1977. Se demuestra así que la Caja debería poseer un capital equivalente a 5 veces la suma de los salarios anuales si se considera una tasa de interés de 5 por ciento, y 10 veces la suma de salarios si se considera una tasa de interés nulo. Es un capital enorme, ya que en efecto, el capital de una nación es aproximadamente igual a 4 ó 5 veces la suma de los salarios. En una población estable los cálculos se simplifican mucho. Se verifica entonces que el capital necesario a la Caja es inferior a 5 veces la suma de los salarios, si la mortalidad, la fecundidad y la tasa de interés son elevadas. Parece imposible entonces que el sistema funcione en los países desarrollados.

< CAJAS DE JUBILACIONES > < FORMACION DE  
CAPITAL > < METODO DE ANALISIS >

---

(\*) Tanto la publicación de este artículo como su traducción han sido autorizadas por el autor y el INED.

# FINANCING RETIREMENT BENEFITS THROUGH CAPITALIZATION

## SUMMARY

A formula is established giving, as a function of age, the capital owned by each cohort. The formula is applied to the population of France on January 1st, 1977. It shows that the Fund must own five times the yearly salaral mass with a rate of interest equal to 5 per cent, and 10 times with a rate of interest equal to zero. This represents an enormous capital, as it is generally assumed that the total capital of a country is equal to 4-5 times the salaral mass.

In a stable population, the calculations are much more simple. In order to obtain a capital smaller than 5 times the salaral mass, mortality, fertility, and the rate of interest must be very high. It seems, therefore, that in developed countries, the system is unable to function.

< *PENSION FUNDS* > < *CAPITAL FORMATION* >  
< *METHOD OF ANALYSIS* >

La mayoría de los regímenes de jubilaciones funcionan, en Francia, según el régimen llamado de reparto. El principio es simple y bien conocido. Una Caja recibe los aportes de las personas activas y los utiliza para pagar las jubilaciones. Las cuentas están equilibradas por año civil. Lo que la Caja recibe en un año dado es distribuido en el mismo año. Una vez fijadas la edad del retiro y el importe de la jubilación referido al salario en actividad, la evolución de un sistema tal se remite a un problema clásico de demografía. Es suficiente efectuar una proyección por sexo y edad de la población involucrada para determinar la porción del salario en actividad que debe deducirse para asegurar el pago de jubilaciones.<sup>1</sup>

Pero hay otra manera de hacer funcionar un régimen de jubilaciones, que consiste en constituir un capital para cada individuo en el curso de su vida activa, capital que es utilizado después para pagarle su jubilación. Hay numerosas modalidades posibles. Lo más frecuente es que las cuentas sean equilibradas por generación. Las personas nacidas en un mismo año aportan a una cuenta que es atribuida a las que sobreviven. Las sumas así recaudadas son invertidas por la caja y los intereses recibidos son acreditados en la misma cuenta. A partir de la edad de retiro, los sobrevivientes dejan de aportar y reciben, por el contrario, una jubilación. La suma poseída por la generación continúa generando intereses cada vez más bajos a medida que la suma disminuye. El sistema es organizado de tal manera que el capital constituido se hace nulo el día siguiente al que desaparece el último representante de la generación. Los sistemas privados funcionan en base a este modelo. Son particularmente numerosos en los Estados Unidos de América.

El mecanismo de los sistemas de reparto es muy simple: cada año los aportes recaudados de los activos son redistribuidos entre los jubilados.

El sistema de capitalización supone un ajuste más complejo puesto que el equilibrio no se realiza inmediatamente sino a largo plazo. Entre el momento en que el asegurado comienza a aportar y el momento en que muere, el organismo de jubilaciones recibe en depósito el

---

<sup>1</sup> Si hubiera una sola caja para el conjunto del país, una proyección de toda la población francesa satisfaría. Pero hay muchas cajas sirviendo a las profesiones o a conjuntos de profesiones diferentes y cada población considerada tiene evoluciones demográficas diferentes. Hace falta calcular tantas proyecciones como subpoblaciones haya. Es más, para evitar mucha disparidad entre las cajas, es necesario prever un ajuste.

dinero y lo hace producir a una tasa de interés de mercado. Para comparar los dos sistemas de jubilación, es necesario calcular primero el aporte que debe efectuar un individuo en cada uno de los casos, para los sistemas de capitalización, y hace falta evaluar el capital administrado por la Caja de Jubilaciones, así como los intereses ganados.

#### *Cálculo del aporte*

Para no complicar mucho los cálculos, nos colocaremos en condiciones simples, las que habrá que tener en cuenta cuando se trate de obtener conclusiones prácticas sobre los sistemas existentes. Las hipótesis son:

- a) La vida activa comienza a la edad  $\alpha$  y termina a la edad  $\beta$ , que indica el comienzo del período de jubilación. La edad límite de vida será designada por  $w$ . Todas las personas trabajan entre las edades  $\alpha$  y  $\beta$ .
- b) El salario  $S$  es el mismo para todos y no varía con el transcurso del tiempo. Esto significa que no hay promoción ni progreso del nivel de vida.
- c) No hay inflación y las sumas invertidas producen un interés  $r$ .
- d) Existe una sola caja nacional para el conjunto de la población. Cada trabajador aporta a la caja una fracción  $k$  de su salario.
- e) La jubilación pagada es igual al salario.

Estando fijadas estas condiciones, nos propondremos calcular la suma  $s(x)$  que se acredita a la cuenta de las personas de edad  $x$ . Ubiquémonos ahora en el período activo  $\alpha, \beta$ , y calculemos las variaciones de  $s(x)$  en el intervalo  $x, x + dx$ .

1. Sea  $p(x)$  la función de supervivencia. Los  $p(x)$  sobrevivientes aportan a la caja una suma  $k S p(x) dx$ .
2. La caja que ha invertido la suma  $s(x)$  recibe un interés  $r s(x) dx$ .

Entonces se tiene,

$$d s(x) = k S p(x) dx + r s(x) dx$$

lo que se escribe,

$$s'(x) - r s(x) = k S p(x) \quad (I)$$

que es una ecuación diferencial lineal que se puede resolver. Ella es válida para  $x$  variando entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

Ubiquémosnos ahora luego de la edad  $\beta$ .

1. Los  $p(x)$  sobrevivientes no aportan más a la caja, pero por el contrario reciben una jubilación  $S$ . La suma  $s(x)$  se encuentra disminuida en  $S p(x) dx$ .
2. Los intereses obtenidos por la caja son siempre  $r s(x) dx$ .

Se tiene entonces,

$$d s(x) = - S p(x) dx + r s(x) dx$$

$$s'(x) - r s(x) = - S p(x) \quad (II)$$

es decir, una ecuación diferencial del mismo tipo que (I); esta vez la ecuación (II) es válida para  $x > \beta$ .

#### Resolución de la ecuación (I)

Para resolver la ecuación (I), se pone

$$y = e^{-rx} s(x)$$

Se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= - r e^{-rx} s(x) + e^{-rx} s'(x) = e^{-rx} [ s'(x) - r s(x) ] = \\ &= k S e^{-rx} p(x) \end{aligned}$$

Integrando

$$y = k S \int_{\alpha}^x e^{-rx} p(x) dx + C \cdot$$

donde  $C$  es una constante.

Finalmente, se tiene que

$$e^{-rx} s(x) = kS \int_{\alpha}^x e^{-rx} p(x) dx + C$$

Para  $x = \alpha$

$$e^{-r\alpha} s(\alpha) = kS \int_{\alpha}^{\alpha} e^{-rx} p(x) dx + C$$

pero  $s(\alpha) = 0$

$$\text{se tiene también } \int_{\alpha}^{\alpha} e^{-rx} p(x) dx = 0$$

Y así resulta que

$$C = 0$$

y se tiene el resultado buscado

$$\boxed{s(x) = kS e^{rx} \int_{\alpha}^x e^{-ru} p(u) du} \quad (III) \text{ válido entre } \alpha \text{ y } \beta.$$

*Resolución de la ecuación (II)*

Para resolver la ecuación (II) se aplica el mismo procedimiento y se obtiene:

$$y = -S \int_{\beta}^x e^{-rx} p(x) dx + C \quad \text{donde } C \text{ es una constante}$$

$$e^{-rx} s(x) = -S \int_{\beta}^x e^{-rx} p(x) dx + C$$

Sea  $x = w$ . Se tiene,

$$e^{-rw} s(w) = -S \int_{\beta}^w e^{-rx} p(x) dx + C$$

Ahora bien,  $s(w) = 0$

Se tiene entonces, para la constante, el valor:

$$C = S \int_{\beta}^w e^{-rx} p(x) dx$$

y la ecuación se escribe

$$\begin{aligned} e^{-rx} s(x) &= -S \int_{\beta}^x e^{-ru} p(u) du + S \int_{\beta}^w e^{-ru} p(u) du = \\ &= S \int_x^w e^{-ru} p(u) du \end{aligned}$$

Y finalmente, se tiene:

$$\boxed{s(x) = S e^{rx} \int_x^w e^{-ru} p(u) du} \quad (IV)$$

válido entre  $\beta$  y  $w$ .

#### Determinación de la constante $k$

Es evidentemente necesario que las expresiones III y IV den los mismos valores para  $s(\beta)$ .

Entonces se tiene:

$$k S e^{r\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} p(x) dx = S e^{r\beta} \int_{\beta}^w e^{-rx} p(x) dx$$

de donde,

$$k = \frac{\int_{\beta}^w e^{-rx} p(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} p(x) dx} \quad (V)$$

Así, la fracción del salario colocada en la caja en el curso de la vida activa está determinada por la función de supervivencia y la tasa de interés ( $r$ ).

#### *Interpretación demográfica de $k$*

La demografía utiliza frecuentemente el concepto de población estable. Es una población donde la mortalidad y la fecundidad son constantes, así como la tasa de crecimiento. Se demuestra que tales poblaciones existen, siempre que ciertas relaciones sean verificadas entre la mortalidad, la fecundidad y la tasa de crecimiento. Si  $\rho$  es la tasa de crecimiento,  $b$  es la tasa bruta de natalidad y  $N(t)$  es el total de personas en el momento  $t$ , el número de personas de edad  $x$  a  $x + dx$  en el instante  $t$  están dadas por la relación

$$N(t) b e^{-\rho x} p(x) dx$$

Resulta que las personas activas son en número igual a

$$A = N(t) b \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx$$

y las personas jubiladas

$$B = N(t) b \int_{\beta}^w e^{-\rho x} p(x) dx$$

sea  $h$  la fracción del salario pagado como cotización en un sistema de jubilaciones por reparto.



Se debe tener que

$$h AS = BS$$

de donde

$$h = \frac{B}{A}$$

o también,

$$h = \frac{\int_{\beta}^w e^{-\rho x} p(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx} \quad (VI)$$

Cuanto más alto es  $\rho$ , más bajo es  $h$ .

Comparando (V) y (VI) se ve entonces que, en las condiciones simplificadas en donde nos hemos colocado, el aporte  $k$  en un sistema de jubilaciones por capitalización a suma nula es igual a la cotización de un sistema de jubilaciones por reparto con una población estable que tuviera por tasa de crecimiento la tasa de interés de las sumas invertidas.

Cuando se habla de la tasa de interés, los órdenes de magnitud que se utilizan van del tres al cinco por ciento. Comparadas con las tasas de variación de las poblaciones humanas estables, aquéllas son las más elevadas. En efecto,  $\rho$  varía de cero a cuatro por ciento. Resulta así que  $k$  frecuentemente es inferior a  $h$  y este resultado da un atractivo al sistema basado en la capitalización. En un sistema como este, se requiere de la persona activa un aporte menor que en el sistema de reparto. Esto es posible dado que la caja obtiene intereses sobre los importes invertidos. Todo transcurre como si además del aporte deducido directamente del salario, cada persona —activa o no— pagará un aporte indirecto incluido en el precio de los bienes y servicios y destinado a remunerar al capital

Para hacer un breve balance total, hace falta calcular ahora este aporte indirecto. Para ello, calcularemos la suma en poder de la caja en un momento dado.

*Capital medio a la edad  $x$*

Ubiquémonos ahora entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Se ha visto que los sobrevivientes poseían

$$s(x) = kS e^{rx} \int_{\alpha}^x e^{-nu} p(u) du$$

Entonces, cada sobreviviente posee,

$$\frac{s(x)}{p(x)} = kS \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^x e^{-nu} p(u) du \quad (VII)$$

Antes de ir más adelante, examinaremos la forma de la función

$$F(x) = \frac{ke^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^x e^{-nu} p(u) du \quad \text{(válida para } x \text{ comprendida entre } \alpha \text{ y } \beta).$$

Comencemos por el caso más simple, en que la tasa de interés es nula:  $r = 0$ .

Entonces,  $F(x)$  se escribe

$$F(x) = \frac{k}{p(x)} \int_{\alpha}^x p(u) du$$

Evidentemente, se tiene que,

$$F(\alpha) = 0$$

Calculemos  $F(\beta)$ .

$$F(\beta) = \frac{k}{p(\beta)} \int_{\alpha}^{\beta} p(u) du$$

que se escribe tomando en cuenta (V)

$$F(\beta) = \frac{1}{p(\beta)} \int_{\beta}^w p(u) du = E(\beta)$$

donde  $E(\beta)$  designa la esperanza de vida a la edad  $\beta$ .

A la edad  $\beta$ , cada sobreviviente posee entonces  $SE(\beta)$ .

Este es un resultado evidente. Siendo nulos los intereses de las sumas invertidas, hace falta que cada sobreviviente posea lo que hace falta para pagar su jubilación durante un plazo igual a su vida media a la edad  $\beta$ . La función  $F(x)$  es creciente de  $\alpha$  a  $\beta$ .

Ubiquémonos ahora más allá de la edad de retiro  $\beta$  y calculemos el capital medio poseído por cada sobreviviente.

Se tiene, para la suma total

$$s(x) = Se^{rx} \int_x^w e^{-ru} p(u) du$$

y para cada sobreviviente

$$\frac{s(x)}{p(x)} = \frac{Se^{rx}}{p(x)} \int_x^w e^{-ru} p(u) du$$

Examinemos la forma de la función

$$R(x) = \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_x^w e^{-ru} p(u) du \quad (\text{válida para } x \geq \beta)$$

Supongamos primero que la tasa de interés es nula,  $r = 0$ , entonces  $R(x)$  se escribe

$$R(x) = \frac{1}{p(x)} \int_x^w p(u) du = E(x)$$

A cada edad  $x$ , cada sobreviviente posee entonces  $SE(x)$ .

$E(x)$  designa a la esperanza de vida a la edad  $x$ . Este resultado es evidente. Lo que se ha dicho de la edad  $\beta$  debe verificarse para todas las edades superiores a  $\beta$ . Cada sobreviviente debe poseer lo que le es necesario para pagar su jubilación durante un plazo igual a su vida media a la edad  $x$ .

La función  $E(x)$  decrece de  $E(\beta)$  a  $E(w) = 0$ .

El cuadro 1 y el gráfico 1 dan los valores de  $F(x)$  y de  $R(x)$  según la tabla modelo de mortalidad femenina, serie oeste<sup>2</sup> ( $e_0 = 77,5$  años) y cinco tasas de interés ( $r$ ).

Cuadro 1

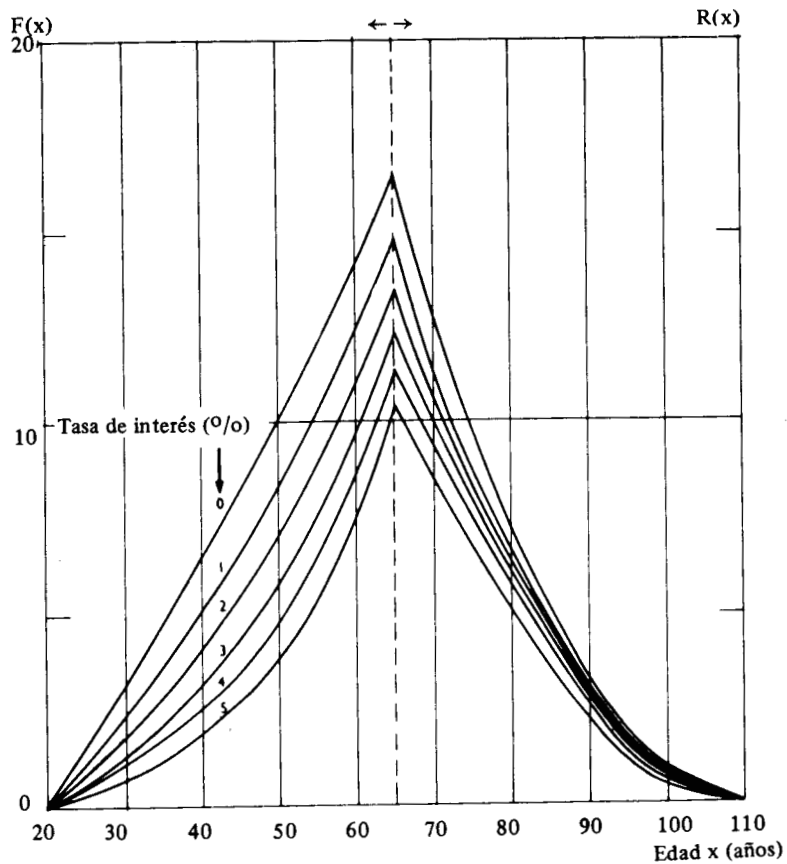
VALOR DE  $F(x)$  Y DE  $R(x)$  PARA LA TABLA MODELO DE MORTALIDAD FEMENINA, MODELO OESTE ( $e_0 = 77,5$  AÑOS) Y SEIS TASAS DE INTERES

x (años)	Tasa de interés en %					
	0	1	2	3	4	5
20-24	0,8	0,6	0,4	0,3	0,2	0,2
25-29	2,5	1,8	1,3	0,9	0,7	0,5
30-34	4,0	3,1	2,4	1,6	1,3	1,0
35-39	5,5	4,5	3,5	2,7	2,1	1,5
40-44	7,3	6,0	4,8	3,7	3,0	2,3
45-49	9,1	7,5	6,2	5,0	4,1	3,2
50-54	11,0	9,3	7,9	6,5	5,5	4,5
55-59	13,0	11,4	9,9	8,5	7,5	6,4
60-64	15,2	13,2	12,0	11,0	9,7	8,6
65-69	14,5	13,3	12,1	11,2	10,3	9,5
70-74	11,0	10,1	9,5	8,9	8,3	7,5
75-79	8,2	7,5	7,3	6,9	6,5	5,8
80-84	6,1	5,6	5,4	5,1	4,8	4,2
85-89	4,1	3,8	3,7	3,5	3,3	2,8
90-94	2,5	2,3	2,2	2,0	1,8	1,5
95-100	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,6

<sup>2</sup> Coale, Ansley y Demeny, Paul. *Regional Model Life Tables and Stable Populations*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1966.

Gráfico 1

VALORES DE  $F(x)$  Y DE  $R(x)$  PARA LA TABLA MODELO DE MORTALIDAD FEMENINA, MODELO OESTE ( $e_0 = 77,5$  AÑOS) Y SEIS TASAS DE INTERES.



*Aplicación a la población femenina de Francia al 1<sup>o</sup> de enero de 1977*

La mortalidad femenina en Francia es, en 1978, cercana a la de la tabla modelo utilizada para el cálculo de los coeficientes del cuadro 1. Entonces se la puede aplicar al efectivo de la población de Francia al

Cuadro 2

## FRANCIA: POBLACION FEMENINA AL 1° DE ENERO DE 1977

Suma total en poder de la Caja, expresada en salario anual							
Edad (años)	Efectivos (en miles)	Coefficiente $r=0$ o/o	(2) x (3)	Coefficiente $r=3$ o/o	(2) x (5)	Coefficiente $r=5$ o/o	(2) x (7)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
20-24	2 079,2	0,8	1 663,4	0,3	623,8	0,2	415,8
25-29	2 137,3	2,5	5 343,3	0,9	1 923,6	0,5	1 068,6
30-34	1 612,3	4,0	6 449,2	1,6	2 579,7	1,0	1 612,3
35-39	1 417,7	5,5	7 797,4	2,7	3 827,8	1,5	2 126,6
40-44	1 578,9	7,3	11 526,0	3,7	5 841,9	2,3	3 631,5
45-49	1 645,1	9,1	14 970,4	5,0	8 095,5	3,2	5 264,3
50-54	1 619,1	11,0	17 810,1	6,5	10 524,2	4,5	7 286,0
55-59	1 208,5	13,0	15 710,5	8,5	10 272,3	6,4	7 734,4
60-64	1 181,1	15,2	17 952,7	11,0	12 992,1	8,6	10 157,5
65-69	1 322,8	14,5	19 054,8	11,2	14 815,4	9,5	12 566,6
70-75	1 186,8	11,0	13 054,8	8,9	10 562,5	7,5	8 901,0
75-79	920,2	8,2	7 545,6	6,9	6 349,4	5,8	5 337,2
80-84	587,0	6,1	3 580,7	5,1	2 993,7	4,2	2 465,4
85-89	282,6	4,1	1 158,7	3,5	989,1	2,8	791,3
90-94	89,4	2,5	223,5	2,0	178,8	1,5	134,1
95 y más	16,4	1,2	19,7	0,9	14,8	0,6	9,8
20-W	18 884,4	Total	143 860,8	Total	92 584,6	Total	69 502,4
20-64	14 479,2						
65-W	4 405,2						

1° de enero de 1977 para calcular la suma total en poder de la caja. El cuadro 2 nos da el detalle del cálculo para tres tasas de interés: 5 por ciento, 3 por ciento y cero por ciento.

Así, con una tasa de interés del 5 por ciento, la caja posee 69 502,4  $S$ , con el tres por ciento posee 92 584,6  $S$  y con el cero por ciento 143 860,8  $S$ .

La masa salarial anual es igual al efectivo de la población de 20 a 64 años multiplicado por el salario  $S$ , es decir: 14 479,2  $S$ .

La relación entre la suma en poder de la caja y la masa salarial anual total es, entonces:

$$\frac{69\,502,4\ S}{14\,479,2\ S} = 4,80 \quad \text{para } r = 5 \text{ por ciento}$$

$$\frac{92\,584,6\ S}{14\,479,2\ S} = 6,39 \quad \text{para } r = 3 \text{ por ciento}$$

$$\frac{143\,860,8\ S}{14\,479,2\ S} = 9,94 \quad \text{para } r = 0 \text{ por ciento}$$

Así, la caja poseería de 5 a 10 veces la masa salarial anual si la tasa de interés estuviera entre 5 y cero por ciento. Esta es una masa considerable. Se admite generalmente que el patrimonio de una nación es igual a 4 ó 5 veces la masa salarial. Nos encontramos ante una imposibilidad: no hay suficiente capital para que el sistema funcione. Aún si la caja poseyese todo el capital, lo que no es de ninguna manera imaginable, esa fortuna estaría todavía por debajo de lo necesario para funcionar. Se volverá más adelante sobre este punto.

#### *Retorno a las poblaciones estables*

Hemos calculado la suma total poseída por la caja utilizando fórmulas aproximadas aplicadas a una población real. Vamos a retomar el problema suponiendo que nos encontramos en una población estable con tasa de crecimiento  $\rho$ . Esta hipótesis permite obtener una expresión muy simple de la suma total en poder de la caja. Ubiquémonos ahora entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Se ha visto que cada individuo medio de edad  $x$  poseía

$$kS \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^x e^{-ru} p(u) du$$

En una población estable, las personas de edad  $x$  a  $x+dx$  son en número igual a

$$N(t) b e^{-\rho x} p(x) dx$$

y el conjunto de personas posee

$$kS N(t) b \frac{e^{(r-\rho)x} p(x)}{p(x)} \int_{\alpha}^x e^{-ru} p(u) du dx =$$

$$= kS N(t) b e^{(r-\rho)x} \int_{\alpha}^x e^{-ru} p(u) du dx$$

El conjunto de las cuentas de personas de edad  $\alpha$  a  $\beta$  es entonces:

$$A = kSN(t) b \int_{\alpha}^{\beta} \left[ e^{(r-\rho)x} \int_{\alpha}^x e^{-rx} p(x) dx \right] dx$$

que se puede escribir

$$A = \frac{kSN(t)b}{r-\rho} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^x e^{-ru} p(u) du \cdot \frac{d}{dx} e^{(r-\rho)x} dx$$

e, integrando por parte

$$A = \frac{kSN(t)b}{r-\rho} \left[ \left( e^{(r-\rho)x} \int_{\alpha}^x e^{-ru} p(u) du \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^{(r-\rho)x} e^{-rx} p(x) dx \right]$$

$$A = \frac{kSN(t)b}{r-\rho} \left[ e^{(r-\rho)\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} p(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx \right]$$



Pasemos ahora a las personas de edad  $\beta$  y más. Cada una de entre ellas posee, en promedio, a la edad  $x$

$$\frac{Se^{rx}}{p(x)} \int_x^w e^{-ru} p(u) du$$

y el conjunto de las personas de edad  $x$  a  $x+dx$  posee

$$\begin{aligned} SN(t)b \frac{e^{(r-\rho)x} p(x)}{p(x)} \int_x^w e^{-ru} p(u) du &= \\ = SN(t)b e^{(r-\rho)x} \int_x^w e^{-ru} p(u) du & \end{aligned}$$

El conjunto de las personas jubiladas posee, así:

$$\begin{aligned} B &= SN(t)b \int_{\beta}^w \left[ e^{(r-\rho)x} \int_x^w e^{-ru} p(u) dx \right] du = \\ &= SN(t)b \int_w^{\beta} \left[ e^{(r-\rho)x} \int_w^x e^{-ru} p(u) du \right] dx \end{aligned}$$

e integrando como antes,

$$\begin{aligned} B &= \frac{SN(t)b}{r-\rho} \left[ e^{(r-\rho)\beta} \int_w^{\beta} e^{-rx} p(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_w^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx \right] \end{aligned}$$

El conjunto de las sumas poseídas por la caja, es entonces,

$$A + B = \frac{SN(t)b}{r - \rho} \left[ k e^{(r-\rho)\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} p(x) dx - \right. \\ \left. - e^{(r-\rho)\beta} \int_{\beta}^w e^{-rx} p(x) dx - k \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{\beta}^w e^{-\rho x} p(x) dx \right]$$

Las dos primeras integrales son iguales y se eliminan en virtud de la relación (V) y se tiene finalmente,

$$A + B = \frac{SN(t)b}{r - \rho} \left[ \int_{\beta}^w e^{-\rho x} p(x) dx - k \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx \right]$$

Introduciendo el aporte  $h$  en un sistema jubilatorio de reparto en una población estable (aporte dado por la fórmula (VI)), se tiene,

$$A + B = \frac{SN(t)b}{r - \rho} (h - k) \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx$$

El conjunto de los salarios pagados es:

$$\Sigma = N(t)b S \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} p(x) dx$$

Se tiene entonces

$\frac{A + B}{\Sigma} = \frac{h - k}{r - \rho}$	(IX)
---	------

Como se había indicado, se obtiene entonces un resultado particularmente simple. Si se posee un sistema de poblaciones estables, se puede obtener muy rápido  $\frac{A+B}{\Sigma}$  para una gran variedad de situaciones.

La obra de Coale y Demeny nos provee precisamente tales sistemas. Se tiene, en efecto, dos sistemas. Uno que da las series de poblaciones estables calculadas asociando a las tablas modelo de mortalidad una serie de tasas de crecimiento.

El otro da una serie de poblaciones estables calculadas asociando a las tablas modelo de mortalidad una serie de tasas brutas de reproducción. El primer sistema permite calcular  $k$  y el segundo  $h$ .

A título de ejemplo, se ha elaborado el cuadro 3 que corresponde a la tabla modelo femenina de la serie oeste, con una esperanza de vida al nacer de 77,5 años. El gráfico 2 ilustra el cuadro 3. Si se admite que el capital de una nación es igual a cinco veces la masa de los salarios, la caja no puede funcionar para todas las situaciones ubicadas por encima de la recta  $AB$ . Este es el caso de los países desarrollados capitalistas.<sup>3</sup> Una mortalidad más fuerte aminora todas las curvas y aumenta las posibilidades de funcionamiento. Así el sistema exige una fuerte fecundidad o una fuerte mortalidad para funcionar.

Se ha indicado sobre el gráfico 2 los tres puntos que corresponden a los cálculos efectuados anteriormente sobre la población femenina francesa al 1° de enero de 1977. Se encuentra una curva muy cercana a la correspondiente a una población estable con tasa bruta de reproducción igual a 1,3.

#### *Retorno a las condiciones simplificadas adoptadas para el cálculo*

La realidad difiere de las condiciones adoptadas para establecer las fórmulas. La adopción de edades exactas  $\alpha$  y  $\beta$  para la entrada a la actividad y al retiro no parece tener la naturaleza de viciar los cálculos. Se podría reemplazarlas sin inconvenientes por las edades medias.

El salario supuesto igual para todos puede también ser considerado como un salario medio. Por el contrario, no parece realista admitir que ese salario medio no varíe en el tiempo. La noción misma de desa-

<sup>3</sup> Ello no impide que ciertos sistemas parciales funcionen. Es la generalización en el conjunto de la población lo que es imposible.

Cuadro 3

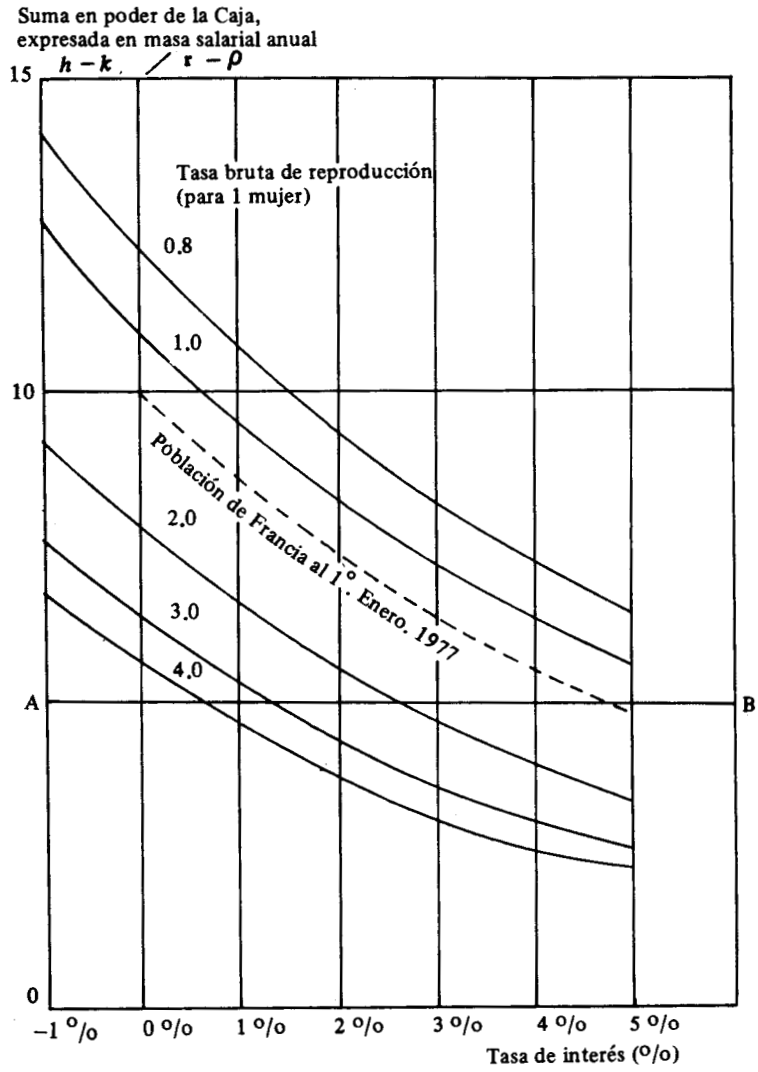
CALCULO DEL NUMERO DE AÑOS DE SALARIO EN PODER DE LA CAJA EN UN SISTEMA DE JUBILACION POR CAPITALIZACION A SUMA NULA. CALCULOS DETALLADOS POR LA TABLA MODELO DE MORTALIDAD FEMENINA DE COALE Y DEMENY (SERIE OESTE): ESPERANZA DE VIDA AL NACER = 77,5 AÑOS. Y RESULTADO FINAL SOLO PARA LA TABLA MODELO DE MORTALIDAD FEMENINA DE COALE Y DEMENY (SERIE OESTE): ESPERANZA DE VIDA AL NACER = 50 AÑOS.

Tasa bruta de reproducción para una mujer	Esperanza de vida al nacer = 77,5 años							Esperanza de vida al nacer = 50 años (c) $\frac{h-k}{r-\rho}$
	Tasa de interés	(a) $\rho$ o/o	$r-\rho$ o/o	(a) $\frac{h}{h}$ o/o	(b) $\frac{k}{k}$ o/o	$h-k$ o/o	$\frac{h-k}{r-\rho}$	
4,00	5	4,919	0,081	5,72	5,53	0,19	2,35	1,41
	4	4,919	-0,919	5,72	8,08	-2,36	2,57	1,59
	3	4,919	-1,919	5,72	11,68	-5,96	3,11	2,01
	2	4,919	-2,919	5,72	16,73	-11,01	3,77	2,38
	1	4,919	-3,919	5,72	23,67	-17,96	4,58	2,85
3,00	0	4,919	-4,919	5,72	33,11	-27,39	5,57	3,41
	-1	4,919	-5,919	5,72	45,74	-40,02	6,76	4,07
	5	3,854	1,146	8,54	5,53	3,01	2,63	1,73
	4	3,854	0,146	8,54	8,08	0,46	3,15	2,02
	3	3,854	-0,854	8,54	11,68	-3,14	3,68	2,30
2,00	2	3,854	-1,854	8,54	16,73	-8,19	4,42	2,80
	1	3,854	-2,854	8,54	23,67	-15,13	5,30	3,31
	0	3,854	-3,854	8,54	33,11	-24,17	6,38	3,91
	-1	3,854	-4,854	8,54	45,74	-37,20	7,66	4,63
	5	2,384	2,616	14,58	5,53	9,05	3,46	2,24
1,00	4	2,384	1,616	14,58	8,08	6,50	4,02	2,57
	3	2,384	0,616	14,58	11,68	2,90	4,71	2,94
	2	2,384	-0,384	14,58	16,73	-2,15	5,60	3,29
	1	2,384	-1,384	14,58	23,67	-9,09	6,57	4,01
	0	2,384	-2,384	14,58	33,11	-18,53	7,97	4,89
0,80	-1	2,384	-3,384	14,58	45,74	-31,16	9,21	5,64
	5	-0,053	5,053	33,67	5,53	28,14	5,57	3,63
	4	-0,053	4,053	33,67	8,08	25,59	6,31	4,07
	3	-0,053	3,053	33,67	11,68	21,99	7,20	4,59
	2	-0,053	2,053	33,67	16,73	16,94	8,25	5,20
-	1	-0,053	1,053	33,67	23,67	10,00	9,50	5,99
	0	-0,053	0,053	33,67	33,11	0,56	10,57	6,73
	-1	-0,053	-0,947	33,67	45,74	-12,07	12,75	7,87
	5	-0,818	5,818	43,17	5,53	37,64	6,47	4,18
	4	-0,818	4,818	43,17	8,08	35,09	7,28	4,66
-	3	-0,818	3,818	43,17	11,68	31,49	8,25	5,21
	2	-0,818	2,818	43,17	16,73	26,44	9,38	5,86
	1	-0,818	1,818	43,17	23,67	19,50	10,73	6,68
	0	-0,818	0,818	43,17	33,11	10,06	12,30	7,48
	-1	-0,818	-0,182	43,17	45,74	-2,57	14,12	8,47

Coale y Demeny (a) pág. 120; (b) pág. 72; (c) pág. 98 y 50.

Gráfico 2

SUMA EN PODER DE LA CAJA DE JUBILACIONES EN UN SISTEMA POR CAPITALIZACION A SUMA NULA PARA SIETE TASAS DE INTERES EN LA SERIE OESTE DE POBLACIONES ESTABLES FEMENINAS DE COALE DEMENY.  
(Esperanza de vida al nacer = 77,5 años)



rollo económico implica un crecimiento de ese salario. Pero vamos a ver que es fácil modificar ligeramente nuestras fórmulas para tener en cuenta una progresión tal.

Para una generación dada, es decir el conjunto de las personas nacidas en un mismo año, todo pasa como si el desarrollo económico llevase un incremento del salario con la edad a una cierta tasa  $\lambda$ . Pasa a ser una función de la edad tal que

$$\sigma(x) = \sigma(\alpha) e^{\lambda(x-\alpha)}$$

La ecuación diferencial (I) se escribirá entonces:

$$s'(x) - rs(x) = k \sigma(\alpha) e^{\lambda(x-\alpha)} p(x)$$

Se resuelve poniendo

$$y = e^{-rx} s(x) \text{ para que}$$

$$\frac{dy}{dx} = -re^{-rx} s(x) + e^{-rx} s'(x) = e^{-rx} [s'(x) - rs(x)] =$$

$$= e^{-rx} k \sigma(\alpha) e^{\lambda(x-\alpha)} p(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = k \sigma(\alpha) e^{-\alpha\lambda} e^{(\lambda-r)x} p(x) \text{ de donde}$$

$$y = k \sigma(\alpha) e^{-\alpha\lambda} \int_{\alpha}^x e^{(\lambda-r)u} p(u) du + C$$

y se ve fácilmente que la constante  $C$  es nula. Se tiene entonces,

$$s(x) = k \sigma(\alpha) e^{-\lambda\alpha} e^{rx} \int_{\alpha}^x e^{(\lambda-r)u} p(u) du$$

De igual manera, de  $\beta$  a  $w$ , se tiene,

$$s(x) = \sigma(\alpha) e^{-\lambda\alpha} e^{rx} \int_x^w e^{(\lambda-r)x} p(x) dx$$

El aporte  $k$  será igual a

$$k = \frac{\int_{\beta}^w e^{-(r-\lambda)x} p(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(r-\lambda)x} p(x) dx}$$

Todo transcurre como si la tasa de interés no fuera más  $r$  sino  $r-\lambda$ . Si hay una progresión del salario del 3 por ciento por año y una tasa de interés del 5 por ciento, todo transcurre como si la tasa de interés fuera  $5-3 = 2$  por ciento. El aporte directo es aumentado por efectos de la progresión de los salarios.

En el cálculo por generación, como el que hicimos para calcular  $k$ , se puede considerar a  $\sigma(\alpha)$  como una constante, pero esto no es más que el caso de cuando se quiere calcular el capital total poseído por la caja. Se efectúa entonces la suma de los capitales inscritos en la cuenta de las diversas generaciones y el salario que ellas han recibido a la edad  $\alpha$  dependiendo de la época en que ellas alcanzaron esa edad. Si se designa por  $\sigma(t)$  el salario en el instante  $t$  donde se efectúa el cálculo, se tendrá para las personas de edad  $x$

$$\sigma(\alpha) = e^{-(x-\alpha)\lambda} \sigma(t)$$

y cada persona de edad  $x$  a  $x+dx$  poseerá en promedio

$$\begin{aligned} k \sigma(t) \frac{e^{\alpha\lambda} e^{-\alpha\lambda}}{p(x)} e^{(r-\lambda)x} \int_{\alpha}^x e^{-(r-\lambda)u} p(u) du = \\ = k \sigma(t) \frac{e^{(r-\lambda)x}}{p(x)} \int_{\alpha}^x e^{(r-\lambda)u} p(u) du \end{aligned}$$

Es la expresión (VII) en la que  $r$  es reemplazado por  $(r-\lambda)$ . Los resultados precedentes concernientes al capital total en poder de la caja permanecen válidos, con la condición de restar de la tasa de interés, la tasa de crecimiento de la economía. Estando todo lo demás constante, ello aumenta el capital y en consecuencia, la probabilidad de que nos encontremos por sobre la recta  $AB$  del gráfico 2 donde el sistema no puede funcionar.

Se ha supuesto también que no hay inflación. Si la caja invirtiese juiciosamente las sumas que recauda, el capital se revaloriza y la inflación se encuentra automáticamente anulada. Pero la revalorización jamás es completa y demanda siempre una demora. Es más, la ley frecuentemente prevé que una parte del capital poseído por la caja deba ser invertido en valores de renta fija que no se revalorizan.

La inflación produce entonces, en realidad, un interés negativo, inferior por cierto a su tasa, pero que disminuye todavía la tasa de interés a intervenir en los cálculos. Esto nos lleva a efectuar los cálculos con tasas de interés muy bajas, del orden del uno y dos por ciento. El gráfico 2 muestra que se reencuentra así, en todos los casos, la imposibilidad de encontrar suficiente capital para que el sistema funcione.

El hecho de que el monto de la jubilación no sea calculado sobre el salario medio, pero sí sobre el salario de los mejores años, aporta una dificultad suplementaria. Es cierto que es raro que la jubilación sea igual al salario, lo que puede compensar lo anterior.

#### *El aporte indirecto*

Los cálculos precedentes han sido conducidos con el objeto de calcular el aporte indirecto recaudado por la caja a través de la remuneración del capital. Se lo obtiene inmediatamente multiplicando por  $r$  la cantidad  $(\Delta + B)/\Sigma$ . Se obtiene así, este aporte indirecto:

$$C_i = r \frac{h - k}{r - \rho} \quad (X)$$

Recordemos que  $k$  es el aporte directo y  $h$  el aporte en un sistema de reparto.



La fórmula (X) es válida en las condiciones simplificadas donde estamos ubicados, si hay un desarrollo económico caracterizado por una tasa de crecimiento  $\lambda$ . Se ha visto que haría falta reemplazar  $r$  por  $r-\lambda$  para el cálculo del capital poseído por la caja, pero siempre hace falta multiplicar a ese capital por la tasa  $r$  para tener la cotización indirecta.

Se tiene entonces,

$$C_i^j = r \frac{h - k'}{r - \lambda - \rho} \quad (XI)$$

$k'$  es el aporte directo, calculado con una tasa de interés  $r-\lambda$ . El aporte en el sistema de reparto permanece igual a  $h$ .

Tomemos una tasa de interés del cinco por ciento y una tasa de crecimiento de la economía del tres por ciento. La fórmula (XI) da los resultados indicados en el cuadro 4 para el sistema de poblaciones estables femeninas de Coale y Demeny (serie oeste). El gráfico 3 ilustra este cuadro. En la situación demográfica actual de los países desarrollados (tasa bruta de reproducción cercana a la unidad y mortalidad femenina cercana a los 77,5 años) se encuentra un aporte del 41,3 por

Cuadro 4

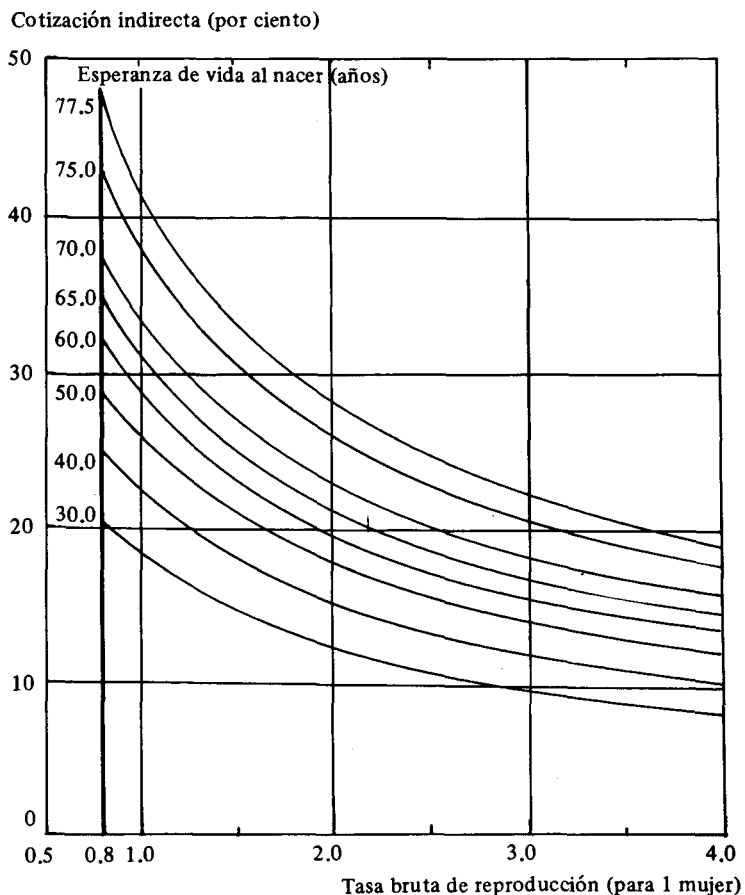
COTIZACION INDIRECTA EXPRESADA EN PORCENTAJE DEL SALARIO  
EN UN SISTEMA DE JUBILACION POR CAPITALIZACION  
A SUMA NULA EN LA SERIE OESTE DE POBLACIONES ESTABLES  
FEMENINAS DE COALE Y DEMENY. TASA DE INTERES: 5 POR CIENTO;  
TASA DE CRECIMIENTO DE LA ECONOMIA 3 POR CIENTO.  
LA JUBILACION ES IGUAL AL SALARIO

Esperanza de vida al nacer (años)	Tasa bruta de reproducción para 100 mujeres				
	80	100	200	300	400
77,5	46,9	41,3	28,3	22,1	18,9
75,0	43,2	38,2	25,5	20,4	17,5
72,5	40,4	35,6	24,0	19,2	16,4
70,0	38,0	33,5	22,2	18,2	15,7
67,5	36,6	32,3	21,7	17,4	14,9
65,0	35,2	31,2	20,8	16,9	14,5
60,0	32,9	29,1	19,8	15,6	13,4
50,0	29,3	26,0	17,8	14,0	11,9
40,0	25,1	22,2	15,1	12,0	9,9
30,0	20,7	18,3	12,4	9,7	7,8

Gráfico 3

COTIZACION INDIRECTA, EXPRESADA EN PORCENTAJE DEL SALARIO, EN UN SISTEMA DE JUBILACION POR CAPITALIZACION A SUMA NULA EN LA SERIE OESTE DE POBLACIONES ESTABLES FEMENINAS DE COALE Y DEMENY.

(Tasa de interés: 5 por ciento, Tasa de crecimiento de la economía: 3 por ciento)



ciento. Esto vuelve a decir que, en las condiciones consideradas, hace falta distribuir, por el mecanismo de la remuneración del capital, una suma que represente el 41,3 por ciento del conjunto de los salarios.

Este es un porcentaje muy elevado y lo que hemos dicho de la relación que liga la masa de los salarios al patrimonio de la nación hace pensar que un porcentaje como ese no podría ser alcanzado y que, en consecuencia, el sistema no puede funcionar.

Sin embargo, sólo un examen de las cuentas nacionales puede permitir responder a la cuestión planteada. Esto es lo que nos proponemos hacer en un artículo próximo. Allí se verá que las sumas distribuidas por el mecanismo de la remuneración del capital son del orden del 20 por ciento de la masa de los salarios. El gráfico 3 indica entonces que muy pocos países están en las condiciones demográficas en que el sistema puede funcionar, aun suponiendo que todo el patrimonio sea poseído por la caja. Si la caja no posee más que la mitad del patrimonio, no puede recibir más que el 10 por ciento de la masa de los salarios y entonces se puede decir que no existe ninguna situación demográfica que permita al régimen funcionar.

