

# CELADE

CELADE  
DOCUMENTO  
MICROFILMADO  
DOCPAL

---

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

---

Distribución interna

Luis Herrera S.

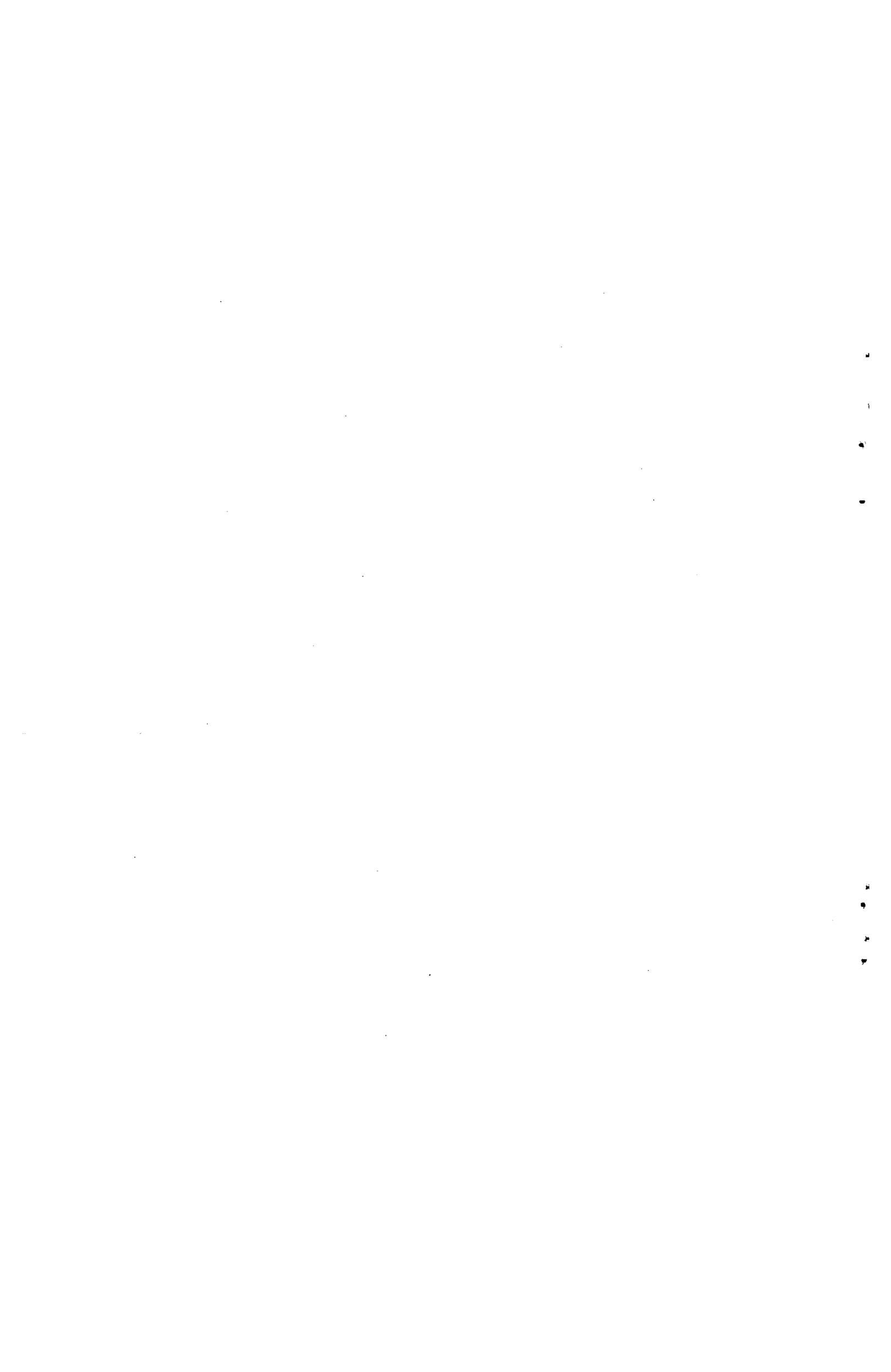
Serie B, N° 31.  
Noviembre, 1970.  
1000.

APUNTES DE ELEMENTOS  
DE ALGEBRA MODERNA



## INDICE

<b>I CONJUNTOS</b> .....	Pág. 1
1. Definición. 2. Notación. 3. Pertenencia. 4. Conjuntos finitos e infinitos. 5. Comparación de tamaños de conjuntos. 6. Igualdad de conjuntos. 7. Conjunto vacío. 8. Subconjuntos. 9. Subconjunto propio. 10. Comparabilidad. 11. Conjuntos disjuntos. 12. Conjunto universal. 13. Conjuntos de conjuntos. 14. Diagrama de Venn. 15. Problemas propuestos.	
<b>II OPERACIONES CON CONJUNTOS</b> .....	Pág. 5
1. Unión. 2. Intersección. 3. Diferencia. 4. Complemento. 5. Propiedad de las operaciones. 6. Leyes de Morgan. 7. Problemas propuestos.	
<b>III CONJUNTOS DE NUMEROS</b> .....	Pág. 9
1. Conjunto de los números naturales. 2. Operaciones con elementos de $N$ . 3. Conjunto de los números enteros. 4. Igualdad y desigualdad entre números enteros. 5. Operaciones con números enteros. 6. Conjunto de los números racionales. 7. Igualdad de números racionales. 8. Operaciones con números racionales. 9. Teorema. 10. Conjunto de los números reales. 11. Igualdad y desigualdad entre números reales. 12. Operaciones en el conjunto de los números reales. 13. Valor absoluto de un número real. 14. Conjunto de los números complejos. 15. Operaciones en el conjunto de los números complejos. 16. Inecuaciones. 17. Intervalos (finitos). 18. Intervalos (infinitos). 19. Intervalos (acotados).	
<b>IV RELACIONES</b> .....	Pág. 22
1. Pares ordenados. 2. Producto cartesiano. 3. Relación. 4. Gráfico de una relación. 5. Dominio y recorrido de una relación. 6. Relación inversa. 7. Relación reflexiva. 8. Relación simétrica. 9. Relación antisimétrica. 10. Relación transitiva. 11. Relación de equivalencia. 12. Problemas propuestos.	
<b>V FUNCIONES</b> .....	Pág. 26
1. Definición de función. 2. Recorrido de una función. 3. Funciones inyectivas. 4. Funciones epiyectivas. 5. Funciones biyectivas. 6. Operadores. 7. Función identidad. 8. Producto de funciones. 9. Inverso de un elemento del co-dominio de una función. 10. Función inversa. 11. Problemas propuestos.	
<b>VI GRUPOS</b> .....	Pág. 31
1. Definición. 2. Ejemplo. 3. Tabla de la operación $\circ$ . 4. Problemas propuestos. 5. Subgrupos.	
<b>VII RAZONAMIENTO MATEMATICO</b> .....	Pág. 34
1. Proposiciones. 2. Inducción y deducción. 3. Tipos de razonamientos usados en matemáticas. 4. La inducción matemática.	



## I - CONJUNTOS

1. **Definición.** Un conjunto es una colección o clase bien definida de objetos.

Los objetos pueden ser números, personas, letras, ríos, etc.

Estos objetos reciben el nombre de *elementos* o *miembros* del conjunto.

Ejemplos:

- |  |   |
|--|---|
| 1) Los números impares.                    | 4) Los funcionarios públicos.                       |
| 2) Las capitales de los países americanos. | 5) Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ |
| 3) Las letras b,c,d,f,g.                   |   |

2. **Notación.** Un conjunto se designa por una letra mayúscula: A, B, C, D, ....., y sus elementos por letras minúsculas: a, b, c, d, x, t, .....

Un conjunto se puede definir de dos maneras:

a) Haciendo una lista de todos los elementos del conjunto, separados por comas y encerrados entre llaves.

Ejemplos:  $A = \{1, 3, 7, 10\}$

$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

Esta representación recibe el nombre de *forma tabular*.

b) Indicando las propiedades que los elementos del conjunto deben cumplir.

Ejemplos:  $B = \{x \mid x \text{ es par}\}$

que se lee "B es el conjunto de números x, tales que x es par".

Nótese que la raya vertical se lee "tal que" o "tales que".

3. **Pertenencia.** Si un objeto x es un elemento de un conjunto A entonces se escribe  $x \in A$ , que se lee "x pertenece a A" o "x está en A".

En caso contrario, es decir si un objeto x no es un elemento de A, se escribe  $x \notin A$ .

Ejemplos: Sea  $A = \{a, e, i, o, u\}$ . Entonces  $a \in A$ ,  $b \notin A$ ,  $f \in A$ .

Sea  $D = \{x \mid x \text{ es impar}\}$ . Entonces  $3 \in D$ ,  $715 \in D$ ,  $40 \notin D$ .

4. **Conjuntos Finitos e Infinitos.** Un conjunto es finito si consiste de un número específico de elementos diferentes.

Es decir, si sus elementos se pueden contar hasta llegar a un término final.

En caso contrario se dice que el conjunto es infinito.

Ejemplos: Sea  $M = \{z \mid z \text{ es una provincia chilena}\}$ . M es entonces finito.

Sea  $P = \{x \mid x \text{ es impar}\}$ . P es entonces infinito.

5. **Comparación de tamaños de conjuntos.** Se puede comparar los tamaños de dos conjuntos mediante el procedimiento llamado "correspondencia uno a uno" o "correspondencia biunívoca".

**Definición.** Entre dos conjuntos A y B existe una correspondencia biunívoca si a cada elemento de cada conjunto le corresponde exactamente un elemento del otro conjunto.

**Definición.** Dos conjuntos A y B son del mismo tamaño si existe una correspondencia biunívoca entre ellos.

Ejemplos. Sea  $A = \{x \mid x \text{ es un país latinoamericano}\}$

Sea  $B = \{z \mid z \text{ es una capital de un país latinoamericano}\}$

Entonces existe una correspondencia biunívoca (país - capital)

entre A y B. Por lo tanto, A y B son del mismo tamaño.

6. **Igualdad de Conjuntos.** Un conjunto A es igual a un conjunto B si ambos tienen los mismo elementos. Es decir, si cada elemento de A es también un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A. En ese caso se escribe:  $A = B$

Ejemplos:

$$1) \left. \begin{array}{l} A = \{1, 2, 3, 4, \} \\ B = \{3, 1, 4, 2, \} \end{array} \right\} \Rightarrow A = B$$

Nótese que el orden de los elementos no cambia el conjunto.

$$2) \left. \begin{array}{l} A = \{5, 6, 7, \} \\ B = \{7, 5, 7, 6, \} \\ C = \{5, 6, 5, 7, \} \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = C$$

Nótese que un conjunto no cambia si sus elementos se repiten.

$$3) \left. \begin{array}{l} E = \{x \mid x^2 - 3x = -2\} \\ F = \{2, 1\} \\ G = \{1, 2, 2, 1\} \end{array} \right\} \Rightarrow E = F = G$$

Si dos conjuntos A y B no son iguales se escribe:

$$A \neq B,$$

que se lee "A es diferente de B".

**7. Conjunto Vacío.** Es el conjunto que no contiene elementos. Se le llama también conjunto nulo. Se denota por el símbolo  $\phi$

Ejemplos:  $A = \{x \mid x \text{ es una persona de más de 200 años de edad}\}$   
 $B = \{z \mid z \text{ es una mujer que haya sido presidente de Chile}\}$   
 $C = \{x \mid x^2 = 4, x \text{ es impar}\}$

En estos tres casos,  $A = B = C = \phi$

Nótese que un conjunto cuyo único elemento es cero es diferente del conjunto vacío, es decir:

$$A = \{0\} \neq \phi$$

### 8. Subconjuntos.

**Definición.** El conjunto A es un subconjunto de B si cada elemento de A es un elemento de B. Es decir, si  $x \in A$  implica  $x \in B$ . Si A es subconjunto de B, se escribe:

$$A \subset B,$$

que se lee "A está contenido en B", o también

$$B \supset A,$$

que se lee "B es un superconjunto de A" o "B contiene a A".

Ejemplo:

$$A = \{1, 3, 5\} \quad , \quad B = \{4, 5, 2, 6, 3, 1\}$$

entonces:  $A \subset B$

A partir de la definición de subconjunto se pueden establecer los siguientes hechos:

- 1) Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo.
- 2) El conjunto vacío es un subconjunto de cada conjunto.
- 3) Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si:  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .
- 4) Si A no es un subconjunto de B (lo que se escribe:  $A \not\subset B$ ), entonces existe, por lo menos, un elemento de A que no es elemento de B.

**9. Subconjunto Propio.** Se dice que A es un subconjunto propio de B si A es subconjunto de B y, además, A es diferente a B. Es decir, si B, además de contener los elementos de A, tiene otros elementos que no están en A.

**10. Comparabilidad.** Dos conjuntos A y B son comparables si  $A \subset B$  o  $B \subset A$

Si  $A \not\subset B$  y  $B \not\subset A$ , se dice que los conjuntos no son comparables. En ese caso existe, al menos, un elemento de A que no está en B y un elemento de B que no está en A.

**11. Conjuntos Disjuntos.** Si A y B no tienen elementos comunes, se dice que A y B son disjuntos.

Ejemplo:  $A = \{ 4, 2, 6, 8 \}$   
 $B = \{ 10, 3, 5, 1 \}$   
 $A$  y  $B$  son disjuntos.

12. **Conjunto Universal.** En muchos problemas conviene definir un conjunto de referencia, llamado conjunto universal. Este conjunto es uno que contiene como subconjuntos a todos los conjuntos del problema considerado.

Se denota por  $U$ .

Ejemplos:

1. En geometría plana  $U$  contiene todos los puntos del plano.
2. En estudios de población humana,  $U$  contiene todos los seres humanos.

13. **Conjuntos de Conjuntos.** Ocurre algunas veces que los elementos de un conjunto son conjuntos en sí mismos. Para evitar la expresión "conjunto de conjuntos" se usa "familia de conjuntos" o "clase de conjuntos".

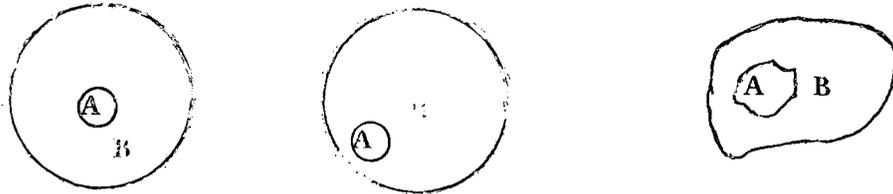
Ejemplo:

$A = \{ \{ 2, 3 \}, \{ 2 \}, \{ 5, 6 \} \}$  es una familia de conjuntos; sus elementos son los conjuntos  $\{ 2, 3 \}$ ,  $\{ 2 \}$  y  $\{ 5, 6 \}$

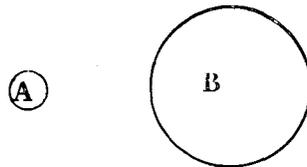
14. **Diagramas de Venn.** Una manera fácil e instructiva de ilustrar las relaciones entre conjuntos consiste en representar cada conjunto por un círculo o cualquier figura plana cerrada. Estas representaciones se conocen con el nombre de diagramas de Venn.

Ejemplos:

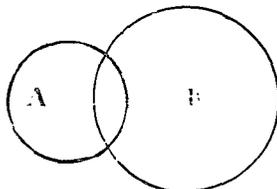
1. Sean  $A \subset B$  y  $A \neq B$ . Podemos representar esta relación por cualquiera de los siguientes diagramas:



2. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos no comparables.
  - a) Si  $A$  y  $B$  son disjuntos se pueden representar por el diagrama:



- b) Si  $A$  y  $B$  no son disjuntos se pueden representar por el diagrama:



15. **Problemas Propuestos.**

- 1) Invente 3 ejemplos de conjuntos y exprese cada uno de ellos en forma tabular y por comprensión.

2) Sea  $A = \{x \mid x \text{ es un número entero y } 4 < x < 12\}$

Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a)  $5 \in A$ ; b)  $15 \in A$ ; c)  $12 \in A$ ; d)  $3 \notin A$ .

3) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto  $A = \{a, a, a, a, a, a\}$ ?

4) Indique todos los pares de conjuntos disjuntos de entre los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 3, 4, \}$ ;  $B = \{2, 0, 3, 1\}$  ;  $C = \{4, 5, 6\}$  ;

$D = \{5, 6, 7\}$ ;  $E = \{2, 4, 6, 8\}$

5) Si

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ;  $B = \{2, 3, 4\}$  ;  $C = \{2, 4, 5\}$

¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a)  $A \subset B$ ; b)  $A \subset C$ ; c)  $B \subset A$ ; d)  $B \subset C$ ; e)  $C \subset A$ ;

f)  $C \subset B$ ; g)  $C \subset C$ ; h)  $\phi \subset B$ ; i)  $B = C$ .

6) Si  $D = \{0, 4, 7\}$ , decimos que  $7 \in D$  o  $\{7\} \subset D$ ; pero no podemos decir  $7 \subset D$ , porque 7 no es un conjunto. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a)  $4 \in D$ ; b)  $4 \subset D$ ; c)  $0 \in D$ ; d)  $\phi \in D$ ; e)  $\phi \subset D$ ;

f)  $0 \subset D$ ; g)  $4 = \{4\}$ ; h)  $4 \in \{4\}$ ; i)  $0 = \phi$ ; j)  $0 \notin \phi$

7) Sea  $A = \{x \mid 2x = 6\}$  y sea  $b = 3$ . ¿Es verdad que  $b = A$ ?

8) Diga cuáles de los siguientes conjuntos son iguales y por qué:

$A = \{r, t, s\}$ ;  $B = \{s, t, r, s\}$ ;

$C = \{t, s, t, r\}$ ;  $D = \{s, r, s, t\}$

9) ¿Cuántos conjuntos vacíos hay entre los siguientes?

$A = \{x \mid x^2 = 9 \text{ y } 2x = 4\}$ ;  $B = \{x \mid x + 8 = 8\}$

10) Escriba todos los sub-conjuntos del conjunto  $A = \{x, y, z\}$

11) Explique qué entiende por el símbolo  $\{\{2, 3\}\}$

12) Sea

$M = \{2, \{4, 5\}, 4\}$ . ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son correctas y por qué?

1)  $\{4, 5\} \subset M$ ; 2)  $\{4, 5\} \in M$ ; 3)  $\{\{4, 5\}\} \subset M$

13) Sean:

$U = \{x \mid x \text{ es chileno}\}$ ;

$A = \{x \mid x \text{ es chileno nacido en año bisiesto}\}$ ;

$B = \{x \mid x \text{ es chileno nacido en año par}\}$ ;

$C = \{x \mid x \text{ es chileno nacido en año impar}\}$ ;

Expresé los conjuntos U, A y B mediante un diagrama de Venn.

Lo mismo con los conjuntos U, B, C.

## II .. OPERACIONES CON CONJUNTOS

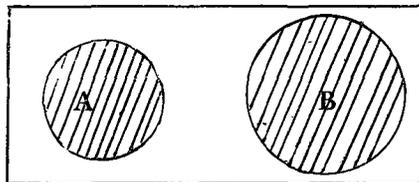
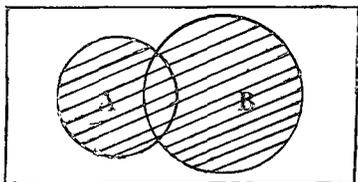
1. **Unión.** La unión de los conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a  $A$  ó a  $B$  o a ambos. Se denota por:

$$A \cup B,$$

que se lee "A unión B". Más concisamente:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

En los siguientes diagramas se ha rayado el área correspondiente a  $A \cup B$



Nótese que a partir de la definición se tiene que

$$1) A \cup B = B \cup A$$

$$2) A \subset (A \cup B) \text{ y } B \subset (A \cup B). \text{ Es decir que } A \text{ y } B \text{ son siempre subconjuntos de } A \cup B.$$

2. **Intersección.** La intersección de los conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto de los elementos comunes a  $A$  y a  $B$ . Se denota por:

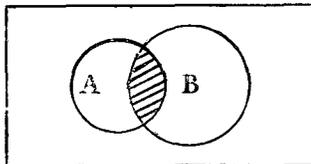
$$A \cap B,$$

que se lee "A intersección B".

Podemos escribir

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$$

En el siguiente diagrama de Venn, el conjunto  $A \cap B$  está representado por el área rayada:



Nótese que de la definición se tiene que:

$$1) A \cap B = B \cap A$$

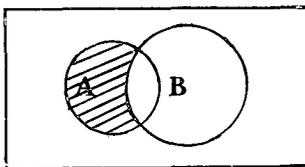
$$2) (A \cap B) \subset A \text{ y } (A \cap B) \subset B. \text{ Es decir, } A \cap B \text{ es un subconjunto de } A \text{ y de } B.$$

$$3) \text{ Si } A \text{ y } B \text{ son disjuntos: } A \cap B = \phi$$

3. **Diferencia.** La diferencia de los conjuntos  $A$  y  $B$ , representada por  $A - B$ , es el conjunto de los elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$ . Es decir,

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

La representación de  $A - B$ , en el siguiente diagrama de Venn, es la parte rayada:



Nótese que:

$$1) (A - B) \subset A.$$

$$2) \text{ Los conjuntos } A - B, A \cap B \text{ y } B - A \text{ son disjuntos dos a dos. Es decir:}$$

$$(A - B) \cap (A \cap B) = (A - B) \cap (B - A) = (A \cap B) \cap (B - A) = \phi$$

4. **Complemento.** El complemento de un conjunto  $A$  es el conjunto de los elementos que no pertenecen a  $A$ ; es decir, la diferencia de los conjuntos  $U$  y  $A$ .

El complemento de A se denota por  $A'$ . Se tiene entonces que:

$$A' = \{ x \mid x \in U \text{ y } x \notin A, \}$$

o, simplemente:

$$A' = \{ x \mid x \notin A \}$$

Nótese que a partir de la definición de  $A'$ , se tiene:

1) La unión de un conjunto A y su complemento  $A'$  es el conjunto universal, es decir,

$$A \cup A' = U$$

2) A y su complemento  $A'$  son disjuntos, o sea,

$$A \cap A' = \phi$$

3) El complemento del conjunto universal U es el conjunto vacío  $\phi$  y viceversa, es decir:

$$U' = \phi \text{ y } \phi' = U.$$

4) El complemento del complemento de un conjunto A es el conjunto A, o sea,

$$(A')' = A.$$

5)  $A - B = A \cap B'$ .

Demostración:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \} = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B' \} = A \cap B'.$$

## 5. Propiedades de las Operaciones.

a) Conmutatividad: Hemos visto que las operaciones de unión e intersección de conjuntos tienen la siguiente propiedad, llamada de conmutatividad,

$$A \cup B = B \cup A.$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

b) Asociatividad: Esta propiedad, poseída por las operaciones de unión e intersección, se puede expresar como sigue:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

y se puede verificar a partir de las respectivas definiciones.

c) Distributividad de la intersección sobre la unión: Esta propiedad se puede expresar como sigue:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Demostración:** Probaremos que cada elemento del conjunto del primer miembro es un elemento del conjunto del segundo miembro y viceversa.

Sea x un elemento cualquiera de  $A \cap (B \cup C)$ ; por definición de la intersección de dos conjuntos

$$x \in A \text{ y } x \in (B \cup C)$$

o sea que  $x \in A$ , y  $x \in B$  o  $x \in C$

Entonces ocurre al menos una de las dos situaciones siguientes:

$$\text{o } x \in A \text{ y } x \in B \text{ y, por lo tanto, } x \in A \cap B$$

$$x \in A \text{ y } x \in C \text{ y, por lo tanto, } x \in A \cap C.$$

Como  $x \in A \cap B$  o  $x \in A \cap C$ , entonces,  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Esto significa que

$$A \cap (B \cup C) \text{ es un subconjunto de } (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

o sea que,

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Demostraremos ahora que el segundo miembro de la igualdad está incluido en el primero.

Sea x un elemento cualquiera de  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Por definición de unión  $x \in (A \cap B)$  o  $x \in (A \cap C)$ , por lo tanto,

$x \in A$  y  $x \in B$  o  $x \in A$  y  $x \in C$ , luego  $x \in A$  y  $x \in B \cup C$ , es decir,

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

Esto significa que,

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

y como ya habíamos demostrado que,

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

concluimos que,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

## 6. Leyes de Morgan.

1) El complemento de la unión de dos conjuntos es la intersección de los complementos. Es decir:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Para demostrar esta igualdad, demostraremos que todo punto del primer conjunto pertenece al segundo y viceversa.

Sea  $x$  un punto cualquiera de  $(A \cup B)'$  :

$$x \in (A \cup B)'$$

o sea

$$x \notin (A \cup B)$$

por lo tanto,  $x \notin A$ ,  $x \notin B$ , entonces  $x \in A'$ ,  $x \in B'$  y por consiguiente

$$x \in A' \cap B'$$

Por otra parte, si  $x \in A' \cap B'$  entonces  $x \in A'$  y  $x \in B'$ ; luego,  $x \notin A$  y  $x \notin B$ , o sea que,  $x \notin (A \cup B)$ , por lo tanto,  $x \in (A \cup B)'$ .

La igualdad queda entonces demostrada.

2) El complemento de la intersección es la unión de los complementos. Es decir,

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Demostración:

Sea  $x \in (A \cap B)'$ ; entonces  $x \notin (A \cap B)$ , o sea,  $x \notin A$  o  $x \notin B$ ; por lo tanto,  $x \in A'$  o  $x \in B'$ , o sea,  $x \in (A' \cup B')$ .

Por otra parte, si  $x \in (A' \cup B')$ ,  $x \in A'$  o  $x \in B'$ , o sea,  $x \notin A$  o  $x \notin B$ , por lo tanto,  $x \notin (A \cap B)$  y entonces  $x \in (A \cap B)'$ .

La igualdad queda demostrada.

## 7. Problemas Propuestos.

1) Dados los conjuntos:  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}$$

$$Z = \{4, 6, 8\}$$

encontrar:

a)  $Y \cup Y$ ; b)  $Y \cup Z$ ; c)  $Z \cup X$ ; d)  $X \cap Y$ ; e)  $X'$ ; f)  $Y'$ ;

g)  $Z'$ ; h)  $(X \cup Y)$ ; i)  $(Y \cap Z)'$ ; j)  $X' \cup Y'$ ; k)  $X' \cap Y'$ .

2) Sean:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{3, 4, 5, 6\}$$

Encontrar:

a)  $A \cup B$ ; b)  $A \cup C$ ; c)  $B \cup B$ ; d)  $(A \cup B) \cup C$ ; e)  $A \cup (B \cup C)$ ;

f)  $A \cap B$ ; g)  $A \cap C$ ; h)  $B \cap B$ ; i)  $(A \cap B) \cap C$ ; j)  $A \cap (B \cap C)$ ;

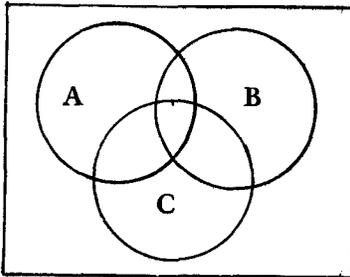
k)  $A - B$ ; l)  $B - C$ ; m)  $B - A$ ; n)  $B - B$ ; o)  $A'$

p)  $B'$ ; q)  $(A \cup B)'$ ; r)  $(A)'$ ; s)  $(B - C)'$ .

3) Ilustrar, utilizando un diagrama de Venn:

a)  $B'$ ; b)  $A \cup B$ ; c)  $(A \cup B)'$ ; d)  $B - A$ ; e)  $(B - A)'$

4) Marcar en el diagrama de Venn adjunto



- a)  $A \cap (B \cup C)$
- b)  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- c)  $A \cup (B \cap C)$
- d)  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

5) Comprobar que:

- a)  $A \cup A' = U$
- b)  $A \cap A' = \phi$
- c)  $U' = \phi$
- d)  $\phi' = U$
- e)  $(A')' = A$

## III - CONJUNTOS DE NUMEROS

1. Conjunto de los Números Naturales. Sea  $N$  un conjunto cuyos elementos satisfacen los siguientes axiomas:

- a<sub>1</sub>)  $1 \in N$ .
- a<sub>2</sub>) Para cada  $n \in N$  existe un elemento de  $N$  llamado "Siguiente de  $n$ " y representado por  $sg(n)$ .
- a<sub>3</sub>) No existe  $n \in N$  tal que  $sg(n) = 1$ .
- a<sub>4</sub>) Si  $n_1, n_2 \in N$  y  $sg(n_1) = sg(n_2)$ , entonces  $n_1 = n_2$ .
- a<sub>5</sub>) (Axiomas de inducción completa). Sea  $C \subset N$ , tal que se verifica:
  - (i)  $1 \in C$ , (ii) si  $n \in C$ , entonces  $sg(n) \in C$ . Entonces  $C = N$ .

Al conjunto  $N$  se le llama "el conjunto de los números naturales", y sus elementos se llaman números naturales.

2. Operaciones con Elementos de  $N$ .

1) *Suma*. Sean  $n_1, n_2 \in N$ . Llamaremos suma de estos números ( que denominaremos sumandos) al número natural designado por  $n_1 + n_2$ , que se obtiene por recurrencia a partir de los siguientes axiomas:

- b<sub>1</sub>)  $n + 1 = sg(n)$ .
- b<sub>2</sub>)  $n_1 + sg(n_2) = sg(n_1 + n_2)$ .

Supongamos que deseamos calcular la suma asociada a los sumandos 2 y 3. Es decir, deseamos calcular  $2 + 3$ . Procederemos de la siguiente manera:

$$2 + 3 = 2 + sg(2) = sg(2 + 2)$$

$$2 + 2 = 2 + sg(1) = sg(2 + 1)$$

$$2 + 1 = sg(2) = 3.$$

Entonces:

$$2 + 3 = sg(2 + 2) = sg(sg(2 + 1)) = sg(sg(3)) = sg(4) = 5.$$

Puede verificarse, utilizando el mismo tipo de recurrencia, que:

- a)  $n + 1 = 1 + n$ .
- b)  $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$  (propiedad conmutativa).
- c)  $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$  (propiedad asociativa).
- d) Si  $n_1 + n_2 = n_1 + n_3$ , entonces  $n_2 = n_3$  (ley de cancelación).

Demostraremos a), a manera de ejemplo. Sea  $C$  el conjunto de los números naturales  $n$  tales que,  $n + 1 = 1 + n$ . Entonces:

(i)  $1 \in C$ , ya que  $1 + 1 = sg(1) = 1 + 1$ .

(ii) Supongamos que  $n \in C$ , es decir,  $n + 1 = 1 + n$ .

Entonces:

$$sg(n) + 1 = sg(sg(n)) = sg(n + 1) \quad (\text{por } b_1)$$

$$1 + sg(n) = sg(1 + n) = sg(n + 1) \quad (\text{por } b_2 \text{ y (ii)})$$

Luego:  $sg(n) + 1 = 1 + sg(n)$ , es decir,  $sg(n) \in C$ . Finalmente, por el axioma a<sub>5</sub>,  $C = N$ , con lo que se concluye que la igualdad a) es válida para todo número natural.

*Desigualdad*. Sean  $n_1, n_2 \in N$ . Se dice que  $n_1$  es menor que  $n_2$  (y se escribe  $n_1 < n_2$ ) si existe  $n_3 \in N$  tal que  $n_1 + n_3 = n_2$ . Ejemplo:  $3 < 18$ , ya que existe 15 tal que  $3 + 15 = 18$ .

2) *Resta.* Sean  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Si existe  $n_3 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_1 + n_3 = n_2$ , se dice que  $n_3$  es la diferencia entre  $n_2$  y  $n_1$  y se escribe  $n_3 = n_2 - n_1$ . A la operación se le llama resta, al número  $n_2$  minuendo y a  $n_1$  sustraendo.

La diferencia entre  $n_2$  y  $n_1$  existe si, y sólo si,  $n_1 < n_2$ .

3) *Multiplicación.* Sean  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Llamaremos producto de estos números (que denominaremos factores) al número natural designado por  $n_1 \cdot n_2$ , que se obtiene por recurrencia a partir de los siguientes axiomas:

$$c_1) \quad n \cdot 1 = n.$$

$$c_2) \quad n_1 \cdot \text{sg}(n_2) = n_1 \cdot n_2 + n_1.$$

A la operación se le llama multiplicación.

Supongamos que deseamos calcular  $4 \cdot 3$ . Procedemos de la siguiente manera:

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot \text{sg}(2) = 4 \cdot 2 + 4 \quad (\text{por } c_2),$$

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot \text{sg}(1) = 4 \cdot 1 + 4 \quad (\text{por } c_2),$$

$$4 \cdot 1 = 4 \quad (\text{por } c_1),$$

En consecuencia:

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot 2 + 4 = (4 \cdot 1 + 4) + 4 = (4 + 4) + 4 = 12.$$

Pueden verificarse las siguientes propiedades:

$$a) \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n$$

$$b) \quad n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1 \quad (\text{Por propiedad conmutativa}).$$

$$c) \quad (n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) \quad (\text{propiedad asociativa}).$$

$$d) \quad n_1 \cdot (n_2 + n_3) = (n_1 \cdot n_2) + (n_1 \cdot n_3) \quad (\text{propiedad distributiva}).$$

A manera de ejemplo demostraremos d). Sea  $C$  el conjunto de los números naturales  $n_1$  tales que, para todo  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  se tiene  $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = (n_1 \cdot n_2) + (n_1 \cdot n_3)$ . Entonces:

$$(i) \quad 1 \in C, \text{ ya que } 1 \cdot (n_2 + n_3) = n_2 + n_3 \quad (\text{por a y } c_1), \text{ y}$$

$$(1 \cdot n_2) + (1 \cdot n_3) = n_2 + n_3 \quad (\text{por a y } c_1), \text{ con lo que se tiene:}$$

$$1 \cdot (n_2 + n_3) = (1 \cdot n_2) + (1 \cdot n_3)$$

$$(ii) \quad \text{Supongamos que } n_1 \in C, \text{ es decir, } n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$$

para todo  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ .

Entonces:

$$\text{sg}(n_1) \cdot (n_2 + n_3) = (n_2 + n_3) \cdot \text{sg}(n_1) \quad (\text{por b}),$$

$$(n_2 + n_3) \cdot \text{sg}(n_1) = (n_2 + n_3) \cdot n_1 + (n_2 + n_3) \quad (\text{por } c_2),$$

es decir:

$$\text{sg}(n_1) \cdot (n_2 + n_3) = (n_2 + n_3) \cdot n_1 + (n_2 + n_3),$$

pero:

$$(n_2 + n_3) \cdot n_1 + (n_2 + n_3) = n_1 \cdot (n_2 + n_3) + (n_2 + n_3) =$$

$$= n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + n_2 + n_3 \quad (\text{por b y (ii)}), \text{ con lo que:}$$

$$\text{sg}(n_1) \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + n_2 + n_3.$$

Por otra parte:

$$\text{sg}(n_1) \cdot n_2 + \text{sg}(n_1) \cdot n_3 = n_2 \cdot \text{sg}(n_1) + n_3 \cdot \text{sg}(n_1) =$$

$$= n_2 \cdot n_1 + n_2 + n_3 \cdot n_1 + n_3 = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + n_2 + n_3$$

(por b,  $c_2$ , b y propiedad conmutativa de la suma).

Entonces:  $\text{sg}(n_1) \cdot (n_2 + n_3) = \text{sg}(n_1) \cdot n_2 + \text{sg}(n_1) \cdot n_3$ ; es decir,  $\text{sg}(n_1) \in C$ .

Finalmente, por el axioma  $a_5$ ,  $C = \mathbb{N}$ ; es decir, que la propiedad d) es válida para todo  $n_1 \in \mathbb{N}$  y, más generalmente, para todo  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ .

**Múltiplo.** Sean  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $n_1$  es múltiplo de  $n_2$  ( y se escribe  $n_1 \doteq n_2$  ) si existe  $n_3 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_2 \cdot n_3 = n_1$ . Ejemplo:  $24 \doteq 3$ , ya que existe 8 tal que  $3 \cdot 8 = 24$ .

4) **División exacta.** Sean  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , con  $n_1 = n_2$  y sea  $n_3 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_2 \cdot n_3 = n_1$ . Entonces diremos que  $n_3$  es el cociente exacto entre  $n_1$  y  $n_2$  y escribiremos  $n_3 = n_1 \div n_2$ . Al número  $n_1$  se le llama dividendo, a  $n_2$  divisor y a la operación división exacta. El cociente  $n_1 \div n_2$  existe si y sólo si  $n_1 \doteq n_2$ .

5) **División entera.** Sean  $n_1, n_2, d, r \in \mathbb{N}$ , tales que  $n_1 = n_2 \cdot d + r$ , con  $r < n_2$ . Se dice entonces que  $d$  es el cociente entero de la división entre  $n_1$  y  $n_2$  y que  $r$  es el resto de dicha división. Ejemplo: El cociente entero entre 25 y 4 es 6 y el resto es 1, ya que  $25 = 4 \cdot 6 + 1$

3. **Conjunto de los Números Enteros.** Si  $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ , consideremos el par  $(a_1 - a_2)$ , que leeremos "a<sub>1</sub> guión a

Entonces, el conjunto de los números enteros es el conjunto de pares  $(a_1 - a_2)$ .

Si  $a_1 > a_2$  y además  $a_1 - a_2 = d$ :

- a) al par  $(a_1 - a_2)$  lo designaremos por el símbolo  $+ d$ , es decir  $(a_1 - a_2) = + d$  y estos pares constituyen los llamados enteros positivos.
- b) al par  $(a_2 - a_1)$  lo representaremos por el símbolo  $- d$  y es un elemento del conjunto de los llamados enteros negativos.

Por último, al par  $(a_1 - a_1)$  lo representaremos por el símbolo 0 y se dice que es el cero entero o simplemente cero.

4. **Igualdad y Desigualdad entre Números Enteros.** Se dice que  $(a_1 - a_2)$  es igual a  $(b_1 - b_2)$  si  $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$ . Ejemplo:  $(3 - 5) = (6 - 8)$ , ya que  $3 + 8 = 5 + 6$ .

Puede demostrarse que  $(a_1 - a_2) = (b_1 - b_2)$  si y sólo si el símbolo que designa a cada uno de los pares es el mismo. Esto nos permite trabajar la teoría de los números enteros con los símbolos  $+d, -d$  y 0, en vez de utilizar los pares de números naturales.

Si, por ejemplo, escribimos el entero  $+2$ , este corresponde a infinitos pares de números naturales, tales como  $(3 - 1), (4 - 2), (5 - 3)$ , etc. Pero como todos ellos son iguales, usaremos el símbolo  $+2$  para representar a cualquiera de estos pares. Análogamente para otros símbolos.

Dado el entero  $(a_1 - a_2)$ , llamaremos *valor absoluto* de dicho entero, que representaremos por  $| (a_1 - a_2) |$ , al número  $d$ .

Se dice que  $(a_1 - a_2) < (b_1 - b_2)$  si  $a_1 + b_2 < a_2 + b_1$  Ejemplo:  
 $(2 - 5) < (1 - 2)$ , ya que  $2 + 2 < 5 + 1$ .

Puede demostrarse que:

- a) Dados dos números enteros positivos, es menor el que tiene menor valor absoluto.
- b) Dados dos números enteros negativos, es menor el que tiene mayor valor absoluto.
- c) Todo número entero negativo es menor que 0 y es menor que cualquiera número entero positivo.
- d) El cero es menor que cualquiera número entero positivo.
- e) Si  $(a_1 - a_2) < (b_1 - b_2)$  y  $(b_1 - b_2) < (c_1 - c_2)$ , entonces  $(a_1 - a_2) < (c_1 - c_2)$  (propiedad transitiva de la desigualdad).

5. **Operaciones con Números Enteros.**

1) **Suma.** Sean dos números enteros  $(a_1 - a_2)$  y  $(b_1 - b_2)$ . Se llama suma de estos dos números, que denominaremos sumandos, al número entero  $((a_1 + b_1) - (a_2 + b_2))$ , que representaremos por:

$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$ . Es decir:

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = [(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)].$$

Ejemplo:  $(3 - 16) + (5 - 4) = (8 - 20)$ .

Puede demostrarse que:

- a)  $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = (b_1 - b_2) + (a_1 - a_2)$  (propiedad conmutativa).  
 b)  $[(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)] + (c_1 - c_2) = (a_1 - a_2) + [(b_1 - b_2) + (c_1 - c_2)]$  (propiedad asociativa).  
 c)  $(a_1 - a_2) + 0 = (a_1 - a_2)$ .  
 d)  $(+ d_1) + (+ d_2) = +(d_1 + d_2)$  (la suma de dos números enteros positivos es el número entero positivo cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos).  
 e)  $(- d_1) + (- d_2) = -(d_1 + d_2)$  (la suma de dos números enteros negativos es el número entero negativo cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos).  
 f)  $(+ d) + (- d) = 0$ .  
 g)  $(+ d_1) + (- d_2) = \begin{cases} +(d_1 - d_2) & \text{si } d_1 > d_2 \\ -(d_2 - d_1) & \text{si } d_2 > d_1 \end{cases}$

donde  $(d_1 - d_2)$  y  $(d_2 - d_1)$  son dos números naturales que, con el signo  $+$  o el signo  $-$  que se les antepone, constituyen símbolos de números enteros.

Es decir, si se tiene un entero positivo y un entero negativo, su suma es un entero cuyo valor absoluto es la diferencia entre los valores absolutos de los sumandos, y será positiva si el valor absoluto del positivo es mayor y negativa en el caso contrario.

A manera de ilustración, demostraremos e). Sean  $(a_1 - a_2) = -d_1$  y  $(b_1 - b_2) = -d_2$ . Entonces:

$$(-d_1) + (-d_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = ((a_1 + b_1) - (a_2 + b_2))$$

Como en este caso es  $a_1 < a_2$  y  $b_1 < b_2$ , se tiene que  $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ .

Entonces:

$$(-d_1) + (-d_2) = -[(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)] = -[(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)] = -(d_1 + d_2).$$

2) *Resta.* Sean  $(a_1 - a_2)$ ,  $(b_1 - b_2)$  y  $(c_1 - c_2)$  tres números enteros tales que

$$(b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) = (a_1 - a_2). \text{ Entonces se dice que } (c_1 - c_2) \text{ es}$$

la *diferencia* que resulta de *restar* el *sustraendo*  $(b_1 - b_2)$  del *minuendo*  $(a_1 - a_2)$ . Al número entero diferencia  $(c_1 - c_2)$  se lo representa por  $(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)$ . Es decir:

$$(c_1 - c_2) = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2).$$

En el caso de los números naturales vimos que la diferencia existe sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo. En cambio, en el caso de los números enteros la diferencia existe *siempre* y es el número  $((a_1 + b_2) - (a_2 + b_1))$ , ya que:

$$(b_1 - b_2) + ((a_1 + b_2) - (a_2 + b_1)) = ((b_1 + a_1 + b_2) - (b_2 + a_2 + b_1)) = (a_1 - a_2).$$

El número  $(a_2 - a_1)$  se llama *opuesto* al número  $(a_1 - a_2)$ .

Es claro que:

- a) El opuesto de  $+d$  es  $-d$ , y el opuesto de  $-d$  es  $+d$ .  
 b) El opuesto de 0 es 0.  
 c) El opuesto del opuesto de un entero es el mismo entero.  
 d) La diferencia entre los números  $(a_1 - a_2)$  y  $(b_1 - b_2)$  es la suma entre  $(a_1 - a_2)$  y el opuesto de  $(b_1 - b_2)$ .

De lo anterior se deduce que:

- (i)  $(+d_1) - (+d_2) = (+d_1) + (-d_2)$ .  
 (ii)  $(+d_1) - (-d_2) = (+d_1) + (+d_2)$ .  
 (iii)  $(-d_1) - (+d_2) = (-d_1) + (-d_2)$ .  
 (iv)  $(-d_1) - (-d_2) = (-d_1) + (+d_2)$ .

- 3) *Multiplicación.* Sean  $(a_1 - a_2)$  y  $(b_1 - b_2)$  dos números enteros. Llamaremos producto de estos números ( que denominaremos factores) al número entero  $[(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)]$  que representaremos por  $(a_1 - a_2) \cdot (b_1 - b_2)$ .

De aquí en adelante escribiremos el producto de dos números naturales  $a$  y  $b$  indistintamente como  $a \cdot b$  ó simplemente como  $ab$ .

Pueden demostrarse las siguientes propiedades:

- a) Conmutativa:  $(a_1 - a_2) \cdot (b_1 - b_2) = (b_1 - b_2) \cdot (a_1 - a_2)$ .  
 b) Asociativa:  $(a_1 - a_2) \cdot (b_1 - b_2) \cdot (c_1 - c_2) = (a_1 - a_2) \cdot [(b_1 - b_2) \cdot (c_1 - c_2)]$   
 c) Distributiva:  $(a_1 - a_2) \cdot (b_1 - b_2) + (a_1 - a_2) \cdot (c_1 - c_2) = [(a_1 - a_2) \cdot (b_1 - b_2)] + [(a_1 - a_2) \cdot (c_1 - c_2)]$

Enunciaremos a continuación algunos teoremas referentes a la multiplicación de enteros:

- t1)  $(+d_1) \cdot (+d_2) = +(d_1 d_2)$   
 t2)  $(+d_1) \cdot (-d_2) = -(d_1 d_2)$   
 t3)  $(-d_1) \cdot (+d_2) = -(d_1 d_2)$   
 t4)  $(-d_1) \cdot (-d_2) = +(d_1 d_2)$   
 t5)  $(\pm d) \cdot (+1) = \pm d$   
 t6)  $(\pm d) \cdot (-1) = \mp d$   
 t7) Sea un entero  $(a = \pm d)$  y  $b = a^{2n} = a \cdot a \cdot \dots \cdot a^{2n}$ . Entonces  $b \geq 0$ .

Demostración de t2): Sean  $(a_1 - a_2) = +d_1$  y  $(b_1 - b_2) = -d_2$ .

Entonces:  $(+d_1) \cdot (-d_2) = (a_1 - a_2) \cdot (b_1 - b_2) = ((a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1))$

Como en este caso es  $a_2 < a_1$  y  $b_1 < b_2$ , se tiene la siguiente relación entre números naturales:

$$a_2 (b_2 - b_1) < a_1 (b_2 - b_1)$$

y también:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 < a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Por lo tanto:  $(+d_1) \cdot (-d_2) = -d$ , donde:

$$d = a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_1 - a_2 b_2 = a_1(b_2 - b_1) - a_2(b_2 - b_1) = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1) = d_1 d_2,$$

con lo que el teorema t2 queda demostrado.

Esta demostración da una pauta para la demostración de los otros teoremas.

- 4) *División exacta.* Sean  $a, b$  dos números enteros ( $a = \pm d_1$ ,  $b = \pm d_2$ ). Si existe un entero  $c = \pm d_3$  tal que  $b \cdot c = a$ , se dice que  $a$  es el cociente exacto entre  $a$  y  $b$  y escribiremos  $c = a \div b$ . Al entero  $a$  se le llama dividendo y al entero  $b$  divisor.

Se puede demostrar:

- a)  $(+d_1) \div (+d_2) = +(d_1 \div d_2)$   
 b)  $(-d_1) \div (-d_2) = +(d_1 \div d_2)$   
 c)  $(-d_1) \div (+d_2) = -(d_1 \div d_2)$   
 d)  $(+d_1) \div (-d_2) = -(d_1 \div d_2)$ .

6. **Conjunto de los Números Racionales.** Sean  $a$  y  $b$  dos números enteros, con  $b \neq 0$  ( $a = \pm d_1$  o bien  $a = 0$ ;  $b = \pm d_2$ ) y consideremos el par  $a/b$ , que leeremos "a sobre b" o "a partido por b". Entonces, el conjunto de los números racionales es el conjunto de pares  $a/b$ . Los pares  $a/b$  también serán escritos como  $\frac{a}{b}$  y representados por símbolos que se determinan a partir de los símbolos de los enteros  $a$  y  $b$ , de acuerdo con lo que se indica en la siguiente tabla:

Caso	Símbolo de a	Símbolo de b	Símbolo de a/b
(i)	+ d <sub>1</sub>	+ d <sub>2</sub>	+ $\frac{d_1}{d_2}$
(ii)	+ d <sub>1</sub>	- d <sub>2</sub>	- $\frac{d_1}{d_2}$
(iii)	- d <sub>1</sub>	+ d <sub>2</sub>	- $\frac{d_1}{d_2}$
(iv)	- d <sub>1</sub>	- d <sub>2</sub>	+ $\frac{d_1}{d_2}$
(v)	0	± d <sub>2</sub>	0

En los casos (i) y (iv) tenemos los llamados racionales positivos, en los casos (ii) y (iii) los racionales negativos y en el caso (v) el cero racional.

7. **Igualdad de Números Racionales.** Se dice que  $a_1/b_1$  es igual a  $a_2/b_2$  si  $a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$ .

De aquí en adelante escribiremos el producto de dos números enteros  $a$  y  $b$  indistintamente como  $a \cdot b$  o simplemente como  $ab$ .

Fácilmente puede comprobarse que :

- Si  $a_1 = +d_1$ ,  $b_1 = +d_2$ ;  $a_2 = -d_1$ ,  $b_2 = -d_2$ , entonces:  
 $a_1/b_1 = a_2/b_2$ , con lo que se justifica el uso del mismo símbolo para los números racionales de los casos (i) y (iv) de la sección anterior.
- Si  $a_1 = +d_1$ ,  $b_1 = -d_2$ ,  $a_2 = -d_1$ ,  $b_2 = +d_2$ , entonces:  
 $a_1/b_1 = a_2/b_2$ , con lo que se justifica el uso del mismo símbolo en los casos (ii) y (iii).
- Si  $c$  es un entero distinto de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

8. **Operaciones con Números Racionales.**

- Suma.** Sean dos números racionales  $a_1/a_2$  y  $b_1/b_2$ . Se llama suma de estos dos números, que denominamos sumandos, al número racional  $\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2 b_2}$ , que representaremos por  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2}$ .

Puede demostrarse que:

- $a_1/a_2 + b_1/b_2 = b_1/b_2 + a_1/a_2$  (propiedad conmutativa).
- $(a_1/a_2 + b_1/b_2) + c_1/c_2 = a_1/a_2 + (b_1/b_2 + c_1/c_2)$  (Propiedad asociativa).

c)  $a/b \div 0 = a/b$  (donde 0 representa el cero racional).

$$d) \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

2) *Resta.* Sean  $a_1/a_2$ ,  $b_1/b_2$  y  $c_1/c_2$  tres números racionales tales que  $\frac{b_1}{b_2} + \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2}$ . Entonces se

dice que  $c_1/c_2$  es la *diferencia* que resulta de *restar* el *sustraendo*  $b_1/b_2$  del *minuendo*  $a_1/a_2$ . Se escribe:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2}$$

Dados dos números racionales cualesquiera, *siempre* existe su diferencia.

Se dice que  $a_1/a_2$  es menor que  $b_1/b_2$  (o que  $b_1/b_2$  es mayor que  $a_1/a_2$ ) y se escribe  $a_1/a_2 < b_1/b_2$  o también  $b_1/b_2 > a_1/a_2$ ) si  $\frac{b_1}{b_2} - \frac{a_1}{a_2}$  es un número racional positivo.

3) *Multiplicación.* Sean  $a_1/a_2$  y  $b_1/b_2$  dos números racionales. Se llama producto de estos números (que denominamos factores) al número racional  $\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$ , que representaremos por  $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2}$  o simplemente

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{b_1}{b_2}$$

Puede demostrarse que:

$$a) \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} \quad (\text{propiedad conmutativa}).$$

$$b) \left[ \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \right] \cdot \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \left[ \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \right] \quad (\text{propiedad asociativa}).$$

$$c) \frac{a_1}{a_2} \cdot \left[ \frac{b_1}{b_2} + \frac{c_1}{c_2} \right] = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} + \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{propiedad distributiva})$$

$$d) \text{ Si } c \text{ es un entero distinto de } 0, \text{ entonces } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b}$$

El racional  $\frac{c}{c}$  se presenta por el símbolo 1 y se llama unidad racional (esto es válido para todo  $c \neq 0$ ).

4) *División.* Sean  $a_1/a_2$  y  $b_1/b_2$  dos números racionales, con el segundo distinto de cero, y sea  $c_1/c_2$  otro racional tal que  $\frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2}$ . Entonces, se dice que  $c_1/c_2$  es el cociente entre el dividendo  $a_1/a_2$  y

el divisor  $b_1/b_2$  y se escribe  $\frac{a_1}{a_2} \div \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ . A diferencia de lo que ocurre con los números na-

turales y con los números enteros, *siempre* existe el cociente entre dos números racionales con la sola condición, ya señalada, de que el divisor sea distinto de cero.

El cociente entre  $a_1/a_2$  y  $b_1/b_2$  es  $\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}$ , ya que:

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} &= \frac{b_1(a_1 b_2)}{b_2(a_2 b_1)} = \frac{(b_1 a_1) b_2}{(b_2 a_2) b_1} = \frac{(a_1 b_1) b_2}{(a_2 b_2) b_1} = \frac{a_1(b_1 b_2)}{a_2(b_2 b_1)} \\ &= \frac{a_1(b_1 b_2)}{a_2(b_1 b_2)} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2} = \frac{a_1}{a_2} \end{aligned}$$

9. **Teorema.** Cualesquiera que sean los números racionales  $a_1/a_2$  y  $b_1/b_2$ , tales que  $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$ , siempre existe un racional  $c_1/c_2$  tal que  $\frac{a_1}{a_2} < \frac{c_1}{c_2} < \frac{b_1}{b_2}$ .

En efecto, si consideramos el número racional:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{(+2) a_2 b_2}$$

tendremos:

$$\frac{c_1}{c_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{(+2) a_2 b_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1) a_2 - (+2) a_2 b_2 a_1}{(+2) a_2^2 b_2} = \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{(+2) a_2 b_2}$$

que es un racional positivo, con lo que  $\frac{a_1}{a_2} < \frac{c_1}{c_2}$ .

Siguiendo un procedimiento análogo, se demuestra que  $\frac{c_1}{c_2} < \frac{b_1}{b_2}$ .

Si establecemos una correspondencia entre los puntos de la recta y los números racionales, este teorema nos puede hacer pensar que los racionales "llenan" la recta o, en otras palabras, que para cada punto de la recta existe un correspondiente número racional. Sin embargo, mostraremos que esto es falso. Para ello exhibiremos un punto de la recta al que no corresponde un racional (el punto Q de la figura).

Por el teorema de Pitágoras sabemos que la distancia entre el origen y Q es  $\sqrt{+2/1}$  y, en consecuencia, al punto Q le corresponde un número tal que elevado al cuadrado da como resultado  $+2/1$ . Supongamos que existe  $p/q$  tal que  $(p/q)^2 = +2/1$

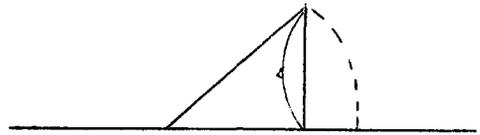
(es decir  $\sqrt{+2/1} = p/q$ ); entonces  $\frac{p^2}{q^2} = \frac{+2}{+1}$ , es  $p^2 = (+2) q^2$ . Si se descomponen  $p$  y  $q$  en sus factores

primos y luego se consideran sus cuadrados se tendrá que, tanto  $p^2$  como  $q^2$ , o bien no tienen  $(+2)$  como factor primo o bien lo tienen un número par de veces. Pero  $(+2) q^2$  tiene el factor primo  $(+2)$  un número impar de veces y, en consecuencia, no puede ser igual a  $p^2$ . Entonces no existe un número racional tal que su cuadrado es  $+2/1$ .

Es claro entonces que si bien a cada racional se le puede hacer corresponder un punto de la recta, el recíproco no es cierto.

## 10. Conjunto de los Números Reales.

Introduciremos ahora un conjunto de números, tal que pueda establecerse una correspondencia biunívoca entre sus elementos y los puntos de la recta.



Sea  $Q$  el conjunto de los números racionales. Consideremos dos subconjuntos de  $Q$ , que llamaremos  $C_1$  y  $C_2$ , tales que:

- (i)  $C_1 \cap C_2 = \phi$ ,
- (ii)  $C_1 \cup C_2 = Q$ ,
- (iii) Para todo  $x \in C_1$  y para todo  $y \in C_2$  se tiene  $x < y$ .

Ejemplo 1:

$$C_1 = \left\{ x \mid x \in Q, x < +\frac{5}{3} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ x \mid x \in Q, x \geq +\frac{5}{3} \right\}$$

Ejemplo 2:

$$C_1 = \left\{ x \mid x \in Q, x \leq 0 \right\} \cup \left\{ x \mid x \in Q, x > 0, x^2 < 2 \right\},$$

$$C_2 = \left\{ x \mid x \in Q, x > 0, x^2 \geq 2 \right\},$$

donde el símbolo  $2$  representa el número racional  $+2/1$ .

Una partición del conjunto  $Q$  en dos subconjuntos,  $C_1$  y  $C_2$ , tales que se verifiquen (i), (ii) y (iii), se llama una *cortadura* en el conjunto de los números racionales.

Distinguiremos dos tipos de cortaduras:

- a) Aquellas en que  $C_1$  tiene un número mayor que todos sus demás elementos, o  $C_2$  un número menor que sus otros elementos. En este caso se dice que la cortadura es *propia*.
- b) Aquellas en que ni  $C_1$  tiene un elemento mayor que todos los demás ni  $C_2$  tiene uno menor que todos los otros. En este caso la cortadura es *impropia*.

En el ejemplo 1 la cortadura es propia, puesto que  $+\frac{5}{3} \in C_2$  y todo otro  $x \in C_2$  es mayor que  $+\frac{5}{3}$ .

La cortadura del ejemplo 2 es impropia, ya que ni  $C_1$  tiene un máximo ni  $C_2$  un mínimo.

Si  $C_1, C_2$  es una cortadura, llamaremos *clase inferior* al conjunto  $C_1$  y *clase superior* a  $C_2$ .

Si  $C_1, C_2$  es una cortadura propia, diremos que el racional  $r$  es *elemento de separación* si para todo  $x \in C_1$  es  $x \leq r$  y para todo  $y \in C_2$  es  $y \geq r$ . En el ejemplo 1, el racional  $+\frac{5}{3}$  es el elemento de separación.

Si la cortadura es impropia, no existe un elemento de separación racional. Al elemento de separación de una cortadura impropia se le llama *número irracional*. En el ejemplo 2, el elemento de separación es un número irracional  $\alpha$  tal que  $\alpha^2 = 2$ , es decir  $\alpha = \sqrt{2}$ .

Podemos dar, para el conjunto de los números irracionales, las tres siguientes definiciones alternativas:

- a) Es el conjunto de cortaduras impropias en el conjunto de los números racionales.
- b) Es el conjunto de elementos de separación de cortaduras impropias en el conjunto de los números racionales.
- c) Es el conjunto de números tales que, representados en base 10, tienen infinitas cifras decimales y éstas no forman período.

La definición c) resulta útil para establecer si un número no es irracional.

Así:

$$x = 6,714285714285\dots \quad (= 47/7) \text{ no es irracional.}$$

Al conjunto de *todas* las cortaduras (propias e impropias) en el conjunto de los números racionales, se le llama *conjunto de los números reales* (y sus elementos se denominan números reales).

11. **Igualdad y Desigualdad entre números reales.** Dos números reales (definidos por las cortaduras  $C_1, C_2$  y  $C'_1, C'_2$ ) son iguales si las respectivas clases inferiores difieren a lo más en un elemento.

Ejemplo: Sean

$$C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \leq 5/1\}, \quad C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 5/1\}, \\ C'_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < 5/1\}, \quad C'_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \geq 5/1\},$$

Vemos que  $C_1$  y  $C'_1$  difieren en un solo elemento (el racional  $5/1$ ); ambas cortaduras tienen el mismo elemento de separación y, en consecuencia, definen el mismo número real.

Sea  $C_1, C_2$  una cortadura que define a un número real  $\alpha$  y  $C'_1, C'_2$  una que define al real  $\beta$ . Diremos que  $\alpha < \beta$  si existen dos elementos  $r_1, r_2 \in C'_1$ , que no pertenecen a  $C_1$ , en cuyo caso se dice que estos elementos son intermediarios entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Consideremos, como ejemplo:

$$C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < 1\}, \quad C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \geq 1\}, \\ C'_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < 0\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0, x^2 < 5\}, \\ C'_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0, x^2 \geq 5\}.$$

Es claro que  $r_1 = 1,2$  y  $r_2 = 2$  pertenecen a  $C'_1$  y, en cambio, no pertenecen a  $C_1$ . Entonces  $\alpha < \beta$  (en este caso,  $1 < \sqrt{5}$ ).

El número real definido por la cortadura  $C_1, C_2$ , con:

$$C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \leq 0\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\},$$

se llama *cero real* y se representa por el símbolo  $0$ .

Si en una cortadura se tiene un racional positivo perteneciente a  $C_1$ , entonces se dice que el real es positivo.

Si en una cortadura se tiene un racional negativo en  $C_2$ , entonces se dice que el real es negativo.

Todo real positivo es mayor que  $0$  y todo real negativo es menor que  $0$ .

Puede demostrarse que si  $r$  es un racional positivo, perteneciente a  $C_1$ , siendo  $C_1, C_2$  una cortadura que define al real  $\alpha$ , entonces se tiene  $\alpha > 0$ .

Pueden también demostrarse las siguientes propiedades de los números reales:

- Si  $a$  y  $b$  son dos reales, entonces se tiene una y sólo una de las relaciones: (i)  $a < b$ , (ii)  $a = b$ ; (iii)  $a > b$  (tricotomía).
- Si  $a < b$  y  $b < c$ , entonces  $a < c$  (transitividad).
- Si  $a < b$ , entonces  $a + c < b + c$ .
- Si  $a < b$ , y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$ .
- Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$ .

12. **Operaciones en el Conjunto de los Números Reales.** En el conjunto de los números reales se definen las operaciones acostumbradas. A manera de ejemplo definiremos la suma.

**Suma de Números Reales.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  números reales definidos por las cortaduras  $C_1, C_2$  y  $C'_1, C'_2$ , respectivamente. Se define como suma de estos dos reales al número real correspondiente a la cortadura  $S_1, S_2$  definida así:

(i)  $s_1 \in S_1$  si y sólo si existen  $a_1 \in C_1$  y  $b_1 \in C'_1$  tales que  $a_1 + b_1 = s_1$ .

(ii)  $s_2 \in S_2$  si y sólo si existen  $a_2 \in C_2$  y  $b_2 \in C'_2$  tales que  $a_2 + b_2 = s_2$ .

Al número real  $\gamma$  correspondiente a la cortadura  $S_1, S_2$  se le representa por  $\alpha + \beta$ .

Se puede demostrar que, con esta definición de suma, se verifican las siguientes propiedades:

a)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  (propiedad conmutativa).

b)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  (propiedad asociativa).

c)  $\alpha + 0 = \alpha$ .

13. **Valor Absoluto de un Número Real.** Si  $a$  es un número real, su valor absoluto, representado por  $|a|$ , se define como sigue:

a) Si  $a > 0$ , entonces  $|a| = a$ .

b) Si  $a < 0$ , entonces  $|a| = -a$ .

c) Si  $a = 0$ , entonces  $|a| = 0$ .

14. **Conjunto de los Números Complejos.** Sean  $a$  y  $b$  dos números reales. Definiremos como número complejo al par ordenado  $(a, b)$ . Entonces, el conjunto de los números complejos es el conjunto de los pares ordenados de números reales.

Diremos que los números complejos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son iguales si  $a = c$  y  $b = d$ .

15. **Operaciones en el Conjunto de los Números Complejos.**

1) **Suma.** Sean  $(a, b)$  y  $(c, d)$  dos números complejos. Se define como su suma al complejo  $(a + c, b + d)$ , que se representa por  $(a, b) + (c, d)$ .

La suma de complejos tiene las siguientes propiedades:

a)  $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$  (propiedad conmutativa).

b)  $[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$  (propiedad asociativa).

2) **Multiplicación.** Definimos como producto de los complejos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  al complejo  $(ac - bd, ad + bc)$ , que representamos por  $(a, b) \cdot (c, d)$  o por  $(a, b)(c, d)$ .

Puede demostrarse que esta operación también es conmutativa y asociativa.

Consideremos ahora el complejo  $(0, 1)$ , representado por la letra  $i$  y llamado unidad imaginaria. Entonces:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0).$$

Este es un número complejo y no debe confundirse con el número real  $-1$ . Sin embargo, con el propósito de simplificar la escritura, representaremos por  $a$  al complejo  $(a, 0)$ . Entonces, escribiremos  $i^2 = -1$ , pero debe tenerse presente que esto es una representación del complejo  $(-1, 0)$ .

Si se tiene el complejo  $(a, b)$  y se consideran los complejos  $(a, 0)$  y  $(0, b)$ , que representaremos por  $a$  y  $b$ , respectivamente, entonces:

$$a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

En consecuencia, el complejo  $(a,b)$  puede representarse también como  $a + bi$  (esta es la llamada *forma binómica* del complejo).

Si deseamos operar con complejos escritos en forma binómica, las operaciones se realizan como en el álgebra elemental, donde "i" es un factor literal."

Es necesario tener en cuenta que:  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i, \dots$

Ejemplos:

$$(2 + 3i) + (5 - 4i) = 2 + 5 + 3i - 4i = 7 - i .$$

$$\left(-\frac{1}{4} + 2i\right) \left(-\frac{5}{3} + i\right) = +\frac{5}{12} - \frac{1}{4}i - \frac{10}{3}i + 2i^2 = \frac{5}{12} - \frac{43}{12}i - 2 = -\frac{19}{12} - \frac{43}{12}i .$$

$$(2 - i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i .$$

16. **Inecuaciones.** Si  $P(x)$  y  $Q(x)$  son dos polinomios en  $x$ , se llama inecuación a la relación  $P(x) < Q(x)$ .

Por resolver una inecuación se entiende hallar *todos* los valores de  $x$  (en general números reales) tales que  $P(x) < Q(x)$ .

Ejemplo: Sea la inecuación  $x^2 + 3 < 28$ . Solución:  $C = \{ x \mid -5 < x < 5 \}$  .

Al conjunto de valores de  $x$  que satisfacen  $P(x) < Q(x)$  se le llama conjunto solución de la inecuación y a sus elementos se les llama soluciones de la inecuación.

Dos inecuaciones son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución. Ejemplo: las inecuaciones  $x^2 + 3 < 28$  y  $x^2 < 25$  son equivalentes.

Si las inecuaciones  $P_1(x) < Q_1(x)$  y  $P_2(x) < Q_2(x)$  son equivalentes, escribiremos  $P_1(x) < Q_1(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P_2(x) < Q_2(x) . \text{ Por ejemplo: } x^2 + 3 < 28 \Leftrightarrow x^2 < 25 .$$

Dada la inecuación  $P(x) < Q(x)$ , las siguientes son inecuaciones equivalentes a ella:

- a)  $P(x) + K(x) < Q(x) + K(x)$ .
- b)  $k P(x) < k Q(x)$  para cualquier  $k > 0$ .
- c)  $k Q(x) < k P(x)$  para cualquier  $k < 0$ .

También son equivalentes las inecuaciones  $[P(x)]^2 < [Q(x)]^2$  y  $|P(x)| < |Q(x)|$

Para resolver una inecuación dada, se la transforma en inecuaciones equivalentes hasta obtener una cuya solución sea inmediata. Por ejemplo, si queremos resolver la inecuación  $2x - 6 < -2x^2 - 2x$ , podemos proceder así:

$$\begin{aligned} 2x - 6 < -2x^2 - 2x &\Leftrightarrow -6 < -2x^2 - 4x \Leftrightarrow x^2 + 2x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < 4 &\Leftrightarrow (x + 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |x + 1| < 4 . \end{aligned}$$

Es fácil ahora obtener la solución:  $\{x \mid -5 < x < 3\}$  .

17. **Intervalos (finitos).** Sean  $a$  y  $b$  dos números reales, tales que  $a \leq b$ . Consideremos los siguientes conjuntos de números reales:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{ x \mid a \leq x \leq b \} \\ I_2 &= \{ x \mid a \leq x < b \} \end{aligned}$$

$$I_3 = \{ x \mid a < x \leq b \}$$

$$I_4 = \{ x \mid a < x < b \} .$$

Diremos que:

- a)  $I_1$  es un intervalo cerrado con extremo inferior  $a$  y extremo superior  $b$ . Se representa por  $[a, b]$ .
- b)  $I_2$  es un intervalo semi-abierto con los mismos extremos. Se representa por  $[a, b)$ .
- c)  $I_3$  es un intervalo semi-abierto con los mismos extremos. Se representa por  $(a, b]$ .
- d)  $I_4$  es un intervalo abierto con los mismos extremos. Se representa por  $(a, b)$ .

En cualquiera de los tres últimos casos, si  $a = b$  se tiene el conjunto vacío  $\phi$ .

Sean  $I$  e  $I'$  dos intervalos. Entonces:

- (i)  $I \cap I'$  es un intervalo.
- (ii) Si  $I \cap I' \neq \phi$ , se tiene que  $I \cup I'$  es un intervalo.
- (iii) Si  $I' \not\subset I$ , la diferencia  $I - I'$  es un intervalo.

18. **Intervalos Infinitos.** Sea  $k$  un número real. Entonces consideremos los siguientes conjuntos de números reales, que llamaremos intervalos infinitos:

$$I_5 = \{ x \mid x > k \} = (k, +\infty)$$

$$I_6 = \{ x \mid x \geq k \} = [k, +\infty)$$

$$I_7 = \{ x \mid x < k \} = (-\infty, k)$$

$$I_8 = \{ x \mid x \leq k \} = (-\infty, k] .$$

19. **Intervalos Acotados.** Sea  $I$  un intervalo. Diremos que  $I$  es acotado si existe un número real  $m$  tal que, para todo  $x \in I$  se tiene  $|x| \leq m$ .

Los intervalos infinitos no son acotados.

#### IV. RELACIONES

1. **Pares Ordenados.** Diremos que un par ordenado consiste de dos elementos,  $a$  y  $b$ , tales que  $a$  uno de ellos,  $a$  por ejemplo, lo designaremos "primer elemento del par" y el otro,  $b$ , "segundo elemento del par". Lo representaremos por  $(a, b)$  y dos pares ordenados  $(a, b)$  y  $(c, d)$  serán iguales si y sólo si  $a = c$  y  $b = d$ .

Los pares ordenados  $(2, 3)$  y  $(3, 2)$  son diferentes. El conjunto  $\{2, 3\}$  no es un par ordenado, dado que  $\{2, 3\} \neq \{3, 2\}$ .

2. **Producto Cartesiano.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. El producto cartesiano o conjunto producto de  $A$  y  $B$  consiste de todos los pares ordenados  $(a, b)$  donde  $a \in A$  y  $b \in B$ . Se lo denota  $A \times B$  y se lo lee  $A$  por  $B$ .

En notación conjuntística:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Ejemplo: Sean  $A = \{1, 2\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$ . Entonces:

$$A \times B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3) \}.$$

**Nota.** El concepto de pares ordenados puede ser fácilmente extendido al de  $n$ -uplas. Igualmente el concepto de producto cartesiano de  $n$  conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Supongamos  $n = 3$ :

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3 \}.$$

3. **Relación.** Una relación  $R$  de  $A$  a  $B$  es un subconjunto de  $A \times B$ .

Ejemplo: Sean  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b\}$ . Podemos considerar la relación  $R$  como el subconjunto:

$$R = \{ (1, a), (1, b), (3, a) \}.$$

Dados dos conjuntos  $A, B$ , si el par ordenado  $(a_1, b_1)$  del producto cartesiano  $A \times B$  pertenece a  $R$  decimos que  $a_1$  está relacionado con  $b_1$  y escribimos  $a_1 R b_1$ . En cambio, si  $(a_1, b_1) \in R'$ , donde  $R'$  es el complemento de  $R$ , se dice que  $a_1$  no está relacionado con  $b_1$  y se escribe  $a_1 \bar{R} b_1$ .

**Nota.** Ayuda a interpretar el concepto de relación el pensar que para algunas relaciones existe una "proposición" que da la estructura de la relación, es decir que permite identificar el subconjunto  $R$ .

Por ejemplo, dados  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ ,

si se desea estudiar la relación  $R$  definida por la proposición "a es menor que b", donde  $a$  refiere a los elementos de  $A$  y  $b$  a los de  $B$ , resultará:

$$R = \{ (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5) \}.$$

El conjunto  $R$  se conoce también como *conjunto solución* de la relación y se puede escribir como:

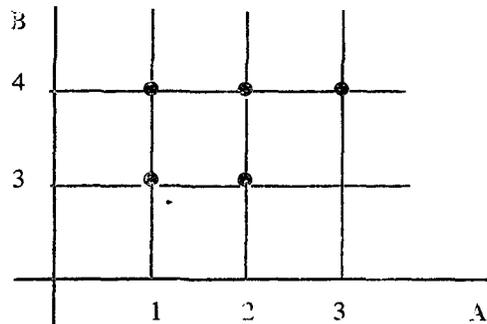
$$R = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B, a R b \},$$

4. **Gráfico de una Relación.** El conjunto solución de una relación, o sea el conjunto de pares ordenados para el que la relación es cierta puede ser identificado gráficamente, en un diagrama de coordenadas. Un simple ejemplo ilustrará esta idea.

$$\text{Si } A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{3, 4\}$$

y la relación que se estudia es a menor que b, donde a y b son elementos de A y B, respectivamente, es decir:

$R = \{ (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$ , el gráfico será:



**5. Dominio y recorrido de una relación.** Sea una relación  $R$  de  $A$  a  $B$ . El dominio  $D$  de la relación  $R$  es el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a  $R$ , es decir:

$$D = \{ a \mid a \in A, \text{ existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \}$$

El recorrido  $E$  de la relación  $R$  consiste de todos los segundos elementos que aparecen en los pares ordenados pertenecientes a  $R$ , es decir:

$$E = \{ b \mid b \in B, \text{ existe } a \in A \text{ tal que } (a, b) \in R \}$$

Nótese que, en general,  $D$  es subconjunto de  $A$  y  $E$  subconjunto de  $B$ .

En el ejemplo anterior,  $D = A$  y  $E = B$ .

**6. Relación Inversa.** Toda relación  $R$  de  $A$  a  $B$  tiene una relación inversa  $R^{-1}$ , de  $B$  a  $A$ , que es definida por el conjunto:

$$R^{-1} = \{ (b, a) \mid (a, b) \in R \}$$

En otras palabras, la relación inversa  $R^{-1}$  consiste de todos los pares que, cuando son permutados, pertenecen a  $R$ .

Para el segundo ejemplo del apartado 3:

$$R^{-1} = \{ (3,1), (5,1), (3,2), (5,2), (5,3), (5,4) \}$$

Otro ejemplo: Sea una relación entre los números naturales  $N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$ , definida por la proposición

$$2x + y = 10, \text{ o sea } R = \{ (x, y) \mid x \in N, y \in N, 2x + y = 10 \}$$

Será:

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid x \in N, y \in N, x + 2y = 10 \}$$

**7. Relación Reflexiva.** Una relación en el conjunto  $A$  (es decir  $R$  es un subconjunto de  $A \times A$ ), es reflexiva si, para cada  $a \in D$ ,  $(a, a) \in R$ .

Si una relación es reflexiva, cada elemento de  $D$  está relacionado consigo mismo.

Por ejemplo, dado  $A = \{ 1, 2, 3 \}$ , la relación

$$R = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 3) \}$$
 no es reflexiva, dado que  $2 \in D$  y  $(2, 2) \notin R$ .

**8. Relación Simétrica.** Sea  $R$  una relación en  $A$ .  $R$  es llamada una relación simétrica si  $(a, b) \in R$  implica que  $(b, a) \in R$ , esto es, si  $a$  está relacionado con  $b$ ,  $b$  lo está con  $a$ .

Si  $A = \{1, 2, 3\}$ , entonces:

$R = \{(1, 2), (2, 1)\}$  es una relación simétrica.

Es importante notar que, dado que si  $(a, b) \in R$ , entonces  $(b, a) \in R^{-1}$ ,  $R$  será una relación simétrica si  $R = R^{-1}$ .

**9. Relación Antisimétrica.** Una relación  $R$  en el conjunto  $A$  es llamada una relación antisimétrica si  $(a, b) \in R$  y  $(b, a) \in R$  implica que  $a = b$ .

Ejemplo: Dado  $W = \{1, 2, 3\}$ , la relación  $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$  no es una antisimétrica, puesto que  $(1, 3) \in R$  y  $(3, 1) \in R$ , y sin embargo  $1 \neq 3$ .

**10. Relación Transitiva.** Una relación  $R$  en  $A$  es llamada transitiva si  $(a, b) \in R$  y  $(b, c) \in R$  implica que:  $(a, c) \in R$ , es decir,  $R$  es transitiva si  $a R b$  y  $b R c$  implica  $a R c$ .

Ejemplo: Sea  $A$  el conjunto de los números reales y  $R$  la relación asociada a la proposición  $x < y$ . Para los reales se ha demostrado que  $a < b$ ,  $b < c$  implica  $a < c$ . Por lo tanto, la relación "menor que" es transitiva.

**11. Relación de Equivalencia.** Una relación  $R$  en  $A$  es una relación de equivalencia si

- $R$  es una relación reflexiva, es decir para todo  $a \in D$ ,  $(a, a) \in R$ .
- $R$  es una relación simétrica, es decir, si  $(a, b) \in R$  entonces  $(b, a) \in R$ .
- $R$  es una relación transitiva, es decir si  $(a, b) \in R$  y  $(b, c) \in R$ , entonces,  $(a, c) \in R$ .

Ejemplo: Un importante ejemplo de relación de equivalencia, es el de la relación de igualdad. En efecto, si  $a, b, c$  son elementos cualesquiera de  $A$ , entonces:

- $a = a$  (reflexividad),
- $a = b$  implica  $b = a$  (simetría),
- $a = b$  y  $b = c$  implican  $a = c$  (transitividad).

## 12. Problemas Propuestos.

1) Sean  $A = \{a, b\}$ ;  $B = \{2, 3\}$ ;  $C = \{3, 4\}$ . Calcular:

- $A \times (B \cup C)$ ; b)  $(A \times B) \cup (A \times C)$ ;
- $A \times (B \cap C)$ ; d)  $(A \times B) \cap (A \times C)$ .

2) Graficar en un sistema ortogonal de coordenadas de  $R \times R$  el producto cartesiano de los conjuntos:

$$\{x \mid 1 \leq x < 4\}, \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

3) Graficar, en un sistema ortogonal de coordenadas de  $R \times R$ :

- $(-3, 3) \times (-1, 2)$ ; b)  $(-3, 1) \times (-\infty, 2)$ ;
- $(-2, 3) \times (-3, \infty)$ ; d)  $(-3, 1) \times (-2, 2)$ .

4) Grafique la relación:  $R = \{(x, y) \mid y \leq x + z\}$ .

5) Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{1, 3, 5\}$  y sea  $R$  la relación de  $A$  a  $B$  definida por la proposición "x es menor que y".

- Escriba  $R$  como un conjunto de pares ordenados.
- Grafique  $R$  en un sistema ortogonal de coordenadas de  $A \times B$ .

6) Cada una de las siguientes proposiciones define una relación en el conjunto de los números reales. Grafique cada una de ellas en un sistema ortogonal de coordenadas de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  :

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $y = x^2$ ;          | b) $y < 3 - x$ ;         |
| c) $y \leq x^2$ ;       | d) $y > x^3$ ;           |
| e) $x^2 + y^2 < 16$ ;   | f) $x^2 + y^2 \geq 16$ ; |
| g) $x^2 - 4y \geq 91$ ; | h) $x^2 - 4y^2 < 9$ .    |

7) Sea la relación:

$$R = \{(1, 5), (4, 5), (1, 4), (4, 6), (3, 7), (7, 6)\}$$

Encontrar

- el dominio de R.
- el recorrido de R.
- la relación inversa de R.

8) Sea  $R = \{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 = 36; x, y \text{ reales}\}$ . Se pide:

- Graficar R.
- Encontrar el dominio de R.
- Encontrar el recorrido de R.
- Encontrar  $R^{-1}$  y graficarla.

9) ¿Qué puede decir sobre el dominio y el recorrido de una relación R con respecto al dominio y recorrido de  $R^{-1}$ ? Dé una respuesta razonada.

10) Se tiene:  $R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, 2x + y = 10\}$

Encuentre:

- el dominio de R,
- el recorrido de R,
- $R^{-1}$ .

11) Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$  ¿Es o no reflexiva la relación R y por qué?

12) Sea el conjunto  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  y la relación

$$R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 1), (3, 3)\}$$
 ¿Es R una relación simétrica?

13) Dado el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y la relación

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 2)\}$$
. Diga si la relación R es o no transitiva y por qué.

14) Considere las siguientes relaciones en el conjunto de los números reales:

$$R_1 = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid y \leq x + 2\}$$

- Grafique la relación  $R_1 \cap R_2$ .
- Encuentre el dominio de  $R_1 \cap R_2$ .
- Encuentre el recorrido de  $R_1 \cap R_2$ .

15) Cada una de las siguientes proposiciones define una relación en el conjunto de los números reales. Grafique cada relación en un sistema ortogonal de coordenadas de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

a)  $y < \frac{x^2}{2} - 4x + 2$ ,

b)  $y \geq \frac{x}{2} + 2$ ,

c)  $x < y^2$ .

## V. FUNCIONES

1. **Definición de Función.** Supongamos que a cada elemento  $a \in A$  se le hace corresponder un *único* elemento  $b \in B$ . Llamamos a tal correspondencia una *función* y la simbolizamos.

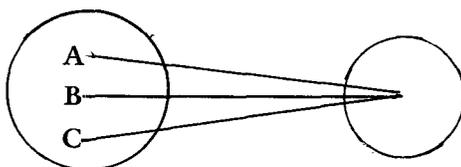
$$f: A \rightarrow B,$$

expresión que leemos "f es una función de A a B". El conjunto A se llama dominio de la función y B el co-dominio de la misma. Además, si  $a \in A$ , el único elemento de B que se hace corresponder a  $a$  se denomina "imagen de a" y se lo simboliza

$$f(a)$$

Ejemplos:

- a) Sea  $f$  la función que asigna a cada hijo su madre. Nótese que la correspondencia que asocia a cada madre sus hijos no es una función.  
 b) Sean  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{d\}$ . Definiremos la función  $f: A \rightarrow B$  mediante el siguiente diagrama:



La función del último ejemplo es un caso especial y se la denomina *función constante*

**Nota.** La función resulta así como un conjunto de pares ordenados  $(a, f(a))$  tales que para cada  $a \in A$  existe un *único*  $f(a) \in B$ .

2. **Recorrido de una función.** Dada  $f: A \rightarrow B$ , el recorrido de la función, que se denota como  $f(A)$ , es el conjunto de elementos de B que son imágenes de elementos de a.

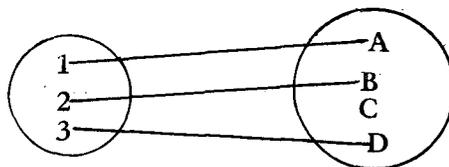
$$f(A) = \{b \mid b \in B, b = f(a), a \in A\}.$$

En el caso de la función constante el recorrido consta de un único elemento.

3. **Funciones Inyectivas.** Sea  $f: A \rightarrow B$ . Esta función es inyectiva si a dos elementos distintos cualesquiera de A corresponden imágenes distintas.

Ejemplos:

- a) Si  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$ , la función  $f: A \rightarrow B$  que corresponde al diagrama



es inyectiva.

- b) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (donde  $\mathbb{R}$  corresponde al conjunto de los números reales) y donde  $f(a) = a^2$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Esta función no es inyectiva, ya que

$$f(-2) = f(2) = 4.$$

Nota. Estas funciones se llaman, también, funciones *uno a uno*. Si una función es inyectiva  $f(a) = f(a')$  implica  $a = a'$ .

4. **Funciones Epiyectivas.** Dada  $f : A \rightarrow B$ , si  $A = f(A)$  la función es epiyectiva.

Ejemplo: Sean

$$A = \{ a \mid a \in \mathbb{R} \text{ (reales)}, 0 \leq a \leq \pi \},$$

$$B = \{ b \mid b \in \mathbb{R} \text{ (reales)}, 0 \leq b \leq 1 \}$$

y  $f(a) = \text{sen } a$ . La función es epiyectiva.

Estas funciones reciben también los nombres de “exhaustivas” o “sobre”.

5. **Funciones Biyectivas.** Se reserva esta denominación para toda función que es inyectiva y epiyectiva. Si en el ejemplo anterior, el conjunto A se define como

$$A = \{ a \mid a \in \mathbb{R}, 0 \leq a \leq \frac{\pi}{2} \},$$

con igual definición de B y de  $f(a)$ , la función  $f: A \rightarrow B$  es biyectiva

Estas funciones reciben también el nombre de “uno a uno y sobre” o “biunívocas”.

6. **Operadores.** Si en una función el dominio y el co-dominio son el mismo conjunto, es decir, si

$$f : A \rightarrow A$$

se la suele llamar un operador o transformación en el conjunto A.

7. **Función identidad.** Si  $f : A \rightarrow A$  y  $f(a) = a$  para todo  $a \in A$ , esta función recibe el nombre de identidad.

8. **Producto de funciones.** Sean las dos funciones:

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

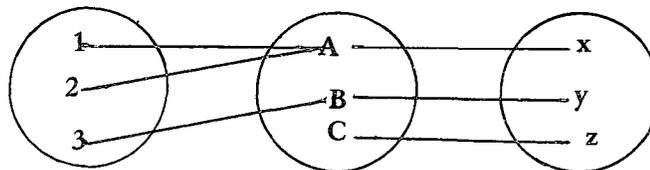
Para todo elemento  $a \in A$ , existe  $f(a) \in B$ . Como B es el dominio de g, para  $f(a) \in B$  existe  $g(f(a)) \in C$ .

Tenemos entonces una asociación entre elementos de A y C, a la que llamamos función producto de f y g y la simbolizamos  $(g \circ f)$ , o bien  $(gf)$ .

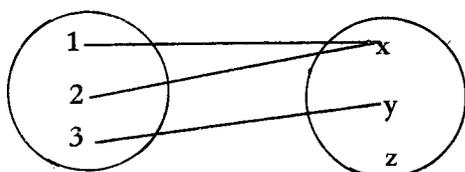
Ejemplo:

Sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{x, y, z\}$

y las funciones que ilustran los diagramas



La función  $(g \circ f)$  es la que ilustra el siguiente diagrama:



Es fácil verificar que el producto de funciones es asociativo, es decir, dadas las funciones

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ g &: B \rightarrow C \\ h &: C \rightarrow D \end{aligned}$$

se tiene

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

También puede verificarse que  $(g \circ f)$  no es la misma función que  $(f \circ g)$  para todo par de funciones  $f$  y  $g$ .

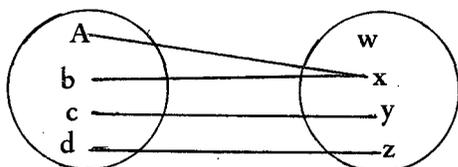
**9. Inverso de un elemento del co-dominio de una función.** Sea  $f : A \rightarrow B$ , y  $b \in B$ . Entonces el inverso de  $b$  (un elemento del co-dominio), que se denota por  $f^{-1}(b)$ , consiste de aquellos elementos de  $A$  que tienen  $b$  por imagen. O sea:

$$f^{-1}(b) = \{ x \mid x \in A, f(x) = b \}$$

Ayudará a clarificar ideas al considerar el siguiente caso. Sea

$$f : A \rightarrow B$$

la función que especifica el diagrama siguiente:



en este caso  $f^{-1}(w) = \phi$  (conjunto vacío)

$$f^{-1}(x) = \{ a, b \}$$

$$f^{-1}(y) = \{ c \}$$

$$f^{-1}(z) = \{ d \}$$

La idea anterior puede generalizarse para un conjunto de puntos  $D \subset B$ . El inverso de  $D$  bajo la función  $f$ , que denotaremos  $f^{-1}(D)$  está formado por los elementos de  $A$  que tienen por imagen algún elemento de  $D$ . Más brevemente

$$f^{-1}(D) = \{ x \mid x \in A, f(x) \in D \}$$

**10. Función Inversa.** Si  $f : A \rightarrow B$  es una función biyectiva, a todo elemento de  $B$  corresponde un único elemento de  $f^{-1}(b)$  en  $A$ , o sea aquel  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ . Esta correspondencia entre los elementos de  $B$  y de  $A$  se llama función inversa de  $f$  y se la simboliza:

$$f^{-1} : B \rightarrow A.$$

A partir de la definición de función inversa es muy fácil verificar el siguiente teorema:

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función biyectiva, es decir existe  $f^{-1}$ . Entonces, la función producto

$$(f^{-1} \circ f) : A \rightarrow A$$

es la función identidad sobre A y la función producto

$$(f \circ f^{-1}) : B \rightarrow B$$

es la función identidad sobre B.

### 11. Problemas Propuestos.

1) Considérese la función definida por la ecuación  $y = 2x - 6$  para todos los enteros positivos menores que 10 y hágase un gráfico de ella.

2) Indíquese el dominio y el recorrido de las siguientes funciones si  $x, y \in \mathbb{R}$ :

a)  $f : x \rightarrow x$

b)  $g : x \rightarrow \sqrt{x}$

c)  $p : x \rightarrow x^2$

d)  $f : x \rightarrow \sqrt{4-x^2}$

e)  $f : x \rightarrow \sqrt{x^2-1}$

f)  $f : x \rightarrow \frac{x}{1-x}$

g)  $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2-1}$

3) Si  $f : x \rightarrow 2x - 5$ , determínese:

a)  $f(0)$ ;

c)  $f(3)$ ;

b)  $f(1)$ ;

d)  $f(-1)$

4) Si  $f : x \rightarrow x^2 - 7x + 10$ , determínese:

a)  $f(2)$ ;

c)  $f(3)$ ;

b)  $f(5)$ ;

d)  $f(0)$

5) Considérese la función definida por el conjunto  $\{(x, y) \mid 10^y = x\}$ .

Si  $y = f(x)$  determínese:

a)  $f(1)$  ; b)  $f(10)$  ; c)  $f(100)$  ; d)  $f\left(\frac{1}{100}\right)$

6) Hágase el gráfico de

$$f : x \rightarrow 3x - 4$$

7) Hágase el gráfico de

$$q : x \rightarrow x^2 - x - 6$$

8) Hágase el gráfico de la función representada por el conjunto de pares ordenados  $\{(x, y) \mid y = |x - 2|\}$

9) Hágase el gráfico de cada una de las siguientes funciones:

a)  $y = 2x + 5$  ;

b)  $y = 6 - 3x$  ;

c)  $y = \frac{x^2}{16}$  ;

d)  $y = -4x^2$  ;

e)  $y = x^2 - 7x + 10$  ;

f)  $y = -x^2 - x + 30$ .

- 10) Sea una función definida por  $f(x) = x^3 + 5$ . Encontrar la función inversa de ella.  
11) Sea  $f$  la función:

$$f : x \rightarrow \frac{12 - 3x}{x}$$

Encontrar la función inversa.

- 12) Determínese la inversa de cada una de las funciones definidas por las ecuaciones siguientes:
- a)  $y = 5x - 6$  ;
  - b)  $y = x^2 - 4x$  ;
  - c)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

## VI. GRUPOS

1. **Definición.** Se dice que un conjunto de elementos forma un *grupo*, con respecto a una determinada operación ( $\circ$ ), si estos elementos cumplen los cuatro axiomas siguientes:

1) *Cerradura.* Si  $a$  y  $b$  son dos elementos cualesquiera del conjunto, entonces  $a \circ b$  es un elemento del conjunto.

2) *Asociatividad.* Si  $a, b, c$  son tres elementos cualesquiera del conjunto, entonces

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

3) *Identidad.* Existe un elemento  $e$  en el conjunto, llamado *elemento identidad*, que tiene la propiedad de que, para todo elemento  $a$  del conjunto, se verifica:  $a \circ e = e \circ a = a$ .

4) *Inversión.* Para todo elemento  $a$  del conjunto existe un único elemento  $a'$ , también perteneciente al conjunto y llamado inverso de  $a$ , tal que  $a \circ a' = a' \circ a = e$ .

2. **Ejemplo.** El conjunto de todos los números enteros (positivos, negativos y el cero) forman un grupo con respecto a la adición, ya que:

a) Si  $a$  y  $b$  son dos números enteros cualesquiera, entonces  $a + b$  es también un número entero, con lo que se satisface el axioma 1.

b) La suma es asociativa (es decir, se satisface el axioma 2).

c) Existe, en el conjunto propuesto, un elemento identidad con respecto a la adición, que es el cero, puesto que, para todo entero  $a$  se tiene  $a + 0 = 0 + a = a$ . Entonces, se satisface el axioma 3.

d) A todo entero  $a$  corresponde el entero  $-a$  como su inverso con respecto a la adición. En efecto, cualquiera sea  $a$  se tiene:  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

3. **Tabla de la Operación  $\circ$ .** En algunos casos puede simplificarse el trabajo necesario para verificar si un conjunto es o no un grupo con respecto a la operación  $\circ$ , mediante una tabla de doble entrada en la que se destina una fila y una columna para cada elemento; en la intersección de la fila destinada al elemento  $a$  con la columna correspondiente al elemento  $b$  se registra el elemento  $a \circ b$ .

Por ejemplo, si se desea determinar si el conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  forma o no un grupo con respecto a la adición módulo 5, construimos la tabla:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

donde  $+$  indica la operación: "adición módulo 5".

Al examinar la tabla se comprueba:

a) El conjunto es cerrado con respecto a la operación  $+$ , ya que todos los elementos que aparecen en la tabla pertenecen al conjunto considerado.

b) La operación es asociativa, puesto que, por ejemplo, se verifica:

$$1 + (2 + 3) = (1 + 2) + 3,$$

puesto que:

$$1 + (2 + 3) = 1 + 0 = 1$$

y

$$(1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 1$$

y análogamente en los otros casos.

- c) Existe un elemento identidad, que es cero: en la primera columna de la tabla aparecen los resultados de la operación  $a + 0$  y en la primera fila se registra  $0 + a$ . En ambos casos se verifica que los respectivos elementos coinciden con  $a$ .
- d) Los registros del elemento identidad (cero) en la tabla permiten investigar la existencia de inversos únicos. Por ejemplo, en la fila correspondiente al 2 aparece un cero y sólo uno, en la columna del 3 y, concordantemente, aparece un cero y sólo uno en la fila del 3, precisamente en la columna del 2 (en cada una de las columnas referidas hay un sólo cero). Se tiene:  $2 + 3 = 3 + 2 = 0$ , lo que significa que 3 es el inverso de 2 y 2 es el inverso de 3.

#### 4. Problemas Propuestos.

- 1) Determinar si el conjunto de los números enteros es o no un grupo con respecto a la sustracción.
- 2) Demostrar que el conjunto del problema 1 no forma un grupo con respecto a la multiplicación.
- 3) Demostrar que el conjunto de los números reales forma un grupo con respecto a la adición, pero no con respecto a la multiplicación.
- 4) Demostrar que las raíces de la ecuación  $x^4 - 1 = 0$ , forman un grupo con respecto a la multiplicación.
- 5) Demostrar que el conjunto de los números racionales positivos es un grupo con respecto a la multiplicación.
- 6) Demostrar que el conjunto de los números racionales es un grupo con respecto a la adición.

5. **Subgrupos.** Si un conjunto  $C$  es grupo con respecto a la operación  $\circ$ , se dice que un subconjunto  $S$  de  $C$  forma un *subgrupo*, si  $S$  también es grupo con respecto a la misma operación  $\circ$ .

Tómese, como ejemplo, el conjunto  $C$  de los números reales, el subconjunto  $S$  de los números racionales y la operación suma.

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto  $S$  de un conjunto  $C$ , que es grupo con respecto a la operación  $\circ$ , forme un subgrupo.

**Teorema.** Sea un conjunto  $C$ , que forma un grupo con respecto a la operación  $\circ$ , y sea  $S$  un subconjunto no vacío de  $C$ . Entonces  $S$  forma un subgrupo si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes: (i) si  $a$  y  $b$  son elementos de  $S$ , entonces  $a \circ b$  es elemento de  $S$ , y (ii) si  $a$  pertenece a  $S$ , su inverso  $a'$  también pertenece a  $S$ .

Primero demostraremos la suficiencia de las dos condiciones, es decir que si se cumplen (i) y (ii) entonces  $S$  es un grupo con respecto a la operación  $\circ$  y forma, en consecuencia, un subgrupo. Para ello veremos que (i) y (ii) garantizan el cumplimiento, por parte de los elementos de  $S$ , de los cuatro axiomas que deben satisfacer los elementos de un grupo.

El axioma de cerradura coincide con la condición (i) y el axioma de inversión coincide con la condición (ii), de manera que sólo nos queda ver que las condiciones implican la verificación de los axiomas de asociatividad y de identidad.

**Asociatividad:** Si  $a, b, c$  pertenecen a  $S$ , también pertenecen a  $C$ , puesto que  $S$  es subconjunto de  $C$ . Y, al ser elementos de  $C$ , satisfacen la asociatividad porque los elementos de  $C$  forman un grupo.

Identidad: Como  $S$  es no vacío, contiene al menos un elemento  $a$  y, por la condición (ii), también contiene al inverso  $a'$ . Luego, por la condición (i), también pertenece a  $S$  el elemento  $a \circ a'$ , pero este es  $e$ , el elemento identidad en el grupo  $C$ .

La necesidad de las condiciones (i) y (ii) es inmediata, ya que si  $S$  es grupo, deben cumplirse los cuatro axiomas, entre ellos el de cerradura (condición (i)) y el de inversión (condición (ii)).

Si volvemos a considerar el ejemplo propuesto, podemos notar que si  $a$  y  $b$  son dos números racionales, su suma también lo es (se cumple la condición (i)). Además, si  $a$  es racional, su inverso respecto de la suma,  $a' = -a$ , también es racional (se cumple la condición (ii)).

## VII. RAZONAMIENTO MATEMATICO

1. **Proposiciones.** En Matemáticas uno se encuentra generalmente con afirmaciones que pueden representar algo verdadero o algo falso. Estas afirmaciones se suelen llamar proposiciones.

Las estructuras matemáticas se apoyan sobre conjuntos de proposiciones cuya validez no se discute; se supone que son ciertas y sobre la base de este supuesto se elabora toda la teoría. Estas proposiciones iniciales se conocen como axiomas.

Mediante distintos tipos de razonamiento y respetando la validez de los axiomas, en matemáticas se trata de determinar si diversas proposiciones son verdaderas o son falsas, o, partiendo del supuesto de que determinadas proposiciones (hipótesis) son verdaderas, se trata de establecer si otras proposiciones (tesis) también lo son o si son falsas.

2. **Inducción y deducción.** Los procedimientos seguidos para establecer la validez o falsedad de las proposiciones pertenecen a dos categorías, de naturaleza distinta. Unos se apoyan en la repetición de observaciones o experiencias, en cuyo caso se dice que las conclusiones se obtienen por *inducción*, mientras que otros procedimientos, de carácter lógico, permiten evaluar las proposiciones mediante el análisis de su congruencia con los axiomas y las hipótesis. En este último caso se dice que las conclusiones se obtienen por *deducción*.

Las matemáticas se caracterizan por el carácter deductivo de sus procedimientos. Aunque uno se encuentra con frecuencia con la expresión *inducción matemática*, que se refiere a un camino para la determinación de la validez o falsedad de proposiciones, apoyado en el llamado *principio de inducción completa*, en realidad el razonamiento que se sigue es de carácter deductivo. El calificativo de inducción indica en este caso la acumulación de observaciones, pero las conclusiones finales se obtienen luego de *completar* esa inducción, asegurando la congruencia de ellas con las proposiciones iniciales. Más adelante nos ocuparemos de este tipo de inducción.

Ejemplos:

- 1) Una enorme cantidad de experiencias realizadas, en las que se ha verificado que una barra de hierro se dilató al ser calentada, nos permite asegurar, con gran tranquilidad, que el hierro siempre se dilata con el calor. Basados en un proceso de inducción concluimos que es verdadera la proposición "el hierro se dilata con el calor".
- 2) Si un grupo de alumnos observan, día tras día, que su profesor llega con alguna anticipación para dictar sus clases, pueden inducir que es cierta la proposición "el profesor llegará con anticipación a la próxima clase".
- 3) Si "para todo número real  $x$  se tiene  $y = x^2 + 1$ ", se deduce que "para todo número real  $x$  es  $3y = 3x^2 + 3$ ".

En los ejemplos 1 y 2 puede notarse que las conclusiones sufren un cierto grado de inseguridad. Si bien es cierto que toda la experiencia previa hace creer que *siempre* el hierro se dilata con el calor, no existe una razón lógica que nos haga descartar por completo la posibilidad de que, en circunstancias muy especiales, el hierro no se dilate con el calor. En el ejemplo 2 la conclusión aparece como mucho menos segura.

Este tipo de inseguridad (mayor o menor) no tiene cabida en matemáticas. En cambio, en el ejemplo 3 se tiene una deducción de carácter matemático. Aquí no hay dudas de que, si efectivamente es cierta la hipótesis "para todo número real  $x$  se tiene  $y = x^2 + 1$ ", entonces tampoco caben dudas con respecto a la validez de la proposición: "para todo número real  $x$  es  $3y = 3x^2 + 3$ ".

Otro ejemplo de deducción, aunque no de carácter matemático, es el siguiente:

- 4) Supongamos que es cierta la proposición "todos mis libros tienen tapas rojas". Entonces puede de-

*ducirse* que es falsa la proposición “este libro de tapas amarillas es mío”.

### 3. Tipos de razonamientos usados en Matemáticas.

1) **La negación de una proposición.** La negación de una proposición es otra proposición, que significa exactamente lo contrario. Por ejemplo, la proposición “b no es divisible por a” es la negación de la proposición “b es divisible por a”.

Si una proposición es verdadera, su negación es falsa y viceversa. Por ello, demostrar que una proposición es cierta es lo mismo que demostrar que su negación es falsa, y viceversa. Esto puede aprovecharse para sustituir el análisis de validez de una proposición por el de su negación, si resulta más cómodo.

2) **Las proposiciones universales.** Las proposiciones universales se refieren a *todos* los elementos en estudio. En su enunciado se suelen utilizar algunas de las palabras “todos”, “cualquiera”, “cualesquiera”, etc., o las expresiones “cada uno”, “cada una”, etc.

Los siguientes son ejemplos de proposiciones universales: “*todo* triángulo tiene al menos un ángulo agudo”, “dados dos números reales *cualquiera* a y b se tiene  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ”, “*cada uno* de los elementos de la intersección entre los conjuntos A y B pertenece al conjunto C”, “el área de un triángulo *cualquiera* es igual a la mitad del producto de las longitudes de los dos lados menores”.

Para demostrar que una proposición universal es verdadera, es necesario demostrar que la afirmación es correcta para cada uno de los elementos a los cuales se aplica, o bien que es cierta para un elemento *genérico*. Este último sería el procedimiento adecuado para demostrar que son ciertas las dos primeras proposiciones universales que se dan como ejemplo. En el tercer ejemplo, si los conjuntos considerados tienen pocos elementos, podría convenir tomar cada uno de los elementos pertenecientes a  $A \cap B$  y verificar si efectivamente pertenece o no al conjunto C.

Para demostrar que una proposición universal es falsa, es suficiente, en cambio, constatar que no se cumple en un caso particular. Cuando se exhibe un caso particular en que no se cumple la proposición, se dice que se da un *contraejemplo*. Mediante un contraejemplo puede demostrarse la falsedad de la proposición “el área de un triángulo cualquiera es igual al producto de las longitudes de los dos lados menores”.

3) **Las proposiciones existenciales.** Tal como lo indica el calificativo, las proposiciones existenciales se refieren a la *existencia* de elementos con determinada propiedad.

Los siguientes son ejemplos de proposiciones de este tipo: “existen números cuyo cuadrado es igual a nueve”, “existen triángulos cuya área es igual a la mitad del producto de las longitudes de los dos lados menores”, “existe un número racional tal que multiplicado por sí mismo da como resultado 5”.

Para demostrar que una proposición existencial es verdadera basta con dar un *ejemplo* en el que se verifica que la afirmación es correcta. Se puede verificar que el número 3 (o el -3) es tal que su cuadrado es 9, como también puede comprobarse que si se considera un particular triángulo rectángulo, su área será igual al producto de las longitudes de sus lados menores. Es decir, se puede demostrar que son verdaderas las dos primeras proposiciones existenciales dadas como ejemplos.

En cambio, para demostrar que una proposición existencial es falsa, es necesario comprobar que no existe siquiera un caso en que se verifique la propiedad enunciada en la proposición. Si se quiere demostrar que es falsa la proposición “existe un elemento con la propiedad A”, habría que demostrar que es verdadera la proposición universal “todo elemento carece de la propiedad A”. La tercera proposición existencial dada como ejemplo más arriba, es falsa; para demostrarlo es necesario probar que es verdadera la proposición universal “el cuadrado de todo número racional es diferente de 5”.

4) **La reducción al absurdo.** Ya hemos dicho que una proposición es verdadera o es falsa; no puede ser las dos cosas a la vez. Afirmar que una proposición es a la vez verdadera y falsa, o, lo que es lo mismo, afirmar que tanto la proposición como su negación son verdaderas, representa una *contradicción*.

Las demostraciones por reducción al absurdo se basan precisamente en contradicciones. Si se desea demostrar que una proposición es verdadera, puede uno suponer que es falsa y seguir luego un proceso de deducción apoyado en otras proposiciones cuya veracidad esté ya establecida; si todo el razonamiento es correcto y se llega a una contradicción, ésta se deberá atribuir a la negación que se hizo de la proposición inicial. En este caso se dice que se ha llegado a un *absurdo* y que éste proviene de suponer que la proposición inicial es falsa; en consecuencia, ella no es falsa sino verdadera.

Trataremos de demostrar, por reducción al absurdo, que es verdadera la proposición siguiente: "Sean  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , tres rectas distintas de un mismo plano, con  $r$  y  $s$  paralelas entre sí; entonces si  $t$  corta a  $r$ , también corta a  $s$ ".

Supondremos que esta proposición es falsa y utilizaremos las siguientes otras proposiciones, cuya validez asumiremos que está asegurada:

- a) Si se consideran dos rectas distintas de un mismo plano, ellas o bien son paralelas (no tienen punto alguno en común) o bien se cortan en un punto.
- b) Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella.

Suponer que la proposición inicial es falsa significa asumir que  $t$  no corta a  $s$ , es decir, que son paralelas (por la proposición a). Pero  $t$  corta a  $r$  (por hipótesis) en un punto que debe ser exterior a  $s$  (también por la proposición a, recordando que  $r$  y  $s$  son paralelas por hipótesis). Entonces, por este punto exterior a  $s$  pasan dos rectas distintas ( $r$  y  $t$ ) paralelas a ella, lo que está en contradicción con la proposición b. Esto es un absurdo que proviene de suponer que  $t$  no corta a  $s$ ; entonces es verdadera la proposición inicial ( $t$  corta a  $s$ ).

**4. La inducción matemática.** Algunas proposiciones universales se refieren a todos los elementos de un conjunto coordinable con el conjunto de los números naturales. Este tipo de proposiciones suele formularse con motivo de la verificación de una propiedad para algunos elementos del conjunto, deseándose extender la propiedad en términos universales.

Si, por ejemplo, se considera el conjunto de números:

$$A = \{ a_n \mid a_n = \sum_{i=1}^n i^2, n \text{ es un número natural} \},$$

puede observarse que  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  se obtienen valorizando la expresión:

$$\frac{5n^2 - 7n + 4}{2}$$

para  $n$  igual a 1, 2 y 3, respectivamente.

Podría interesarnos generalizar este resultado en términos de la proposición universal siguiente: "Para todo número natural  $n$  se tiene

$$a_n = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{5n^2 - 7n + 4}{2}." \text{ Pero podemos demostrar que esta pro-}$$

posición es falsa, mediante un contraejemplo. En efecto, si tomamos  $n = 4$ , tendremos

$$\frac{5n^2 - 7n + 4}{2} = 28$$

mientras que  $a_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \neq 28$ .

Aquí se ha generalizado a partir de lo que se observó en tres casos particulares. Se ha hecho una inducción y se cometió un error. No se ha seguido un razonamiento aceptable desde el punto de vista matemático.

En matemáticas se puede inducir, pero de acuerdo con el *principio de inducción completa*, que puede enunciarse de la siguiente manera:

Sea el conjunto  $B = \{ b_n \mid n \text{ es un número natural} \}$  y sea  $P$  una propiedad. Entonces, si  $b_1$  tiene la propiedad  $P$  y si la posesión de la propiedad  $P$  por parte de un elemento  $b_n$  implica que  $b_{n+1}$  también la posee, entonces todos los elementos de  $B$  tienen la propiedad  $P$ .

Puede notarse que el primer elemento tiene la propiedad por hipótesis, el segundo la tiene porque la posee el primero, el tercero porque está asegurada para el segundo, y así sucesivamente. De manera que, de acuerdo con este principio, la inducción es segura. En realidad, se puede *deducir* que, si se cumplen los requerimientos del principio de inducción completa, entonces *todos* los elementos tienen la propiedad.

Si retomamos el ejemplo anterior, veremos que, apoyándonos en el principio de inducción completa, podremos demostrar que es verdadera la proposición:

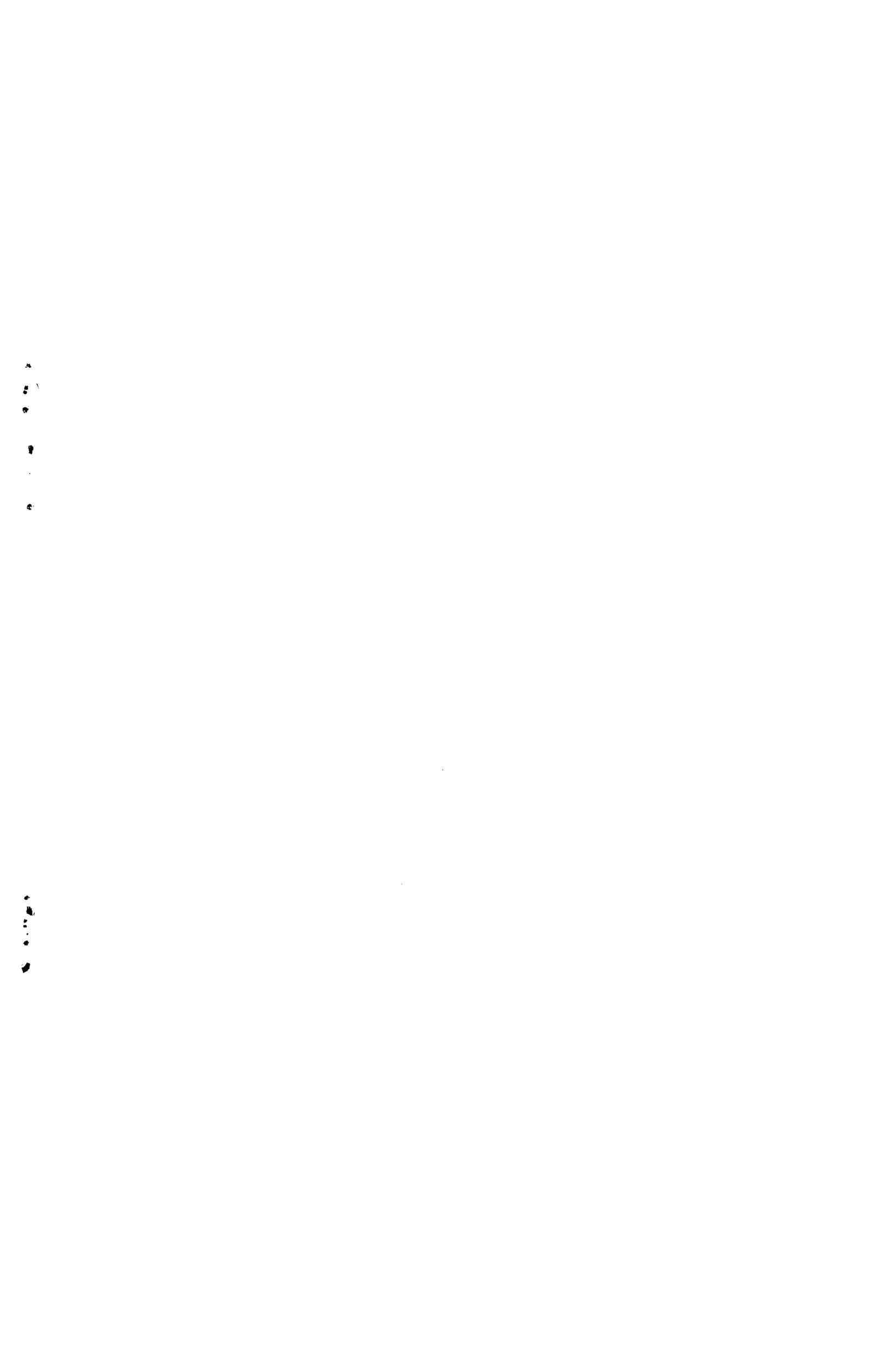
$$\text{"Para todo número natural } n \text{ se tiene } a_n = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} \text{"}$$

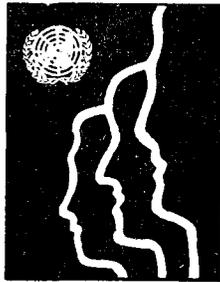
En primer lugar, podemos comprobar que esta expresión vale 1 para  $n = 1$ , que es el valor de  $a_1$  (el primer elemento tiene la propiedad). Además, si la expresión propuesta es correcta para un cierto  $n$ , entonces:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + (n+1)^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(2[n+1]+1)[n+1]([n+1]+1)}{6}, \end{aligned}$$

resultado que corresponde a la expresión propuesta, para  $n+1$  (si la propiedad es válida para  $a_n$ , entonces también es válida para  $a_{n+1}$ ).







**CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA  
CELADE**

*Sede:* J.M. Infante 9. Casilla 91. Teléfono 257806  
Santiago (Chile)

*Subsede:* Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
Apartado Postal 5249  
San José (Costa Rica)