

LS/m

1515:00042

1022 0007900

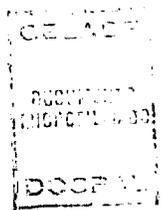


Fecha recibida: 760722

ARCHIVO de DOCUMENTOS

Original NO SALE de la oficina

# CELADE



## CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Distribución Interna

Juan Chackiel

Serie C, N°159  
Julio, 1974.  
200.

ORIGEN Y USOS DEL MODELO DE  
MORTALIDAD DE BRASS

Las opiniones y datos que figuran en este trabajo son responsabilidad del autor, sin que el Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE) sea necesariamente partícipe de ellos.

## I N D I C E

	<u>Página</u>
INTRODUCCION .....	1
I. CONCEPTO MATEMATICO DEL LOGITO .....	3
1. Desarrollo previo .....	3
2. Definición del "Logito" .....	4
3. Propiedad importante .....	4
II. USO DEL LOGITO .....	5
1. Uso en experimentos biológicos .....	5
2. Uso en poblaciones humanas (caso de tablas de mortalidad) .....	7
3. Comprobación empírica .....	9
4. Otro enfoque del uso en Tablas de Mortalidad .....	14
III. SIGNIFICADO DE LOS PARAMETROS .....	15
1. Conceptos Generales .....	15
2. Estudio de $\alpha$ y $\beta$ .....	16
IV. COMPARACION DEL SISTEMA DE TABLAS DE VIDA MODELO DE W. BRASS CON OTROS SISTEMAS .....	21
1. Planteamiento del problema .....	21
2. Las tablas modelo de mortalidad de Naciones Unidas .....	22
3. Las tablas modelo de mortalidad regionales de Coale y Demery .....	24
4. Otros modelos .....	25
5. El sistema de tabla de vida modelo de W. Brass .....	26
V. USOS MAS IMPORTANTES .....	28
1. Objetivo de esta sección .....	28
2. Evaluación y ajuste de información ya conocida .....	29
3. Construcción de una tabla de mortalidad .....	31
4. Proyecciones de la mortalidad .....	35
5. Construcción de poblaciones estables .....	37
ANEXO: FUNCIONES HIPERBOLICAS .....	39
BIBLIOGRAFIA .....	41

### Indice de cuadros y gráficos

#### Cuadros

1 Medidas de la tabla de mortalidad estándar .....	11
2 Variación de la esperanza de vida al nacer en relación a $\alpha$ y $\beta$ .....	21

#### Gráficos

1 Función de densidad .....	6
2 Función de distribución .....	6

	<u>Página</u>
<u>Gráficos</u>	
3 Curvas de muertes transformadas, en escala logito .....	12
4 Distribución de las muertes en escala logito .....	12
5 Uruguay: Función de distribución $(1-l_x^u)$ en escala logito ...	13
6 Uruguay: Logito de la función de distribución $(1-l_x^u)$ en escala logito .....	13
7 Estándar general: Función de sobrevivientes $l_x^s$ y logito $(1-l_x^s)$ .....	17
8 Diferencias del estándar especial en los sobrevivientes por edades en escala logito por períodos de tiempo .....	36

## INTRODUCCION

En los países insuficientemente desarrollados se carece de buena información sobre los niveles de la mortalidad de sus poblaciones. La construcción de tablas de mortalidad es un medio muy usado para conocer estos niveles.

Para obtener una buena tabla de mortalidad, se debe partir de datos confiables, tanto de registros como de censos de población. Mientras se trabaja por mejorar los registros y los censos, se han ideado muchas formas de aproximarse a la realidad de estos países, y una de ellas son los modelos de mortalidad.

Estos modelos sirven, entre otras cosas, para tratar de completar el conocimiento de la mortalidad de un país, es decir, a partir de una información muy parcial, se seleccionaría el modelo más adecuado. En verdad, no existe aquel modelo que pueda representar una situación en forma exacta, lo que debe buscarse es una simple aproximación a la realidad. Ahí es donde se plantea una difícil alternativa entre no complicar demasiado el modelo y acercarse lo más posible al fenómeno que se quiere describir. Se hace complejo, en estos casos, combinar simplicidad con eficiencia, no siempre, por ejemplo, puede pensarse que con un solo parámetro como dato de entrada se logrará una buena descripción de la mortalidad de una población, pues puede resultar muy poco flexible el modelo.

Carrier y Hobcraft<sup>1/</sup> mencionan las siguientes características que debe tener un modelo:

"(a) El modelo debe ser lo más flexible posible como para permitir que se manifiesten las características genuinas.

(b) El modelo debe tener solamente la suficiente flexibilidad para permitir que se manifiesten las características genuinas.

1/ Carrier y Hobcraft, Demographic Estimation for Developing Societies, Population Investigation Committee, Londres, 1971, pág. 6.

(c) Es importante utilizar el conocimiento empírico disponible al elegir la flexibilidad del modelo."

En la creencia de que el modelo de mortalidad ideado por William Brass hace un aporte importante en relación con la flexibilidad del modelo, en este trabajo se trata de describir con amplio detalle sus aspectos esenciales.

En su primera parte, este documento analiza conceptos relacionados con la Estadística Matemática, que dan lugar a las relaciones fundamentales que se utilizan luego en el resto del trabajo. El lector que no desee profundizar en dichos conceptos puede comenzar directamente en el capítulo III, pasando por alto los capítulos I y II, y conocer sin dificultades el funcionamiento y usos más importantes de este sistema.

La idea central es dar una visión completa del Sistema de Tablas Modelo de Vida de W. Brass, que permita comprender cabalmente las aplicaciones realizadas y que los usuarios conozcan qué significa cada paso que se da y cada resultado que se obtiene.

## I. CONCEPTO MATEMATICO DEL LOGITO

1. Desarrollo previo

Con el objeto de entender con absoluta claridad el concepto y la función que cumple lo que se ha llamado "logito", sería necesario partir de la siguiente expresión:<sup>2/</sup>

$$f(x) = 1/2 \operatorname{sech}^2 x = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$

Es conveniente conocer las características de esta función, cuyas propiedades más importantes se pueden apreciar en el gráfico 1. Es muy similar a una normal de Gauss, cumpliendo sin inconvenientes el papel de lo que en estadística se conoce como "función de densidad o de frecuencia" ya que verifica las condiciones:

a)  $f(x) \geq 0$  para todo valor de  $x$ .

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 x dx = 1/2 \operatorname{tgh} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1/2 (1+1) = 1$

En ese caso particular, se refiere a una media igual a cero y varianza igual a uno:

a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) - [x f(x)]^2 dx = 1$

Se podría generalizar de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech}^2 (\alpha + \beta x) \quad (1)$$

A partir de estas funciones de frecuencia, se puede, integrando, encontrar la "función de distribución" que les pertenece:

caso  $\alpha=0$  y  $\beta=1$

$$P(x) = 1/2 \int_{-\infty}^x \operatorname{sech}^2 x dx = 1/2 \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$$

<sup>2/</sup> En un anexo al final de este documento se presentan algunos aspectos sobre funciones hiperbólicas.

) 4 (

Gráfico 1.

Función de densidad:  $f(x) = 1/2 \operatorname{sech}^2 x = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$

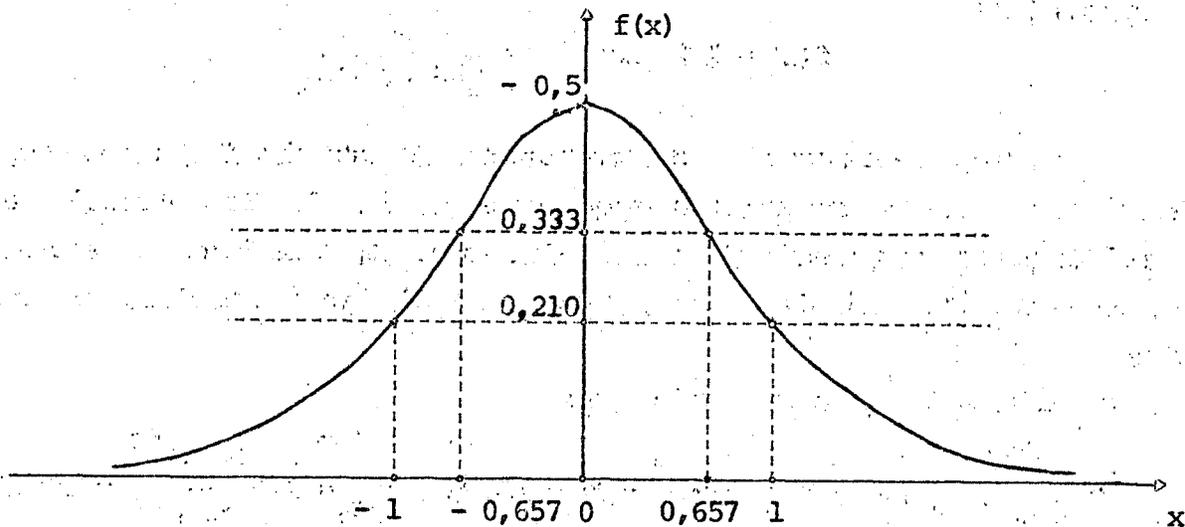
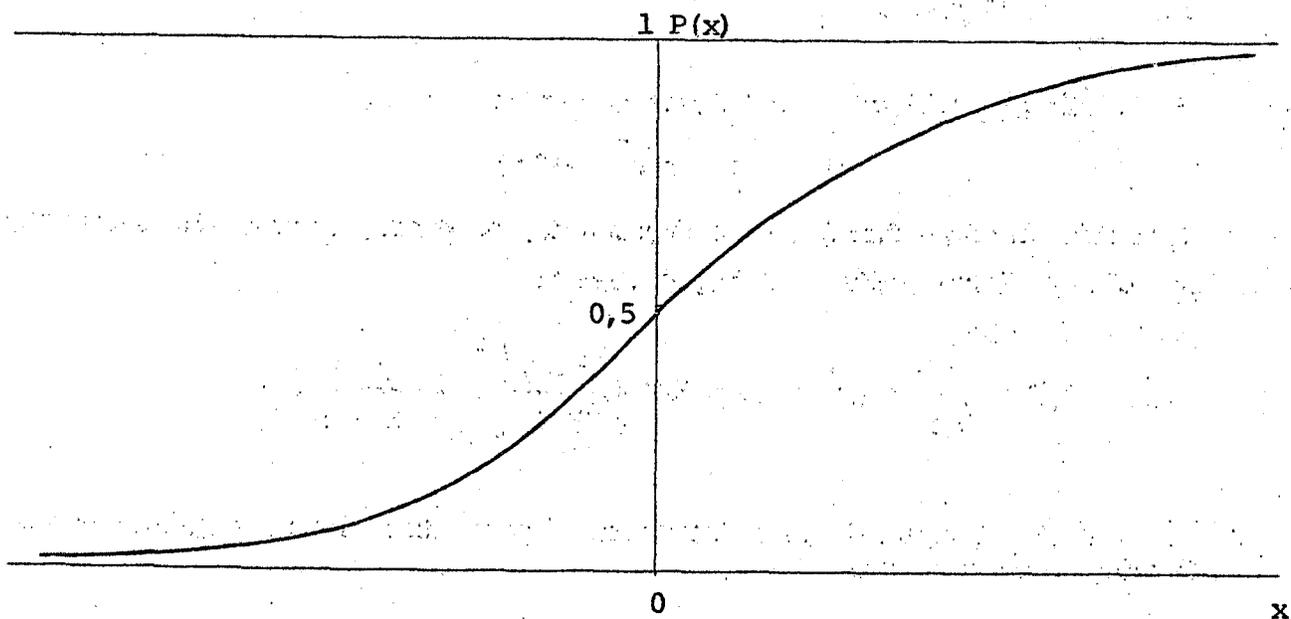


Gráfico 2

Función de distribución:  $P(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$



caso  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 1$

$$P'(x) = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^x \operatorname{sech}^2(\alpha + \beta x) dx = \frac{1}{1 + e^{-2(\alpha + \beta x)}} \quad (2)$$

En  $P(x)$  y  $P'(x)$  se reconoce la "función logística" (véase el gráfico 2).

## 2. Definición del "Logito"

Se ha llamado "Logito" a la operación que permite hacer una transformación lineal de la "logística":

$$\text{logito } P(x) = 1/2 \ln \frac{P(x)}{1-P(x)} = 1/2 \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + e^{-2x}}} = 1/2 \ln \frac{1}{e^{-2x}} = x$$

$$\text{Logito } P'(x) = 1/2 \ln \frac{P'(x)}{1-P'(x)} = 1/2 \ln \frac{1}{e^{-2(\alpha + \beta x)}} = \alpha + \beta x \quad (3)$$

Un enfoque diferente de este mismo concepto es considerarlo como la función inversa de la "Logística".

Si  $P(A) = \frac{1}{1 + e^{-A}}$  = "Función logística de A", se tiene:

$$A = \ln \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \text{"Función logito de } P(A)\text{"}$$

## 3. Propiedad importante

Una propiedad inmediata que, como se verá más adelante, tendrá mucho interés, es que la relación entre los logitos de dos distribuciones correspondientes a curvas con  $\alpha$  y  $\beta$  distintos, para el mismo valor de  $x$ , es también lineal.

Se define  $Y^S(x) = \text{logito } P^S(x)$ ,  $Y^O(x) = \text{logito } P^O(x)$  y  $Y^1(x) = \text{logito } P^1(x)$  luego:

$$Y^S(x) = \text{logito } P^S(x) = x \text{ para } \alpha=0 \text{ y } \beta=1$$

$$Y^O(x) = \text{logito } P^O(x) = \alpha_0 + \beta_0 x = \alpha_0 + \beta_0 Y^S(x)$$

$$Y^1(x) = \text{logito } P^1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x = \alpha_1 + \beta_1 Y^S(x)$$

Siempre que se trabaje con  $\alpha=0$  y  $\beta=1$  se utilizará el índice  $s$  y se denominará "estándar".

Haciendo la diferencia de los dos últimos logitos, se obtiene:

$$Y^1(x) - Y^0(x) = (\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0) x = (\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0) Y^S(x)$$

despejando  $Y^1(x)$  y sustituyendo  $Y^S(x) = \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0}$

$$Y^1(x) = \alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0} - \beta_0 \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0} + Y^0(x)$$

$$Y^1(x) = \alpha_1 - \frac{\beta_1 \alpha_0}{\beta_0} + (\beta_1 / \beta_0) Y^0(x) = c + d Y^0(x)$$

## II. USO DEL LOGITO

### 1. Uso en experimentos biológicos

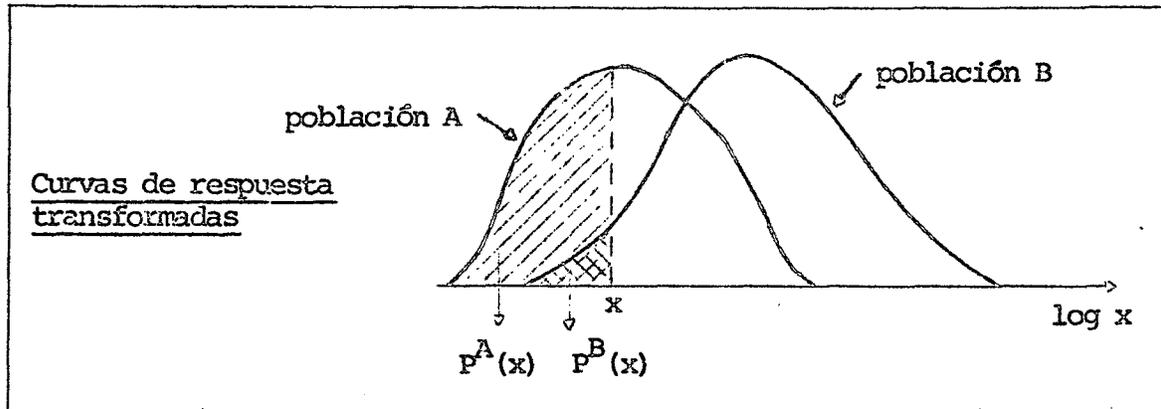
Una explicación de cómo se utilizan estos conceptos en ensayos biológicos ayudará a la comprensión de sus aplicaciones a la Demografía.

A la "función de densidad" (1) se le llama curva "respuesta" frente a una "dosis" de determinada droga que se inyecta a animales. Se hacen experimentos aplicándoles una "dosis"  $x$  de cierta droga y se observan sus reacciones. Si suponemos que la reacción que se quiere medir es la muerte de los animales con una dosis inferior a  $x$ , la distribución  $P(x)$  que se busca estaría dada por la proporción de los que mueren. Evidentemente,  $P(x)$  crece con el aumento de  $x$  hasta que mueren todos los animales, siendo la proporción igual a 1.

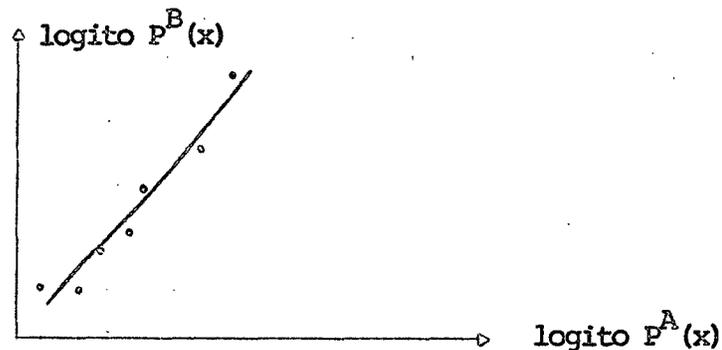
Las curvas "respuestas" que se obtienen del experimento no coinciden con  $f(x)$  teórico planteado, pero con un cambio de escala pueden parecerse aproximadamente. El cambio de escala que da buenos resultados, por ejemplo, en experimentos con ratas, consiste en hacerlo en escala logarítmica en lugar de graficar con respecto a  $x$ .

Para una misma "dosis" en dos poblaciones (A y B) de ratas, se encontrarían curvas distintas, pero de acuerdo con la propiedad vista en el capítulo anterior, entre los logitos de ellas existiría, aproximadamente, la siguiente relación lineal:

$$\text{logito } P^B(x) = c + d \text{ logito } P^A(x)$$



El cálculo de  $c$  y  $d$  se logra fácilmente a través del ajuste de los logitos observados, utilizando cualquiera de los métodos convencionales (por ejemplo, mínimos cuadrados). Para ello, es conveniente hacer el siguiente gráfico, que debe mostrar los puntos más o menos alineados:

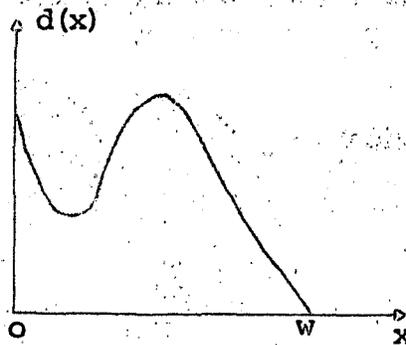


Conocida  $P^A(x)$ , es fácil deducir  $P^B(x)$  como el "antilogito de  $c + d \text{ logito } P^A(x)$ ".

## 2. Uso en poblaciones humanas (caso de tablas de mortalidad)

Si se intenta hacer un paralelo con los experimentos biológicos, podría suponerse que la "dosis"  $x$  es de tiempo, y éste se expresa en la edad de una cohorte de personas que, a medida que aumenta, van muriendo en forma acumulada y al final, para  $w$  (edad extrema de la vida), la proporción de las muertes es uno.

Pero, como se sabe, la curva de muertes de la población humana, que se calcula a través de tablas de mortalidad ( $d(x)$ ), tiene la siguiente forma aproximadamente:



Se debe encontrar la escala apropiada para que  $d(x) = l_x \mu_x = -\frac{d l_x}{dx}$  se transforme en una expresión similar a (1) y a su vez la integral, que es igual a  $(1-l_x^S)$ , debe aproximarse en su forma a una logística (2).

La función de distribución de las muertes, que se busca transformar en una curva logística, es la siguiente:

$$\int_0^x d(x) dx = \int_0^x -\frac{d l_x}{dx} dx = -l_x \Big|_0^x = 1 - l_x^S$$

Así como en el caso de las ratas, el usar escala logarítmica era satisfactorio, según W. Brass. En este caso, usando la escala logito, se halla la siguiente relación empírica:

$$1 - l_x^S = \frac{1}{1 + e^{-2[\alpha + \beta \text{ logito } (1-l_x^S)]}} \quad (4)$$

La escala se haría en el logito de una distribución estándar de las muertes  $(1-l_x^S)$ , lo que implica:

$$d(x) = \frac{\beta}{2} D \left[ \text{logito } (1-l_x^S) \right] \text{sech}^2 \left[ \alpha + \beta \text{ logito } (1-l_x^S) \right] \quad (5)$$

La letra D tiene el significado de derivada de lo que encierra el paréntesis. La experiencia indica que, con ciertas variaciones, se obtiene la forma deseada.

Luego, aplicando la definición de logito (3) que se tiene en la sección I.2, a la expresión (4), se obtiene la relación fundamental entre la tabla de mortalidad estándar y otra cualquiera:

$$\text{logito } (1 - l_x) = \alpha + \beta \text{ logito } (1 - l_x^S)$$

Llamando  $Y(x) = \logit(1-x)$  y  $Y^S(x) = \logit(1 - l_x^S)$  la expresión anterior toma la forma:

$$y(x) = \alpha + \beta Y^S(x) \quad (6)$$

Esto quiere decir que entre el logito de la distribución de las muertes de una tabla de mortalidad estándar y el de otra cualquiera, se esperaría una relación lineal en que, según el caso, variaría  $\alpha$  y  $\beta$ .

Debe tenerse muy presente entonces, que esta relación es empírica y que no siempre se logrará una buena alineación.

### 3. Comprobación empírica

A título de ilustración, se verá todo el proceso descrito tomando como estándar la tabla de mortalidad que Brass llama "estándar general" en su trabajo "sobre la escala de la mortalidad".<sup>3/</sup>

Como primer ejemplo sencillo, se considerará  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , es decir que se relacionarán las distintas funciones de la estándar consigo misma.

De acuerdo con la fórmula (5) se tendría:

$$d^S(x) = \frac{1}{2} D [Y^S(x)] \operatorname{sech}^2 Y^S(x) \quad (7)$$

y las muertes transformadas equivaldrían a una función del tipo:

$$\frac{d^S(x)}{D [Y^S(x)]} = 1/2 \operatorname{sech}^2 Y^S(x)$$

siendo a su vez:

$$\begin{aligned} D [Y^S(x)] &= 1/2 D \left[ \ln \frac{1 - l_x^S}{l_x^S} \right] = 1/2 \left[ \frac{d^S(x)}{1 - l_x^S} + \frac{d^S(x)}{l_x^S} \right] = \\ &= 1/2 \frac{d^S(x)}{(1 - l_x^S) l_x^S} \end{aligned}$$

Si se grafica la expresión  $\frac{d^S(x)}{D [Y^S(x)]} = 2(1 - l_x^S) l_x^S$  utilizando la información del cuadro 1, con abscisa en escala logito, se debería obtener, para estar satisfechos, la forma aproximada de la curva del gráfico 1.

<sup>3/</sup> Brass, W., Sobre la escala de la mortalidad, CELADE, Serie DS No. 7, 1971.

El resultado de esto está en el gráfico 3 que parece concordar, aunque gruesamente, con lo esperado.

Si, como se dijo, la función de densidad de las muertes es (7), se deduce, integrando, que la función de distribución es:

$$1 - l_x^s = \frac{1}{1 + e^{-2Y^s(x)}} \quad (8)$$

Al graficar la expresión (8), utilizando la información del cuadro 1, con la abscisa en escala logito, se logra una aproximación de la logística (véase el gráfico 4).

Ahora es necesario estudiar un caso para  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 1$ , vale decir, buscar la relación existente entre la tabla de mortalidad estándar y otra cualquiera, (en este caso la del Uruguay 1963-1964).<sup>4/</sup>

Se tiene que:

$$d^u(x) = \beta/2 \cdot D[Y^s(x)] \cdot \operatorname{sech}^2[\alpha + \beta Y^s(x)]$$

y por lo tanto:

$$\frac{d^u(x)}{D[Y^s(x)]} = \beta/2 \operatorname{sech}^2[\alpha + \beta Y^s(x)]$$

siendo, como se vió:

$$D[Y^s(x)] = 1/2 \frac{d^s(x)}{(1-l_x^s) l_x^s}$$

Poniendo, entonces, en la ordenada  $2 d^u(x) \frac{(1-l_x^s) l_x^s}{d^s(x)}$  y en la abscisa

$Y^s(x)$ , deberíamos esperar una curva parecida a la de la estándar, pero quizás desplazada y más o menos concentrada (véase el gráfico 3).

En el gráfico 5 se representa  $(1 - l_x^u)$  en escala logito y toma la forma aproximada de la "logística", lo que resulta muy alentador, pues esto hace suponer que entonces, aplicándole la relación (6), que figura en la página 9, deberían alinearse. En el gráfico 6 se trata de verificar esto último, obteniendo, con algunas desviaciones, puntos más o menos alineados.

<sup>4/</sup> República Oriental del Uruguay, Tablas de mortalidad 1963-1964, Dirección General de Estadística y Censos.

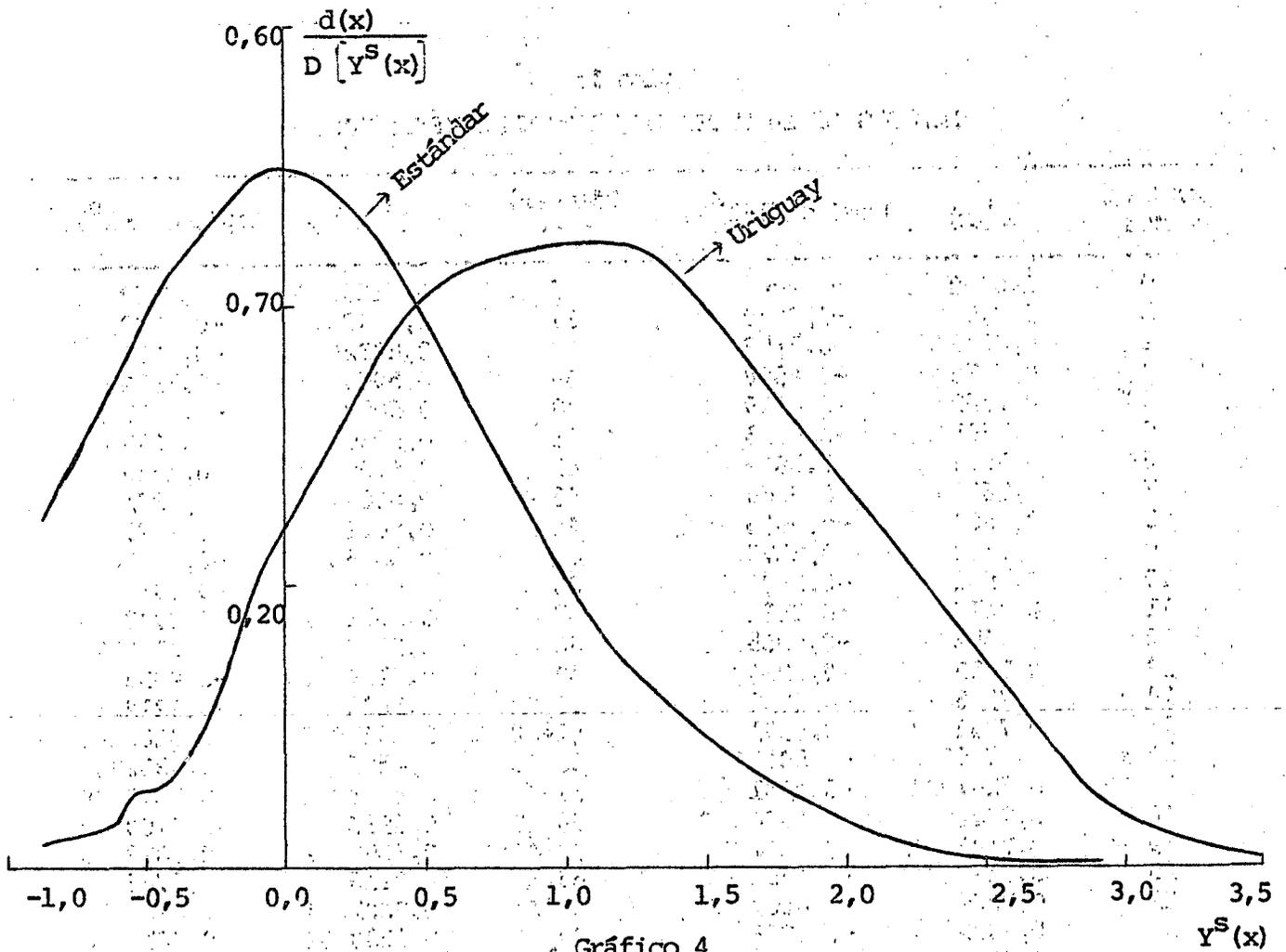
Cuadro 1  
MEDIDAS DE LA TABLA DE MORTALIDAD ESTANDAR

Edad (x) años	$l^s(x)$	Logito ( $1-l^s_x$ )	Edad (x) años	$l^s(x)$	Logito ( $1-l^s_x$ )
0	1,0000	- ∞	36	0,6160	-0,2364
1	0,8499	-0,8670	37	0,6097	-0,2230
2	0,8070	-0,7152	38	0,6032	-0,2094
3	0,7876	-0,6552	39	0,5966	-0,1956
4	0,7762	-0,6219	40	0,5898	-0,1817
5	0,7691	-0,6015	41	0,5830	-0,1676
6	0,7642	-0,5879	42	0,5759	-0,1530
7	0,7601	-0,5766	43	0,5686	-0,1381
8	0,7564	-0,5666	44	0,5612	-0,1229
9	0,7532	-0,5578	45	0,5535	-0,1073
10	0,7502	-0,5498	46	0,5454	-0,0911
11	0,7477	-0,5431	47	0,5371	-0,0743
12	0,7452	-0,5365	48	0,5285	-0,0572
13	0,7425	-0,5296	49	0,5197	-0,0395
14	0,7396	-0,5220	50	0,5106	-0,0212
15	0,7362	-0,5131	52 <sup>1/2</sup>	0,4857	0,0286
16	0,7328	-0,5043	55	0,4585	0,0832
17	0,7287	-0,4941	57 <sup>1/2</sup>	0,4291	0,1428
18	0,7241	-0,4824	60	0,3965	0,2100
19	0,7188	-0,4694	62 <sup>1/2</sup>	0,3602	0,2873
20	0,7130	-0,4551	65	0,3210	0,3746
21	0,7069	-0,4401	67 <sup>1/2</sup>	0,2801	0,4720
22	0,7005	-0,4248	70	0,2380	0,5818
23	0,6943	-0,4103	72 <sup>1/2</sup>	0,1945	0,7105
24	0,6884	-0,3963	75	0,1500	0,8673
25	0,6826	-0,3829	77 <sup>1/2</sup>	0,1090	1,0505
26	0,6764	-0,3686	80	0,0760	1,2490
27	0,6703	-0,3549	82 <sup>1/2</sup>	0,0490	1,4828
28	0,6643	-0,3413	85	0,0290	1,7555
29	0,6584	-0,3280	87 <sup>1/2</sup>	0,0155	2,0760
30	0,6525	-0,3150	90	0,0070	2,4774
31	0,6466	-0,3020	92 <sup>1/2</sup>	0,0030	2,9031
32	0,6405	-0,2899	95	0,0010	3,4534
33	0,6345	-0,2759	97 <sup>1/2</sup>	0,0001	4,6046
34	0,6284	-0,2627	100	0,0000	∞
35	0,6223	-0,2496			

Fuente: Brass, W., op.cit., pág. 9.

Gráfico 3

CURVAS DE MUERTES TRANSFORMADAS, EN ESCALA LOGITO



1  $(1-l^S_x)$

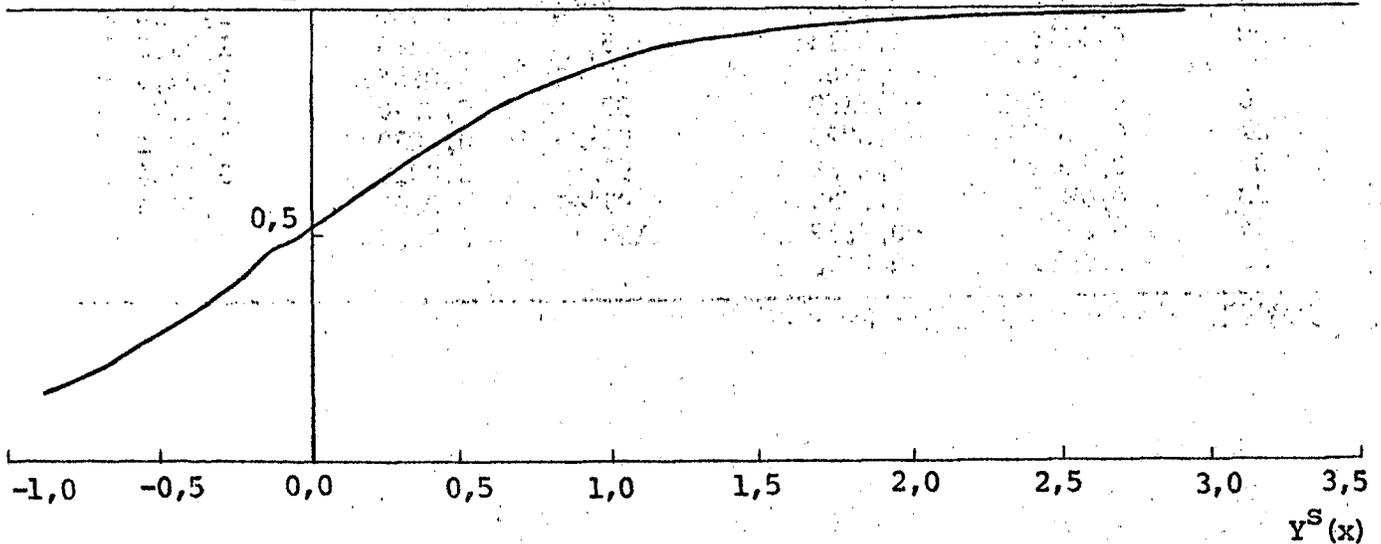


Gráfico 5

URUGUAY: FUNCION DE DISTRIBUCION  $(1 - 1_x^u)$  EN ESCALA LOGITO

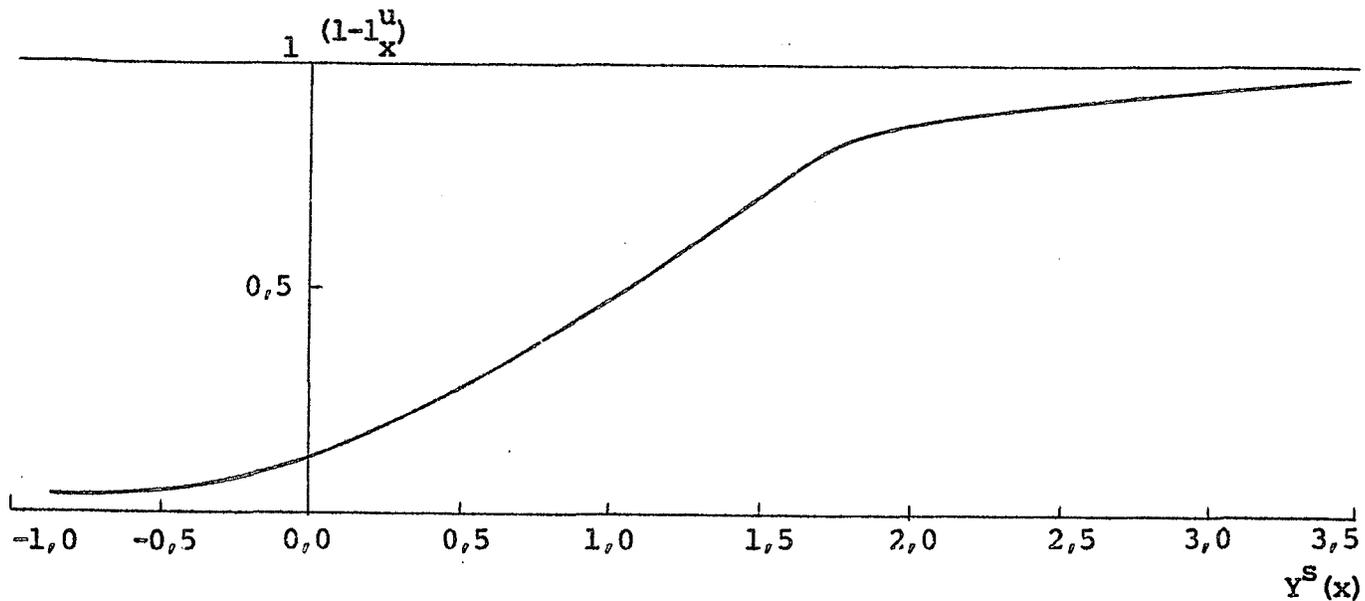
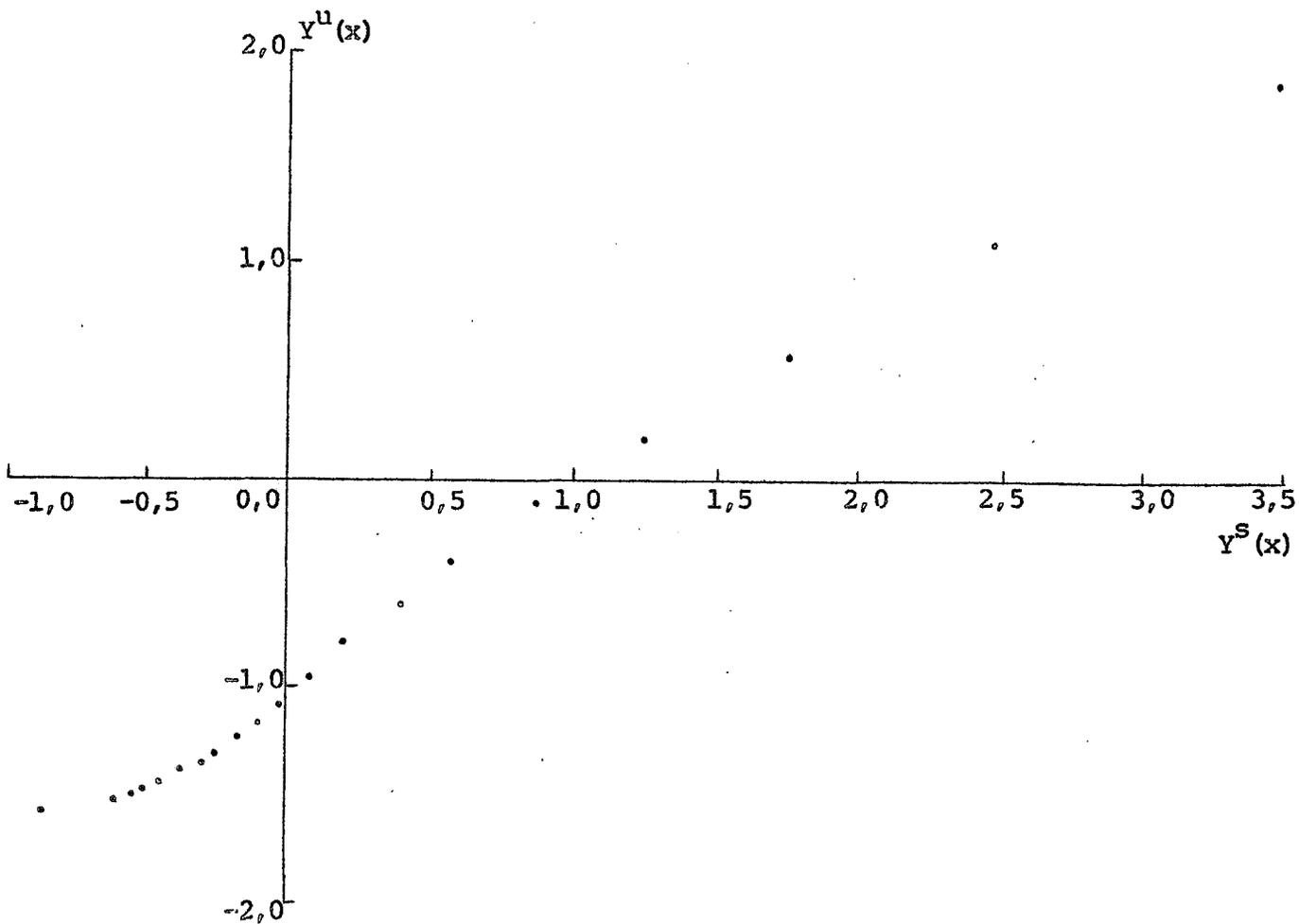


Gráfico 6

URUGUAY: LOGITO DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION  $(1 - 1_x^u)$  EN ESCALA LOGITO



#### 4. Otro enfoque del uso en Tablas de Mortalidad

Brass llega a las mismas conclusiones partiendo de un enfoque totalmente distinto.<sup>5/</sup> Parte de una observación de Kernack (y otros)<sup>6/</sup> referente a que los cambios relativos en las tasas específicas de mortalidad, en un período de tiempo limitado, no difieren con la edad.

Esto le permite escribir la siguiente relación:

$$\mu_1(x) = C \mu_2(x)$$

Siendo:

$\mu_1(x)$  = fuerza de la mortalidad o tasa instantánea para el período 1.

$\mu_2(x)$  = fuerza de la mortalidad o tasa instantánea para el período 2.

Como  $\mu_{(x)} = -\frac{l'_x}{l_x}$  para  $l_x$  igual a los sobrevivientes de edad  $x$ , la expresión anterior resulta:

$$\frac{(l'_x)^1}{l_x^1} = \frac{(l'_x)^2}{l_x^2} C \quad \text{o sea:}$$

$$\ln l_x^1 = C \ln l_x^2$$

Al llegar a este punto, se vuelve a plantear la hipótesis inicial, afirma que las relaciones entre las probabilidades de morir no son proporcionalmente constantes a través de todas las edades, sino que es más complicado y a edades mayores tiende a acercarse a 1.

Como solución a esto, se propone usar la proporcionalidad considerando la probabilidad de morir  $(1 - l'_x)$  para  $l'_0 = 1$  y no los sobrevivientes  $l'_x$ , como lo había hecho hasta aquí. Se seguirá trabajando, entonces, con la siguiente expresión:

$$\ln \frac{1 - l_x^1}{l_x^1} = C \ln \frac{1 - l_x^2}{l_x^2}$$

<sup>5/</sup> Brass, W., op.cit., págs. 3 y siguientes.

<sup>6/</sup> Kernack, Mc. Kendrick y Mc. Kinley, "Death Rates in Great Britain and Sweden"; the Lancet, 1934.

Derivando, se obtiene:

$$\frac{(l_x^1)'}{l_x^1 [1 - l_x^1]} = C \frac{(l_x^2)'}{l_x^2 [1 - l_x^2]} \quad \text{o lo que es lo mismo:}$$

$$\frac{\mu_1(x)}{1 - l_x^1} = C \frac{\mu_2(x)}{1 - l_x^2}$$

Ahora, integrando esta expresión, se obtiene:

$$\ln \frac{1 - l_x^1}{l_x^1} + \alpha_1 = C \ln \frac{1 - l_x^2}{l_x^2} + \alpha_2$$

o sea, que se podría escribir:

$$1/2 \ln \frac{1 - l_x^1}{l_x^1} = \alpha + \beta 1/2 \ln \frac{1 - l_x^2}{l_x^2}$$

Se reconoce en la expresión anterior:

$$Y^1(x) = 1/2 \ln \frac{1 - l_x^1}{l_x^1} = \text{logito } (1 - l_x^1)$$

$$Y^2(x) = 1/2 \ln \frac{1 - l_x^2}{l_x^2} = \text{logito } (1 - l_x^2)$$

por lo tanto, la relación fundamental entre las dos tablas de mortalidad, es la siguiente:

$$Y^1(x) = \alpha + \beta Y^2(x)$$

que es la fórmula (6) antes obtenida.

### III. SIGNIFICADO DE LOS PARAMETROS

#### 1. Conceptos Generales

W. Brass vincula una tabla de mortalidad estándar con otros patrones a través de la siguiente ecuación:

$$Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x) \quad (6)$$

siendo:

$$Y(x) = \text{logito } (1 - l_x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - l_x}{l_x}$$

$$Y^S(x) = \text{logito}(1 - l_x^S) = 1/2 \ln \frac{1 - l_x^S}{l_x^S}$$

para  $l_x$  = sobrevivientes de una tabla de mortalidad a la edad  $x$ .

$l_x^S$  = sobrevivientes de la tabla de mortalidad estándar a la edad  $x$ .

$\alpha$  y  $\beta$  = son parámetros cuyo significado hace el objeto de este capítulo.

Se tratará de demostrar que  $\alpha$  está fundamentalmente ligado al nivel de la mortalidad y  $\beta$  a la forma según la edad. Obviamente, esto no puede ser estrictamente así si se piensa que el nivel y la forma son dos conceptos muy asociados y que variaciones en uno de ellos repercuten, invariablemente, en el otro, pero existe, sí, una predominancia marcada en este sentido.

Para el análisis que sigue, es conveniente conocer con mucha claridad el comportamiento de  $Y(x)$  y  $l_x$  (véase el gráfico 7). Si se llama  $x_1$  a la edad en que  $l_x^S = 0,5$ , se podría resumir de la siguiente manera:

para  $x \rightarrow 0$        $l_x^S = 1$        $Y^S(x) \rightarrow -\infty$

para  $0 < x < x_1$        $l_x^S > 0,5$        $Y^S(x) < 0$

para  $x = x_1$        $l_{x_1}^S = 0,5$        $Y^S(x_1) = 0$

para  $x_1 < x < w$        $l_x^S < 0,5$        $Y^S(x) > 0$

para  $x_1 \rightarrow w$        $l_x^S = 0$        $Y^S(x) \rightarrow +\infty$

En el caso de la estándar general,  $x_1$  es la edad 51.

## 2. Estudio de $\alpha$ y $\beta$

Se verán todos los casos posibles, de acuerdo con los valores que puedan adoptar ambos parámetros.

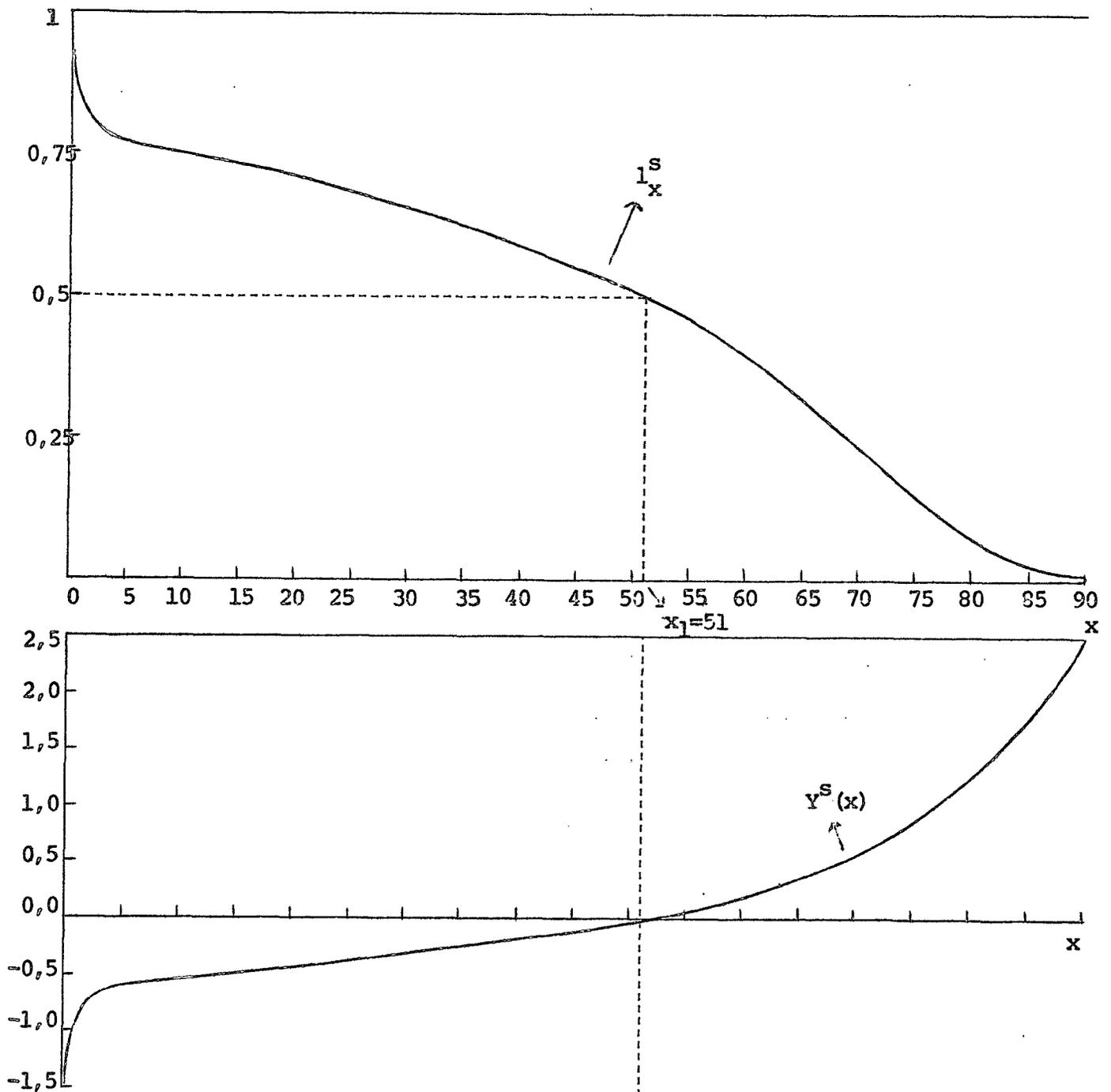
a) Variaciones solamente de  $\alpha$ .

Se verán primero los efectos de variaciones de  $\alpha$  alrededor de la edad mediana  $x_1$ . A esa edad ocurre que  $l_{x_1}^S = 0,5$  y, como se vio antes, implica que  $Y^S(x_1) = 0$  y de acuerdo con esto, la relación (6) toma el valor:

$$Y(x_1) = \alpha$$

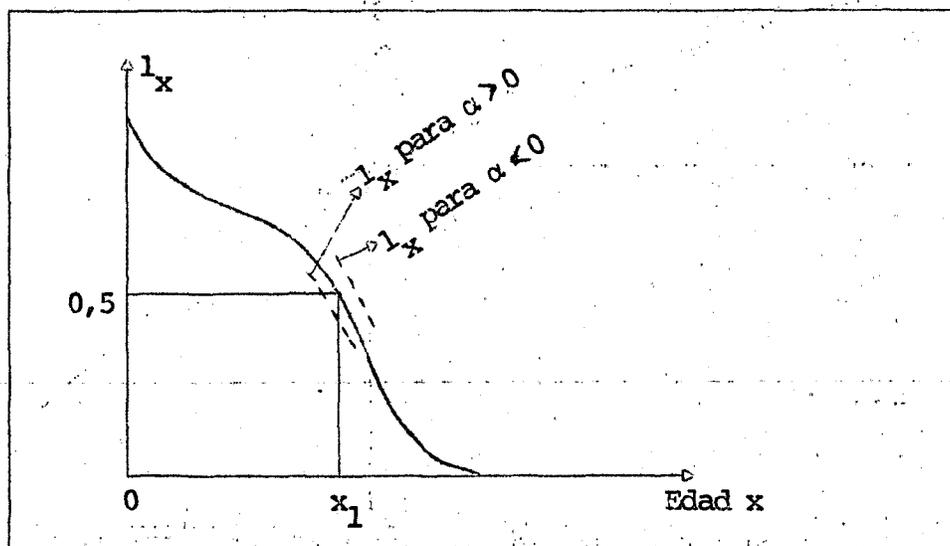
Gráfico 7

ESTANDAR GENERAL: FUNCION DE SOBREVIVIENTES  $1_x^S$  Y LOGITO  $(1 - 1_x^S)$



Si  $\alpha > 0$ ,  $Y(x_1)$  es también positivo y por lo tanto  $l_{x_1} < 0,5$ , que estaría por debajo del valor de  $l_{x_1}^S = 0,5$ . En caso de ser  $\alpha < 0$  ocurrirá lo contrario, siendo  $l_{x_1} > l_{x_1}^S = 0,5$ .

El valor que tome  $l_x$  a edades más alejadas de  $x_1$  depende exclusivamente de los valores de  $\alpha$ , pero se puede afirmar que, esencialmente,  $l_{x_1}^S$  representa, en promedio, el nivel de la mortalidad de la estándar si  $l_{x_1}$  está por debajo, es porque su mortalidad sería más alta y si  $l_{x_1}$  está por encima, es porque su mortalidad será más baja:



b) Variaciones de  $\alpha$  para  $\beta = 1$ .

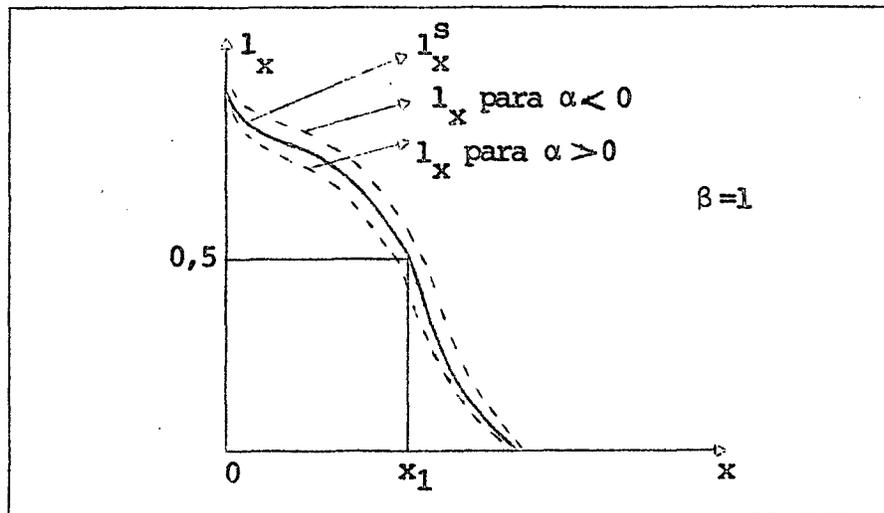
Se parte de la relación (6) que queda:

$$Y(x) = \alpha + Y^S(x)$$

transponiendo términos:

$$Y(x) - Y^S(x) = \alpha$$

Cuando  $\alpha > 0$ , entonces  $Y(x) > Y^S(x)$  y, por lo tanto,  $l_x < l_x^S$  y si  $\alpha < 0$ , entonces  $Y(x) < Y^S(x)$  y, por lo tanto,  $l_x > l_x^S$ .



Esto confirma lo que se dijo de la importancia de  $\alpha$  en el nivel, ya que para un  $\beta = 1$  constante,  $l_x$  depende solamente de  $\alpha$ , no intersectándose nunca con  $l_x^S$ . Queda por aclarar qué pasa con  $\beta \neq 1$ .

c) Caso de  $\beta > 1$ .

Si  $Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x)$  y le restamos a ambos miembros  $Y^S(x)$ , se tiene:

$$D(x) = Y(x) - Y^S(x) = \alpha + (\beta - 1) Y^S(x) \quad (9)$$

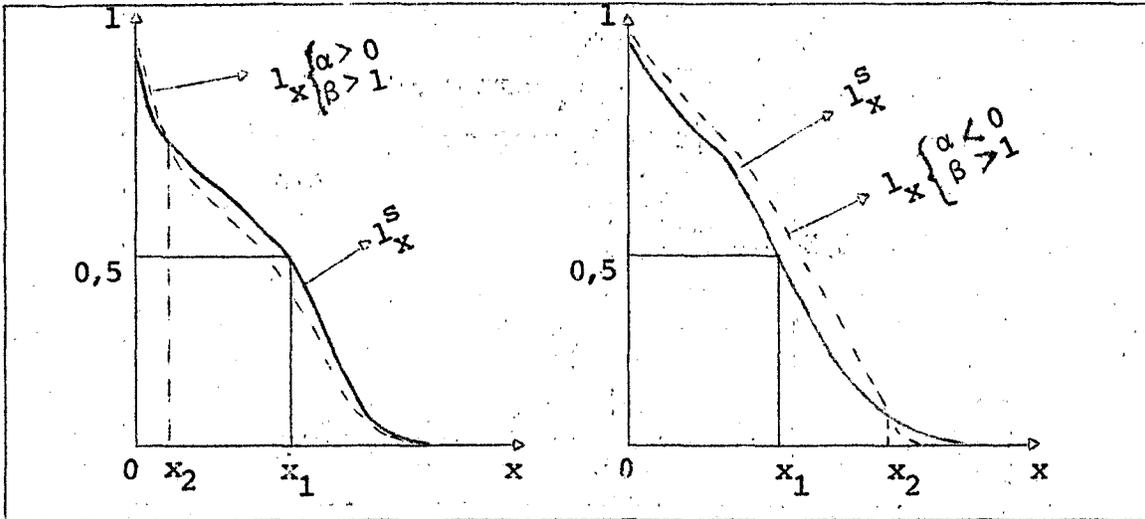
Es importante tener muy en cuenta esta relación  $D(x)$ , definida como diferencia de logitos, porque es muy usada por Brass, que la considera más sensible que la (6) para realizar los ajustes que permiten la estimación de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Cuando  $\beta \neq 1$  existiría un punto  $x_2$  en que  $Y(x) = Y^S(x)$  por un lado y  $l_x$  y  $l_x^S$ , por el otro, se intersectan, es decir que la relación (9) se hace cero.

$$Y^S(x_2) = - \frac{\alpha}{\beta - 1}$$

En el caso de  $\beta > 1$  el denominador es siempre positivo, todo depende del signo de  $\alpha$ . Si  $\alpha < 0$ , se tiene que  $Y^S(x_2) < 0$ , lo que ocurre para  $0 < x < x_1$ , siendo, como se vio,  $x_1$  la edad mediana, y dado que para  $\alpha$  positivo,  $l_x$  estaba por debajo de  $l_x^S$ , la intersección sería entre cero y  $x_1$ .

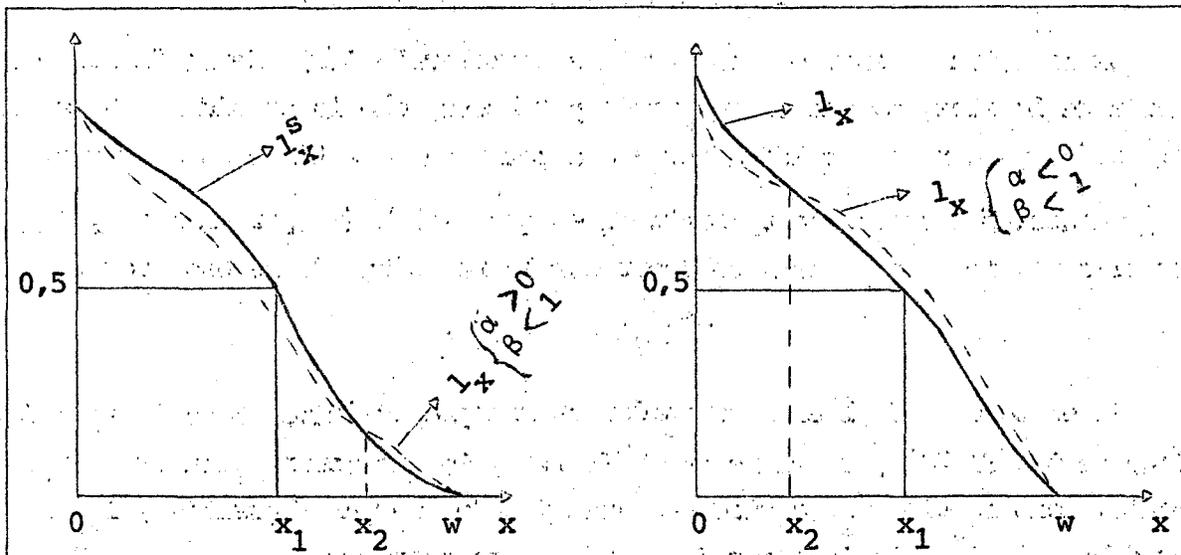
En cambio, si  $\alpha > 0$ ,  $Y^S(x_2) > 0$  y la intersección estaría entre  $x_1$  y  $w$ .



d) Caso de  $\beta < 1$ .

Análogamente, en este caso se parte de  $Y^S(x_2) = - \frac{\alpha}{\beta - 1}$  pero con el denominador negativo.

Para  $\alpha$  positivo,  $\bar{Y}^S(x_2)$  es mayor que cero, lo que ocurre para  $x_1 < x < w$ . Por el contrario, si  $\alpha < 0$ ,  $Y^S(x_2) < 0$  lo que sucede para  $0 < x < x_1$ .



La experiencia indica que los valores de  $\beta$ , ya sean mayores o menores que 1, están muy próximos a la unidad, significando esto que las intersecciones se dan en los extremos de la vida. El parámetro  $\beta$  señalaría diferencias de la

incidencia de la mortalidad por edades entre la "estándar" y la otra tabla de mortalidad que se considere, pero los niveles se reflejan fundamentalmente en los valores de  $\alpha$ .

Como ejemplo de lo anterior, en el cuadro 2 se muestra la variación de los niveles de mortalidad, medida por la esperanza de vida al nacer, en relación a distintos valores de los parámetros.

El nivel de la estándar ( $\alpha=0$  y  $\beta=1$ ) está dado por  $e_0^0 = 43,4$ . Se puede tratar de ver si lo expuesto en este capítulo se verifica en este cuadro. Por ejemplo, se dijo que si  $\alpha > 0$ , es de esperar que el nivel de la mortalidad sea más alto que para la estándar, así es que se encuentra, para  $\alpha = +0,5$ , que la esperanza de vida al nacer está entre 24,7 y 31,0 según sea el valor de  $\beta$ .

Cuadro 2

VARIACION DE LA ESPERANZA DE VIDA AL NACER EN RELACION A  $\alpha$  Y  $\beta$ 

$\alpha$	$\beta$		
	0,6	1,0	1,6
+ 0,5	24,7	26,9	31,0
0,0	43,1	43,4	45,0
- 0,5	61,7	58,9	57,2
- 1,0	75,8	70,7	66,5

Fuente: Brass, W, op.cit., cuadro 5, pág. 11.

#### IV. COMPARACION DEL SISTEMA DE TABLAS DE VIDA MODELO DE W. BRASS CON OTROS SISTEMAS

##### 1. Planteamiento del problema

En la introducción de este documento ya se planteaba el problema de la flexibilidad que debería tener un modelo. ¿En qué caso es un modelo muy rígido? ¿Cuándo es demasiado flexible? En este caso particular, en que se trata de describir la mortalidad de un área determinada a través de todas las edades, la interrogante es: ¿Qué dimensión debe tener el modelo que permita describir aproximadamente las probabilidades de muerte por edades? Dicho en otras palabras: se trata de cuántos parámetros serían suficientes para obtener un resultado satisfactorio.

Otra interrogante posible es hasta qué punto se debe complicar un modelo para estar satisfechos de sus cualidades.

No se pretende dar respuesta aquí a esto, sino más bien hacer una comparación del sistema de Brass con los modelos más importantes que se han elaborado, enmarcándolos en ese contexto, es decir, enfrentándolos ante esas disyuntivas.

Los intentos de expresar la mortalidad por edades de las poblaciones pueden ser clasificados en dos grandes tipos, los que trataron de encontrar una relación matemática de la mortalidad en función de la edad y los que crearon conjuntos de tablas de mortalidad para que sirvan de marco de referencia. Los primeros han sido, además, los más antiguos, entre los que se pueden mencionar a Gompertz, Makeham, Pearson, etc. El problema más serio con que se enfrentaron estos autores fue el de poder abarcar con una sola función todos los tramos de edades, y así, algunos realizaron el modelo para determinadas edades. O, como en el caso de Pearson, que tuvo que combinar tres distribuciones normales independientes.

Los sistemas de tablas modelo de mortalidad son los que más se han usado en demografía en las últimas décadas y los que interesan en este caso. En lo que sigue de este capítulo, se hará un análisis comparativo de los siguientes: a) Naciones Unidas (1955), b) Coale y Demeny (1966), c) Gabriel y Ronen (1958), d) Lederman y Breas (1959), e) Bourgeois-Pichat (1965) y f) William Brass.

## 2. Las tablas modelo de mortalidad de Naciones Unidas<sup>7/</sup>

Para construirlas, se partió de 158 tablas de mortalidad seleccionadas de la serie de Anuarios Demográficos de las Naciones Unidas para el período 1900-1950. Es conveniente hacer notar que de ellas, 112 tablas pertenecen a Europa y América del Norte, pero América del Sur, África y Asia están muy poco representadas.

Se encontró que existían correlaciones muy marcadas entre las probabilidades de morir a una edad determinada con las adyacentes. Esto quiere decir que si para determinado nivel de la mortalidad se conoce la probabilidad de muerte

<sup>7/</sup> Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad, tablas de mortalidad para países insuficientemente desarrollados, ST/SOA/A 22. Naciones Unidas, Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, ST/SOA/A 25, Manual III.

en el primer año de vida ( ${}_1q_0$ ), a partir de ella se deduce para las edades siguientes como ser  ${}_4q_1$  y luego con esta probabilidad se encuentra el valor de  ${}_5q_5$ , y así sucesivamente hasta completar la tabla de mortalidad.

Si se realiza este procedimiento partiendo de distintos niveles de  ${}_1q_0$ , se genera un sistema de tablas modelo, que, en el caso de Naciones Unidas, fue hecho a través de regresiones parabólicas.

El criterio de nivel de mortalidad fijado fue la esperanza de vida al nacer ( $e_0^0$ ) y se produjeron tablas de mortalidad para cada sexo y para el conjunto, a las que se adjudicaron desde lo que se llamó "nivel 0", que sería el más bajo y correspondería a una  $e_0^0 = 20,0$  hasta el "nivel 115" con  $e_0^0 = 73,9$ .

Si bien se publicaron niveles solamente de 5 en 5 y, generalmente, para los intermedios se realizan interpolaciones, podría fácilmente, a través de las regresiones existentes, obtenerse la tabla de vida para cualquier "nivel" de mortalidad incluso superior a 115. Vale decir que si bien el sistema no se expresa por una sola fórmula matemática, sí puede manifestarse por un número limitado que son las parábolas de regresión encontradas.

Estas tablas están sujetas a varias críticas, entre las cuales interesa destacar:

a) Existe un sesgo acumulado que es introducido por la serie de ecuaciones de regresión. Pero más importantes en este análisis son las objeciones que siguen.

b) Como ya se dijo, la colección de tablas de mortalidad elegidas para calcular los modelos no es representativa de la mortalidad de todas las áreas del mundo y quizás menos de los países con estadísticas insuficientes. Esto significa que no se estaría cubriendo toda la experiencia de mortalidad que existe en el mundo y aún menos la de países que más uso tendrían que hacer de estos instrumentos.

c) Son modelos de una sola dimensión, dependen de un solo parámetro, por ejemplo, con un valor de  ${}_1q_0$  se determina una única tabla de mortalidad. Esto no corresponde de ninguna manera a la realidad, en que una mortalidad infantil alta no tiene por qué estar por fuerza asociada a una mortalidad adulta elevada o a la inversa.

El modelo de Naciones Unidas es extremadamente rígido, puede ser útil en múltiples aspectos, pero difícilmente pueden ser adaptados a distintas situaciones que pudieran encontrarse en las poblaciones humanas.

3. Las tablas modelo de mortalidad regionales de Coale y Demeny<sup>8/</sup>

Se trata de cuatro conjuntos de tablas modelo de mortalidad, a los que se designó de la siguiente manera: "Oeste", "Este", "Norte" y "Sur".

Para cada una de estas familias, se calcularon 24 tablas para hombres y mujeres por separado, con un nivel más alto de mortalidad que corresponde a  $e_0^o = 20$  años, al que se llamó "Nivel 1" y luego, variando, siempre en el sexo femenino, la esperanza de vida al nacer de 2,5 en 2,5 hasta 77,5 años, que sería el "nivel 24".

Cada familia refleja patrones homogéneos de mortalidad por edades, comparados con la experiencia mundial media, y se seleccionaron, aproximadamente, como sigue:

a) "Norte". Está basada en la experiencia de tablas de mortalidad de los países escandinavos. Asocia, en general, una baja mortalidad de ancianos con una baja mortalidad infantil en relación a la de 1 a 4 años.

b) "Este". Es el reflejo de una colección de tablas de mortalidad pertenecientes a Europa Central. Su característica principal es una relativamente alta mortalidad de ancianos y también elevada mortalidad infantil.

c) "Sur". Como su nombre lo indica, esta familia representa la mortalidad de los países del sur de Europa (Italia, Portugal y España). Expresa una alta mortalidad hasta los 5 años de edad y tasas bajas en edades adultas avanzadas (40 a 60 años) y nuevamente alta por encima de los 65 años.

d) "Oeste". Abarca la estructura de mortalidad perteneciente a Australia, Canadá, Estados Unidos, Israel, Japón, Nueva Zelanda, Sudáfrica, Taiwan y 13 países de Europa Occidental. Es una colección residual que no muestra desviaciones consecuentes con la media total mundial de estructura de la mortalidad según la edad.

<sup>8/</sup> Coale y Demeny, Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, 1966.

El cálculo de cada familia estuvo basado en ecuaciones de regresión lineal y logarítmica, que expresan las correlaciones encontradas entre la esperanza de vida a la edad 10 ( $e_{10}^0$ ) por un lado y valores de las probabilidades de muerte ( ${}_nq_x$ ) por otro. Se encontraron muy altos coeficientes de correlación y más altos cuando se trataba de la correlación dentro de cada uno de los cuatro grupos, lo que constituye uno de los argumentos fundamentales para formar estas familias.

En el caso de estos modelos caben, entre otras, las siguientes consideraciones:

a) Al igual que en el caso del sistema de Naciones Unidas, se considera la experiencia, fundamentalmente, de países con datos confiables con alta predominancia de europeos. Tres de las familias se calculan a base, únicamente, de países de Europa y en la "Oeste" constituyen el 60 por ciento. No se puede pensar que la variedad encontrada en Europa alcance para cubrir la estructura y niveles de mortalidad que existen en todo el mundo.

b) En cierta forma, la construcción de estas tablas constituye un intento por superar la extrema rigidez que ofrecía el sistema de Naciones Unidas basado en un solo parámetro que definía totalmente una tabla de vida. Por eso se calcularon cuatro familias, es decir que existen cuatro alternativas posibles y si bien cada alternativa es de una sola dimensión, si se sabe qué grupo adoptar, se puede hacer una mejor aproximación de la realidad.

Estos modelos son, a base de lo anterior, menos rígidos que los de Naciones Unidas, pero son solamente cuatro las combinaciones posibles y la realidad es mucho más compleja y más rica en variaciones de la mortalidad con la edad.

Coale y Demeny han mejorado las insuficiencias del Modelo de Naciones Unidas, pero siguen aún careciendo de la flexibilidad que en algunas ocasiones pudiera requerirse.

#### 4. Otros Modelos

Gabriel y Ronen, Lederman y Breas, y Bourgeois-Pichat, por ejemplo, hacen esfuerzos por superar las dificultades mencionadas. Estos autores analizan críticamente los modelos de Naciones Unidas y luego, a partir de los mismos datos básicos, realizan sus propias elaboraciones.

Gabriel y Ronen<sup>9/</sup> utilizan como modelo ecuaciones de regresión, calculadas a través de la técnica de mínimos cuadrados, tanto para la esperanza de vida al nacer, relacionada con la probabilidad de muerte del primer año de vida, como para las probabilidades de morir en todas las edades con dicha  $l_0$ .

Lederman y Breas<sup>10/</sup> han aplicado una técnica que se basa en el análisis factorial y han calculado tres "componentes principales" de la mortalidad. Un artículo del Boletín No. 6 de Naciones Unidas<sup>11/</sup> amplía este estudio encontrando cinco "componentes principales". Este análisis muestra que son cinco los factores independientes que actúan sobre la mortalidad.

Bourgeois-Pichat<sup>12/</sup> toma de nuevo este mismo tipo de análisis y construye tres series de tablas modelo de mortalidad, la desviada hacia arriba, la intermedia y la desviada hacia abajo, en que están representados los extremos de la mortalidad y lo que sería el modelo de Naciones Unidas (intermedio).

Estos autores, si bien hacen un estudio crítico válido de los sistemas de Naciones Unidas, utilizan elementos matemáticos poco operativos para ser utilizados a nivel de los que serían usuarios más directos de los modelos de mortalidad.

##### 5. El sistema de tabla de vida modelo de W. Brass

Este sistema es distinto de los anteriores, no se trata de un conjunto de tablas de vida modelo, sino que, en cierta forma, se parece a aquellos primeros intentos de expresar, con una relación matemática, la ley de mortalidad por edades.

Como se vio en capítulos anteriores, la relación fundamental es:

$$\text{Logito } (1 - l_x) = \alpha + \beta \text{ Logito } (1 - l_x^s)$$

Siendo:  $\text{Logito } (1 - l_x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - l_x}{l_x}$

9/ Gabriel y Ronen, "Estimates of Mortality from Infant Mortality Rates" Population Studies, vol. XII, No. 2, noviembre de 1958.

10/ Lederman y Breas, "Les dimensions de la mortalité", Population, 14<sup>o</sup> année, octobre-décembre de 1959, No. 4.

11/ Naciones Unidas, "Análisis factorial de las tasas de mortalidad por edad y por sexo", Boletín de Población N°6, pág. 153, ST/SOA/N6, 1962.

12/ Naciones Unidas, El concepto de población estable, ST/SOA/A 39, Anexo II, pág. 139.

para  $l_x$  función de sobrevivencia que se desea describir con el modelo y  $l_x^s$  función de sobrevivencia estándar que se usa como escala para dicha descripción.

Mientras en los modelos tradicionales (Naciones Unidas y Coale y Demeny) se usaba un solo parámetro, obsérvese que aquí juegan dos parámetros ( $\alpha$  y  $\beta$ )<sup>13/</sup> y, además, una tabla estándar que implica una curva determinada.

La mayor flexibilidad del modelo es obvia, las variaciones de  $\alpha$  producen cambio en los niveles de la mortalidad y las de  $\beta$  en la forma de la mortalidad por edades.

Si  $\beta$  fuera igual a 1 y constante, se estaría en un caso parecido al sistema de Naciones Unidas, con  $\alpha$  variaría el nivel, pero respetaría siempre el patrón de mortalidad por edades de la estándar.

La estándar a usar depende de la aplicación particular que se haga. Brass usa, generalmente: a) una "estándar general", que está basada, fundamentalmente, en la mortalidad de Europa y que tiene mucha similitud con la ley de mortalidad que usa Naciones Unidas y Coale y Demeny en su modelo "Oeste", b) una "estándar africana", que tiene una mortalidad de la niñez relativamente más alta que la infantil, comparada con la "estándar general".

Los indicios que se tengan de la mortalidad que se desea expresar a través de un modelo, darán las pautas de cuál estándar puede ser el más adecuado. Mientras en Naciones Unidas se tenía una única opción, en Coale y Demeny 4 opciones, el sistema de Brass permite infinitas opciones y, además, adapta el nivel y la forma a través de la influencia de  $\alpha$  y  $\beta$ .

La aplicación de esta técnica es muy ventajosa, por lo siguiente:

a) El sistema de Brass se resume en una única expresión muy sencilla, cosa que no ocurre usando las otras técnicas descritas anteriormente. El hecho de usar una fórmula matemática única facilita, fundamentalmente, el uso de computadores en los cálculos que sean necesarios. Además, fácilmente puede generarse

<sup>13/</sup> Los parámetros fueron estudiados exhaustivamente en el capítulo III.

un conjunto de tablas modelos de mortalidad como las de Naciones Unidas y Coale y Demeny. En los anexos del trabajo citado de Carrier y Hobcraft se encuentra un ejemplo de ello.

b) Teniendo ciertas orientaciones sobre la mortalidad por edades, con este sistema es posible respetar, en gran medida, los datos observados. El hecho de que exista esa flexibilidad dada por sus dos parámetros, asegura que no se esté forzando en demasía la propia realidad. En caso de no conocerse absolutamente nada de la mortalidad que se desea describir, siempre se está en condiciones de usar este sistema con la misma rigidez que el de Naciones Unidas, tomando  $\beta = 1$ .

c) Las ventajas anteriores se logran sin las complicaciones que introducen otros autores, no siempre con mucho éxito, tratando de mejorar el esfuerzo pionero de Naciones Unidas y el posterior de Coale y Demeny.

## V. USOS MAS IMPORTANTES

### 1. Objetivo de esta sección

No es posible enumerar taxativamente los usos que de la relación fundamental (6) planteada en este documento pueden hacerse. Podrán darse algunas ideas importantes al respecto, pero depende, fundamentalmente, de la imaginación y sentido común del usuario.

Una división práctica para describir algunas formas de utilizar los conceptos expuestos en los capítulos anteriores, es la siguiente:

- a) Para evaluación y ajuste de información ya conocida.
- b) Para la construcción de una tabla de mortalidad.
- c) Para proyecciones de mortalidad.
- d) Para la construcción de poblaciones estables.

Se expondrá brevemente cómo puede procederse en ciertos casos concretos. Interesando principalmente mostrar los múltiples usos de este sistema modelo, sin profundizar cada uno en particular.

## 2. Evaluación y ajuste de información ya conocida

Es posible que se tenga disponible cierta información sobre la mortalidad de un área determinada, pero que, debido a la fuente que las proporciona, haya irregularidades que convenga corregir.

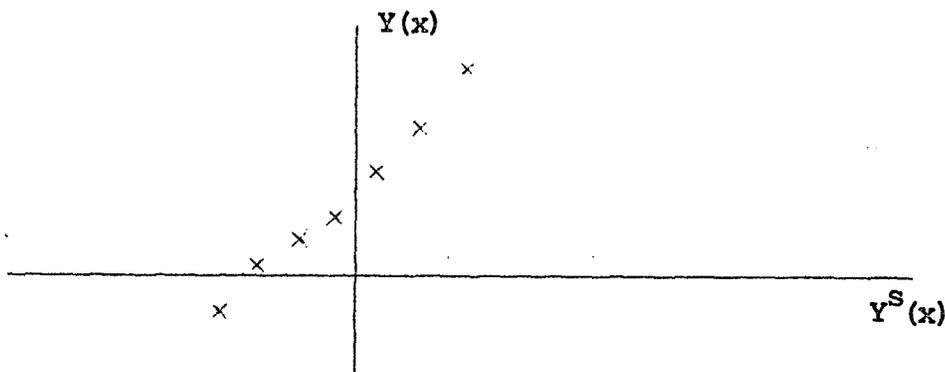
Se puede plantear el caso de que la información con que se cuenta es la función de supervivencia y se desea ajustar para eliminar desviaciones y sesgos que pudieran afectarla.

De acuerdo con la fórmula (6) la relación que existiría entre estos  $l_x$  observados y un  $l_x^S$  (estándar) teórico sería, aproximadamente, la siguiente:

$$Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x)$$

siendo  $Y(x)$  el logito de  $(1-l_x)$  y  $Y^S(x)$  el logito de  $(1-l_x^S)$ .

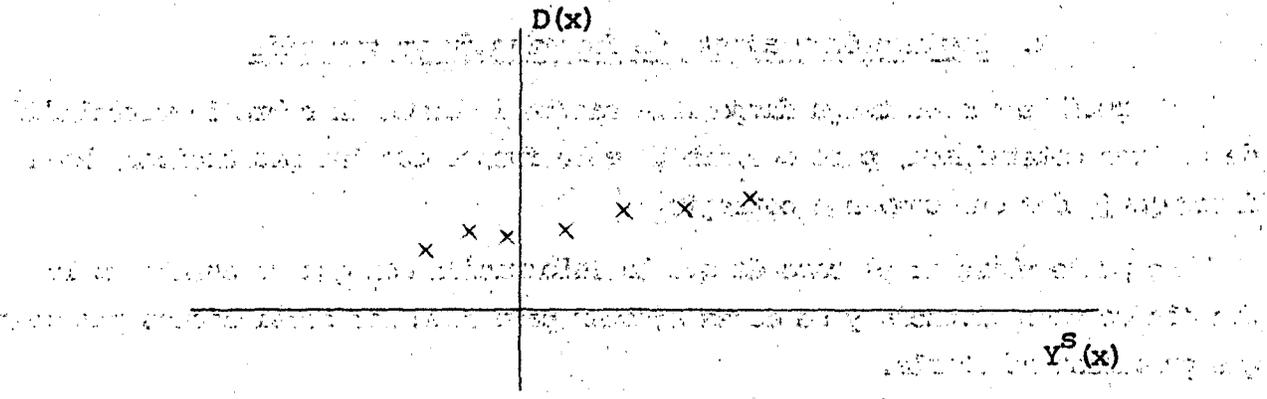
En un gráfico en que se ubique  $Y(x)$  en la ordenada y  $Y^S(x)$  en la abscisa, se esperaría que los puntos se situaran alrededor de una línea recta:



En lugar de  $Y(x)$  en la ordenada, puede ser conveniente trabajar con  $D(x) = Y(x) - Y^S(x)$  y los puntos también deberían comportarse en esta forma, pues

$$D(x) = Y(x) - Y^S(x) = \alpha + (\beta - 1) Y^S(x)$$

La ordenada en el origen [ $Y^S(x) = 0$ ] es la misma ( $\alpha$ ), pero el coeficiente angular, en lugar de estar en torno a 1, estaría alrededor de 0. Esto último hace que se puedan ver con más claridad las variaciones, al tratarse de una alineación casi paralela al eje horizontal:



Luego de un estudio de las desviaciones que se producen en los puntos, se hace necesario realizar el ajuste que permita hallar los valores estimados de los parámetros.

Se puede usar cualquiera de las técnicas que existen en la materia. Brass recomienda un método que consiste en calcular los siguientes valores:

$$\bar{Y}_1^S(x) = \text{Promedio de la primera mitad de los valores de } Y^S(x).$$

$$\bar{Y}_2^S(x) = \text{Promedio de la segunda mitad de los valores de } Y^S(x).$$

$$\bar{D}_1(x) = \text{Promedio de la primera mitad de los valores de } D(x).$$

$$\bar{D}_2(x) = \text{Promedio de la segunda mitad de los valores de } D(x).$$

y con ellos se deduce el coeficiente angular:

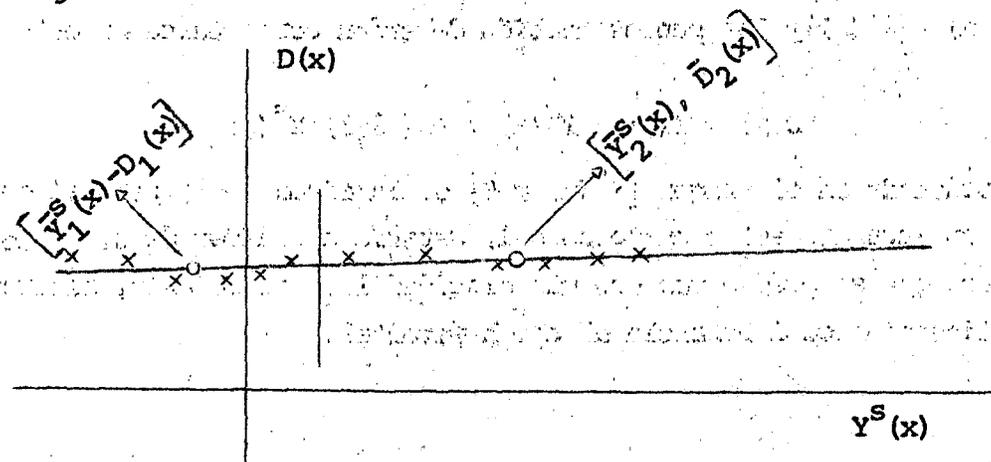
$$\widehat{(\beta-1)} = \frac{\bar{D}_2(x) - \bar{D}_1(x)}{\bar{Y}_2^S(x) - \bar{Y}_1^S(x)}$$

y  
o

$$\hat{\alpha} \text{ se despeja de } \bar{D}_2(x) = \hat{\alpha} + \widehat{(\beta-1)} \bar{Y}_2^S(x)$$

$$\bar{D}_1(x) = \hat{\alpha} + \widehat{(\beta-1)} \bar{Y}_1^S(x)$$

Ilustrado gráficamente:



De aquí se obtiene, entonces,  $\hat{Y}(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Y^S(x)$  y como se conoce  $Y^S(x)$  para las distintas edades, se pueden obtener  $\hat{Y}(x)$  ajustados y a través de la relación  $Y(x) = 1/2 \ln \frac{1-l_x}{l_x}$  los valores de  $l_x$  ajustados.

Lo fundamental es tener buen criterio en la selección de la estándar, en el análisis crítico de los puntos graficados y en el criterio de ajuste. En el citado documento del seminario dirigido por Brass en Costa Rica, Sesión 6, se pueden encontrar más elementos sobre esto.

Aun partiendo de algunos valores aislados de  $l_x$ , es posible, a través de este procedimiento, reproducir la función de supervivencia ajustada para todo el tramo de edades. Se puede usar la relación como forma de interpolación para lograr partiendo de una tabla de mortalidad abreviada completa. Para ello, solamente se necesitaría contar con una tabla estándar completa, luego de hallar  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  todo se resumiría a pasar de  $Y^S(x)$  a  $\hat{Y}(x)$  para cada edad individual.

### 3. Construcción de una tabla de mortalidad

La idea central del sistema de Brass está en no adjudicar rígidamente un modelo como representativo de la realidad, sino que se busca respetar al máximo los datos observados, la información disponible y, a partir de ella, elaborar una tabla de mortalidad. Nos presenta un método para el caso de contar con un único censo y otro para cuando se tiene información de dos censos.

a) Caso de un solo censo (Tabla de mortalidad femenina).<sup>14/</sup>

Se requiere información sobre mortalidad infantil y juvenil, por una parte y mortalidad adulta por otra, para luego formar la tabla en todo el tramo de edades.

14/ Nordio, Raúl, Belén (Argentina): Aplicación del método de Brass a la estimación del nivel de la mortalidad, CELADE, Inédito, 1971.

Hochsztajn, B. y López, A., Paraguay: Evaluación de nuevas preguntas censales destinadas a medir niveles de fecundidad y mortalidad, (Censo Experimental de Ipacará, 1971), CELADE, Inédito.

Farnós, Alfonso, Guatemala: Censo Experimental de 1970. Aplicación de las técnicas de Brass para estimar fecundidad y mortalidad. CELADE, Inédito.

Para las primeras edades, se debe recurrir a las preguntas censales de "Número de hijos nacidos vivos" y "Número de hijos sobrevivientes", lo que permite calcular, en forma confiable, la función de sobrevivientes ( $l_x$ ) para las edades 2, 3 y 5.<sup>15/</sup>

La mortalidad adulta se obtendría de la información de "madres vivas" y sería a través de las probabilidades especiales de supervivencia, como, por ejemplo,  $l_{35/127,5}$ ,  $l_{40/127,5}$ ,  $l_{45/127,5}$ ,  $l_{50/127,5}$ , etc.<sup>16/</sup>

En definitiva, se tiene el problema de construir una tabla de mortalidad femenina partiendo de la siguiente información:

$l_2$

$l_3$

$l_5$

⋮

⋮

$l_{35/127,5}$

$l_{40/127,5}$

$l_{45/127,5}$

$l_{50/127,5}$

⋮

⋮

Con ayuda del siguiente gráfico ilustrativo se tratará de explicar el funcionamiento del método.

Las edades 2, 3 y 5 están muy próximas y no se las puede considerar más que como un solo punto de apoyo. Es decir, de esa información de las primeras edades, no es posible definir los parámetros que las relacionarían con una

15/ Naciones Unidas, "Métodos para establecer mediciones demográficas fundamentales, a partir de datos incompletos" ST/SOA/A 42 Manual IV, Cap. VII.

Brass, W. y Coale, A.J., Métodos de Análisis y Estimación, CELADE, Serie D, N° 63, pág. 17.

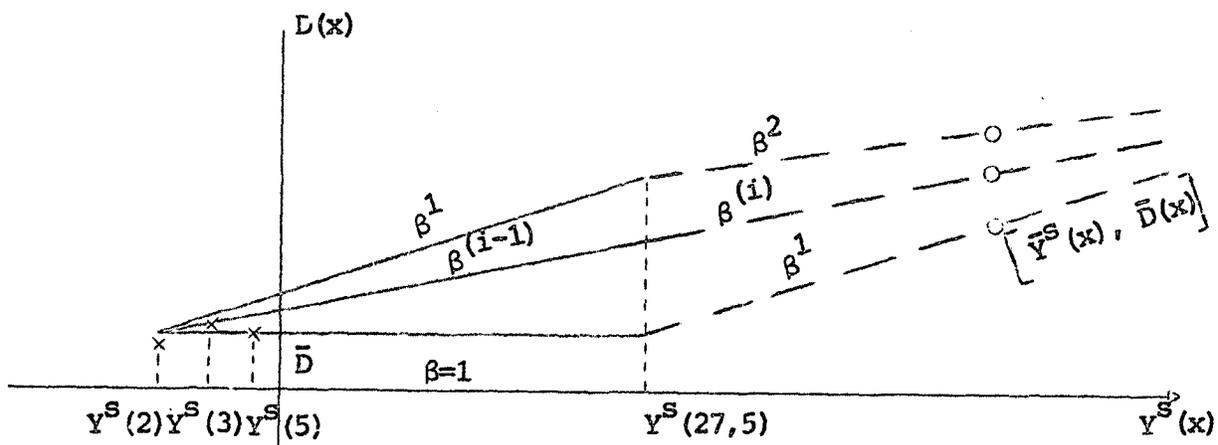
16/ Brass, W., Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (Fecundidad y Mortalidad), CELADE, DS N°9, sesión 6.

estándar. La idea de Brass es partir de esas edades con un  $\beta = 1$  hasta la edad 27,5, lo que permite encontrar un  $\hat{l}_{27,5}$  que, por supuesto, no es el verdadero.

Analíticamente:

$$\begin{aligned} D(2) &= Y(2) - Y^S(2) \\ D(3) &= Y(3) - Y^S(3) \\ D(5) &= Y(5) - Y^S(5) \\ \bar{D} &= \frac{D(2) + D(3) + D(5)}{3} \end{aligned}$$

Con el promedio de los tres valores, se ajustan los valores de esas edades, y se obtiene  $\bar{D} = \alpha$  ya que  $\beta = 1$ .



De esta forma:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(2) &= Y^S(2) + \bar{D} \\ \hat{Y}(3) &= Y^S(3) + \bar{D} \\ \hat{Y}(5) &= Y^S(5) + \bar{D} \end{aligned}$$

y la primera estimación de  $\hat{Y}(27,5) = Y^S(27,5) + \bar{D}$ , que permite calcular fácilmente  $\hat{l}_{27,5}$ .

A su vez, este  $\hat{l}_{27,5}$ , multiplicado por las probabilidades de supervivencia que brinda la información de orfandad, permite obtener  $\hat{l}_{35}$ ,  $\hat{l}_{40}$ ,  $\hat{l}_{45}$ ,  $\hat{l}_{50}$ , etc, estimados.

La tendencia de  $l_{35}$  en adelante puede expresarse en un  $\beta^1$  que representa el coeficiente angular de la recta de ajuste que va desde el punto  $[Y^S(27,5), D(27,5)]$  a  $[\bar{Y}^S(x), \bar{D}(x)]$ , que es el promedio de los puntos siguientes.

Con este  $\beta^1$  se inicia el procedimiento a partir de las edades 2, 3 y 5 para calcular un  $\hat{l}_{27,5}^1$  estimado, que conducirá a  $\hat{l}_{35}^1, \hat{l}_{40}^1, \hat{l}_{50}^1 \dots$  y, por consiguiente, a un  $\beta^{(2)}$ .

Esto se continúa en forma iterativa hasta encontrar un coeficiente angular  $\beta^{(i)}$  que sea igual o muy próximo a  $\beta^{(i-1)}$ .

La relación final será entonces:

$$Y^{(i)}(x) = \alpha^{(i)} + \beta^{(i)} Y^S(x)$$

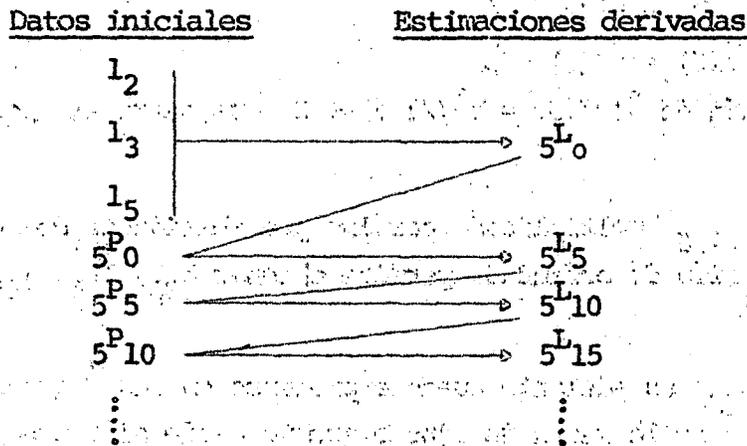
y a partir de ella se calculan todas las funciones de la tabla de mortalidad femenina.

b) Caso de dos censos. 17/

La mortalidad infantil y juvenil obtenida a partir de "número de hijos nacidos vivos" y "número de hijos sobrevivientes" que suministra el censo más reciente, se combina con las relaciones de supervivencia intercensal que expresan la mortalidad adulta.

Las situaciones pueden ser muy variadas si consideramos los años que separan a ambos censos, pero aquí se ilustrará el caso más sencillo de un período intercensal de cinco años, y se puede ampliar el estudio de los otros casos en la publicación mencionada del seminario de San José, Sesión 7.

Se tienen, entonces, los datos iniciales que figuran en la primera columna del cuadro siguiente:



17/ Soto, Z., Chile: 1960-1970: Mortalidad intercensal, Una aplicación de la metodología de Brass, CELADE, Inédito.

Con los  $l_x$  de las primeras edades, se logra un valor estimado de  ${}_5L_0$  y luego, multiplicado por  ${}_5P_0$ , se obtiene la estimación de  ${}_5L_5$  y así sigue la cadena que se muestra en el cuadro anterior.

Ahora, para ajustar estos valores, se procede a pasar de  ${}_5L_x$  a valores de  $l_x$  de la siguiente manera:

$$1/5 {}_5L_5 = l_{7,5}$$

$$1/5 {}_5L_{10} = l_{12,5}$$

$$\vdots$$

$$1/5 {}_5L_x = l_{x+2,5}$$

$$\vdots$$

Los mismos valores se toman para la tabla de mortalidad estándar, y se plantea la ecuación:

$$D(x) = \text{logito } \frac{1}{5} {}_5L_x - \text{logito } \frac{1}{5} {}_5L_x^S = \alpha + (\beta - 1) \text{logito } \frac{1}{5} {}_5L_x^S \text{ o sea}$$

$$D(x) = \alpha + (\beta - 1) \text{logito } l_{x+2,5}^S$$

Luego, el ajuste se realiza por el procedimiento indicado en el punto 2 de este capítulo.

Si no se contara con la información de  ${}_5L_0$  en la forma antes mencionada, podría buscarse un valor razonable, estudiar la tendencia del gráfico en el momento del ajuste y modificarlo hasta lograr la linealidad deseada.

#### 4. Proyecciones de la mortalidad

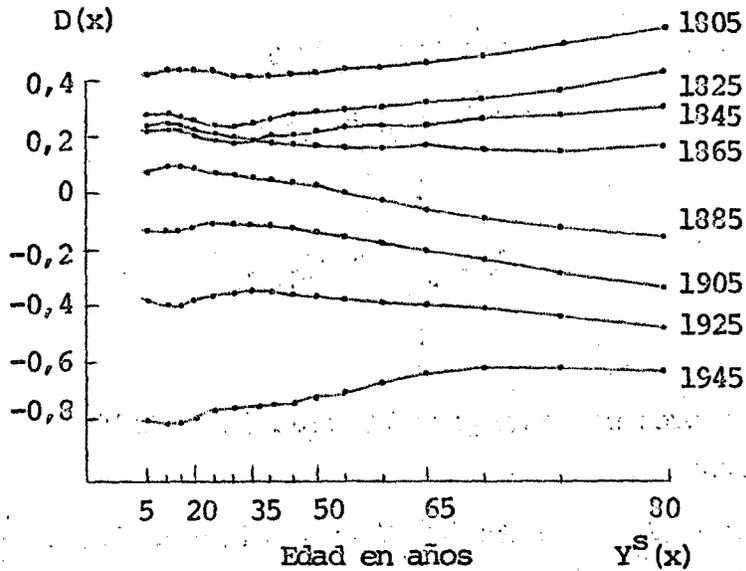
El método consta del estudio de la tendencia pasada de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que surgen de relacionar las tablas de mortalidad pertenecientes al pasado, con una estándar. Esta relación se manifiesta tal como se aprecia en el gráfico 8, construido con datos de Suecia para diversos períodos.

La base de esto está en lo que se estudió en el capítulo III sobre el significado de los parámetros. Mientras  $\alpha$  muestra las variaciones en los niveles de la mortalidad,  $\beta$  refleja los cambios que se han ido produciendo en el patrón

Gráfico 8

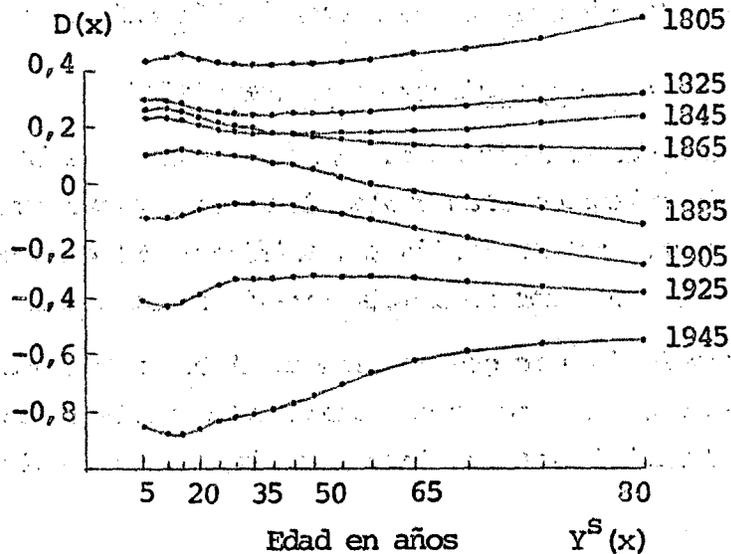
DIFERENCIAS DEL ESTANDAR ESPECIAL EN LOS SOBREVIVIENTES POR EDADES EN ESCALA LOGITO, POR PERIODOS DE TIEMPO

Suecia: Hombres



DIFERENCIAS DEL ESTANDAR ESPECIAL EN LOS SOBREVIVIENTES POR EDADES EN ESCALA LOGITO, POR PERIODOS DE TIEMPO

Suecia: Mujeres



Fuente: Brass, op.cit.

por edades. De ahí que, con el tiempo, el valor del primero sea mucho más sensible, mientras que el segundo varía alrededor de su valor central 1, que da origen a la serie de líneas casi horizontales que describe el gráfico.

Lo anteriormente expuesto permite que para realizar la proyección en determinadas ocasiones sea conveniente considerar  $\beta = 1$  y trabajar solamente con un parámetro. Si bien se pueden perder variaciones importantes del patrón de la mortalidad específica, es quizás una forma de eliminar ciertas desviaciones erróneas.<sup>18/</sup>

### 5. Construcción de poblaciones estables

Una población es estable cuando cumple con las condiciones de ser cerrada (no afectada por migraciones exteriores) y de tener niveles de mortalidad y fecundidad por edad constantes en el tiempo. Estas hipótesis conducen a una estructura por edades de la población, invariable, y que se representa por la siguiente expresión:<sup>19/</sup>

$$C(x) = b e^{-rx} p(x)$$

siendo  $b$  = tasa bruta de natalidad

$r$  = tasa intrínseca de crecimiento

$p(x) = \frac{l_x}{l_0}$  probabilidad de sobrevivir del nacimiento a la edad exacta  $x$ .

Para su construcción se necesita, entre otras cosas, conocer la mortalidad a través de la función  $l_x$ . Cualquier juego de tablas de mortalidad generaría un juego de poblaciones estables. Esto lleva a plantearse la interrogante: ¿Qué ventaja puede tener construir poblaciones estables a partir del sistema de tablas de mortalidad ideado por Brass?

Carrier y Hobcraft<sup>20/</sup> dan respuesta a esto elaborando modelos de poblaciones estables de dos y tres parámetros. Cuando se construye una población estable se toma como dato de entrada la fecundidad por edades (primer parámetro) y la mortalidad por edades (segundo parámetro). Ahora sucede que, en el caso particular

<sup>18/</sup> Brass, W., Método de generaciones para proyectar tasas de mortalidad, CELADE, DS N°6, 1971.

<sup>19/</sup> Naciones Unidas, "El concepto de población estable", op.cit.

<sup>20/</sup> Carrier y Hobcraft, op.cit.

de utilizar el sistema modelo de Brass, la mortalidad depende de dos parámetros, por lo que, de hecho, se tienen poblaciones estables de tres dimensiones, una dada por la fecundidad y dos por la mortalidad ( $\alpha$  y  $\beta$ ).

Así como antes se comentaba de la flexibilidad que se le daba a los modelos de tablas de mortalidad al incluir un parámetro más, en este caso cabe hacer las mismas conclusiones. Si se deseara un modelo más rígido, solamente se tiene que tomar  $\beta = 1$  y se estaría en los modelos clásicos de poblaciones estables de dos parámetros.

Carrier y Hobcraft<sup>21/</sup> encuentran aspectos interesantes del uso que se puede hacer de estas poblaciones, lo que no es materia de este documento.

21/ Carrier y Hobcraft, op.cit., capítulo IV.

## A N E X O .

## FUNCIONES HIPERBOLICAS

a) Definiciones Analíticas

El seno y el coseno hiperbólico se definen por las siguientes relaciones:

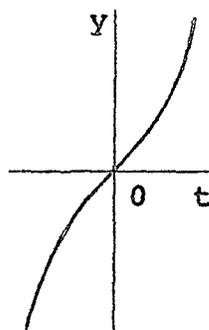
$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

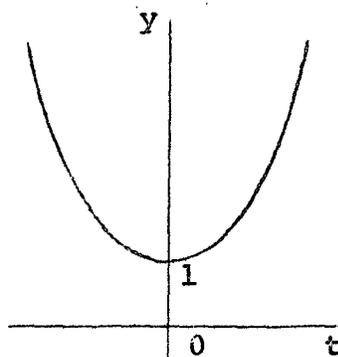
Para  $-\infty < t < +\infty$  se tiene que:  $-\infty < \sinh t < +\infty$

$+1 < \cosh t < +\infty$

Su representación gráfica es la siguiente:



$y = \sinh t$



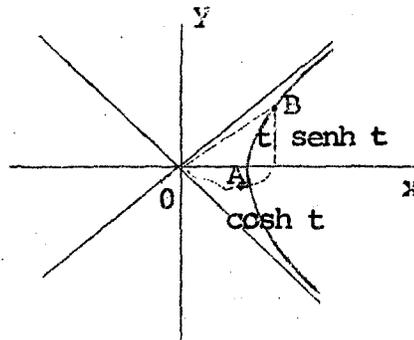
$x = \cosh t$

b) Interpretación geométrica

Así como las funciones trigonométricas se definen a partir de la circunferencia de radio igual a la unidad, en este caso se parte de un punto de la hipérbola equilátera, con parámetro igual a 1:

$$x^2 - y^2 = 1$$

Siendo B un punto de la hipérbola y  $t$  la medida del arco  $\widehat{AB}$ , las coordenadas de B definen las funciones

$$y = \sinh t \quad x = \cosh t$$


Si se hace la diferencia de los cuadrados de estas funciones que se expresaron analíticamente más arriba, se obtiene:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

que es concordante con la hipérbola equilátera de parámetro igual a la unidad.

### c) Otras funciones hiperbólicas

La función tangente hiperbólica se define como:

$$\operatorname{tgh} t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

Luego, las funciones recíprocas de las ya mencionadas serían:

$$\operatorname{cosech} t = 1/\sinh t \quad (\text{cosecante hiperbólica})$$

$$\operatorname{sech} t = 1/\cosh t \quad (\text{secante hiperbólica})$$

$$\operatorname{cotgh} t = 1/\operatorname{tgh} t \quad (\text{cotangente hiperbólica})$$

## BIBLIOGRAFIA

1. Brass, W., Sobre la escala de la mortalidad, CELADE, Serie DS, N°7, San José, Costa Rica, 1971.
2. Brass, W., Métodos de análisis y estimación, CELADE, Serie D, N°63, Santiago, 1970.
3. Brass, W., Método de generaciones para proyectar tasas de mortalidad, CELADE, Serie DS, N°6, San José, Costa Rica, 1971.
4. Brass, W., Ajuste e Interpretación de datos demográficos, CELADE, Serie DS, N°8, San José, Costa Rica, 1971.
5. Brass, W., Seminario sobre Métodos para medir Variables Demográficas (Fecundidad y Mortalidad), CELADE, Serie DS, N°9, San José, Costa Rica, 1971.
6. Berkson, J., "A Statistically Precise and Relatively Simple Method of Estimating the Bioassay with Quantal Response, Based on the Logistic Function". American Statistical Association Journal, septiembre, 1953.
7. Carrier y Hobcraft, Demographic Estimation for Developing Societies, Population Investigation Committee, Londres, 1971.
8. Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad. Tablas modelo de mortalidad para países insuficientemente desarrollados, ST/SOA/Serie A, 22.
9. Naciones Unidas, Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, ST/SOA/Serie A, 25, Manual III.
10. Naciones Unidas, Métodos para establecer mediciones demográficas fundamentales a partir de datos incompletos, ST/SOA/Serie A, 42, Manual IV.
11. Naciones Unidas, El concepto de población estable. Aplicación al estudio de la población de países que no tienen buenas estadísticas demográficas, ST/SOA/Serie A, 39.
12. Naciones Unidas, "Análisis factorial de las tasas de mortalidad por edad y por sexo", Boletín de Población N°6, ST/SOA/Serie N 6, pág. 153, 1962.
13. Coale y Demeny, Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, 1966.
14. Demeny, P., Methods of Demographic Estimation for Statistically Underdeveloped Areas. East, West Center, Honolulu, 1971.
15. Lederman y Breas, "Les dimensions de la mortalité", Population, 14 année octobre-diciembre, 1959, N°4.
16. Gabriel y Ronen, "Estimates of Mortality from Infant Mortality Rates" Population Studies, vol. XII N°2, noviembre, 1958.
17. Farnós, Alfonso, Guatemala: Censo experimental de 1970. Aplicación de las técnicas del Profesor W. Brass para estimar fecundidad y mortalidad, CELADE, Inédito.
18. Hochsztajn, B. y López, A., Paraguay: Evaluación de nuevas preguntas censales destinadas a medir niveles de fecundidad y mortalidad, Censo Experimental de Ypacaraí, 1971, CELADE, Inédito.

19. Nordio, Raúl, Belén (Argentina): Aplicación del método de Brass a la estimación del nivel de la mortalidad, CELADE, Inédito.
20. Soto, Zaida, Chile: 1960-1970: Mortalidad intercensal. Una aplicación de la metodología de Brass, CELADE, Inédito.
21. Debasa, Jorge, Chile: Aplicación del método de transformación logito propuesto por el Profesor Brass, para analizar la evolución y proyección de la mortalidad, CELADE, Inédito.
22. Goursat, E., A Course in Mathematical Analysis, vol. I, Dover Publications Inc., Nueva York, pág. 29.
23. Rinehart, Mathematical Tables, Formulas and Curves, págs. 206, 221 y 265.

1  
2  
3

4  
5  
6



**CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA**

**CELADE: J.M. Infante 9. Casilla 91. Teléfono 257806**

**Santiago (Chile)**

**CELADE: Ciudad Universitaria Rodrigo Facio**

**Apartado Postal 5249**

**San José (Costa Rica)**