CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

• con aplicaciones a la demografía

ANTONIO
ORTEGA G.

CENTRO LATINOAMERICANO DE
DEMOGRAFIA CELADE

Serie BS N° 4

San José, Costa Rica
1973

03209.00=No pedido DOCPAL(NACCESO) 1973=Fecha publ.

ORTEGA, Antonio (Au)
Calculo diferencial e integral, con aplicaciones a la demografia.
1973; Pags:163
Editorial: CELADE. San Jose CR
Serie BS 4
Idioma:Es Distr:General Impresion:Mimeo

Pais/region principal:ZZ Paises tratados:ZZ
Descriptores:<MATEMATICA*> <ENSEÑANZA*>
Categ. Revista:<POBL:PROF>
Fechas datos demogr:9999-9999 No. de Ref= 14

(Inf. interna para DOCPAL: ISIS=07886 LS -m Dfd)

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

con aplicaciones a la demografía

ANTONIO
ORTEGA G.

Serie BS N° 4

San José, Costa Rica
1973

I N D I C E

NOTA PRELIMINAR

Los presentes apuntes han sido preparados para facilitar el desarrollo de las clases de "Cálculo", correspondientes al Curso Básico de Demografía de CELADE. El objetivo de esta asignatura es repasar los conceptos de funciones, derivadas, integrales, y temas relacionados, los cuales constituyen herramientas básicas en demografía.

En el análisis demográfico se recurre con frecuencia a fórmulas matemáticas, para establecer relaciones simplificadas entre variables demográficas, y hacer estimaciones. Así por ejemplo, a veces se utilizan fórmulas exponenciales o parabólicas para estimar el tamaño de la población total de un país o región, en fechas vecinas a la de un censo, en cuyo momento el número de habitantes es conocido. Del mismo modo se emplean fórmulas para pasar de las tasas centrales de mortalidad a las probabilidades de morir de una tabla de vida, para proyectar tasas de mortalidad por edades, etc. Frente a este tipo de fórmulas, el "Cálculo" permite conocer la forma exacta de estas relaciones e interpretar mejor los resultados demográficos que se derivan.

Por otra parte, se ha desarrollado como una rama de la demografía, la denominada demografía matemática o poblaciones teóricas, la cual, partiendo de ciertas hipótesis precisas, permite obtener las relaciones necesarias que vinculan las diversas variables demográficas. Los modelos pueden no ser realistas en algunos casos, pero permiten obtener respuestas a preguntas tales como: cuál es la relación existente entre la tasa de crecimiento y la distribución por edad de la población; o entre la tasa de crecimiento y la tasa neta de reproducción; o cuál es el efecto de una disminución de la fecundidad de determinados grupos de edades. En este campo de la demografía se utilizan extensamente las nociones matemáticas de derivadas, integrales y otras.

Esta asignatura, ubicada al principio del Curso, resulta introductoria al estudio de estos temas. Se incluyen cinco capítulos: 1) Funciones y límites, 2) La derivada y su interpretación 3) Máximos y mínimos, 4) Integrales definidas e indefinidas, y 5) El concepto de serie, fórmulas de Taylor y desarrollo en serie de funciones. En cada capítulo se incluyen algunas relaciones entre variables demográficas. Han quedado fuera de este programa algunos temas de interés en demografía, como por ejemplo el estudio de funciones de dos o más variables.

Finalmente, algunas palabras sobre la evolución histórica del cálculo infinitesimal. Señalan Courant y Robbins "que con una simplificación excesiva de los hechos se atribuye a veces a dos personas, Newton y Leibniz, la invención del cálculo infinitesimal (a fines del siglo XVII); en realidad es el producto de una larga evolución que ni iniciaron ni dieron fin (esos autores), pero en la cual desempeñaron un papel decisivo" (Qué es la matemática, Ed. Aguilar, págs. 408-410). Las primeras investigaciones sobre esta materia se remontan a épocas tan lejanas como el siglo III A.C., cuando Arquímedes trató de resolver el problema de encontrar la superficie de áreas encerradas por curvas. Durante el siglo XVIII, o sea en una época relativamente reciente, todavía el análisis matemático se hacía en forma completamente intuitiva y sin mayor rigor. Pero después de la revolución francesa, cuando aumentó notablemente el número de personas que participaban en la actividad científica, se hizo una completa revisión crítica que permitió la formulación matemática precisa de estos conceptos.

Capítulo I

FUNCIONES Y LIMITES

CONSTANTES, VARIABLES Y PARAMETROS

Es conveniente aclarar en primer lugar las diferencias que existen entre estos tres conceptos que aparecen en casi todos los problemas.

Se denomina <u>constante</u> a toda magnitud que mantiene siempre el mismo valor. Son constantes por ejemplo, los números 2, $\sqrt{7}$, π, etc.

Por el contrario se denomina <u>variable</u> a una magnitud susceptible de asumir distintos valores dentro de un intervalo o campo de variación.

Por ejemplo la edad <u>x</u> de una persona es una variable que puede tomar cualquier valor desde 0 hasta ω (omega), que es la máxima edad que en teoría la persona puede alcanzar.

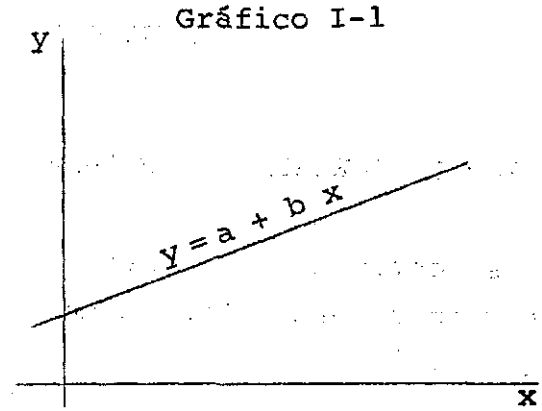
Análogamente el mes <u>m</u> de un año es una variable. En este caso el campo de variación estaría constituido por los meses enero, febrero, etc., que pueden representarse numéricamente por 1, 2, 3, ..., 12.

En general las variables suelen indicarse con las últimas letras del alfabeto: x, y, z, t, u, ... Cuando a una variable se le coloca un subíndice, por ejemplo x_0, se está individualizando un valor particular de la misma.

Parámetros, son magnitudes cuyo valor permanece constante en el curso de un proceso de análisis, pero que en otro problema puede cambiar de valor. Un ejemplo clásico es la ecuación de la recta

$$y = a + b\,x$$

Gráfico I-1



donde la ordenada en el origen a y la pendiente b son parámetros. Más adelante se verán varios ejemplos de parámetros demográficos.

VARIABLES DISCRETAS Y CONTINUAS

Una variable se denomina continua cuando puede tomar cualquier valor entre dos valores dados. Si no es así, se llama variable discreta (o discontinua).

Ejemplos:

1. La variable tiempo t, puede tomar el valor 3, o bien 3.2, o también 3.114; es por lo tanto una variable continua.
2. El número de hijos n de una familia puede ser 0, 1, 2,..., pero no puede ser 2.3 o 3.84; esta es una variable discreta.

INTERVALOS

Dados dos números a y b, tales que $a < b$, se denomina intervalo al conjunto de todos los números x comprendidos entre a y b. Los valores a y b se denominan extremos del intervalo y pueden estar incluidos o no en él.

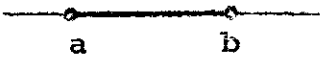
<u>Intervalo abierto</u> es aquel que no contiene a sus valores extremos. Corrientemente se lo representa

$a < x < b$; o también (a, b)

Al hacer la representación gráfica resulta cómodo en algunos casos, hacer un círculo pequeño sin rellenar para indicar que los extremos no están incluidos, o lleno si el punto extremo se incluye en el intervalo.

El intervalo abierto junto con sus extremos <u>a</u> y <u>b</u>, recibe el nombre de <u>intervalo cerrado</u>, que se simboliza

$a \leqslant x \leqslant b$; o bien $[a, b]$



<u>Intervalo infinito</u> es aquel en que uno o sus dos valores extremos no están limitados. Por ejemplo el conjunto de todos los valores de <u>x</u> mayores que <u>a</u>; se simboliza

$x > a$; o $a < x < +\infty$; o $(a, +\infty)$

La expresión anterior $+\infty$ (más infinito) no es un número, sino un símbolo que representa un número tan grande como se desee.

Cuando se presenta información demográfica clasificada por grupos de edad, por ejemplo la información recogida en un censo, los intervalos de edades suelen presentarse de dos formas distintas. La más generalizada es

Grupos de edades	Población
0 - 4	...
5 - 9	...
10 -14	...
.....	...

En este caso los intervalos se refieren a los años de edad cumplidos por la persona. La variable $\underline{x}$ (edad cumplida) sólo puede tomar valores discretos: 0, 1, 2, 3, ... Los intervalos de edad son cerrados: $0 \leqslant x \leqslant 4$, $5 \leqslant x \leqslant 9$, ..., donde $\underline{x}$ es la edad cumplida.

Otra forma menos empleada es la siguiente

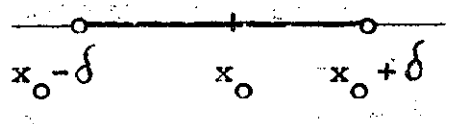
Grupos de edades	Población
0 - 5	...
5 -10	...
10 -15	...
.....	...

Aquí los intervalos se refieren a edades exactas. La variable $\underline{x}$ (edad exacta) es continua. Los intervalos de edades serían: $0 \leqslant x < 5$, $5 \leqslant x < 10$, ..., los cuales se denominan semicerrados por la izquierda (o semiabiertos por la derecha).

ENTORNO

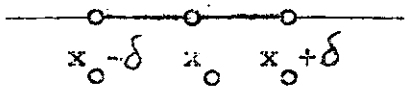
Un intervalo muy útil en teoría es aquel formado por todos los valores de $\underline{x}$ cuya distancia a un valor arbitrario x_o es menor que un número positivo, que se acostumbra simbolizar por δ, generalmente pequeño. Este intervalo se denomina <u>entorno</u> del punto x_o, el cual se escribe

$$|x-x_o| < \delta \quad , \quad \delta > 0 \text{ ; o lo que es igual } \quad x_o-\delta < x < x_o+\delta$$



Algunas veces, especialmente cuando se trabaja con el concepto de límite, conviene excluir del intervalo al punto x_o, en cuyo caso se le denomina <u>entorno reducido</u> de x_o ; se escribe

$$0 < |x - x_o| < \delta \ , \quad \delta < 0 \ ; \text{ o sea } x_o - \delta < x < x_o \text{ y } x_o < x < x_o + \delta$$



La condición $0 < |x - x_o|$ que se agrega en este caso, implica que x no puede tomar el valor x_o .

EL CONCEPTO DE FUNCION

En la mayoría de los casos los valores que puede tomar una variable no son arbitrarios, sino que están asociados con los de otra. Así por ejemplo en la fórmula:

$$N(t) = 100 \ (1 + 0.03)^t$$

donde N(t) es la población total y t el tiempo en años, a cada valor de t le corresponde uno diferente de N. Del mismo modo, el número de sobrevivientes $l(x)$, de una generación de $l(o)=100\ 000$ personas, está asociada con la edad x de las personas. Para expresar este tipo de asociación entre variables se usa el nombre técnico de función.

Definición. Una variable y es función de otra variable x cuando a cada valor de x perteneciente a su campo de variación le corresponde un valor de y.

La variable x que puede tomar valores arbitrarios se denomina variable independiente, mientras que y cuyo valor queda fijado al asignar un valor a x se denomina variable dependiente o función.

La relación entre variable independiente y función se expresa generalmente mediante la notación

$$y = f(x), \text{ donde}$$

x = variable independiente

y = variable dependiente

f = característica que representa la ley de correspondencia.

El símbolo f(x) se lee "f de x". Con el propósito de distinguir diferentes funciones se utilizan otras letras, tales como g(x), h(x), etc., o también subíndices como $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ...

Se acostumbra designar la variable independiente entre paréntesis cuando se está operando en el campo continuo; por ejemplo: N(t); y como subíndice en el campo discreto: N_t.

Para tener una idea de la forma como varía una función para diferentes valores de la variable independiente, es útil dibujar el comportamiento gráfico de la misma.

La gráfica de una función cualquiera y=f(x) se compone de todos los puntos del plano cuyas coordenadas x, y cumplen la condición y=f(x).

En algunos textos se define y como función de x, cuando a cada valor de x le corresponde uno o más valores de y. Cuando le corresponde un valor de x la función se denomina uniforme y si le corresponde más de uno la función es multiforme. Sin embargo en la actualidad se prefiere descomponer las funciones multiformes en dos o más funciones uniformes. Por ejemplo en la ecuación $y^2 - x = 0$, despejando y resulta $y = \sqrt{x}$; a cada valor de x le corresponden dos de y. Aquí se pueden definir dos funciones: $y = +\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$.

Ejemplo de funciones

La función

$$p(x) = 1 - 0.01\,x$$

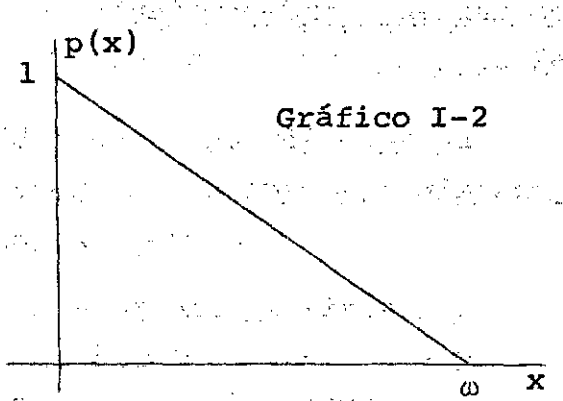


Gráfico I-2

representa la probabilidad que tiene una persona al momento de su nacimiento de llegar con vida hasta la edad exacta $\underline{x}$, en el caso particular de que la mortalidad varía en forma lineal con la edad.

El menor valor que puede tomar la edad $\underline{x}$ es cero, en cuyo caso la función vale

$$p(0) = 1 - 0.01\ (0) = 1$$

Busquemos el valor de $x = \omega$, en el cual la probabilidad de sobrevivir es cero

$$p(x) = 1 - 0.01\ x = 0$$

Despejando x resulta

$$x = 100$$

Por lo tanto, el campo de variación de $\underline{x}$ está constituido por el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \omega$; ($\omega = 100$), para cuyos valores la función p(x) varía desde 1 hasta 0.

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES

Se atribuye al matemático alemán G.W. Leibniz (1646-1716) el primer uso de la palabra "función" para expresar la correspondencia entre variables. Durante el siglo XVIII el concepto de relación funcional estaba más o menos identificado con la existencia de una fórmula matemática que expresara la naturaleza exacta de esa relación. Posteriormente este concepto se ha venido generalizando, y en la actualidad comprende tanto las funciones expresables analíticamente, como las empíricas y las arbitrarias.

Funciones
- Expresables analítica - mente
  - Algebraicas
  - Trascendentes
- Empíricas
- Arbitrarias

Las funciones <u>expresables analíticamente</u> son aquellas en que la variable independiente y la función están relacionadas mediante una ley matemática, como por ejemplo

$$y = \ln x \quad ; \quad N(t) = 100 + 5t + 9t^2$$

Se clasifican en algebraicas y trascendentes.

Las <u>funciones algebraicas</u> son las que resultan de efectuar sobre la variable independiente las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y radicación en un número finito de veces. Por ejemplo

$$y = 2x+3 \quad ; \quad y = 3/x \qquad x^2-y^2 = 2$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} - 2x \quad ; \quad y = \frac{1-x}{x^2+x-7} \quad ; \quad rx-2y = 0$$

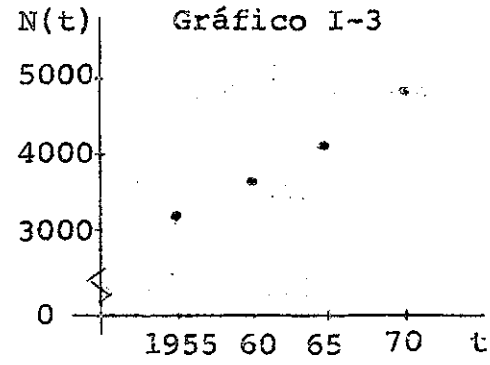
Las <u>funciones trascendentes</u> son todas las funciones no algebraicas que pueden expresarse por una relación analítica o matemática. Entre las funciones trascendentes se encuentran las exponenciales, logarítmicas, hiperbólicas, etc. Ejemplos:

$$y = 3x + \operatorname{sen} x \quad ; \quad y = a^x \quad ; \quad y = x^{\sqrt{2}}$$

$$y = \ln (x+1) \quad ; \quad y = \operatorname{tgh} x \quad ; \quad t = e^{ut} \cos vt$$

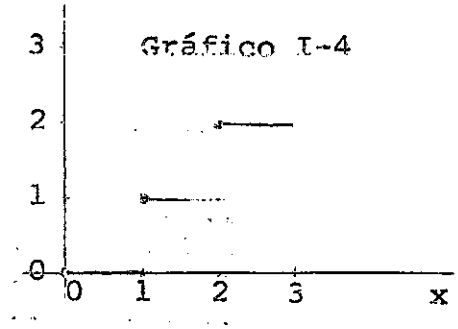
Las <u>funciones empíricas</u> son aquellas en que se conoce el valor de la función solo para determinados valores de la variable independiente. No existe una ley matemática que ligue las variables, sino que la correspondencia viene expresada en forma de una tabla de valores. Por ejemplo la población estimada para Bolivia en los años 1955, 60, 65 y 70 es la siguiente:

Año	Población (en miles)
1955	3 322
1960	3 696
1965	4 136
1970	4 658



Las <u>funciones arbitrarias</u> no presentan tampoco una ley matemática de correspondencia, sino que las variables están vinculadas por una ley arbitraria que las define, por convención. Por ejemplo, la función

$$f(x) \begin{cases} = 0, \text{ para } 0 \leq x < 1 \\ = 1, \text{ para } 1 \leq x < 2 \\ = 2, \text{ para } 2 \leq x < 3 \\ \text{etc.} \end{cases}$$



Esta función representa la edad cumplida de una persona; hasta que se llega al primer aniversario la edad cumplida es cero, hasta el segundo aniversario la edad cumplida es uno, etc..

De los tres tipos principales de funciones (analíticas, empíricas y arbitrarias), las más utilizadas son las dos primeras.

LIMITE DE UNA FUNCION

En lo que resta del capítulo se analiza el concepto de límite, el cual constituye una de las ideas básicas del cálculo diferencial e integral.

Sea la función

$$f(x) = x^2 + 1$$

Si en ella se da a x los valores de la sucesión

1.9 ; 1.99 ; 1.999 ; 1.9999 ; ...

o también de la sucesión

2.1 ; 2.01 ; 2.001 ; 2.0001 ; ...

a medida que x se va acercando a 2, la función se aproxima a 5, como puede verse en el cuadro siguiente

x	f(x)	x	f(x)
1.9	4.61	2.1	5.41
1.99	4.96	2.01	5.04
1.999	4.996	2.001	5.004
1.9999	4.9996	2.0001	5.0004
.....	.....	.....	.....

De acuerdo con esta tendencia inicial puede inferirse que, con tal de dar a la variable independiente un valor suficientemente próximo a 2, la función se acercará a 5 tanto como se desee. En estas condiciones se establece que "el límite de $(x^2 + 1)$ cuando x tiende a 2, es igual a 5", lo cual se simboliza:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$$

Si a la función $f(x) = x^2 + 1$ se le diera directamente el valor $x = 2$, se obtendría también

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

Sin embargo, cuando se dice que x tiende a 2 ($x \to 2$) implica que x es diferente de 2. Esta observación es importante porque hay muchas funciones que no están definidas en el punto para el cual se calcula su límite. Por ejemplo la función

$$f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$$

es válida para todo $x \neq 0$. No obstante, a medida que x tiende a cero por valores positivos o negativos, la función se puede aproximar a 2 tanto como se desee; por lo tanto aunque f(0) no existe,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = 2$$

En forma más general se dice que "una función $y=f(x)$ tiene por límite L, cuando x tiende a a, cuando la diferencia en valor absoluto entre la función y su límite puede hacerse tan pequeña como se desee, con tal de tomar x lo suficientemente próximo a a", lo cual se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

La definición anterior es incompleta en cierto sentido, ya que no es totalmente claro el significado de las frases: "puede hacerse tan pequeña como se desee" y "lo suficientemente próximo a a".

Reemplazando estas frases por expresiones matemáticas más precisas, se llega a la definición más generalizada de límite de una función, cuyo primer enunciado se atribuye a Cauchy alrededor de 1820. Es la siguiente:

"Una función $y=f(x)$ tiene por límite L al tender x hacia a, si para todo número positivo ε por pequeño que sea, puede encontrarse otro número positivo δ, tal que se verifica

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

para todo x del intervalo

$$0 < |x-a| < \delta \text{"}$$

Ejemplo: Utilizando la definición de límite demostrar que

$$\lim_{x \to 1} (2x+1) = 3$$

De acuerdo con la definición, el límite de 2x+1 cuando x tiende a 1, será igual a 3, si para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse otro $\delta > 0$, tal que

$$\text{(I-1)} \qquad |(2x+1) - 3| < \varepsilon$$

Para todo x que satisfaga la desigualdad

$$\text{(I-2)} \qquad 0 < |x - 1| < \delta$$

Partiendo de la relación (I-1), se tiene

$$|(2x+1) - 3| < \varepsilon$$
$$|2x-2| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < 2x-2 < \varepsilon$$
$$-\varepsilon/2 < x-1 < \varepsilon/2$$
$$|x-1| < \varepsilon/2$$

O sea que el límite es efectivamente 3, ya que cualquiera que sea ε, siempre podrá verificarse la relación (I-1) con solo tomar en la relación (I-2) $\delta = \varepsilon/2$.

El gráfico I-5 muestra el significado geométrico de ε y δ, y en él se ve que $f(x)=2x+1$ está comprendido entre $3+\varepsilon$ y $3-\varepsilon$ cuando x está entre $1-\delta$ y $1+\delta$.

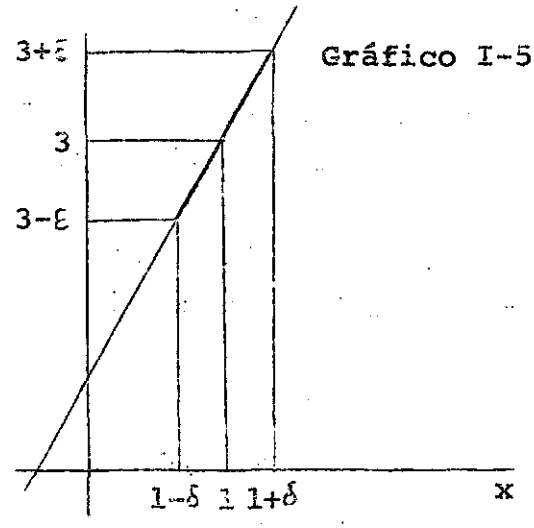


Gráfico I-5

LIMITES LATERALES

En la definición de límite dada, x tiende hacia a tanto por valores inferiores como superiores. Cuando x tiende a a por valores inferiores (lo que se simboliza $x \longrightarrow a^-$), el límite que se obtiene se denomina límite lateral izquierdo, el cual se escribe

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = L_i$$

En forma totalmente análoga, cuando se hace tender x hacia a por valores superiores ($x \longrightarrow a^+$) se obtiene el límite lateral derecho:

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = L_d$$

La existencia del límite de una función implica la del límite por la izquierda y la del límite por la derecha, y que ambos son iguales.

TEOREMAS SOBRE LIMITES

Para el cálculo de los límites de diversos tipos de funciones, son de gran utilidad los siguientes teoremas sobre límites.

En el enunciado de los teoremas se utilizarán las expresiones que se indican a continuación

k = constante

$g(x) = c$ = función constante

$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$

$\lim_{x \longrightarrow a} f_1(x) = L_1$

$\lim_{x \longrightarrow a} f_2(x) = L_2$

Teorema 1: El límite de una constante es igual a la constante misma

$$\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = c$$

Teorema 2: El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función

$$\lim_{x \longrightarrow a} k \; f(x) = k.L$$

Teorema 3: El límite de la suma algebraica de dos o más funciones es igual a la suma algebraica de los límites respectivos.

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right] = L_1 \pm L_2$$

Teorema 4: El límite de un producto de dos o más funciones es igual al producto de los límites

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \right] = L_1 \cdot L_2$$

Teorema 5: El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del divisor no sea cero.

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ si } L_2 \neq 0$$

Teorema 6: El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite

$$\lim_{x \to a} \log f(x) = \log L, \quad \text{si } L > 0$$

Teorema 7: El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites. Comprende tres casos

(a) $\lim_{x \to a} k^{f(x)} = k^L$

(b) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^k = L^k$

(c) $\lim\limits_{x \to a} \left[f_1(x)\right]^{f_2(x)} = L_1^{L_2}$, siempre que $L_1 \neq 0$ o $L_2 \neq 0$

<u>Ejemplos</u>: Aplicación de los teoremas sobre límites

1. $\lim\limits_{x \to 4} 3x = 3 \lim\limits_{x \to 4} x = 3(4) = 12$

2. $\lim\limits_{x \to 6} (7x-2) = 7 \lim\limits_{x \to 6} x - \lim\limits_{x \to 6} 2 = 7\ (6) - 2 = 40$

3. $\lim\limits_{x \to 2} (x^5-2x+3) = 2^5-2(2)+3 = 31$

4. $\lim\limits_{x \to 2} (3^{x^2} + x^x) = 3^4 + 2^2 = 85$

5. $\lim\limits_{x \to 10} \log x^2 = \log \lim\limits_{x \to 10} x^2 = \log 100 = 2$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \left[3^{x^3} - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right] = 3^0 - (-1)^0 = 0$

7. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)}{x^2 - 2x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}$

La división por $(x-3)$ <u>antes de tomar límite</u>, es válida, ya que cuando $x \to 3$ es $x \neq 3$.

INFINITO

Se dice que una variable <u>x</u> <u>tiende a más infinito</u> ($x \to +\infty$), si su valor puede hacerse y mantenerse mayor que cualquier número

positivo por grande que éste sea. Ejemplo, la sucesión de los números naturales: 1, 2, 3, ...

Una variable x tiende a menos infinito ($x \to -\infty$), si su valor puede hacerse y mantenerse menor que cualquier número negativo dado, por pequeño que éste sea. Ejemplo, la sucesión de los números negativos: -1, -2, -3, ...

Una variable x tiende a infinito ($x \to \infty$) cuando tiende a menos infinito ($x \to -\infty$) o a más infinito ($x \to +\infty$).

OTRAS FORMAS DE LIMITE

La definición de límite dada en la página 12, se refiere a la forma

(I) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

es decir corresponde al caso en que tanto la variable independiente x como la función tienden hacia un número finito a y L respectivamente. Otros casos muy frecuentes en la práctica son aquellos en que la variable independiente o/y la función tienden a más o menos infinito, presentándose entonces los siguientes casos, los cuales se definen de manera ligeramente distinta:

(II) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, si para todo número positivo ε, por pequeño que sea, puede encontrarse otro número positivo K tal que se verifica $|f(x) - L| < \varepsilon$, para todo $|x| > K$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$

(III) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, si para todo número positivo P, por grande que sea, puede encontrarse otro número positivo δ tal que se verifica $|f(x)| > P$, para todo x del intervalo $0 < |x-a| < \delta$.

<u>Ejemplo</u>: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-3} = \infty$

(IV) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, si para todo número positivo P, por grande que sea, puede encontrarse otro número positivo K tal que, se verifica $|f(x)| > P$, para todo $|x| > K$.

<u>Ejemplo</u>: $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$

En los casos (III) y (IV) en realidad <u>el límite no existe</u>, pero por convención se dice que el límite es igual a infinito. Incluso en muchos ejercicios de esta forma los límites laterales son distintos, como por ejemplo

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Los teoremas sobre límites vistos más arriba son válidos cuando las funciones tienden a un valor finito L. Pero cuando las funciones tienden a infinito o a cero, no siempre resultan válidos sino que hay que analizar cada caso particular. Por ejemplo el límite del cociente de dos funciones que tienden a infinito, puede ser cualquier valor, dependiendo de la forma matemática de cada una de ellas.

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Hay siete formas de límite en las cuales el resultado no puede anticiparse, las que se conocen como expresiones indeterminadas. Son las siguientes:

$$\frac{0}{0} \; ; \; \frac{\infty}{\infty} \; ; \; 0.\infty \; ; \infty - \infty \; ; \; 0^0 \; ; \; \infty^0 \; ; \; 1^\infty$$

donde los símbolos representan funciones que tienden a cero, a infinito o a uno.

En estos casos al tomar límite no es posible obtener un resultado general, sino que ese resultado es distinto según la forma en que cada función tiende a cero, a infinito, o a uno.

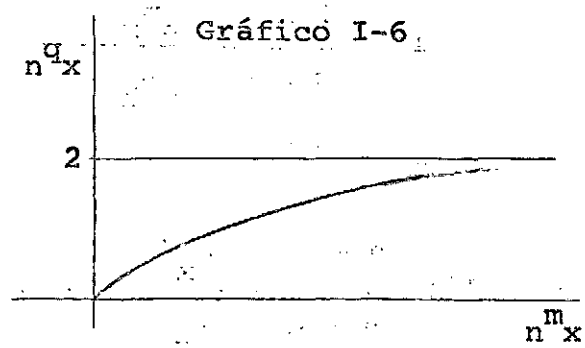
Para resolverlos se puede hacer algunas transformaciones que permitan salvar la indeterminación y después tomar límite, o bien aplicarse otros recursos del cálculo infinitesimal, como por ejemplo la llamada regla de L'Hospital, o el desarrollo en serie de las funciones.

EJERCICIOS SOBRE LIMITES

1. Dada la relación entre la tasa central de mortalidad ${}_nm_x$ y la probabilidad de morir ${}_nq_x$ 1/ :

$$(I\text{-}3) \qquad {}_nq_x = \frac{2\,n\;{}_nm_x}{2 + n\;{}_nm_x}$$

Gráfico I-6



1/ Reed y Merrell, Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D, No. 49. Chile.

donde:

$_n m_x$ = es la tasa de mortalidad del intervalo de edades $x, x+n$.

$_n q_x$ = probabilidad de morir entre las edades $x, x+n$, de una tabla de vida.

n = amplitud del intervalo de edades.

Calcular:

a) El límite de la relación (I-3) para $_n m_x \longrightarrow +\infty$

b) Límite para $_n m_x \longrightarrow 0^+$

c) El campo de variación en el cual esta relación es válida.

---

a) $$\lim_{_n m_x \longrightarrow +\infty} \frac{2\,n \quad {}_n m_x}{2+n \quad {}_n m_x}$$

Al tomar límite resulta una indeterminación de la forma ∞/∞. Para salvar la indeterminación resulta conveniente dividir cada término por $_n m_x$.

$$\lim_{_n m_x \longrightarrow +\infty} \frac{2\,n \quad {}_n m_x}{2+n \quad {}_n m_x} = \lim_{_n m_x \longrightarrow +\infty} \frac{2\,n}{\frac{2}{_n m_x} + n} = 2$$

b) $$\lim_{_n m_x \longrightarrow 0^+} \frac{2\,n \quad {}_n m_x}{2+n \quad {}_n m_x} = 0$$

c) El mayor valor que puede tomar ${}_nq_x$ - como ocurre con cualquier probabilidad - es uno, es decir:

$$ {}_nq_x = \frac{2\,n \quad {}_nm_x}{2 + n \quad {}_nm_x} = 1 $$

Despejando ${}_nm_x$, resulta

$$ 2\,n \quad {}_nm_x = 2 + n \quad {}_nm_x $$

$$ {}_nm_x = \frac{2}{n} $$

Por lo tanto el campo de variación de ${}_nm_x$ es $0 < {}_nm_x < \frac{2}{n}$, para el cual la probabilidad de morir ${}_nq_x$ varía entre 0 y 1.

2. Demostrar que

$$ \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x + 2} = 0 $$

Al tomar límite resulta una indeterminación de la forma ∞ / ∞. Para salvar la indeterminación, previo a tomar límite conviene dividir cada término por la <u>mayor</u> potencia del numerador; por ejemplo, dividiendo por x^2:

$$ \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0 $$

El resultado es cero, ya que el numerador tiende a uno y el denominador a infinito.

3. Resolver los siguientes límites

(a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x+1}{3 - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1- \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - 1} = -1$$

(b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2+ \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \infty \text{(no existe límite)}$$

4. Demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 + x^2} = -2$$

Al tomar límite resulta una indeterminación de la forma 0/0. En este caso, para resolver la indeterminación conviene dividir todos los términos por la <u>menor</u> potencia del numerador o denominador; en este caso sería x^2

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 2}{x + 1} = -2$$

EL NUMERO "e" DE EULER

El número e ocupa un lugar destacado en la matemática desde la publicación, en 1748, de la obra del matemático suizo L. Euler (1707-1783) "Introduction in Analysis Infinitorum". Entre otros usos se los utiliza como base de los logaritmos naturales o neperianos. La forma más corriente de su definición es mediante el límite

$$\text{(I-4)} \qquad e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Este límite conduce a una forma indeterminada del tipo 1^{∞}. Se puede resolver desarrollando el binomio, antes de tomar límite:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\,\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\,\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\,\frac{1}{m^3} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots$$

Expresión cuyo límite, para m tendiendo a infinito, da

$$\text{(I-5)} \qquad e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$$

Esta serie permite calcular el número e con la aproximación que se desee. Sus 15 primeras cifras decimales son

$$e = 2.7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ \ldots$$

Ejercicio: Demostrar que

$$\text{(I-6)} \qquad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Haciendo $\frac{x}{n} = \frac{1}{m}$; resulta $n = mx$

Cuando $n \longrightarrow \infty$; también $m \longrightarrow \infty$

Reemplazando en (I-6) se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx}$$

lo que puede escribirse (por ser <u>x</u> independiente de <u>m</u>):

$$= \left[\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^x = e^x$$

FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

"Una función $y=f(x)$ es <u>continua</u> en un punto $x=a$, si el límite de la función para <u>x</u> que tiende a <u>a</u> es igual a $f(a)$".
En símbolos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Por ejemplo la función

$$f(x) = 3x+1$$

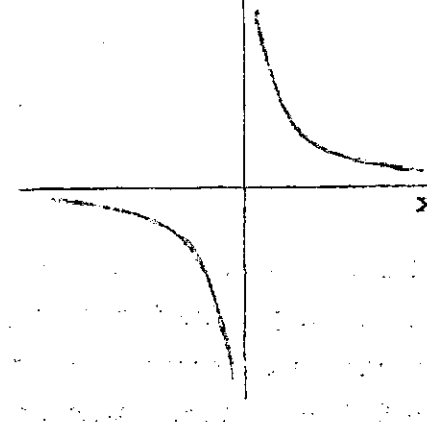
es continua para $x=2$, ya que $f(2)=7$, y el límite para <u>x</u> que tiende a 2 es también 7.

Una función es <u>discontinua</u> en $x=a$ si no satisface la condición anterior. Por ejemplo la función

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

es discontinua en x=0 ya que en ese punto no existe ni el límite ni f(0) Ver gráfico I-7.

Gráfico I-7



A su vez la función

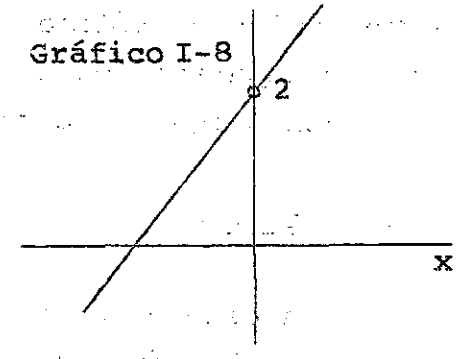
$$f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$$

es discontinua en x=0, ya que aunque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 ,$$

la función en ese punto no está definida. Ver gráfico I-8.

Gráfico I-8



Una función es continua en un intervalo, cuando es continua para todos los valores de x dentro de ese intervalo.

En demografía muchas funciones presentan un comportamiento esencialmente discontinuo, como por ejemplo la población N(t) que sólo puede tomar en el tiempo valores enteros y positivos. No obstante ello, para trabajar con las herramientas del cálculo infinitesimal se hace la abstracción teórica de que la variación de estas funciones es continua.

ANALISIS DE ALGUNAS FUNCIONES DEMOGRAFICAS

1) Sea la función

$$N(t) = N(0)\ e^{rt} \qquad \text{(I-7)}$$

donde: $N(t)$ = población en el momento $\underline{t}$.

$N(o)$ = población en el momento 0

r = tasa anual de crecimiento

t = tiempo, en años.

Esta relación se usa con frecuencia para hacer proyecciones globales de población por períodos cortos, para estimar la tasa de crecimiento entre dos censos, en la deducción de algunos modelos teóricos, etc., por lo cual es conveniente conocer en detalle su comportamiento gráfico y algunas de sus propiedades. Se considera por separado los casos en que la tasa de crecimiento $\underline{r}$ es mayor, menor o igual a cero.

a) $\underline{r > 0}$

En este caso la población $\underline{N}$ sigue el siguiente comportamiento en relación con la variación de t.

i. La relación (I-7) es positiva para todo valor de t, es decir

$$N(0)\, e^{rt} > 0 \text{ , para todo } \underline{t}.$$

ii. $N(0)\, e^{rt}$ es una función creciente

iii. El límite de la función para $\underline{t}$ que tiende a más infinito, es igual a más infinito:

$$\lim_{t \to +\infty} N(0)\, e^{rt} = +\infty$$

iv. $$\lim_{t \to 0} N(0)\, e^{rt} = N(0)$$

v . $\lim_{t \to -\infty} N(0)\, e^{rt} = 0^+$

vi. La función tiene curvatura hacia arriba (es cóncava hacia arriba) en todo su recorrido. Esto se verá en el capítulo III.

La representación gráfica, para $r > 0$, se presenta en el gráfico I-9 a.

b) $\underline{r < 0}$

Si la tasa de crecimiento r es menor que cero, entonces la relación (I-7) tiene el siguiente comportamiento

i. Es mayor que cero para todo t (igual al caso $r > 0$)

ii. Es una función decreciente

iii. $\lim_{t \to +\infty} N(0)\, e^{rt} = 0$

iv. $\lim_{t \to 0} N(0)\, e^{rt} = N(0)$, (igual al caso $r > 0$)

v. $\lim_{t \to -\infty} N(0)\, e^{rt} = +\infty$

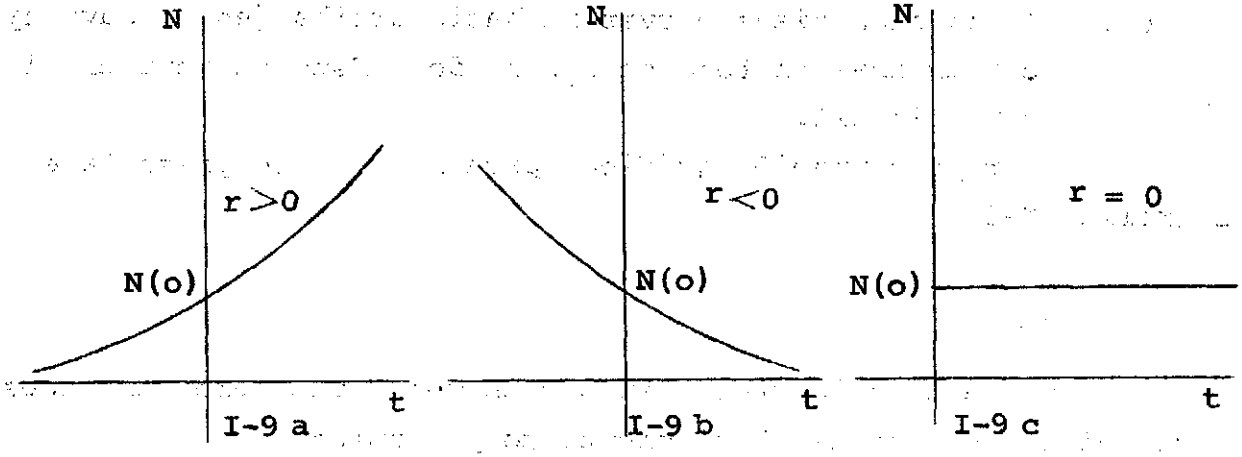
vi. La función tiene curvatura hacia arriba en todo su recorrido (igual al caso $r > 0$).

Su representación gráfica se presenta en el gráfico I-9 b.

c) Finalmente si $\underline{r} = 0$, se tiene la función $N(t) = N(0)$ = constante

Su gráfica se presenta en I-9 c.

Gráfica de la función $N(t) = N(0)\ e^{rt}$



En lugar de la relación (I-7), suele emplearse también la relación similar

$$N(t) = N(0)\ (1 + r_1)^t \qquad \text{(I-8)}$$

En este caso la "capitalización" o sea el incremento de población se obtiene para intervalos finitos anuales. Para un intervalo de 1/n de año cualquiera, se tendrá

$$N(t) = N(0) \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{(I-9)}$$

y en el límite, para el número de subintervalos n del año tendiendo a infinito, resulta la relación (I-7).

$$N(t) = \lim_{n \to \infty} N(0) \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= N(0) \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \right]^t$$

$$N(t) = N(0)\, e^{rt}$$

2) Análisis de la relación aproximada

$$\text{(I-10)} \qquad r = \frac{2}{t} \; \frac{N(t)-N(0)}{N(t)+N(0)}$$

empleada corrientemente para calcular la tasa anual media de crecimiento intercensal, o entre dos momentos cualquiera 0 y t.

El cálculo de la tasa de crecimiento a partir de las relaciones (I-7) o (I-8) resulta muy laborioso, especialmente si el procedimiento hay que repetirlo para un conjunto de países o regiones de un país. Por ejemplo el valor de r que resulta de (I-8) es

$$\text{(I-11)} \qquad r = \sqrt[t]{\frac{N(t)}{N(0)}} - 1$$

donde t generalmente es fraccionario, como en el caso de un intervalo intercensal.

En la práctica se prefiere utilizar fórmulas aproximadas más sencillas. Una de las más empleadas es la siguiente

$$r = \frac{\dfrac{N(t) - N(0)}{t}}{\dfrac{N(t) + N(0)}{2}}$$

o sea, en el numerador se incluye el crecimiento medio anual de la población y en el denominador sería una aproximación a la población media. De aquí resulta

$$r = \frac{2}{t} \; \frac{N(t) - N(o)}{N(t) + N(o)}$$

A continuación se analiza cual es el porcentaje de error que se comete cuando se calcula la tasa de crecimiento r utilizando la relación aproximada (I-10) en lugar de la relación (I-11).

El procedimiento seguido se ilustra en el cuadro 1. En la columna (1) se escogieron valores seleccionados de t desde 1 hasta 30 años. En la columna (2) se estimaron valores teóricos de la población N(t); se utilizó la relación

$$N(t) = N(o)(1 + r)^t$$

suponiendo N(o) = 1, y en este caso r = +0.03. En la columna (3) se ha calculado para cada valor de t la tasa de crecimiento que resulta de aplicar la relación aproximada (I-10). Si se hubiese empleado la fórmula (I-11) obviamente se habría obtenido para todo t, r = 0.03. Finalmente en la columna (4) se ha calculado el porcentaje de error:

$$\text{porcentaje de error} = \frac{r \text{ (estimada)}}{0.03} \times 100$$

En los gráficos I-10 y I-11 se presenta el porcentaje de error en la estimación de la tasa de crecimiento, al aumentar t, para valores seleccionados de r positivos y negativos. Las tasas de crecimiento negativas son frecuentes cuando se hacen cálculos por regiones geográficas dentro de un país.

Cuadro 1

PORCENTAJE DE ERROR EN LA ESTIMACION DE LA TASA DE CRECIMIENTO r, CON RESPECTO A t, QUE RESULTA DE APLICAR LA RELACION APROXIMADA (I-1C). TASA DE CRECIMIENTO r=0.03

t	N(t)*	r** (por cien)	$\frac{r-0.03}{0.03}$ (por cien)
1	1.03000	2.9560	- 1.47
2	1.06090	2.9550	- 1.50
3	1.09273	2.9540	- 1.53
4	1.12551	2.9525	- 1.58
5	1.15927	2.9504	- 1.65
6	1.19405	2.9481	- 1.73
7	1.22987	2.9453	- 1.82
8	1.26677	2.9422	- 1.93
9	1.30477	2.9385	- 2.05
10	1.34392	2.9346	- 2.18
15	1.55797	2.9084	- 3.05
20	1.80611	2.8727	- 4.24
25	2.09378	2.8283	- 5.72
30	2.42726	2.7763	- 7.46

* $N(t) = N(o)(1+r)^t$; $N(o) = 1$; $r = 0.03$

** $r = \frac{2}{t} \quad \frac{N(t) - N(o)}{N(t) + N(o)}$

Gráfico I-10

PORCENTAJE DE ERROR EN LA ESTIMACION DE LA TASA DE CRECIMIENTO r_0 CON RESPECTO A t_0 QUE RESULTA DE APLICAR LA RELACION APROXIMADA (I-10). VALORES DE r POSITIVOS

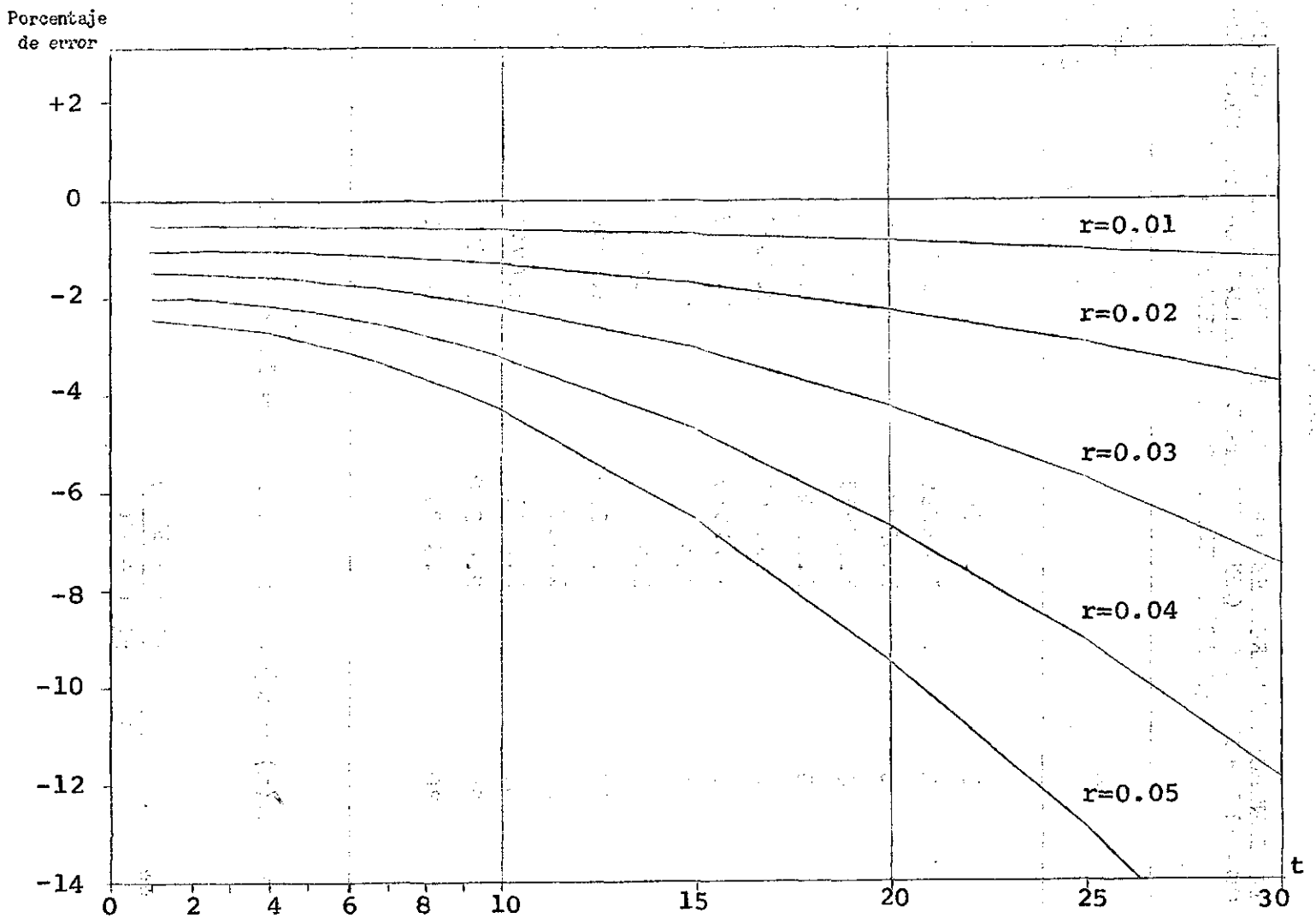
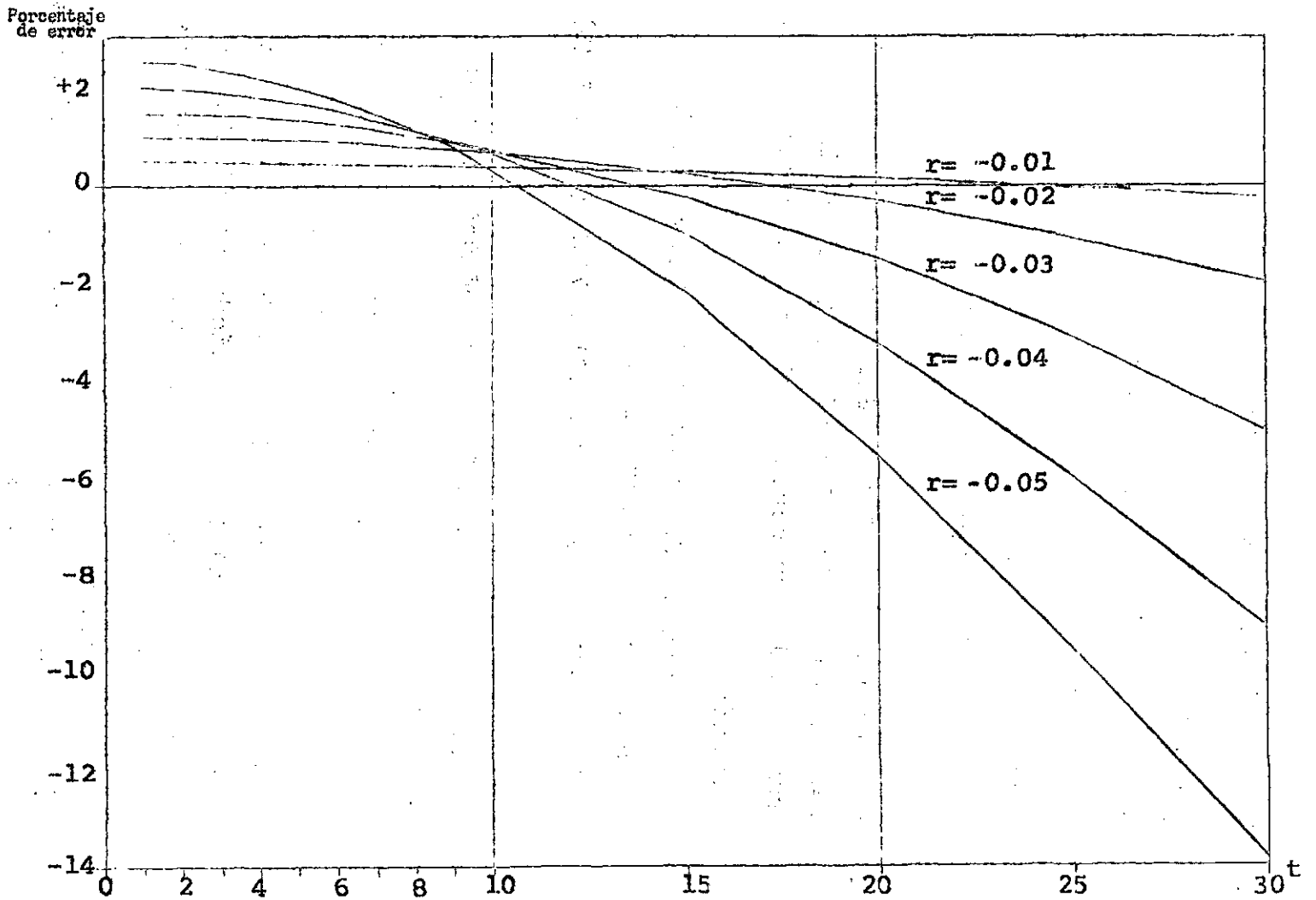


Gráfico I-11

PORCENTAJE DE ERROR EN LA ESTIMACION DE LA TASA DE CRECIMIENTO r, CON RESPECTO A t, QUE RESULTA DE APLICAR LA RELACION APROXIMADA (I-10). VALORES DE r NEGATIVOS



EJERCICIOS DEL CAPITULO I

1. Dada $f(x) = x^2 - 3x+1$, calcular $f(-1)$; $f(0)$; $f(a)$; $f(x^2)$

Solución

$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 5$

$f(0) = 1$

$f(a) = a^2 - 3a+1$

$f(x^2) = (x^2)^2 - 3(x^2)+1 = x^4 - 3x^2+1$

2. Dada $N(t) = 205\ 941 + 5\ 781.5\ t + 74.5\ t^2 + 3\ t^3$, donde $t=0$ representa la población al 30 de junio de 1960, estimar la población correspondiente a mediados de 1963.

Solución

Si $t=0$ corresponde al año 1960, la población de 1963 se obtiene dando a t el valor 3.

$$N(3) = 205\ 941 + 5\ 781.5\ (3) + 74.5\ (3)^2 + 3\ (3)^3$$
$$= 224\ 037$$

3. En la siguiente función de fecundidad según la edad de las mujeres

$$f(x) = C\ (x-s)(s+33-x)^2 \text{, para } s \leqslant x \leqslant s+33$$
$$= 0 \text{, para } x < s \quad y \quad x > s+33$$

donde x es la edad, s la edad de inicio de la vida reproductiva, 33 la amplitud del período reproductivo de la mujer, y C una magnitud que tiene que ver con el nivel de la fecundidad, se pide:

(a) clasificarla

(b) indicar cuales son las constantes, parámetros y variables

(c) calcular $f(s+33)$

Solución

(a) En el intervalo $s \leqslant x \leqslant s+33$ es una función algebraica. Fuera de ese intervalo es una función arbitraria.

(b) Constantes: 33; 0; 2
Parámetros: C; s
Variables : x; f(x)

(c) $f(s+33) = C\,(s+33-s)(s+33-s-33)^2$
$= \underline{0}$

4. Indicar qué valores comprende los siguientes intervalos, y graficarlos

(a) $x \geqslant 3$

(b) $|x| \leqslant 5$

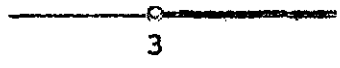
(c) $|x| > 2$

(d) $|x-1| < \delta$; $\delta > 0$

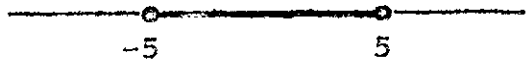
(e) $0 < |x-2| < \delta$; $\delta > 0$

Solución

(a) Comprende todos los números igual o mayores que 3



(b) La expresión $|x| \leqslant 5$ define el intervalo cerrado $-5 \leqslant x \leqslant 5$



Solución

(a) Es una función trascendente

(b) $f(a^2) = \log_a \frac{1}{a^2} = \log_a a^{-2} = -2\ (\log_a a) = \underline{-2}$

6. Dada la siguiente tabla de valores donde se presenta los sobrevivientes a diferentes edades exactas, de una generación de 100 000 nacidos vivos, se pide:

(a) clasificarla

(b) representarla gráficamente

x	l_x	x	l_x
0	100 000	50	80 933
1	93 854	60	69 435
5	92 476	70	49 392
10	92 052	80	22 425
20	91 023	90	3 714
40	86 421	100	0

Solución

(a) Es una función empírica, ya que no se conoce su forma matemática, sino el valor de la función para determinados valores de la variable.

(b) En el gráfico I-12 se han representado los sucesivos pares de valores. Los mismos han sido unidos mediante una curva suave, aunque en realidad la forma de la función en los puntos intermedios es desconocida.

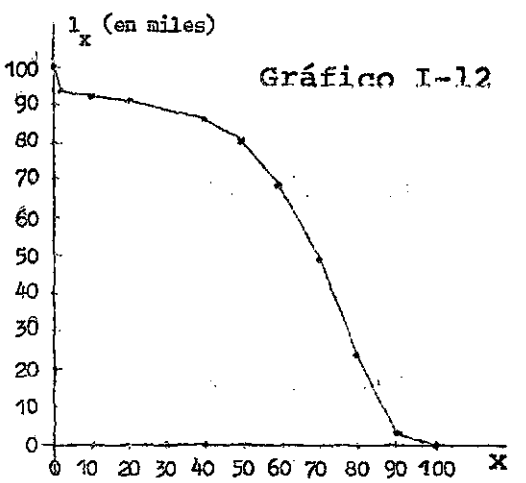


Gráfico I-12

7. Resolver

(a) $$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{1} = 5$$

(b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x+1}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x-2} = 0$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x-1}{x-2} = \frac{1}{2}$$

(d) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1$$

8. Calcular los siguientes límites (donde k = constante)

(a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x} = 0$$

(b) $$\lim_{x \to \infty} kx = \infty$$

(c) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{k} = \infty$$

(d) $$\lim_{x \to 0} \frac{k}{x} = \infty$$

(e) $$\lim_{x \to 0} kx = 0$$

(f) $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{k} = 0$$

9. Calcular los siguientes límites laterales

(a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

(c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

10. En la función <u>logística</u> de Verhulst-Pearl:

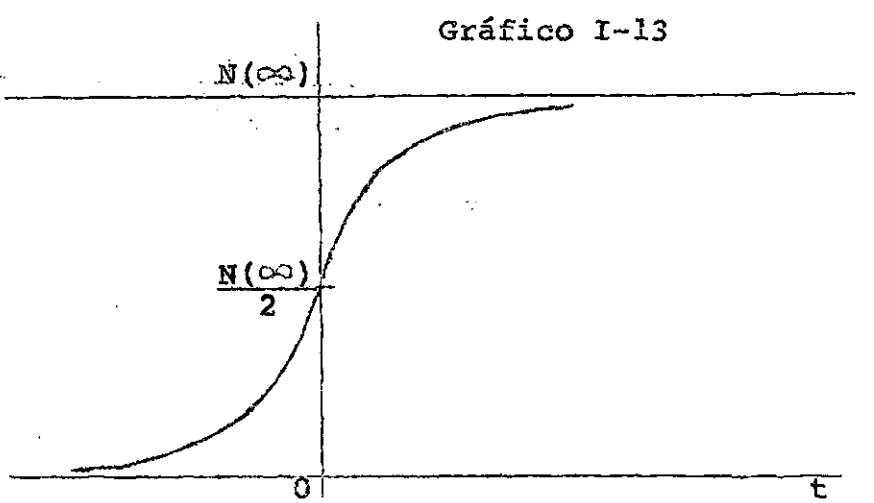
$$N(t) = \frac{N(\infty)}{1 + e^{-rt}}$$

donde $N(\infty)$ y $\underline{r}$ son parámetros positivos, $e = 2{,}718\ldots$=constante, calcular los límites para

(a) $t \to -\infty$

(b) $t \to +\infty$

Gráfico I-13



<u>Solución</u>

(a) Cuando $\underline{t}$ tiende a menos infinito

$-rt$ tiende a más infinito

e^{-rt} tiende a más infinto

Por lo tanto,

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{N(\infty)}{1 + e^{-rt}} = 0$$

(b) Cuando $\underline{t}$ tiende a más infinito

$-rt$ tiende a menos infinito

e^{-rt} tiende a cero

luego,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{N(\infty)}{1 + e^{-rt}} = \frac{N(\infty)}{1 + 0} = N(\infty)$$

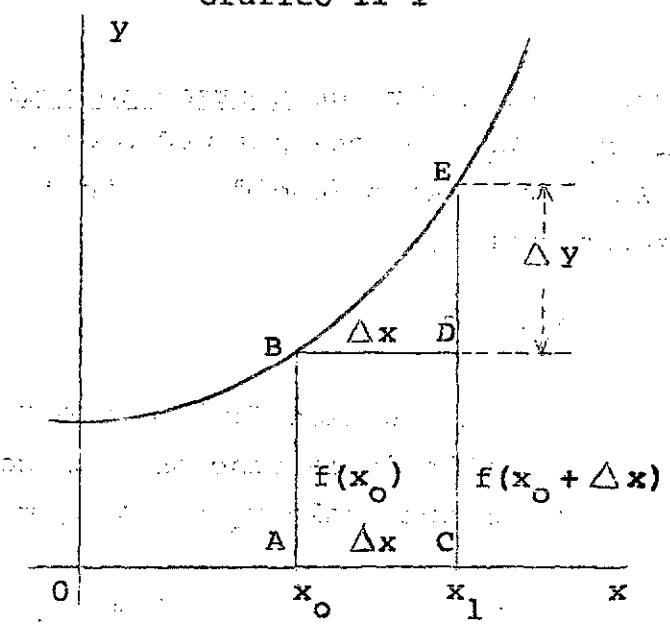
Capítulo II

LA DERIVADA Y SU INTERPRETACION

INCREMENTOS

En este capítulo se analiza la forma cómo varía la función al variar la variable independiente. Sea la función $y=f(x)$ a la cual supuestamente le corresponde el siguiente comportamiento gráfico:

Gráfico II-1



Se denomina <u>incremento de la variable</u>, y se simboliza Δx ("delta x"), al aumento o disminución que experimenta la variable x, desde un valor x_o a otro x_1 de su campo de variación. Por lo tanto

$$\Delta x = x_1 - x_o$$

o bien

$$x_1 = x_o + \Delta x$$

En el gráfico, al incremento de la variable le corresponde un valor $\overline{AC} = \overline{BD}$.

En el punto x_o, la función vale $f(x_o)$; en el punto $x_o + \Delta x$ la función toma el valor $f(x_o + \Delta x)$. La diferen

cia entre $f(x_o + \triangle x)$ y $f(x_o)$ se denomina <u>incremento de la función</u>, y se simboliza

$$y = f(x_o + \triangle x) - f(x_o)$$

en el gráfico le corresponde el valor $\overline{DE}$. Tanto el incremento de la función como el de la variable pueden ser positivos o negativos.

El cociente

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_o + \triangle x) - f(x_o)}{\triangle x}$$

recibe el nombre de <u>incremento medio de la función</u> en el intervalo x_o, x_1, o cociente medio de incrementos. Cuando la variable es el tiempo (medido en años), suele denominarse incremento medio anual.

<u>Ejemplo</u>

Dada la función $f(x) = 3x + 2$, calcular el incremento de la variable, de la función y el cociente medio de incrementos, en el intervalo $x_o = 0$ a $x_1 = 2$.

$$\triangle x = x_1 - x_o = 2 - 0 = 2$$

$$\triangle y = f(x_1) - f(x_o) = f(2) - f(o) = 8 - 2 = 6$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} = \frac{8 - 2}{2 - 0} = 3$$

El cociente medio de incrementos, igual a 3, representa el crecimiento de la función por unidad de crecimiento de la variable independiente.

Si la función es la población total $N(t)$, la diferencia

$$\triangle N(t) = N(t_1) - N(t_o)$$

representa el <u>incremento de la población</u> entre t_o y t_1 ; y el cociente

$$\frac{\triangle N(t)}{\triangle t} = \frac{N(t_1) - N(t_o)}{t_1 - t_o}$$

da el <u>incremento medio anual de la población</u> en dicho intervalo.

DEFINICION DE DERIVADA

La derivada de una función es igual al límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento de la variable independiente, cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, siempre que el límite exista. En símbolos:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$$

Otras formas de simbolizar la derivada son las siguientes

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{d\ f(x)}{dx} = D\ y = D\ f(x) = \frac{d}{dx}\ f(x)$$

La letra D suele denominarse operador de derivada; precediendo a una función $f(x)$ representa la derivada de esa función.

<u>Ejemplo</u>

Aplicando la definición, calcular la derivada de $f(x)=x^2 + x$

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f(x + \triangle x) = (x + \triangle x)^2 + (x + \triangle x)$$

$$= x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + x + \triangle x$$

$$y = x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + x + \triangle x - x^2 - x$$

$$= 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + \triangle x$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 2x + \triangle x + 1$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underline{2x + 1}$$

En la definición de derivada, cuando se dice que $\triangle x$ tiende a cero, <u>implica que es diferente de cero</u>. Por lo tanto la derivada en un punto <u>x</u>, es también un cociente de incrementos de la forma

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

solo que referido a un intervalo infinitesimal (ver ejercicio 3 al final del capítulo).

De lo anterior se desprende que la derivada de la función en un punto, mide <u>la velocidad de cambio</u> de la función por cada unidad de variación de la variable independiente, en el entorno de ese punto. Por ejemplo en la función $f(x) = x^2 + x$, cuya derivada calculada más arriba es $f'(x) = 2x+1$, el valor particular $f'(1) = 3$ significa que en el entorno de 1, la función crece con una velocidad igual a 3 veces el aumento de <u>x</u>.

Otro punto relacionado con la definición, es que el límite del cociente de incrementos define la derivada, siempre que

ese límite exista. La condición necesaria pero no suficiente para que la función sea derivable, es que sea continua. La condición suficiente es que los límites laterales del cociente de incrementos existan y sean iguales. La mayoría de las funciones son derivables para todos los valores de la variable independiente, con excepción, a lo más de algunos valores aislados.

Finalmente cabe señalar que el cálculo de la derivada de cualquier función puede hacerse aplicando paso a paso su definición, como en el ejemplo dado más arriba, o sea, calculando el valor de $f(x + \Delta x)$, restándole a este valor $f(x)$ para obtener el incremento de la función, dividiendo el resultado por el incremento de la variable, y calculando su límite para Δx tendiendo a cero. Sin embargo este procedimiento resulta demasiado lento. En la práctica el proceso de derivación se facilita enormemente mediante el uso de ciertas formas básicas de derivada, a las que se reducen expresiones más complicadas. Estas formas básicas se verán más adelante.

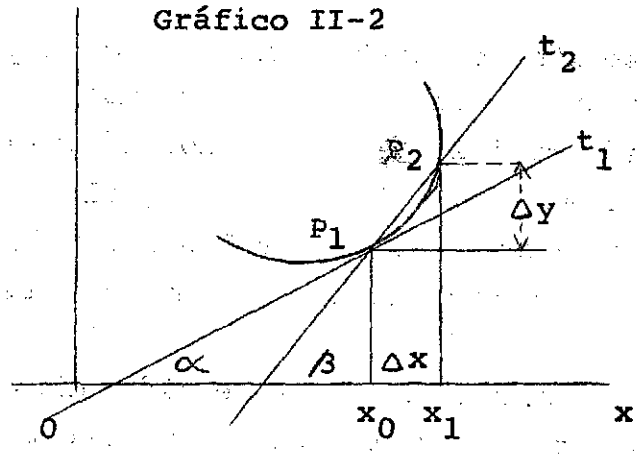
INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

En el gráfico II-2 el cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable define geométricamente la tangente de β

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \beta$$

Gráfico II-2



Si el incremento de la variable se va haciendo cada vez más pequeño, cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, el punto P_2 tiende al punto P_1, la recta t_2 tiende a la recta t_1, y el ángulo β tiende al ángulo α. En el límite:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} tg\ \beta = tg\ \alpha$$

El primer miembro define la derivada de f(x), por lo tanto

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = tg\ \alpha$$

Es decir, geométricamente la derivada de una función en un punto de abscisa x, es igual a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en ese punto con el sentido positivo del eje de las abscisas.

Por otra parte la ecuación de la recta t_1 es $y = a\ x + b$, donde $a = tg\ \alpha$ por lo que

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = a$$

En otras palabras se puede decir también que la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente "a" de la recta tangente a la curva en ese punto.

FORMULAS DE DERIVACION

El cálculo de la derivada de una función puede hacerse aplicando simplemente su definición, esto es, resolviendo el límite del cociente de incrementos. Sin embargo, como ya ha sido señalado más arriba, el proceso de derivación se facilita en la práctica mediante el empleo de ciertas formas básicas de derivación a las que se reducen expresiones más complicadas.

Las formas básicas más empleadas para el cálculo de derivadas, son las siguientes. En estas fórmulas, u, v y w son funciones derivables de x.

Cuadro 1.

FORMULAS BASICAS DE DERIVACION

1. $\frac{d}{dx} C = 0$; C = constante

2. $\frac{d}{dx} x = 1$

3. $\frac{d}{dx} u^n = n\, u^{n-1} \frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx} (u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

5. $\frac{d}{dx} (C.u) = C \frac{du}{dx}$

6. $\frac{d}{dx} (u.v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

Continuación cuadro 1.

7. $\frac{d}{dx}(u.v.w) = v.w\frac{du}{dx} + u.w\frac{dv}{dx} + u.v\frac{dw}{dx}$

8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

11. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}(\log_a e)\frac{du}{dx}$

12. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

13. $\frac{d}{dx}a^u = a^u(\ln a)\frac{du}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}u^v = v\,u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v(\ln u)\frac{dv}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = (\cos u)\frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -(\text{sen } u)\frac{du}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}(\text{tg } u) = \frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

Conclusión cuadro 1.

20. $\frac{d}{dx}(\text{arc cos } u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

21. $\frac{d}{dx}(\text{arc tg } u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}(\text{senh } u) = (\cosh u)\frac{du}{dx}$

23. $\frac{d}{dx}(\cosh u) = (\text{senh } u)\frac{du}{dx}$

24. $\frac{d}{dx}(\text{tgh } u) = \frac{1}{\cosh^2 u}\frac{du}{dx}$

A continuación de deduce la primera de las fórmulas básicas de derivación. La deducción de las siguientes puede hacerse en forma similar.

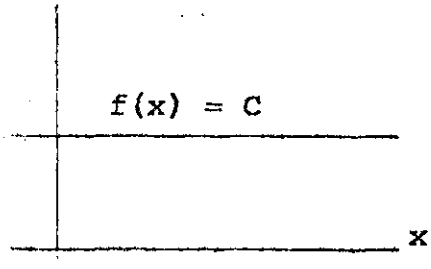
FORMULA 1: "La derivada de una constante es igual a cero".
En símbolos,

$$f(x) = C \; ; \frac{d}{dx} C = 0$$

Demostración

La gráfica de una constante es una paralela al eje de las x, es decir, para cada valor de x le corresponde uno de la función que es siempre C.

Gráfico II-3



Para demostrar que su derivada es igual a cero, basta aplicar paso a paso la definición de derivada

Sea la función

(II-1) $f(x) = C$

Incrementado x en $\triangle x$, se tiene

(II-2) $f(x + \triangle x) = C$

Restando miembro a miembro (II-2) y (II-1) se obtiene el incremento de la función

$$\triangle f(x) = C - C = 0$$

Dividiendo por $\triangle x$ y tomando límite para $\triangle x \rightarrow 0$ se llega a la derivada.

$$\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = 0$$

$$\lim_{\triangle x \rightarrow 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = 0$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx} C = 0$$

EJERCICIOS: Derivar con respecto a x

1. $f(x) = 4$

$f'(x) = \frac{d}{dx} 4 = 0$

2. $y = x^3 + x^2 + 1$

$Dy = Dx^3 + Dx^2 + D\,1$

$y' = 3x^2 + 2x$

3. $y = (x^3 + 1)^3$

$\frac{dy}{dx} = 3(x^3 + 1)^2 \ \frac{d}{dx}(x^3 + 1)$

$= 3(x^3 + 1)^2 \ 3x^2$

4. $f(x) = (x^2 - 1)\ (x + 1)^3$

$f'(x) = (x^2 - 1)\ 3(x + 1)^2 + (x + 1)^3 \ 2x$

5. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

$y' = \frac{(x^2 + 1) - x\ (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

6. $y = \ln\ (x^2 + 2)^2 = 2\ \ln\ (x^2 + 2)$

$y' = \frac{2}{x^2 + 2}\ (2x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$

7. Derivar con respecto a $\underline{x}$ la función

$$y = u^3 + 1 \text{ , siendo } u = 3x^2 + x$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3(3x^2 + x)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 6x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3(3x^2 + x)^2 \quad (6x + 1)$$

8. Calcular la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$, aplicando la fórmula de la derivada de las funciones inversas

$$x = 3y - 2$$

$$\frac{dx}{dy} = 3$$

Aplicando la fórmula 10, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3}$$

Este resultado puede verificarse; si

$$x = 3y - 2$$

su inversa es

$$y = \frac{1}{3}(x + 2)$$

y su derivada con respecto a $\underline{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$$

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Se denomina diferencial de una función $y = f(x)$, lo cual se simboliza dy o $df(x)$, al producto de la derivada de dicha función por el incremento arbitrario de la variable; es decir

$$\text{(II-3)} \qquad dy = f'(x) . \triangle x$$

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$, y la diferencial resulta

$$dx = \triangle x$$

Así, la diferencial de la variable independiente es igual al incremento arbitrario $\triangle x$. Teniendo en cuenta este resultado, la expresión (II-3) puede escribirse en la forma más generalizada siguiente

$$\text{(II-4)} \qquad dy = f'(x)\, dx$$

Es decir, la diferencial de una función es igual a la derivada de dicha función por la diferencial de la variable independiente.

<u>Representación geométrica</u>

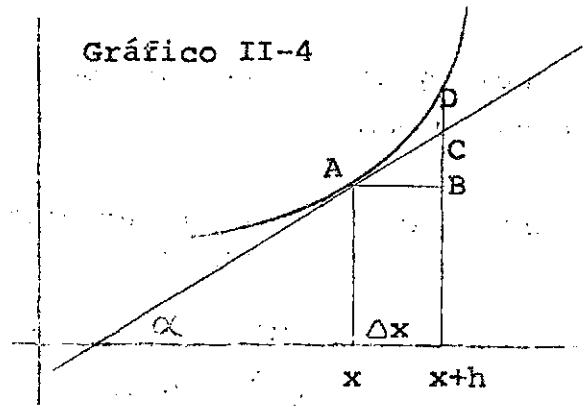
Veamos geométricamente el significado de la diferencial. En la gráfica II-4 de la función $y = f(x)$ se tiene,

$$f'(x) = tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\triangle x = \overline{AB}$$

$$dy = f'(x) . \triangle x$$

$$= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} . \overline{AB} = \overline{BC}$$



O sea que la diferencial dy, geométricamente, está representada por el segmento $\overline{BC}$. En la gráfica puede verse que el valor de la diferencial $dy = \overline{BC}$ es diferente del incremento de la función $\Delta y = \overline{BD}$, aunque para intervalos pequeños ambos valores son aproximadamente iguales.

DERIVADAS SUCESIVAS

La derivada de una función $y = f(x)$ recibe el nombre de <u>derivada primera</u> de la función, la cual, como se sabe, se simboliza

$$f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = D\,f(x) = \ldots$$

La derivada primera, en general, es una nueva función de <u>x</u>. Si esta función es derivable, su derivada se denomina <u>derivada segunda</u> de f(x), la cual se simboliza,

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 f(x) = \ldots$$

Del mismo modo, la derivada de la derivada segunda, si existe, se denomina <u>derivada tercera</u> de f(x), que se representa,

$$f'''(x) = y''' = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} = D^3 f(x) = \ldots$$

y así sucesivamente.

En el capítulo siguiente se verán aplicaciones de las derivadas sucesivas.

EJERCICIOS: Calcular las derivadas sucesivas de la siguiente función:

$$y = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$y' = 9x^2 - 4x + 1$$

$$y'' = 18x - 4$$

$$y''' = 18$$

Todas las derivadas siguientes son nulas.

DERIVACION NUMERICA

Los precedimientos de derivación numérica permiten calcular en forma aproximada el valor numérico de la derivada, conociendo sólo valores aislados de la variable y sus correspondientes de la función, esto es, cuando no se conoce la forma analítica de la función.

Sean los valores igualmente espaciados x_o, $x_o + h$, $x_o + 2h$, ..., para los cuales se conoce los valores correspondientes de la función: $f(x_o)$, $f(x_o + h)$, $f(x_o + 2h)$, ...,

Con estos valores se puede calcular las diferencias de sucesivos órdenes:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_o	$f(x_o)$	$\Delta f(x_o)$	$\Delta^2 f(x_o)$
$x_o + h$	$f(x_o + h)$	$\Delta f(x_o + h)$	$\Delta^2 f(x_o + h)$
$x_o + 2h$	$f(x_o + 2h)$	$\Delta f(x_o + 2h)$	.
$x_o + 3h$	$f(x_o + 3h)$	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Siendo $\Delta f(x_o) = f(x_o + h) - f(x_o)$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x_o + h) - \Delta f(x_o)$$

etc.

La siguiente fórmula permite calcular a partir de la información anterior, el valor numérico de la derivada, conociendo sólo valores igualmente espaciados de la variable independiente y de la función.

$$\boxed{D\,f(x_o) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_o) - \frac{\Delta^2 f(x_o)}{2} + \frac{\Delta^3 f(x_o)}{3} - \ldots\right]}$$

Para que esta fórmula sea válida es necesario que las diferencias de primer orden, segundo orden, etc. sean cada vez menores. En otros términos se requiere que la serie sea convergente, y para ello - según se verá en el capítulo V - las diferencias deberán tender a cero.

<u>Ejercicio</u>: Calcular la tasa instantánea de mortalidad por edad

$$\mu(x) = -\frac{1}{l(x)}\,\frac{dl(x)}{dx}$$

para la edad $x = 5$, a partir de la siguiente información obtenida de una tabla de vida:

$l(5) = 92476$; $l(6) = 92\,366$; $l(7) = 92\,272$; $l(8) = 92\,190$
$l(9) = 92\,118$; $l(10) = 92\,052$

<u>Solución</u>: Calculando las diferencias sucesivas de primer orden, segundo orden, etc. se tiene:

x	l(x)	$\Delta l(x)$	$\Delta^2 l(x)$	$\Delta^3 l(x)$	$\Delta^4 l(x)$
5	92 476	- 110	16	- 4	+ 2
6	92 366	- 94	12	- 2	- 2
7	92 272	- 82	10	- 4	
8	92 190	- 72	6		
9	92 118	- 66			
10	92 052				

La fórmula de derivación numérica es :

$$D\,l(x_o) = \frac{1}{h}\left[l(x_o) - \frac{\Delta^2 l(x_o)}{2} + \frac{\Delta^3 l(x_o)}{3} - \dots \right]$$

Reemplazando los valores numéricos, resulta :

$$l'(5) \simeq (-110) - \frac{16}{2} + \frac{(-4)}{3} - \frac{2}{4}$$

$$= -110 - 8 - 1.3 - 0.5 = -119.8$$

$$\mu(5) = \frac{l'(5)}{l(5)} = \frac{-119.8}{92\,476} = \underline{0.00130}$$

APLICACIONES A LA DEMOGRAFIA

En el capítulo siguiente se empleará el concepto de derivada para analizar diferentes funciones demográficas. Aquí solamente se presentarán en forma resumida algunas funciones que se utilizan en Demografía, las cuales conceptualmente corresponden a la noción de derivada. Para un análisis más amplio puede verse el documento de J.Somoza "Poblaciones Teóricas".[1/]

1/ Jorge Somoza, Poblaciones Teóricas , CELADE, Serie B, No. 20, Santiago, Chile.

1. Incremento anual de la población en t

Según se ha visto al principio del capítulo, el incremento medio anual de la población para un intervalo finito de la variable es igual a

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t_1) - N(t_o)}{t_1 - t_o}$$

Si se toma límite a esta expresión para $\Delta t \to 0$ se llega a la definición de derivada

$$\text{(II-5)} \qquad \frac{dN(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t_1) - N(t_o)}{t_1 - t_o}$$

la cual demográficamente representa el incremento anual de la población en t. Esta derivada también recibe el nombre de densidad anual de incremento en t.

Por ejemplo, dada la función

$$\text{(II-6)} \quad N(t) = 6\,000 + 234t + 9t^2 + 2t^3$$

obtener el crecimiento anual de la población en el momento $t_o = 1$

<u>Solución:</u> Calculando la derivada de (II-6) y dando a $\underline{t}$ el valor 1, se tiene:

$$N'(t) = 234 + 18t + 6t^2$$

$$N'(1) = 234 + 18(1) + 6(1^2)$$

$$= 258$$

2. Tasa anual de crecimiento de la población

La tasa anual media de crecimiento de la población correspondiente a un intervalo $t_o \leq t \leq t_1$ es igual a

$$r(t_o, t_1) = \frac{\dfrac{N(t_1) - N(t_o)}{t_1 - t_o}}{\bar{N}(t_o, t_1)} = \frac{\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}}{\bar{N}(t_o, t_1)}$$

donde el numerador es el crecimiento medio de la población en el intervalo $t_o \leq t \leq t_1$ y el denominador es la población media de dicho intervalo.

Si se toma límite para $\Delta t \longrightarrow 0$, se obtiene la <u>tasa anual de crecimiento en t</u>

$$\text{(II-7)} \quad r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}}{\bar{N}(t_o, t_1)} = \frac{DN(t)}{N(t)}$$

Ejemplo:

Calcular la tasa anual de crecimiento en el momento $t_o = 1$, de la función (II-6) considerada arriba.

Solución:

$$\text{(II-7)} \qquad r(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}$$

$$\text{(II-8)} \qquad r(1) = \frac{N'(1)}{N(1)}$$

$$\text{(II-9)} \qquad N(t) = 6\,000 + 234t + 9t^2 + 2t^3$$

$$\text{(II-10)} \qquad N'(t) = 234 + 18\,t + 6\,t^2$$

Haciendo en (II-9) y (II-10) $t = 1$, resulta

$$N(1) = 6\,000 + 234 + 9 + 2 = 6\,245$$

$$N'(1) = 234 + 18 + 6 = 258$$

Reemplazando estos valores en (II-8) se llega al valor de la tasa

$$r(1) = \frac{N'(1)}{N(1)} = \frac{258}{6\,245} = \underline{0.04131}$$

3. Densidad anual de nacimientos, B(t)

Esta función, como las otras consideradas en este punto, aparecen en los estudios teóricos de población.

Denominando $B(t_o, t_1)$ los nacimientos ocurridos en el intervalo $t_o \leq t \leq t_1$, el límite

$$\text{(II-11)} \qquad B(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t_o, t_1)}{t_1 - t_o}$$

se denomina densidad anual de nacimientos en t. En algunos textos, por ejemplo en el clásico libro de Lotka sobre Poblaciones Teóricas [2/] se le denomina simplemente: nacimientos anuales de la época t. Más adelante en los capítulos IV y V se emplea este concepto en algunas relaciones entre variables.

4. Densidad anual de muertes, D(t)

En la misma forma, el límite:

$$\text{(II-12)} \qquad D(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{D(t_o, t_1)}{t_1 - t_o}$$

Recibe el nombre de densidad anual de muertes en t, o abreviadamente, defunciones anuales en la época t.

2/ Alfred J., Lotka, Teoría analítica de las asociaciones biológicas , CELADE, Santiago, Chile, 1969.

5. Densidad de distribución por edades

Simbolizando con $C(x_o, x_1)$ la proporción de personas con edades comprendidas entre x_o y x_1, el límite

$$\text{(II-13)} \qquad \dot{c}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_o x_1)}{x_1 - x_o}$$

se denomina densidad de distribución por edades. Lotka[3] lo denomina coeficiente de distribución por edades.

Este concepto que se refiere a una variación continua de la edad, se corresponde con la distribución por grupos de edades en el campo discreto.

6. Tasa anual instantánea de fecundidad

Dada la tasa de fecundidad por grupos de edades

$$_nf_x = \frac{B(x, x+n)}{N(x, x+n)}$$

donde $B(x, x+n)$ son los nacimientos de mujeres con edades comprendidas entre x, $x+n$; y $N(x, x+n)$ la población femenina de ese grupo de edades, su límite

$$\text{(II-14)} \qquad f(x) = \lim_{n \to 0} {}_nf_x = \lim_{n \to 0} \frac{B(x, x+n)}{N(x, x+n)}$$

3/ Alfred J., Lotka, Op.cit., p. 68

$$= \lim_{n \to 0} \frac{\dfrac{B(x, x+n)}{n}}{\dfrac{N(x, x+n)}{n}} = \frac{B(x)}{N(x)}$$

se denomina tasa anual <u>instantánea de fecundidad</u>. $B(x)$ es la densidad de nacimientos de mujeres de edad x, y $N(x)$ es la densidad de personas de edad x. La función $f(x)$ del campo continuo, se corresponde con la ${}_nf_x$ en el campo discreto.

EJERCICIOS DEL CAPITULO II

1. Dada la función

$$f(x) = x^2 - x + 3$$

calcular para el intervalo $x_o = 1$ a $x_o + \Delta x = 3$

(a) El incremento de la función: $\Delta f(x)$
(b) El incremento de la variable: Δx
(c) El cociente de incrementos: $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

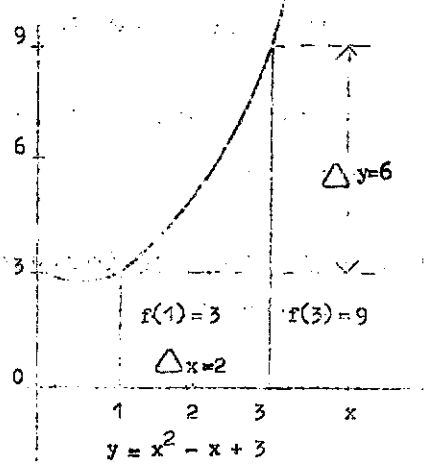
<u>Solución</u>

(a) $f(x) = f(3) - f(1) = 9-3 = 6$

(b) $\Delta x = x_1 - x_o = 3-1 = 2$

(c) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{6}{2} = 3$

Gráfico II-5



2. Aplicando la definición, calcular la derivada de la siguiente función

$$f(x) = x^3$$

Solución

$$f(x+h) = (x+h)^3 \quad ; \quad h = \triangle x$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3$$

$$= x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3$$

$$\triangle f(x) = 3x^2 h + 3xh^2 + h^3$$

$$\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = 3x^2 + 0 + 0$$

$$f'(x) = 3x^2$$

3. Dada la función $f(x) = x^2 + x$

(a) Calcular el incremento medio de la función en los siguientes intervalos:

desde $x_o = 1$ hasta: $x_1=2$; $x_2=1.5$; $x_3=1.1$; $x_4=1.05$; $x_5= 1.01$

(b) Calcular la derivada en el punto $x_o = 1$ y comparar los resultados.

Solución

(a) $$\frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 2}{1} = 4$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_o)}{x_2 - x_o} = \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1} = \frac{3.75 - 2}{0.5} = 3.50$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_o)}{x_3 - x_o} = \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{2.31 - 2}{0.1} = 3.10$$

$$\frac{f(x_4) - f(x_o)}{x_4 - x_o} = \frac{f(1.05) - f(1)}{1.05 - 1} = \frac{2.1525 - 2}{0.05} = 3.05$$

$$\frac{f(x_5) - f(x_o)}{x_5 - x_o} = \frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1} = \frac{2.0301 - 2}{0.01} = 3.01$$

(b) $$f(x) = x^2 + x$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(1) = 2(1) + 1 = 3$$

O sea que a medida que el incremento de la variable se va acercando a cero, el incremento medio de la función va tendiendo hacia el valor de la derivada, que es el cociente de incrementos para un intervalo infinitesimal.

4. Derivar con respecto a <u>x</u>

(a) $y = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$

$y' = 3(3x^2) + 2(2x) - 1$

$= 9x^2 + 4x - 1$

(b) $y = 2x^2 + x - 2$

$y' = 4x + 1$

(c) $y = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$

$y' = 3(-x^{-2}) = -\frac{3}{x^2}$

5. Derivar con respecto a <u>x</u>

(a) $y = (x^3 + 2)^4$

$y' = 4(x^3 + 2)^3 \frac{d}{dx}(x^3 + 2)$

$= 4(x^3 + 2)^3\ 3x^2 = 12x^2\ (x^3 + 2)^3$

(b) $y = (x^2 + x - 1)^2$

$y' = 2(x^2 + x - 1)\ (2x + 1)$

(c) $y = \sqrt{x^4 - 1} = (x^4 - 1)^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{2}\,(x^4 - 1)^{-1/2}\,(4x^3) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

(d) $y = \dfrac{3 - 2x}{3 + 2x}$

$$y' = \frac{(3 + 2x)\,\frac{d}{dx}\,(3 - 2x) - (3 - 2x)\,\frac{d}{dx}\,(3 + 2x)}{(3 + 2x)^2}$$

$$= \frac{(3 + 2x)(-2) - (3 - 2x)\,2}{(3 + 2x)^2} = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

6. Calcular la derivada en el punto $x_o = 2$, de la siguiente función

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 1)\;2x = 4x\,(x^2 - 1)$$

$$f'(2) = 4(2)\;(2^2 - 1) = \underline{24}$$

7. Calcular la tasa de crecimiento de la función logística

$$N(t) = \frac{k}{1 + e^{-r_i t}} \;;\quad k;\ r_i = \text{parámentros positivos}$$

Solución

Aplicando la fórmula 8 correspondiente a la derivada de un cociente, se tiene

$$N'(t) = \frac{0 - k\,e^{-r_i t}\,(-r_i)}{(1+e^{-r_i t})^2} = \frac{r_i\,k\,e^{-r_i t}}{(1+e^{-r_i t})^2}$$

Por lo tanto la tasa de crecimiento será:

$$r(t) = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{\dfrac{r_i\,k\,e^{-r_i t}}{(1+e^{-r_i t})^2}}{\dfrac{k}{1+e^{-r_i t}}} = \frac{r_i\,e^{-r_i t}}{1+e^{-r_i t}} = \frac{r_i}{1+e^{r_i t}}$$

Este resultado muestra que la tasa de crecimiento de la logística es también una función logística, pero de forma contraria a la anterior. A medida que t crece la tasa de crecimiento de la logística va disminuyendo permanentemente desde un valor inicial r_i hasta hacerse asintótica al eje de las abscisas.

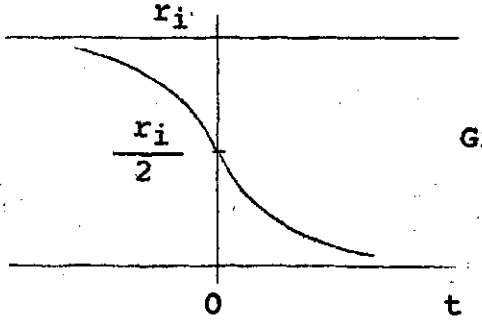


Gráfico II-6

Capítulo III

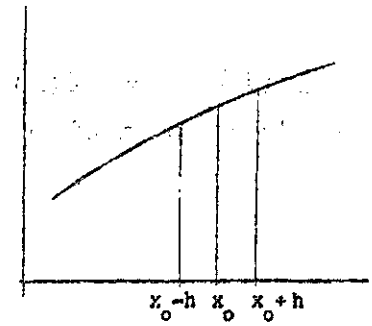
MAXIMOS Y MINIMOS

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Una función $y = f(x)$ es <u>creciente</u> en un punto x_o, cuando dado un <u>h</u> positivo e infinitamente pequeño, se verifica

$$f(x_o - h) < f(x_o) < f(x_o + h)$$

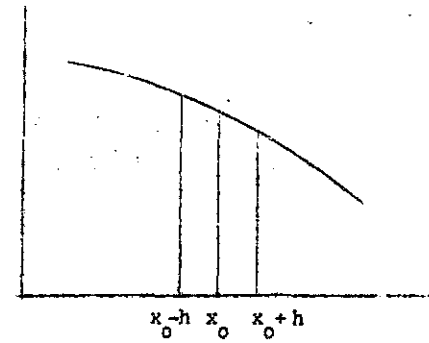
Gráfico III-1



Análogamente, una función $y=f(x)$ es <u>decreciente</u> en un punto x_o, cuando se verifica

$$f(x_o - h) > f(x_o) > f(x_o + h)$$

Gráfico III-2



Si una función es creciente en un punto, el incremento de la función es del mismo signo que el incremento de la variable. El cociente de incrementos será positivo y el límite, que define la derivada (si existe), será también positivo.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0 \quad ; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) > 0$$

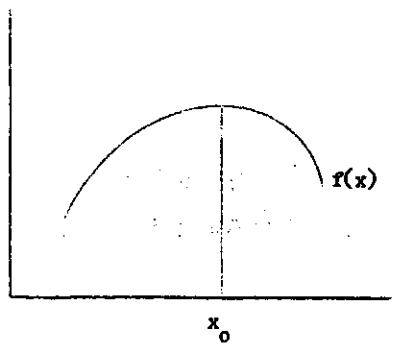
Del mismo modo, si una función es decreciente en un punto, el incremento de la función es de signo contrario que el incremento de la variable. El cociente de incrementos será negativo y el límite, o sea la derivada, será también negativa.

MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION

Una función $y = f(x)$ presenta un <u>máximo relativo</u> en un punto x_o, cuando se verifica

Gráfico III-3

$$f(x_o) > f(x)$$

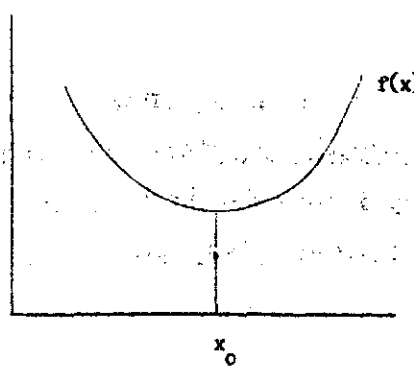


para valores de <u>x</u> en el entorno reducido de x_o.

Una función $y = f(x)$ presenta un <u>mínimo relativo</u> en un punto x_o, cuando se verifica

Gráfico III-4

$$f(x_o) < f(x)$$



para valores de <u>x</u> en el entorno reducido de x_o.

Condiciones para la existencia de un máximo

Si una función derivable $y = f(x)$ presenta un máximo en un punto x_o, a la izquierda de ese punto la función es creciente y su derivada positiva.

En el punto x_o, la derivada es nula, pues la tangente geométrica a la curva es una paralela al eje de las abscisas y su coeficiente angular, o sea la derivada, es cero.

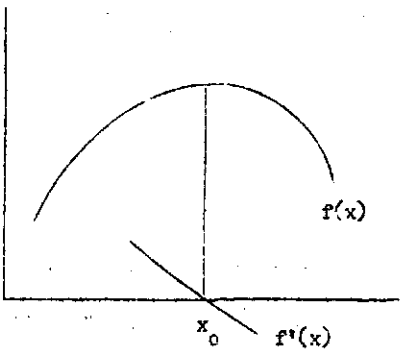
A la derecha de x_o la función es decreciente y su derivada negativa. Es decir,

si $x < x_o$; $f'(x) > 0$

si $x = x_o$; $f'(x_o) = 0$

si $x > x_o$; $f'(x) < 0$

Gráfico III-9



La derivada primera es positiva a la izquierda de x_o, nula en x_o y negativa a la derecha. Por lo tanto $f'(x)$ es decreciente en x_o.

Si la derivada primera es decreciente, su derivada, o sea la derivada segunda de $f(x)$, será negativa en el punto x_o. Que son las condiciones para la existencia de un máximo relativo:

$$\boxed{f'(x_o) = 0} \quad ; \quad \boxed{f''(x_o) < 0}$$

Condiciones para la existencia de un mínimo

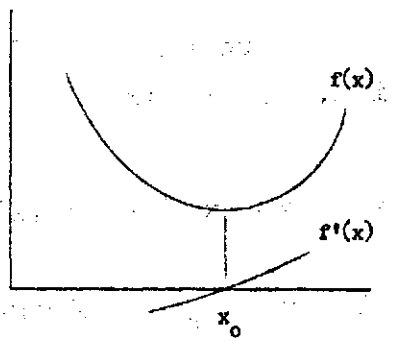
De igual manera, si una función $y = f(x)$ presenta un mínimo en x_o, a la izquierda de ese punto, la función es decreciente y su derivada negativa, en x_o la derivada es nula, y a la derecha la función es creciente y su derivada positiva. Es decir,

si $x < x_o$; $f'(x) < 0$

si $x = x_o$; $f'(x_o) = 0$

si $x > x_o$; $f'(x) > 0$

Gráfico III-6



La derivada primera $f'(x)$ es creciente en x_o, y su derivada o sea la derivada segunda de $f(x)$ será positiva en el punto x_o. Por lo tanto las condiciones para la existencia de un mínimo relativo son:

$$\boxed{f'(x_o) = 0} \quad ; \quad \boxed{f''(x_o) > 0}$$

Los valores de x para los cuales la derivada primera es igual a cero se denominan valores críticos.

Es de interés tener en cuenta las siguientes observaciones:

Si $f''(x) = 0$, el máximo o mínimo puede determinarse según el comportamiento de la derivada primera:

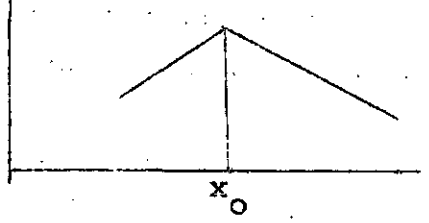
$f(x)$ tendrá un máximo en x_o, si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa en ese punto,

$f(x)$ tendrá un mínimo en x_o, si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva.

Para verificar lo anterior basta con determinar el signo de la derivada a la izquierda y derecha del valor crítico.

Por otra parte una función puede tener un máximo o mínimo en un punto x_o aunque no exista $f'(x_o)$, es decir aunque la función no sea derivable. Un ejemplo típico es la función representada en el gráfico III-7 que presenta un punto anguloso en x_o.

Gráfico III-7



Los valores de $x = x_o$ en los cuales $f(x)$ está definida pero no existe $f'(x)$ también reciben el nombre de valores críticos. En estos casos el máximo o mínimo puede determinarse, como en el caso anterior, según el comportamiento de la derivada primera :

$f(x)$ tendrá máximo en x_o, si $f'(x)$ pasa de + a −

$f(x)$ tendrá mínimo en x_o, si $f'(x)$ pasa de − a +.

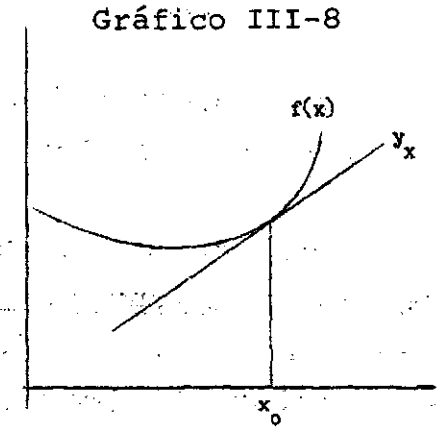
(Ver ejercicio 4 al final).

CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

Concavidad

Una función $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en un punto x_o, cuando para valores de $\underline{x}$ en el entorno reducido de x_o, se verifica

Gráfico III-8



$$f(x) > y_x$$

siendo y_x la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x_o; es decir $f(x_o) = y_{x_o}$.

En otras palabras una función es cóncava en un punto si la función está situada por encima de la tangente.

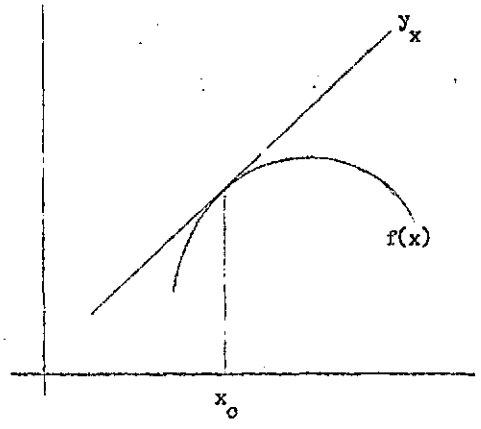
Si la función es cóncava en x_o, la derivada primera es creciente ya que la pendiente va aumentando y

$$\boxed{f''(x_o) > 0}$$

Convexidad

Una función $y = f(x)$ es convexa hacia arriba en un punto x_o, cuando para valores de $\underline{x}$ en el entorno reducido de x_o, se verifica,

Gráfico III-9



$$f(x) < y_x$$

siendo y_x la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x_o. En este caso la función está situada por debajo de la tangente.

Si la función es convexa en x_o, la derivada primera es decreciente ya que la pendiente va disminuyendo y

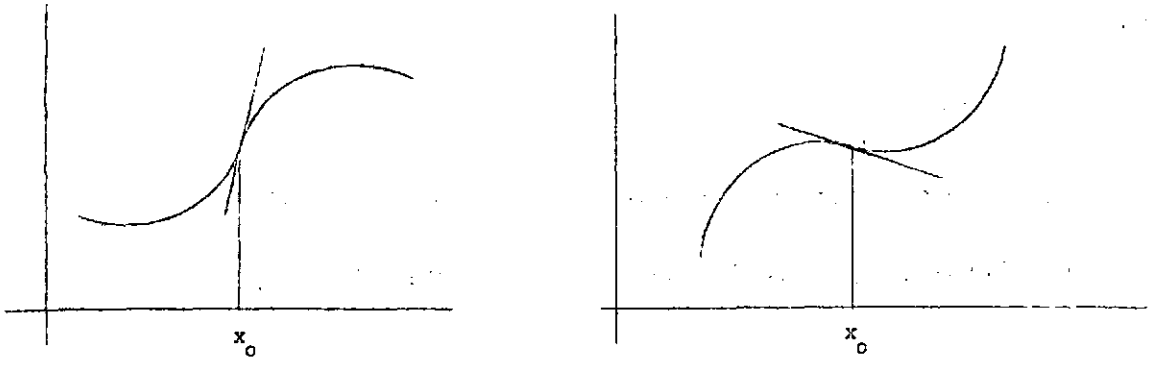
$$\boxed{f''(x_o) < 0}$$

Una función es cóncava o convexa en un intervalo, cuando lo es en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Punto de inflexión

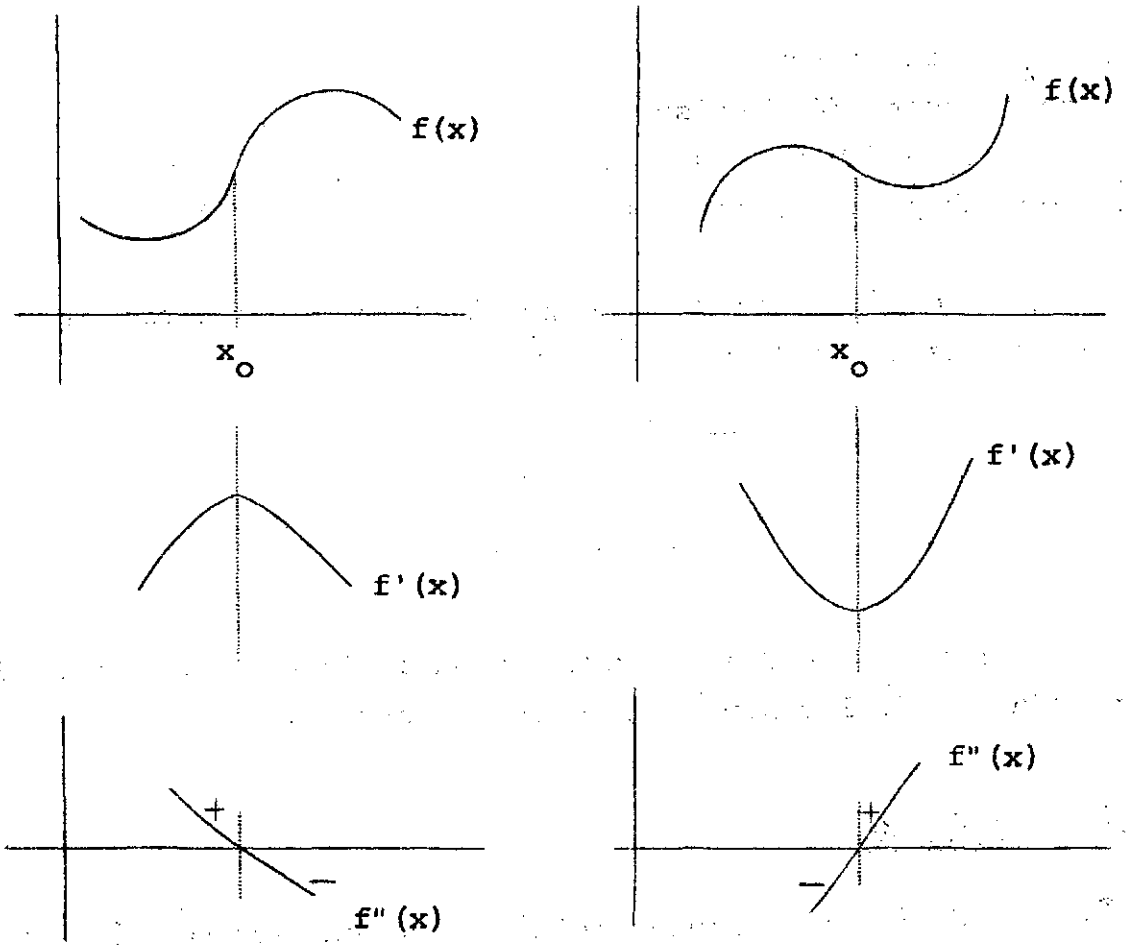
Es aquél que se presenta donde la función pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

Gráfico III-10



Si la función presenta un punto de inflexión en un punto x_o, su derivada primera $f'(x)$ crece (decrece) hasta el punto x_o y de ahí comienza a decrecer (crecer), por lo tanto la derivada segunda cambia de signo en ese punto.

Gráfico III-11



Por lo tanto una función presenta un punto de inflexión en x_o,

si $f''(x_o) = 0$, y

si $f''(x_o)$ cambia de signo en el entorno de x_o

La última condición equivale a $f'''(x_o) \neq 0$.

En resumen:

Función creciente en x_o : $f'(x_o) > 0$

Función decreciente en x_o : $f'(x_o) < 0$

Máximo en x_o : $f'(x_o) = 0$; $f''(x_o) < 0$

Mínimo en x_o : $f'(x_o) = 0$; $f''(x_o) > 0$

Intervalo de concavidad : $f''(x) > 0$

Intervalo de convexidad : $f''(x) < 0$

Punto de inflexión : $f''(x_o) = 0$; $f'''(x_o) \neq 0$

EJERCICIOS

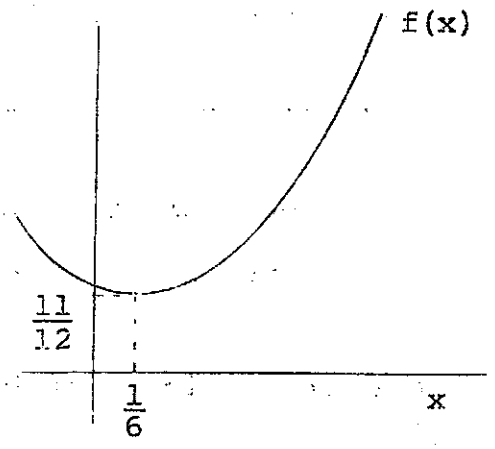
1. Dada la función

(III-1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

Calcular

(a) Valores críticos
(b) Intervalos en los cuales la función es creciente y decreciente

Gráfico III-12



Solución

(a) Valores críticos son aquellos valores de x que anulan la derivada primera. Derivando la función (III-1) e igualando a cero resulta,

$$f'(x) = 6x - 1 = 0$$
$$x = 1/6$$

Hay un solo valor crítico.

Para $x = 1/6$ el valor correspondiente de la función es

$$f(\tfrac{1}{6}) = 3(\tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{1}{6} + 1 = \tfrac{11}{12}$$

(b) Las condiciones para que una función sea creciente o decreciente son

creciente : $f'(x) > 0$

decreciente: $f'(x) < 0$

En la derivada primera, ya calculada,

$$f'(x) = 6x - 1 = 0 \quad ; \quad x = \frac{1}{6}$$

si $x > 1/6$; $f'(x) > 0$

si $x < 1/6$; $f'(x) < 0$

En consecuencia la función (III-1) es

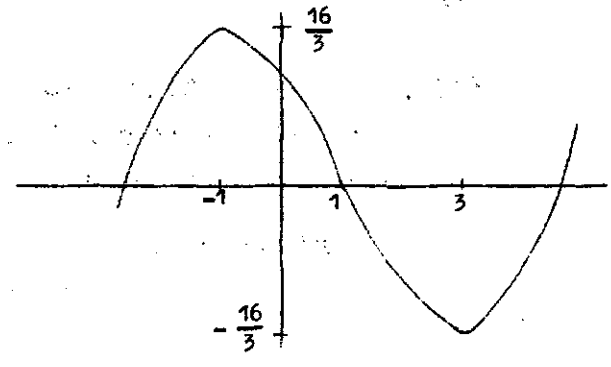
decreciente en el intervalo $-\infty < x < 1/6$

creciente en el intervalo $1/6 < x < +\infty$

2. Hallar los máximos y mínimos relativos de la siguiente función

$$\text{(III-2)} \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \frac{11}{3}$$

Gráfico III-13



Solución

Una función presenta un máximo o mínimo donde se verifica,

$$\text{máximo}: \quad f'(x_o) = 0 \quad ; \quad f''(x_o) < 0$$

$$\text{mínimo}: \quad f'(x_o) = 0 \quad ; \quad f''(x_o) > 0$$

Los valores de $\underline{x}$ que anulan la derivada primera, o sea los valores críticos, son

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Reemplazando estos valores $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$, en la derivada segunda, se tiene

$$f''(x) = 2x - 2$$

$$f''(-1) = 2(-1) - 2 = -4 < 0 \text{ (máximo)}$$

$$f''(3) = 2(3) - 2 = 4 > 0 \text{ (mínimo)}$$

En $x_1 = -1$ la función(III-2) vale

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) + \frac{11}{3} = \frac{16}{3}$$

Y en $x_2 = 3$

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3(3) + \frac{11}{3} = -\frac{16}{3}$$

Por lo tanto la función (III-2) presenta

máximo en el punto $(-1, 16/3)$

mínimo en el punto $(3, -16/3)$

3. En la misma función del ejercicio anterior,

$$\text{(III-2)} \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \frac{11}{3}$$

Calcular

(a) Puntos de inflexión

(b) Intervalos de concavidad y convexidad

<u>Solución</u>

(a) Las condiciones para la existencia de un punto de inflexión son

$$f''(x_o) = 0 \text{ , y}$$
$$f'''(x_o) \neq 0$$

Derivando sucesivamente, se tiene

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \frac{11}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f''(x) = 2x - 2 = 0 \; ; \; x_o = 1$$

$$f'''(x) = 2$$

$$f'''(1) = 2 \neq 0$$

Por lo tanto la función f(x) presenta un punto de inflexión en $x_o = 1$.

(b) Una función es cóncava o convexa hacia arriba donde se verifique

concavidad : $f''(x) > 0$

convexidad : $f''(x) < 0$

Partiendo de la derivada segunda

$$f''(x) = 2x - 2 = 0 \; ; \; x_o = 1$$

Si $x > 1$; $f''(x) > 0$ (cóncava)

Si $x < 1$; $f''(x) < 0$ (convexa)

Por lo tanto la función presenta

concavidad en el intervalo $1 < x < +\infty$

convexidad en el intervalo $-\infty < x < 1$

ANALISIS DE FUNCIONES DEMOGRAFICAS

A continuación se considera en detalle la forma matemática y su correspondiente gráfico, de algunas relaciones entre variables demográficas.

1. Forma matemática de la función

$$f(x) = C(x - s)(s + n - x)^2 \; ; \text{ para } s \leq x \leq s + n$$

donde f(x) es la fecundidad por edad de las mujeres, x es la edad, s el comienzo de la vida reproductiva, n la amplitud del intervalo de reproducción y C un parámetro positivo que depende del nivel de la fecundidad.

Esta función ha sido utilizada con frecuencia en modelos teóricos, por William Brass, para describir en forma aproximada la variación de la fecundidad según la edad de las mujeres. 1/

Se analizará la forma matemática de esta curva, en el caso particular: $s = 15$; $n = 33$. Para ello se considerará sucesivamente:

(a) Máximos y mínimos

(b) Puntos de inflexión

(c) Intervalos de concavidad y convexidad

(d) $f(s)$ y $f(s + n)$

(e) Representación gráfica

1/ W., Brass, The Demography of Tropical Africa, Princeton University Press, 1968, Capítulo 3, Apéndice A.

Solución

(a) Dando a la función de fecundidad los valores particu — lares $s = 15$ y $n = 33$, se tiene

$$\text{(III-3)} \quad f(x) = C(x - 15)(48 - x)^2 \; ; \text{ para } 15 \leq x \leq 48$$

$$= C(x^3 - 111x^2 + 3\,744x - 34\,560)$$

Derivando con respecto a x resulta,

$$f'(x) = C(3x^2 - 222x + 3\,744)$$

Los valores de x que anulan la derivada primera, o sea los valores críticos son:

$$f'(x) = C(3x^2 - 222x + 3\,744) = 0$$

Como C es distinto de cero, debe ser :

$$3x^2 - 222x + 3\,744 = 0$$

$$x = \frac{222 \pm \sqrt{(222)^2 - 4(3)3\,744}}{6}$$

$$= \frac{222 \pm \sqrt{4\,356}}{6} = \begin{cases} x_1 = 26 \\ x_2 = 48 \end{cases}$$

Calculando la derivada segunda y dando a $\underline{x}$ los valores críticos $x_1 = 26$ y $x_2 = 48$, se tiene

$$f'(x) = C(3x^2 - 222x + 3\,744)$$

$$f''(x) = C(6x - 222)$$

$$f''(26) = C\ \ 6(26) - 222$$

$$= C\ (156 - 222) < 0 \quad \text{(máximo)}$$

$$f''(48) = C\ \ 6(48) - 222$$

$$= C\ (288 - 222) > 0 \quad \text{(mínimo)}$$

En el máximo la función (III-3) vale

$$f(26) = C(26 - 15)\ (48 - 26)^2 = 5\,324\,C$$

Y en el mínimo

$$f(48) = C(48 - 15)\ (48 - 48)^2 = 0$$

Por lo tanto la función f(x) presenta,

máximo en el punto (26, 5 324 C)

mínimo en el punto (48, 0)

(b) Partiendo de la derivada segunda, se tiene

$$f''(x) = C(6x - 222) = 0$$

$$6x - 222 = 0$$

$$x = \frac{222}{6} = 37$$

$f'''(x) = C\ 6 \neq 0$

Por lo tanto f(x) presenta un punto de inflexión en $x = 37$

En cuyo calor la función (III-3) vale

$f(37) = C(37 - 15)\ (48 - 37)^2 = 2\,662C$

(c) Partiendo de la derivada segunda,

$f''(x) = C(6x - 222) = 0\ ;\quad x = 37$

Si $x < 37\ ;\quad f''(x) < 0$ (convexa)

Si $x > 37\ ;\quad f''(x) > 0$ (cóncava)

Por lo tanto la función presenta,

intervalo de convexidad $15 \leq x < 37$

intervalo de concavidad $37 < x \leq 48$

En realidad los intervalos son $-\infty < x < 37$ y $37 < x < +\infty$ respectivamente, pero la función ha sido definida en el intervalo más restringido $15 \leqslant x \leqslant 48$.

(d) $f(x) = C(x - 15)\ (48 - x)^2$

$f(15) = C(15 - 15)\ (48 - x)^2 = 0$

$f(48) = C(48 - 15)\ (48 - 48)^2 = 0$

Resumiendo, la función de fecundidad (III-3) presenta:

Máximo en el punto : (26, 5 324C)

Mínimo en el punto : (48, 0)

Punto de inflexión en : (37, 2 662C)

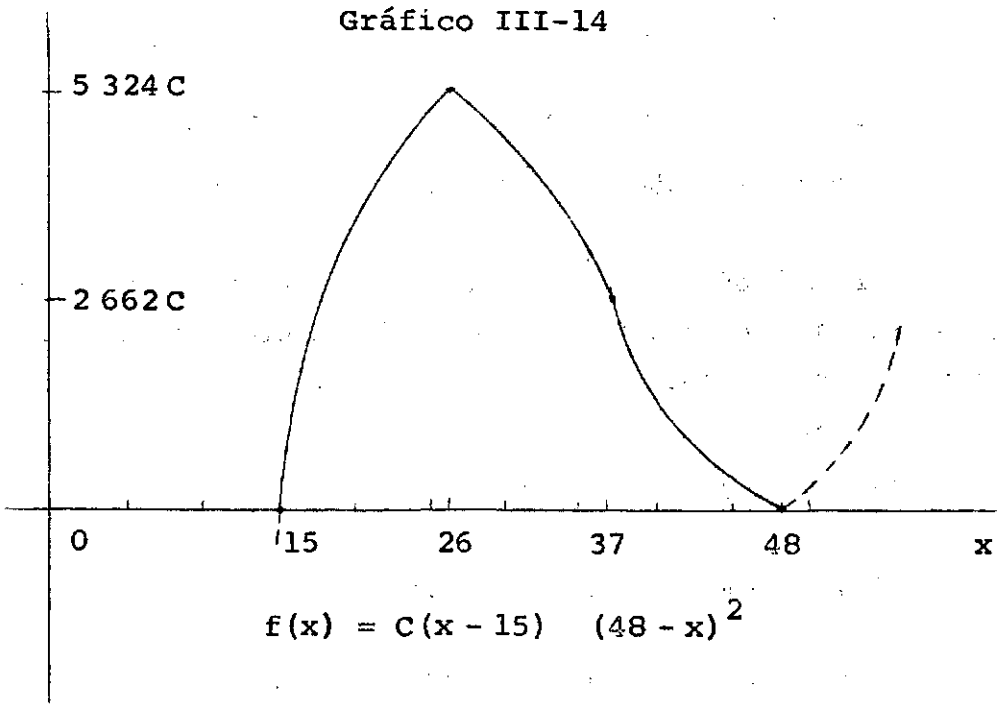
Intervalo de convexidad: $15 \leq x < 37$

Intervalo de concavidad: $37 < x \leq 48$

Valores particulares : $f(15) = 0$; $f(48) = 0$

(e) En base a la información anterior, la representación gráfica es la siguiente:

Gráfico III-14



$f(x) = C(x - 15) \quad (48 - x)^2$

2. Forma matemática de la función

$$(III\text{-}4) \qquad m = 10^{a+bt}$$

donde m es la tasa de mortalidad de un grupo de edad cualquiera, t tiempo, a y b parámetros.

Esta función ha sido utilizada para proyectar las tasas de mortalidad por edad a través del tiempo.[2/] Asimismo, debido a la gran flexibilidad que presenta este tipo de funciones, se la suele utilizar para ajustar puntos que muestran la tendencia de diversos fenómenos demográficos.

Se analizará el comportamiento de esta función para diferentes valores de a y b, en relación con :

(a) Intervalos en que la función es creciente y decreciente

(b) Máximos y mínimos

(c) Puntos de inflexión

(d) Intervalos de concavidad y convexidad

(e) Límite para: i) $t \to +\infty$; ii) $t \to -\infty$

(f) Valor de la función en el momento $t = 0$

(g) Comportamiento gráfico para diferentes valores de los parámetros a y b.

Solución

(a) Derivando la función (III-4) con respecto a t, se tiene

$$m' = 10^{a+bt} (\ln 10)\, b$$

2/ J.C. Elizaga, Métodos demográficos para el estudio de la mortalidad, CELADE, 1969.

La función 10^{a+bt}, por ser exponencial, es positiva para todo t; $\ln 10 = 2.3026$ es también positivo. Por lo tanto el signo de la derivada primera depende de b:

si $b > 0$; $m' > 0$ (la función (III-4) es creciente)

si $b < 0$; $m' < 0$ (la función (III-4) es decreciente)

(b) Igualando a cero la derivada primera, se tiene

$$\text{(III-5)} \quad m' = 10^{a+bt}(\ln 10)\, b = 0$$

Si $b = 0$ la derivada primera es nula; en este caso la función (III-4) se transforma en una constante.

$$m = 10^{a+0t} = 10^{a}$$

Si $b \neq 0$ no hay ningún valor de t para el cual la derivada (III-5) se haga igual a cero, cualesquiera sean los valores de a y b. Por lo tanto la función III-4 no presenta máximo ni mínimo.

(c) Calculando la derivada segunda e igualando a cero, resulta

$$\text{(III-6)} \quad m'' = b^2(\ln 10)^2\, 10^{a+bt} = 0$$

No hay valor de t que haga (III-6) igual a cero. La función (III-6) no presenta punto de inflexión cualesquiera sean a y b.

(d) Para todo a y b la derivada segunda (III-6) es mayor que cero. En consecuencia la función (III-4) es cóncava en todo su recorrido.

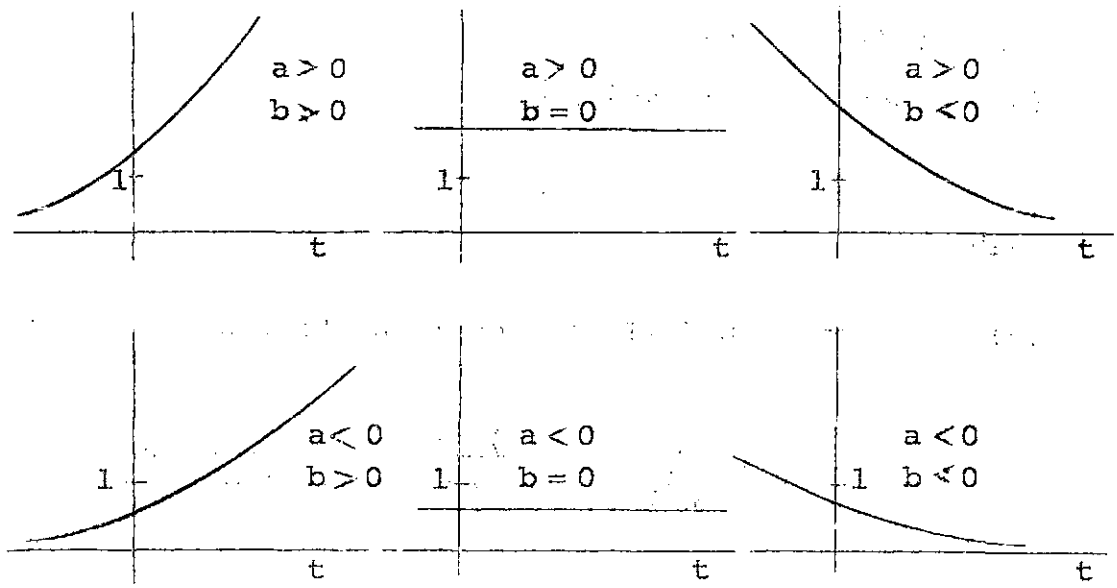
(e) i. $\lim_{t \to +\infty} 10^{a+bt} \begin{cases} = +\infty, & \text{si } b > 0 \\ = 10^{a}, & \text{si } b = 0 \\ = 0, & \text{si } b < 0 \end{cases}$

ii. $\lim_{t \to -\infty} 10^{a+bt} \begin{cases} = 0, & \text{si } b > 0 \\ = 10^{a}, & \text{si } b = 0 \\ = +\infty, & \text{si } b < 0 \end{cases}$

(f) $m(o) = 10^{a}$

(g) En base a la información anterior, la representación gráfica de la función (III-4) se indica a continuación.

Gráfico III-15: Función $m = 10^{a+bt}$



La forma exacta de las curvas depende de los valores numéricos de a y b .

3. La función "logito de x", se define

$$y = \text{logito } x$$

$$\text{(III-7)} \qquad = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1-x}$$

para valores de x en el intervalo abierto $0 < x < 1$. Esta función ha sido introducida en la Demografía por W. Brass, quien la ha empleado extensamente para hacer estimaciones de la mortalidad en países con información incompleta.[3/]

En relación con esta función (III-7) se analizará :

(a) Intervalos en los cuales la función es creciente y decreciente

(b) Máximos y mínimos

(c) Puntos de inflexión

(d) Intervalos de concavidad y convexidad

(e) Límites laterales para i) $x \to 0^+$; ii) $x \to 1^-$

(f) $y(1/4)$; $y(3/4)$

(g) Comportamiento gráfico

Solución

(a) Derivando en (III-7), con respecto a x, se tiene

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2x(1-x)} > 0$$

3/ W., Brass, Sobre la escala de la mortalidad, CELADE, Serie DS No. 7, San José, Costa Rica, 1971.

Para todo valor de $\underline{x}$ del intervalo $0 < x < 1$ la derivada primera es positiva. Por lo tanto la función logito (III-7) es creciente para todo $\underline{x}$ de su campo de variación

(b) Igualando a cero la derivada primera, resulta

$$\text{(III-8)} \quad y' = \frac{1}{x(1-x)} = 0$$

No hay ningún valor de $\underline{x}$ del intervalo $0 < x < 1$, en el cual la ecuación (III-8) es igual a cero. De aquí resulta que la función logito no presenta máximo ni mínimo relativo.

(c) Calculando la derivada segunda e igualando a cero, se tiene

$$y' = \frac{1}{2x(1-x)} = \frac{1}{2x - 2x^2}$$

$$y'' = \frac{-(2-4x)}{(2x-2x^2)^2} = 0$$

El denominador es diferente de cero; en consecuencia deberá ser

$$4x - 2 = 0$$

resultado $x = 1/2$. Para este valor la función (III-7) vale

$$y(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1/2}{1 - 1/2} = 0$$

En consecuencia la función logito presenta punto de inflexión en el punto $(1/2, 0)$.

(d) Partiendo de la derivada segunda

$$y'' = \frac{4x - 2}{(2x - 2x^2)^2} \qquad (= 0, \text{ para } x = 1/2)$$

Si $x < 1/2$; $y'' < 0$ (convexa)

Si $x > 1/2$; $y'' > 0$ (cóncava)

La función logito presenta :

Intervalo de convexidad $0 < x < 1/2$

Intervalo de concavidad $1/2 < x < 1$

(e) i. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1-x} = -\infty$

cuando x tiende a cero por valores positivos

$1 - x$ tiende a uno

$\frac{x}{1-x}$ tiende a cero por valores positivos

$\ln \frac{x}{1-x}$ tiende a menos infinito

ii. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1-x} = +\infty$

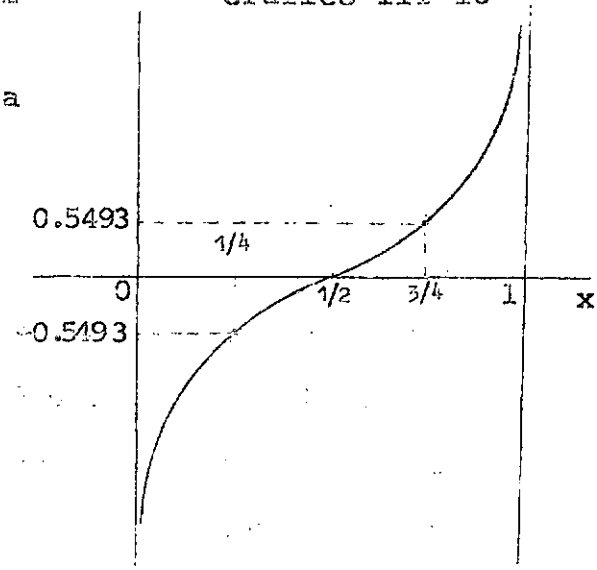
(f) $y(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1-x}$

$$y(1/4) = \frac{1}{2} \ln \frac{1/4}{1 - 1/4} = -\frac{1}{2} \ln 3 = -0.5493$$

$$y(3/4) = \frac{1}{2} \ln \frac{3/4}{1 - 3/4} = \frac{1}{2} \ln 3 = 0.5493$$

(g) De acuerdo con los resultados anteriores el comportamiento gráfico de la función logito es la siguiente :

Gráfico III-16



4. Forma analítica de la función

$$_nq_x = \frac{2\,n\;{}_nm_x}{2 + n\;{}_nm_x}$$

donde: ${}_nm_x$ es la tasa de mortalidad del intervalo de edades x, x+n, ${}_nq_x$ es la probabilidad de morir entre las edades x, x+n, y n es la amplitud del intervalo de edades.

Esta es una de las relaciones que suelen emplearse en la construcción de una tabla de vida para pasar de las tasas de mortalidad por edad conocidas, a las probabilidades de morir de la tabla.[4/]

4/ Reed y Merrell, Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D, No. 49.

Para abreviar se omitirán los subíndices escribiéndose solamente

$$\text{(III-9)} \quad q = \frac{2\,n\,m}{2 + n\,m}$$

Se calcularán:

(a) Intervalos en que la función es creciente o decreciente

(b) Máximos y mínimos

(c) Puntos de inflexión

(d) Intervalos de concavidad y convexidad

(e) Límite de la función para $m \longrightarrow +\infty$

(f) Valor de la función en el origen

(g) Comportamiento gráfico

Solución

(a) La derivada primera de (III-9), con respecto a m, es

$$q' = \frac{2n\ (2 + n\,m) - 2\,n^2 m}{(2 + n\,m)^2} = \frac{4\,n}{(2 + n\,m)^2}$$

la cual es positiva para todo m. Por lo tanto la función (III-9) es siempre creciente.

(b) Igualando a cero la derivada primera, resulta

$$q' = \frac{4\,n}{(2 + n\,m)^2} = 0$$

ningún valor de m satisface esta ecuación. De aquí resulta que la relación (III-9) no presenta máximo ni mínimo.

(c) Calculando q" e igualando a cero, resulta

$$q'' = \frac{-4n\ 2(2+n\,m)\,n}{(2+n\,m)^4} = \frac{-8\,n^2}{(2+n\,m)^3} = 0$$

Ningún valor de m es solución de esta ecuación; en consecuencia no existe punto de inflexión.

(d) La derivada segunda con respecto a m :

$$q'' = \frac{-8\,n^2}{(2+n\,m)^3}$$

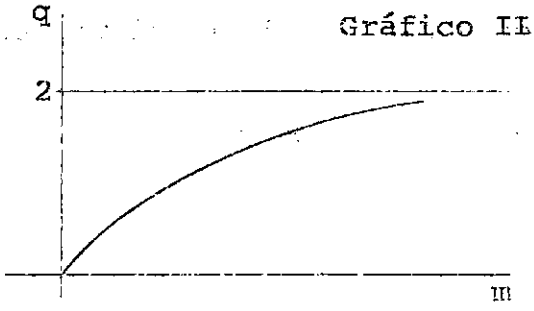
es negativa para todo m. Por lo tanto la función (III-9) es convexa en todo su recorrido.

(e) $$\lim_{m \to +\infty} \frac{2\,nm}{2+n\,m} = \lim_{m \to +\infty} \frac{2\,n}{\frac{2}{m}+n} = 2$$

(f) $q(o) = 0$

(g) El comportamiento gráfico resulta :

Gráfico III-17



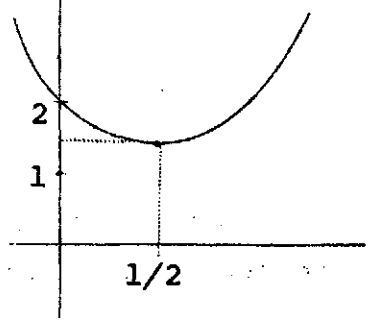
EJERCICIOS DEL CAPITULO III

1. Dada la función

(III-10) $f(x) = x^2 - x + 2$

calcular los intervalos en los cuales la función es creciente y decreciente

Gráfico III-18



<u>Solución</u>

Derivando e igualando a cero, resulta

$$f'(x) = 2x - 1 = 0$$

$$x = 1/2$$

Si $x < 1/2$; $f'(x) < 0$ (decreciente)

Si $x > 1/2$; $f'(x) > 0$ (creciente)

En consecuencia la función (III-10) es

- decreciente en el intervalo $-\infty < x < 1/2$
- creciente en el intervalo $1/2 < x < +\infty$

2. Calcular los máximos y mínimos de la siguiente función

(III-11) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 1$

Solución

Los valores de x que anulan la derivada primera, son

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{6} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Reemplazando estos valores en la derivada segunda, resulta

$$f''(x) = 6x - 3$$

$$f''(-1) = 6(-1) - 3 = -9 < 0 \text{ (máximo)}$$

$$f''(2) = 6(2) - 3 = 9 > 0 \text{ (mínimo)}$$

En $x_1 = -1$ la función vale

$$f(-1) = (-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 - 6(-1) - 1 = \frac{5}{2}$$

En $x_2 = 2$, la función toma el valor $f(2) = -11$

Por lo tanto la función (III-11) presenta

máximo en el punto $(-1, 5/2)$

mínimo en el punto $(2, 11)$

3. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la siguiente función de t

(III-12) $N(t) = N(o)\, e^{rt}$

Solución

Calculando las derivadas sucesivas con respecto a t, se tiene

$$N'(t) = N(o)\, r\, e^{rt}$$

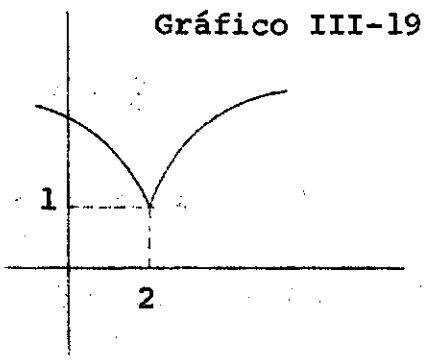
$$N''(t) = N(o)\, r^2\, e^{rt} > 0$$

Cualquiera sea el valor de r, la derivada segunda es positiva. En consecuencia la función (III-12) es cóncava en todo su recorrido.

4. Calcular los máximos y mínimos de la función

(III-13) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$

Gráfico III-19



Solución

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2} = 1 + (x-2)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,(x-2)^{-1/3} = \frac{2}{3\,(x-2)^{1/3}}$$

No hay ningún valor de $\underline{x}$ en el cual la derivada primera sea igual a cero. Sin embargo cuando $x = 2$ la función $f'(x)$ no está definida. Por lo tanto hay un <u>valor crítico</u> en $x_o = 2$.

Para $x < 2$, $f'(x) < 0$, y la función (III-13) es decreciente

Para $x > 2$, $f'(x) > 0$, y la función (III-13) es creciente

A la izquierda de $x_o = 2$ la función es decreciente y a la derecha creciente, por lo tanto $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$ presenta un mínimo en $x_o = 2$.

En ese punto el valor de la función es

$$f(2) = 1 + \sqrt[3]{(2-2)^2} = 1$$

Capítulo IV

INTEGRALES

El concepto de integral tiene dos acepciones en el cálculo. La principal de ellas consiste en considerarla como un proceso de suma. En este sentido la integral representa el límite de una determinada expresión aditiva, que gráficamente corresponde al área comprendida entre una curva, el eje de las abscisas y dos ordenadas a y b.

El segundo significado del concepto de integral, es el de encontrar una función primitiva conociendo su derivada. Estos dos tipos de integrales se llaman respectivamente definida e indefinida y la conexión entre ambas está dada por el denominado teorema fundamental del cálculo integral.

INTEGRALES INDEFINIDAS

En capítulos anteriores se ha visto cómo dada una función se puede hallar su derivada. Ahora se plantea el problema inverso, es decir, dada la función derivada hallar la función de la cual proviene. O sea, si se tiene

$$y = F(x)$$

cuya derivada es

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$$

la integral indefinida de esta función es su primitiva F(x). En general se agrega una constante C, llamada constante de integración, por cuanto también la derivada de F(x) + C es igual a f(x). Esto se indica escribiendo

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

que se lee "la integral de f(x) dx es igual a F(x) más C". La diferencial dx indica que x es la variable de integración.

Ejemplo

$$y = x^2 + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\int 2x\ dx = x^2 + C$$

FORMULAS BASICAS DE INTEGRACION

En el cálculo diferencial existe una regla general para calcular la derivada de una función, que consiste en calcular el incremento de la función, dividirlo por el incremento de la variable y después tomar su límite para el incremento de la variable tendiendo a cero. Por el contrario, en el cálculo integral no existe una regla general correspondiente. La integración puede decirse que es un procedimiento esencialmente de ensayo; la integral de una función f(x) es aquella expresión que derivada reproduce dicha función.

Para facilitar la resolución de integrales es conveniente tener a mano una tabla de integrales lo más amplia posible, a las

cuales se trata de reducir, por diversos métodos expresiones más complicadas. En la página siguiente se incluye una "Tabla de Integrales" en la que aparecen solamente los casos más sencillos. En estas fórmulas u y v indican funciones derivables de una cierta variable independiente, por ejemplo x. Los símbolos a, n, C, e, son constantes.

Ejemplos:

Resolver las siguientes integrales indefinidas

1. $\int x^4 \, dx$

Esta forma de integral aparece directamente en la tabla; aplicando la fórmula 1 se obtiene

$$\int x^4 \, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

Si se deriva el resultado, se produce la función integrada:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5} + C\right) = x^4$$

2. $\int (x^3 + 2x^2 - x) \, dx$

Aplicando las fórmulas 1, 13 y 14, se tiene

$$\int (x^3 + 2x^2 - x) \, dx = \int x^3 \, dx + 2\int x^2 \, dx - \int x \, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$$

TABLA DE INTEGRALES

1. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \; ; \; n \neq -1$

2. $\int du = u + C$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$

4. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u \, du = e^u + C$

6. $\int \text{sen } u \, du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u \, du = \text{sen } u + C$

8. $\int \text{tg } u \, du = -\ln \cos u + C$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg } u + C$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arc sen } \frac{u}{a} + C$

11. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{u}{a} + C$

12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u - a}{u + a} + C$

13. $\int (u + v) dx = \int u \, dx + \int v \, dx$

14. $\int a \, u \, dx = a \int u \, dx$

15. $\int \frac{d}{dx} f(x) \, dx = f(x) + C$

3. $\int \sqrt{x}\,(1+x)\,dx = \int (x^{1/2} + x^{3/2})\,dx$

$$= \frac{2}{3}\,x^{3/2} + \frac{2}{5}\,x^{5/2} + C$$

4. $\int \sqrt{3x+1}\;dx$

Esta integral no aparece en la tabla. Sin embargo puede resolverse mediante un cambio de variable. Haciendo $u = 3x+1$, se tiene

$$du = 3\,dx \quad ; \quad dx = \frac{1}{3}\,du$$

luego,

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}\,u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{9}\,(3x+1)^{3/2} + C$$

5. $\int e^{-x}\,dx$

Haciendo $u = -x$, resulta $du = -dx$; luego,

$$\int e^{-x}\,dx = \int e^{u}\,(-du) = -\int e^{u}\,du$$

$$= -e^{u} + C = -e^{-x} + C$$

6. $\int a^{3x}\, dx$

Haciendo $u = 3x$; $du = 3dx$; $dx = \frac{1}{3}\, du$

$$\int a^{3x}\, dx = \int a^{u} \left(\frac{1}{3} du\right) = \frac{1}{3} \int a^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{a^{u}}{\ln a} + C = \frac{1}{3} \frac{a^{3x}}{\ln a} + C$$

7. $\int x\, a^{x^2}\, dx$

Haciendo $u = x^2$; $du = 2x\, dx$

$$\int x\, a^{x^2}\, dx = \int a^{u} \left(\frac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2} \int a^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^{x^2}}{\ln a} + C$$

8. $\int tg\, x\, dx = \int \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx$

Haciendo $u = cos\, x$; $du = -sen\, x\, dx$

$$\int \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + C$$

$$= -\ln cos\, x + C$$

Derivando el resultado debe obtenerse $tg\, x$.

INTEGRACION POR PARTES

Este método permite transformar algunas integrales en formas más sencillas, facilitando de este modo su resolución.

Sean u y v funciones derivables de x. La diferencial de su producto es

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

o bien

$$u\,dv = d(u \cdot v) - v\,du$$

Integrando esta igualdad resulta

$$\text{(IV-1)} \quad \boxed{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}$$

que es la fórmula de integración por partes. Para aplicarla se hace una parte de la función a integrar igual a u, y la otra parte igual a dv. Se calcula entonces du y v y se reemplazan estas cuatro expresiones en la fórmula básica.

No puede anticiparse una ley general para descomponer la función subintegral, aunque pueden indicarse los dos criterios siguientes:

(a) La parte que se iguala a dv debe contener siempre a dx

(b) La integral que resulta al aplicar la fórmula deber ser más sencilla que la originaria.

Ejemplos:

Resolver por partes las siguientes integrales indefinidas

1. $\int \underbrace{\ln x}_{u} \; \underbrace{dx}_{dv}$

Haciendo, $u = \ln x$
$dv = dx$

resulta $du = \frac{1}{x}\, dx$

$v = x$

Reemplazando en (IV-1) :

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \; \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{(\ln x)}_{u} \; \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \; \underbrace{1/x\, dx}_{du}$$

$$= x \ln x - x + C$$

2. $\int x^2 e^x \, dx$

Haciendo $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$, se tiene

$$u = x^2 \quad ; \quad du = 2x\, dx$$
$$dv = e^x dx \quad ; \quad v = e^x$$

Sustituyendo en la fórmula básica :

(IV-2) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$

La integral que resulta es más sencilla que la anterior. Resolviendo $\int x\, e^x\, dx$ nuevamente por partes :

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$
$$dv = e^x\, dx \quad ; \quad v = e^x$$

Reemplazando en (IV-1)

$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x\, dx$$
$$= x\, e^x - e^x + C$$

Sustituyendo este resultado en (IV-2) :

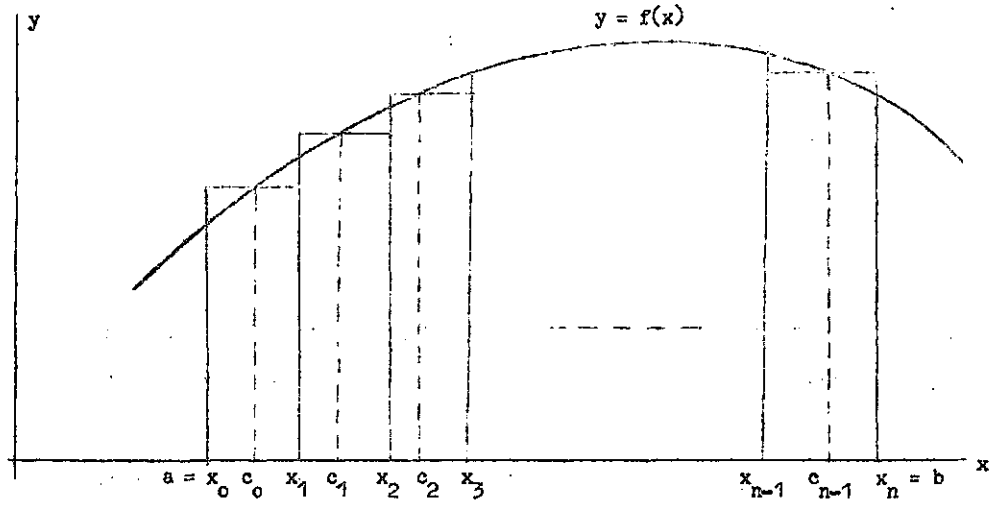
$$\int x^2 e^x dx = x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + C$$
$$= e^x\, (x^2 - 2x + 2) + C$$

DEFINICION DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Mediante los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, se pueden formar n subintervalos:

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_{n-1}, b)$$

Gráfico IV-1



Se eligen puntos arbitrarios $c_o, c_1, \ldots, c_{n-1}$ correspondientes a dichos subintervalos. Se puede formar la suma

$$S_n = f(c_o)\ (x_1 - a) + f(c_1)\ (x_2 - x_1) + \ldots + f(c_{n-1})(b - x_{n-1})$$

Escribiendo $x_o = a$, $x_n = b$, y $x_{k+1} - x_k = \triangle x_k$, se tiene

$$S_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\ \triangle x_k$$

Geométricamente esta suma representa el área total de los n rectángulos del gráfico IV-1

El límite de esta suma cuando el número de subintervalos n tiende a infinito y la mayor de las subdivisiones $\triangle x_k$ tiende a cero, se denota

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

y se denomina "integral definida de f(x) entre a y b". Es decir,

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\, \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, dx$$

El signo integral es una S alargada que pone de manifiesto la íntima relación existente entre la integración y la suma.

Geométricamente, el valor de esta integral definida representa el área encerrada entre la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas a y b, si $f(x) \geqslant 0$. Si f(x) es positiva y negativa dentro del intervalo, la integral representa la suma algebraica de las áreas.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$, y F(x) es la primitiva o integral indefinida de f(x), se verifica

$$\text{(IV-3)} \quad \int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, la integral definida entre a y b de f(x) dx puede calcularse resolviendo la integral indefinida, dando después a x el valor de b y de a, y restando esos valores.

Este teorema es de gran importancia porque permite resolver una integral definida, sin necesidad de aplicar su definición.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Dada la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, se verifican las siguientes propiedades

(I) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(II) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(III) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(IV) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(V) $\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$

Estas propiedades son de demostración inmediata. Por ejemplo la primera de ellas :

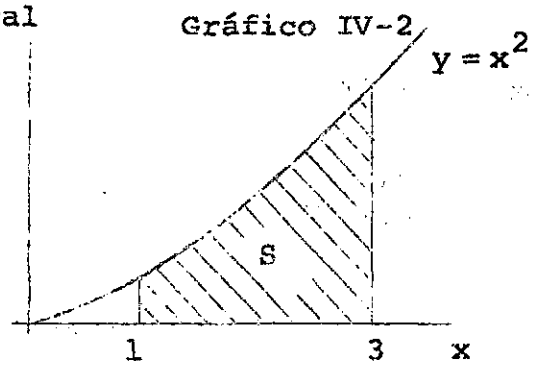
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$
$$= -\left[F(a) - F(b)\right] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

EJERCICIOS

1. Resolver la siguiente integral definida

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

Gráfico IV-2



Aplicando la relación básica:

$$\text{(IV-3)} \int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

o sea resolviendo la integral indefinida y dándole a x el valor de los límites de integración, se tiene

$$\int_1^3 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

Si a la integral indefinida F(x) se le agrega la constante de integración, el resultado no se altera. En efecto:

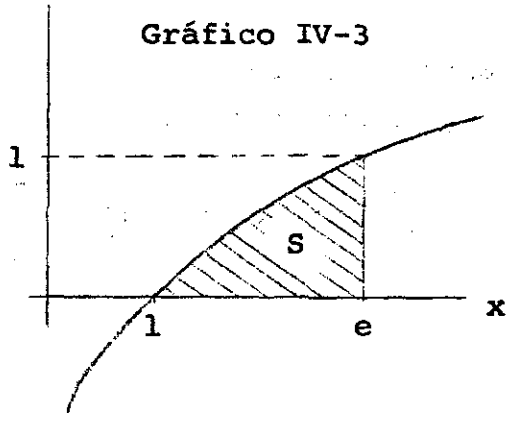
$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + C\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} + \cancel{C} - \frac{1^3}{3} - \cancel{C} = \frac{26}{3}$$

2. Resolver

$$\int_1^e \ln x\ dx$$

Según se vio en pág. 107 la integral indefinida de ln x vale

Gráfico IV-3



$$\int \ln x\ dx = x \ln x - x + C$$

por lo tanto

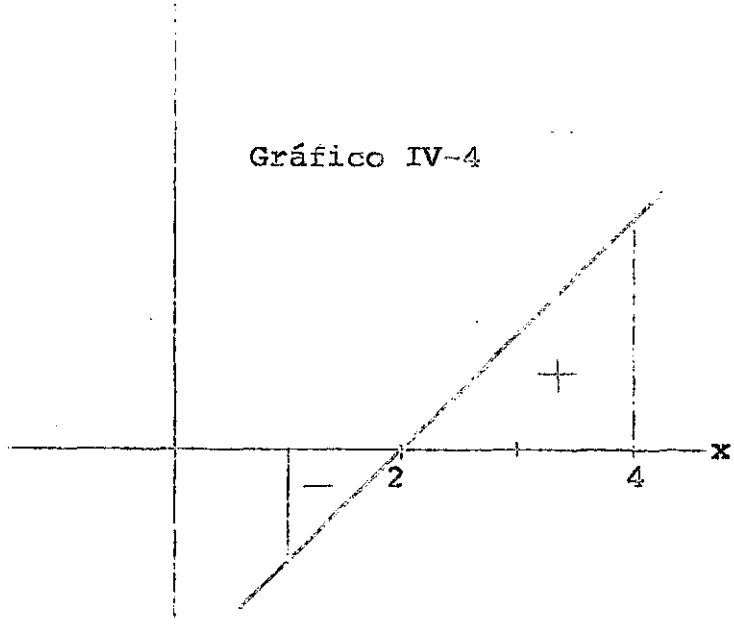
$$\int_1^e \ln x\ dx = \Big[\ x \ln x - x\ \Big]_1^e$$

$$= (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$$

3. Resolver

$$\int_1^4 (x - 2)\ dx$$

Gráfico IV-4



$$\int_1^4 (x-2)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^4$$

$$= \left(\frac{16}{2} - 8\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{3}{2}$$

que es el resultado de la integral.

En los casos como éste en que la función toma valores positivos y negativos entre los valores $x = a$ y $x = b$, la integral da la <u>suma algebraica</u> de las áreas limitadas por la curva y el eje de las <u>x</u>, considerando positiva la que está por arriba de dicho eje y negativa la situada debajo.

Si se desea calcular el valor absoluto de estas áreas, es necesario hallar los puntos de intersección de la curva con el eje de las <u>x</u>, y resolver la integral de cada subintervalo por separado. En este caso se tendría

$$f(x) = x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

La superficie total será

$$S = \left|\int_1^2 (x-2)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x-2)\,dx\right|$$

$$\int_1^2 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(\frac{4}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_2^4 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 = \left(\frac{16}{2} - 8\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right) = 2$$

$$S = \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|2\right| = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

4. Resolver

$$\int_0^2 (2x^2 - x + 1)\,dx$$

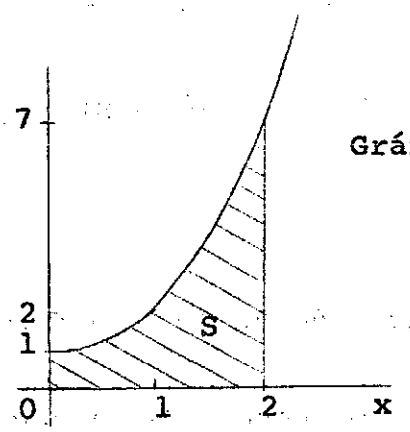


Gráfico IV-5

$$\int_0^2 (2x^2 - x + 1)\,dx = 2\,\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^2$$

$$= 2\,\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2 = \frac{16}{3}$$

INTEGRACION NUMERICA: METODO DE LOS TRAPECIOS Y METODO DE SIMPSON

Los métodos de integración numérica permiten calcular en forma aproximada la integral definida de aquellas funciones para las cuales no se conoce su forma analítica, sino solamente el valor de la función para determinados valores de la variable independiente.

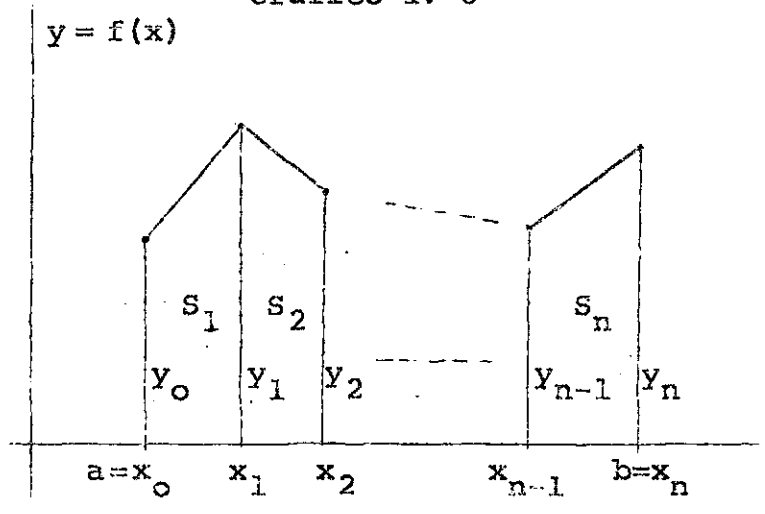
También se suele resolver por estos métodos las integrales definidas de funciones para las cuales se conoce su forma analítica, cuando se presentan dificultades para encontrar la integral indefinida (Ver ejercicio 9 al final del capítulo).

METODOS DE LOS TRAPECIOS

Supongamos que se desea calcular la integral definida entre a y b de la función $y = f(x)$, de la cual sólo se conocen los siguientes valores arbitrariamente espaciados.

x	$y = f(x)$
$a = x_o$	y_o
x_1	y_1
x_2	y_2
.	.
.	.
.	.
$b = x_n$	y_n

Gráfico IV-6



El método de los trapecios supone que la función asume una trayectoria lineal entre cada par de valores conocidos. Uniendo esos puntos conocidos por lineas rectas, quedan formados n trapecios, cuyas superficies son

$$S_1 = \frac{y_o + y_1}{2}(x_1 - x_o) \simeq \int_{x_o}^{x_1} f(x)\, dx$$

$$S_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) \simeq \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

. . . . . .

$$S_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2}(x_n - x_{n-1}) \simeq \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx$$

La integral definida entre a y b será la suma de las superficies de los trapecios, es decir

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx \simeq \frac{y_o + y_1}{2}(x_1 - x_o) + \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}(x_{n-1} - x_n)}$$

Esta es la fórmula final del método de los trapecios, para valores desigualmente espaciados de x. El resultado es aproximado, ya que se ha supuesto arbitrariamente que la función sigue un comportamiento lineal dentro de cada subintervalo.

Si los valores de $\underline{x}$ están igualmente espaciados a una distancia cualquiera $\underline{h}$, entonces la fórmula anterior puede expresarse en forma más simple como sigue:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx \simeq h\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)}$$

<u>Ejemplo</u>:

Calcular la integral definida entre 0 y 3, conociendo sólo los valores

x	f(x)
0	20
1	25
3	32

$$\int_o^3 f(x)\ dx \simeq \frac{20 + 25}{2} + \frac{25 + 32}{2}\ 2$$

$$= 79.5$$

METODO DE SIMPSON

Este método es más aproximado que el anterior. Supone que por cada 3 puntos pasa una parábola de segundo grado.

La fórmula para valores de $\underline{x}$ igualmente espaciados a una amplitud $\underline{h}$ cualquiera, es la siguiente

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx \simeq \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)}$$

La cual puede expresarse en la siguiente forma:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left[(y_o+y_n) + 4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}) + 2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})\right]}$$

Para aplicar la fórmula de Simpson el número de valores conocidos debe ser impar, esto es, n igual a 3, 5, 7, etc. Si el número de valores fuera par, podría por ejemplo integrarse los dos últimos por trapecios. Un inconveniente de la fórmula de Simpson es que no da el valor de la integral de cada subintervalo, sino de cada dos.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL

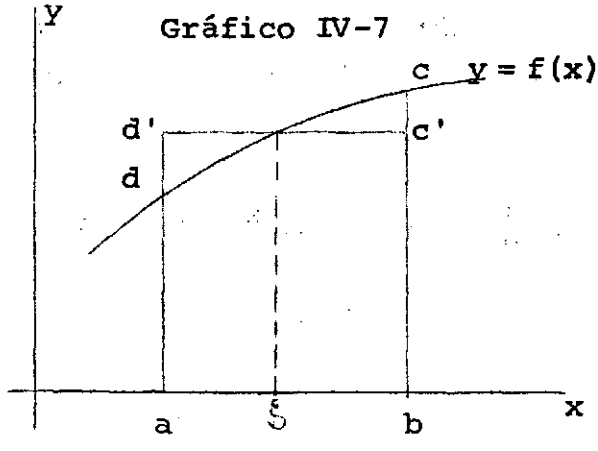
Si f(x) es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, existe un punto ξ comprendido entre a y b tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b dx = f(\xi)\,(b-a)$$

Gráficamente este teorema dice que el área encerrada por la curva, el eje de las abscisas y las ordenadas a y b es igual al área del rectángulo de base $\overline{ab}$ y altura $f(\xi)$, es decir

Sup a b c d = Sup a b c'd'

Gráfico IV-7



Una forma más generalizada del teorema, la cual se emplea también en Demografía, es la siguiente

<u>Teorema generalizado del valor medio</u>. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, y $g(x)$ no cambia de signo en el intervalo, existe un punto ξ comprendido entre <u>a</u> y <u>b</u> tal que

$$\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

APLICACIONES A LA DEMOGRAFIA

A continuación se presentan algunas aplicaciones del concepto de integral al campo de la Demografía.

1. Dada la función

$l(x) = 100 - x$

(ley de mortalidad de De Moivre)

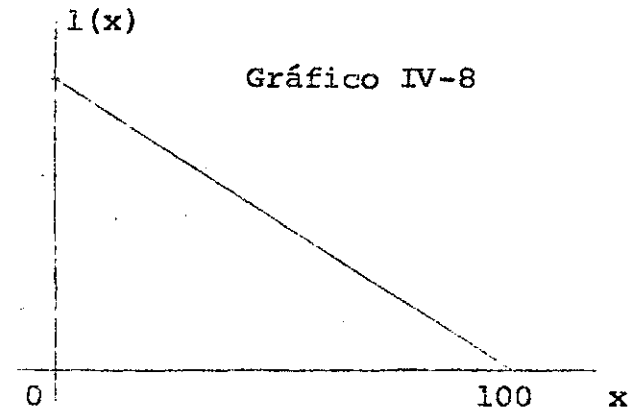


Gráfico IV-8

que representa el número de sobrevivientes a sucesivas edades de una generación inicial $l(o) = 100$, calcular

a) El tiempo vivido por esta generación entre los 10 y 15 años.

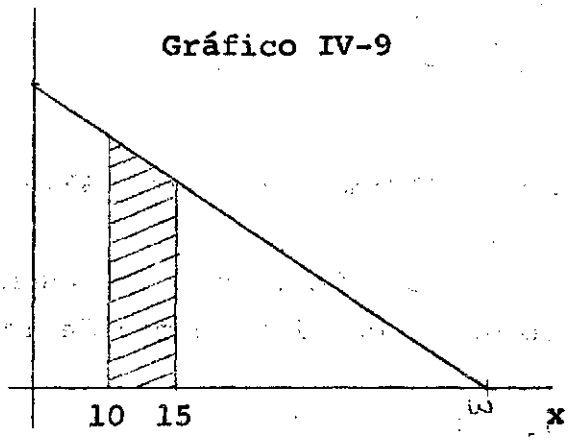
b) El tiempo vivido desde los 10 años hasta que la generación se extingue.

c) El número de años que en promedio viven las personas que llegan con vida a la edad exacta 10.

a) Integrando la función l(x) entre 10 y 15 años, se obtiene la superficie encerrada por la curva el eje de las x y las ordenadas 10 y 15. Demográficamente este concepto corresponde al tiempo vivido, o sea, es el número de años-persona vividos por la generación l(o) entre las edades 10 y 15. Se simboliza ${}_5L_{10}$

$$
\begin{aligned}
{}_5L_{10} &= \int_{10}^{15} l(x)\,dx = \int_{10}^{15} (100-x)\,dx \\
&= 100x - \frac{x^2}{2}\Big|_{10}^{15} \\
&= 100(15-10) - \frac{15^2 - 10^2}{2} \\
&= \underline{437.5} \text{ años-persona}
\end{aligned}
$$

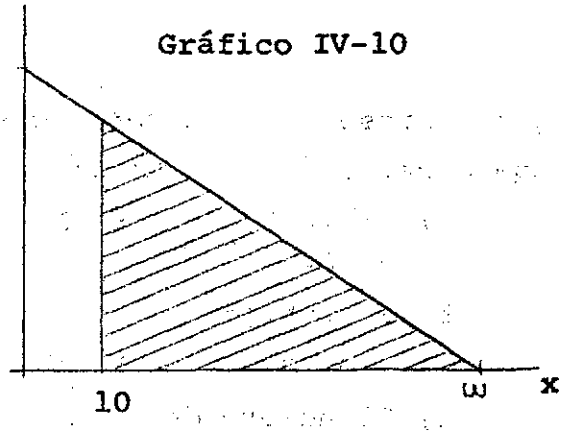
Gráfico IV-9



b) El tiempo vivido por la generación desde la edad 10 hasta w, que se representa por T_{10}, será

$$
\begin{aligned}
T_{10} &= \int_{10}^{w} l(x)\,dx = \int_{10}^{100} (100-x)\,dx \\
&= 100x - \frac{x^2}{2}\Big|_{10}^{100} \\
&= 100(100-10) - \frac{100^2-10^2}{2} \\
&= \underline{4\,050} \text{ años-persona}
\end{aligned}
$$

Gráfico IV-10



c) El número medio de años que en promedio les resta de vida a las personas que llegan con vida a la edad exacta 10, se denomina esperanza de vida a la edad 10 (e^o_{10}). Será igual a

$$e^o_{10} = \frac{T_{10}}{l_{10}} = \frac{4\,050}{90} = \underline{45} \text{ años}$$

2. Dada la densidad anual de nacimientos

(IV-3) $B(t) = 1\,000 + 30t$

donde $t = 0$ corresponde al 1° de enero de 1960, calculan los nacimientos de los años 1960 a 1962 (3 años).

Solución

La densidad de nacimientos ya se ha visto al final del capítulo II (pág. 61). Es una función tal que integrada permite obtener los nacimientos correspondientes al intervalo de integración; es decir

$$B(t_o, t_n) = \int_{t_o}^{t_n} B(t)\, dt$$

A su vez, la expresión subintegral $B(t)\,dt$ representa los nacimientos del intervalo $t, t + dt$.

Para obtener los nacimientos de los 3 años considerados, habrá que integrar la función (IV-3) entre 0 y 3, o sea

$$\begin{aligned} B(1960\text{-}1963) &= \int_0^3 (1\,000 + 30\,t)\, dt \\ &= 1\,000\,t + 30\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^3 \\ &= \underline{3\,135} \text{ nacimientos} \end{aligned}$$

3. Sea la siguiente relación

$$(IV\text{-}4) \qquad N(t) = \int_0^w B(t-x)\, p(x)\, dx$$

donde N(t) representa la población total en la época t, B(t-x) la densidad anual de nacimientos o nacimientos anuales en la época t-x, y p(x) = l(x)/l(o) la probabilidad al momento del nacimiento de que una persona esté con vida a la edad exacta x.

Se pide calcular el valor de N(t) en el caso de que los nacimientos de cada año sean constantes e iguales a l(o).

Solución

La relación (IV-4) corresponde a uno de los modelos básicos presentados en el libro de Lotka. 1/ Esta fórmula vincula la población total en un momento t con los nacimientos y la ley de mortalidad, bajo el supuesto de que la población es cerrada y la mortalidad por edad es constante en el tiempo.

La expresión subintegral B(t-x) p(x) dx representa las personas que en el momento t tienen edades comprendidas entre x y x + dx. Integrando con respecto a x se obtiene la suma de las personas de todas las edades, que están con vida en el momento t.

Haciendo en (IV-4) B(t-x) = l(o) se tiene

$$N(t) = \int_0^w B(t-x)\, p(x)\, dx = \int_0^w l(o)\, \frac{l(x)}{l(o)}\, dx$$

$$= \int_0^w l(x)\, dx \qquad = \quad T_o$$

1/ Alfred J. Lotka, Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, No. 5, Santiago, Chile, 1969, p.66.

EJERCICIOS DEL CAPITULO IV

1. Resolver las siguientes integrales indefinidas

(a) $\int (x^2 - x + 3)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + C$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$

$= 2\sqrt{x} + C$

(c) $\int e^{x/n} dx$

Haciendo $u = x/n$, resulta $du = 1/n\ dx$

$$\int e^{x/n}\,dx = \int e^u\, n\,du = n\,e^u + C$$

$$= n\,e^{x/n} + C$$

2. Resolver aplicando el método de integración por partes

(a) $\int x\,e^{ax}\,dx$

Haciendo $u = x$, se tiene

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dx = e^{ax}\,dx \quad ; \quad v = e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}$$

Aplicando la fórmula básica,

(IV-1) $\int u\,dv = u.v - \int v.du$

resulta

$$\int x\, e^{ax}\, dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax}\, dx$$

$$= x \frac{1}{a} e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + C$$

(b) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

Haciendo $u = x$,

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\, dx \; ; \quad v = -\cos x$$

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

3. Obtener la ley de variación de la población total con respecto al tiempo, sabiendo que su tasa de crecimiento es constante.

<u>Solución</u>

La tasa de crecimiento de la población (r), según se a visto en el capítulo II (pág. 59) es igual a la derivada de N(t) dividido por N(t). En este caso :

$$\frac{1}{N(t)} \cdot \frac{d\, N(t)}{dt} = r = \text{constante}$$

En esta expresión hay que despejar $N(t)$, para lo cual conviene pasar dt al segundo miembro y después integrar

$$\frac{d\,N(t)}{N(t)} = r\,dt$$

$$\int \frac{d\,N(t)}{N(t)} = r \int dt$$

$$\ln N(t) = r\,t + C_1$$

$$N(t) = e^{rt + C_1} = e^{rt} e^{C_1} = C\,e^{rt}$$

El valor de la constante de integración C puede obtenerse si se conoce la población en un momento, por ejemplo $N(o)$. Este dato $N(o)$ es lo que se denomina una <u>condición inicial</u>. Se tiene entonces

(IV-5) $$N(t) = C\,e^{rt}$$

$$N(o) = C\,e^{o} = C$$

Reemplazando en (IV-5) se obtiene finalmente

$$N(t) = N(o)\,e^{rt}$$

O sea que si la tasa de crecimiento se mantiene constante en el tiempo, la población total crece según la ley exponencial, la cual suele denominarse "ley de Malthus".

4. Resolver la siguiente integral definida

$$\int_1^3 (3x + 2)\, dx$$

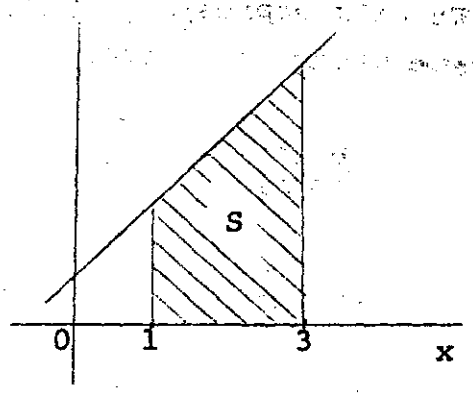


Gráfico IV-11

Aplicando la relación básica,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

se obtiene

$$\int_1^3 (3x + 2)dx = 3\,\frac{x^2}{2} + 2x \Big|_1^3$$

$$= 3\,\frac{3^2 - 1^2}{2} + 2\,(3-1)$$

$$= \underline{16}$$

5. Calcular el <u>tiempo vivido</u> entre los años 1967 y 1970 por la población que crece según la siguiente ley
$N(t) = 100 + 3\,t + 2\,t^2$; donde $t = 0$ corresponde al año 1965

$$\int_{t_o}^{t_n} N(t)\, dt = \int_2^5 (100 + 3t + 2t^2)\, dt$$

$$= 100t + 3\,\frac{t^2}{2} + 2\,\frac{t^3}{3} \Big|_2^5$$

$$= 100(5 - 2) + 3\frac{5^2 - 2^2}{2} + 2\frac{5^3 - 2^3}{3}$$

$$= \underline{409.5} \text{ años-persona}$$

6. Calcular la integral definida entre los límites 1 y 6, aplicando el método de los trapecios

t	N(t)
1	100
2	115
3	117
4	131
5	149
6	140

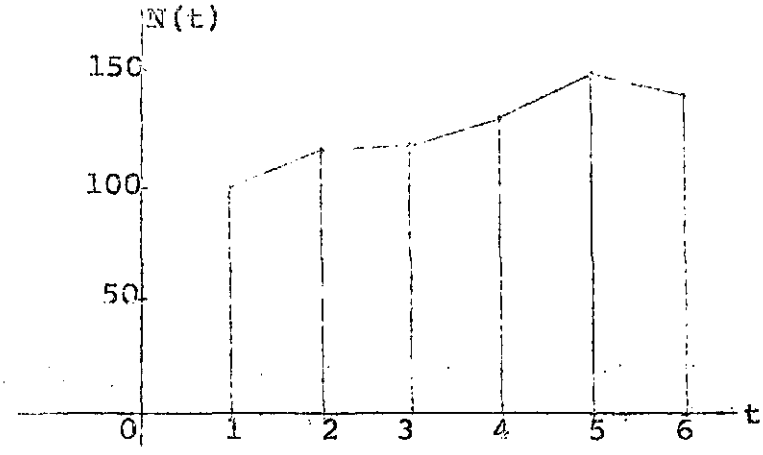


Gráfico IV-12

En este caso puede aplicarse la fórmula de los trapecios para valores igualmente espaciados, esto es

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)$$

$$\int_1^6 N(t)\,dt \simeq \frac{100+140}{2} + 115 + 117 + 131 + 149$$

$$= \underline{632} \text{ años-persona}$$

7. En una tabla de vida los sobrevivientes hasta los 5 años de una cohorte de l_o = 100 000 personas son los siguientes :

x	l_x
0	100 000
1	92 107
2	90 110
3	88 944
4	88 249
5	87 823

Calcular por el método de los trapecios, el tiempo vivido por esa cohorte entre los 1 y 5 años de edad.

Solución

El tiempo vivido entre las edades 1 y 5 es igual a la integral entre esos límites, de la función de sobrevivientes l_x, es decir

$$_4L_1 = \int_1^5 l_x \, dx$$

Debido a que no se conoce la forma analítica de la función, sino solamente sus valores a edades exactas, se aplica un procedimiento aproximado, en este caso la fórmula de los trapecios. Su forma para valores igualmente espaciados es la siguiente

$$\int_a^b f(x) \simeq h \left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

En este caso particular resulta:

$$_4L_1 = \int_1^5 l_x\,dx \simeq \frac{l_1 + l_5}{2} + l_2 + l_3 + l_4$$

$$= \frac{92107 + 87823}{2} + 90110 + 88944 + 88249$$

$$= \underline{357\ 268}$$

En la práctica es útil tener calculado el tiempo de exposición para cada subintervalo por separado. En este caso sería :

$$_1L_1 = \int_1^2 l_x\,dx \simeq \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{92\ 107 + 90\ 110}{2} = \underline{91\ 108}$$

$$_1L_2 = \frac{90\ 110 + 88\ 944}{2} = \underline{89\ 527}$$

$$_1L_3 = \frac{88\ 944 + 88\ 249}{2} = \underline{88\ 597}$$

$$_1L_4 = \frac{88\ 249 + 87\ 823}{2} = \underline{88\ 036}$$

El tiempo total entre 1 y 5 años se obtiene por suma

$$_4L_1 = {}_1L_1 + {}_1L_2 + {}_1L_3 + {}_1L_4 =$$

$$= 91\ 108 + 89\ 527 + 88\ 597 + 88\ 036 = \underline{357\ 268}\ \text{años-persona}$$

8. Con los datos del mismo ejercicio anterior, calcular el tiempo vivido entre los 1 y 5 años de edad aplicando el método de Simpson, es decir suponiendo que por cada tres valores pasa una parábola de segundo grado.

Solución

La fórmula de Simpson es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+\frac{h}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

En este ejercicio resulta,

$$_4L_1 = \int_1^5 l_x\,dx \simeq \frac{1}{3}(l_1+4l_2+l_3)+\frac{1}{3}(l_3+4l_4+l_5)$$

$$= \frac{1}{3}(92\,107+4\times 90\,110+88\,944)+\frac{1}{3}(88944+4\times 88249+87823)$$

$$= \underline{357\,085} \text{ años-persona}$$

Este método da 183 años-persona menos que el anterior debido a que la parábola hace una concavidad hacia arriba, mientras que el método de los trapecios considera una línea recta.

Por otra parte, el método de Simpson no permite calcular el tiempo vivido dentro de cada subintervalo.

9. Calcular en forma aproximada la integral

$$\text{(IV-6)} \qquad \int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

por el método de los trapecios, dividiendo el intervalo $[0, 2]$ en 10 partes iguales

Solución

Los métodos de integración numérica permiten calcular la integral definida de funciones para las cuales no se conoce su forma analítica, como en el caso de los ejercicios 6, 7 y 8. Pero también se los utiliza para calcular en forma aproximada la integral definida de funciones para las cuales resulta difícil, y a veces imposible, encontrar la integral indefinida. Un ejemplo es la integral (IV-6) considerada arriba.

Dividiendo el intervalo de integración de la integral (IV-6) en 10 partes, se obtienen los valores de $x = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 2.0$ para los cuales la función toma los valores que se indican en la siguiente tabla :

x	$y = e^{-x^2}$
0	1.0000
0.2	0.9608
0.4	0.8521
0.6	0.6977
0.8	0.5272
1.0	0.3679
1.2	0.2369
1.4	0.1409
1.6	0.0773
1.8	0.0392
2.0	0.0183

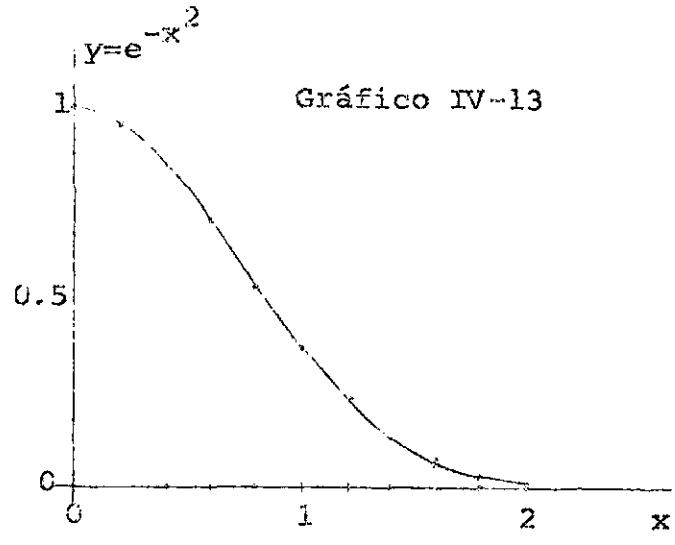


Gráfico IV-13

Una vez conocidos estos valores, se puede aplicar la fórmula de los trapecios para valores igualmente espaciados, o sea

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)$$

resulta

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \simeq 0.2\left(\frac{1 + 0.0183}{2} + 0.9608 + \dots + 0.0392\right)$$

$$= \underline{0.8818}$$

Capítulo V

SERIES

SUCESIONES

Una sucesión es un conjunto de números formados de acuerdo a una ley definida, en correspondencia con los números naturales. Se la simboliza

(V-1) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Cada uno de los elementos $a_1, a_2, \ldots$ se llama <u>término</u> de la sucesión. El término n-ésimo se denomina término general. Conociendo el término general se puede reproducir la sucesión dando a <u>n</u> los valores 1, 2, 3, ...

Ejemplos:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$$

También puede definirse una sucesión como, una función cuyo dominio o campo de variación es el conjunto de los números naturales. Si se simboliza la función por <u>f</u>, su valor para <u>n</u> es f(n).

LIMITE DE UNA SUCESION

Una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

converge hacia un límite finito a, si para todo número positivo ε por pequeño que sea, puede encontrarse otro número N tal que se verifica $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo entero $n > N$. En tal caso se escribe

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Con más precisión debería escribirse: $n \to +\infty$, pero en casi todos los textos se omite el signo positivo, teniendo en cuenta que en todas las sucesiones n tiende a infinito por valores enteros y positivos.

Si el límite existe la sucesión es convergente; caso contrario la sucesión se denomina divergente.

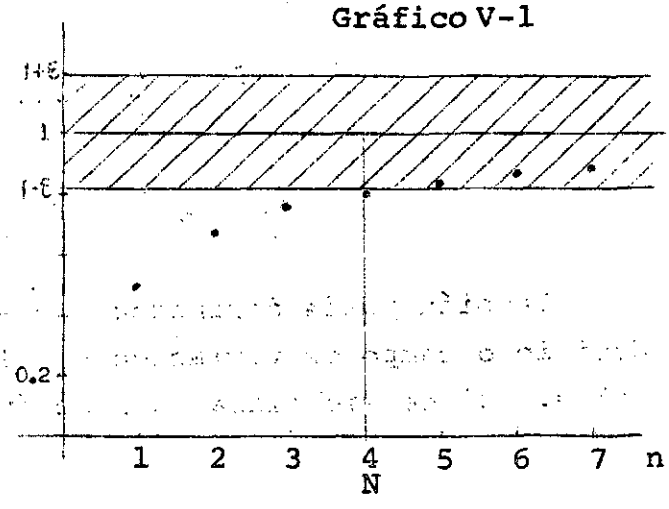
Ejemplo: La sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

tiene por límite 1, es decir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Gráfico V-1



El gráfico V-1 ilustra el significado del límite de una sucesión; en él se ve que para un ε arbitrariamente elegido, todos los términos posteriores al N-ésimo quedan a una distancia de 1 menor que ε.

EL CONCEPTO DE SERIE

Dada una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ haciendo sumas parciales, se obtiene

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Cuando n crece indefinidamente se utiliza el símbolo

$$\text{(V-2)} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

lo cual se denomina serie.

La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ se llama sucesión de sumas parciales de la serie (V-2). Si

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

siendo S un número finito, la serie (V-2) se denomina convergente y es S su suma. Si no existe este límite, la serie es divergente.

La condición necesaria pero no suficiente para que una serie sea convergente es que su término general a_n tienda a cero.

Ejemplos de series:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

$$\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots \frac{2}{10^n} + \ldots$$

LA SERIE GEOMETRICA

Es de la forma

(V-3) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$

donde cada término es igual al anterior multiplicado por una constante (r). La suma de los n primeros términos es

(V-4) $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

Multiplicando ambos miembros por r, se obtiene

(V-5) $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$

Restando (V-5) de (V-4), resulta después de reducir

$$(1-r)\ S_n = a + a\ r^n = a\ (1-r^n)$$

es decir,

(V-6) $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\ , \text{ para } r \neq 1$$

Se trata de ver si la serie geométrica es convergente, es decir si el límite de S_n existe.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n \to \infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

Si $|r| < 1$, cuando $n \to \infty$, $r^n \to 0$ y todo el último término tiende a 0. Luego,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

la serie es convergente y su suma es $\frac{a}{1-r}$.

Si $|r| > 1$, $r^n \to \infty$, y la serie geométrica (V-3) es divergente.

Finalmente si $r=1$, la relación (V-6) no es aplicable, pero reemplazando directamente en la serie (V-3) se tiene

$$a + a + a + \ldots$$

es decir, la serie diverge.

En resumen la serie geométrica sólo es convergente si $|r| < 1$, en cuyo caso su suma es $\frac{a}{1-r}$.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

En la mayoría de los casos resulta difícil determinar si una serie es convergente aplicando su definición, porque no es posible hallar una expresión sencilla, en función de n, de la suma de los n primeros términos de la serie. Existen sin embargo varios criterios para determinar si una serie es convergente o divergente, tales como el criterio del cociente, por comparación, de la integral, de la raíz n-ésima, etc. De entre ellos se considerarán brevemente los dos primeros.

Criterios de convergencia y divergencia por comparación

1. Una serie de términos positivos

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

es convergente, si a partir de un n en adelante cada término es menor o igual que el correspondiente de una serie

$$\sum c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$$

convergente, de términos positivos.

2. Una serie de términos positivos $\sum a_n$ es divergente, si a partir de un n en adelante cada término es mayor o igual que el correspondiente de una serie $\sum c_n$ divergente de términos positivos.

Ejemplo: Probar que la serie llamada armónica

(V-7) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

es divergente.

Comparándola con la serie

$$(V\text{-}8) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

que es divergente, se tiene que cada término de la serie (V-7) es mayor o igual que su correspondiente de la serie (V-8). Por lo tanto la serie armónica (V-7) es divergente.

<u>Criterio de convergencia del cociente</u>

Dada la serie de términos positivos

$$(V\text{-}9) \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

si se calcula el límite del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

entonces:

a) si $r < 1$, la serie (V-9) es convergente
b) si $r > 1$, la serie es divergente
c) si $r = 1$, la serie puede ser convergente o divergente.

<u>Ejemplo</u>: Determinar el carácter de la siguiente serie

$$(V\text{-}10) \qquad 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \; ; \; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \; ; \; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$

Luego,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

y la serie (V-10) es convergente.

CONVERGENCIA DE SERIES DE TERMINOS NEGATIVOS

Si una serie tiene todos sus <u>términos negativos</u>, para estudiar su convergencia basta con sacar factor -1 aplicándosele entonces los criterios para series de términos positivos.

Un caso importante de serie con términos negativos es la denominada <u>serie alternada</u>. Tiene la forma

$$\text{(V-11)} \qquad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

en la cual cada valor <u>a</u> es positivo. La condición necesaria y suficiente para que una serie alternada sea convergente es que su término general tienda a cero, es decir

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Por ejemplo la serie

$$\text{(V-12)} \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

es convergente.

Si una serie tiene sus <u>términos arbitrariamente positivos y negativos</u>, para analizarla hace falta introducir el concepto de convergencia absoluta. La serie

$$\text{(V-13)} \qquad \sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

es <u>absolutamente convergente</u>, si la serie de valores absolutos

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots$$

es convergente.

La importancia de la convergencia absoluta la da el teorema que dice:

"Toda serie absolutamente convergente es convergente".

De este modo, la convergencia de las series de signos arbitrariamente positivos y negativos puede estudiarse por medio de la convergencia absoluta, es decir, aplicando a sus valores absolutos los criterios de convergencia de las series de términos positivos. Pero si la serie de valores absolutos es divergente, la serie original puede ser convergente o no.

Por ejemplo la serie (V-12) vista más arriba, es convergente; pero la serie formada con sus valores absolutos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

es divergente. Si una serie converge, pero no absolutamente, se dice que es condicionalmente convergente.

El <u>criterio del cociente</u> para series de términos positivos se aplica, en el caso de series de términos arbitrariamente positivos y negativos, en la siguiente forma:

$$\text{(V-14)} \qquad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$$

a) Si $r < 1$, la serie es convergente

b) Si $r > 1$, la serie es divergente

c) Si $r = 1$, la serie puede ser convergente o divergente.

El único caso que exige discusión es el b) $r > 1$, ya que la serie de valores absolutos puede ser divergente y la original convergente. Sin embargo si $r > 1$, eso implica que cada término en valor absoluto va creciendo; por lo tanto el término <u>n</u>-ésimo no tiende a cero y la serie es divergente.

SERIE DE POTENCIAS

Una serie de la forma

$$\text{(V-15)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

en la cual los coeficientes c_o, c_1, c_2, ... son constantes, se denomina <u>serie de potencias de x</u>.

Del mismo modo la serie

$$\text{(V-16)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_o + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots$$

es una serie de potencias de x-a.

El <u>campo de convergencia</u> de una serie de potencias está constituido por todos los valores de <u>x</u> para los cuales la serie es convergente. Algunas funciones son convergentes para cualquier valor de <u>x</u>, mientras que otras sólo lo son para determinados valores de <u>x</u> dentro de un intervalo. El campo de convergencia se determina corrientemente mediante el criterio del cociente visto en el punto anterior.

<u>Ejemplo</u>:

Determinar el campo de convergencia de la serie de potencias

$$\text{(V-17)} \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Aplicando el criterio del cociente (V-14) para series de términos arbitrariamente positivos y negativos, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$$

La serie de potencias es convergente para $|x| < 1$ y divergente para $|x| > 1$. En los extremos $x = 1$ y $x = -1$ la serie puede ser convergente o divergente. Reemplazando estos valores directamente en (V-17) tenemos

Para $x = 1$, la serie es
$1 + 1 + 1 + \ldots$ que es divergente

Para $x = -1$, la serie es
$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ que es también divergente.

Por lo tanto la serie de potencias (V-17) es convergente en el intervalo $-1 < x < +1$

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE POTENCIAS

En este punto se analiza la forma de representar una función mediante un desarrollo en serie. Este tema es de gran utilidad dentro de la Matemática. De esta manera se calculan por ejemplo las tablas de funciones tales como e^x, $\ln x$, sen x; asimismo tomando algunos términos de la serie se pueden obtener aproximaciones a funciones más complejas; etc.

Para obtener el desarrollo de una función en serie de potencias de x y de $x-a$, la condición necesaria es que tanto la función como todas sus derivadas estén definidas para $x=0$ o $x=a$. La condición necesaria y suficiente se verá más adelante.

Si se desea representar una función $f(x)$ mediante un desarrollo en serie de potencias de $x-a$, puede escribirse:

$$f(x) = c_o + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots \qquad \text{(V-18)}$$

Las incógnitas son los valores de los coeficientes c_o, c_1, c_2, c_3, ...

Derivando sucesivamente, se tiene

(V-19) $f'(x) = c_1 + 2\,c_2(x-a) + 3\,c_3(x-a)^2 + \ldots$

(V-20) $f''(x) = 2\,c_2 + 6\,c_3(x-a) + 12\,c_4(x-a)^2 + \ldots$

(V-21) $f'''(x) = 6\,c_3 + 24\,c_4(x-a) + \ldots$

Haciendo x=a en (V-19), (V-20), (V-21), ...
queda

$f(a) = c_o$

$f'(a) = c_1$

$f''(a) = 2\,c_2$

$f'''(a) = 6\,c_3$

.....

De donde los coeficientes c_i resultan

$$c_o = f(a)\ ;\ c_1 = f'(a)\ ;\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!}\ ;\ c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}\ ;\ \ldots$$

Reemplazando en (V-18) se obtiene

(V-22) $$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\,f'''(a) + \ldots}$$

la cual se denomina SERIE DE TAYLOR

Otra expresión muy empleada de la serie de Taylor es

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}\,f''(a) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(a) + \ldots$$

que se obtiene haciendo $x = a+h$.

Si en (V-22) se hace $a = 0$, entonces resulta

$$\text{(V-23)} \quad \boxed{f(x) = f(o) + x\, f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \frac{x^3}{3!} f'''(o) + \ldots}$$

que es la SERIE DE MACLAURIN.

A continuación se desarrollan algunas funciones utilizando esta última serie.

a) $f(x) = e^x$

Para desarrollar una función en serie de Maclaurin, es necesario calcular el valor de la función y sus derivadas sucesivas en $x = 0$

$$f(x) = e^x \quad ; \quad f(o) = e^o = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad ; \quad f'(o) = e^o = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad ; \quad f''(o) = e^o = 1$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad ; \quad f^{(n)}(o) = e^o = 1$$

Reemplazando estos valores en (V-23), se tiene

$$\text{(V-24)} \quad f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

que es el desarrollo en serie de e^x.

<u>Campo de convergencia</u>

Cuando se desarrolla una función en serie de potencias es necesario determinar su campo de convergencia, porque los desarrollos son válidos dentro de esos intervalos. Por ejemplo la función $f(x) = 1/(1-x)$ se puede desarrollar en serie con solo pro -

longar indefinidamente su división

$$\text{(V-25)} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Según se ha visto más arriba (ver pág.142) esta serie es convergente en el intervalo $|x| < 1$. Por lo tanto la igualdad (V-25) sólo es válida para valores de $\underline{x}$ dentro de ese intervalo. Si se da a $\underline{x}$ otro valor, por ejemplo $x = 4$ se obtiene

$$\frac{1}{1-4} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots$$

lo cual, evidentemente, es incorrecto.

Volviendo al campo de convergencia de la serie (V-24), aplicando el criterio del cociente se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n} \right| = 0$$

En consecuencia la serie (V-24) es convergente para todo valor de $\underline{x}$.

Si en (V-24) se hace $x = 1$, se llega al desarrollo en serie del número $\underline{e}$, ya visto en el capítulo I:

$$\text{(V-25)} \qquad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

b) $\underline{f(x) = \ln(1+x)}$

La función $\ln x$ no se puede desarrollar en serie de potencias de x, porque la función y sus derivadas no están definidas en $x = 0$. Debido a esto se ha considerado la función $\ln(1+x)$.

Calculando las derivadas sucesivas:

$$f(x) = \ln(1+x) \quad ; \quad f(o) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad ; \quad f'(o) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \quad ; \quad f''(o) = -1$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \quad ; \quad f'''(o) = 2$$

$$f^{IV}(x) = -6(1+x)^{-4} \quad ; \quad f^{IV}(o) = -6 = -(3!)$$

$$f^{V}(x) = 24(1+x)^{-5} \quad ; \quad f^{V}(o) = 24 = 4!$$

Reemplazando en (V-23), se tiene

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2\,x^3}{3!} - \frac{3\,x^4}{4!} + \ldots$$

$$\text{(V-26)} \qquad = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

<u>Campo de convergencia</u>

Aplicando el criterio del cociente,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| x\,(1 - \frac{1}{n}) \right| = \left| x \right|$$

La serie es convergente para $|x| < 1$. En los extremos $x = 1$ y $x = -1$ la serie puede ser convergente o divergente. Reemplazando estos valores directamente en la serie, tenemos

Para $x = 1$, la serie es

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{que es convergente}$$

Para $x = -1$, la serie es

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

o bien

$$-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) \quad \text{que es divergente.}$$

Por lo tanto el campo de convergencia de la serie logarítmica (V-26), está constituido por los valores de x del intervalo

$$-1 < x \leq +1$$

c) <u>$f(x) = \text{sen } x$</u>

Calculamos primero el valor de la función y sus derivadas sucesivas en $x = 0$

$$f(x) = \text{sen } x \quad ; \quad f(o) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \quad ; \quad f'(o) = 1$$

$$f''(x) = \text{sen } x \quad ; \quad f''(o) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad ; \quad f'''(o) = -1$$

$$\dots \quad f^{IV}(x) = \text{sen } x \quad ; \quad f^{IV}(o) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

El valor de las derivadas en $x = 0$ forma ciclos 0, 1, 0, -1; reemplazando en la fórmula de Maclaurin, se obtiene el desarrollo en serie de la función sen x:

$$f(x) = \text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Campo de convergencia

Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2}{2n\ (2n+1)} = 0$$

La serie resulta convergente para todos los valores de x.

A continuación se resume el desarrollo en serie de algunas funciones principales

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, válido para todo x.

b) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, válido para $-1 < x \leqslant 1$

c) $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, válido para todo x.

d) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$, válido para todo x.

e) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$, válido para $-1 < x < 1$

f) $\ln(z+1) = \ln z + 2\left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots\dots\right)$,

válido para $z > 0$

g) $a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \dots$, válido para todo x.

h) $\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$, válido para $-1 \leqslant x \leqslant 1$

FORMULAS DE TAYLOR Y MACLAURIN CON EL TERMINO COMPLEMENTARIO DE LAGRANGE

Los desarrollos en serie de Taylor y Maclaurin

$$\text{(V-22)} \quad f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$\text{(V-23)} \quad f(x) = f(o) + x\, f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(o) + \ldots$$

también pueden escribirse

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x) \\ \text{donde } R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_o) \; ; \; a \leqslant x_o \leqslant x \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = f(o) + x\, f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(o) + R_n(x) \\ \text{donde } R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x_o) \; ; \; 0 \leqslant x_o \leqslant x \end{gathered}}$$

los cuales se denominan, respectivamente, fórmulas de Taylor y Maclaurin con restos o términos complementarios. Existen varias formas de $R_n(x)$ de las cuales sólo se incluye aquí el denominado <u>Resto de Lagrange</u>.

Si se denomina con $S_n(x)$ la suma de los <u>n</u> primeros términos de (V-22) o (V-23), se tiene

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

o bien

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

o sea que el término complementario representa la diferencia entre el valor de la función y la suma de los primeros <u>n</u> términos del desarrollo en serie.

Si para un valor dado de x, el resto $R_n(x)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces $S_n(x)$ tendrá $f(x)$ por límite. En este caso las series (V-22) y (V-23) convergen hacia $f(x)$.

Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que las series de Taylor y Maclaurin sean convergentes y representen a la función $f(x)$, es que el término complementario tienda a cero, es decir

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

Los desarrollos en serie de funciones son de gran utilidad, porque permiten expresar una función generalmente difícil de calcular por medio de un polinomio ordinario, con coeficientes constantes. Este polinomio da sólo una aproximación de la función del primer miembro. El error de esta aproximación viene dado por el término complementario $R_n(x)$.

De aquí que el término complementario permite medir el error que se comete al tomar los n primeros términos de un desarrollo en serie. En la práctica más bien se fija el error o el grado de exactitud con el cual se desea trabajar y entonces la incógnita es el número de términos que deben tomarse.

Si la serie es de signos alternados, el error que se comete al tomar la suma de los n primeros términos de la serie, es menor que el valor numérico del primer término no considerado.

Ejercicio:

Calcular el número e con un error menor a 0.00001.

El desarrollo en serie de e^x con el Resto de Lagrange es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{x_o} \; ; \; 0 \leq x_o \leq x$$

Haciendo $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} e^{x_o} \; ; \; 0 \leq x_o \leq 1$$

Para que el error sea menor a 0.00001 deberá verificarse que

$$R_n(x) = \frac{e^{x_o}}{n!} < 0.00001$$

Antes de encontrar el valor de n que satisfaga esta desigualdad es necesario obtener una aproximación (por exceso) del numerador e^{x_o}.

Para ello comparemos las dos series:

$$\text{(V-27)} \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

y

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Aplicando el criterio de convergencia por comparación la serie (V-27) resulta convergente, con suma menor que 3; luego $1 < e < 3$.

Como $\quad e^{x_o} \leq e \leq 3$

se puede escribir

$$\frac{e^{x_o}}{n!} \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!}$$

Para que el error sea menor que 0.00001 es suficiente que se verifique

$$\frac{3}{n!} < 0.00001$$

Tomando recíprocas

$$\frac{n!}{3} > 100\ 000$$

o sea $n! > 300\ 000$

7 !	=	5 040
8 !	=	40 320
9 !	=	362 880

En consecuencia el término complementario resulta

$$R_n(x) = \frac{e^{x_o}}{9!} < 0.00001$$

Para obtener e con un error menor a 0.00001 deberá tomarse

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!}$$

En el cuadro siguiente se indica el valor de cada término de la serie y su suma acumulada. Se ve que al sumar 1/8 ! recién entonces se obtiene un resultado que difiere del valor de e en menos de 0.00001.

Términos de la série (V-27)	Valor de c/término	Suma acumulada
1	1.000000	1.000000
1	1.000000	2.000000
1 / 2!	0.500000	2.500000
1 / 3!	0.166667	2.666667
1 / 4!	0.041667	2.708334
1 / 5!	0.008333	2.716667
1 / 6!	0.001389	2.718056
1 / 7!	0.000198	2.718254
1 / 8!	0.000025	2.718279
Valor correcto de e		2.718281...

APLICACIONES A LA DEMOGRAFIA

El concepto de serie se utiliza con frecuencia en análisis demográficos teóricos. Para comprobarlo basta con hojear rápidamente libros clásicos de demografía matemática, tales como "Teoría analítica de las asociaciones biológicas"[1/] de Lotka, "El concepto de poblaciones estables"[2/] de Bourgeois-Pichat, "Introduction to the mathematics of population"[3/] de Keyfitz, etc.

1/ Alfred J. Lotka: Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, Nº5, Santiago, Chile, 1969.

2/ Naciones Unidas: El concepto de población estable: Aplicación al estudio de la población de países que no tienen buenas estadísticas demográficas. ST/SOA/ Serie A/39.

3/ Nathan Keyfitz: Introduction to the mathematics of population, Addison-Wesley, USA, 1968.

A modo de ejemplo del uso de las series en población, se de - sarrolla a continuación el siguiente tema que forma parte de uno de los modelos más empleados en demografía matemática.

Determinación de la tasa intrínseca de crecimiento (ρ) en el modelo de población estable.[4/]

Simbolizando con B(t) los nacimientos de niñas en la época t, con p(a) la probabilidad al momento del nacimiento de llegar con vida a la edad exacta a, y con m(a) el número de hijas nacidas vivas por año, por mujer de edad a, entonces los nacimientos totales B(t) serán

$$\text{(V-28)} \qquad B(t) = \int_0^{\omega} B(t-a)\ p(a)\ m(a)\ da$$

Es decir, de las B(t-a) mujeres nacidas en t-a, B(t-a) p(a) sobreviven a la edad a en la época t, las cuales tendrán ese año B(t-a) p(a) m(a) hijas; integrando con respecto a la edad a se tiene la suma del total de hijas nacidas en el año t provenientes de mujeres de todas las edades.

La (V-28) es una ecuación fundamental que vincula los nacimientos anuales de las niñas en la época t con los nacimientos anuales de las madres en el tiempo que precede.

Una solución general de la (V-28) es de la forma

$$\text{(V-29)} \qquad B(t) = Q_1\ e^{r_1 t} + Q_2\ e^{r_2 t} + Q_3\ e^{r_3 t} + \ldots$$

Reemplazando en (V-28) se tiene

$$\text{(V-30)} \qquad B(t) = \int_0^{\omega} (Q_1 e^{r_1 (t-a)} + Q_2 e^{r_2 (t-a)} + \ldots)\ p(a) m(a)\ da$$

4/ Alfred J. Lotka: Op. Cit. Págs. 123 y siguientes

$$(V\text{-}31) \quad = Q_1 e^{r_1 t} \int_0^{\omega} e^{-r_1 a}\, p(a) m(a)\, da + Q_2 e^{r_2 t} \int_0^{\omega} e^{-r_2 a}\, p(a)\, m(a) da + \ldots$$

Identificando término a término los segundos miembros de (V-29) y (V-31) se tiene

$$\int_0^{\omega} e^{-r_n a}\, p(a)\, m(a)\, da = 1\,, \text{ para } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

De este modo los coeficientes r_n de (V-29) quedan determinados como las raíces de la ecuación

$$(V\text{-}32) \qquad \int_0^{\omega} e^{-ra}\, p(a)\, m(a)\, da = 1$$

Por el contrario los coeficientes Q_n dependen de las condiciones iniciales.

La relación (V-32) admite sólo una raíz real p positiva para

$$R_o = \int_0^{\omega} p(a)\, m(a)\, da > 1$$

y negativa para $R_o < 1$.

Para demostrarlo puede considerarse la función de r

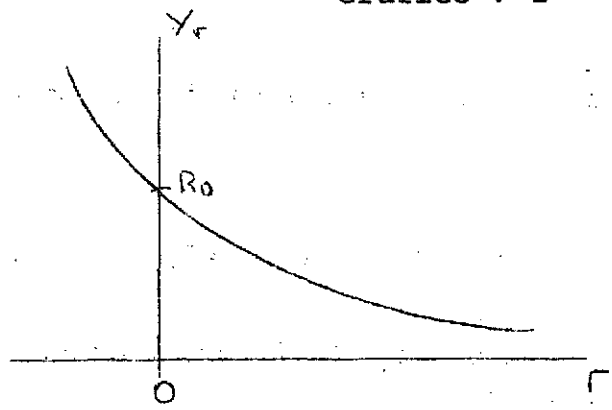
$$Y_r = \int_0^{\omega} e^{-ra}\, p(a)\, m(a)\, da$$

Derivando con respecto a r:

$$Y'_r = - \int_0^{\omega} a\, e^{-ra}\, p(a)\, m(a)\, da < 0$$

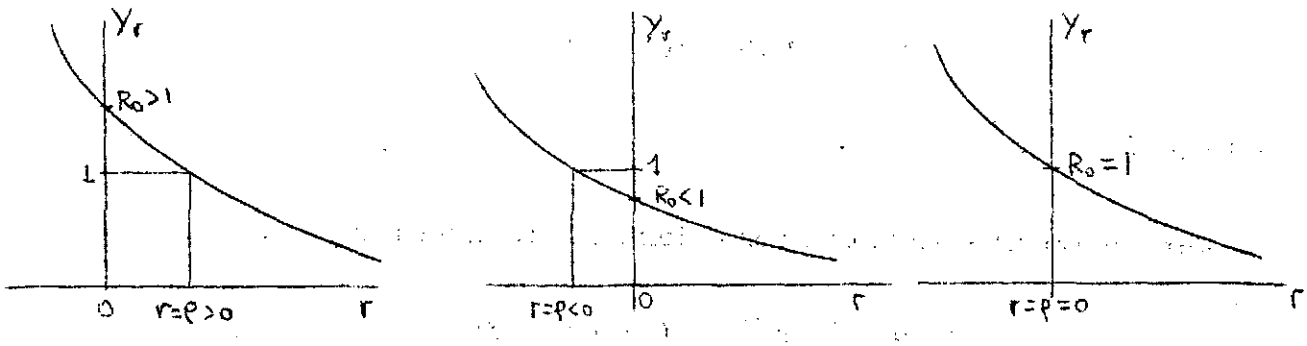
Todos los términos dentro de la integral son positivos por lo cual la derivada es menor que cero. Eso significa que la función Y_r o sea la integral (V-32) es decreciente con respecto a r, variando en teoría desde más infinito a cero cuando r crece desde menos infinito a más infinito. Tiene la forma

Gráfico V-2



R_o es lo que se denomina la tasa neta de reproducción o sea la relación entre los nacimientos femeninos de dos generaciones sucesivas. Se pueden distinguir 3 situaciones según que $R_o \gtreqless 1$, graficadas a continuación

Gráfico V-3



Si $R_o > 1$ el valor real de $r = \rho$ que hace a la integral (V-32) igual a 1 deberá ser mayor que 0, por ser la función de - creciente. Si $R_o < 1$, deberá ser $\rho < 0$ y finalmente si $R_o = 1$, entonces $r = \rho$ será igual a 0.

En resumen la ecuación (V-32) puede tener sólo una raíz real ρ, siendo

$$\rho \gtreqless 0 \quad \text{según que} \quad R_o \gtreqless 1.$$

Además de esta raíz real, la ecuación (V-32) tiene raíces complejas. Simbolizando por

$$r = u + i\,v \qquad ; \qquad \text{con } i = \sqrt{-1}$$

una cualquiera de las raíces complejas, entonces

$$e^{rt} = e^{(u+iv)t} = e^{ut}(\cos vt + i \operatorname{sen} vt)$$

Se llega a esta última expresión escribiendo

$$e^{rt} = e^{ut}\, e^{ivt}$$

Desarrollando e^{ivt} en serie

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{ivt} = 1 + ivt + \frac{i^2 v^2 t^2}{2!} + \frac{i^3 v^3 t^3}{3!} + \ldots$$

Si se tiene en cuenta que

$$i^2 = -1 \; ; \; i^3 = -i \; ; \; i^4 = 1 \; ; \; i^5 = i \; ; \text{ etc.}$$

$$e^{ivt} = \left(1 - \frac{v^2 t^2}{2!} + \frac{v^4 t^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(vt - \frac{v^3 t^3}{3!} + \frac{v^5 t^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= \cos vt + i \operatorname{sen} vt$$

Reemplazando la raíz real y las complejas en

$$\text{(V-29)} \quad B(t) = Q_1\, e^{r_1 t} + Q_2\, e^{r_2 t} + Q_3\, e^{r_3 t} + \ldots$$

Se tiene

$$B(t) = Q_\rho e^{\rho t} + Q_2\, e^{u_2 t}\,(\cos v_2 t + i \operatorname{sen} v_2 t) + \dots$$

$$= Q_\rho e^{\rho t} + \quad Q_n e^{u_n t}\,(\cos v_n t + i \operatorname{sen} v_n t) + \dots$$

$$= Q_\rho e^{\rho t} + \sum_{n=2}^{\infty} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t + i \sum_{n=2}^{\infty} Q_n e^{u_n t} \operatorname{sen} v_n t$$

Como B(t) es necesariamente real, deberá verificarse que

$$\sum_{n=2}^{\infty} Q_n\, e^{u_n t} \operatorname{sen} v_n t = 0$$

por lo cual

$$B(t) = Q_\rho e^{\rho t} + \sum_{n=2}^{\infty} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t$$

En la práctica es común que $u_n < 0$ con lo cual las oscilaciones del último término irán en disminución a medida que aumenta t. En todos los casos $u < \rho$ de modo que la amplitud <u>relativa</u> de las oscilaciones va en disminución con respecto al primer término aperiódico en relación al cual los demás términos pierden importancia, y en el límite para <u>t</u> que tiende a infinito

$$\text{(V-33)} \qquad B(t) = Q_\rho\, e^{\rho t}$$

Finalmente reemplazando (V-33) en la relación ya vista,

$$\text{(V-34)} \qquad N(t) = \int_0^{\omega} B(t-a)\; p(a)\; da$$

se tiene

$$N(t) = \int_0^{\omega} Q_\rho\, e^{\rho(t-a)}\; p(a)\; da$$

$$= \quad Q_\rho\, e^{\rho t} \int_0^{\omega} e^{-\rho a}\; p(a)\; da$$

(V-35) $N(t) = K e^{\rho t}$ (siendo K = constante)

Se tiene entonces que, si la mortalidad por edad p(a) y la fecundidad por edad m(a) de una población se mantienen constantes a través del tiempo, cualquiera que sea la distribución por edad inicial las tasas de natalidad y mortalidad, la población tenderá a crecer a la tasa ρ denominada tasa intrínseca de crecimiento. Esta tasa representa la capacidad fundamental de crecimiento de una población. En cambio la tasa bruta de crecimiento r no da una medida verdadera de esta capacidad porque está influida por factores adventicios, como por ejemplo una distribución por edad con una proporción particularmente alta o baja de mujeres en edad reproductiva.

EJERCICIOS DEL CAPITULO V

1. Aplicando el criterio de convergencia y divergencia por comparación, determinar si la serie

(V-36) $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

es convergente.

<u>Solución</u>

Resulta conveniente compararla con la serie geométrica de razón 1/2:

(V-37) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

la cual es convergente, con suma igual a 2

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Comparando las series (V-36) y (V-37), los términos de la primera son menores o iguales que los correspondientes de la segunda. Por lo tanto la serie (V-36) es también convergente, con suma menor que 2.

2. Demostrar que la siguiente serie de signos alternados, es convergente

$$\text{(V-37)} \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

Solución

La condición necesaria y suficiente para que una serie de signos alternados sea convergente es que su término general tienda a cero.

$$a_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \underline{0}$$

En consecuencia la serie (V-37) es convergente.

3. Determinar el campo de convergencia del desarrollo en serie

$$\text{(V-38)} \qquad \text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Solución

Aplicando el criterio del cociente (V-14) resulta

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n \to \infty} x^2 \frac{2n-1}{2n+1} = x^2$$

la serie (V-38) es convergente para $|x| < 1$ y divergente para $|x| > 1$. Si $|x| = 1$ se tiene

Cuando $x = 1$,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad \text{que es convergente}$$

Cuando $x = -1$

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots \qquad \text{que es convergente}$$

En consecuencia el desarrollo en serie de arc tg x es convergente en el intervalo $|x| \leqslant 1$.

4. Calcular el valor de <u>sen 30°</u> con un error menor a 0.0001

<u>Solución</u>

El desarrollo en serie de sen x es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} \frac{\Pi}{6} \simeq \operatorname{sen} \; 0.52360$$

$$\operatorname{sen} 0.52360 = 0.52360 - \frac{(0.52360)^3}{3!} + \frac{(0.52360)^5}{5!} - \ldots$$

En este caso, por tratarse de una serie alternada, el error que se comete al considerar <u>n</u> términos, es menor que el valor numérico del primer término no considerado. Se puede obtener por tanteos

$$\frac{(0.52360)^5}{5!} = 0.000328$$

$$\frac{(0.52360)^7}{7!} = 0.000002$$

Por lo tanto, habrá que tomar 3 términos para calcular el sen 30° con un error menor a 0.0001.

$$\text{sen } 0.52360 \simeq 0.52360 - \frac{(0.52360)^3}{3!} + \frac{(0.52360)^5}{5!}$$

$$= 0.52360 - 0.02393 + 0.00033$$

$$= \underline{0.50000}$$

* * *

BIBLIOGRAFIA

1. Thomas, G.B.: Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica, Ed. Aguilar, Madrid, 1964

2. Ayres, Frank, Jr.: Cálculo. Colección Schaum-Mc Graw-Hill, 1969

3. Granville, Smith y Longley: Cálculo Diferencial e Integral, Ed. UTHEA, México, 1963

4. Lotka, Alfred J.: Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, N°5, Santiago, Chile, 1969

5. Keyfitz, Nathan: Introduction to the mathematics of population, Editorial Addison-Wesley, California, USA, 1964

6. Spiegel, Murray R: Cálculo Superior, Colección Schaum-Mc Graw-Hill, 1969

7. Courant y Robins: Qué es la matemática, Ed. Aguilar, Madrid, 1967

8. Somoza, Jorge: Poblaciones Teóricas, CELADE, Serie B, N°20, Santiago, Chile, 1965

9. Naciones Unidas: El concepto de población estable: Aplicación al estudio de la población de países que no tienen buenas estadísticas demográficas, ST/SOA/A/39, Nueva York, 1970

10. Brass, William y otros: The Demography of Tropical Africa, Princeton University Press, New Jersey, 1968

11. Brass, William: Sobre la escala de la mortalidad, CELADE, Serie DS N°7, San José, Costa Rica, 1971

12. Reed y Merrell: Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, Serie D, N°49, Chile.

13. Carrier y Hobcraft: Demographic Estimation for Developing Societies, Population Investigation Comittee, London, 1971

14. Spurgeon, E.F.: Life Contingencies, Cambridge University Press 1946

* * *

Fórm. 407-350, marzo de 1973