CONSTRUCCION DE UNA TABLA DE VIDA BASADA EN SIETE GRUPOS DE EDADES

Albino Bocaz
(CELADE)

RESUMEN

La construcción de una tabla de vida basada en siete grupos de edades tiene la ventaja de reducir de manera importante los cálculos numéricos necesarios para la determinación de las funciones fundamentales de la tabla sin deteriorar el grado de información que se infiere de este modelo demográfico.

Por otra parte, la construcción de una tabla de vida con ese grado de abreviación permite minimizar los problemas que surgen por la calidad de la información sobre causas de muerte, logrando una adecuada determinación del efecto que esas causas tienen en las ganancias de esperanza de vida. En el texto se indican las soluciones analíticas dadas a la determinación de probabilidades de sobrevivencia entre edades muy distantes entre sí y a la determinación de la tabla de vida para edades avanzadas.

CONSTRUCTION OF A LIFE TABLE BASED ON SEVEN AGE GROUPS

SUMMARY

The construction of a life table based on seven age groups has the advantage of substantially reducing the numerical calculations which are necessary for the determination of the fundamental functions of the table, not deteriorating the degree of information which is inferred from this demographic model.

On the other hand, the construction of a life table with such a degree of abbreviation permits to minimize the problems arising from the quality of the information concerning causes of death, thus making it possible to obtain an adequate determination of the effect that those causes have upon the gains in the expectation of life. The text presents the analytical solutions given to the determination of survival probabilities between ages which are very distant from each other and to the determination of the life table for advanced ages.

Para la construcción de tablas de vida destinadas al estudio de la mortalidad parece recomendable adoptar un número reducido de grupos de edades. El número de grupos debe ser determinado de modo que no se deterioren las estimaciones de las diferentes funciones consultadas en la tabla de vida. Por ello se debe establecer un conjunto de edades pivotales que sean representativas de los cambios más significativos de los niveles de mortalidad y que sean determinantes en los valores de la línea de sobrevivencia. Por otra parte, la ventaja de usar un número reducido de grupos y valores pivotales adecuados, con respecto a la edad, es que tanto el número de personas expuestas al riesgo de morir como el número de muertes puedan ser lo suficientemente grandes en cada uno de esos subgrupos, para asegurar estimaciones confiables de las probabilidades de morir. Esta situación cobra mayor importancia cuando la construcción de las tablas de vida se basa en los datos de encuestas demográficas de tamaño generalmente reducido, o en el caso en que se desea construir tablas de vida para grupos muy especiales de población, a base de estadísticas vitales.

Se puede comprobar, mediante la metodología que más adelante se desarrolla a través de aplicaciones numéricas, que la construcción de tablas de vida apoyadas en un número reducido de grupos de edades permite determinar con suficiente confiabilidad las diferentes funciones de la tabla y medir adecuadamente los efectos que las causas de muerte tienen sobre el nivel de la esperanza de vida, no solamente frente a las edades pivotales elegidas, sino para cualquier otra edad que sea de interés para el investigador.

Asimismo, conviene recordar que al agrupar las defunciones por causa provenientes de estadísticas vitales en un número reducido de grupos de edades, se eliminan, en buena medida, las fluctuaciones aleatorias y los sesgos generados por la incorrecta declaración de la edad al morir. Además, el uso de grupos de edades amplios probablemente permita lograr estructuras más adecuadas para las causas de muerte según la edad.

En el desarrollo metodológico del tema se ha recurrido al uso de los siguientes siete grupos de edades:

Menores de 1 año
1 - 4 años
5 - 14 años
15 - 24 años
25 - 44 años
45 - 64 años
65 - 84 años

Con base en esta agrupación de edades se pueden determinar valores suficientemente adecuados para las siete siguientes relaciones de supervivencia:

$l_1 / l_0 ; l_5 / l_1 ; l_{15} / l_5 ; l_{25} / l_{15} ; l_{45} / l_{25} ; l_{65} / l_{45} ; l_{85} / l_{65} ;$

y deducir, por aplicación sucesiva de ellas, los siete valores pivotales

$l_1 , l_5 , l_{15} , l_{25} , l_{45} , l_{65} , l_{85}$

de la tabla de vida.

Usando estos siete valores pivotales es posible encontrar valores suficientemente confiables para el tiempo $({}_hL_x)$ vivido por la cohorte en cada intervalo de edades. Además, si se estima necesario, mediante el uso de ciertos modelos matemáticos, funciones de la edad, es posible calcular valores de la línea de sobrevivencia por edad detallada y deducir los tiempos vividos por la cohorte para edades simples. Este último asunto no se analizará en este documento.

CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE MORIR EN FUNCION DEL TIEMPO MEDIO VIVIDO

Para el cálculo de relaciones de supervivencia se deben encontrar relaciones de fácil aplicación que permitan transformar tasas centrales de mortalidad en tiempo medio vivido.

La primera relación que se deducirá se refiere a la que existe entre la probabilidad de morir $({}_hq_x)$ en el intervalo de edad $(x, x + h)$ para personas que han alcanzado la edad (x) y el tiempo medio vivido por las personas que mueren en el intervalo. A este tiempo medio vivido se denotará por $({}_ha_x)$

El tiempo total vivido por las $({}_hd_x)$ personas que alcanzando la edad (x) se mueren antes de llegar a la edad $(x + h)$, es igual a:

$$ {}_hA_x = \int_o^h t l_{x+t}\, \mu_{x+t} dt \qquad (1) $$

siendo

$$ \mu_{x+t} = - \frac{1}{l_{x+t}} \frac{d(l_{x+t})}{dt} \qquad (2) $$

la tasa instantánea de mortalidad a la edad $(x+t)$

Si se reemplaza la tasa instantánea de mortalidad en función de (l_{x+t}) se tiene:

$$ {}_hA_x = - \int_o^h t\, d\,(l_{x+t}) = - \left| t l_{x+t} \right|_o^h + \int_o^h l_{x+t}\, dt $$

o sea:

$$ {}_hA_x = - h\,(l_{x+h}) + {}_hL_x \qquad (3) $$

de modo que "el tiempo medio vivido" por cada una de las $({}_hd_x)$ personas que mueren en el intervalo $(x, x+h)$ es igual a:

$$ {}_ha_x = \frac{{}_hA_x}{{}_hd_x} = - h \frac{l_{x+h}}{{}_hd_x} + \frac{{}_hL_x}{{}_hd_x} = - h \frac{l_{x+h}}{l_x - l_{x+h}} + \frac{T_x - T_{x+h}}{l_x - l_{x+h}} \qquad (4) $$

siendo:

$$ {}_hd_x = l_x - l_{x+h} \;;\; {}_hL_x = T_x - T_{x+h} \;;\; T_x = \sum_w^x L_y \qquad (5) $$

de allí puede deducirse que el tiempo medio vivido, en cada uno de los (h) años del intervalo $(x, x+h)$ es igual a:

$$ \frac{{}_ha_x}{h} = \frac{1}{h({}_hm_x)} - \frac{{}_hp_x}{{}_hq_x} \qquad (6) $$

siendo:

$$ {}_hm_x = \frac{{}_hd_x}{{}_hL_x} \;;\; {}_hq_x = \frac{{}_hd_x}{l_x} \;;\; {}_hPx = \frac{l_{x+h}}{l_x} \qquad (7) $$

de modo que la probabilidad de morir $({}_hq_x)$, en el intervalo $(x, x + h)$ es igual a:

$$ {}_hq_x = \frac{h \quad {}_hm_x}{1 + \left(1 - \frac{{}_ha_x}{h}\right) h \quad ({}_hm_x)} \tag{8} $$

Veamos algunos ejemplos de cálculo del tiempo medio vivido en el intervalo (25-45) años usando algunas de las tablas de vida calculadas por J.W. Glover 1/ y la relación (4):

Cuadro 1

CALCULO DEL TIEMPO MEDIO ANUAL VIVIDO $({}_ha_x/h)$ POR LAS PERSONAS FALLECIDAS EN EL INTERVALO DE EDADES 25-45 AÑOS, PARA SIETE TABLAS DE VIDA

Tabla Número	e_o^o (en años)	l_{25}	l_{45}	T_{25}	T_{45}	${}_{20}a_{25}$	${}_{20}a_{25}/20$
40	56,16	82062	71366	3447741	1911133	10,2177	0,5109
54	52,80	79196	68608	3196843	1710545	10,7799	0,5390
52	49,08	76403	63704	2885685	1469426	11,1961	0,5598
27	43,97	70442	56051	2497547	1220831	10,8190	0,5410
18	37,67	61430	45947	2025132	938791	10,8119	0,5406
13	32,54	53285	39230	1716564	788013	10,2420	0,5121
35	*28,31*	*50143*	*32287*	*1358409*	*534197*	*9,9951*	*0,4998*

Puede verse que no existe una tendencia definida en los valores del tiempo medio vivido por año (${}_{20}a_{25}$ / 20) según el nivel de la esperanza de vida al nacer (e_o^o).

Para las siete tablas indicadas, el tiempo medio vivido por año es

1/ Glover, J.W. United States Life Tables 1890, 1901, 1910 and 1901-1910. Dpt. of Commerce. Bureau of the Census. Washington, 1921.

de (0,5290), lo que indica que en cada año del intervalo, 25-45 años, las personas que fallecen viven algo más de (1/2) año.

Es útil encontrar una relación entre el tiempo medio vivido $({}_h a_x)$ y las defunciones $({}_h d_x)$ de la tabla de vida. Se puede demostrar que este tiempo medio vivido está relacionado con la "elasticidad" de esa función.

Se sabe que:

$$T_{x+h} - T_x = \Delta T_x = - {}_h L_x \tag{9}$$

siendo (Δ) el operador de diferencia finita aplicada a los intervalos de magnitud (h).

Por inversión del operador se tiene:

$$T_x = - \Delta^{-1} ({}_h L_x) \tag{10}$$

Además:

$$T_{x+h} = E^h (T_x) \tag{11}$$

siendo (E) el operador de desplazamiento unitario. Este operador (E) se encuentra ligado al operador de derivación $(D = \frac{d}{d_x})$ por la relación

$$E \equiv e^D \tag{12}$$

dado que la función (T_{x+h}) expresada en función de (T_x) y sus derivadas es igual a

$$T_{x+h} = e^{hD} T_x \tag{13}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (9) y (13), puede notarse que:

$$\Delta \equiv e^{hD} - 1 \tag{14}$$

De esta manera, de la relación (10), teniendo en cuenta la relación (14) se puede deducir que:

$$- h\, DT_x = h \; D\, \Delta^{-1} ({}_hL_x) =$$

$$[\, Dh \,/\, (e^{Dh} - 1)\,] \;\; {}_hL_x$$

y como:

$$e^{Dh} - 1 = \frac{Dh}{1!} + \frac{(Dh)^2}{2!} + \frac{(Dh)^3}{3!} + \ldots)$$

$$Dh / (e^{Dh} - 1) = (1 - \frac{Dh}{2} + \frac{D^2\, h^2}{12} \pm \ldots)\; {}_hL_x \qquad (15)$$

considerando que:

$$DT_x = - l_x \qquad (16)$$

$$D \ln ({}_hL_x) = - {}_hm_x \qquad (17)$$

$$D\,[\, \ln ({}_hm_x)\,] = D\,[\ln ({}_hL_x)] - D^2 ({}_hL_x) \,/\, D ({}_hL_x) \qquad (18)$$

luego de los reemplazos pertinentes en (15) se llega a:

$$hl_x = (\, 1 + \frac{1}{2} h\, ({}_hm_x) + \frac{h^2\, ({}_hm_x)}{12}\, [{}_hm_x - D \ln ({}_hm_x)]\,)\; {}_hL_x \qquad (19)$$

Por otra parte, dado que la probabilidad de morir $({}_hq_x)$ es igual a:

$${}_hq_x = \frac{{}_hd_x}{l_x} = \frac{{}_hm_x \;\; {}_hL_x}{l_x} = h({}_hm_x) \;\; ({}_hL_x \,/\, h\, l_x\,) \qquad (20)$$

y que:

$$D\,[\, - \ln ({}_hd_x)] = {}_hm_x \; - \; D\,[\, \ln ({}_hm_x)\,] \qquad (21)$$

entonces·

$$
{}_h q_x = \frac{h\,({}_h m_x)}{1 + h\,({}_h m_x)\,\left[\frac{1}{2} - \frac{h}{12}\, D\, ln\,({}_h d_x)\right]} \tag{22}
$$

y comparando esta relación con la relación (8)

$$
\frac{1}{2} - \frac{{}_h a_x}{h} = \frac{h}{12}\,\frac{d}{dx}\,(-\,ln\ {}_h d_x) = \frac{h}{12}\ r_{dx} \tag{23}
$$

siendo: $r_{dx} = \frac{d}{dx}(-\,ln\ {}_h d_x)$

Ajustando una ley geométrica a los cuatro valores $({}_5 d_x)$ del intervalo de edades 25-45 años (h = 20) de las tablas de vida No. 40, 52, 18 y 35 se llega a los siguientes resultados para $r_{dx} = \frac{d}{dx}(-\,ln\ {}_5 d_x)$

Cuadro 2

CALCULO DEL TIEMPO MEDIO ANUAL VIVIDO $({}_h a_x/h)$ POR PERSONAS FALLECIDAS EN EL INTERVALO DE EDADES 25-45 AÑOS, PARA CUATRO TABLAS DE VIDA

Tabla Número	Valores de ${}_5 d_x$						
	25-30	30-35	35-40	40-45	$-5r_d$	$-20(r_d)/12$	$\frac{{}_{20}a_{25}}{20} - \frac{1}{2}$
40	2570	2615	2671	2840	0,0321	0,0107	(0,0109)
52	2300	2858	3566	3975	0,1863	0,0621	(0,0598)
18	3149	3686	4027	4621	0,1239	0,0413	(0,0406)
35	*4782*	*4174*	*4390*	*4510*	*0,0125*	*0,0042*	*(-0,0002)*

pudiendo verificarse un adecuado parecido con los valores $({}_h a_x / h - \frac{1}{2})$ determinados anteriormente en que se aplicó la relación (4). La discrepancia importante se produce para la Tabla (35), pero se puede hacer notar que en ese caso los valores $({}_5d_x)$ no siguen una ley geométrica.

Finalmente, puede encontrarse una relación conveniente para la probabilidad de sobrevivencia $({}_hp_x)$ en función de la tasa central de mortalidad $({}_hm_x)$ del grupo y de la elasticidad $[\frac{d}{dx}(\ln {}_hm_x)]$ de las tasas individuales (m_x) en el intervalo. En efecto, tomando en cuenta las relaciones (19) y (20), se puede escribir:

$$ {}_hq_x = \frac{h\,{}_hm_x}{1 + h\,({}_hm_x)/2 + h^2\,({}_hm_x)^2/12 - h^2\,\frac{d}{dx}({}_hm_x)/12} \tag{24} $$

y si se denota por

$$ mh = h({}_hm_x) \tag{25} $$

$$ h^2\,\frac{d}{dx}\,({}_hm_x) = h^2\,c \tag{26} $$

$$ c = \frac{d}{dx}\,({}_hm_x) \tag{27} $$

la probabilidad de morir $({}_hq_x)$ puede escribirse como:

$$ {}_hq_x = mh\,/\,(1 + mh\,/\,2 + m^2h^2\,/12 - ch^2) $$

de modo que la probabilidad de sobrevivir $({}_hp_x)$ es igual a:

$$ {}_hp_x = (1 - mh/2 + m^2\,h^2\,/12 - ch^2)\,/\,(1 + mh/2 + m^2h^2\,/12 - ch^2) \tag{28} $$

con lo cual

$$ -\ln({}_hp_x) = \ln(1+mh/2+m^2h^2/12 - ch^2) - \ln(1-mh/2+m^2h^2/12-ch^2) \tag{29} $$

Tomando en consideración que el desarrollo de $\ln\,(1+v)$ en potencias de (v) es igual a:

$$(v - v^2/2 + v^3/3 + \ldots\ldots) \tag{30}$$

se puede llevar la relación (29) a la forma reducida

$$-\ln ({}_hp_x) = h({}_hm_x)\ [1 + \frac{h\ r_{mx}}{12}\ (h\ {}_hm_x)] \tag{31}$$

siendo

$$r_{mx} = \frac{d}{dx}\ (\ln\ {}_hm_x) \tag{32}$$

la "elasticidad" (o tasa de crecimiento) de las tasas centrales de mortalidad en el intervalo $(x, x+h)$.

De la relación (31) se puede aislar la cantidad (r_{mx}) teniéndose:

$$r_{mx} = -\frac{12/h}{h({}_hm_x)}\ [1 + \frac{\ln({}_hp_x)}{h\ ({}_hm_x)}] \tag{33}$$

relación que permite estudiar la variación de (r_{mx}) en diversas tablas de vida en los siete tramos de edades que nos interesan. Este análisis permite deducir, además, relaciones del tipo (31) por estimar las relaciones de sobrevivencia $({}_hp_x)$ en cada uno de los siete tramos de edades.

Se tomarán siete de las tablas de vida calculadas por J. W. Glover, en las que se puede apreciar una variación importante del nivel general de la mortalidad, (desde una esperanza de vida al nacer de 28,31 años para la tabla 35 hasta 56,16 años para la tabla 40).

Los resultados para cada uno de los siete grupos de edades son los siguientes:

Cuadro 3

VARIACION DEL PARAMETRO (r/12) EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE MENORES DE UN AÑO

Tabla Número	l_1	d_o	m_o	L_o	$-r/12$	W_1
40	91959	8041	0,085499	94048	0,2287	0,4521
54	89718	10282	0,110488	93060	0,1629	0,3348
52	87581	12419	0,135997	91318	0,1834	0,3599
27	84903	15097	0,168021	89852	0,1544	0,3202
18	81493	18507	0,212139	87240	0,1663	0,3447
13	74674	25326	0,306421	82651	0,1532	0,3089
35	*71266*	*28734*	*0,359629*	*79899*	*0,1614*	*0,3263*

siendo w_1 = proporción de muertes de menores de un mes, con respecto a fallecidos menores de 1 año.

Puede apreciarse que existe una alta correlación *(0,9933)* entre los valores *(r/12)* y la proporción (W_1) de nacidos vivos que mueren en el primer mes de vida (mortalidad neonatal).

Aceptando que $r/12 = k\ w_1$ *(34)*

se puede usar como estimación simple para *(k)* la razón:

$$k = \Sigma\ (r/12)\ /\ \Sigma\ w_1 = 0,49$$

de modo que

$$-\ ln\ (\ _1p_o^T\ ) = m_o\ (1 - 0,49\ w_1\ m_o) \qquad (35)$$

será la fórmula que se usará para estimar el valor de $(_1p_o)$

Aplicando la relación *(35)* se tiene:

Cuadro 4

ESTIMACION DE LA PROBABILIDAD DE SOBREVIVIR EL PRIMER AÑO DE VIDA EN SIETE TABLAS DE VIDA

Tabla Número	m_o	w_1	${}_1p_o^T$	${}_1p_o^O$
40	0,085499	0,4521	0,91954	0,91959
54	0,110488	0,3348	0,89719	0,89718
52	0,135997	0,3599	0,87570	0,87581
27	0,168021	0,3202	0,84909	0,84903
18	0,212139	0,3447	0,81502	0,81493
13	0,306421	0,3089	0,74662	0,74674
35	*0,359649*	*0,3263*	*0,71252*	*0,71266*

pudiendo apreciarse la adecuada precisión de las estimaciones $({}_1p_o^T)$ cuando en su cálculo interviene el peso relativo de la mortalidad neonatal (w_1)

Cuadro 5

VARIACION DEL PARAMETRO $(-r)$ EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE EDADES 1-4 AÑOS, APLICANDO RELACION (33)

Tabla Número	${}_4m_1$	${}_4p_1^O$	$(-r)$	${}_4p_1^T$
40	0,010062	0,96083	0,5410	0,96083
54	0,013880	0,94650	0,5187	0,94651
52	0,015014	0,94230	0,5240	0,94232
27	0,021928	0,91719	0,4948	0,91728
18	0,028915	0,89294	0,5422	0,89290
13	0,038155	0,86221	0,5628	0,86202
35	*0,037795*	*0,86336*	*0,5581*	*0,86320*
		PROMEDIO	0,5345	

pudiendo constatarse una "casi" constancia del valor de $(-r)$. Tomando el promedio $(0,5345)$ indicado en el cuadro 5, el valor de $(hr/12)$ es igual a $-0,178$, de modo que la estimación de las probabilidades $_4p_1 = l_5/l_1$, se podrá hacer a través de la relación:

$$-ln\ ({}_4p_1) = 4\ ({}_4m_1)\ [\ 1 - 0,178\ (4\ {}_4m_1)\ ] \qquad (36)$$

En el cuadro 5 se indican además los valores "teóricos" que resultan de aplicar la relación (36). La comparación de los valores estimados $({}_4p_1^T)$ con los observados $({}_4p_1^o)$ indica que la relación (36) es adecuada para la estimación de esa probabilidad de sobrevivencia.

Cuadro 6

VARIACION DEL PARAMETRO $(-r)$ EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE EDADES 5-14 AÑOS, APLICANDO RELACION (33)

Tabla Número	$_{10}m_5$	$_{10}p_5^O$	(-r)	$_{10}p_5^T$
40	0,002433	0,97597	0,0284	0,97600
54	0,003077	0,97015	0,0854	0,97014
52	0,003156	0,96900	0,0904	0,96899
27	0,004081	0,96017	0,1134	0,96010
18	0,006455	0,93747	(0,0050)	0,93771
13	0,007631	0,92672	0,0434	0,92684
35	*0,006947*	*0,93307*	*0,0476*	*0,93314*
		PROMEDIO	0,0680	

Usando como valor de (r), el promedio indicado en el cuadro 6, se tiene:

$$-\ln\left({}_{10}p_5^T\right) = -10\left({}_{10}m_5\right)\left[1 - 0{,}057\left(10\,{}_{10}m_5\right)\right] \qquad (37)$$

La comparación de los valores $({}_{10}p_5^T)$ con los valores calculados $({}_{10}p_5^o)$ indica que la fórmula de estimación de $({}_{10}p_5)$ dada por la relación (37) es adecuada.

Cuadro 7

VARIACION DEL PARAMETRO *(r)* EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE EDADES 15-24 AÑOS, APLICANDO RELACION (33)

Tabla Número	${}_{10}m_{15}$	${}_{10}p_{15}^{o}$	r	${}_{10}p_{15}^{T}$
40	0,004945	0,95162	0,0690	0,95162
54	0,003936	0,96131	0,0716	0,96132
52	0,004549	0,95540	0,0835	0,95541
27	0,005940	0,94212	0,0768	0,94213
18	0,010477	0,90050	(0,0041)	0,89995
13	0,011267	0,89304	0,0434	0,89278
35	*0,013411*	*0,87342*	*0,0820*	*0,87357*
		PROMEDIO	0,0710	

y usando el valor promedio (0,0710) para (r), se tiene la relación:

$$-\ln\left({}_{10}p_{15}\right) = 10\left({}_{10}m_{15}\right)\left[1 + 0{,}059\left(10\,{}_{10}m_{15}\right)\right] \qquad (38)$$

para la estimación de $({}_{10}p_{15})$

En el cuadro 6 se indican además los valores $({}_{10}p_{15}^T)$ que resultan de aplicar la relación (38). Puede constatarse la adecuada reproducción de esa estimación.

Cuadro 8

VARIACION DEL PARAMETRO (r) EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE EDADES 25-44 AÑOS, APLICANDO RELACION (33)

Tabla	${}_{20}m_{25}$	${}_{20}p^{o}_{25}$	r	${}_{20}p^{T}_{25}$
40	0,006961	0,89696	(0,0136)	0,86921
54	0,007124	0,86631	0,0308	0,86634
52	0,008966	0,83329	0,0456	0,83452
27	0,011272	0,79570	0,0365	0,79618
18	0,014252	0,74796	0,0396	0,74899
13	0,015136	0,73623	0,0228	0,73549
35	*0,021664*	*0,64930*	*0,0221*	*0,64244*
		PROMEDIO	0,0329	

y para estimar la probabilidad de sobrevivencia $({}_{20}p_{25})$, la relación

$$-\ln ({}_{20}p^{T}_{25}) = 20 ({}_{20}m_{25}) [1 + 0{,}055 (20 \ {}_{20}m_{25})] \qquad (39)$$

que conduce a una adecuada reproducción de los valores observados.

Cuadro 9

VARIACION DEL PARAMETRO *(r)* EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE EDADES 45-64 AÑOS, APLICANDO RELACION (33)

Tabla	${}_{20}m_{45}$	${}_{20}p^{o}_{45}$	r	${}_{20}p^{T}_{45}$
40	0,015361	0,72759	0,0686	0,72804
54	0,019629	0,66253	0,0744	0,66419
52	0,024283	0,59849	0,0704	0,55984
27	0,027644	0,55665	0,0647	0,55664
18	0,033903	0,48539	0,0584	0,48306
13	0,034222	0,48471	0,0510	0,47953
35	*0,042777*	*0,34831*	*0,0651*	*0,34855*
		PROMEDIO	0,0647	

y para estimar la probabilidad de sobrevivencia $({}_{25}p_{45})$, la relación

$$-\ln ({}_{20}p^{T}_{45}) = 20 ({}_{20}m_{45}) [1 + 0{,}108 (20 \; {}_{20}m_{45})] \qquad (40)$$

que puede considerarse suficientemente adecuada luego de hacer la comparación entre los valores de $({}_{20}p^{o}_{45})$ y $({}_{20}p^{T}_{45})$ en el cuadro 8.

Cuadro 10

VARIACION DEL PARAMETRO *(r)* EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE EDADES 65-84 AÑOS, APLICANDO RELACION (33)

Tabla Número	${}_{20}m_{65}$	${}_{20}p^{0}_{65}$	r
40	0,071223	0,15963	0,1214
54	0,077219	0,14324	0,1003
52	0,084357	0,11745	0,0958
27	0,090453	0,09907	0,0922
18	0,085301	0,13582	0,0599
13	0,089821	0,10676	0,0820
35	*0,115795*	*0;06616*	*0,0447*

pudiendo notarse una variación demasiado amplia de los valores *(r)*.

Conviene detenerse a revisar la bondad de la relación *(33)* para estimar *(r)* cuando la tasa central de mortalidad es más importante. La inadecuada estimación de *(r)* puede detectarse determinando la elasticidad de las (m_x) mediante el ajuste de una ley geométrica a los valores (m_x) calculados de una tabla detallada.

Ajustando una ley geométrica de la forma

$$ln\ (m_v) = a + bv \quad (41)$$

con $v = x - 65$ (en años)

a los valores (m_x) del intervalo 65-84 de las tablas 40, 27 y 35, se llega a los siguientes resultados:

Cuadro 11

CALCULO DE LOS PARAMETROS *(a)* Y *(b)* DE LA LEY GEOMETRICA (41) APLICADA A LAS (m_v) DE LA TABLA DE VIDA No. 40

v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)
1	32,15	6	53,41	11	81,55	16	134,25
2	34,97	7	59,33	12	88,18	17	151,49
3	38,52	8	64,89	13	96,37	18	166,48
4	42,87	9	69,96	14	106,56	19	178,07
5	*47,72*	*10*	*75,58*	*15*	*118,74*	*20*	*191,25*

a = 3,384129

b = 0,094235 (0,1214, relación 33)

r_{vm} = 0,998965

Cuadro 12

CALCULO DE LOS PARAMETROS *(a)* Y *(b)* DE LA LEY GEOMETRICA (41) APLICADA A LAS (m_v) DE LA TABLA DE VIDA No. 27

v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)
1	53,88	6	75,84	11	107,35	16	158,03
2	58,45	7	80,27	12	116,96	17	171,16
3	63,23	8	85,26	13	127,07	18	185,05
4	67,61	9	91,49	14	137,09	19	199,06
5	*71,55*	*10*	*99,08*	*15*	146,71	*20*	*212,78*

a = 3,9001007
b = 0,072435 (0,0922, relación 33)
r_{vm} = 0,998946

Cuadro 13

CALCULO DE LOS PARAMETROS *(a)* Y *(b)* DE LA LEY GEOMETRICA (41) APLICADA A LAS *(m_v)* DE LA TABLA DE VIDA No. 35

v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)	v	m_v(°/oo)
1	92,37	6	106,97	11	137,29	16	164,67
2	95,87	7	111,09	12	143,82	17	169,97
3	98,68	8	116,84	13	149,79	18	179,92
4	101,22	9	123,08	14	154,85	19	182,46
5	*103,72*	*10*	*130,39*	*15*	*159,88*	*20*	*190,77*

a = 4,464374
b = 0,039852 (0,0447, relación 33)
r_{vm} = 0,996771

pudiendo constatarse que los valores *(r)* estimados con la relación *(33)* tienen sesgos de importancia a medida que aumenta la esperanza de vida al nacer.

Por esta razón se procederá a reemplazar la relación *(33)* por otra que conduzca a mejores resultados.

La probabilidad de morir en el intervalo $(x,x+h)$ de acuerdo a la relación *(24)* es igual a:

$$_hq_x = h\,(_hm_x)\,/\,[1 + h\,(_hm_x)\,/2 + h^2\,(_hm_x)^2/12 - h^2\frac{d}{dx}(_hm_x)/12]$$

Si se denota por:

$$ {}_hq_x = q \qquad (42) $$

$$ h\,({}_hm_x) = hm \qquad (43) $$

$$ \frac{d}{dx}(\ln {}_hm_x) = r \qquad (44) $$

$$ \frac{1}{2} - \frac{h}{12}r_m = c \qquad (45) $$

Se puede escribir

$$ q = hm \,/\, (1 + chm + h^2\ m^2 \,/\, 12\,) \qquad (46) $$

y notando que la probabilidad de sobrevivir en el intervalo $(x,\ x+h)$ es

$$ {}_hp_x = 1 - {}_hq_x = 1 - q \qquad (47) $$

se tiene:

$$ -\ln\,({}_hp_x) = \ln\,(\,1 + chm + h^2\ m^2/12) - \ln\,[1 - (1\text{-}c)\,hm + \frac{h^2\ m^2}{12}] \qquad (48) $$

y desarrollando en potencias de (hm) se llega a:

$$ -\ln\,({}_hp_x) = hm\ (1 + y + y^2 + \ldots\ ) = hm\ /\ (1-y) \qquad (49) $$

siendo:

$$ y = (\frac{hr}{12})\ hm \qquad (50) $$

de modo que una relación más aproximada para estimar (r) la constitu - ye la relación:

$$ r = \frac{12}{h}\ [\frac{1}{\ln\,({}_hp_x)} + \frac{1}{h({}_hm_x)}\ ] \qquad (51) $$

Con esta relación se calcularán los valores de (r) para el intervalo (65-84) de las Tablas 40, 54, 52, 27, 18, 13 y 35 calculadas por Glover. Los resultados son los siguientes:

Cuadro 14

VARIACION DEL PARAMETRO *(r)* EN SIETE TABLAS DE VIDA, PARA EL GRUPO DE EDADES 65-84 AÑOS, APLICANDO RELACION (51)

Tabla Número	l_{65}	l_{85}	$_{20}L_{65}$	$_{20}m_{65}$	r	
40	51925	8289	612671	0,071223	0,0942	(0,0942)
54	45455	6511	504335	0,077219	0,0797	
52	38126	4478	398878	0,084357	0,0755	
27	31201	3091	310770	0,090453	0,0721	(0,0724)
18	22302	3029	225940	0,085301	0,0512	
13	19015	2030	189099	0,089821	0,0658	
35	*11246*	*744*	*90695*	*0,115795*	*0,0381*	*(0,0398)*

Indicándose en la última columna los valores correspondientes de *(r)* de las tablas 40, 27 y 35 luego de haber ajustado líneas geométricas (cuadros 10, 11 y 12) a los valores (m_y) del intervalo.

Puede notarse al comparar las (2) estimaciones de *(r)* indicadas en el cuadro 13 que la relación (51), es más adecuada que la relación (33). La probabilidad de sobrevivir en el intervalo $(x, x+h)$ se estima mediante la relación:

$$_hp_x = e^{-h\,(_hm_x)\,/\,[\,1-\frac{hr_m}{12}\,h\,(_hm_x)\,]} \qquad (52)\ 2/$$

siendo (r_m) la tasa de crecimiento de las (m_x) en el intervalo.

Debido a la enorme variación detectada en el valor de *(r)* no es

2/ Bocaz A. y Soto Z. *Tablas de eficacia de uso de anticonceptivos. Su teoría y construcción* CELADE (A 138).
La relación (52) actual representa una mayor aproximación que la relación (54) con la cual se construyeron las tablas de eficacia de uso de anticonceptivos indicada en (A 138).

posible adoptar un valor promedio para el intervalo y se hace necesario por tanto buscar una relación para estimar *(r)* en la que se tome en cuenta el nivel de la mortalidad a esas edades.

Para ello se puede recurrir al uso de una regresión lineal entre la razón:

$$y = \frac{1}{20} \ln ({}_{20}m_{65} \; / \; {}_{20}m_{45}) \qquad (53)$$

y el valor de *(r)*. La ecuación de regresión resultante es:

$$\frac{hr}{12} = 0{,}118 \ln ({}_{20}m_{65} / {}_{20}m_{45}) - 0{,}023 \quad \text{con} \quad h = 20 \qquad (54)$$

de modo que la relación para estimar $\ln ({}_{20}p_{65})$ es:

$$\frac{1}{\ln ({}_{20}p_{65})} = -0{,}023 + 0{,}118 \ln ({}_{20}m_{65} / {}_{20}m_{45}) - 1/20 ({}_{20}m_{65}) \qquad (55)$$

Cuadro 15

ESTIMACION DE LAS PROBABILIDADES DE SOBREVIVENCIA $({}_{20}p_{65})$ EN SIETE TABLAS DE VIDA, USANDO LA RELACION (55)

Tabla Número	${}_{20}m_{45}$	${}_{20}m_{65}$	${}_{20}p^{o}_{65}$	${}_{20}p^{T}_{65}$
40	0,015361	0,071223	0,15963	0,15910
54	0,019629	0,077219	0,14324	0,14015
52	0,024283	0,084357	0,11745	0,11846
27	0,027644	0,090453	0,09907	0,10085
18	0,033903	0,085301	0,13582	0,10549
13	0,034222	0,089821	0,10676	0,11685
35	*0,047777*	*0,015795*	*0,06616*	*0,05759*

Comparando los valores $({}_{20}p^{o}_{65})$ y $({}_{20}p^{T}_{65})$ puede notarse que no se reproducen adecuadamente los valores $({}_{20}p_{65})$ en las siete tablas indicadas. Desde un punto de vista esencialmente práctico, no obstante, puede considerarse adecuado el uso de la relación (55).

En resumen, para la estimación de las siete relaciones de sobrevivencia l_1/l_0; l_5/l_1; l_{15}/l_5; l_{25}/l_{15}; l_{45}/l_{25}; l_{65}/l_{45}; l_{85}/l_{65}, se usarán las siguientes relaciones:

$$\ln (l_1/l_0) = -m_o\,(1 - 0{,}49\, w_1\, m_0) \qquad w_1 = \text{o/o de defunciones de menores de 1 mes}$$

$$\ln (l_5/l_1) = -4({}_4m_1)\,[\,1 - 0{,}178 \cdot 4({}_4m_1)\,]$$

$$\ln (l_{15}/l_5) = -10\,({}_{10}m_5)\,[\,1 - 0{,}057 \cdot 10({}_{10}m_5)\,]$$

$$\ln (l_{25}/l_{15}) = -10\,({}_{10}m_{15})\,[\,1 + 0{,}059 \cdot 10\,({}_{10}m_{15})\,] \qquad (56)$$

$$\ln (l_{45}/l_{25}) = -20\,({}_{20}m_{25})\,[\,1 + 0{,}055 \cdot 20\,({}_{20}m_{25})\,]$$

$$\ln (l_{65}/l_{45}) = -20\,({}_{20}m_{45})\,[\,1 + 0{,}102 \cdot 20\,({}_{20}m_{45})\,]$$

$$1/\ln (l_{85}/l_{65}) = -0{,}023 - 1/20\,({}_{20}m_{65}) + 0{,}118 \ln ({}_{20}m_{65} / {}_{20}m_{45})$$

APLICACION AL CASO DE UN PAIS LATINOAMERICANO

Se aplica el juego de relaciones (56) a las zonas A y B de Argentina para el año 1960 3/, siendo:

Zona A : Capital Federal y Provincia de Buenos Aires
Zona B : Resto del país
con w_1 = 0,42

3/ Cerisola, M. J.E. *Argentina. Análisis de la mortalidad por causas, 1960. CELADE. C 109.*

Cuadro 16

ESTIMACIONES DE LOS SIETE VALORES PIVOTALES DE *(lx)*, EN LA ZONA A, REPUBLICA ARGENTINA. AÑO 1960, PARA EL SEXO MASCULINO

Edades	$h^{m}x$	hp^{T}_{x}	x	l^{o}_{x}	l^{T}_{x}
0 - 1	0,051324	0,95049	1	95067	95049
1 - 5	0,001842	0,99267	5	94370	94352
5 - 15	0,000670	0,99332	15	93740	93722
15 - 25	0,001584	0,98427	25	92265	92248
25 - 45	0,003257	0,93672	45	86407	86410
45 - 65	0,016526	0,71059	65	61077	61402
65 - 85	*0,070127*	*0,17085*	*85*	*10454*	*10474*

Cuadro 17

ESTIMACION DE LOS SIETE VALORES PIVOTALES DE *(lx)*, EN LA ZONA A, REPUBLICA ARGENTINA, AÑO 1960, PARA EL SEXO FEMENINO

Edades	$h^{m}x$	hp^{T}_{x}	x	l^{o}_{x}	l^{T}_{x}
0 - 1	0,042009	0,95921	1	95932	95921
1 - 15	0,000938	0,99627	5	95574	95563
5 - 15	0,000449	0,99552	15	95147	95135
15 - 25	0,000895	0,99109	25	94299	94287
25 - 45	0,001798	0,96461	45	90950	90950
45 - 65	0,008260	0,84537	65	76806	76886
65 - 85	*0,049109*	*0,30009*	*85*	*24112*	*23073*

y para la Zona B (resto de Argentina, año 1960) se tiene:

Cuadro 18

ESTIMACION DE LOS SIETE VALORES PIVOTALES DE *(lx)*, EN LA ZONA B, REPUBLICA ARGENTINA, AÑO 1960, PARA EL SEXO MASCULINO

Edades	$_hm_x$	$_hp^T_x$	x	l^o_x	l^T_x
0 - 1	0,075679	0,92821	1	92843	92821
1 - 5	0,005277	0,97919	5	90912	90889
5 - 15	0,001013	0,98993	15	89996	89973
15 - 25	0,001765	0,98249	25	88421	88397
25 - 45	0,003537	0,93145	45	82345	82337
45 - 65	0,015656	0,72389	65	59723	59603
65 - 85	*0,069352*	*0,17213*	*85*	*10323*	*10259*

Cuadro 19

ESTIMACION DE LOS SIETE VALORES PIVOTALES DE *(lx)*, EN LA ZONA B, REPUBLICA ARGENTINA, AÑO 1960, PARA EL SEXO FEMENINO

Edades	$_hm_x$	$_hp^T_x$	x	l^o_x	l^T_x
0 - 1	0,068663	0,93455	1	93466	93455
1 - 5	0,006172	0,97572	5	91198	91186
5 - 15	0,000843	0,99161	15	90433	90421
15 - 25	0,001589	0,98425	25	89007	88997
25 - 45	0,002808	0,94555	45	84130	84151
45 - 65	0,009903	0,81704	65	68672	68755
64 - 85	*0,048663*	*0,31372*	*85*	*22082*	*21569*

Al comparar los valores teóricos (l_x^{T}) deducidos a base de las relaciones (56) con los cálculos de Cerisola, se puede decir que son bastante adecuados los valores obtenidos aplicando el juego de relaciones (56).

Estimación de la función de sobrevivencia (l_x) *más allá de 85 años y del valor de* T_{85}.

Para este propósito se hará uso de una función bilogística - exponencial de la forma:

$$\ln\left(\frac{1}{l_x} - 1\right) = a + bc^x + d \ln\left(\frac{w}{x} - 1\right) \quad 4/ \qquad (57)$$

de la que nos interesa la variación del parámetro *(c)* según el nivel de e_o^o.

Considerando las tablas de vida números 40, 54, 52, 27, 18, 13 y 35 usadas anteriormente, se encuentra:

Cuadro 20

ESTIMACION DE LOS VALORES (c^5) DE LA LEY BILOGISTICA EXPONENCIAL (57), USANDO LOS PIVOTALES $l_{25}; l_{45}; l_{65}; l_{85}$ DE LAS SIETE TABLAS DE VIDA

Tabla Número	Valor de c^5	Tabla Número	Valor de c^5
40	1,513	18	1,222
54	1,345	13	1,296
52	1,319	35	1,238
27	1,351	PROMEDIO	1,326

De esa manera adoptando para (c^5) el valor de (1,33), la determinación de los parámetros a, b y d de la función bilogística - exponencial se puede realizar usando los valores pivotales: $l_{45}; l_{65};$ y l_{85}. Usando

4/ *Construcción de tablas de vida usando el modelo Logi-Gompertz (aplicación a Chile 1972-1977)* CELADE (inédito).

los valores (l_x) previamente determinados para la Zona A, según sexo, se tiene:

	Sexo masculino	*Sexo femenino*
l_{45}	0,86410	0,90950
l_{65}	0,61402	0,76886
l_{85}	0,10474	0,23073
a	-1,73027	-2,35655
b	0,22097	0,25689
c	(1,33)	(1,33)
d	-1,18351	-0,72264

habiéndose tomado como origen la edad de *45* años y como unidad de intervalo un espaciamiento de *5* años.

Con los valores indicados para los parámetros a, b y d y con c = 1,33 se llega a los siguientes valores de (l_x):

Cuadro 21

ESTIMACION DE LOS VALORES DE *(lx)*, DE LA EDAD (85) AÑOS EN ADELANTE, PARA LA ZONA A, REPUBLICA ARGENTINA. AÑO 1960, SEGUN SEXO

Zona A. Hombres				Zona A. Mujeres			
x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
45	86410	75	35957	45	90950	75	56771
50	82479	80	21874	50	88931	80	40731
55	77322	85	10474	55	86215	85	23073
60	70473	90	3670	60	82409	90	9251
65	61402	95	848	65	76886	95	2367
70	*49758*	100	100	*70*	*68710*	100	325
		105	*0*			*105*	*0*

y si se calculan valores intermedios a las edades 87,5; 92,5, . . . 102,5 y se aplica la regla de trapecios para integrar la función de sobrevivencia desde la edad de 85 años en adelante, se encuentra para (T_{85})

	Zona A. Hombres	Zona A. Mujeres
Bilogística exponencial	46,393	112,161
(l_{85} log l_{85})	42,107	100,670

ESTIMACION DE LA ESPERANZA DE VIDA FRENTE A LAS SIETE EDADES PIVOTALES

Para la determinación de la esperanza de vida a las edades pivotales (x:1, 5, 25, 45, 65 y 85 años) se deben determinar previamente los tiempos $({}_hL_x)$ vividos por la cohorte en cada uno de los intervalos de edades.

Teniendo en cuenta que la tasa central de mortalidad para el intervalo $(x, x+h)$ es igual a:

$$ {}_hm_x = {}_hd_x \; / \; {}_hL_x \tag{58} $$

siendo

$$ {}_hd_x = l_x - l_{x+h} \tag{59} $$

puede deducirse que:

$$ {}_hL_x = {}_hd_x \; / \; {}_hm_x \tag{60} $$

El valor de la esperanza de vida a la edad pivotal (x) es igual a

$$ e_x^o = T_x \; / \; l_x \tag{61} $$

siendo

$$ T_x = \sum_{w}^{x} L_y \tag{62} $$

Para el caso de la Zona A (Capital Federal y Provincia de Buenos Aires de la República Argentina) para el año 1960 según sexo, se tiene:

Cuadro 22

ESTIMACION DE LA ESPERANZA DE VIDA *(e_x^o)*, PARA LA ZONA A, REPUBLICA ARGENTINA, AÑO 1960, PARA EL SEXO MASCULINO

x	l_x^T	$_hm_x$	$_hl_x^o$	$\cdot {}_hL_x^T$	$(T_x)^T$	$(e_x^o)^T$	$(e_x^o)^o$
0	100000	0,051324	96114	96436	6424001	64,24	64,27
1	95049	0,001842	378419	378393	6327565	66,57	66,59
5	94352	0,000670	940285	940299	5949172	63,05	63,07
15	93722	0,001584	931143	930556	5008873	53,44	53,47
25	92248	0,003257	1798672	1792447	4078317	44,21	44,23
45	86410	0,016526	1532722	1513252	2285870	26,45	26,41
65	61402	0,070127	707620	726225	772618	12,58	12,27
85	*10474*	-x-	*42018*	*(46393)*	*46393*	*4,43*	*4,02*

$(T_x)^T$ = valores "teóricos" para T_x

$(e_x^o)^T$ = valores "teóricos" para e_x^o

$(e_x^o)^o$ = valores calculados por M. J. E. Cerisola

Cuadro 23

ESTIMACION DE LA ESPERANZA DE VIDA *(e_x^o)*, EN LA ZONA A, REPUBLICA ARGENTINA, AÑO 1960, PARA EL SEXO FEMENINO

x	l_x^T	$_hm_x$	$_hl_x^0$	$_hL_x^T$	$(T_x)^T$	$(e_x^0)^T$	$(e_x^0)^0$
0	100000	0.042009	96836	97098	7146908	71,47	71,29
1	95921	0.000938	382901	381663	7049810	73,50	73,31
5	95563	0.000449	951956	953229	6668147	69,78	69,57
15	95135	0.000895	947702	947846	5714918	60,07	59,88
25	94287	0.001798	1858311	1855951	4767072	50,56	50,37
45	90950	0.008260	1713353	1702663	2911121	32,01	31,79
65	76886	0.049109	1072992	1095787	1208458	15,72	15,35
85	*23073*	-x-	*105663*	*(112671)*	*112671*	*4,88*	*4,38*

CONCLUSIONES

A través de los ejemplos numéricos indicados en el texto, se puede constatar que es posible construir tablas de vida abreviadas, considerando únicamente siete edades pivotales.

El propósito fundamental de la construcción de tablas de vida, a ese nivel de detalle en lo referente a la edad, es analizar el efecto que las causas de muerte tienen en la esperanza de vida con respecto a esa variable.

Para la elección de esas siete edades, de alguna manera se toma en cuenta no solamente la disponibilidad de información sobre causas de muerte, sino aquellas edades en que resulta de mayor interés conocer los cambios de la esperanza de vida.

Las aplicaciones hechas para el caso de Argentina (1960) indican que no existen diferencias significativas entre los valores de esperanza de vida según edad, obtenidos al construir una tabla de vida basada en 18 grupos de edades y aquellos que se obtienen usando los siete grupos indicados en este estudio.

A través de la lectura del texto se puede comprobar la dificultad creciente en encontrar una adecuada expresión para estimar la relación de supervivencia $({}_hp_x)$ cuando h es igual o superior a 10 y la variación de las tasas centrales de mortalidad (m_x), según edad, no se ajusta a una variación de tipo geométrico.

Esta dificultad pudo obviarse recurriendo al uso de una expresión analítica en la que para el cálculo de las relaciones de supervivencia $({}_hp_x)$ no solamente se toma en cuenta el nivel de la tasa central de mortalidad $({}_hm_x)$ del grupo de edades correspondiente, sino que también la elasticidad de las tasas de mortalidad por edad detallada.

ANEXO

1.— Cálculo de los parámetros *a, b, c* y *d* del modelo bilogístico exponencial:

$$ln\ (1/l_x - 1) = a + bc^x + d\ ln\ (w/x - 1) \qquad (1)$$

usando los valores pivotales:

$l_{25}, l_{45}, l_{65}, l_{85}$ y $w = 105$ *años*

El propósito del uso de este modelo bilogístico-exponencial en el intervalo de edades 25-85 años es conocer los límites de variación del parámetro *(c)*. Aplicando el modelo a diversas tablas de vida es posible conocer la variación del parámetro *(c)* y adoptar un valor medio convencional.

Tomando como origen la edad $x = 25$ años y como unidad de intervalo $h = 20$ años, la distancia común entre los valores pivotales, se pueden establecer las siguientes ecuaciones de condición:

$$y_o = a + b + dz_o \qquad (2)$$

$$y_1 = a + bc + dz_1 \qquad (3)$$

$$y_2 = a + bc^2 + dz_2 \qquad (4)$$

$$y_3 = a + bc^3 + dz_3 \qquad (5)$$

siendo

$$y_o = ln\ (1/l_{25} - 1)$$

$$y_1 = ln\ (1/l_{45} - 1)$$

$$y_2 = ln\ (1/l_{65} - 1) \qquad (6)$$

$$y_3 = (\ln (1/l_{85} - 1)$$

$$z_o = \ln (3{,}2)$$

$$z_1 = \ln (4/3)$$

$$z_2 = \ln (8/13) \qquad (7)$$

$$z_3 = \ln (4/17)$$

Si se eliminan los parámetros *a, b* y *d* de las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) se llega a la siguiente ecuación de segundo grado en *(c)*:

$$A_1 \, c^2 - A_2 c + A_3 = 0 \qquad (8)$$

siendo:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \Delta y_o \, \Delta z_1 - \Delta z_o \, \Delta y_1 \\ A_2 &= \Delta y_o \, \Delta z_2 - \Delta z_o \, \Delta y_2 \\ A_3 &= \Delta y_1 \, \Delta z_2 - \Delta z_1 \, \Delta y_2 \end{aligned}\right] \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_o &= y_1 - y_o \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2 \end{aligned}\right] \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta z_o &= z_1 - z_o \\ \Delta z_1 &= z_2 - z_1 \\ \Delta z_2 &= z_3 - z_2 \end{aligned}\right] \qquad (11)$$

Para el cálculo del parámetro *(c)* se puede usar el siguiente programa para la máquina calculadora Hewlett - Packard 25:

Programa 1

Cálculo de los parámetros *a, b, c, d,* del modelo bilogístico - exponencial:

$ln\ (1/l_x - 1) = a + bc^x + d\ ln\ (w/x - 1)$

apoyado en los valores pivotales l_{25}, l_{45}, l_{65} y l_{85}.

1.1 Cálculos previos

ETAPA 1

y_o	→	STO 0	z_o	→	STO 4
y_1	→	STO 1	z_1	→	STO 5
y_2	→	STO 2	z_2	→	STO 6
y_3	→	STO 3	z_3	→	STO 7

ETAPA 2

$\Delta\ y_2$	→	STO 3	$\Delta\ z_2$	→	STO 7
$\Delta\ y_1$	→	STO 2	$\Delta\ z_1$	→	STO 6
$\Delta\ y_o$	→	STO 1	$\Delta\ z_o$	→	STO 5

1.2 Cálculo del parámetro *(c)*:

RCL 1 RCL 7 * RCL 5 RCL 3 * - RCL 1 RCL 6 * RCL 5 RCL 2 * - STO 0 ÷ STO 4

RCL 2 RCL 7 * RCL 6 RCL 3 * - RCL 0 ÷ (4*) CHS RCL 4 gx^2 + f $\sqrt{x}$

RCL 4 + (2 ÷) STO 3 (c) GTO 00

(39 instrucciones)

1.3 Cálculo de los parámetros *a, b* y *d*

El cálculo de estos parámetros se efectúa a continuación de la determinación de *(c)* con los cálculos complementarios que se indican a continuación:

RCL 2 RCL 1 RCL 3 * - RCL 6 RCL 5 RCL 3 * - ÷ STO 7 (d)

RCL 5 * CHS RCL 1 +RCL 3 (1-) ÷ STO 4 (b) CHS (ln 3,2)
RCL 7 * - RCL0 + (a)

2. Programa 2

Cálculo de los valores (l_x) del modelo bilogístico - exponencial:

$ln\ (1/l_x - 1) = a + bc^x + d\ ln\ (w/x - 1)$

apoyado en los valores pivotales l_{25}, l_{45}, l_{65} y l_{85}.

	a	→	STO 0	c	→	STO 3
(x-25)/5 =	v	→	STO 1	d	→	STO 4
	b	→	STO 2	21	→	STO 5

RCL 3 RCL 1 fy^x RCL 2 * RCLO + RCL 5 RCL 1 (5*) ÷ 1 - fln
RCL 4 *+ ge^x 1 (STO+ 1) + g 1/x GTO OO

(24 instrucciones)

3. Programa 3

Cálculo de los parámetros *a, b* y *d* del modelo bilogístico exponencial:

$ln\ (1/l_x - 1) = a + bc^x + d\ ln\ (w/x - 1)$

usando los valores pivotales l_{45}, l_{65} y l_{85} y un valor convencional para *c.*

$(c = 1,33^4 = 3,129)$

El propósito del uso de este modelo es estimar los valores de (l_x) más allá de la edad 85 años y deducir, a base de esos valores extrapolados, el valor de (T_{85}).

Tomando como origen la edad $x = 45$ y como unidad de intervalo $h = 20$, se tienen las siguientes ecuaciones de condición:

$$y_o = a + b + d\,z_o \tag{12}$$

$$y_1 = a + bc + d\,z_1 \tag{13}$$

$$y_2 = a + bc^2 + dz_2 \tag{14}$$

de modo que:

$$d = (\Delta y_1 - c\,\Delta y_o) / (\Delta z_1 - c\,\Delta z_o) \tag{15}$$

$$b = (\Delta y_o - d\,\Delta z_o) / (c - 1) \tag{16}$$

$$a = y_o - dz_o - b \tag{17}$$

3.1 Cálculos previos:

$\ln(1/45 - 1) = y_o$	→ STO 0		$\ln(4/3)$	→ STO 4
$\ln(1/65 - 1) = y_1$	→ STO 1		$\ln(8/13)$	→ STO 5
$\ln(1/85 - 1) = y_2$	→ STO 2		$\ln(4/17)$	→ STO 6
$(1{,}33)^4 = 3{,}129 = c$	→ STO 3			

3.2 Cálculo de los parámetros a, b y d

RCL 2 RCL 1 - STO 2 RCL 1 RCL 0 - STO 1

RCL 6 RCL 5 - STO 6 RCL 5 RCL 4 - STO 5

RCL 2 RCL 1 RCL 3 * - RCL 6 RCL 5 RCL 3 * - ÷ STO 7 (d)

RCL 5 * CHS RCL 1 + RCL 3 (1-) ÷ STO 6 (b)

CHS RCL 0 ÷ RCL 4 RCL 7 * - GTO 00 (a)

(46 instrucciones)

4. Programa 4

Cálculo de las ordenadas (l_x) del modelo bilogístico - exponencial

$$ln\,(1/l_x - 1) = a + bc^x + d\,ln\,(w/x - 1)$$

apoyado en los valores pivotales l_{45}, l_{65} y l_{85} con $c = 1{,}33$

El propósito al calcular los valores (l_x), de la edad 85 en adelante, es determinar el valor de (T_{85}). Se pueden calcular los valores (l_x) distanciados en 2,5 años y aplicar en seguida la regla de los trapecios para el cálculo de los valores (L_x)

		a	→ STO 0	1,33 =	c	→	STO 3
(x-45)/5	=	v	→ STO 1		d	→	STO 4
		b	→ STO 2		21	→	STO 5

0,5 STO + 1 RCL 3 RCL 1 fy^x RCL 2 * RCL0 + RCL 5 RCL 1 (9+) ÷ 1- fln RCL 4 *+ ge^x (1+) g 1/x STO + 6 GTO OO

(27 instrucciones)

Empezando con $v = 8{,}0$ y llegando hasta $v = 11{,}5$ en (STO 1), en (STO 6) se tendrá la suma de las (l_x) desde $x = 87{,}5$ años hasta $x = 102{,}5$ años. Si a esta suma se le agrega 1/2 de (l_{85}) y este resultado se multiplica por (2,5) se obtiene el valor de (T_{85}).