

13 SEP 1968

c. i

CELADE

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Distribución interna

Ricardo Alvarado

4219

Serie C, No 110.
Agosto, 1968.
150.

PROYECCIONES DE POBLACION. ENSAYO
DE UN METODO MATRICIAL BASADO EN
EL METODO DE LOS COMPONENTES

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA (CELADE)

Sede: José M. Infante 9, Casilla, 91. Teléfono 495071
Santiago (Chile)

Subsede: Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Casilla, 5249
San José (Costa Rica)

AA-9-73

I N D I C E

	<u>Página</u>
I. INTRODUCCION.....	1
II. MATRICES DE PROYECCION.....	3
III. METODOLOGIA USADA.....	6
IV. DESARROLLO DEL METODO.....	16
V. CONCLUSIONES.....	35
APENDICE I.....	41
APENDICE II.....	44
APENDICE III.....	47
DIAGRAMA DE BLOQUE DEL PROGRAMA.....	42

Indice de cuadros y gráficos

<u>Cuadro</u>	
1. Ganancias de mortalidad según la esperanza de vida.....	6
2. Ganancias en mortalidad según distintas esperanzas de vida	8
3. México: Proyección de la esperanza de vida al nacer y sus diferencias.....	10
4. Costa Rica: Proyección de la esperanza de vida al nacer y sus diferencias.....	10
5. Relaciones de supervivencia para 60-65, 65-70.....	16
6. México: Tasas de fecundidad por grupos quinquenales pa- ra 1960, 1965 y 1970. Fecundidad descendente.....	17
7. Cálculo de los elementos del primer renglón de la matriz de proyección femenina en la hipótesis de fecundidad constante	18
8. Cálculo de los elementos de la diagonal de la matriz T_{fc}	21
9. Cálculo de los elementos del último renglón de la matriz T_{fc}	22
10. e_0 y tasa bruta de reproducción de México y Costa Rica.	25
11. Costa Rica: Relaciones de supervivencia para 1963-68...	25
12. Costa Rica: Tasas de fecundidad para 1963 y 1968.....	26
13. Costa Rica: Población femenina en 1968.....	27

	<u>Página</u>
14. Comparación de la proyección de la población de Costa Rica para 1973, según la hipótesis de fecundidad constante, hecha por el método de una matriz T_{fc} de México y por el método de los componentes.....	28
15. Comparación de la proyección de la población de Costa Rica para 1978, según la hipótesis de fecundidad constante, hecha por el método de una matriz T_{fc} de México y por el método de los componentes, Mujeres.....	29
16. Costa Rica: Población femenina en 1968.....	30
17. Comparación de la proyección de la población de Costa Rica para 1973, según la hipótesis de fecundidad descendente, hecha por el método de una matriz T_{fd} de México y por el método de los componentes, Mujeres.....	31
18. Comparación de la proyección de la población de Costa Rica para 1978, según la hipótesis de fecundidad descendente hecha por el método de una matriz T_{fd} de México y por el método de los componentes, Mujeres.....	32
19. Proyección de la población femenina de Costa Rica. Método de una matriz de transformación y método de los componentes. Fecundidad constante.....	33
20. Proyección de la población femenina de Costa Rica. Método de una matriz de transformación y método de los componentes. Fecundidad descendente.....	34
21. Comparación de la proyección de la población de México para 1970, según el método de una matriz de transición y el método de los componentes.....	46
<u>Gráfico</u>	
1. Ganancia en mortalidad al pasar de $e_0^o = 40$ a $e_0^o = 42.5$ y de $e_0^o = 42.5$ a $e_0^o = 45$	7
2. Ganancias en mortalidad al pasar de $e_0^o = 62.24$ a $e_0^o = 65.28$ y de $e_0^o = 60.40$ a $e_0^o = 63.20$	9
3. Ajuste de las tasas de fecundidad de los grupos 40-44 y 45-49, 1960.....	49

LISTA DE SIMBOLOS

M_n^{a-b}	Matriz de proyección femenina de fecundidad constante, por grupos quinquenales, para el período (a, b) y cuyo orden cronológico es n. n toma los valores 0, 1, 2,
M_n^{a-b}	Matriz de proyección femenina de fecundidad constante.
T_{fc}	Matriz de transformación en la hipótesis de que la fecundidad es constante.
T_{fd}	Matriz de transformación en la hipótesis de que la fecundidad es descendente.
N_i	Población femenina por grupos de edades correspondiente al año i, calculada por el método de los componentes.
N'_i	Población femenina por grupo de edades correspondiente al año i, calculada por el método de una matriz de transformación, usando T_{fc} .
N'_i	Población femenina por grupos de edades correspondiente al año i, calculada por el método de una matriz de transformación, usando T_{fd} .
${}_5P_b^{a-b}$	Probabilidad de supervivencia al finalizar el período quinquenal (a, b), de un recién nacido.
${}_5P_{x,x+4}^{a-b}$	Probabilidad de que una persona de edad cumplida entre x y x+4 llegue con vida al grupo de edad x+5, x+9, al finalizar el período (a, b).
$f_{x,x+4}^a$	Tasa de fecundidad del grupo que se encuentra entre las edades cumplidos x y x+4, en el año a.



I. INTRODUCCION

1. Las proyecciones de población tienen importancia tanto desde un punto de vista teórico como práctico. El enfoque teórico es importante, pues dando diversas hipótesis del comportamiento de los componentes demográficos a través del tiempo puede investigarse como y hasta qué punto influyen éstos en la estructura de la población, por ejemplo, con un determinado nivel de fecundidad constante y mortalidad descendente, observar cómo puede disminuir el porcentaje de personas en edad de trabajar y por lo tanto hacerse más gravoso el peso de quienes deben mantener a la población desocupada; o bien ver qué importancia relativa toma el grupo de personas de 0 a 15 años, quienes deberán recibir educación primaria y secundaria y representar una erogación determinada del capital con que cuenta un gobierno; o analizar cómo varía el grupo de personas de 65 años y más para quienes los planes de jubilación y seguros de pensiones son indispensables.

El punto de vista práctico reviste particular importancia en la actualidad, en que los países menos adelantados tratan de acelerar su desarrollo económico y social fijándose metas y preparando planes que eleven el nivel de vida y el nivel cultural de la población. Las proyecciones proporcionan una base cualitativa y cuantitativa de los recursos humanos, tanto para la oferta como para la demanda. Es posible así, comparar en términos numéricos los requisitos humanos que un plan de desarrollo determinado necesita para el logro de objetivos e introducir, si fueran necesarios, los ajustes para estar acordes a la realidad.

Existen diversos tipos de proyecciones entre las que están las de la población por sexo y edad que suministran la base para las proyecciones de población total, población económicamente activa y la mayoría de los tipos restantes de proyecciones demográficas. Su utilidad es grande por ejemplo, si dado el número proyectado de habitantes por sexo y edad de un país y una estimación del consumo adecuado de un producto determinado por persona, según su sexo, pueden calcularse las necesidades que habrá de consumo y por lo tanto prever la producción de dicho producto en el futuro.

2. Dependiendo de los datos que se tengan, se pueden aplicar distintos métodos para proyectar la población. Si se tienen la población por sexo y edad al punto de partida, estadísticas vitales y una tabla de vida para cada sexo, el número de supervivientes que habrá en épocas futuras puede calcularse mediante la aplicación por separado de las probabilidades de supervivencia y las tasas de fecundidad proyectadas para cada sexo, por grupos quinquenales, decenales, etc. de edad; también será posible calcular el efecto de la migración sobre las poblaciones futuras. Este método se conoce con el nombre de "los componentes" y es el más usado cuando los datos lo permiten. Cabe hacer notar que la aplicación de este método requiere del uso de modelos matemáticos como son las tablas modelo de Naciones Unidas.

"Métodos matemáticos" puros son aquellos en los que se determina una curva que describa el movimiento de una población determinada y por medio de ella se estima la población en el futuro. Este tipo de método no explica el por qué de las variaciones en el tamaño de la población en el tiempo, mientras que el método de los componentes, usa de las matemáticas pero por su propia naturaleza permite observar cómo los componentes demográficos han dado como resultado un volumen de población cualquiera.

Cuando se requiera considerar los planes de construcción de vivienda como factor muy importante en los cambios demográficos, o los cambios que se esperan en los ingresos, la educación, la migración, etc. como factores que influyen en el crecimiento futuro de una población, puede recurrirse a los "métodos económicos".

El presente trabajo tiene como objetivo elaborar una metodología que permita hacer proyecciones de población por el método de los componentes, de una manera más compacta y rápida, usando las matrices como elemento de trabajo y las computadoras electrónicas como herramienta de cálculo.

Para simplificar el cálculo, se trabajará únicamente con mujeres en grupos quinquenales hasta el de 45 a 49 años, que es el último en que generalmente se supone que la fecundidad tiene importancia.

II. MATRICES DE PROYECCION

1. La idea de utilizar una matriz para proyectar la población por sexo y edad, está implícita en el método llamado de los componentes, utilizado por P.K. Whelpton en los años siguientes a 1930, sistema que desde entonces se aplica con éxito a las proyecciones de población constituyendo un valioso método demográfico.

La sencillez y claridad de una matriz de proyección, son propiedades fundamentales, dado que en ella están contenidos los elementos esenciales de fecundidad y mortalidad de una población en forma separada, primer renglón y subdiagonal respectivamente.

Mediante el uso de computadoras, el trabajo con matrices de proyección se reduce notablemente en cuanto a laboriosidad de cálculo, permitiendo agrandar el tamaño de la matriz tanto como se quiera sin perjuicio de complicar el programa de computadora, pudiendo hacer multiplicaciones sucesivas o elevaciones de potencia en forma rápida y sencilla, con el objeto de obtener las poblaciones futuras a largo plazo y observar el efecto producido por una determinada hipótesis de fecundidad en la estructura relativa de la población por sexo y edad.

La matriz de proyección tiene varias propiedades matemáticas que están en función de sus raíces características. "La raíz característica dominante es la exponencial de la tasa intrínseca de crecimiento natural, y si la matriz es elevada sucesivamente a exponentes mayores, la composición por edad llega a ser estable"^{1/} desde una magnitud de potencia determinada en adelante.

Estas características le dan una importancia sobresaliente al uso de las matrices para proyectar la composición de una población, por su sencillez, medios de cálculo y propiedades matemáticas.

2. Una matriz de proyección quinquenal hasta el grupo 45-49 tiene la forma:

1/ Keyfitz, K: "The population projection as a matrix operator". Demography, 1964, Vol. 1, Nº 1. pág. 56.

	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
0-4	0	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	$a_{1,10}$
5-9	a_{21}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10-14	0	a_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0
15-19	0	0	a_{43}	0	0	0	0	0	0	0
20-24	0	0	0	a_{54}	0	0	0	0	0	0
25-29	0	0	0	0	a_{65}	0	0	0	0	0
30-34	0	0	0	0	0	a_{76}	0	0	0	0
35-39	0	0	0	0	0	0	a_{87}	0	0	0
40-49	0	0	0	0	0	0	0	a_{98}	0	0
45-49	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{10,9}$	0

donde los elementos $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1,10}$ son los que contienen las características de fecundidad de la población y los elementos $a_{21}, a_{32}, \dots, a_{98}, a_{10,9}$ son los que contienen las características de la mortalidad. Será una matriz para una población cerrada.

Una matriz de proyección femenina, por grupos quinquenales hasta el de 45-49, se calcula de la manera siguiente:

$${}_5P_{60-65} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5P_{60-65}^{60-65} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5P_{5-9}^{60-65} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 5P_{40-44}^{60-65} & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es la matriz de supervivencia femenina.

la matriz de fecundidad será:

$$F^{60} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{10-14}^{60} \cdot K & f_{15-19}^{60} \cdot K \dots f_{44-49}^{60} \cdot K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \dots \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \end{bmatrix}$$

donde $K = 5 \frac{B^f}{B} {}_5P_b^{60-65}$; B^f nacimientos femeninos, y B nacimientos totales; ${}_5P_b^{60-65}$ probabilidad de supervivencia de una recién nacida.

Si I es una matriz identidad de 10-10, la matriz de proyección femnina será igual a:

$$P^{60-65} = F^{60} \frac{I + P^{60-65}}{2}$$

y adquirirá finalmente la forma siguiente:

	0-4	5-9	10-14	40-44	45-49
0-4	0	${}_5P_{5-9}^{60-65} \cdot f_{10-14}^{60} \cdot K \dots \dots \dots$			$(f_{40-44}^{60} + f_{45-49}^{60} \cdot {}_5P_{40-44}^{60-65})K$	$f_{40-44}^{60} \cdot K$
10-14	${}_5P_{0-4}^{60-65}$	0	0	0	0
15-19	0	${}_5P_{5-9}^{60-65}$	0	0	0
...
40-44	0	0	0	0	0
45-49	0	0	0	${}_5P_{40-44}^{60-65}$	0

Esta matriz será llamada dentro del presente trabajo M_0^{60-65} .

Se especificó anteriormente que esta matriz es para una población cerrada, sin embargo puede construirse una matriz de proyección con migración incluida como componente demográfico.

III. METODOLOGIA USADA

1. Para llegar a un método útil se hicieron las consideraciones siguientes:

Se analizan primero las ganancias de mortalidad para grupos quinquenales femeninos, según varíe la esperanza de vida al nacer. (Véase el cuadro 1).

Se puede ver en el cuadro 1 que la ganancia en esperanza de vida es la misma de la columna (1) a la (2) que de la (2) a la (3), es decir, 2.5. En virtud de esta constancia, las ganancias por mortalidad de las columnas (4) y (5) son similares; esto se muestra en el gráfico 1.

Cuadro 1

GANANCIAS DE MORTALIDAD SEGUN LA ESPERANZA DE VIDA

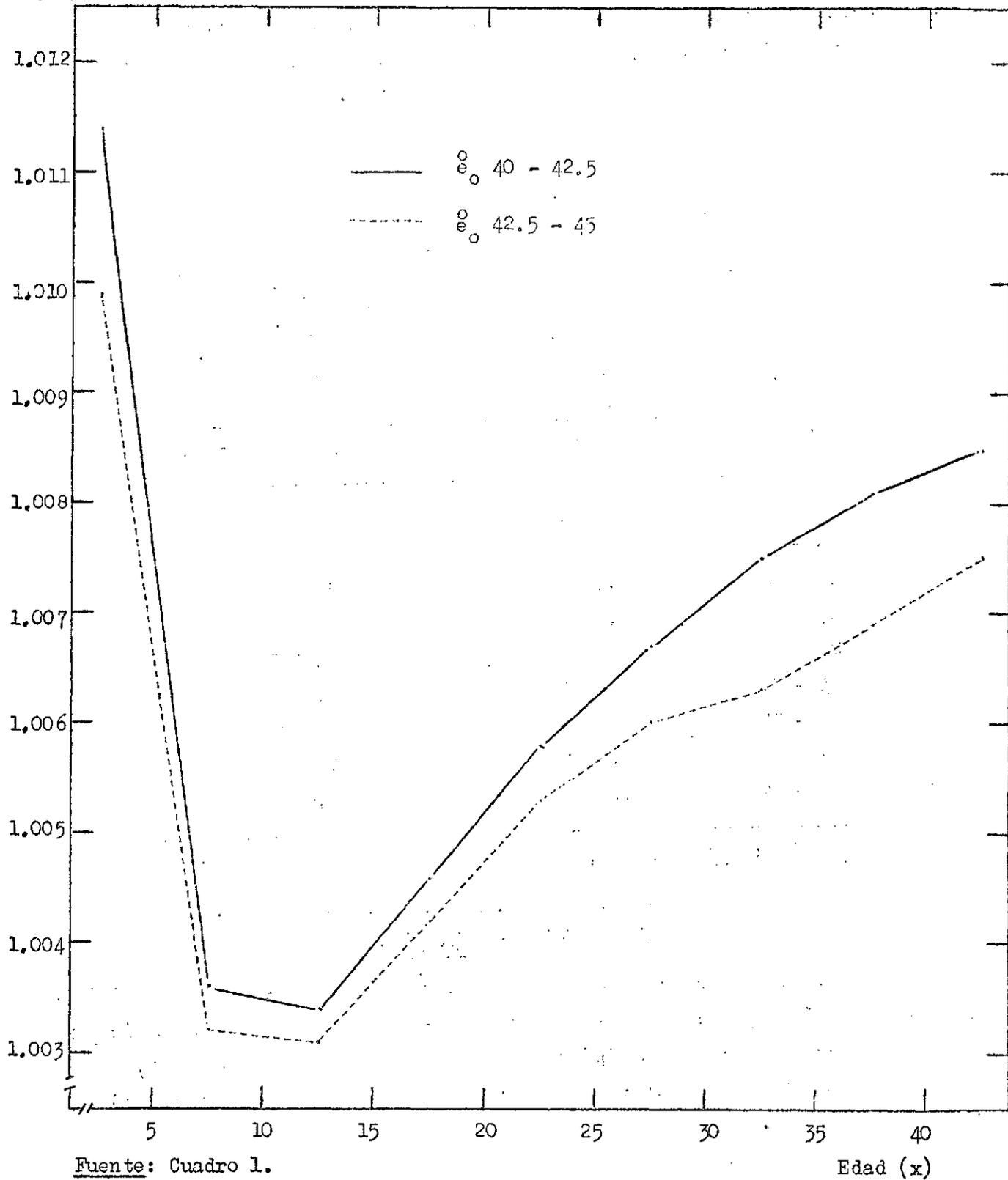
Edad	$5^P x_{2,x+4}$			(2)	(3)
	$e_0 = 40$	$e_0 = 42.5$	$e_0 = 45$	(1)	(2)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0 - 4	0.9105	0.9209	0.9300	1.0114	1.0099
5 - 9	0.9707	0.9742	0.9773	1.0036	1.0032
10 - 14	0.9701	0.9734	0.9764	1.0034	1.0031
15 - 19	0.9587	0.9631	0.9671	1.0046	1.0042
20 - 24	0.9500	0.9555	0.9606	1.0058	1.0053
25 - 29	0.9456	0.9520	0.9577	1.0067	1.0060
30 - 34	0.9419	0.9490	0.9550	1.0075	1.0063
35 - 39	0.9372	0.9448	0.9513	1.0081	1.0069
40 - 44	0.9290	0.9369	0.9439	1.0085	1.0075

Fuente: Naciones Unidas: "Métodos para preparar proyecciones de población", Manual III, tabla V.

Gráfico 1

GANANCIA EN MORTALIDAD AL PASAR DE $e_o^o=40$ A $e_o^o=42.5$ Y DE $e_o^o=42.5$ A $e_o^o=45$

$$\frac{{}_5P^1_{x,x+5}}{{}_5P^P_{x,x+5}}$$



Fuente: Cuadro 1.

Como se sabe, la ganancia en mortalidad va disminuyendo conforme las condiciones de vida son mejores, por lo tanto, se hará ahora la comparación entre la ganancia de mortalidad que hay cuando la esperanza de vida es mayor que las que originaron el gráfico 1, esperando que las discrepancias sean menores aun cuando no sea igual la ganancia de esperanza de vida.

Cuadro 2

GANANCIAS EN MORTALIDAD SEGUN DISTINTAS
ESPERANZAS DE VIDA

Edad	$\frac{P_{x,x+4}^0}{e_0^0} = 65.28$	$\frac{P_{x,x+4}^0}{e_0^0} = 63.20$
	a/	b/
	$\frac{P_{x,x+4}^0}{e_0^0} = 62.24$	$\frac{P_{x,x+4}^0}{e_0^0} = 60.40$
	Ganancia en $e_0^0 = 3.04$	Ganancia en $e_0^0 = 2.80$
0 - 4	1.0065	1.0062
5 - 9	1.0019	1.0018
10 - 14	1.0020	1.0019
15 - 19	1.0027	1.0026
20 - 24	1.0032	1.0031
25 - 29	1.0033	1.0033
30 - 34	1.0033	1.0033
35 - 39	1.0034	1.0032
40 - 44	1.0035	1.0033

Fuentes: a/ Benítez, Raúl y Cabrera, Gustavo: Proyecciones de la población de México, 1960-1980. Banco de México, página 37, tabla XII-2.

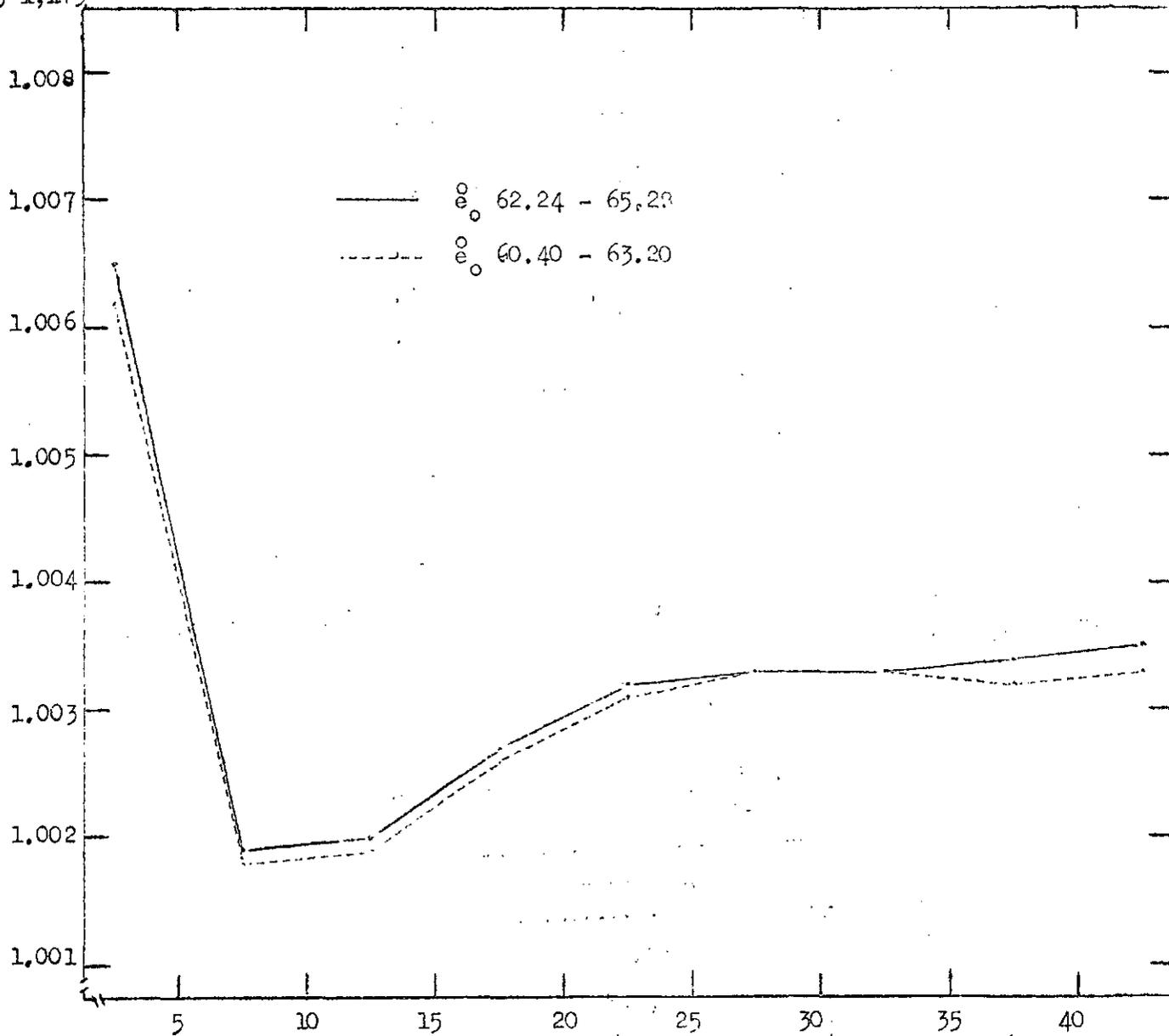
b/ Naciones Unidas: Op. cit., tabla V.

En el gráfico 2 se presentan estas ganancias. Se observa la gran similitud en ambas líneas, que está determinada por la más alta esperanza de vida, al grado de poder fundamentar la hipótesis de que fueran las mismas, o sea, que dicha ganancia es más o menos constante cuando la esperanza de vida fluctúa alrededor de 63 años.

Gráfico 2

GANANCIAS EN MORTALIDAD AL PASAR DE $e^{\circ}_0 = 62.24$ a $e^{\circ}_0 = 65.28$ Y DE $e^{\circ}_0 = 60.40$ a $e^{\circ}_0 = 63.20$

$$\frac{{}_5P^1_{x,x+5}}{{}_5P^{\circ}_{x,x+5}}$$



Fuente: cuadro 2

Edad (x)

Las proyecciones de la esperanza de vida hechas por Benítez y Cabrera para México son:

Cuadro 3

MEXICO: PROYECCION DE LA ESPERANZA DE VIDA AL NACER Y SUS DIFERENCIAS

Período	° _o femenina	△
1960-1965	62.24	3.04
1965-1970	65.28	2.34
1970-1975	67.42	1.92
1975-1980	69.54	

Fuente: Benítez, Raúl y Cabrera, Gustavo: op. cit., pág. 35.

La ganancia en años en la esperanza de vida al nacer no es constante, sin embargo las ganancias en mortalidad serán muy similares.

Analizando la proyección hecha por Guillermo Macció de las esperanzas de vida para Costa Rica se ve lo siguiente:

Cuadro 4

COSTA RICA: PROYECCION DE LA ESPERANZA DE VIDA AL NACER Y SUS DIFERENCIAS

Período	° _o femenina	△
1963-1968	67.14	
1968-1973	69.69	2.55
1973-1978	71.97	2.28

Fuente: Macció, Guillermo: Costa Rica: Proyecciones de población por sexo y grupos de edad, 1950-1978, CELADE, Serie C, N° 95, pág. 14, Santiago, Chile, 1967.

La ganancia en años por período en la e_0^0 es más uniforme en esta proyección, por lo que se esperará una mayor similitud en las ganancias por mortalidad en los mismos períodos.

Hasta el momento se ha visto lo siguiente:

Se puede considerar a corto plazo, constancia en las ganancias por mortalidad si:

- a) la ganancia en e_0^0 por período es más o menos constante, y
- b) la e_0^0 es alta en el principio del período.

De acuerdo a la notación expresada en el capítulo II, sección 2, se puede buscar una matriz de transformación T, tal que:

$$M_0^{60-65} T = M_1^{65-70}$$

de tal modo que en dicha matriz de transformación se encuentren contenidos los elementos del cambio en mortalidad y fecundidad del período 60-65 al 65-70.

Si esos cambios son aproximadamente constantes en el tiempo, en vez de calcular M_2^{70-75} (como debieron haber sido calculados M_0^{60-65} y M_1^{65-70}), se puede obtener automáticamente si se efectúa la siguiente operación:

$$M_1^{65-70} T = M_2^{70-75}$$

y por consecuencia:

$$M_1^{65-70} T^2 = M_2^{70-75} T = M_3^{75-80}$$

de este modo se tendrían las 4 matrices de proyección a partir de 2 solamente.

Se calcularán 2 matrices de transformación, una en la hipótesis de que la fecundidad es constante y otra en la de que es descendente, denominada respectivamente T_{fc} y T_{fd} .

Esto se hace con el objeto de tener 2 tipos de cambio en la fecundidad y poder efectuar 2 proyecciones de población de tal modo de formar un intervalo dentro del cual puede caer con más seguridad la población futura.

Se denota como N_{60} al vector de población inicial, N_{65} al siguiente y así sucesivamente.

Ahora bien, Costa Rica es un país que tiene condiciones de mortalidad y fecundidad semejantes a las de México, por lo que se puede intentar hacer una proyección de Costa Rica, teniendo como base una sola matriz de proyección, la M_0^{63-68} y las matrices de transformación de México para fecundidad constante y descendente T_{fc} y T_{fd} , trabajando así con una sola matriz de proyección y no con 2 como en el caso de México. La proyección de la población de Costa Rica por el presente método, se comparará con la hecha por Guillermo Hacció por el método de los componentes. El desarrollo de estos cálculos se llevará a cabo en el capítulo IV.

2. De acuerdo a lo visto en el capítulo II, sección 2, se puede denotar a M_0^{60-65} como

$$\begin{bmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} \dots\dots\dots a_{19} & a_{1,10} \\
 a_{21} & 0 & 0 \dots\dots\dots 0 & 0 \\
 0 & a_{32} & 0 \dots\dots\dots 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 \dots\dots\dots 0 \\
 0 & 0 & 0 \dots\dots\dots a_{10,9} & 0
 \end{bmatrix} = M_0^{60-65}$$

y a M_1^{65-70} como

$$\begin{bmatrix}
 0 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{19} & b_{1.10} \\
 b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & b_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & b_{10.9} & 0
 \end{bmatrix} = M_1^{65-70}$$

la matriz T que satisface la ecuación:

$$M_0^{60-65} T = M_1^{65-70}$$

tiene la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix}
 t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{99} & 0 \\
 0 & t_{10.2} & t_{10.3} & t_{10.4} & t_{10.5} & t_{10.6} & t_{10.7} & t_{10.8} & t_{10.9} & t_{10.10}
 \end{bmatrix} = T$$

Las ecuaciones necesarias para obtener T en función de M_0^{60-65} y M_1^{65-70}

son:

$$t_{11} = \frac{b_{21}}{a_{21}} \quad t_{10.2} = (b_{12} - a_{12} \frac{b_{32}}{a_{32}}) / a_{1.10}$$

$$t_{22} = \frac{b_{32}}{a_{32}} \quad t_{10.3} = (b_{13} - a_{13} \frac{b_{43}}{a_{43}}) / a_{1.10}$$

$$t_{33} = \frac{b_{43}}{a_{43}} \quad t_{10.4} = (b_{14} - a_{14} \frac{b_{54}}{a_{54}}) / a_{1.10}$$

$$t_{44} = \frac{b_{54}}{a_{54}} \quad t_{10.5} = (b_{15} - a_{15} \frac{b_{65}}{a_{65}}) / a_{1.10}$$

$$t_{55} = \frac{b_{65}}{a_{65}} \quad t_{10.6} = (b_{16} - a_{16} \frac{b_{76}}{a_{76}}) / a_{1.10}$$

$$t_{66} = \frac{b_{76}}{a_{76}} \quad t_{10.7} = (b_{17} - a_{17} \frac{b_{87}}{a_{87}}) / a_{1.10}$$

$$t_{77} = \frac{b_{87}}{a_{87}} \quad t_{10.8} = (b_{18} - a_{18} \frac{b_{98}}{a_{98}}) / a_{1.10}$$

$$t_{88} = \frac{b_{98}}{a_{98}} \quad t_{10.9} = (b_{19} - a_{19} \frac{b_{10.9}}{a_{10.9}}) / a_{1.10}$$

$$t_{99} = \frac{b_{10.9}}{a_{10.9}} \quad t_{10.10} = \frac{b_{1.10}}{a_{1.10}}$$

$t_{11}, t_{22}, \dots, t_{88}, t_{99}$ son las ganancias en mortalidad y

$t_{10.2}, t_{10.3}, \dots, t_{10.9}, t_{10.10}$ son los cambios que se producen en la fecundidad del quinquenio 60-65 al 65-70, los que son función de los cambios que hayan habido en las tasas de fecundidad y en las ganancias de mortalidad.

Un ejemplo numérico del cálculo de esta matriz se llevará a cabo en el capítulo IV, sección 4.

3. Las ventajas del método a seguir son las siguientes:

- a) Es un método más compacto y sencillo pues se usa una sola matriz de proyección calculada por los métodos tradicionales, expuestos en el capítulo II sección 2, pues las demás se obtienen por medio de una matriz de transformación.
- b) La aplicación de las computadoras electrónicas como medio de operación, facilitando el cálculo y acelerando la obtención de los resultados.
- c) La utilización de este método como un medio de investigación teórica, observando, por la aplicación sucesiva de una matriz de transformación a la matriz original de proyección, la influencia que tienen la fecundidad y la mortalidad en la estructura de una población determinada, que comienza un período con ciertas características de fecundidad y mortalidad dadas.

4. Las limitaciones sólo se presentan en el presente trabajo, pero pueden ser superadas al investigar los siguientes puntos.

- a) Control de la variable tiempo, pues este método supone una constancia en el cambio que sufren los factores demográficos a través del tiempo.
- b) Acudir a las tablas modelo de mortalidad para encontrar las matrices de transformación pertinentes, en vez de recurrir al caso particular de México para obtener T_{fc} y T_{fd} para proyectar la población de Costa Rica o la de cualquier otro país.
- c) Incluir las migraciones dentro de la matriz de proyección.

IV. DESARROLLO DEL METODO.

1. Para la construcción de las matrices de proyección de 1960-1965 y 1965-1970 de México se cuenta con las relaciones de supervivencia siguientes:

Cuadro 5

RELACIONES DE SUPERVIVENCIA PARA
60-65, 65-70
Mujeres

Edad	${}_5P_{60-65}^{x, x+4}$ (1)	${}_5P_{65-70}^{x, x+4}$ (2)
(B)	(0.9217)	(0.9400)
0 - 4	0.9691	0.9754
5 - 9	0.9915	0.9934
10 - 14	0.9936	0.9956
15 - 19	0.9906	0.9933
20 - 24	0.9832	0.9864
25 - 29	0.9827	0.9859
30 - 34	0.9786	0.9818
35 - 39	0.9736	0.9769
40 - 44	0.9680	0.9714
45 - 49	0.9590	0.9629

Fuente: Benítez, Raúl y Cabrera, Gustavo: Proyecciones de la Población de México 1960-1980. Banco de México, página 37. Tabla XII-2

Como se proyectará solamente hasta el grupo 45-49, estas relaciones de supervivencia son suficientes.

Se cuenta también con las siguientes tasas de fecundidad por grupos quinquenales de edad, según 2 hipótesis de evolución de la fecundidad, a saber, constante y descendente:

Cuadro 6

MEXICO: TASAS DE FECUNDIDAD POR GRUPOS QUINQUENALES^{a/}
PARA 1960, 1965 Y 1970. FECUNDIDAD DESCENDENTE

Edad	$f_{x,x+4}^{60}$ (1)	$f_{x,x+4}^{65}$ (2)	$f_{x,x+4}^{70}$ (3)
10-14	0,000686	0,000686	0,000652
15-19	0,104766	0,104766	0,099529
20-24	0,299283	0,299283	0,234319
25-29	0,317449	0,317449	0,301576
30-34	0,269283	0,269283	0,255819
35-39	0,200760	0,200760	0,190722
40-49	0,051587	0,051587	0,019008

Fuente: Benítez, Raúl y Cabrera. Gustavo. Op. cit.; pág. 42.

a/ A excepción del grupo 40-49.

Nota: En las hipótesis de fecundidad constante, las $f_{x,x+4}^{70}$ son las mismas que en 1960 y 1965.

2. Teniendo las relaciones de supervivencia del quinquenio 60-65, así como las tasas de fecundidad para 1960 y 1965, se está en disposición de obtener la matriz de proyección 60-65 en la hipótesis de una fecundidad constante, pues como se ve en el cuadro 6,

$$f_{x,x+4}^{60} = f_{x,x+4}^{65}$$

Se presentará únicamente esta vez el cálculo detallado de una matriz de proyección.

Dado que se cuenta con las relaciones de supervivencia del quinquenio 60-65 del cuadro 5, que son los elementos de la subdiagonal de la matriz, resta por calcular el primer renglón, constituido por los elementos que contienen las características de fecundidad del quinquenio 60-65. El cuadro 7 muestra dicho cálculo.

Cuadro 7

CALCULO DE LOS ELEMENTOS DEL PRIMER RENGLON DE LA MATRIZ DE PROYECCION FEMENINA, EN LA HIPOTESIS DE FECUNDIDAD CONSTANTE

Elementos a_{li}^a	Substitución por los valores correspondientes	Elementos a_{li} calculados
${}_5P_{5-9}^{60-65} \cdot f_{10-14}^{60} \cdot K$	$(0.9915)(0.000686)K$	0.0008
$(f_{10-14}^{60} + f_{15-19}^{60} \cdot {}_5P_{10-14}^{60-65})K$	$[(0.000686) + (0.9936)(0.104766)]K$	0.1178
$(f_{15-19}^{60} + f_{20-24}^{60} \cdot {}_5P_{15-19}^{60-65})K$	$[(0.104766) + (0.9906)(0.299283)]K$	0.4510
$(f_{20-24}^{60} + f_{25-29}^{60} \cdot {}_5P_{20-24}^{60-65})K$	$[(0.299283) + (0.9832)(0.317449)]K$	0.6872
$(f_{25-29}^{60} + f_{30-34}^{60} \cdot {}_5P_{25-29}^{60-65})K$	$[(0.317449) + (0.9827)(0.269283)]K$	0.6543
$(f_{30-34}^{60} + f_{35-39}^{60} \cdot {}_5P_{30-34}^{60-65})K$	$[(0.269283) + (0.9786)(0.200760)]K$	0.5235
$(f_{35-39}^{60} + f_{40-44}^{60} \cdot {}_5P_{35-39}^{60-65})K$	$[(0.200760) + (0.9736)(0.080000)]K$	0.3132
$(f_{40-44}^{60} + f_{45-49}^{60} \cdot {}_5P_{40-44}^{60-65})K$	$[(0.080000) + (0.9680)(0.016400)]K$	0.1078
$f_{45-49}^{60} \cdot K$	$(0.0164)K$	0.0184

Fuente: Cuadros 6 y 7

$$a/ ; K = \frac{5}{2} \cdot \frac{F^f}{F^b} P_{5-9}^{60-65} = (2.5)(0.4878)(0.9217) = 1.1240$$

A pesar de que la fecundidad es constante en las matrices M_0^{60-65} y M_1^{65-70} se observa un cambio en el primer renglón, debido a que debido a que el elemento de la matriz de proyección que contiene la fecundidad está influido por los cambios de la mortalidad de un quinquenio a otro.

4. Con las 2 matrices calculadas anteriormente, se está en disposición de obtener la matriz T_{fc} , por la aplicación de las fórmulas del capítulo III, sección 2.

Para ejemplificar lo expuesto en dicho capítulo, se hará por esta vez el cálculo numérico de la matriz T_{fc} .

Se considerará que la matriz M_0^{60-65} está formada por elementos a_{ij} y la matriz M_1^{65-70} por los elementos b_{ij} para estar acorde con lo sustentado en capítulos anteriores.

Se tiene por lo tanto que satisfacer:

$$M_0^{60-65} T_{fc} = M_1^{60-65}$$

El cálculo es el siguiente.

Cuadro 8

CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL DE LA MATRIZ T_{fc}

Elementos t_{ii}	Substitución por los valores correspondientes	Elementos t_{ii} calculados
$t_{11} = \frac{b_{21}}{a_{21}}$	$\frac{0.9754}{0.9691}$	1.0065
$t_{22} = \frac{b_{32}}{a_{32}}$	$\frac{0.9934}{0.9915}$	1.0019
$t_{33} = \frac{b_{43}}{a_{43}}$	$\frac{0.9956}{0.9936}$	1.0020
$t_{44} = \frac{b_{54}}{a_{54}}$	$\frac{0.9933}{0.9906}$	1.0027
$t_{55} = \frac{b_{65}}{a_{65}}$	$\frac{0.9864}{0.9832}$	1.0033
$t_{66} = \frac{b_{76}}{a_{76}}$	$\frac{0.9859}{0.9827}$	1.0033
$t_{77} = \frac{b_{87}}{a_{87}}$	$\frac{0.9818}{0.9785}$	1.0033
$t_{88} = \frac{b_{98}}{a_{98}}$	$\frac{0.9769}{0.9736}$	1.0034
$t_{99} = \frac{b_{10.9}}{a_{10.9}}$	$\frac{0.9714}{0.9680}$	1.0035

Fuente: Matrices M_0^{60-65} y M_1^{65-70}

Nota: Los elementos t_{ii} son las ganancias de mortalidad en el quinquenio.

Para determinar los elementos del último renglón de la matriz T_{fc} , se procede como sigue:

Cuadro 9

CALCULO DE LOS ELEMENTOS DEL ULTIMO RENGLON DE LA MATRIZ T_{fc}

Elementos $t_{10,i}$	Substitución por los valores correspondientes	Elementos $t_{10,i}$ calculados
$t_{10.2} = \left(b_{12} - a_{12} \frac{b_{32}}{a_{32}} \right) / a_{1.10}$	$[0.0008 - 0.0008(1.0019)] / 0.0184$	0.0008
$t_{10.3} = \left(b_{13} - a_{13} \frac{b_{43}}{a_{43}} \right) / a_{1.10}$	$[0.1204 - 0.1178(1.0020)] / 0.0184$	0.1271
$t_{10.4} = \left(b_{14} - a_{14} \frac{b_{54}}{a_{54}} \right) / a_{1.10}$	$[0.4609 - 0.4510(1.0027)] / 0.0184$	0.4692
$t_{10.5} = \left(b_{15} - a_{15} \frac{b_{65}}{a_{65}} \right) / a_{1.10}$	$[0.7020 - 0.6872(1.0033)] / 0.0184$	0.6822
$t_{10.6} = \left(b_{16} - a_{16} \frac{b_{76}}{a_{76}} \right) / a_{1.10}$	$[0.6682 - 0.6543(1.0033)] / 0.0184$	0.6426
$t_{10.7} = \left(b_{17} - a_{17} \frac{b_{87}}{a_{87}} \right) / a_{1.10}$	$[0.5346 - 0.5235(1.0033)] / 0.0184$	0.5109
$t_{10.8} = \left(b_{18} - a_{18} \frac{b_{98}}{a_{98}} \right) / a_{1.10}$	$[0.3197 - 0.3132(1.0034)] / 0.0184$	0.2962
$t_{10.9} = \left(b_{19} - a_{19} \frac{b_{10.9}}{a_{10.9}} \right) / a_{1.10}$	$[0.1099 - 0.1078(1.0035)] / 0.0184$	0.0978
$t_{10.10} = \frac{b_{1.10}}{a_{1.10}}$	$[0.0188 / 0.0184]$	1.0199

Fuente: Matrices M_0^{60-65} y M_1^{65-70}

Con los cálculos efectuados en los cuadros 8 y 9 se puede construir la matriz T_{fc} que será:

1.0065	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.0019	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.0020	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1.0027	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1.0033	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1.0033	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1.0033	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1.0034	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1.0035	0
0	0.0003	0.1271	0.4692	0.6822	0.6426	0.5109	0.2962	0.0978	1.0199

5. Hasta el momento se han construido las matrices M_0^{60-65} y M_1^{65-70} de acuerdo a los datos obtenidos de la proyección de la población de México hecha por Raúl Benítez y Gustavo Cabrera; en base a estas matrices se obtuvo la matriz de transformación de fecundidad constante T_{fc} .

Ahora se obtendrá una matriz de transformación T en la hipótesis de que la fecundidad es descendente. Para ello se recurrirá a las cifras del cuadro 6 en el que en la columna (3) están las tasas de fecundidad disminuidas en un 5 por ciento.

Con las tasas de las columnas (2) y (3), puede construirse una nueva matriz de proyección femenina M_1^{65-70} tal que $M_0^{60-65} T_{fd} = M_1^{65-70}$ donde T_{fd} será la matriz que tendrá contenidos los elementos del cambio en fecundidad y mortalidad, en el supuesto de que la fecundidad desciende.

La matriz M_1^{65-70} es la siguiente:

0	0.0007	0.1144	0.4438	0.6341	0.6530	0.5233	0.3152	0.1086	0.0183
0.9754	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.9934	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.9956	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9933	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.9364	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.9859	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.9818	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.9769	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.9714	0

6. Conforme al sistema descrito en la sección 4 de este capítulo, se debe obtener la matriz T_{fd} que satisfaga la condición:

$$M_0^{60-65} T_{fd} = M_1^{65-70}$$

La matriz de transformación de fecundidad descendente es la siguiente:

1.0065	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.0019	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.0020	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1.0027	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1.0033	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1.0033	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1.0033	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1.0034	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1.0035	0
0	-0.0013	-0.2021	-0.4665	-0.2987	-0.1875	-0.1045	0.0556	0.0502	1.0199

= T_{fd}

7. Ahora se tomará un país con condiciones similares de fecundidad y mortalidad que México y se le aplicarán ambas matrices T_{fc} y T_{fd} para proyectar la población al futuro. El país escogido es Costa Rica, que tiene las siguientes condiciones en comparación con México. (Véase el cuadro 10)

Cuadro 10

°₀ Y TASA BRUTA DE REPRODUCCION DE MEXICO Y COSTA RICA
MUJERES

País	° ₀	Tasa bruta de reproducción
México	60.29 (1963) ^{a/}	3.16 (1960) ^{b/}
Costa Rica	65.25 (1963) ^{c/}	3.52 (1963) ^{d/}

Fuentes: a/ Benítez, Raúl y Cabrera, Gustavo: op. cit., tabla VIII, página 32.
 b/ Benítez, Raúl y Cabrera, Gustavo: op. cit., tabla XV, página 41.
 c/ Macció, Guillermo: op. cit., página 14.
 d/ Macció, Guillermo: op. cit., página 17.

Tanto la °₀ como la tasa bruta de reproducción son más altas en Costa Rica, pero son similares. Puede suponerse que los cambios que sufrirá Costa Rica en sus componentes demográficos a través del tiempo, serán parecidos a los de México, no obstante que su fecundidad y °₀ sean mayores. En seguida se harán las proyecciones de población femenina de Costa Rica en base a las matrices de transformación de México y después se compararán los resultados con los obtenidos por Guillermo Macció mediante el método de los componentes.

8. Para la construcción de las 2 matrices de proyección de la población femenina de Costa Rica, de 1963-1968, con fecundidad constante y decreciente en ese quinquenio, se cuenta con las relaciones de supervivencia siguientes:

Cuadro 11

COSTA RICA: RELACIONES DE SUPERVIVENCIA PARA 1963-68
MUJERES

Edad	⁵ p ₆₃₋₆₈ x _{x-4}
B .	(0.9244)
0-4	0.9794
5-9	0.9961
10-14	0.9967
15-19	0.9954
20-24	0.9937
25-29	0.9905
30-34	0.9877
35-39	0.9851
40-44	0.9790
45-49	0.9724

Fuente: Macció, G.: op. cit., página 15, cuadro 4.

Se cuenta también con las tasas de fecundidad que siguen, para fecundidad constante y descendente.

Cuadro 12

COSTA RICA: TASAS DE FECUNDIDAD
PARA 1963 Y 1968

Edad	$f_{x,x+4}^{63}$ (1)	$f_{x,x+4}^{68}$ (2)
15 - 19	0.1183	0.1266
20 - 24	0.3345	0.3176
25 - 29	0.3578	0.3331
30 - 34	0.2922	0.2764
35 - 39	0.2233	0.2058
40 - 44	0.0990	0.0932
45 - 49	0.0165	0.0152

Fuente: Macció, G.: op. cit., página 18

Nota: En la hipótesis de fecundidad constante, las $f_{x,x+4}^{68}$ (col.2), son las mismas que las de la col.(1).

Primeramente se obtendrá la matriz M_0^{63-68} de fecundidad constante por el método expuesto en el capítulo II, sección 2. La matriz es la siguiente:

0	0	0.1329	0.5087	0.7778	0.7303	0.5788	0.3616	0.1299	0.0186
0.9794	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.9961	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.9967	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9954	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.9937	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.9905	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.9877	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.9851	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.9790	0

En las proyecciones de Costa Rica realizadas por Guillermo Macció no se considera la fecundidad del grupo 10-14, por lo que $a_{12}=0$.

9. Si aplicamos la matriz de transformación T_{fc} calculada para México, a la matriz M_0^{63-68} recién construida para Costa Rica, teóricamente obtendremos M_1^{68-73} de Costa Rica, es decir:

$$M_0^{63-68} \cdot T_{fc} = M_1^{68-73}$$

Si el primer miembro de la ecuación anterior es multiplicado por el vector de población de 1968, N_{68} , se proyectará la población hasta 1973, o sea:

$$M_0^{63-68} \cdot T_{fc} \cdot N_{68} = N_{73}^1$$

El vector N_{68} es el siguiente:

Cuadro 13

COSTA RICA: POBLACION FEMENINA
EN 1968

Edad	Población
0 - 4	158.1
5 - 9	131.1
10 - 14	107.7
15 - 19	85.1
20 - 24	66.4
25 - 29	53.2
30 - 34	43.6
35 - 39	38.6
40 - 44	34.1
45 - 49	26.4

Fuente: Macció, G.: op. cit.,
cuadro 5, página 20.

El N_{73}^1 calculado por este método será comparado con el N_{73} obtenido por Guillermo Macció según el método de los componentes en la hipótesis de fecundidad constante. Los resultados aparecen en el cuadro 14.

Son muy pequeñas las diferencias entre la columna (1) y la (2), todas menores del 1 por ciento. También las diferencias entre las estructuras relativas son muy reducidas.

Cuadro L4

COMPARACION DE LA PROYECCION DE LA POBLACION DE COSTA RICA PARA 1973, SEGUN LA HIPOTESIS DE FECUNDIDAD CONSTANTE, HECHA POR EL METODO DE UNA MATRIZ T_{fc} DE MEXICO Y POR EL METODO DE LOS COMPONENTES

Mujeres					
Edad	N'_{73} (método de matriz T_{fc}) a/	N_{73} (método de los componentes) b/	Distribución relativa N'_{73}	Distribución relativa N_{73}	N'_{73}/N_{73}
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(1)/(2)
0-4	197.6	195.8	21.70	21.56	1.0092
5-9	155.3	155.6	17.11	17.13	1.0013
10-14	130.8	130.7	14.36	14.39	1.0008
15-19	107.6	107.5	11.82	11.84	1.0009
20-24	84.9	84.8	9.32	9.34	1.0012
25-29	66.2	66.1	7.27	7.28	1.0015
30-34	52.9	52.8	5.81	5.81	1.0019
35-39	43.1	43.2	4.73	4.76	0.9977
40-44	38.2	38.1	4.20	4.20	1.0026
45-49	33.5	33.5	3.68	3.69	1.0000
Total	910.6	908.1	100.00	100.00	

Fuentes: a/ M_1^{68-73} N_{68}

b/ Macció, G.: op. cit., cuadro 5, página 20.

10. Se procederá ahora a realizar la proyección de la población femenina para 1978, llevando a cabo la operación:

$$M_0^{63-68} (T_{fd})^2 N'_{73} = M_2^{73-78} N'_{73} = N'_{78}$$

El siguiente cuadro presenta la proyección, en comparación con la hecha por Guillermo Macció:

Cuadro 15

COMPARACION DE LA PROYECCION DE LA POBLACION DE COSTA RICA PARA 1978, SEGUN LA HIPOTESIS DE FECUNDIDAD CONSTANTE, HECHA POR EL METODO DE UNA MATRIZ T_{fc} DE MEXICO Y POR EL METODO DE LOS COMPONENTES. MUJERES

Edad	N'_{78} (método de matriz T_{fc}) ^{a/}	N_{78} (método de los componentes) ^{b/}	Distribución relativa N'_{78}	Distribución relativa N_{78}	N'_{78}/N_{78}
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(1)/(2)
0-4	248.8	246.5	22.15	22.09	1.0093
5-9	196.0	193.7	17.45	17.36	1.0119
10-14	155.8	155.3	13.87	13.91	1.0032
15-19	130.9	130.5	11.66	11.69	1.0031
20-24	107.7	107.2	9.59	9.60	1.0047
25-29	84.9	84.5	7.56	7.57	1.0047
30-34	66.0	65.8	5.88	5.90	1.0030
35-39	52.6	52.4	4.68	4.69	1.0038
40-44	42.7	42.7	3.80	3.83	1.0000
45-49	37.7	37.5	3.36	3.36	1.0053
Total	1 123.1	1 116.1	100.00	100.00	

Fuentes: a/ M_2^{73-78} N'_{73}

b/ Macció, Guillermo: op. cit., cuadro 5, página 20.

También en este caso las diferencias entre una proyección y otra son pequeñas.

11. Ahora se calculará la matriz M_0^{63-68} de Costa Rica en la hipótesis de que la fecundidad es decreciente, en base a los datos de los cuadros 11 y 12.

La matriz resultante es la siguiente:

0	0	0.1423	0.4897	0.7553	0.7120	0.5592	0.3552	0.1284	0.0186
0.9794	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.9961	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.9967	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9954	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.9937	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.9905	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.9877	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.9851	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.9790	0

12. Para proyectar la población a 1973, habrá que hacer lo siguiente según la hipótesis de fecundidad descendente

$$M_o^{63-68} T_{fd} \cdot N_{68} = N_{73}$$

El vector N_{68} es el siguiente:

Cuadro 16

COSTA RICA: POBLACION FEMENINA
EN 1968

Edad	Población
0 - 4	154.6
5 - 9	131.1
10 - 14	107.7
15 - 19	85.1
20 - 24	66.4
25 - 29	53.2
30 - 34	43.6
35 - 39	38.6
40 - 44	34.1
45 - 49	26.6

Fuente: Macció, G.: op. cit.,
página 21, cuadro 6.

El resultado de la proyección por el método de T_{fd} y su comparación con el del método de los componentes llevado a cabo por Guillermo Macció en Costa Rica se ve en el cuadro 17.

Cuadro 17

COMPARACION DE LA PROYECCION DE LA POBLACION DE COSTA RICA PARA 1973 SEGUN LA
HIPOTESIS DE FECUNDIDAD DESCENDENTE, HECHA POR EL METODO DE UNA MATRIZ
 T_{fd} DE MEXICO Y POR EL METODO DE LOS COMPONENTES. MUJERES

Edad	N_{73} (método de matriz T_{fc}) ^{a/} (1)	N_{73} (método de los componentes) ^{b/} (2)	Distribución relativa N_{73} (3)	Distribución relativa N_{73} (4)	N_{73}/N_{73} (5)=(1)/(2)
0- 4	186.9	183.9	20.84	20.60	1.0163
5- 9	152.4	152.2	17.00	17.05	1.0013
10-14	130.8	130.7	14.59	14.64	1.0008
15-19	107.6	107.5	12.00	12.04	1.0009
20-24	84.9	84.8	9.47	9.50	1.0012
25-29	66.2	66.1	7.38	7.40	1.0015
30-34	52.9	52.8	5.90	5.91	1.0015
35-39	43.2	43.2	4.82	4.84	1.0000
40-44	38.2	38.1	4.26	4.27	1.0026
45-49	33.5	33.5	3.74	3.75	1.0000
Total	896.6	842.8	100.00	100.00	

Fuentes: a/ M_1^{68-73} N_{68}

b/ Macció, G.: op. cit., página 21, cuadro 6.

Vuelven a ser las discrepancias muy pequeñas, sobrepasando sólo en el grupo de edad 0-4 por un poco el 1 por ciento, las distribuciones relativas son igualmente muy parecidas.

13. Finalmente se hará la proyección hasta 1978 efectuando las operaciones

$${}^1M_0^{63-68} (T_{fd}) {}^1N_{73} = {}^1M_2^{73-78} {}^1N_{73} = {}^1N_{78}$$

El cuadro siguiente muestra la comparación entre la proyección hecha por este método y la del trabajo de Guillermo Macció.

Cuadro 18

COMPARACIÓN DE LA PROYECCIÓN DE LA POBLACION DE COSTA RICA PARA 1978, SEGUN LA HIPOTESIS DE FECUNDIDAD DESCENDENTE HECHA POR EL METODO DE UNA MATRIZ T_{fd} DE MEXICO Y POR EL METODO DE LOS COMPONENTES. MUJERES

Edad	${}^1N_{78}$ (método de matriz T_{fd}) ^{a/}	N_{78} (método de los componentes) ^{b/}	Distribución relativa ${}^1N_{78}$	Distribución relativa N_{78}	${}^1N_{78}/N_{78}$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(1)/(2)
0- 4	229.0	222.2	21.05	20.64	1.0306
5- 9	185.4	182.0	17.01	16.90	1.0187
10-14	152.4	151.9	13.98	14.11	1.0033
15-19	131.7	130.5	12.08	12.12	1.0092
20-24	107.7	107.2	9.88	9.96	1.0047
25-29	84.9	84.5	7.79	7.85	1.0047
30-34	66.0	65.8	6.05	6.11	1.0047
35-39	52.6	52.4	4.82	4.87	1.0030
40-44	42.8	42.7	3.92	3.96	1.0023
45-49	37.7	37.5	3.46	3.48	1.0053
Total	1 090.2	1 076.7	100.00	100.00	

Fuentes: ^{a/} ${}^1M_2^{73-78} {}^1N_{73}$

^{b/} Macció, G.: op. cit., página 21, cuadro 6.

Las discrepancias son mayores en este caso, pero sólo son mayores que un 1 por ciento en los dos primeros grupos de edad. Son los grupos que dependen de la fecundidad habida en 1963-68 y 1968-73. En la proyección de la población de México se supone que la fecundidad empieza a descender hasta el segundo quinquenio, y en la de Costa Rica se supone que decrece desde el primero, por lo tanto las condiciones del cambio en la fecundidad en México son más lentas que en Costa Rica, por lo que los grupos 0-4 y 5-9 resultan mayores por el método de una matriz T_{fd} que por el método de los componentes; sin embargo, esta diferencia pudo haberse eliminado si la matriz T_{fd} contuviera el supuesto de que la fecundidad decrece desde el primer quinquenio, lo que no hubiera representado ninguna dificultad en materia de cálculo.

A continuación se presentan las proyecciones de Costa Rica para 1973 y 1978, según el método de una matriz de transformación y el método de los componentes aplicado por Guillermo Macció, conteniendo 2 hipótesis de fecundidad: constante y descendente.

Cuadro 19

PROYECCIÓN DE LA POBLACION FEMENINA DE COSTA RICA, METODO DE UNA MATRIZ DE TRANSFORMACION Y METODO DE LOS COMPONENTES. FECUNDIDAD CONSTANTE

Grupos de edad	1973		1978	
	Método de una matriz T_{fc}	Método de los componentes	Método de una matriz T_{fc}	Método de los componentes
0- 4	197.6	195.8	248.8	246.5
5- 9	155.8	155.6	196.0	193.7
10-14	130.8	130.7	155.8	155.3
15-19	107.6	107.5	130.9	130.5
20-24	84.9	84.8	107.7	107.2
25-29	66.2	66.1	84.9	84.5
30-34	52.9	52.8	66.0	65.8
35-39	43.1	43.2	52.6	52.4
40-44	38.2	38.1	42.7	42.7
45-49	33.5	33.5	37.7	37.5
Total	910.6	908.1	1 123.1	1 116.1

Cuadro 20

PROYECCION DE LA POBLACION FEMENINA DE COSTA RICA. METODO DE UNA MATRIZ DE TRANSFORMACION Y METODO DE LOS COMPONENTES. FECUNDIDAD DESCENDENTE

Grupos de edad	1973		1978	
	Método de una matriz T_{fd}	Método de los componentes	Método de una matriz T_{fd}	Método de los componentes
0 - 4	186.9	183.9	229.0	222.2
5 - 9	152.4	152.2	185.4	182.0
10 - 14	130.8	130.7	152.4	151.9
15 - 19	107.6	107.5	131.7	130.5
20 - 24	84.9	84.8	107.7	107.2
25 - 29	66.2	66.1	84.9	84.5
30 - 34	52.9	52.8	66.0	65.8
35 - 39	43.2	43.2	52.6	52.4
40 - 44	38.2	38.1	42.8	42.7
45 - 49	33.5	33.5	37.7	37.5
Total	896.6	892.8	1 090.2	1 076.7

V. CONCLUSIONES

1. En resumen, en función de matrices de proyección de México se determinaron dos matrices de transformación, una para fecundidad constante y mortalidad descendente y otra para fecundidad decreciente y mortalidad descendente. La matriz T_{fc} fue aplicada a la matriz básica de proyección femenina M_0^{63-68} de Costa Rica de fecundidad constante y con ella se calcularon las poblaciones en 1973 y 1978. Posteriormente, la matriz T_{fd} se aplicó a la matriz básica de proyección femenina M_0^{63-68} de Costa Rica de fecundidad decreciente y así se determinaron las poblaciones de 1973 y 1978, teniendo de este modo una medida de certidumbre entre la que posiblemente estará la población femenina de Costa Rica en el futuro. Estos cálculos resultaron satisfactorios, pues discreparon poco de la proyección hecha por Guillermo Macció por el método de los componentes. Las diferencias mayores se presentan en los dos primeros grupos de edades, lo cual se debe a dos razones: que la ganancia en P_b o probabilidad de sobrevivir de los recién nacidos, se supone constante a través del tiempo en este método, lo cual se alejan de la realidad, pues el aumento en P_b es mayor que el que hay en probabilidades de supervivencia de otros grupos de edades y por otro lado, en la hipótesis III de fecundidad descendente de México, hecha por Raúl Benítez y Gustavo Cabrera, ésta comienza a descender en 1970, o sea, 10 años después de iniciada la proyección, mientras que Guillermo Macció supone para Costa Rica un descenso de la fecundidad cinco años después de iniciada la proyección. Por esta razón los grupos 0-4 y 5-9 son mayores en los resultados obtenidos para Costa Rica según el método de la matriz de transformación T_{fd} de México, que los resultantes por el método de los componentes.

También los grupos 10-14 al 45-49 presentan resultados ligeramente mayores por este método que por el de los componentes, pues al aplicar consecutivamente la matriz de transformación, se está suponiendo implícitamente que la variación o cambio en los niveles de fecundidad y mortalidad son constantes a través del tiempo, lo que en realidad es falso. Sin embargo las diferencias en estos grupos resultaron siempre menores que el 0.6% salvo un solo caso en que llegó al 0.92 por ciento, por lo que las diferencias son tan poco significativas que pueden desecharse. En cuanto a las distribuciones relativas, los resultados fueron bastante buenos, pues las discrepancias son también muy pequeñas.

Naturalmente que si se quisiera proyectar la población de Nicaragua, por ejemplo quinquenalmente, no debería recurrirse a las T_{fc} y T_{fd} de México empleadas en este trabajo, sino que deberían calcularse matrices de transformación más apropiadas para dicho país o para cualquier otro del que se quisiera hacer una proyección.

2. El camino a seguir sería el siguiente:

- a) Construir una tabla de vida que represente la mortalidad de la población en el momento de partida de la proyección.
- b) Encontrar las probabilidades de supervivencia para el quinquenio siguiente a la partida de la proyección.
- c) Poseer información necesaria para calcular las tasas quinquenales de fecundidad del momento en que se parte para hacer la proyección.
- d) Construir una matriz de proyección de fecundidad constante y otra de fecundidad decreciente.
- e) Construir las matrices de transformación de fecundidad constante y descendente, lo cual no presentará ninguna dificultad pues los datos necesarios se obtendrán de las tablas modelo de Naciones Unidas que representen la mortalidad en el momento de partida de la proyección, por medio de las fórmulas:

$$t_{i,i} = \frac{b_{i+1,i}}{a_{i+1,i}} \quad t_{10,i} = \frac{b_{1,i} - a_{1,i} \frac{b_{i+1,i}}{a_{i+1,i}}}{a_{1,10}}$$

donde: $a_{i+1,i}$ serán las probabilidades de supervivencia del quinquenio de partida de la proyección.

$b_{i+1,i}$ serán las probabilidades de supervivencia del quinquenio siguiente al de partida y que se determinarán de las tablas modelo de Naciones Unidas.

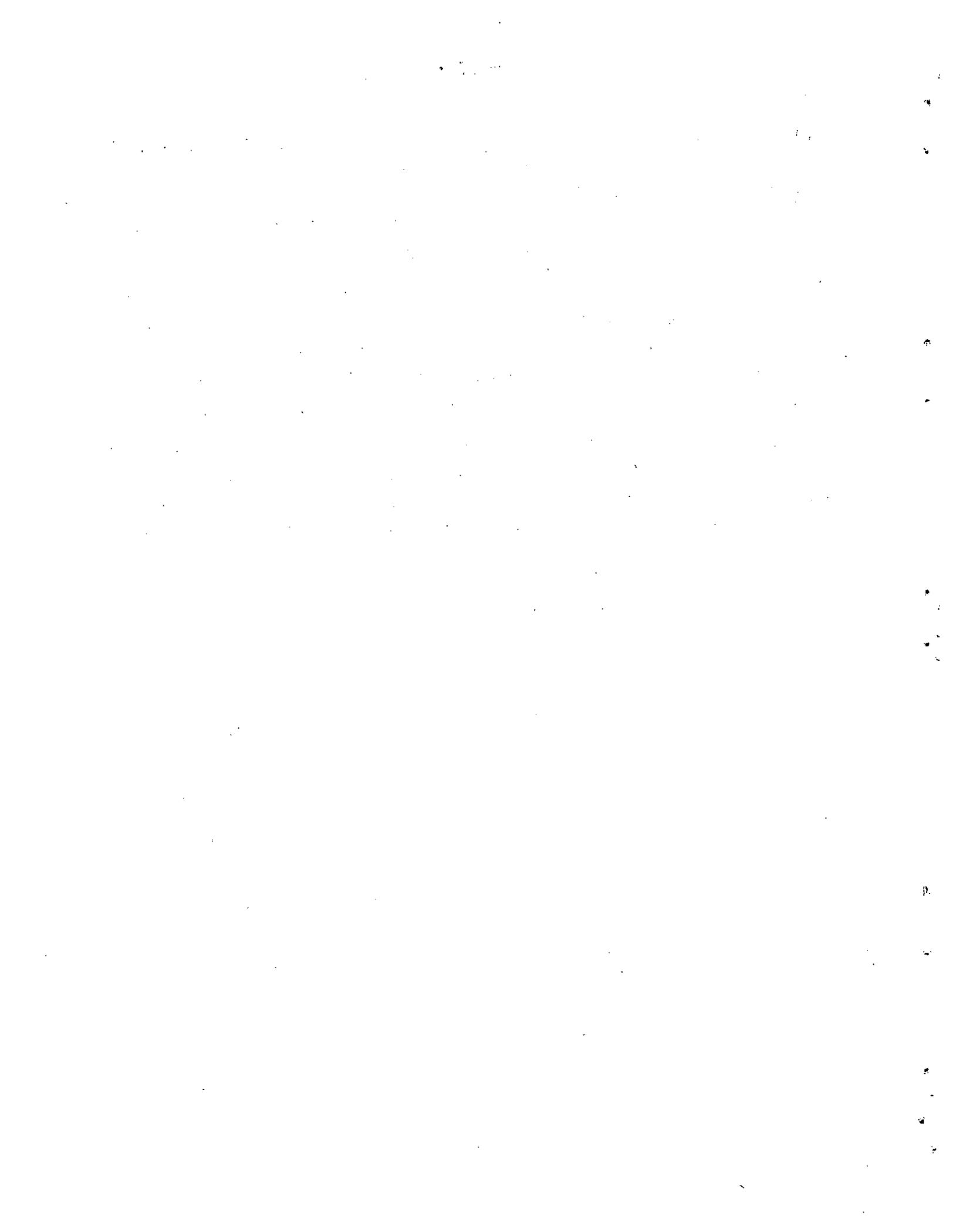
$a_{1,i}$ serán los elementos del primer renglón de la matriz de proyección en que están involucradas las características de fecundidad del primer quinquenio de la proyección.

$b_{1,i}$ se calcularán según sea la fecundidad constante o descendente.

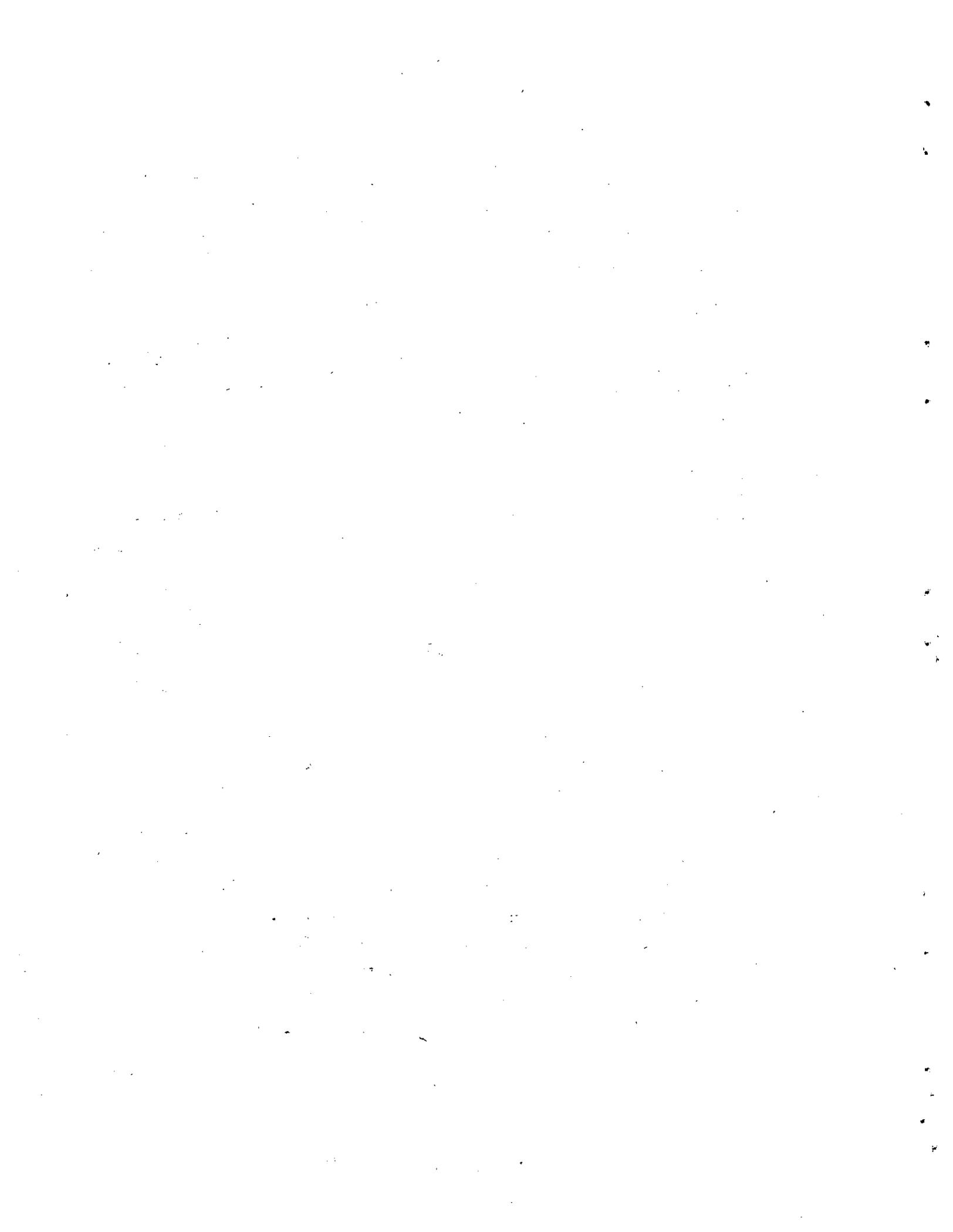
f) Posteriormente se multiplicarán sucesivamente las matrices de proyección básicas con fecundidad constante y descendente por las matrices de transformación de fecundidad constante y descendente respectivamente y por los vectores de población correspondientes para obtener la proyección según las 2 hipótesis, con el uso de computadoras electrónicas, como se explicará en el apéndice.

En caso de no contar con datos suficientes para construir la matriz básica de proyección se podrá estimar por analogía con países que presenten las mismas o similares características y se procederá a seguir el método antes descrito, es decir aplicando matrices de transformación de otros países como en el caso de Costa Rica.

Se deja para el futuro una investigación más profunda para determinar matrices de transformación modelo obtenidas por las tablas modelo de mortalidad de Naciones Unidas y el control de la variable tiempo, para modificar las matrices de transformación de tal modo que el cambio demográfico, implícito en ellas, no sea constante.



APENDICES



APENDICE I

A continuación se presenta un programa de computador en lenguaje FORTRAN que resuelve el cálculo de la proyección de Costa Rica, hasta 1983, en forma tal que puede proyectarse la población indefinidamente (según la capacidad de memoria de la computadora) sin agrandar el programa, variando solamente 6 instrucciones.

El objeto de este apéndice es hacer ver la gran utilidad que puede representar la programación como medio de cálculo e investigar en la Demografía y la elasticidad de sus métodos. Los datos serían las dos matrices de proyección femenina de fecundidad constante y descendente y el vector constituido por la población de mujeres de Costa Rica en el año 1963, así como las dos matrices de transformación de México. En el diagrama de bloque y en el programa, dichos datos estarán representados de la siguiente manera:

<u>En el trabajo</u>	<u>En el diagrama</u>	<u>En el programa</u>
M_C^{63-68}	$M^{63-68} (I,J)$	EMEC (I,J)
M_C^{63-68}	$M^{63-68} (I,J)$	EMED (I,J)
T_{fc}	$T_{FC} (I,J)$	TC (I,J)
T_{fd}	$T_{FD} (I,J)$	TD (I,J)
N_{63}	$N (I,J)$	ENE (I,J)

Los elementos de las matrices se introducen a la computadora en tarjetas perforadas, con 13 elementos por tarjeta, o sea, 24 en total. Los elementos del vector de población se perfora en una sola tarjeta.

Las instrucciones que se cambiarían, si se quisiera hacer proyección hasta 2003 en vez de 1983 serían:

En la línea 1,	ENE (10,18)	en vez de ENE (10,10)
En la línea 11,	J = 1,18)	en vez de J = 1,10)
En la línea 21,	IF (IN-8)	en vez de IF (IN-4)
En la línea 35,	K = 10	en vez de K = 6
En la línea 36,	L = 11	en vez de L = 7
En la línea 44,	J = 1,18)	en vez de J = 1,10)

C PROGRAMA FORTRAN
C CALCULO DE LA PROYECCION DE COSTA RICA POR MEDIO DE UNA MATRIZ DE TRANS-
FORMACION DE MEXICO, SEGUN 2 HIPOTESIS: FECUNDIDAD CONSTANTE
Y FECUNDIDAD DESCENDENTE

```
DIMENSION EMEC(10,10),EMED(10,10),TC(10,10),TD(10,10),ENE(10,10),E  
L=INT(10,10),EME(10,10),T(10,10) 1  
K=0 2  
L=1 3  
IN=1 4  
INT=0 5  
READ (1,900) ((EMEC(I,J),J=1,10),I=1,10) 6  
READ (1,900) ((EMED(I,J),J=1,10),I=1,10) 7  
READ (1,900) ((TC(I,J),J=1,10),I=1,10) 8  
READ (1,900) ((TD(I,J),J=1,10),I=1,10) 9  
READ (1,901) ((ENE(I,J),J=1,10),I=1,10) 10  
DO 1 I=1,10 11  
DO 1 J=1,10 12  
T(I,J)=TC(I,J) 13  
1 EME(I,J)=EMEC(I,J) 14  
2 K = K+1 15  
L=L+1 16  
3 DO 4 I=1,10 17  
DO 4 J=1,10 18  
4 EME(I,L)=EME(I,L)+EME(I,J)*ENE(J,K) 19  
IF (IN=4)5,9,9 20  
5 IN=IN+1 21  
DO 6 I=1,10 22  
DO 6 J=1,10 23  
6 EMET(I,J)=0. 24  
DO 7 M=1,10 25  
DO 7 I=1,10 26  
DO 7 J=1,10 27  
7 EMET(M,I)=EMET(M,I)+EME(I,J)*T(J,I) 28  
DO 8 I=1,10 29  
DO 8 J=1,10 30  
8 EME(I,J)=EMET(I,J) 31  
GO TO 2 32  
9 IN=IN+1 33  
K=6 34  
L=7 35  
IF (INT)10,10,12 36  
10 INT=INT+1 37  
DO 11 I=1,10 38  
DO 11 J=1,10 39  
T(I,J)=TD(I,J) 40  
11 EME(I,J)=EMED(I,J) 41  
GO TO 3 42  
12 WRITE (3,902) ((ENE(I,J),I=1,10),J=1,10) 43  
STOP 44  
900 FORMAT (13F6.4) 45  
901 FORMAT (13F6.1) 46  
902 FORMAT (10F8.1) 47  
END 48  
49
```

APENDICE II

Otro método que se puede seguir para proyectar la población es aplicar el desarrollado por P. Damiani,^{2/} en el que se trató de predecir las condiciones de mortalidad en el supuesto de que las tasas de mortalidad por causa y sexo, se comportan en el tiempo como una cadena de Markov.

Se hizo entonces el supuesto de que la distribución relativa de una población, para un sexo determinado, se comporta igualmente como una cadena de Markov. De este modo podría cumplirse que $x_1 = x_0 \cdot P$, siendo P una matriz estocástica de transición de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_i & \dots & a_1 b_n \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_i & \dots & a_2 b_n \\ 0 & 0 & \dots & a_3 b_i & \dots & a_3 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n-1} b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

donde $1/a_i$ es la probabilidad de una transición del estado i a cualquiera de los estados $i, i+1, \dots, n$; b_j es la probabilidad de pasar del estado i al estado j y $a_i b_j$ es la probabilidad conjunta de pasar del estado i al estado j; x_0 y x_1 son los vectores de la distribución relativa de la población en el tiempo 0 y 1 respectivamente y tienen la forma:

$$x_0 = (x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{n0}); \quad x_1 = (x_{11} \ x_{21} \ \dots \ x_{n1})$$

Utilizando la población relativa de México para x_0 y x_1 , 1960 y 1965 respectivamente y con base a las fórmulas:

$$b_i = \frac{x_{i,1}}{\frac{x_{i-1,1}}{b_{i-1}} + \frac{x_{i,0}}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} b_j}} \quad \text{y} \quad a_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{i-1} b_j}$$

^{2/} Damiani, P.: "Essai Méthodologique sur les perspectives de mortalité", publicado en Etudes et conjoncture, volumen 3, marzo de 1967.

se llegó a la siguiente matriz:

1.06313	-0.06911	0.00648	-0.00054	0.00005	-0.000002	0.0000001	-0.00000001
0	1.09481	-0.10261	0.00860	-0.00083	0.00003	-0.000002	0.0000002
0	0	1.08228	-0.09074	0.00374	-0.00030	0.00002	-0.000002
0	0	0	1.10276	-0.10624	0.00370	-0.00024	0.00002
0	0	0	0	1.03383	-0.03599	0.00237	-0.000020
0	0	0	0	0	1.06399	-0.06792	0.00594
0	0	0	0	0	0	1.09225	-0.09280
0	0	0	0	0	0	0	1.00000

A pesar de que se obtienen buenos resultados trabajando con esta matriz, no es propiamente de transición, pues debiera cumplir dos propiedades:

- a) sumar 1 cada renglón, propiedad de una matriz de transición de Markov y condición necesaria para poder encontrar las 2n incógnitas de la matriz; y
- b) cada elemento de la matriz debe ser una probabilidad.

En este caso sólo se cumple la condición a), pues la b) no se satisface dado que hay elementos mayores que 1 y elementos negativos.

Sin embargo, se puede transformar esta matriz de tal modo que se satisfagan las propiedades a) y b), si se prosigue como sigue:

La matriz P no resultó de transición dado que $a_1 = 1$ y $b_1 = \frac{x_{11}}{x_{10}}$, pero $x_{11} > x_{10}$, puesto que por la alta fecundidad de México y la baja mortalidad de 1960 a 1965 el grupo de 0-9 años aumentó en proporción y este grupo es precisamente el primero de ambos vectores x_0 y x_1 , o sea, x_{11} y x_{10} , por tanto, $b_1 > 1$ y $a_1 b_1 > 1$, de donde $a_1 b_1$ no es probabilidad.

Si se toma la población de ambos sexos en 1960 y 1965 en cifras absolutas de México, cuyos vectores serán llamados n_0 y n_1 y se tiene un vector e de la forma:

$$e = (10\ 000 \dots 10\ 000) \text{ siendo } n_0 = (3259.8 \dots 1761.3) \text{ y}$$

$$n_1 = (3936.1 \quad 3159.5 \dots 2109.3),$$

los elementos del vector $(e - n_0)$ serán mayores que los elementos del vector $(e - n_1)$ pues $n_{10} < n_{11}$.

Al volver a obtener la matriz P tal que:

$(e-n_i) = (e-n_0) P \dots (1)$ el elemento b_i será $0 < b_i < 1$ y cada $a_i b_j$ cumplirá esa propiedad.

Despejando n_i de la ecuación (1) se tiene:

$n_i = n_0 P + e - eP$ si $e - eP$ es una constante K, se tiene $n_i = n_0 P + K$ de donde $n_2 = n_1 P + K$ y así sucesivamente.

La matriz de transición P resultante, si cumple con las propiedades a) y b) anteriormente citadas, de modo que se procede al cálculo de n_2 , obteniendo lo siguiente:

Cuadro 21

COMPARACION DE LA PROYECCION DE LA POBLACION DE MEXICO PARA 1970
SEGUN EL METODO DE UNA MATRIZ DE TRANSICION Y EL
METODO DE LOS COMPONENTES

Edad	Método de la matriz de transición (1)	Método de los componentes (2)	$\frac{(2)}{(1)}$
0-4	4 544.6	4 672.6	1.028
5-9	3 671.9	3 839.3	1.045
10-14	3 064.2	3 138.2	1.024
15-19	2 470.0	2 589.6	1.048
20-24	1 995.3	2 095.2	1.050
25-29	1 677.0	1 721.0	1.026
30-34	1 444.5	1 471.3	1.018
35-39	1 298.7	1 270.8	0.979

No se obtiene un resultado muy satisfactorio, aún cuando la diferencia más grande es del 5 por ciento. Lo importante de presentar este sistema para proyectar poblaciones es mostrar que si bien un método puramente matemático puede llegar a resolver el problema, en cuanto a la validez de los resultados, no explica el por qué del cambio de la población en el tiempo.

No ocurre lo mismo con el método aplicado en el desarrollo del presente trabajo, pues además de la confiabilidad de los resultados tiene las ventajas de contener en si mismo los cambios de los factores demográficos y de poseer amplias posibilidades de explotación en el terreno de la investigación.

APENDICE III

Como se observa en el cuadro 6, capítulo IV, la última tasa de fecundidad es para el grupo decenal 40,49 ($f_{40,49}^{60}$), por lo que será necesario desglosarla en dos tasas, es decir, $f_{40,44}^{60}$ y $f_{45,49}^{60}$. Para lograr este objetivo se tienen que cumplir 2 condiciones:

$$1.1) \quad 2.5 \cdot 0.4878 \cdot P_b \left[\sum_{x=5}^{45} N_{x,x+4}^{60} (f_{x,x+4}^{60} + 5 P_{x,x+4}^{60-65} f_{x+5,x+9}^{65}) \right]^{3/} =$$

$$2.5 \cdot 0.4878 \cdot P_b \left[\sum_{x=10}^{35} (N_{x,x+4}^{60} f_{x,x+4}^{60} + N_{x,x+4}^{65} f_{x,x+4}^{65}) + (N_{40,44}^{60} + N_{45,49}^{60}) \right. \\ \left. f_{40,49}^{60} + (N_{40,49}^{65} + N_{45,49}^{65}) f_{40,49}^{65} \right] = N_{0,4}^{65}$$

$$1.2) \quad N_{40,44}^{60} f_{40,44}^{60} + N_{45,49}^{60} f_{45,49}^{60} = N_{40,49}^{60} f_{40,49}^{60}$$

Por medio de un ajustamiento que se presenta en el gráfico 3, se obtuvieron las siguientes tasas:

$$f_{40,44}^{60} = 0.0800$$

$$f_{45,49}^{60} = 0.0164$$

Con estas tasas se cumplan ambas condiciones, aunque resulta más exacta la ecuación 1.1 que la 1.2; no obstante, es más importante la verificación de la primera que la de la segunda, por lo que las tasas obtenidas son satisfactorias. Para 1970, año en que se presenta el descenso, las tasas serán:

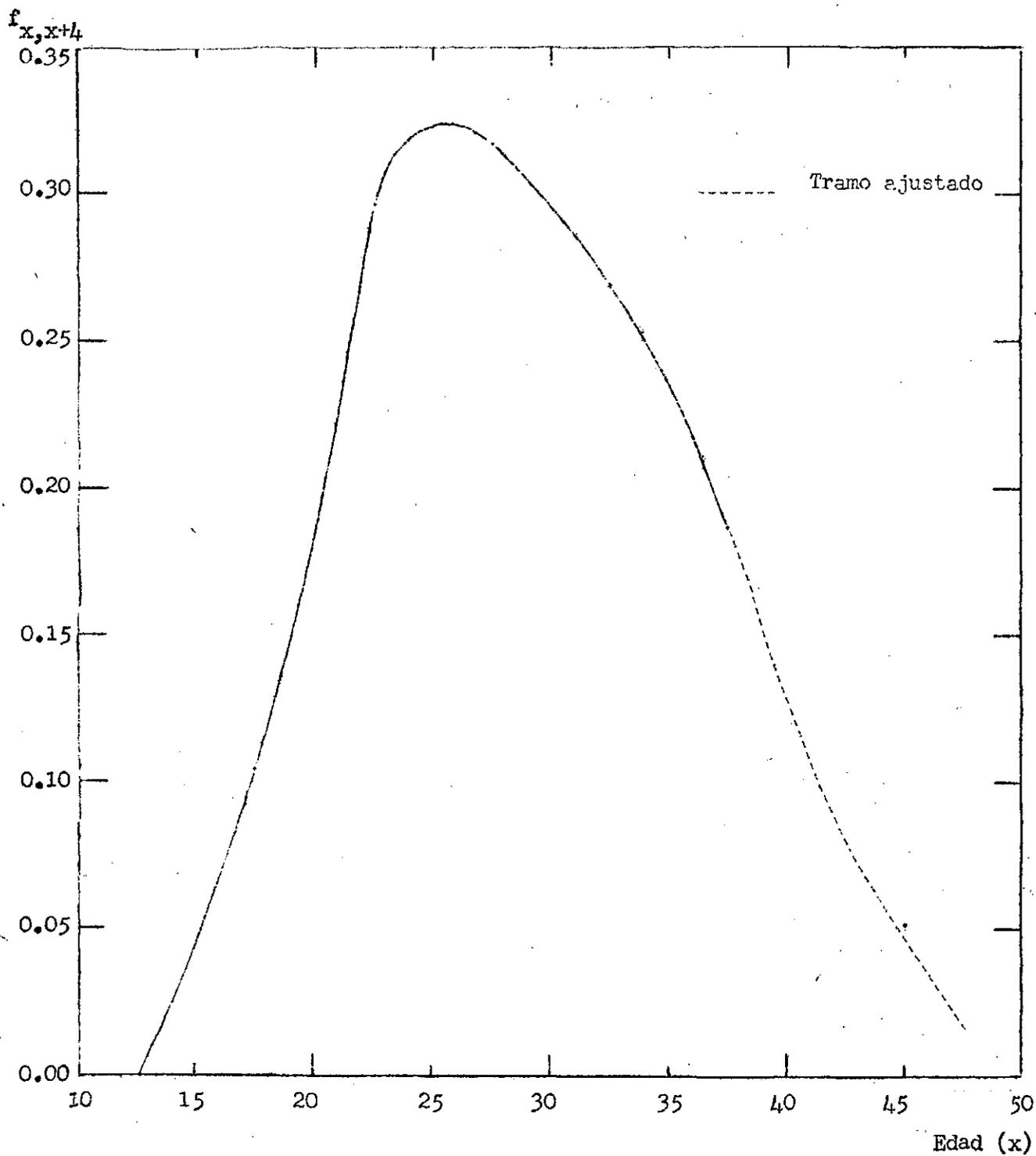
$$f_{40,44}^{70} = 0.0760$$

$$f_{45,49}^{70} = 0.0152$$

$$3/ \quad f_{5,9}^{60} = f_{50,54}^{65} = 0$$

Gráfico 3

AJUSTE DE LAS TASAS DE FECUNDIDAD DE LOS GRUPOS 40-44 Y 45-49, 1960



Fuente: Cuadro 6

