

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CELADE-SANTIAGO

MAESTRIA EN DEMOGRAFIA
1985 - 1986

TESIS DE GRADO

Título : TECNICAS DE PROYECCION DE POBLACION DE AREAS MENORES.
APLICACION Y EVALUACION

Autor : María del Pilar Granados Thorschmidt

Asesores : Dirk Jaspers F. y José M. Pujol



CELADE - SISTEMA NACIONAL
DOCUMENTACION
SOBRE POBLACION EN
AMERICA LATINA
Santiago-Chile
Diciembre de 1986

24712

INDICE

Página

INTRODUCCION	1
A. Algunas definiciones básicas	1
1. Estimaciones y proyecciones de población	2
2. Proyecciones a corto, mediano y largo plazo	3
3. Relación, razón, proporción, participacion , porcentaje y tasa	3
4. Calidad de las estimaciones	4
5. Proyecciones independientes, dependientes individuales y en conjunto	4
B. Datos básicos	5
C. Contenido del trabajo	6
I. METODOLOGIAS EMPLEADAS PARA PROYECTAR LA POBLACION DE AREAS MENORES . .	7
A. Métodos de extrapolación del crecimiento de la población	7
1. Método de extrapolación gráfica de las tendencias	11
2. Extrapolación por métodos matemáticos	13
a) Cambio aritmético o lineal	13
b) Cambio geométrico o exponencial	15
c) Función logística	17
d) La Curva de Gompertz	22
e) La curva exponencial modificada	25
f) Curvas polinómicas (parábolas o curvas no lineales) . .	27
3. Técnica de regresión	29
a) Regresión lineal	30
b) Regresión geométrica o exponencial	31
c) Regresión con curvas polinómicas	32
B. Métodos de extrapolación de proporciones	32
1. Métodos de proyección de la proporción de población del área menor, con respecto a la población del área mayor . .	33
a) Funciones matemáticas para proyectar proporciones . . .	34
b) Método de la proporción del Buró de Censos (Census Bureau Ratio)	34
c) Método de la tendencia de las proporciones de Pickard (The Ratio Trend Method)	36
2. Método de Pickard de proyección de la participación en el crecimiento (Apportionment Method)	38
3. Método del diferencial de crecimiento	40
C. Métodos demográficos	42
1. Método de los componentes brutos	42
2. Método de migración-sobrevivencia	42
3. Método de los componentes	43
D. Métodos o modelos económicos	43
1. Método de regresión	44
2. Método de covarianzas modificado de Berry	44
3. Modelo Obers. Razón de empleos	45

4. Razón al stock de viviendas proyectadas	45
E. Otros métodos	46
1. Modelo de dispersión Genessee-Finger Lakes Region	47
2. Modelo de Newling	47
F. Alcance del presente trabajo	48
II. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES POR EXTRAPOLACION	
DE LA POBLACION EN FORMA DIRECTA	51
A. Información básica	52
B. Estadísticas utilizadas para evaluar la calidad de las estimaciones	56
1. Estadístico Chi-cuadrado de Pearson (X^2_p)	56
2. Promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación	57
3. Porcentaje de desviaciones por encima del 5 ó 10% (>5% ó >10%)	58
4. Porcentaje de desviaciones positivas o negativas (d(+) ó d(-))	58
5. Porcentaje de frecuencia en que cada método arroja las mejores y las peores proyecciones	58
C. Resultados	59
1. Análisis de los resultados, considerando las proyecciones de las áreas menores en forma independiente	59
2. Análisis de los resultados controlando las proyecciones de las áreas menores, con el total del área mayor, obtenido en forma independiente	65
III. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES, A PARTIR DE LA EXTRAPOLACION DE PROPORCIONES	70
A. Información básica	70
B. Resultados	73
1. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de la proyección de las proporciones en forma individual para cada área menor	74
2. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de las proyecciones de las proporciones de población del área menor con respecto al área mayor, ajustadas para que reproduzcan el valor de ésta última	78
3. Análisis de otros métodos matemáticos que utilizan criterios específicos para proyectar las proporciones	82
IV. ANALISIS COMPARATIVO DE LOS PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS	87
A. Resultados globales	89
B. Análisis considerando los métodos que arrojan los mejores resultados	89
RESUMEN Y CONSIDERACIONES FINALES	92
BIBLIOGRAFIA	96

LISTA DE CUADROS

Página

Cuadro 1	Información mínima necesaria para la aplicación de las proyecciones matemáticas del de la población	52
Cuadro 2	Colombia, Antioquia, Municipios del Valle del Río Negro información censal	54
Cuadro 3	Colombia, Antioquia, Municipios del Valle del Río Negro ajuste de los censos igualmente espaciados	54
Cuadro 4	Venezuela, distritos del Estado de Mérida información censal	55
Cuadro 5	Venezuela, distritos del Estado de Mérida ajuste censos igualmente espaciados	55
Cuadro 6	Colombia, Antioquia, Municipios del Valle del Río Negro error porcentual de las proyecciones de población, por método, según municipio al 15 de octubre de 1985	61
Cuadro 7	Venezuela, Distritos del Estado de Mérida. Error porcentual de las proyecciones de población, por método, según distrito al 20 de octubre de 1981	61
Cuadro 8	Estadístico chi-cuadrado, promedio de valores absolutos de los porcentajes de desviación, porcentaje de desviación por encima del 5 y 10 por ciento, porcentaje de desviaciones positivas y porcentaje de frecuencias en que cada método arroja las mejores y las peores proyecciones de población, por método, según país	62
Cuadro 9	Colombia, Antioquia, Municipios del Valle del Río Negro, error porcentual de las proyecciones de población de las áreas menores, al 15 de octubre de 1985, controlando por el total del área mayor, por métodos y según municipio	66
Cuadro 10	Venezuela, Distritos del estado de Mérida. Error porcentual de las proyecciones de población de las áreas menores, al 20 de octubre de 1981, controlando por el total del área mayor, por métodos y según distrito	66
Cuadro 11	Estadístico chi-cuadrado, promedio de los valores absolutos de los porcentajes de ^{desviaciones} desviaciones por encima del 5 y 10 por ciento, porcentaje de desviaciones positivas y porcentaje de frecuencias en que cada método arroja las mejores y las peores proyecciones de población, después de ser ajustadas al total del área mayor,	

por método, según país	67
<p>Cuadro 12</p> <p>Colombia, Antioquia. Distribución relativa de los municipios en el Valle del Río Negro. Información a fechas censales</p>	71
<p>Cuadro 13</p> <p>Colombia, Antioquia. Distribución relativa de los municipios en el valle del Río Negro con los censos ajustados a iguales períodos de tiempo</p>	72
<p>Cuadro 14</p> <p>Venezuela, Mérida. Distribución relativa de los distritos en el Estado de Mérida, información a fechas censales</p>	72
<p>Cuadro 15</p> <p>Venezuela, Mérida. Distribución relativa de los distritos en el estado de Mérida, con la información de los censos ajustados a iguales períodos de tiempo</p>	73
<p>Cuadro 16</p> <p>Colombia. Antioquia, Valle del Río Negro. Error porcentual de las estimaciones de la población a partir de la proyección de la proporción de población del área menor a la mayor, al 15 de octubre de 1985, por método, según municipio</p>	76
<p>Cuadro 17</p> <p>Venezuela, distritos del estado de Mérida. Error porcentual de la estimación de la población a partir de la proyección de la proporción de población del área menor a la mayor, al 20 de octubre de 1981, por método, según distrito</p>	76
<p>Cuadro 18</p> <p>Estadístico chi-cuadrado, promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación, porcentaje de desviación por encima del 5 y 10 por ciento, porcentaje de desviaciones positivas y porcentaje de frecuencias en que cada método arroja las mejores y las peores estimaciones de población a partir de la proyección de la proporción del área menor en la mayor, por método, según país</p>	77
<p>Cuadro 19</p> <p>Colombia, Antioquia, municipios del Valle del Río Negro. Error porcentual de las estimaciones de la población, a partir de la proyección de la proporción de población del área menor a la mayor, al 15 de octubre de 1985, ajustadas a la unidad, por método según municipio</p>	79
<p>Cuadro 20</p> <p>Venezuela, distritos del estado de Mérida. Error porcentual de las estimaciones de la población, a partir de la proyección de la proporción de población del área menor a la mayor, al 20 de octubre de 1981, ajustadas a la unidad, por método, según distrito</p>	80

Cuadro 21	Estadístico chi-cuadrado, promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación, porcentaje de desviación por encima del 5 y 10%, porcentaje de desviaciones positivas y porcentaje de frecuencias en que método arroja las mejores y las peores estimaciones de población a partir de la proyección de la proporción del área menor a la mayor, ajustadas a la unidad por método, según país	81
Cuadro 22	Colombia, Antioquia, municipios del Valle del Río Negro. Error porcentual de las proyecciones por algunos métodos con criterios particulares, al 15 de octubre de 1985, por método, según municipio .	83
Cuadro 23	Venezuela, distritos del estado de Mérida. Error porcentual de las proyecciones por algunos métodos con criterios particulares, al 20 de octubre de 1981, por método, según distrito	83
Cuadro 24	Estadístico chi-cuadrado, promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación, porcentaje de desviación por encima del 5 y 10 por ciento, porcentaje de desviaciones positivas y porcentaje de frecuencias en que cada método arroja las mejores y las peores estimaciones de población utilizando algunos métodos que emplean criterios específicos por método, según país	84
Cuadro 25	Promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación (porcentaje de desviaciones por encima del 10%): resumen comparativo de todos los procedimientos utilizados	88

INTRODUCCION

Cada día en forma más insistente, usuarios de los diferentes ámbitos del quehacer nacional, demandan conocer la capacidad potencial de consumidores, de mano de obra, de población estudiantil, etc., de las diferentes localidades del país, para propósitos de planeamiento económico, social, político y comercial.

De acuerdo a esto, algunos necesitan conocer sólo la población total de cada localidad, mientras que otros la necesitan en forma más desagregada, por sexo y edad.

Cuando los encargados de hacer estas proyecciones empiezan a trabajar, se enfrentan al gran dilema de cuál metodología, de todas las que se citan en la literatura, se debe utilizar.

En tal sentido, el objetivo central de este trabajo es examinar algunas de las metodologías más frecuentemente utilizadas para proyectar la población total de cada área menor, con el fin de definir la o las metodologías más adecuadas para hacer estas proyecciones a mediano y corto plazo, para que éstas puedan ser aplicadas en los países de América Latina.

Para evaluar la bondad de los métodos existentes y que por la información que requieren son aplicables en estos países, se empleó un procedimiento muy sencillo que requiere disponer de cuatro censos consecutivos, de tal manera que los tres primeros censos sirven de información básica para las proyecciones de población y el cuarto censo sirve de control para verificar la proyección hecha a la fecha de este último censo.

A. Algunas definiciones básicas

Es conveniente, antes de entrar en el tema de este trabajo, definir

algunos de los términos que se emplearán y que en algún momento pueden crear confusión.

1. Estimaciones y proyecciones de población

Las estimaciones de población son todo cálculo del volumen de la población, tanto para el presente como para el pasado y el futuro. Estas estimaciones "pueden obtenerse mediante varios procedimientos, incluso algunos de los que se usan para las proyecciones de población". 1/

"Se entiende por proyecciones de población, al conjunto de resultados provenientes de cálculos relativos a la evolución futura de una población, partiendo usualmente de ciertos supuestos con respecto al curso que seguirá la fecundidad, la mortalidad y las migraciones" 2/ o la tasa de crecimiento de la población o de la participación de una subárea en el área mayor. En otras palabras, se está haciendo referencia a la estimación de la población en el futuro.

2. Proyecciones a corto, mediano y largo plazo

El número de años que comprende el período de una proyección, para poder ser llamada corto, mediano o largo plazo, varía mucho entre los autores.

Según Shryock y Siegel (1971) 3/, el largo plazo se refiere a proyecciones a una distancia superior a los 25 años, el mediano plazo a las proyecciones en un período de 10 a 25 años y el corto plazo se refiere a un período inferior a los 10 años.

Según Rincón (1984), 4/ se consideran proyecciones a corto plazo a "las estimaciones de población que se hacen para períodos de más o menos 5 años",

1/Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y Centro Latinoamericano de Demografía, CELADE, Diccionario Demográfico Multilingüe, Ediciones Ordina, Lieja, Bélgica, 1985. Pág. 116.

2/IBID, pág. 115.

3/Shryock, Henry S., Jacob S., Siegel and Associates (1971), The methods and materials of demography. U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, U.S. Printing Office, Washington D.C., pág. 775.

4/Rincón, Manuel, Estimaciones y proyecciones de población, CELADE, Serie B.No. 1010, San José, Costa Rica 1984. Pág. 6-7.

las proyecciones de mediano plazo "las que se hacen para un período futuro hasta de 15 a 20 años" y las de largo plazo, "las que buscan cubrir períodos de 30 o más años".

Según Pujol (1985) ^{5/} las proyecciones a corto plazo serán aquellas que se hagan para un período hasta de 5 años, las de mediano plazo entre 5 y 15 años y las de largo plazo, aquellas que vayan más allá de los 15 años.

Posiblemente la diversidad de criterios que se ha empleado para estos períodos radica en la calidad de los datos básicos, en el período histórico del cual se dispone y en la mayor o menor estabilidad que una población pueda tener.

Por estas razones, teniendo en cuenta que en este trabajo se busca ver la bondad de las diferentes metodologías para proyectar la población de áreas menores en los países latinoamericanos, para los cuales se dispone, en casi la generalidad de los casos, de un período muy corto en el cual la calidad de la información en ningún momento es óptima y donde la migración interna cobra gran importancia en el crecimiento de las localidades, se ha considerado como más apropiado usar para este trabajo el número de años que define Pujol, para cada uno de estos plazos de las proyecciones.

3. Relación, razón, proporción, participaciones, porcentaje y tasa

Se entiende por razón o relación, al cociente cuyo "dividendo y divisor pertenecen a categorías diferentes (por ejemplo: hombres y mujeres, niños y mujeres, edades distintas)" ^{6/} crecimiento económico y crecimiento de la población, etc.

Proporción o participación "es la magnitud que representa una parte con referencia al todo". ^{7/}

^{5/}Pujol, José M., (1985), Apuntes de clase del curso "Proyecciones de Población", CELADE, Santiago de Chile.

^{6/}Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y CELADE, op.cit, pág. 25.

^{7/} Idem.

"El término porcentaje indica que una proporción está expresada en tanto por ciento del total". 8/

"La tasa se emplea para designar la frecuencia relativa con que un hecho o suceso se presenta dentro de una población o subpoblación en un determinado período de tiempo, generalmente un año ..." 9/

4. Calidad de las estimaciones

Dado que los censos de población de América Latina (alrededor de 1970 y 1980) han tenido porcentajes de no cobertura que en general oscilan entre un 1.5 y un 13.8 10/ por ciento, no parece muy razonable que a las proyecciones de población de áreas menores se les exija una extrema calidad; por esta razón, en este trabajo se considerarán como buenas proyecciones aquellas cuyo error o desviación con respecto al "verdadero valor" no es superior al 5 por ciento, como aceptables, aquellas que tienen un error entre 5 y 10 por ciento y malas, las que tienen errores extremos, por encima del 10 por ciento.

5. Proyecciones independientes, dependientes individuales y en conjunto 11/

Las proyecciones individuales se refieren a aquéllas que se hacen para una o algunas localidades, pero sin que sus resultados estén afectados por el valor estimado para las demás localidades, o sea, que la suma de las proyecciones de las subáreas no tiene que reproducir el total de la población del área mayor, que ha sido o no, proyectada en forma separada.

Las proyecciones en conjunto son aquellas que se hacen para un grupo de subáreas y por lo tanto, los resultados finales dependen de las estimaciones de todas las localidades.

Las proyecciones independientes de áreas menores, como su nombre lo indica, son aquellas que sólo requieren de la información de la subárea para

8/ Idem

9/ Idem

10/ Instituto Nacional de Estadística y Censos y CELADE Los censos de población del 80: Taller de Análisis y Evaluación. Buenos Aires, 1985, pág. 257.

11/ Shryock y Siegel (1971), op.cit., pág. 776.

proyectar su población; esto es, se toma a la población de la subárea como independiente de la población nacional o área mayor.

Las proyecciones dependientes involucran una conexión entre las subáreas y el área mayor o relaciones entre otras variables, por lo cual la proyección de la subárea requiere de la disponibilidad de la proyección del área mayor o de las variables relacionadas.

De acuerdo a lo anterior, las proyecciones individuales se pueden dividir en independientes y dependientes, mientras que las proyecciones en conjunto sólo pueden ser dependientes.

B. Datos básicos

Como se comentó anteriormente, para este ejercicio se requería disponer de la población en cuatro censos por lo tanto se escogieron dos países, para los cuales se contaba con dicha información: Colombia, donde se levantaron censos el 9 de mayo de 1951, el 15 de julio de 1964, el 24 de octubre de 1973 y el 15 de octubre de 1985; y Venezuela, que realizó sus censos el 26 de noviembre de 1950, el 26 de febrero de 1961, el 2 de noviembre de 1971 y el 20 de octubre de 1981.

Dentro de Colombia se escogieron 10 municipios que se encuentran ubicados en el Valle del Río Negro en el Departamento de Antioquia, los cuales fueron seleccionados, por considerarse que éstos han tenido una economía relativamente estable, por lo cual se espera que su comportamiento no presente fuertes variaciones. Una ventaja adicional de estos municipios es que no han tenido cambios en sus límites en todo el tiempo considerado.

Para el caso de Venezuela se seleccionó el Estado de Mérida ya que éste cumplía una serie de requisitos. Por un lado, no se encontraba muy cerca de la frontera internacional, lo cual hacía menos grave el efecto que podía causar una migración de este tipo en un momento dado y, por otra parte, era un estado cuyas divisiones administrativas no habían sufrido muchas transformaciones, lo que permitía tener una serie de datos a lo largo del tiempo para los distritos en forma consistente.

A pesar de que las áreas menores seleccionadas para los dos países tenían ciertas cualidades, éstas fueron escogidas en forma bastante arbitraria, lo cual se confirmó al encontrarse que en general las subáreas presentaban situaciones "normales" con una evolución consistente, pero en algunas había irregularidades, lo que puede observarse frecuentemente.

Los diez municipios seleccionados en Colombia son Carmen de Vívoral, Concepción, Guarne, La Ceja, La Unión, Marinilla, Peñol, Rionegro, San Vicente y Santuario.

En 1981 el Estado de Mérida estaba conformado por doce distritos; sin embargo, para conseguir una secuencia histórica a partir de 1950, se agruparon en diez distritos: Andrés Bello, Arzobispo Chacón, Campo Elías, Justo Briceño, Libertador, Miranda, Rangel, Rivas Dávila, Sucre y Tovar. Los distritos Alberto Adriani y Antonio P. Salinas, se encuentran agrupados con Tovar.

En cuanto a la calidad de los datos básicos, se debe tener presente que se utilizó la información de los censos que se encontraba publicada, la que no estaba corregida por cobertura en ningún caso, a excepción del Censo de Colombia de 1973, para el cual la población de las subáreas seleccionadas se encontraba ajustada aproximadamente en un 7 por ciento.

C. Contenido del trabajo

El desarrollo de este trabajo comprende cuatro capítulos: en el primero se hará una breve reseña sobre los procedimientos que se han utilizado para proyectar la población de áreas menores; en el segundo se aplicarán y evaluarán los procedimientos empleados para proyectar la población en términos absolutos; en el tercer capítulo se emplearán y evaluarán los métodos que estiman la población a partir de la proyección de la proporción de población del área menor al área mayor; en el capítulo cuarto se hará un análisis comparativo de los resultados obtenidos en los dos capítulos anteriores y finalmente se presentará un resumen general con algunas conclusiones que se han obtenido y algunas consideraciones a tener en cuenta cuando se proyecta la población de áreas menores.

I. METODOLOGIAS EMPLEADAS PARA PROYECTAR LA POBLACION DE AREAS MENORES

Antes de examinar la bondad de las diferentes metodologías para proyectar la población de áreas menores, conviene clasificarlas de acuerdo al tipo de método empleado. En este sentido podemos agrupar las metodologías en cinco grupos:

A. Métodos de extrapolación del crecimiento de la población

Estos métodos consisten en examinar la tendencia del crecimiento de la población y extrapolar esta tendencia. Para esto se dispone de tres procedimientos generales, que son:

1. La extrapolación gráfica de tendencias,
 2. la extrapolación por métodos matemáticos y,
 3. la extrapolación por métodos estadísticos, utilizando la técnica de regresión.
-
1. La extrapolación gráfica de tendencias, proyecta la población en una forma no muy precisa, generalmente introduciendo un juicio sobre la posible evolución de la población.
 2. La extrapolación por métodos matemáticos consiste en ajustar una curva a un mínimo de puntos requeridos y de acuerdo a esto, proyectar la población. Las curvas que se han utilizado con mayor frecuencia para esto son:
 - a) Línea recta o de crecimiento aritmético.
 - b) La curva geométrica o exponencial.
 - c) La función logística.
 - d) La curva de Gompertz.
 - e) La curva exponencial modificada.
 - f) Otras curvas polinómicas.

3. La extrapolación por métodos estadísticos consiste en ajustar a una curva matemática una serie histórica de datos, utilizando generalmente la técnica de regresión de mínimos cuadrados, y una vez calculados los parámetros, se estima la población al futuro. En otras palabras, la diferencia básica entre este procedimiento y el anterior radica en el número de puntos utilizados.

B. Métodos de extrapolación de proporciones

Estos métodos se diferencian de los anteriores en que aquí se extrapola no la población sino una proporción, por lo cual se requiere disponer de la población del área mayor para la fecha de la proyección, para que con estos dos elementos se estime la población de cada una de estas subáreas. Estos métodos de extrapolación se pueden resumir en tres grupos:

1. Métodos de proyección de la proporción de población del área menor con respecto a la población del área mayor. Dentro de esta categoría se encuentran:
 - a) Las funciones matemáticas para proyectar proporciones,
 - b) El método de la proporción del Buró de Censos de Estados Unidos (The 1952 Census Bureau Ratio Method), y
 - c) El método de la tendencia de proporciones de Pickard (The Ratio-Trend Method).
2. Método de Pickard de proyección de la participación en el crecimiento (Apportionment Method), el cual utiliza la proporción de aumento de la población del área menor con respecto al aumento de la población del área mayor.
3. Método del diferencial del crecimiento, de Naciones Unidas, el cual utiliza para la proyección un supuesto sobre el comportamiento del diferencial de crecimiento del área menor y el área mayor.

C. Métodos demográficos

Se refiere en general a los métodos de proyección en los cuales se proyecta en forma independiente, cada uno de los componentes del crecimiento de la población: fecundidad, mortalidad y migración.

D. Métodos o modelos económicos

En estos modelos se establece una relación entre las variables económicas y la población, de tal manera que la estimación de población se obtiene en forma derivada de la proyección de las variables económicas. Dentro de estos modelos se pueden mencionar los siguientes:

1. Regresiones con variables económicas.
2. Método de covarianzas modificado de Berry.
3. Modelo Obers de razón de empleos.
4. Razón del stock de viviendas proyectadas.

E. Otros métodos

En esta categoría se resumen los métodos que no se pudieron incluir en las categorías anteriores. Básicamente estos métodos son modelos de densidad, donde precisamente lo que se proyecta es la densidad de población, y la población se obtiene en forma derivada. Dos modelos se han incluido en esta categoría:

1. Modelo de dispersión Genessee-Finger-Lakes-Region.
2. Modelo de Newling.

Dada la gran cantidad de metodologías que han sido utilizadas para proyectar la población de áreas menores, y con el fin de ver en forma clara las diferencias de cada una de éstas, se ha considerado conveniente que en este capítulo, aunque en forma resumida, se describan estos procedimientos.

Vale la pena anotar que en lo que sigue, se describirán los métodos en su forma más general, al igual que algunas modificaciones introducidas por ciertos autores para lograr mejores ajustes o facilitar los cálculos.

A. Métodos de extrapolación del crecimiento de la población

Desde los tiempos más remotos ha existido una constante preocupación por los problemas demográficos, entre los cuales se contaba el comportamiento futuro del crecimiento de la población. En tal sentido, "el período comprendido entre fines del siglo XV y fines siglo XVIII, fue testigo no sólo de una importante evolución de los puntos de vista sobre población, sino

también de los comienzos de las mediciones y análisis sistemáticos de las tendencias demográficas". 12/ Graunt (1662) 13/ examinó las tendencias de las variables demográficas y la dimensión de la ciudad de Londres, al igual que el futuro crecimiento de ésta. Petty (1691) 14/ sostuvo que la aritmética podría ser aplicada a la demografía. Gregory King (1696) 15/, Sussmilch (1775) 16/, Malthus (1798) 17/ y otros, observaron que la población crecía en forma geométrica.

Sin embargo, este comportamiento teórico de la población no se dió en todas partes o mejor en todos los periodos. Es así como Quetelet (1835) 18/ observó que la población evolucionaba en forma acelerada en un principio hasta un punto en que empezaba a hacerlo en forma más lenta. Luego Verhulst (1838) 19/, a solicitud de Quetelet, examinó ese principio y sugirió la curva a la que llamó logística.

-
- 12/ Naciones Unidas, Factores determinantes y consecuencias de las tendencias demográficas". Volumen I.
- 13/ Graunt, John (1662), Natural and political observations made upon the bills mortality, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1939.
- 14/ Petty, William (1691), Political arithmetic; or a discourse concerning the value of lands, people, buildings,...", London, R. Clavel, 1961.
- 15/ King, Gregory (1696), Natural and political observations and conclusions upon the state and condition of England, ed. 1936.
- 16/ Sussmilch, Johann Peter (1775), Die Gottliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen. Berlin.
- 17/ Malthus, Thomas (1798), An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet and other writers. London, Johnson, Vol. 2.
- 18/ Quételet, Adolphe (1835), Sur l'homme et le développement de ses facultés; ou essa de physique sociale, Paris, Bachelier, Vol. 2, págs. 1-20.
- 19/ Verhulst, Pierre-Francois (1838), Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, En Correspondence Mathématique et Physique de l'Observatoire de Bruxelles, publicado por A. Quetelet, Vol. 10, págs. 113-121.

Posteriormente, Pritchett (1891) 20/, sugirió un polinomio de tercer grado y Bowley (1925) 21/ utilizó ajustes de mínimos cuadrados para parábolas de segundo y tercer grado.

La curva logística fue redescubierta en 1920 por Pearl y Reed 22/ y trabajada posteriormente por Lotka (1939) 23/ y muchos otros autores, y más recientemente, por el CELADE (1982) 24/ y Naciones Unidas (1982).25/

Todas estas curvas y otras pueden describir en un momento dado muy bien el comportamiento de una población, pero esto no significa que lo hagan hacia el futuro. Sin embargo, para realizar las proyecciones de población de áreas menores, con las limitaciones de tiempo y presupuesto y a corto o mediano plazo, estos métodos pueden arrojar resultados bastante aproximados. A continuación se describirán brevemente estos métodos.

1. Método de extrapolación gráfica de las tendencias

Como su nombre lo indica, este método se basa en la extrapolación de las tendencias de la población en forma gráfica. Para esto se requiere disponer de la población en subáreas en diferentes momentos en el tiempo para que éstas

20/ Pritchett, H.S. (1891), A formula for predicting the population of the United States, Publications of the American Statistical Association, Boston, 2 (14).

21/ Bowley, A.L. (1925), Discussion on Dr. Ste venson's paper, Journal of the Royal Statistical Society, London, págs. 76-81.

22/ Pearl, Raimond and Lowell, Reed (1920), On the rate of growth of the population of the United States, since 1790 and its mathematical representation, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 6, págs. 275-288.

23/ Lotka, Alfred J. (1939), Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, No. 5, Santiago de Chile, 1976.

24/ Pujol, José y Chackiel, Juan (1982), Metodologías de las proyecciones de población urbana y rural y población económicamente activa elaboradas por CELADE, documento presentado en el Seminario de Proyecciones de Población, San José, Costa Rica. CELADE, Serie E, No.1003, San José, Costa Rica, 1984.

25/ Naciones Unidas (1982), Estimates and projections of urban, rural and city populations, 1950-2025, The 1980 Assessment, ST/ESA/SER.R/45, New York.

sean graficadas y luego en base a su comportamiento, el cual debe estar totalmente explicado y a toda la demás información de que se disponga, sea enjuiciado el futuro comportamiento de la población de cada subárea.

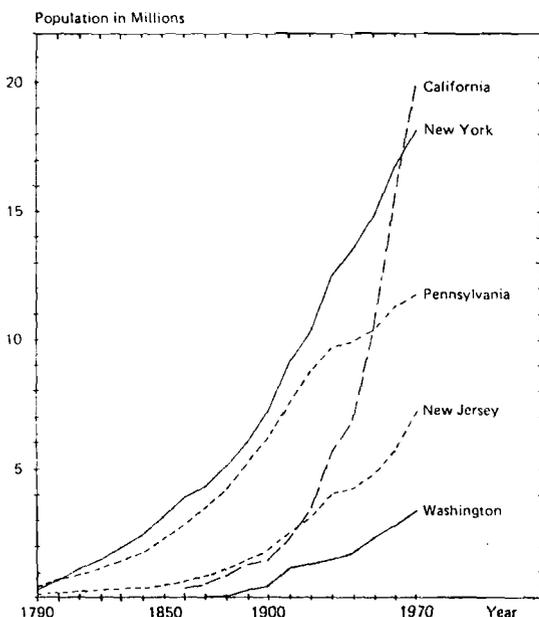
De acuerdo a lo anterior, si el analista sabe de algún proyecto que afecte directamente alguna región, puede alterar en base a esta información la tendencia de crecimiento que se había observado hasta ese momento y proyectar dicha población en forma mas realista.

Para graficar las poblaciones, existen dos posibilidades: la primera es graficar en escala aritmética (ver gráfico 1a), donde se puede observar el cambio absoluto de la población en el tiempo. La otra posibilidad es graficar a escala semi-logarítmica (ver gráfico 1b), donde se puede apreciar por un lado el cambio relativo en el tamaño de la población y por el otro, la tasa de crecimiento expresada por la pendiente de la línea.

Gráfico 1

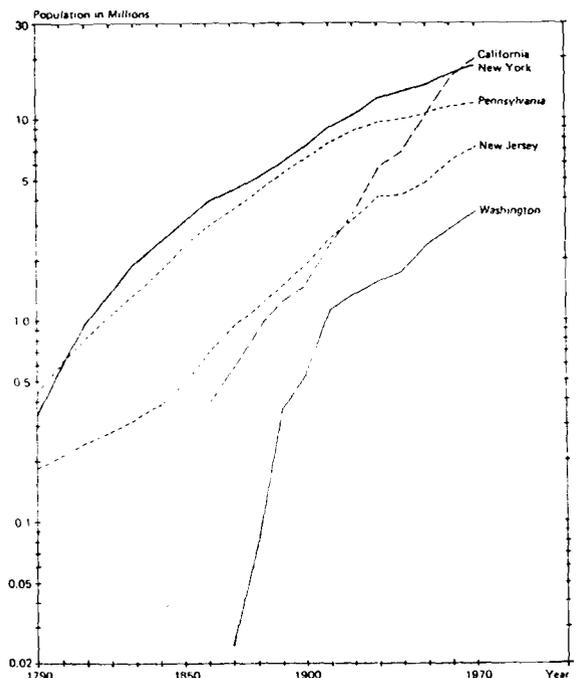
COMPORTAMIENTO GRAFICO DE LA POBLACION ENTRE 1790 Y 1970 DE ALGUNOS ESTADOS SELECCIONADOS DE ESTADOS UNIDOS

1.a. Escala aritmética



Source: U.S. Bureau of the Census, *Census of Population: 1970 Number of Inhabitants*, Final Report PC(1)-A1, United States Summary (Washington, D.C.: Government Printing Office, 1971), Table 8.

1.b. Escala semi-logarítmica



Source: U.S. Bureau of the Census, *Census of Population: 1970 Number of Inhabitants*, Final Report PC(1)-A1, United States Summary (Washington, D.C.: Government Printing Office, 1971), Table 8.

Fuente; Pittenger, D. (1976), Projecting State and Local Populations.

2. Extrapolación por métodos matemáticos

El uso de fórmulas matemáticas para proyectar la población supone que ésta tiene un comportamiento histórico relativamente regular, lo cual suele suceder a las poblaciones cuando no están muy afectadas por fluctuaciones debidas a la migración.

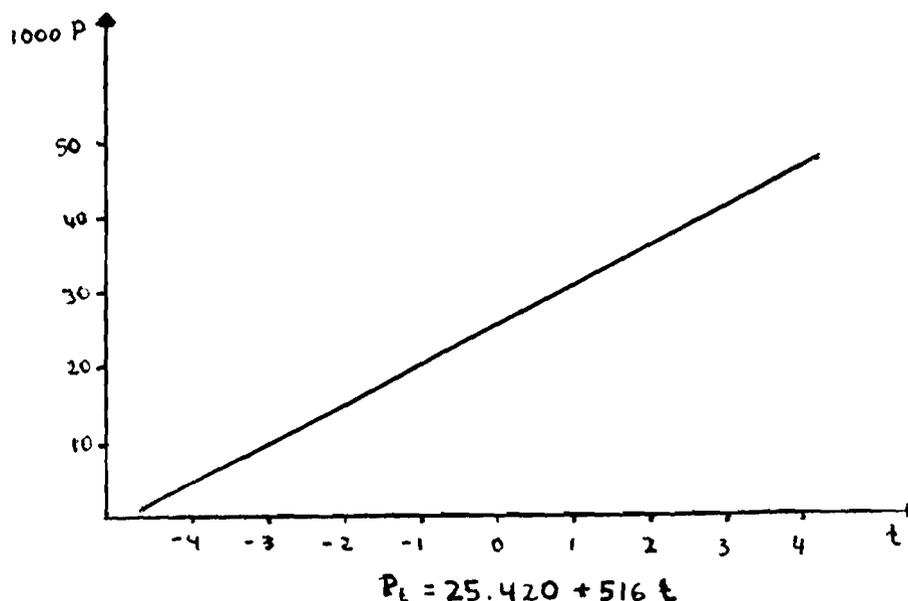
Dentro de las ecuaciones matemáticas, las más usadas para proyectar la población son las que se describen a continuación:

a) Cambio aritmético o lineal

La más simple de las funciones matemáticas es la línea recta o polinomio de primer grado, la cual se deriva de una progresión aritmética.

El crecimiento aritmético supone que en cada período la población aumenta o disminuye en el mismo número de personas, como se puede ver en el gráfico 2.

Gráfico 2
CRECIMIENTO LINEAL



Según Pittenger (1976) 26/, esta ecuación no debe ser muy utilizada debido a que es muy difícil encontrar una población que presente estas características y sólo justifica que se utilice en el caso de disponer únicamente de dos puntos en el tiempo.

Sin embargo, es posible que esta técnica matemática, a pesar de lo simple, pueda en la actualidad dar buenos resultados, especialmente si la proyección es a corto o mediano plazo ya que si bien es cierto esta técnica asume que el crecimiento futuro será en términos absolutos el mismo que en el pasado, esto implícitamente quiere decir que la población estaría creciendo a una tasa decreciente (si la población está aumentando), supuesto que es bastante razonable, dados los descensos de la fecundidad observados, especialmente a partir de la década de 1970. Sin embargo, vale la pena recordar que en el caso de las poblaciones menores, el componente migratorio puede estar afectando en un mayor grado el crecimiento de la población, lo cual podría restringir su validez en ciertas áreas, como por ejemplo, en las áreas de fuerte inmigración.

Si la población está disminuyendo, no sería muy conveniente usar este método, pues al hacerlo estaríamos haciendo disminuir la población a una tasa creciente y además, se podría llegar a una estimación negativa, lo cual no es lógico.

Matemáticamente el crecimiento lineal se puede expresar como:

$$P_t = P_0 + gt$$

donde P_t es la población en el momento t

P_0 es la población en el momento 0

t es el período de tiempo transcurrido ($t-0$)

g es el incremento anual de la población

De lo anterior se desprende que para su aplicación se requiere disponer de la población en dos momentos en el tiempo. Las ecuaciones para estimar los parámetros de la recta se pueden ver en el Anexo I.

26/ Pittenger, Donald (1976), *Projecting state and local populations*, Cambridge, Mass., Ballinger Publishing Co., U.S.A.

Ejemplo: Si la población de una región era de 25 420 personas al 30 de junio de 1960 y de 30 580 al 30 de junio de 1970, la población estimada al 30 de junio de 1980 sería:

$$g = \frac{30\ 580 - 25\ 420}{10} = 516$$

$$P_{80} = 25\ 420 + 516 (20)$$

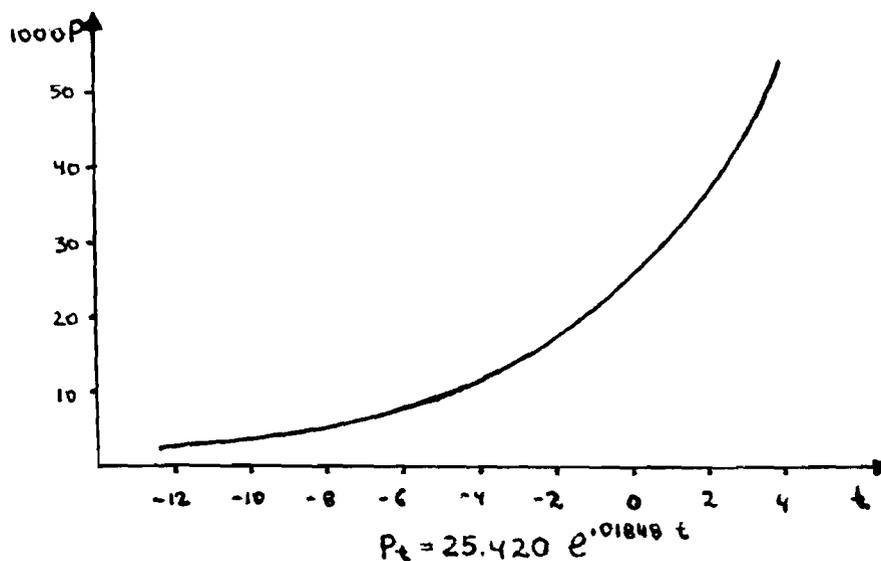
$$P_{80} = 35\ 740$$

b) Cambio geométrico o exponencial

Desde fines del siglo XVII y durante el siglo XVIII una gran cantidad de autores, entre los que se encuentran Susmilch, King, Malthus y otros, observaron cómo la población tendía a crecer en forma geométrica y durante mucho tiempo este fue el comportamiento observado en varias poblaciones, por lo cual esta función fue ampliamente utilizada.

Un crecimiento de la población en forma geométrica o exponencial, supone que la población crece a una tasa constante, lo que significa que aumenta proporcionalmente lo mismo en cada período de tiempo pero en número absoluto, las personas aumentan en forma creciente (ver gráfico 3).

Gráfico 3
CURVA EXPONENCIAL



Si la población está disminuyendo, lo hará también a una tasa constante, pero el número absoluto irá disminuyendo, acercándose a cero, de tal forma que la población nunca llegaría a ser negativa, lo cual teóricamente es totalmente razonable.

El crecimiento geométrico o exponencial se puede expresar, respectivamente, como sigue:

$$P_t = P_0 (1 + r)^t \quad \text{ó}$$

$$P_t = P_0 e^{rt}$$

donde P_t es la población en el momento t

P_0 es la población en el momento 0

r es la tasa de crecimiento

t es el período de tiempo ($t-0$)

e es la base de los logaritmos naturales o neperianos

La diferencia conceptual entre estas dos curvas es que en el primero el tiempo se toma como una variable discreta, mientras que en el segundo, es una variable continua y en tal sentido la tasa de crecimiento diferirá en los dos modelos; en el primero estará midiendo la tasa de crecimiento entre puntos en el tiempo que están igualmente espaciados y en el segundo, medirá la tasa instantánea de crecimiento.

Para proyectar la población a partir de una curva geométrica o exponencial, se requiere contar al menos con la población en dos momentos en el tiempo. En el Anexo I aparecen las fórmulas para estimar los parámetros de cálculo.

Ejemplo: Disponiendo de la misma información del ejemplo anterior, la población estimada al 30 de junio de 1980 sería:

$$P_{80} = P_{60} \left(\sqrt[10]{P_{70}/P_{60}} \right)^{20}$$

$$P_{80} = 25\,420 \left(\sqrt[10]{30\,580/25\,420} \right)^{20}$$

$$P_{80} = 36\,787$$

$$P_{80} = P_{60} e^{(\ln(P_{70}/P_{60})/10) * 20}$$

$$P_{80} = 25\,420 e^{(\ln(30\,580/25\,420) * 2)}$$

$$P_{80} = 36\,787$$

Vale la pena aclarar que, como se puede ver en los resultados anteriores, las curvas exponencial y geométrica, arrojan (prácticamente) los mismos resultados cuando se proyecta con la tasa de crecimiento intercensal generada por esta misma curva (tasa geométrica 18.65 por mil y tasa exponencial 18.48 por mil), a diferencia de los resultados obtenidos cuando se proyecta con una u otra curva, pero con una misma tasa de crecimiento.

c) Función logística

En 1835 Quetelet observó que la población evolucionaba en forma acelerada en un principio, hasta un punto en que empezaba a hacerlo en forma más lenta. A raíz de esto le encargó al estadista belga P.F. Verhulst que revisara este principio y éste en 1838 27/ sugirió la curva a la que llamó logística. Posteriormente esta curva fue redescubierta y ampliamente usada por Pearl y Reed (1920) 28/, al igual que por muchos otros quienes le introdujeron varias modificaciones posteriormente, como Plessing (1962) 29/, Muhsam, H. (1939) 30/, Rhodes (1938) 31/, Vianelli (1935 y 1936) 32/.

Esta función tiene dos tipos de fundamentos teóricos 33/. Según Verhulst (1838) la curva logística se deriva de un concepto físico del crecimiento de la población, según el cual los obstáculos al crecimiento ilimitado aumentan en mayor proporción a la que tiende a aumentar la población. Por otra parte, la formulación de Pearl y Reed se deriva de funciones biológicas bajo la

27/ P.F. Verhulst (1838), op.cit.

28/ Pearl y Reed (1920) op.cit.

29/ Plessing (1962) On den Logistiske kurve og dens anvendelse i praksis. Erhvervsokonomisk Tidsskrift, Copenhagen 26 (3), págs. 205-231.

30/ Muhsam, H. (1939), A note on migration and Verhulst's logistic curve, Journal of the Royal Estatistical Society (London) 102: pág. 445-448.

31/ Rhodes, E. (1938), A population growth curve for England and Wales. In Théorie générale de la population. Congrès International de la population. Paris, Vol. 1, págs. 40-47.

32/ Vianelli, Silvio (1935), Evoluzione economica e demografica negli schemi delle curve logistiche. Revista Italiana di Scienze Economiche, Bologna, 7 (3) págs. 383-444.

(1936) A general dynamic demographic scheme and its application to Italy and the United States, Econometrica (Colorado Springs, Colo.) 4(3) págs. 269-283.

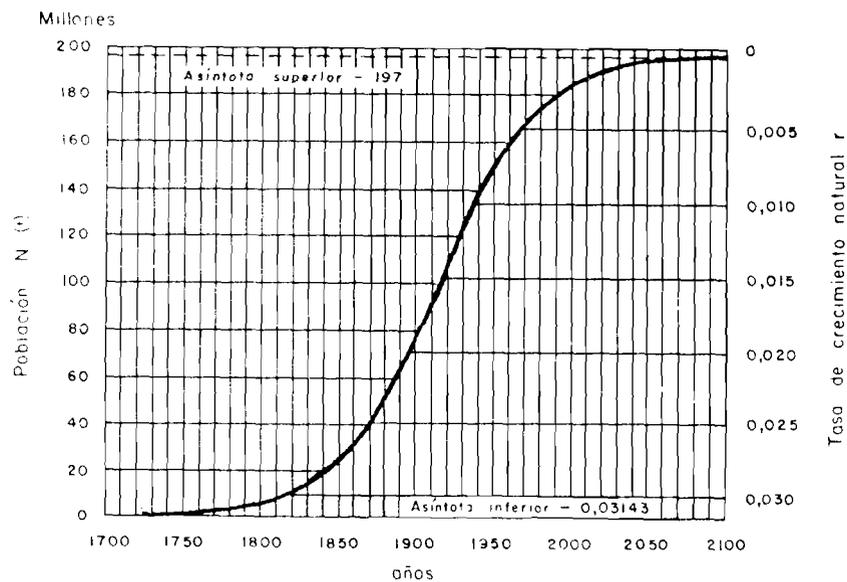
33/ Naciones Unidas (1978), op.cit.

hipótesis de que las poblaciones tienden a alcanzar un límite máximo que luego no sobrepasan.

Dadas las características de la logística, esta curva ha sido aplicada a diversas clases de fenómenos de crecimiento: se ha utilizado para proyectar la población total o de áreas, para predecir el comportamiento de ciertas características de la población, como son la esperanza de vida al nacimiento, la tasa global de fecundidad, el porcentaje urbano, el porcentaje de alfabetos, así como para suavizar funciones de la tabla de mortalidad.

Gráfico 4
CURVA LOGISTICA

CURVA LOGISTICA QUE REPRESENTA EL TOTAL N Y LA TASA DE CRECIMIENTO r DE UNA POBLACION. BASADO EN ESTADISTICAS DE LOS ESTADOS UNIDOS. MAS ALLA DE 1930 LA CURVA ES HIPOTETICA Y NO SE HA PRESENTADO A TITULO DE PROYECCION



Fuente: Lotka, Teoría analítica de las asociaciones biológicas.

Como se puede observar en el Gráfico 4, la logística es una función que se caracteriza, en el caso de la población, por ser monotónicamente creciente,^{34/} por lo cual sólo puede ser aplicada cuando la tasa de crecimiento es positiva; supone que en un principio la población crecerá aceleradamente, pero después de un crecimiento máximo, su ritmo cesará, y se irá reduciendo hasta llegar a cero. Por esta razón, la primera parte de la curva será convexa y la segunda parte cóncava; el punto de inflexión se encuentra en el momento donde el tamaño de la población es un medio de la asíntota superior. Por otro lado, el crecimiento de la población en valores absolutos tiene un comportamiento simétrico parecido a una curva normal.^{35/} Por su parte, la tasa de crecimiento presenta el comportamiento inverso al de la población pues en lugar de crecer, va disminuyendo continuamente. En un principio, el proceso se va acelerando hasta el punto de inflexión donde el descenso se va haciendo cada vez menor hasta llegar a cero.

Como se había mencionado, a la función logística se le han introducido una serie de modificaciones; por esta razón, aquí se presentará tanto en su forma general como algunas de estas modificaciones.

i) Forma general

La función logística en una forma general se puede escribir como:

$$P_t = \frac{K}{1 + e^{a+bt}}$$

donde P_t es la variable dependiente (población)

t es la variable independiente (tiempo)

K es la asíntota superior

a y b son constantes

e es la base de los logaritmos naturales

Como se puede apreciar, la población está expresada fundamentalmente como un cociente, donde el numerador es la asíntota superior y el denominador

^{34/} Vale la pena aclarar que al utilizar la logística en otra variable, ésta puede ser inversa, esto es, monotónicamente decreciente.

^{35/} Shryock, Henry S., Jacob S. Siegel and Associates, (1971), op.cit., pág. 382.

se va volviendo cada vez más pequeño, acercándose a la unidad, haciendo tender el cociente al valor de K. Esto sucede porque el parámetro b tiene signo negativo y el valor de t va aumentando, por lo cual el producto bt también aumenta pero e^{a+bt} se va reduciendo acercándose a cero.

Para aplicar esta metodología se requiere contar al menos con la población en tres momentos en el tiempo separados en forma equidistante uno de otro.

ii) Primera modificación de Pearl y Reed

Pearl y Reed 36/ en años posteriores introdujeron varias modificaciones a la curva logística para justificar la hipótesis de que el crecimiento puede ocurrir en ondas o ciclos, como resultado de la expansión de los medios de subsistencia. Cada onda es empalmada sobre una previa; en otras palabras, en un momento la población puede comportarse de acuerdo a la ley logística y tender a un valor máximo de la población (primera onda), pero después, cuando los medios de subsistencia aumentan, esta población puede nuevamente empezar a crecer en forma logística (segunda onda), tendiendo a una nueva asíntota superior, pero ahora, el límite inferior corresponderá a la asíntota superior del ciclo anterior, y así sucesivamente. Un sistema de dos ondas es definido matemáticamente por la ecuación:

$$P_{t+n} = K_1 + \frac{K_2}{1 + e^{a+bn}}$$

donde K_1 es el límite inferior de la segunda onda y,
 $K_1 + K_2$ es el límite superior

Para utilizar esta formulación, el número de puntos requeridos aumenta a cuatro.

36/ Walter Isard (1960), Methods of Regional Analysis. An introduction to regional science, The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, U.S.A.
 Zachariah, K.C., Notes on population projections, Demographic Training and Research Centre, Chembur, Bombay, India. (sin fecha).

iii) Segunda modificación de Pearl y Reed.

Pearl y Reed además postularon que la curva de crecimiento no necesita ser simétrica y por eso desarrollaron una curva logística sesgada:

$$P_{t+n} = K_1 + \frac{K_2}{1 + e^{a+bn+cn^2}}$$

Donde K_1 y K_2 tienen el mismo significado anterior, pero para su aplicación se requiere disponer de la población en cinco momentos en el tiempo.

A pesar de que el crecimiento de la población de Estados Unidos durante mucho tiempo se ajustó bastante bien al comportamiento de una logística, Pearl y Reed al utilizarla para proyectar la población no obtuvieron buenos resultados. Sin embargo, Pittenger al proyectar el Estado de Pennsylvania por un período de 60 años, encontró que el error de estimación no superó el 5 por ciento en ninguna de las décadas proyectadas.

iv) Modificación de Murphy

Más recientemente, Murphy ^{37/} sugirió hacer una modificación para obtener el valor de la asíntota K . Según Murphy los resultados que se obtienen para las proyecciones de población no están muy afectadas por el valor de la asíntota, por lo cual este valor puede ser calculado en una forma relativamente burda.

Sugiere por lo tanto estimar el valor de la asíntota superior K como el valor de la población que es generada al mantener constante durante 60 años la tasa de crecimiento prevaleciente en ese momento, la cual es calculada normalmente como la tasa anual promedio del último período intercensal. Contando con el valor de la población asíntótica, sólo se necesita disponer de la población en dos momentos en el tiempo para estimar los parámetros a y b .

Murphy, después de hacer un largo desarrollo matemático, llegó finalmente a la siguiente ecuación de cálculo:

$$P_t = \frac{P_0 R^{60/T} (R^{60/T} - 1) [(t-t_0)/T-1]}{(R^{60/T} - 1) [(t-t_0)/T-1] + (R^{(60/T-1)} - 1) [(t-t_0)/T]}$$

^{37/} Idea de Murphy que fue expuesta por W. Brass (Apuntes de J. Somoza).

$$R = P_1/P_0$$

$$T = t_1 - t_0$$

donde P_t es la población proyectada al momento t .

P_0 y P_1 son las poblaciones en el primero y segundo censo respectivamente.

t_0 , t_1 y t son la fecha del primero y segundo censo y de la proyección

Por último, vale la pena aclarar que el comportamiento de la población y de su tasa de crecimiento es exactamente igual a la curva logística presentada como general.

Ejemplo: Disponiendo de la misma información de los ejemplos anteriores, la población estimada al 30 de junio de 1980 utilizando la función logística de Murphy sería:

$$P_{80} = \frac{P_{60} (P_{70}/P_{60})^6 [(P_{70}/P_{60})^6 - 1]}{[(P_{70}/P_{60})^6 - 1] + [(P_{70}/P_{60})^5 - 1]^2}$$

$$P_{80} = 36\ 056$$

d) La Curva de Gompertz 38/

Esta curva fue propuesta en 1825 por Gompertz "para determinar las curvas de los cuocientes de mortalidad o de sobrevivencia" 39/, pero ésta, al igual que la logística ha sido utilizada por varios autores como R.D. Prescott (1922) 40/, quien la usó para describir su ley de crecimiento de la población. G.R. Davis (1927) 41/ aplicó esta misma fórmula a los datos de la población de

38/ Ver Shryock y Siegel, op.cit., pág. 382 y 690 e Isard, op.cit., pág. 13.

39/ Mattelart, Armand, (1964) Manual de Análisis Demográfico, Santiago de Chile.

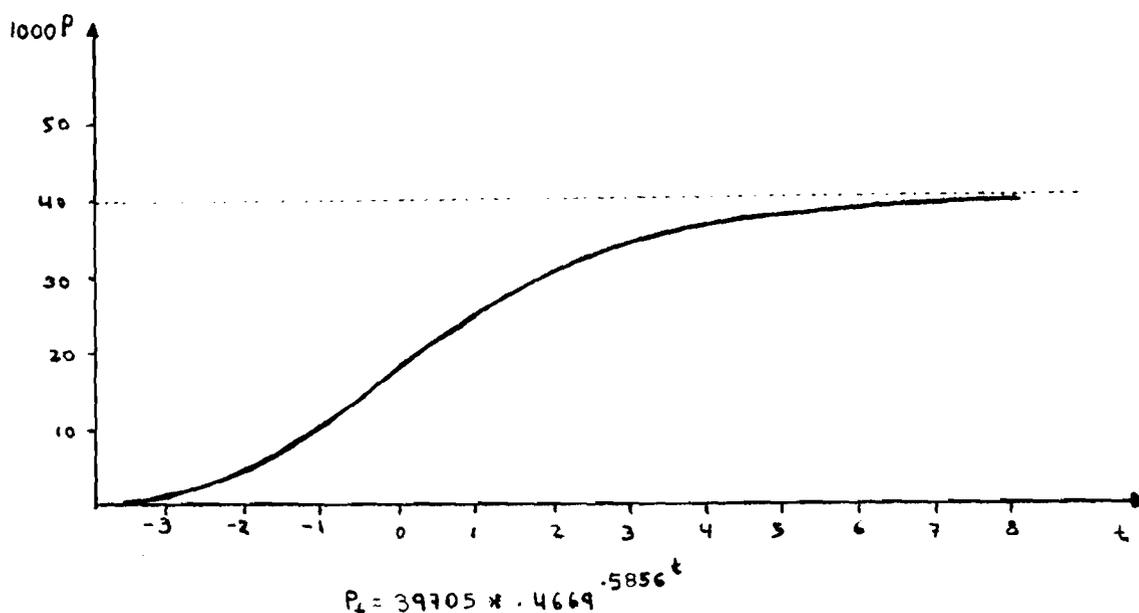
40/ Prescott, R.D. (1922), Law of growth in forecasting demand, Journal of the American Statistical Association, Vol. 18, Dec.

41/ Davis, G.R. (1927) The growth curve, Journal of the American Statistical Association, Vol. 22, sept.

Estados Unidos de 1810 a 1920. Más tarde A. Bocaz (1953) 42/ realizó múltiples aplicaciones para Chile.

Posteriormente, varios autores han planteado la posibilidad de representar la fecundidad actual acumulada o la paridez media a través de esta función, Brass 43/, Kendiah, V. 44/, y está siendo utilizada por el CELADE 45/ para proyectar la estructura de la fecundidad por edades.

Gráfico 5
CURVA DE GOMPERTZ



-
- 42/ Bocaz S., Albino (1953), The Gompertz curve applied to the city of Santiago, Estadística Chilena, Vols. 10,11 (oct.-nov).
The Gompertz curve applied to the growth of the Chilean population, Estadística Chilena, Vol. 7 (julio).
The population curve of Chile, Estadística chilena, Vol.9,(sept.),
- 43/ Brass, W., The relational Gompertz Model of Fertility (inédito).
An application of the relational Gompertz model of Fertility (inédito).
Cuatro lecciones de William Brass (1977), CELADE, Serie D, No. 91, Santiago de Chile.
- 44/ Kendiah, V., The use of the relational fertility model parameters in population projections. East West Center (inédito).
- 45/ Chackiel, Juan, Proyección de la fecundidad: criterios y procedimientos utilizados en el CELADE, en Métodos para proyecciones Demográficas, CELADE, Serie E, No 1003, San José, Costa Rica, noviembre de 1984.

Como se observa en el gráfico 5, esta curva describe un proceso de evolución acumulativo hasta un valor máximo en forma muy parecida a la curva logística de la cual se diferencia especialmente porque la Gompertz "expresa una aceleración más rápida en las primeras fases del crecimiento y un retardo más gradual en las últimas fases". 46/ Por esta razón, el crecimiento de la población en valores absolutos deberá aparecer como una curva de frecuencias en forma de campana, sesgada hacia la derecha. Por otra parte, esta curva describe una serie de datos donde los logaritmos de las observaciones aumentan con incrementos que disminuyen en un porcentaje constante, por lo cual las diferencias de los logaritmos de la población deben descender a un porcentaje constante.

Matemáticamente esta curva se puede expresar como:

$$P_t = K a^{b^t} \quad \text{ó}$$
$$\log P_t = \log K + (\log a)b^t$$

donde K representa el valor de la asíntota superior;
a y b son constantes

Si la tasa de crecimiento está disminuyendo, b será siempre menor que la unidad y K será la asíntota superior. A pesar de que esta curva tiene 2 asíntotas, el límite inferior no aparece pues se considera que es cero.

Si la tasa de crecimiento está aumentando, b será mayor que uno y K representará la asíntota inferior.

Para proyectar la población con esta curva, se necesita disponer del tamaño de la población en tres momentos en el tiempo, igualmente espaciados, estimando los parámetros como se indica en el Anexo I.

Ejemplo: Si además de la información presentada en los ejemplos anteriores se tiene al 30 de junio de 1950 una población de 18.540 personas, se puede estimar la población al 30 de junio de 1980 de la siguiente manera:

46/ Naciones Unidas (1952), Métodos de cálculo de la población total para fechas corrientes, Manual I.

$$b = \frac{\ln(30\,580) - \ln(25\,420)}{\ln(25\,420) - \ln(18\,540)} = 0.58\,557$$

$$a = \exp\left\{\frac{[\ln(30\,580) - \ln(18\,540)]}{(b^2 - 1)}\right\} = 0.46\,694$$

$$K = \frac{18\,540}{a} = 39\,705$$

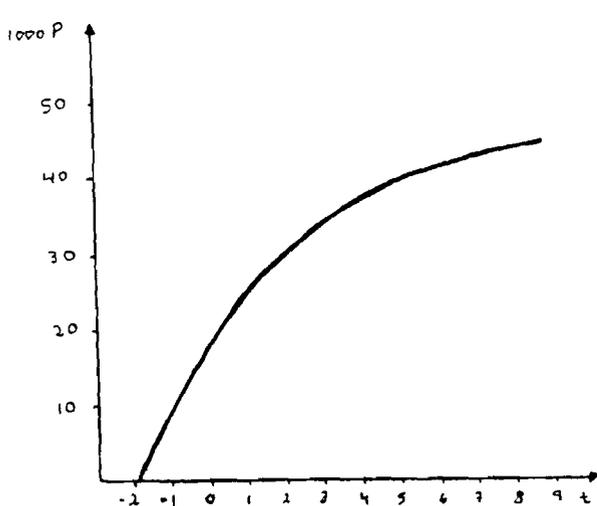
$$P_{80} = 34\,075$$

e) La curva exponencial modificada

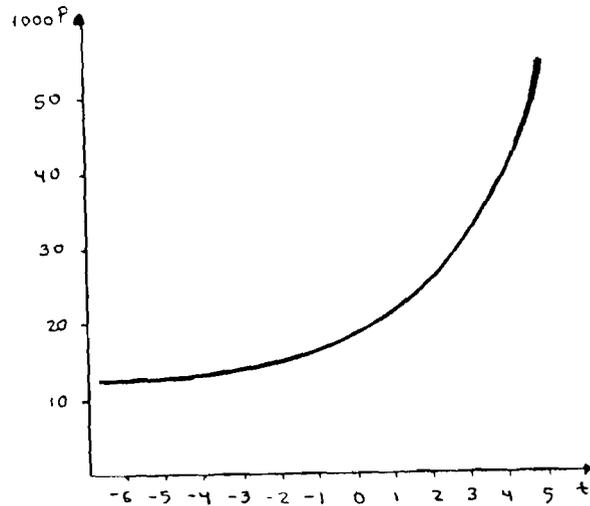
Esta curva se desarrolló con el fin de solucionar el problema de la curva exponencial, que llevaba a un crecimiento infinito de la población.

Esta curva fue usada por Goodrich en 1929 ^{47/} para estimar la población futura de Estados Unidos con el fin de proyectar la Región de Nueva York. En 1952 Mc.Lean ^{48/} usó una exponencial modificada como uno de los 6 métodos para proyectar la población de Dixon, Illinois.

Gráfico 6
CURVA EXPONENCIAL MODIFICADA



a) $P_t = 46\,060 - 27\,520 * .75^t$



b) $P_t = 12\,685 + 5\,855 * 1.47^t$

^{47/} En James H. (1929), Estimates of future population, in Population, Land Values and Government, Vol. 2, New York.

^{48/} Mc.Lean, J.E. "More accurate population estimates by means of logistic curves", Civil Engineering, Vol. 22.

Esta curva supone que la población parte de cero y se va incrementando a una tasa de crecimiento decreciente, hasta llegar a un valor asintótico por el cual, gráficamente, esta curva es cóncava (ver gráfico 6 a).

Por su parte, el monto de crecimiento absoluto, disminuye en una razón constante de descenso, por lo cual gráficamente aparece como una curva convexa.^{49/}

Matemáticamente la curva exponencial modificada se expresa como:

$$P_t = K + ab^t$$

- donde K es el valor asintótico al cual tiende la población
- a es un valor negativo que hace que los aumentos sucesivos de la población decrezcan a una tasa constante que se define como la diferencia entre el valor de la población en un momento y el valor asintótico. ^{50/}
 - b es un valor positivo menor que uno, que muestra la tasa de cambio.

Sin embargo, el comportamiento de la curva en forma cóncava no siempre se cumple, pues si el valor de a resulta positivo, la curva se torna convexa y el valor de K pasaría a ser una asíntota inferior (ver gráfico 6 b).

Para su aplicación se requiere disponer al menos de tres puntos en el tiempo (igualmente espaciados). En el Anexo se presentan algunas formas de estimar estos parámetros.

Ejemplo: Si se dispone de la información del ejemplo anterior, la población al 30 de junio de 1980 proyectada por la curva exponencial modificada sería:

^{49/} Pittenger (1976), op.cit., pág. 67.

^{50/} Shryock, Siegel y Asociados, (1976), op.cit., págs. 381,382.
Pitterger (1976), op.cit., pág. 69.

$$b = \frac{30\ 580 - 25\ 420}{25\ 420 - 18\ 540} = 0.75$$

$$a = \frac{30\ 580 - 18\ 540}{b^2 - 1} = - 27\ 520$$

$$K = 18\ 540 - a = 46\ 060$$

$$P_{80} = 34\ 450$$

f) Curvas polinómicas (parábolas o curvas no lineales)

El uso de curvas polinómicas o parabólicas ha sido muy generalizado para proyectar la población, ya que estas curvas tienen la ventaja de ser muy flexibles; la parábola de segundo grado es sensible al ritmo medio de crecimiento al igual que al aumento o disminución de velocidad observado en ese ritmo. La parábola de tercer grado tiene además, en cuenta el ímpetu variable del aumento o disminución de la velocidad. Estos cambios de ritmo se reflejan en los cambios de signo de los coeficientes.

La ecuación general de la curva polinómica puede ser expresada como:

$$P_t = a + bt + ct^2 + \dots + Kt^n$$

donde a,b,c, ...,K son constantes

P_t es la población al momento t

t es la fecha de la proyección o período de la proyección.

Si la ecuación sólo conserva los dos primeros componentes del lado derecho, será un polinomio de grado uno que representa la recta o crecimiento aritmético que fue descrito anteriormente.

Si la ecuación conserva los 3 primeros elementos del lado derecho, se tendrá una parábola de segundo grado, la cual requiere disponer de la población en tres momentos en el tiempo para su aplicación.

En una parábola de segundo grado, cuando la constante c es positiva, la curva es cóncava y los patrones de crecimiento de la población asumidos tienen una suave y continua tasa de cambio, con aumentos de población en forma

creciente; si la c es negativa, la curva parabólica es cóncava y la tasa de cambio de la población es igualmente suave y continua, pero los incrementos de población decrecen.

Una parábola de tercer grado, conserva cuatro elementos de la ecuación general y su mayor exponente estará elevado al cubo, y dado que requiere estimar 4 parámetros, necesita de la población en 4 momentos en el tiempo.

Para utilizar parábolas de mayor grado se requerirá disponer de más puntos en el tiempo (uno más que el grado de la parábola que se quiere), pero normalmente se han utilizado parábolas hasta de tercer grado, pues entre mayor sea el grado de la parábola, ésta sería más flexible y podría presentar un comportamiento de la población futura poco realista.

Las parábolas de segundo y tercer grado han sido usadas principalmente para proyecciones de población de áreas cerradas. Por ejemplo, en 1891 H.S. Pritchett 51/ usó un polinomio de tercer grado ajustado a datos de 1790 a 1890 para proyectar la población de Estados Unidos hasta el año 2000. Para 1950, la estimación fue 27 por ciento más grande. En 1925 A.L. Bowley 52/ usó una parábola de segundo grado para describir la población de Inglaterra y Gales de 1801 a 1911 y un polinomio de tercer grado para describir la población de Estados Unidos de 1790 a 1910.

Ejemplos de aplicaciones de polinomios de mayor grado a la población de áreas abiertas fueron incluidos en el estudio de Massachusetts State Planning Board 53/ en 1938, donde se utilizó una ecuación parabólica como uno de diez métodos para proyectar la población estatal. Las estimaciones de esta ecuación estuvieron 3 por ciento por debajo del Censo de 1940 y 5 por ciento más abajo de la que figura para 1950. En 1949 H. Bartholomew 54/ usó un polinomio de segundo grado ajustado por el método de los mínimos cuadrados

51/ Pritchett (1891) op.cit.

52/ Bowley (1925) op.cit.

53/ Massachusetts State Planning Board (1938), Population Study of Massachusetts, A Planning Forum, Vol. 2

54/ Bartholomew, H. (1949) The Master Plan for New Orleans. Population City Planning and Zoning Commission, New Orleans, Louisiana.

para verificar la proyección de población de New Orleans hecha por otros cuatro métodos.

Ejemplo: Disponiendo de la población del ejemplo anterior, la población estimada al 30 de junio de 1980, utilizando una parábola de segundo grado, sería:

$$P_{80} = P_{50} + \frac{(P_{60} - P_{50})}{(1960-1950)} * (1980-1950) + \left[\frac{P_{70} - P_{50}}{(1970-1950)} - \frac{P_{60} - P_{50}}{(1960-1950)} \right] * \left[\frac{(1980-1950) * (1980-1960)}{(1970-1960)} \right]$$

$$P_{80} = 18\ 540 + 6\ 880 * 3 + (602-688) * 60$$

$$P_{80} = 34\ 020$$

3. Técnica de regresión

La técnica de regresión es un método que estudia la relación entre una o varias variables "independientes" y una variable "dependiente". Esta técnica ha sido usada tanto para estimar la población a un momento actual o pasado, como para hacer proyecciones a un futuro, y su complejidad depende del número de variables que se involucren en la "explicación" de la variable dependiente.

La forma tradicional de estimar las ecuaciones de regresión es a través de la técnica de Mínimos Cuadrados, para lo cual normalmente se suelen emplear paquetes estadísticos de computación.

Lo más importante aquí es la selección de la variable o variables independientes, las cuales deben tener una relación teórica de causalidad con el comportamiento de la variable dependiente; por otra parte, es importante también determinar si la o las variables independientes afectan a la población en el mismo momento o si la afectan en forma rezagada.

Las variables independientes que se suelen utilizar son el tiempo, como se verá en este capítulo; variables económicas como el incremento en el ingreso per cápita, grado de industrialización, salarios, etc., los cuales suelen ser usados en los modelos económicos de proyecciones de población; también se suele utilizar este procedimiento para verificar la relación entre

el crecimiento de la población en una subárea y el crecimiento de la población en un área mayor.

La técnica de regresión puede ser aplicada tanto a tendencias lineales como no lineales, introduciendo una variable independiente (como el tiempo u otra variable) o introduciendo varias variables.

Para su aplicación se requiere disponer de una serie de datos de la población en diferentes momentos y otra serie de datos de la o las variables independientes, para cada una de las subáreas.

En el contexto de lo que se ha venido tratando en esta parte del trabajo, se está interesado en el análisis de la regresión simple (una variable independiente), utilizando el tiempo como variable explicativa; en tal sentido, este procedimiento puede ser utilizado en forma relativamente simple, especialmente si se aplica a una curva sencilla. A continuación se presentan algunas de estas curvas:

a) Regresión lineal

Cuando disponemos de la población en una serie de momentos en el tiempo, podemos entonces estimar la ecuación de la recta que más se acerca a estos puntos por un método matemático-estadístico para minimizar las distancias de cada uno de los puntos a la recta y de esta forma, proyectar la población. La ecuación general que se utilizará entonces, será:

$$P_t = a + bt$$

donde a y b son los parámetros de la ecuación los cuales son estimados por el procedimiento de mínimos cuadrados; P es la población (variable dependiente) y t es el tiempo (variable independiente). De esta forma, una vez estimados los valores de a y b, es posible proyectar la población al momento t que se desee.

Los parámetros a y b pueden ser estimados como se indica en el Anexo I.

Ejemplo: A pesar de que esta técnica se utiliza cuando se dispone de una serie larga de datos, a modo de ejemplo, se aplicará para proyectar la población al 30 de junio de 1980, con la

población presentada en los ejemplos anteriores en las tres fechas:

t*	P	t	tP	t ²
1950	18 540	0	0	0
1960	25 420	1	25 420	1
1970	30 580	2	61 160	4
Σ	74 540	3	86 580	5

$$b = \frac{3 * 86\ 580 - 3 * 74\ 540}{3 * 5 - (3)^2} = 6020$$

$$a = \frac{74\ 540 - 3 * 6020}{3} = 18\ 827$$

$$P_{80} = 18\ 827 + 6\ 020 * 3 = 36\ 887$$

b) Regresión geométrica o exponencial

Las ecuaciones geométricas y exponencial presentadas anteriormente se pueden generalizar de la siguiente manera:

$$P = ab^t \quad \text{Geométrica}$$

$$P = ae^{bt} \quad \text{Exponencial}$$

y ser linealizadas por medio de logaritmos, como sigue:

$$\log P = \log a + t (\log b) \quad y$$

$$\ln P = \ln a + bt$$

Esto significa que "con una proporción geométrica de aumento, los logaritmos (de la tasa de) crecimiento de la población aumentan en una proporción aritmética" 55/ y con esta conveniente transformación es posible

55/ Naciones Unidas, (1952), op.cit.

nuevamente aplicar el procedimiento de mínimos cuadrados, para estimar las ecuaciones.

c) Regresión con curvas polinómicas

Disponiendo de una serie de puntos en el tiempo, también es posible hacer un ajuste por mínimos cuadrados para polinomios de segundo o tercer grado, resolviendo las ecuaciones que se señalan en el Anexo I.

Vale la pena aclarar, que en lo anterior sólo se hizo referencia a la aplicación de la técnica de regresión para ajustar algunas curvas, pero esto no quiere decir que una serie de poblaciones no puedan ser ajustadas a otra curva utilizando esta técnica. Sin embargo, dado que los datos deben sufrir una serie de transformaciones, normalmente se utilizan programas de computador.

B. Métodos de extrapolación de proporciones

En esta parte se hará referencia a los métodos de proyección de la población de áreas menores, a partir de la extrapolación de relaciones existentes entre la población de las subáreas a la población del área mayor.

Este tipo de proyecciones es bastante racional, debido al hecho de que el crecimiento o el comportamiento de un área está íntimamente ligado al comportamiento de las subáreas que lo componen.

Para la aplicación de estas técnicas es requisito indispensable disponer de la proyección de la población del área mayor.

La medida que se utiliza normalmente es la proporción que representa la población del área menor con respecto a la población del área mayor; por ejemplo, si una subárea tiene 10 000 habitantes y el área mayor 50 000, la proporción para ese momento será de 0.2 (10000/50000).

El procedimiento general consiste en proyectar dichas proporciones y posteriormente multiplicarlas por la población del área mayor, que había sido ya proyectada y como resultado de esto, derivar la población proyectada para la subárea.

Dado que es normal que la suma de las proporciones proyectadas de todas las áreas menores a la mayor, sea diferente a 1 (a excepción de la proyección lineal y de la parábola de segundo grado), éstas son normalmente corregidas, ajustando las participaciones proporcionalmente para que sumen 1.00 (ó 100 por ciento). El ajuste utilizado se puede formular así:

$$A = 1 / \sum_{i=1}^n S_i$$

donde A es el factor de ajuste por el cual deben ser multiplicadas las participaciones

S_i es la participación de la i-ésima subárea

n es el número de subáreas

Obviamente este ajuste debe hacerse para cada año de la proyección para que la suma reproduzca la suma del área mayor.

A continuación se describirán los métodos de proyección de proporciones usados más frecuentemente.

1. Métodos de proyección de la proporción de población del área menor, con respecto a la población del área mayor

Normalmente, antes de aplicar cualquier técnica de proyección es conveniente examinar el comportamiento histórico de la población, lo cual nos da una idea general de la dinámica de dicha población. De igual manera, al utilizar la proporción o la participación de las unidades menores en una mayor, conviene examinar gráficamente la tendencia histórica de dichas participaciones. Este examen permite conocer la dinámica interna de la región y del crecimiento de las divisiones. Sin embargo, si no se dispone de esta información, ésto no puede ser realizado.

Diferentes métodos han sido utilizados para proyectar la participación

de las sub-unidades en las poblaciones mayores. Entre estos se encuentran los siguientes:

a) Funciones matemáticas para proyectar proporciones

En general, todos los modelos matemáticos 56/ descritos anteriormente para proyectar la población de las áreas menores pueden ser utilizados para describir la participación de una población.

La única diferencia radica en utilizar las proporciones de población del área menor a la mayor, en lugar de la población absoluta del área menor, pero la estimación de los parámetros de la ecuación se calculan de la misma manera.

El único procedimiento que no se utilizó es la proyección de proporciones con la logística de Murphy, debido a que ésta sólo fue pensada para proyectar población; pero en lugar de ésta es posible aplicar la logística general a partir de dos puntos, ya que el máximo valor de la asíntota superior que puede tomar una proporción es 1, por lo cual, teniendo este valor sólo es necesario disponer de las proporciones en dos momentos en el tiempo.

Disponiendo ya de la proporción proyectada, sólo faltaría multiplicarlas por la población del área mayor para obtener la población proyectada de cada subárea.

b) Método de la proporción del Buró de Censos (Census Bureau Ratio)

Este método fue desarrollado por el Buró de Censos de Estados Unidos en 1952 para preparar proyecciones de población a nivel sub-nacional. Básicamente consiste en extrapolar la proporción de población del área para la cual la proyección es deseada a la población del área mayor, y multiplicar esta proporción extrapolada por la población del área mayor, la que ya debe haber sido proyectada independientemente por algún método como el de componentes, o este mismo procedimiento, relacionando el área mayor al total del país o a la siguiente área de mayor tamaño, a la cual pertenezca.

56/ Vale la pena mencionar que las proporciones, al igual que la población, también pueden ser proyectadas gráficamente o aplicando la técnica de regresión, utilizando el tiempo como variable independiente, si se dispone de una serie de puntos en el tiempo.

Como se puede apreciar, este método es el mismo que se describió en el punto anterior, y sólo se diferencia por la forma en que proyecta la población.

Para su extrapolación el Buró de Censos calculó las proporciones de las áreas menores a las mayores en cuatro censos diferentes (1920, 1930, 1940 y 1950), examinó sus tendencias de cambio y agrupó las subáreas en tres categorías:

- Áreas con dirección de cambio constante en las tres décadas;
- áreas con dirección constante en las dos décadas más recientes, pero con dirección diferente en la primera década;
- áreas donde la dirección de la década más actual difiere de la anterior.

De esta forma, se tenían grupos más homogéneos en cuanto a las variaciones de su crecimiento y así les asignó a cada una de estas áreas, las siguientes tasas de crecimiento de las proporciones, para que sirvieran de base para proyectarlas:

- Al primer grupo la menor tasa geométrica promedio anual de cambio de la participación, de los períodos 1920-50, 1930-50 y 1940-50;
- a las áreas del segundo grupo se les asignó la menor tasa promedio anual de los períodos 1930-50 y 1940-50; y, finalmente,
- a las del tercer grupo se les asignó una tasa de cambio igual a un medio de la tasa promedio anual de la década más reciente.

A partir de estas tasas, se supuso que el comportamiento futuro de éstas variaría anualmente en forma lineal hasta cero en 50 años. De esta manera, los valores proyectados de las proporciones se obtienen multiplicando la proporción de población del área menor con respecto a la mayor obtenida en el último censo, por la multiplicación sucesiva de uno más la tasa correspondiente a cada uno de los años que intervienen en la proyección; por ejemplo, si la participación de un área en el último censo era del 17.756 por ciento y las tasas de cambio para cada año fuesen .007952, .007789, .007627, .007465, .007303, la participación de esta área cinco años después sería:

$$\begin{aligned} p &= .17756 * (1.007952 * 1.007789 * 1.007627 * 1.007465 * 1.007303) \\ &= .17756 * 1.038722061 \\ &= .18444 \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las participaciones proyectadas de todas las subáreas que conforman un área mayor, éstas son ajustadas para que sumen la unidad.

Lógicamente la hipótesis respecto a la evolución de la participación puede ser modificada.

La metodología utilizada aquí ha involucrado una serie de juicios, en lo que se refiere al período a tener en cuenta para la determinación del crecimiento promedio de las proporciones, dado que se disponía de la información en una serie de fechas. Sin embargo, si sólo se tiene la información en dos momentos en el tiempo, sólo es posible tener una idea sobre la evolución que ha tenido esta participación en dicho período y, por lo tanto, se podría hacer un juicio sobre la evolución futura posible a partir de esta información y/o del conocimiento de la existencia de algunas políticas específicas, que pudieran hacer variar la participación de alguna localidad.

El Buró de Censos utilizó su metodología para una proyección a 10 años, ya que a un período más largo existe un mayor riesgo de que la tendencia de la participación cambie de dirección.

Pittenger probó esta metodología para proyectar la población de los tres estados del Atlántico medio (New York, New Jersey y Pennsylvania), para un período de 10 años y encontró unos resultados muy prometedores, donde el error variaba entre .04 por ciento y 1.15 por ciento. Esto, aunque no es una prueba absoluta de su eficiencia, debido a que son sólo tres áreas con una población bastante grande, sí es un buen antecedente.

c) Método de la tendencia de las proporciones de Pickard (The Ratio Trend Method)

Esta técnica es similar conceptualmente al método de la razón del Buró de Censos. Fue ideada por Jerome Pickard, quien estaba interesado por un lado en proyectar las poblaciones a un plazo más largo y por el otro, en hacer proyecciones de áreas metropolitanas. El supuesto que utilizó Pickard para la extrapolación es que una proyección a corto plazo requiere de una tendencia histórica corta y una proyección a largo plazo requiere de un período histórico largo.

Su lógica se basa en que la parte más reciente de la tendencia histórica puede tener más impacto en la participación de la población futura que lo que tendría el principio del período observado.

Por esta razón, según el período requerido para la proyección, utiliza más o menos datos, pero dándole un mayor peso a los valores más recientes. En general, se puede decir que la parte más compleja del modelo, es la proyección de los pesos para los datos históricos, cuando la proyección es a largo plazo.

Pittenger sugiere que presumiblemente -por la forma en que calculaba los pesos- Pickard requería una tendencia histórica igual al doble de la distancia del último período observado al período de la proyección 57/.

El procedimiento general de Pickard consiste en transformar las participaciones porcentuales de la población subnacional a logaritmos; calcular las tasas de cambio de las participaciones, expresadas como diferencias de los logaritmos; proyectar las participaciones y transformar nuevamente las proporciones de su forma logarítmica a porcentual.

Pickard notó que cuando la proporción de una región aumentaba muy rápidamente, fácilmente se exageraba su proyección, por lo cual sugirió finalmente que en los casos donde la participación de una subregión es mayor en la fecha más reciente, se trabaje con el complemento de la proporción pues, dadas las propiedades de los logaritmos, las diferencias de los logaritmos de las proporciones transformadas son menores, que las diferencias entre los logaritmos de las proporciones no transformadas.

Pittenger, al probar esta metodología, para proyectar los estados del Atlántico Medio (New York, New Jersey y Pennsylvania), encontró una mayor desviación, la cual iba en aumento a medida que la proyección era más lejana. Así, encontró que la proyección a 10 años variaba entre 1.1 por ciento y 2.1 por ciento; a 20 años entre 2.2 por ciento y 3.6 por ciento y a 40 años, entre 4.5 por ciento y 12.4 por ciento.

57/ Para detalles de su aplicación ver Pittenger, Donald (1976), Projecting State and Local Populations, Ballinger Publishing Co., Cambridge Mass, U.S.A.

Kayani, Ashraf (1980), Preparing subnational Population Projections: A Manual for selected indirect methods, CELADE, serie B, No. 48, Santiago de Chile.

Ejemplo: Si se dispone de la proporción de población de una subárea para 3 momentos en el tiempo, así: para 1950, 14.3%, para 1960 16.4% y para 1970 16.9%, la población proyectada para 1980 sería:

Año	Proporción	log (% prop.)	log
1950	.153	1.18469	-
1960	.164	1.21484	.03015
1970	.169	1.22789	.01305

$$\log (\% \text{ prop. } 1980) = 1.22789 + \frac{2 (.01305) + (.03015)}{3} = 1.24664$$

Proporción proyectada a 1980 = .176

Posteriormente, esta proporción es ajustada de tal forma que la suma de las participaciones de todas las subáreas sea igual a uno y, finalmente, multiplicada por la población del área mayor, para obtener la población proyectada de la respectiva área menor.

Como se puede observar, en este ejemplo no se introdujo la modificación sugerida por Pickard, sin embargo, al aplicar esta modificación, el resultado fue el mismo si se consideran sólo tres decimales. Posiblemente esto se deba a que el crecimiento de las proporciones no es muy acelerado.

2. Método de Pickard de proyección de la participación en el crecimiento (Apportionment Method)

En esta metodología no se proyecta la futura participación de una subárea en la unidad mayor, sino la participación o contribución de una subárea en el cambio absoluto de población experimentado en el área mayor.

Pickard operacionalizó el método estipulando que la distancia al futuro que está siendo proyectado requiere de un período histórico de igual longitud. Por ejemplo, si se quiere obtener la población para 1980 a partir de la de 1970, el período de proyección es de 10 años; por lo tanto, calculó la

diferencia en el tamaño de la población entre 1960 y 1970, tanto para el área mayor como para la subárea, y la proporción entre la diferencia de población de la subárea y el área mayor, la multiplicó por la diferencia de población del área mayor entre 1970 y la proyección (ya disponible, realizada independientemente) de 1980. El resultado de esto sería la diferencia de población del área menor, entre 1970 y 1980, la cual, al ser sumada a la población de la subárea en 1970 dará finalmente la proyección de población para 1980. Si se requiere la población para el año 2000, la proporción que se aplicará a la diferencia de población del área mayor entre 1970-2000 será la obtenida a partir de la relación entre la diferencia de aumento de población entre 1940 y 1970 de la subárea al área mayor.

Normalmente, esta técnica considera que las áreas con población en descenso tienen un aporte nulo al crecimiento del área mayor.

En la prueba hecha por Pickard, proyectando la población de Pennsylvania en relación a la de Estados Unidos, encontró que el error que arrojaba esta metodología no era muy grande para las tres primeras décadas de la proyección, pero luego el error resultaba exageradamente grande. De todas maneras, se debe tener en cuenta que dado que se proyecta con la tendencia del pasado, cualquier cambio de tendencia en el futuro afecta la proyección, al igual que todas las demás metodologías.

Ejemplo: Si el aumento de población de una subárea entre 1960 y 1970 fue de 1 500 personas y del área mayor fue de 18 230, la subárea aportó un 8.23% del crecimiento de la región mayor. Por lo tanto, se espera que en el período 1970-1980 aporte esta misma proporción, de tal forma que si la población del área mayor en este período aumentó en 20 230 personas, la población de la subárea en 1980 sería.

$$P_{80} = P_{70} + .0823 * 20230$$

$$P_{80} = P_{70} + 1669$$

3. Método del diferencial de crecimiento

Este método fue presentado por Naciones Unidas, 58/ con el fin de proyectar la población urbana y rural de un país, esto es, para dos subgrupos de la población; igualmente lo presentó para proyectar las ciudades con respecto a la población urbana, proyectando nuevamente dos subgrupos, la ciudad y el resto del área urbana, en forma sucesiva. En este mismo sentido, puede ser aplicado para estimar la población de las subáreas, proyectando el área menor y el resto del área mayor.

El procedimiento general consiste en proyectar los porcentajes de población de cada subárea, suponiendo que existe una diferencia constante entre las tasas de crecimiento de la subárea y del resto del área, lo cual implica una evolución de los porcentajes de población de cada subárea, en forma logística, con una asíntota inferior de 0 y superior de 100.

Al aplicar este procedimiento para proyectar la población de las subáreas, se puede proceder en dos formas: una es proyectando en forma separada para cada subárea y el resto, o en forma sucesiva, modificando el resto, eliminando cada vez la subárea ya proyectada, con lo cual la última subárea resulta por diferencia. Cuando se proyecta en forma individual las proporciones de cada subárea, posteriormente se deben ajustar para que sumen la unidad.

La evolución del porcentaje del resto del área mayor se puede definir como:

$$\frac{R_t}{N_t} = \frac{1}{1 + (S_0/R_0)e^{-dt}}$$

donde R_t = población del resto del área mayor en el momento t

N_t = población total del área mayor en el momento t

S_0 = población de la subárea en el momento 0

R_0 = población del resto del área mayor en el momento 0

d = diferencia subárea-resto de las tasas de crecimiento exponencial

t = período de tiempo ($t-0$)

58/ Naciones Unidas (1975), Métodos para hacer proyecciones de la población Urbana y Rural, Manual VIII, ST/ESA/SER.A/55, Nueva York.

Por ejemplo, si para 1960 se tiene 2 500 personas en el resto y 150 en la subárea y en 1970 en el resto se tenían 2 800 y en la subárea 160, el valor de d se puede determinar como

$$d = \frac{1}{10} * \left[\ln\left(\frac{2\ 800}{2\ 500}\right) - \ln\left(\frac{160}{150}\right) \right] = 0.004879$$

De acuerdo a esto, la proporción del resto para 1980 sería:

$$\frac{R_{80}}{N_{80}} = \frac{1}{1 + \frac{1\ 50}{2\ 500} e^{-.004879*20}} = 0.9484$$

y la proporción de la subárea 0.0516.

Luego, al multiplicar esta proporción por la población total proyectada en forma independiente del área mayor, se obtendrá la población de la subárea.

Como se ha comentado anteriormente, este método supone que el diferencial de crecimiento entre dos subconjuntos de la población permanece constante. Sin embargo, este supuesto no es necesariamente muy realista, por tanto, se ha sugerido que es posible hacer variar la diferencia de crecimiento entre una subárea y el resto y esta variación puede hacerse de dos formas:

- Asumiendo para un período futuro un mayor o menor diferencial de crecimiento, o
- asumiendo un aumento o disminución gradual año a año.

En el primer caso la proyección se haría de la siguiente manera:

$$\frac{R_{t+n}}{N_{t+n}} = \frac{1}{1 + (S_t/R_t)e^{-d'n}}$$

donde d' es el diferencial futuro asumido para todo el período de la proyección.

n es el período entre la última información y la proyección.

En el segundo caso, la proyección se haría:

$$\frac{R_{t+n}}{N_{t+n}} = \frac{1}{1 + (S_t/R_t)e^{[-d'(t+1)+d'(t+2)+\dots + d'(t+n)]}}$$

donde $d'(t+1)$ es el diferencial asumido para un año después de la última información

$d'(t+2)$ es el diferencial asumido para el segundo año después de la información , ..., y

$d'(t+n)$ es el diferencial asumido para el año de la proyección.

C. Métodos demográficos

Los métodos demográficos son aquéllos que tienen en cuenta para proyectar la población, cada uno de los componentes del crecimiento, esto es, la fecundidad, la mortalidad y la migración. Estos métodos son usados cuando se dispone de la información requerida.

Dentro de los métodos demográficos se pueden mencionar los siguientes:

1. Método de los componentes brutos

Este método estima la población total de las áreas menores a partir de la proyección de las tasas brutas de natalidad, mortalidad y migración, por lo cual requiere de la información de los nacimientos, las defunciones y las migraciones.

2. Método de migración-sobrevivencia

Este método proyecta la población por sexo y edad, tomando el efecto de la migración y la mortalidad en forma conjunta, calculando las "relaciones de sobrevivencia" que resultan de comparar la población por sexo y edad de cada subárea en dos censos consecutivos. Sin embargo, con este procedimiento sólo es posible proyectar la población de diez años y más (cuando el periodo

intercensal es de 10 años), por lo tanto para la población menor de diez años se debe utilizar otro procedimiento.

3. Método de los componentes

El método de los componentes es el procedimiento demográfico más sofisticado, con el cual se obtienen proyecciones de población por sexo y edad.

Con este procedimiento se proyecta cada uno de los componentes del crecimiento de la población: fecundidad, mortalidad y migración, en dos aspectos, su nivel y su estructura por edad.

El mecanismo utilizado para la proyección de cada componente es muy variado y depende básicamente del tipo de información disponible y de su calidad.

Vale la pena resaltar que en este procedimiento la migración es el componente que presenta mayores inconvenientes, pues esta última está muy afectada por la situación económica por la que atraviesa cada área menor y las subáreas vecinas.

De los tres procedimientos descritos anteriormente, obviamente el más adecuado es el de los componentes, ya que el resultado obtenido en la estructura y en el volumen de cada población está totalmente explicado por los cambios en el comportamiento por edad de cada uno de los componentes del crecimiento de una población. Por esta razón, si se dispusiese de la información necesaria, este es el procedimiento que debería ser empleado.

D. Métodos o modelos económicos

Teniendo en cuenta que el crecimiento de la población está afectado en gran medida por la situación económica que atraviesa el área menor y las subáreas vecinas, se han utilizado en varias oportunidades modelos que

involucran estas dos variables para proyectar la población. A continuación se describirán algunos de estos procedimientos.

1. Método de regresión

La única diferencia existente entre la regresión en los modelos económicos para proyectar la población y los modelos matemáticos, consiste en el tipo de variables independientes que se utilizan. Aquí, en lugar del tiempo, se emplean indicadores como el incremento en los salarios de cada una de las ramas de actividad (agricultura, industria, etc.), el aumento en el empleo o en el desempleo, el porcentaje de propietarios de viviendas, etc. de cada una de las subáreas, las que reflejan en forma aproximada la situación económica por la que se atraviesa. Estos indicadores son proyectados en primera instancia, para luego obtener en forma derivada la población.

2. Método de covarianzas modificado de Berry

La covarianza es una técnica que intenta mejorar la descripción estadística, separando el comportamiento de las variables independientes, en subgrupos basados en criterios nominales.

El uso de la covarianza como un medio para proyectar la población, parece que fue propuesto por primera vez por Isard y Carrothers (1960) 60/. Berry 61/ (1972) utilizó este procedimiento para proyectar la población de las regiones de Estados Unidos, pues observó que el crecimiento de las subáreas dependía, por un lado, de su tamaño y por el otro, del porcentaje de salarios pagados en cada sector económico: agricultura, minería, manufactura, gobierno federal y actividades residenciales (industrias no básicas).

En base a lo anterior, se obtuvieron subgrupos de regiones, donde se combinaban diferentes tamaños de población con diferentes porcentajes de salarios pagados en cada sector económico; posteriormente, se calculó la tasa de crecimiento promedio de cada subgrupo y las desviaciones de cada uno de éstos con respecto a la tasa de crecimiento nacional.

60/ Isard (1960), op.cit.

61/ Berry, Brian, Population growth in the daily urban systems of the United States, 1980-2000, in U.S. Commission on Population Growth and the American Future. Population Distribution and Policy, Sara Mills Mazie, ed. Vol. V of Commission Research Reports. En Pittenger, op.cit., págs. 112-116.

De esta forma, las proyecciones de población para cada subunidad fueron obtenidas aplicando la tasa de crecimiento relevante a los miembros de cada categoría, la que resultaba de la comparación de la tasa de crecimiento nacional utilizada por el Buró de Censos, y la desviación de ésta a la subunidad, obtenida anteriormente.

Posteriormente, los resultados se ajustaron al total de población presentado por el Buró de Censos.

3. Modelo Obers. Razón de empleos

El modelo Obers ^{61/} fue desarrollado por la Oficina de Asuntos Económicos y Servicios de Investigaciones Económicas (Office of Business Economics and the Economic Research Service) a mediados de la década de 1960, en respuesta a las necesidades de datos de las agencias públicas encargadas de un amplio plan para el uso, administración y desarrollo del agua y de los recursos relacionados en Estados Unidos.

El Obers es un modelo complejo, compuesto por cuatro submodelos. El primero proyecta las industrias básicas (excluyendo la agricultura y las fuerzas armadas); el segundo proyecta la agricultura; el tercero las industrias residenciales (no básicas o no exportables) y con una modificación proyecta las posibilidades de ingreso, la transferencia de pagos y las contribuciones personales al seguro social. Finalmente, el cuarto modelo proyecta en forma derivada la población civil de cada subárea; las fuerzas armadas son tratadas separadamente.

La proyección de población se fundamentó en la hipótesis de que las variaciones regionales en el incremento natural tienen menos impacto en el cambio de población que la migración neta, y que ésta es motivada por oportunidades económicas, presentes y futuras, en la población de 15-64 y 0-14 años, por lo cual fueron proyectadas como una función del empleo del área. La población mayor de 65 años fue proyectada en forma separada, dado que sus patrones de migración no están determinados por oportunidades de empleo.

^{61/} U.S. Water Resources Council, 1972 Obers Projections, Vol. 1, "Concepts, Methodology and summary Data", (Washington D.C.: Government Printing Office, 1974). En Pittenger, *op.cit*, pág. 116-123.

Cabe mencionar, que dado que la orientación de las agencias relacionadas con el diseño de este modelo eran económicas, el submodelo demográfico no es muy sofisticado, pero se espera que éste pueda ser mejorado posteriormente.

4. Razón al stock de viviendas proyectadas

Este método de proyección consiste en estimar la población al futuro, a partir de la proyección por un lado del número de viviendas y por el otro, del número de personas por vivienda de cada localidad y posteriormente ajustar las poblaciones, para que la suma reproduzca el total del área mayor.

El Consejo de Metas del Plan Regional y el Comité de Objetivos de los Condados de Erie y Niágara 62/, con la asistencia de una firma consultora, proyectó la población a ser planificada, como la suma de la población en grupos acuartelados, más la población de las casas, obtenida de la multiplicación del tamaño medio de familias y el número de viviendas.

Para proyectar las viviendas se basaron en la tendencia histórica de las licencias de construcción y los registros de demolición y, el tamaño de las familias, a partir de la proporción de cambio en el tamaño medio de las familias de las divisiones civiles menores al cambio nacional en el tamaño de la familia.

E. Otros métodos

Dentro de esta categoría se incluyen los modelos de densidad de población, los cuales son usados con frecuencia para proyectar la población de subunidades de ciudades o áreas metropolitanas y áreas menores, con límites relativamente permanentes.

62/ Erie and Niagara Counties Regional Planning Board, Regional population projections, Erie and Niagara Counties, Grand Island, N.Y., 1972. En Pittenger, op.cit., pág. 123-125.

A continuación se describirán dos de estos modelos, que han sido diseñados para proyectar algunas áreas específicas de Estados Unidos.

1. Modelo de dispersión Genessee-Finger Lakes Region

Este modelo fue diseñado por Bruce B. Herbert y usado por el Genessee-Finger Lakes Regional Planning Board ^{63/} en 1971, para proyectar la población de 111 subáreas de ocho regiones (distritos) del oeste del Estado de Nueva York, localizados alrededor de la ciudad de Rochester.

Este modelo proyecta la población total de las subáreas, las cuales son controladas posteriormente, por la población del área mayor, proyectada en forma independiente. Se fundamenta en la hipótesis de que los centros urbanos expanden su territorio a medida que su población aumenta, y que la densidad de su población varía según la distancia al centro de la ciudad.

De esta forma se estimó, por medio de mínimos cuadrados, un polinomio de sexto grado, donde la variable independiente era la distancia aérea del centro de cada área menor al centro de Rochester y la variable dependiente era el logaritmo de la densidad de población por milla cuadrada. Este modelo explicaba el 91 por ciento de la varianza para las 40 subáreas dentro de un radio de 25 millas del centro y el 63 por ciento de la varianza para las demás subáreas y, dado que los coeficientes mostraban una tendencia aproximadamente lineal para 1950, 1960 y 1970, se asumió que esta tendencia podía continuar, por lo cual se podría utilizar para proyectar la población.

2. Modelo de Newling

Este modelo fue desarrollado por Bruce Newling ^{64/} (1968) para proyectar la población de las subáreas del Estado de New Jersey, ya que muchas de éstas tuvieron un crecimiento muy fuerte, que hace que la curva exponencial dé resultados exagerados, y otras curvas, como la de Gompertz, distorsione los resultados.

^{63/} Genessee-Finger Lakes Regional Planning Board, Regional population distribution and projections, (Rochester, N.Y., 1971). Citado en Pittenger (1976) op.cit., pág. 105-107.

^{64/} Newling, Bruce (1968), Population projections for New Jersey to 2000 (New York), Citado en Pittenger, op.cit., pág. 107-109.

El modelo se fundamentó en la observación empírica de la tendencia de la población total de las áreas menores de New Jersey, que tenían tasas de crecimiento que eran inversamente relacionadas a la densidad de población al principio del períodos 1950-1960.

En la formulación de Newling no se consideró ajustar la suma de las proyecciones locales, pero posteriormente Greenberg 65/ (1972) realizó este ajuste.

F. Alcance del presente trabajo

Si bien es cierto que en los países latinoamericanos es posible realizar, a nivel nacional e incluso a nivel de las áreas administrativas mayores, las proyecciones de población por el método de los componentes, estimando y proyectando independientemente cada uno de los componentes del crecimiento de la población -fecundidad, mortalidad y migración- a nivel municipal o de las áreas administrativas menores, este tipo de proyección se complica debido a múltiples dificultades.

- Por un lado, normalmente las estadísticas vitales no son muy confiables, tanto por la calidad de los registros como por las fluctuaciones aleatorias en los nacimientos y defunciones que se pueden presentar debido al tamaño de la población, lo cual llevaría a estimaciones erróneas de la mortalidad y la fecundidad.
- Por otra parte, si lo anterior no tuviera mayor dificultad, la migración interna cobra gran importancia en la determinación del crecimiento de las poblaciones menores, y es aquí donde surgen más problemas pues normalmente no se dispone de buenas estadísticas de

65/ Greenberg, Michael, A test of combination of models for projecting the populations of minor civil divisions, Economic Geographic 48,2.

migración interna, y si se dispusiera de la información necesaria- por ejemplo de un censo- a lo más se podría estimar la migración interna en algún (os) período(s), pero su proyección es muy compleja pues este componente presenta fluctuaciones muy repentinas que dependen básicamente de las condiciones económicas y de las políticas de desarrollo. Por lo tanto, para proyectarla, tendríamos que proyectar estas variables, lo que es también un problema, o hacer una serie de supuestos (que seguramente no coinciden con la realidad) sobre el comportamiento de la migración; por otra parte, existe otro inconveniente, cual es la limitación del presupuesto y del tiempo destinado para realizar dichas proyecciones de población. Es por esto que, en general, el método de los componentes no suele ser usado para la estimación de la población de las áreas menores en los países en desarrollo.

Por su parte, las proyecciones de población de áreas menores por métodos económicos, por medio de diferentes modelos en los cuales, además del tiempo, se involucran variables de tipo socioeconómico, como el aumento de salarios, del empleo o desempleo, etc., serían una buena perspectiva de ser posible una proyección realista de éstas. Sin embargo, dada la carencia en general de la información necesaria desagregada a nivel de las subáreas, su uso también se dificulta en nuestros países.

Por estas razones es que para la proyección de áreas menores se ha preferido utilizar otro tipo de herramientas, entre las cuales se encuentran los métodos para extrapolar directamente la población de dichas áreas o la proporción que ésta representa en el área mayor, las cuales pueden resolverse en forma matemática, gráfica o estadística, pero dado que los dos últimos procedimientos requieren de una serie de puntos que se refieren a un período largo de tiempo, en lo que sigue sólo se examinarán los métodos que requieren un mínimo de valores.

Dentro de los métodos matemáticos que extrapolan la población se examinarán: la curva lineal, la exponencial y, dentro de las logísticas, la de Murphy, por requerir sólo dos puntos; dentro de los que requieren tres puntos, la parábola de segundo grado, la exponencial modificada y la Gompertz. La parábola de tercer grado no se utilizará por requerir un cuarto punto, así

como tampoco la geométrica, pues como se mencionó anteriormente, arroja los mismos resultados que la exponencial.

Dentro de los métodos de proporciones, se examinarán por un lado los mismos métodos matemáticos señalados anteriormente, a excepción de la logística de Murphy, ya que como se había mencionado, éste fue sólo pensado para población; sin embargo, se utilizará la curva logística, la cual sólo necesita de dos valores para su aplicación en proporciones, pues éstas sólo pueden variar entre cero y uno; adicionalmente se examinarán algunas técnicas que involucran algunos juicios para la proyección de las proporciones: el método de proporciones del Buro de Censos, el de la tendencia de las proporciones y la participación en el crecimiento, de Pickard y el método del diferencial de crecimiento de Naciones Unidas, en dos alternativas de aplicación.

II. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES POR EXTRAPOLACION DEL CRECIMIENTO DE LA POBLACION

En el capítulo anterior se mostró una gran cantidad de métodos que se han desarrollado para proyectar la población de áreas pequeñas, extrapolar directamente los valores absolutos de población o extrapolar las proporciones que representa la población del área menor respecto a la población del área mayor, las cuales se pueden resolver en forma gráfica, matemática o estadística.

Sin embargo, en el momento en que los encargados de realizar las estimaciones de población de áreas menores se enfrentan al problema de hacer este tipo de proyecciones, surge la incertidumbre de cuál metodología es la más apropiada.

Para tratar de resolver esta inquietud, en este capítulo se aplicarán los métodos de extrapolación de la población de las áreas menores y en el próximo capítulo se examinarán las proyecciones a partir de la extrapolación de las proporciones de población.

Vale la pena recordar que para evaluar las técnicas de proyección, se estimará la población de las subáreas a la fecha del último censo, para que la población censada en éste, sirva como punto de comparación. Por esta razón, los resultados que se obtengan corresponderán a una proyección a mediano plazo, aproximadamente a 12 años en Colombia y a 10 años en Venezuela.

Si bien es cierto que la concordancia entre el total proyectado del área mayor y la suma de las proyecciones de las áreas menores puede requerirse para la coherencia de las estimaciones cuando se proyectan todas las subáreas de un país o de una región, en determinado momento puede ser necesario proyectar únicamente una cierta localidad, y en tal caso esta conciliación no podría ser hecha. Por esta razón, los métodos de extrapolación de la población de áreas

menores se examinarán en dos etapas: en una primera instancia, se proyectará la población de cada subárea en forma independiente y posteriormente, se prorratarán de acuerdo a la población total del área mayor, con el fin de ver las diferencias entre estos dos procedimientos.

A. Información básica

La información básica para la aplicación de estas metodologías, con el fin de proyectar en forma independiente la población total de cada una de estas subáreas, es la población total de cada una de ellas en por lo menos dos o tres momentos, según el método, como se resumen en el cuadro 1, mientras en las proyecciones dependientes se requiere, adicionalmente, la población proyectada del área mayor para ajustar la suma de las proyecciones locales a este total.

Cuadro 1

INFORMACION MINIMA NECESARIA PARA LA APLICACION DE LAS PROYECCIONES
MATEMATICAS DEL DE LA POBLACION

Método	Número de valores		
	2	3	4
Línea recta	x		
Parábola		x	
Polinomio de tercer grado			x
Logística general <u>2/</u>		x <u>1/</u>	
Logística Murphy	x		
Geométrica-exponencial	x		
Gompertz <u>2/</u>		x	
Exponencial modificada <u>2/</u>		x	

1/ Como se verá en el próximo capítulo, esta curva sólo requiere de 2 puntos cuando se trabaja con proporciones.

2/ Para la estimación de los parámetros de estas curvas se requiere que los datos básicos se encuentren en momentos igualmente espaciados.

Dados estos requerimientos, se escogieron como se había mencionado anteriormente, una región tanto de Colombia como de Venezuela ya que para estos países se disponía de la información de los censos de las cuatro últimas décadas, lo cual era indispensable para que los tres primeros sirvieran de base para la proyección y el cuarto censo se utilizará para verificar la calidad de las estimaciones (en los procedimientos que sólo requerían dos puntos, no se consideró el primer censo).

En cuanto a esta información, se debe tener en cuenta que los datos que se encuentran publicados, no estaban corregidos por cobertura en ningún censo, a excepción del Censo de Colombia de 1973, para el cual la población de los municipios de referencia se encontraba ajustada aproximadamente en un 7 por ciento, por lo cual la tasa de crecimiento del período anterior a este Censo se sobreestimarán mientras que la posterior se subestimarán.

Por otra parte, debido a que algunas de las metodologías requerían para su aplicación que los períodos intercensales y/o los períodos de la proyección estuvieran igualmente espaciados, se interpoló la población censal para que se cumpliera esta condición. Para el caso de Venezuela, esto sólo significó desplazar la población a lo más por un año, mientras que para Colombia implicó correr la población hasta por más de cuatro años.

El procedimiento utilizado para esta interpolación fue la curva exponencial, siendo prorrateados los resultados de tal forma que la suma de las áreas menores coincidiera con la interpolación de la población del área mayor.

En los cuadros 2 y 4 se presenta la población de las regiones escogidas de los dos países en las fechas censales, las cuales son utilizadas para la aplicación de la línea recta, la parábola de segundo grado, la logística de Murphy y la exponencial, mientras que en los cuadros 3 y 5 se presenta esta información, pero para momentos igualmente espaciados, con lo que fue posible aplicar la Gompertz y la exponencial modificada.

Cuadro 2
COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO
INFORMACION CENSAL

MUNICIPIO	AÑO DEL CENSO			
	1951	1964	1973	1985
VALLE DEL RIO NEGRO	120847	159902	202392	244186
CARMEN DE VIVORAL	18147	21420	23238	29132
CONCEPCION	4327	5536	6444	6077
GUARNE	10318	13788	17549	23269
LA CEJA	10568	16507	22157	28766
LA UNION	6531	10666	11943	13313
MARINILLA	14273	17466	24054	31310
PEÑOL	9702	11700	13501	13791
RIONEGRO	21809	30637	43316	56195
SAN VICENTE	11183	14852	19042	19643
SANTUARIO	13989	17330	21148	22690

Fuente: Colombia, Censos Nacionales de Población, 1951, 1964, 1973, 1985

Cuadro 3
COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO
AJUSTE DE LOS CENSOS IGUALMENTE ESPACIADOS

MUNICIPIO	AÑO			
	1955	1965	1975	1985
VALLE DEL RIO NEGRO	132649	165062	208757	244186
CARMEN DE VIVORAL	19208	21667	24139	29132
CONCEPCION	4706	5653	6387	6077
GUARNE	11387	14251	18399	23269
LA CEJA	12291	17184	23149	28766
LA UNION	7710	10835	12168	13313
MARINILLA	15292	18245	25142	31310
PEÑOL	10344	11934	13559	13791
RIONEGRO	24476	32117	45250	56195
SAN VICENTE	12316	15366	19154	19643
SANTUARIO	15050	17810	21411	22690

Fuente: Cuadro 2

Cuadro 4

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA
INFORMACION CENSAL

DISTRITO	AÑO DEL CENSO			
	1950	1961	1971	1981
MERIDA	211110	270668	347095	459361
ANDRES BELLO	6457	18853	26370	31645
ARZ. CHACON	15450	16060	16614	14902
CAMPO ELIAS	24766	26598	31615	37009
JUSTO BRICENO	13078	18721	21148	20762
LIBERTADOR	49500	69636	103621	166617
MIRANDA	11309	16294	19491	24631
RANGEL	11907	12262	15295	18166
RIVAS DAVILA	15594	15251	16100	16958
SUCRE	22533	20650	21659	25581
TOVAR	40516	56343	75182	103090

Fuente: Venezuela, Censos Nacionales de Población, 1950, 1961, 1971, 1981.

Cuadro 5

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA
AJUSTE CENSOS IGUALMENTE ESPACIADOS

DISTRITO	AÑO DEL CENSO			
	1951	1961	1971	1981
MERIDA	215768	274796	346763	459361
ANDRES BELLO	7111	19251	26352	31645
ARZ. CHACON	15539	16101	16619	14902
CAMPO ELIAS	24980	26892	31596	37009
JUSTO BRICENO	13528	18869	21148	20762
LIBERTADOR	51125	71374	103448	166617
MIRANDA	11705	16480	19474	24631
RANGEL	11966	12434	15285	18166
RIVAS DAVILA	15600	15308	16096	16958
SUCRE	22413	20720	21646	25581
TOVAR	41804	57367	75097	103090

Fuente: Cuadro 4

B. Estadísticas utilizadas para evaluar la calidad de las estimaciones

Para medir la calidad de las estimaciones se calculó el error porcentual de las proyecciones obtenidas para cada área menor, por cada uno de los métodos considerados.

El error porcentual (porcentaje de desviación) se definió como:

$$d\% = \left[\frac{P_p - P_c}{P_c} \right] * 100$$

donde P_p es la población proyectada y,

P_c es la población censada (en el presente caso, en la última década),

por lo cual un error positivo estaría indicando que la proyección sobreestimó el valor "real" o censado de la población, mientras que un valor negativo indicaría que la proyección subestimó el crecimiento de la población.

Por otra parte, en la medida en que el valor absoluto de este error o desviación se acerca a cero, nos indica que la estimación es de mejor calidad.

Dado que el error porcentual varía entre una localidad y otra, el análisis de la bondad en forma global de cada método se hace difícil en base a esta medida, por lo cual, para facilitar su evaluación se calcularon una serie de medidas resumen. Estas medidas son:

1. Estadístico Chi-cuadrado de Pearson (X^2_p)

El X^2 es una medida de la bondad de ajuste de un modelo; es un "método clásico de comparación ..., que contrasta las frecuencias observadas en varios grupos con las frecuencias esperadas ..." 66/, se define como:

$$X^2_p = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(o - e)^2}{e} \right]$$

66/ Rodríguez, Germán (1986), Modelos estadísticos para el análisis de datos demográficos, Apuntes de clase del curso "Métodos Cuantitativos II", CELADE, Santiago.

donde o se refiere a la frecuencia observada en cada caso,
 e se refiere a la frecuencia esperada en cada caso, y
 n es el número de casos

Para la presente aplicación, el valor observado será la proyección de población en cada uno de los métodos; el valor esperado será la población enumerada en el Censo de la década del 80 y n será el número de municipios o distritos, los cuales son 10 en cada caso.

En la medida que el valor de X^2 sea menor, estará indicando un menor error del método de proyección de referencia. Sin embargo, dado que el valor del X^2 es una función lineal del tamaño de la población, los resultados obtenidos para los dos países no son comparables en forma directa, pero ponderando los resultados de un país al tamaño del otro país, la comparación se hace posible.

Vale la pena resaltar que esta medida puede ser engañosa, en el sentido de lo que se quiere medir aquí, pues si por ejemplo, un procedimiento arroja muy buenos resultados en 9 de los 10 casos, pero justamente el área menor cuya proyección no fue buena, es muy grande, el valor de X^2 puede ser mayor que en otra técnica, donde los errores de los 9 casos anteriores sean mayores (en términos absolutos), o sea, que la proyección es de inferior calidad y el restante, se aproxime más al valor "real".

Sin embargo, se incluyó aquí como una medida general de resumen pero no se consideró necesario hacer la modificación para que los valores del X^2 fuesen comparables entre los dos países.

2. Promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación

Esta es una medida que con frecuencia se utiliza para resumir el error porcentual de una serie de observaciones o casos, e indica el error promedio de cada metodología. Por comodidad, en el texto se denominará también como "desviación media".

Esta medida se puede formular como:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d\%| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{P_p - P_c}{P_c} \right) * 100 \right|$$

donde $d\%$, P_p , P_c y n se definen de la misma forma como se mencionó anteriormente.

Aunque esta medida no está afectada por el tamaño de la población de las subáreas, sí lo puede estar por los errores extremos que se presentan en una o unas pocas proyecciones.

3. Porcentaje de desviaciones por encima de 5 ó 10% (>5% ó >10%)

Se refiere a la frecuencia expresada en porcentajes, en que el error porcentual en valor absoluto está por encima del 5 ó 10 por ciento. Esta medida estaría indicando la frecuencia de valores extremos en las proyecciones, y dado que se han considerado como buenas proyecciones aquéllas cuyo error no sobrepasa el 5 por ciento, en base a esta medida se podrá evaluar ésto.

4. Porcentaje de desviaciones positivas o negativas {d(+)} ó d(-)}

Se refiere a la frecuencia en que el error porcentual es positivo o negativo. Esta medida sirve para determinar la presencia o ausencia de un sesgo hacia arriba o hacia abajo, en forma sistemática, del método que se está revisando. Por ejemplo, si la tasa de crecimiento ha disminuido, se espera que los métodos que asumen que la tasa permanece contante, sobreestimarán en forma sistemática la población.

5. Porcentaje de frecuencia en que cada método arroja las mejores y las peores proyecciones

Esta medida pretende examinar con qué frecuencia, dentro de las técnicas examinadas en cada etapa, un método arroja la mejor o la peor proyección de cada subárea. Por lo tanto, en el cuadro que aparece, la suma horizontal debe ser el cien por ciento.

Se debe tener en cuenta que aquí los resultados pueden ser también engañosos, pues puede suceder que la estimación obtenida para una subárea por un método sea la mejor, pero ésta a su vez puede darse en una subárea donde todas las técnicas arrojaron buenos resultados o por el contrario, donde se obtuvieron malos resultados. Puede suceder, también, que el error de la mejor

proyección para una subárea por un método sea superior que el obtenido para las peores proyecciones de otros métodos.

C. Resultados

Como ya se había mencionado, los resultados de las proyecciones se analizarán en dos etapas. En la primera se considerarán los resultados de las proyecciones obtenidas en forma independiente, y en la segunda se examinarán después de haber sido prorrateadas al total de la población del área mayor censada en la década de los 80.

1. Análisis de los resultados, considerando las proyecciones de las áreas menores en forma independiente

Al observar los cuadros 6 y 7, se puede apreciar que a diferencia de lo esperado, mientras para algunas áreas menores una metodología de proyección resulta muy adecuada, en otros casos esta misma metodología tiene errores muy altos.

En el caso de Colombia (ver cuadros 6 y 8), se puede ver que la proyección lineal es la que arroja los mejores resultados, en forma consistente, en todas las medidas resumen:

- Se obtiene el menor error porcentual al comparar la población del área mayor obtenida a partir de la suma de los municipios y la población censada en dicha área, el cual varía en el intervalo (5.35% a 15.06%).
- El valor del X^2 , el cual varía entre 3126.56 y 11361.37, nos indica que a pesar de que ningún modelo se ajusta bien, el que mejor lo hace es el modelo lineal.
- Lo mismo sucede con el promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación, donde se obtuvo el menor error promedio del intervalo (11.01 - 18.22).
- Adicionalmente, por este método se obtuvo el mayor porcentaje de frecuencia de la mejor estimación para el municipio 4 de los 10 casos, (40%) y en ningún caso apareció como método que arrojara la peor proyección.

- Se consiguió el menor porcentaje de estimaciones con un error porcentual por encima del 5 y del 10 por ciento, pero de todas maneras, esto no es muy alentador pues el 60 por ciento de las estimaciones (6 de los 10 casos) tienen un error superior al 5 por ciento y el 50 por ciento por encima del 10 por ciento para una proyección a sólo 10 años.
- En cuanto al porcentaje de desviaciones positivas, se observa que este método no subestima o sobreestima en forma sistemática a la población, pues todos los porcentajes son iguales, a excepción de la exponencial que es ligeramente superior y podría indicar que este método sobreestima la población, de acuerdo a lo esperado en caso que la tasa de crecimiento hubiese descendido, pero la diferencia no es tan grande como para concluir esto.

En cuanto a otras metodologías, vale la pena resaltar los siguientes resultados:

- La función Gompertz a pesar de arrojar, en el 30 por ciento de las proyecciones, la mejor estimación en el mismo porcentaje de proyecciones, fue la peor estimación; por otra parte, fue el método que tuvo el peor ajuste, medido por el X^2 , lo cual se debe especialmente al exagerado error porcentual de 43.75 por ciento presentado para Marinilla (ver cuadro 6).
- El polinomio de segundo grado y la ecuación exponencial tampoco presentan resultados muy convenientes, ya que son los métodos cuyos promedios de valores absolutos de los porcentajes de desviación son más altos, arrojan altos porcentajes de desviaciones por encima del 5 por ciento y los más altos, por encima del 10 por ciento. Por otro lado, en el 50 % y 20%, respectivamente, estas proyecciones arrojan las peores estimaciones.
- Finalmente, las proyecciones obtenidas por la logística de Murphy y la exponencial modificada arrojan resultados intermedios en forma general en todas las medidas.

El caso de Venezuela presenta resultados diferentes (ver cuadros 8 y 9). Aquí la función exponencial es la que arroja los mejores resultados:

Cuadro 6

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO
ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION, POR
METODO, SEGUN MUNICIPIO AL 15 DE OCTUBRE DE 1985

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
VALLE DEL RIO NEGRO	5.35	10.67	13.76	12.86	12.78	15.06
CARMEN DE VIVORAL	-12.17	-12.72	-11.38	-14.21	-8.61	-8.71
CONCEPCION	25.33	25.99	29.01	26.49	14.46	14.00
GUARNE	-3.71	-0.01	2.97	3.22	4.89	5.77
LA CEJA	2.39	9.24	12.64	8.64	5.75	4.89
LA UNION	2.09	1.81	3.81	-12.88	-4.33	-4.91
MARINILLA	3.99	12.62	16.14	20.94	31.75	43.75
PENOL	14.76	15.12	17.78	18.26	10.36	10.19
RIONEGRO	6.21	16.90	20.54	20.28	20.69	24.10
SAN VICENTE	24.48	29.72	33.62	34.49	21.46	21.44
SANTUARIO	14.93	17.28	20.53	22.83	15.07	15.42

Fuente: Cuadros 2 y A1

Cuadro 7

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL
DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION, POR METODO,
SEGUN DISTRITO AL 20 DE OCTUBRE DE 1981

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
MERIDA	-8.92	-5.38	-3.35	-6.05	-1.70	1.58
ANDRES BELLO	5.49	11.12	13.96	-10.23	-3.60	-8.06
ARZ. CHACON	14.96	14.48	15.07	14.45	14.73	14.71
CAMPO ELIAS	-1.93	-1.56	0.37	5.80	16.64	21.43
JUSTO BRICENO	12.76	12.39	14.13	-2.55	6.54	5.92
LIBERTADOR	-18.78	-12.15	-9.90	-11.61	-7.42	-6.18
MIRANDA	-8.76	-8.31	-6.47	-16.23	-13.32	-14.23
RANGEL	-0.23	1.21	3.47	13.26	79.75	155.51
RIVAS DAVILA	-0.39	-0.92	-0.14	6.16	-17.62	-16.93
SUCRE	-11.65	-12.10	-11.48	-0.96	-17.36	-17.42
TOVAR	-10.03	-6.86	-4.56	-7.94	-7.56	-8.39

Fuente: Cuadros 4 y A2

Cuadro 8

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, PROMEDIO DE VALORES ABSOLUTOS DE LOS PORCENTAJES DE DESVIACION, PORCENTAJE DE DESVIACION POR ENCIMA DEL 10 POR CIENTO PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES PROYECCIONES DE POBLACION, POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
COLOMBIA						
X ²	3126.56	5962.89	8187.71	9135.92	7648.65	11361.37
Error medio	11.01	14.14	16.84	18.22	13.74	15.32
>5%	a/ 60.00	80.00	80.00	90.00	80.00	80.00
>10%	a/ 50.00	70.00	80.00	80.00	60.00	60.00
desv.posit.	a/ 80.00	80.00	90.00	80.00	80.00	80.00
mej. proy.	a/ b/ 40.00	20.00	0.00	0.00	10.00	30.00
peor proy.	a/ b/ 0.00	0.00	20.00	50.00	0.00	30.00
VENEZUELA						
X ²	8231.85	4523.15	3677.95	4708.14	16272.75	49356.83
Error medio	9.50	8.11	7.96	8.92	18.45	26.88
>5%	a/ 70.00	70.00	60.00	80.00	90.00	100.00
>10%	a/ 50.00	50.00	40.00	50.00	60.00	60.00
desv.posit.	a/ 30.00	40.00	50.00	40.00	40.00	40.00
mej. proy.	a/ b/ 10.00	0.00	40.00	30.00	10.00	10.00
peor proy.	a/ b/ 20.00	0.00	30.00	10.00	10.00	30.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 6, 7, A1 y A2

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 subáreas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo 60.00 %, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrió el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

- Tiene el menor X^2 , el cual varía entre (3677.95 - 49356.83),
- el menor promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación, el cual varía entre 7.96 y 26.88,
- tiene el menor porcentaje de desviaciones por encima del 5 y 10% y,
- el mayor porcentaje de frecuencia en que el método arrojó las mejores estimaciones (40%). Sin embargo, también en el 30 por ciento de las proyecciones, arrojó las peores proyecciones.

Por su parte, de los demás métodos sobresalen los siguientes resultados:

- Con la logística de Murphy se obtuvieron unos resultados ligeramente inferiores a los estimados por la exponencial, y sin ser la mejor estimación, en ningún momento, arrojó la peor proyección, a diferencia de todos los demás métodos.
- Por su parte, las proyecciones obtenidas a partir de las ecuaciones de Gompertz y exponencial modificada, arrojaron unos resultados bastante contradictorios, pues a pesar de que la suma de las proyecciones distritales se desvía muy poco de la población censada en el Estado, las desviaciones por encima del 5 y 10% son las más altas de todos los métodos. Incluso, para el distrito de Rangel estas desviaciones llegan a 155.51% y 79.75% lo cual explica los altos valores obtenidos en el estadístico X^2 e incluso en el promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación (ver cuadros 7 y 8).
- Entretanto, la proyección lineal y el polinomio de segundo grado presentan resultados intermedios en general en todas las medidas resumen, pero presentan el mayor error porcentual al comparar la población del Estado obtenida a partir de la suma de los distritos y la efectivamente censada en 1981 (ver cuadro 7).

En cuanto a la posibilidad de que algunos métodos tengan un sesgo sistemático hacia arriba o hacia abajo, de los resultados anteriores no se puede concluir en forma muy determinante nada, ya que el porcentaje de desviaciones positivas es muy similar en todos los métodos, pero si hay una gran diferencia en los porcentajes encontrados en Colombia (alrededor de 80%) y los encontrados en Venezuela (alrededor del 40%), lo cual se puede deber a dos razones:

- a) la diferencia en las coberturas entre un censo y otro, ya que como el Censo de 1973 de Colombia estaba ajustado aproximadamente en un 7 por ciento por no cobertura, la tasa de crecimiento del período 1964-73 que se utiliza para proyectar, está sobreestimada y por tanto, necesariamente llevará a exagerar la población proyectada.
- b) el mayor descenso de la fecundidad, presentado en Colombia, pues aquí la tasa global de fecundidad pasó de 6.72 en el período 1950-55 a 3.93 en el período 1980-85, o sea, descendió en un 42 por ciento, y en Venezuela, pasó de 6.64 a 4.33 en el mismo período; esto es, descendió en un 35 por ciento.^{67/}

Estas razones podrían explicar en parte el hecho de que en Colombia se ajustó mejor la curva lineal (la que supone que la tasa de crecimiento es decreciente), mientras que en Venezuela se ajustó mejor la exponencial.

Vale la pena resaltar, que en los municipios de Colombia y en los distritos de Venezuela que cumplieron en forma aproximada los supuestos de la curva lineal y de la exponencial, se obtuvieron buenos resultados; esto es, cuando el cociente entre la tasa anual de crecimiento (ver cuadros A.11 y A.12) del período intercensal 1973-85 ó 1971-81 y 1964-73 ó 1961-71 de Colombia o Venezuela estaba alrededor del 1 (.74, 1.17), se consiguieron proyecciones exponenciales buenas (con errores por debajo del 5 por ciento) y cuando el cociente entre el incremento medio anual de población (ver cuadros 2 y 4) en los mismos períodos se acercaba a uno (aproximadamente entre .8 y 1.2), se lograron buenas proyecciones lineales.

Contrario a lo anterior, en los casos donde se obtienen buenos o malos resultados en las demás curvas, las tasas de crecimiento no presentan un único comportamiento.

De lo observado anteriormente se puede concluir, por un lado, que no siempre una metodología de proyección arroja los mejores resultados, sino que por el contrario, en algunos casos una metodología puede ser la más adecuada, mientras que en otros, la menos adecuada.

^{67/} CELADE, Boletín Demográfico, Año XVI, No. 32, Santiago de Chile, julio de 1983.

Por otra parte, tratar de proyectar la población de áreas menores en forma totalmente independiente, parece no ser muy adecuado, pues puede llevarnos a grandes errores, aun si por casualidad o con algún conocimiento, se escogiese la "mejor" metodología.

2. Análisis de los resultados controlando las proyecciones de las áreas menores, con el total del área mayor, obtenido en forma independiente

Como se había mencionado anteriormente, cuando se realizan proyecciones para todas las subáreas de un país o una región, se requiere que la suma de las subáreas sea igual a la población del área mayor, para que los resultados sean coherentes. Por otra parte, como se ha podido observar en el punto anterior, proyectar las áreas menores en forma totalmente independiente no arroja muy buenos resultados, por lo tanto, a continuación se ajustarán dichas proyecciones al total del área mayor, que se supone se ha proyectado en forma independiente y en consecuencia está disponible. En el presente caso, como proyección independiente se considerará a la población enumerada en las áreas mayores en los censos de la década del 80.

Dado que el ajuste consiste en prorratear los resultados de la proyección al total de la población del área mayor, la proporción de población en cada subárea permanecerá constante.

En los cuadros 9 y 10 aparecen los errores porcentuales de la proyección ajustada al total "verdadero", donde se aprecia como se esperaba, que algunas proyecciones locales mejoraron, pero otras por el contrario empeoraron e incluso, en varias oportunidades la proyección de algunos municipios que al ser proyectados independientemente tuvieron el menor error por un método, al ajustarlo, dicha proyección pasó a ser la peor estimación o viceversa. Tal es el caso de Santuario con la lineal y Gu^arne con la logística de Murphy en Colombia y Tovar con la lineal en Venezuela.

Con los resultados anteriores es difícil saber si con el procedimiento de ajuste se obtienen mejores resultados que proyectando en forma independiente. Por lo tanto, para poder hacer una mejor evaluación se calcularon las medidas resumen del cuadro 11.

Cuadro 9

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION DE LAS AREAS MENORES, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, CONTROLANDO POR EL TOTAL DEL AREA MAYOR, POR METODOS Y SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
CARMEN DE VIVORAL	-16.64	-21.14	-22.10	-23.99	-18.97	-20.65
CONCEPCION	18.96	13.84	13.41	12.07	1.49	- 0.92
GUARNE	-8.60	-9.65	-9.48	-8.55	-7.00	- 8.07
LA CEJA	-2.82	-1.29	-0.98	-3.75	-6.23	- 8.84
LA UNION	-3.09	-8.01	-8.74	-22.81	-15.17	-17.35
MARINILLA	-1.29	1.76	2.09	7.15	16.81	24.94
PEÑOL	8.93	4.02	3.53	4.78	-2.15	- 4.23
RIONEGRO	0.82	5.63	5.97	6.57	7.01	7.86
SAN VICENTE	18.16	17.21	17.46	19.16	7.69	5.55
SANTUARIO	9.09	5.97	5.95	8.83	2.03	0.31

Fuente: Cuadros 2 y A3

Cuadro 10

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION DE LAS AREAS MENORES, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, CONTROLANDO POR EL TOTAL DEL AREA MAYOR, POR METODOS Y SEGUN DISTRITO

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
ANDRES BELLO	15.82	17.44	17.90	-4.45	-1.93	-9.49
ARZ.CHACON	26.21	20.99	19.06	21.82	16.71	12.93
CAMPO ELIAS	7.68	4.04	3.84	12.60	18.66	19.54
JUSTO BRICENO	23.81	18.78	18.08	3.72	8.39	4.27
LIBERTADOR	-10.83	-7.15	-6.78	-5.92	-5.82	-7.64
MIRANDA	0.18	-3.09	-3.24	-10.84	-11.82	-15.56
RANGEL	9.54	6.96	7.06	20.55	82.86	151.53
RIVAS DAVILA	9.37	4.71	3.32	12.99	-16.20	-18.23
SUCRE	-3.00	-7.10	-8.41	5.41	-15.93	-18.70
TOVAR	-1.21	-1.57	-1.25	-2.01	-5.96	-9.82

Fuente: Cuadros 4 y A4

Cuadro 11

ESTADISTICA CHI-CUADRADO, PROMEDIO DE LOS VALORES ABSOLUTOS DE LOS PORCENTAJES DE DESVIACIONES POR ENCIMA DEL 5 Y 10 POR CIENTO, PORCENTAJES DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES PROYECCIONES DE POBLACION, DESPUES DE SER AJUSTADAS AL TOTAL DEL AREA MAYOR, POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
COLOMBIA						
X ²	2186.79	2597.07	2755.86	3999.86	2875.23	4401.14
Error medio	8.84	8.85	8.97	11.77	8.46	9.87
>5%	a/ 60.00	70.00	70.00	80.00	70.00	70.00
>10%	a/ 30.00	30.00	30.00	40.00	30.00	30.00
desv.posit.	a/ 50.00	60.00	60.00	60.00	50.00	40.00
mej. proy.	a/b/ 40.00	0.00	10.00	0.00	20.00	30.00
peor proy.	a/b/ 30.00	10.00	0.00	30.00	0.00	30.00
VENEZUELA						
X ²	5516.90	3567.45	3385.90	3430.88	16703.02	47719.06
Error medio	10.77	9.18	8.89	10.03	18.43	26.77
>5%	a/ 70.00	60.00	60.00	70.00	90.00	90.00
>10%	a/ 40.00	30.00	30.00	50.00	60.00	60.00
desv.posit.	a/ 70.00	30.00	60.00	60.00	40.00	40.00
mej. proy.	a/b/ 30.00	10.00	20.00	10.00	20.00	10.00
peor proy.	a/b/ 30.00	0.00	10.00	0.00	0.00	60.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 9, 10, A3 y A4

Notas : a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 subáreas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo 60.00 %, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrió el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

De la comparación del cuadro 8 y el 11, se puede observar que las proyecciones mejoraron bastante, pues ya se eliminó el error que implicaba que la suma de las proyecciones de áreas menores no reprodujese el total censado, lo cual se refleja especialmente en el valor del estadístico X^2 , el que se redujo más cuando esta diferencia era mayor.

Para el caso de Colombia, las diferencias entre los métodos se redujo en forma significativa; sin embargo, aún es posible decir, aunque no tan categóricamente, que el método lineal continua siendo el procedimiento que conduce a las mejores proyecciones, lo que se confirma con el porcentaje de frecuencia en que el método arrojó las mejores proyecciones (40%); pero, a pesar de esto, también se tuvo un alto porcentaje (30%) en que se obtuvieron las peores proyecciones, y en tal sentido, se podrían considerar más adecuados los resultados obtenidos por las curvas exponencial y exponencial modificada, en las cuales no se obtuvo en ningún caso la peor proyección, pero en dos de los tres casos en que la lineal arrojó la peor proyección, éstas resultaron aceptables (con un error inferior al 10%), y en el tercer caso, en la mayoría de las técnicas se había obtenido una mala estimación.

Sin embargo, si se considera el porcentaje de desviaciones por encima del 10%, donde a excepción del polinomio de segundo grado, todas las demás tuvieron un 30%, se puede decir que no todas se comportaron en una forma muy consistente, ya que en las proyecciones que sólo necesitaban dos puntos, las proyecciones malas se obtuvieron donde la tasa de crecimiento aumentó o disminuyó muy fuertemente, por lo cual el ajuste al total del área mayor no logró corregir estas proyecciones, pero en las metodologías que requerían 3 puntos, tanto las buenas como las malas proyecciones se obtienen indistintamente si cambió o no la tendencia de la tasa (ver cuadro A.11).

En el caso de Venezuela ocurre algo similar, se obtienen mejores ajustes en los casos donde la desviación porcentual entre la suma de las proyecciones distritales y la población censada era mayor; por esta razón, los resultados de la exponencial modificada y la Gompertz no variaron mayormente y así los resultados de todas las medidas globales continúan expresando la inconveniencia de su aplicación en este caso.

En cuanto a los demás métodos, aunque el valor de los promedios de los valores absolutos de los porcentajes de desviación aumentaron ligeramente, los

valores de X^2 se redujeron al igual que las desviaciones extremas por encima del 10 por ciento; pero de todas maneras, aunque las diferencias entre los cuatro primeros métodos no son muy grandes, la función exponencial continua arrojando los mejores resultados.

De los resultados anteriores se puede concluir que, al ajustar los resultados de las proyecciones independientes al total del área mayor, obtenido en forma independiente, se logran mejores resultados, tanto por el menor porcentaje de estimaciones por encima del 10 por ciento, como por el hecho de que la suma de las proyecciones locales coincida con el total.

Sin embargo, dadas las modificaciones que sufren las proyecciones al ser prorrateadas al total, unas estimaciones se mejoran y otras empeoran, de tal forma que el promedio de los valores absolutos de las desviaciones relativas puede disminuir, como en el caso de Colombia, o aumentar, como en el caso de Venezuela, pero aquí las "buenas" proyecciones parecen no estar asociadas a un determinado comportamiento de la tasa de crecimiento.

Finalmente, de acuerdo a los resultados obtenidos de las técnicas que utilizan dos otros datos de base para la proyección, se puede decir que en general parecen mejores las estimaciones obtenidas a partir de la información de sólo dos puntos.

III. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES, A PARTIR DE LA EXTRAPOLACION DE PROPORCIONES

En el capítulo anterior se pudo apreciar cómo, la calidad de las proyecciones entre uno y otro método variaba según el área menor de que se tratara, e incluso a nivel global según el país.

En este capítulo se examinarán los resultados de las estimaciones de población de áreas menores, a partir de la proyección de proporciones. El análisis se desarrollará en tres bloques. En el primero se examinarán las estimaciones de la proyección de las proporciones de población del área menor, con respecto al área mayor, en forma individual, esto es, sin preocuparse que la suma de las proporciones dé uno, con el fin de examinar la posibilidad de utilizarla cuando sólo se requiere la proyección de una localidad específica y no de todas las localidades del área mayor.

Posteriormente, se analizarán estas proyecciones pero ajustando las proporciones para que sumen uno, con el fin de que la suma de la población de las áreas menores reproduzca la del área mayor de tal forma que sean consistentes y, en la tercera parte, se evaluarán algunos métodos que utilizan algunos criterios específicos para proyectar las proporciones.

A. Información básica

La información básica para la aplicación de estas metodologías, con excepción del método de participación en el crecimiento de Pickard y del diferencias de crecimiento de Naciones Unidas, es la proporción de población del área menor con respecto al área mayor.

En los cuadros 12 y 14 aparece esta información, obtenida de los censos de población, y en los cuadros 13 y 15 aparece esta misma información, pero a partir de la información de los censos desplazados de tal forma que queden igualmente espaciados para que los métodos que requerían esta condición pudieran ser aplicados, al igual que en el capítulo anterior.

La información necesaria para la aplicación de los otros métodos es directamente la población, la cual se encuentra en los cuadros 3, 4 y 5.

Cuadro 12

COLOMBIA, ANTIOQUIA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS MUNICIPIOS EN EL VALLE DEL RIO NEGRO. INFORMACION A FECHAS CENSALES

MUNICIPIO	AÑO DEL CENSO			
	1951	1964	1973	1985
CARMEN DE VIVORAL	15.02	13.40	11.48	11.93
CONCEPCION	3.58	3.46	3.18	2.49
GUARNE	8.54	8.62	8.67	9.53
LA CEJA	8.74	10.32	10.95	11.78
LA UNION	5.40	6.67	5.90	5.45
MARINILLA	11.81	10.92	11.88	12.82
PEÑOL	8.03	7.32	6.67	5.65
RIONEGRO	18.05	19.16	21.40	23.01
SAN VICENTE	9.25	9.29	9.41	8.04
SANTUARIO	11.58	10.84	10.45	9.29

Fuente: Cuadro 2.

Cuadro 13

COLOMBIA, ANTIQUITA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS MUNICIPIOS EN EL VALLE DEL RIO NEGRO CON LOS CENSOS AJUSTADOS A IGUALES PERIODOS DE TIEMPO

MUNICIPIO	1955	1965	1975	1985
CARMEN DE VIVORAL	14.47	13.13	11.56	11.93
CONCEPCION	3.54	3.42	3.06	2.49
GUARNE	8.58	8.63	8.81	9.53
LA CEJA	9.26	10.41	11.09	11.78
LA UNION	5.81	6.56	5.83	5.45
MARINILLA	11.52	11.05	12.04	12.82
PEÑOL	7.79	7.23	6.50	5.65
RIONEGRO	18.43	19.46	21.68	23.01
SAN VICENTE	9.28	9.31	9.18	8.04
SANTUARIO	11.33	10.79	10.26	9.29

Fuente: Cuadro 3

Cuadro 14

VENEZUELA, MERIDA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS DISTRITOS EN EL ESTADO DE MERIDA, INFORMACION A FECHAS CENSALES

DISTRITO	ANO DEL CENSO			
	1950	1961	1971	1981
ANDRES BELLO	3.06	6.97	7.60	6.89
ARZ. CHACON	7.32	5.93	4.79	3.24
CAMPO ELIAS	11.73	9.83	9.11	8.06
JUSTO BRICENO	6.19	6.92	6.09	4.52
LIBERTADOR	23.45	25.73	29.85	36.27
MIRANDA	5.36	6.02	5.62	5.36
RANGEL	5.64	4.53	4.41	3.95
RIVAS DAVILA	7.39	5.63	4.64	3.69
SUCRE	10.67	7.63	6.24	5.57
TOVAR	19.19	20.82	21.66	22.44

Fuente: Cuadro 4

Cuadro 15

VENEZUELA, MERIDA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS DISTRITOS EN EL ESTADO DE MERIDA, CON LA INFORMACION DE LOS CENSOS AJUSTADOS A IGUALES PERIODOS DE TIEMPO

DISTRITO	1951	1961	1971	1981
ANDRES BELLO	3.30	7.01	7.60	6.89
ARZ.CHACON	7.20	5.86	4.79	3.24
CAMPO ELIAS	11.58	9.79	9.11	8.06
JUSTO BRICENO	6.27	6.87	6.10	4.52
LIBERTADOR	23.69	25.97	29.83	36.27
MIRANDA	5.42	6.00	5.62	5.36
RANGEL	5.55	4.52	4.41	3.95
RIVAS DAVILA	7.23	5.57	4.64	3.69
SUCRE	10.39	7.54	6.24	5.57
TOVAR	19.37	20.88	21.66	22.44

Fuente: Cuadro 5

B. R e s u l t a d o s

Los métodos de extrapolación de la población a partir de proporciones fueron divididos en la introducción en tres grupos. En el primero se agrupaban las técnicas que proyectaban la proporción que representaba la población del área menor con respecto a la del área mayor, las cuales a su vez se dividieron en las funciones matemáticas y dos metodologías que, a pesar de ser matemáticas, emplearon ciertos criterios específicos para la proyección de las proporciones. En el segundo grupo se presenta un método que proyecta la participación de la subárea en el crecimiento de la población del área mayor, y en el tercer grupo se presenta el método del diferencial del crecimiento, en el cual se proyecta la población asumiendo que existe un diferencial entre la tasa de crecimiento del área mayor y el área menor.

Sin embargo, la evaluación de las proyecciones a partir de proporciones no seguirá el orden anterior sino que, como ya se había mencionado, se elaborará en tres etapas: 1) Proyección de las proporciones de población del área menor a la mayor por los métodos matemáticos, en forma individual; 2) Ajustando las proporciones proyectadas en la etapa anterior, de tal manera que se reproduzca la población del área mayor y 3) Proyectando las proporciones de acuerdo a ciertos criterios específicos.

Los métodos matemáticos empleados para proyectar las proporciones son los mismos empleados en el capítulo anterior, a excepción de la logística, ya que la simplificación de Murphy no puede ser aplicada a las proporciones debido al comportamiento de las tasas de crecimiento de las proporciones, por lo cual se utilizó una logística general, pues como se está trabajando con proporciones, las asíntotas mínima y máxima son 0 y 1, por lo cual se requieren sólo 2 puntos para su aplicación.

Sin embargo, dado que estas asíntotas son muy exagerada, ya que asumen que la población de una localidad puede llegar a ser igual al total del área mayor, para lo cual se requeriría que las demás localidades desaparecieran o que una localidad puede desaparecer -lo que no es muy realista-, se probó una segunda logística, donde las asíntotas eran .002 y .5. A pesar de que estos límites son un poco arbitrarios, en el fondo están asumiendo que el valor de una localidad podría llegar a representar la mitad del área mayor, lo cual aún puede ser elevado, pero no tan absurdo como el anterior y que podría llegar a representar sólo el .2 por ciento de la población del área mayor.

1. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de la proyección de las proporciones en forma individual para cada área menor

En los cuadros 16 y 17 se pueden ver los errores porcentuales de cada una de las proyecciones, y en el cuadro 18 algunas estadísticas y medidas resumen de la bondad de las proyecciones.

De acuerdo al cuadro 18, la proyección lineal, exponencial y logística-2 (asíntotas 0.002 y 0.5) varían ligeramente una de otra y en forma muy significativa de los demás métodos, tanto en el caso de Venezuela como en el de Colombia.

En el caso de Colombia, la logística-2 se ajusta mejor según el X^2 , y el promedio de valores absolutos y la lineal de acuerdo al porcentaje de frecuencias en que este método obtiene las mejores proyecciones. En cuanto al porcentaje de proyecciones mayores del 5% los 3 métodos tienen un 70% pero sólo un 30% por encima del 10%, las cuales corresponden a los mismos tres municipios que en la segunda parte del capítulo anterior daban malos resultados y los cuales mostraron una tasa de crecimiento de las proporciones que cambiaba de sentido o variaba muy fuertemente, pues en el período base se tenía una tasa de crecimiento positiva o negativa (San Vicente y Carmen de Vival, respectivamente) y en el período siguiente cambiaron de signo, o la tasa negativa que tenía (Concepción) aumentó negativamente en forma muy fuerte.

Para el caso de Venezuela, aunque la lineal, la exponencial y la logística-2 se ajustan mucho mejor que los demás métodos, en todas las estadísticas la función lineal presenta los mejores resultados, a excepción del porcentaje de desviaciones por encima del 10 por ciento, que es ligeramente superior a los otros dos métodos.

En los cuadros 16 y 17 resulta interesante observar que a pesar de que el error porcentual entre la suma de las proyecciones locales obtenidos con la logística y la población del área mayor es prácticamente nulo, los errores para cada una de las localidades son exageradamente grandes; esto también ocurre con el polinomio de segundo grado.

Además de lo anterior, vale la pena resaltar cómo los resultados de la función logística están muy afectados por el tipo de asíntotas que se tomen; como se puede ver, pueden obtenerse buenas proyecciones si se colocan unas asíntotas "adecuadas", o resultados muy malos, si se consideran asíntotas absurdas. Lo de asíntota adecuada, puede ser algo complejo de definir, pero éstas podrían depender de la proporción de población que representa en un momento determinado la subárea, y del ritmo de crecimiento que ésta tenga.

Cuadro 16

COLOMBIA. ANTIOQUIA, VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS ESTIMACIONES DE LA POBLACION A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, POR METODO, SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG. a/	LOG.2 a/	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
VALLE DEL RIO NEGRO	-0.00	-0.02	0.76	1.24	0.00	0.47	1.29
CARMEN DE VIVORAL	-24.48	11.35	-21.93	-21.13	-32.40	-18.37	-17.86
CONCEPCION	13.50	38.48	14.82	14.82	3.94	-21.94	-15.17
GUARNE	-8.36	-9.48	-8.35	-8.35	-8.51	-1.64	-1.48
LA CEJA	-0.23	-12.09	0.12	0.25	-5.27	-2.48	-2.62
LA UNION	-9.99	21.53	-7.81	-7.61	-47.19	20.00	19.96
MARINILLA	2.38	-14.42	3.05	3.36	17.49	-22.58	-21.49
PENOL	3.34	28.90	4.66	4.82	0.18	-2.06	-1.40
RIONEGRO	5.58	-16.23	5.96	7.28	13.33	15.07	16.85
SAN VICENTE	18.89	15.54	18.91	18.92	20.35	20.67	20.85
SANTUARIO	7.05	16.40	7.22	7.27	8.76	4.75	4.76

Fuente: Cuadros 2 y A5

Nota: a/ La primera logística se definió con asíntotas 0 y 1 mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.002 y 0.5.

Cuadro 17

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LA ESTIMACION DE LA POBLACION A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, POR METODO, SEGUN DISTRITO

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG.a/	LOG.2a/	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
MERIDA	0.00	-0.04	0.52	1.43	0.00	6.05	6.31
ANDRES BELLO	18.84	1.65	19.47	19.59	-27.11	11.69	11.29
ARZOBISPO CHACON	14.57	80.52	20.44	20.76	22.99	21.61	21.47
CAMPO ELIAS	4.74	21.41	5.22	5.33	19.21	9.94	9.72
JUSTO BRICENO	17.80	51.85	19.58	19.77	-14.28	56.79	57.50
LIBERTADOR	-7.08	-28.40	-7.70	-5.44	-2.64	0.26	1.36
MIRANDA	-2.31	11.79	-1.89	-1.85	-21.11	9.47	9.34
RANGEL	8.51	14.36	8.58	8.59	32.55	11.12	11.09
RIVAS DAVILA	0.48	50.83	4.59	4.80	21.17	11.65	10.67
SUCRE	-11.22	35.33	-7.48	-7.10	18.26	1.47	0.28
TOVAR	0.03	-7.02	0.06	0.16	-3.46	-1.69	-1.74

Fuente: Cuadros 4 y A6

Nota: a/ La primera logística se definió con asíntotas 0 y 1 mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.002 y 0.5

Cuadro 18

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, PROMEDIO DE LOS VALORES ABSOLUTOS DE LOS PORCENTAJES DE DESVIACION, PORCENTAJE DE DESVIACION POR ENCIMA DEL 5 Y 10 POR CIENTO, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES ESTIMACIONES DE POBLACION A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DEL AREA MENOR EN LA MAYOR POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	PROCEDIMIENTO							
	LINEAL	LOG. <u>c/</u>	LOG.2 <u>c/</u>	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ	
COLOMBIA								
X ²	3172.89	6890.25	2857.68	2862.55	9223.51	5601.52	5574.13	
Error medio	9.38	18.44	9.24	9.38	15.74	12.96	12.24	
>5% <u>a/</u>	70.00	100.00	70.00	70.00	80.00	60.00	60.00	
>10% <u>a/</u>	30.00	90.00	30.00	30.00	50.00	60.00	60.00	
d(+) <u>a/</u>	60.00	60.00	70.00	70.00	60.00	40.00	40.00	
mej. <u>a/</u> <u>b/</u>	20.00	20.00	10.00	10.00	20.00	10.00	10.00	
peor <u>a/</u> <u>b/</u>	0.00	50.00	0.00	0.00	20.00	10.00	20.00	
VENEZUELA								
X ²	3483.59	39190.71	4029.12	3577.31	9777.12	8902.83	8997.97	
Error medio	8.56	30.32	9.50	9.34	18.28	13.57	13.45	
>5% <u>a/</u>	60.00	90.00	70.00	70.00	80.00	70.00	70.00	
>10% <u>a/</u>	40.00	80.00	30.00	30.00	80.00	50.00	50.00	
d(+) <u>a/</u>	70.00	80.00	70.00	70.00	50.00	90.00	90.00	
mej. <u>a/</u> <u>b/</u>	50.00	10.00	0.00	10.00	10.00	10.00	10.00	
peor <u>a/</u> <u>b/</u>	0.00	60.00	0.00	0.00	30.00	0.00	10.00	

Fuente: Cuadros 2, 4, 16, 17, A5 y A6

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 sub-areas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo, 60.00, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrio el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

c/ La primera logística se definió con asíntotas cero y uno, mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.002 y 0.05.

Por su parte, la Gompertz y la Exponencial modificada, en esta ocasión, presentan resultados intermedios en ambos países, con unas proyecciones para algunas subáreas, donde el error es mínimo, pero en otras, es exageradamente grande e incluso en el caso de Venezuela, los errores obtenidos de la diferencia entre la suma de las proyecciones de las áreas menores y el total censado del área mayor (6.31, 6.05) se apartaron totalmente de los obtenidos en los demás métodos e incluso en estos mismos, pero para Colombia (ver cuadros 16 y 17).

De los resultados obtenidos aquí, es posible concluir que si se desea proyectar la población de una localidad en forma individual, las técnicas más aconsejables son la lineal, la exponencial y la logística, pero tomando unas asíntotas no tan extremas como 0 y 1. Por otra parte, si se escoge el método lineal, se tiene la ventaja de que esta proyección va a ser consistente con el total del área mayor en el caso que posteriormente se realicen para las demás localidades que pertenezcan a dicha área; pero si se escogiese uno de los otros dos métodos, el porcentaje de error no sería muy grande.

2. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de la proyección de las proporciones de población del área menor con respecto al área mayor, ajustadas para que reproduzcan el valor de ésta última

Como se observó anteriormente, el método lineal además de arrojar unos resultados bastante buenos, tenía la ventaja de que la suma de las proyecciones de las áreas menores reproducía el total, mientras que el polinomio de segundo grado, a pesar de cumplir también con esta característica, no arrojó muy buenos resultados sino por el contrario, los errores individuales resultaron exageradamente grandes, sugiriendo la inconveniencia de su uso. Dada la característica común de estos dos métodos, en esta parte del análisis, no sufrirán ninguna variación y el primero seguirá siendo un procedimiento adecuado mientras que el segundo continuará siendo malo, pero los demás métodos sí puede mejorar al ajustarlos al total de la población, o lo que es lo mismo, ajustar las proporciones para que éstas sumen uno.

En los cuadros 19 y 20 se encuentran los errores porcentuales de las proyecciones de cada área menor, las cuales variaron más en la medida que el error total que aparecía en los cuadros 16 y 17 fuese mayor, y esto mismo se refleja en los resultados globales del cuadro 21.

En el caso de Venezuela, al comparar el cuadro 21 con el 18 del punto anterior, se aprecia que los resultados variaron muy ligeramente, a excepción de los obtenidos con la exponencial modificada y la Gompertz, donde se observan mejoras apreciables en todas las medidas, pero sobresalen especialmente las siguientes:

- Sólo el 20% de las desviaciones obtenidas a partir de la Gompertz y la Exponencial modificada son mayores del 10%.
- El elevado valor de X^2 en estas mismas curvas y del promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación, se deben a los exagerados errores obtenidos en la proyección del Distrito Justo Briceño, que fue de 47.85% con la exponencial modificada y 48.16% con la Gompertz.

Por otra parte, las mejores técnicas continúan siendo la lineal, la exponencial y la logística con asíntotas .002 y .5, aunque de acuerdo al X^2 , la exponencial sería la mejor en los dos países; sin embargo, de acuerdo al promedio de los valores absolutos, de los porcentajes de desviación, en el caso de Colombia nuevamente la exponencial es la mejor técnica, pero en Venezuela es la lineal.

Cuadro 19

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS ESTIMACIONES DE LA POBLACION, A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, AJUSTADAS A LA UNIDAD, POR METODO SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG.a/	LOG.2a/	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
CARMEN DE VIVORAL	-24.48	11.37	-22.52	22.10	-32.40	-18.75	-18.91
CONCEPCION	13.50	38.51	13.95	13.41	3.94	-22.30	-16.25
GUARNE	-8.36	-9.47	-9.05	-9.48	-8.51	-2.10	-2.73
LA CEJA	-0.23	-12.07	-0.64	-0.98	-5.27	-2.94	-3.87
LA UNION	-9.99	21.55	-8.51	-8.74	-47.19	19.45	18.42
MARINILLA	2.38	-14.40	2.27	2.09	17.49	-22.93	-22.49
PENOL	3.34	28.93	3.87	3.53	0.18	-2.52	-2.66
RIONEGRO	5.58	-16.22	5.16	5.97	13.33	14.54	15.36
SAN VICENTE	18.89	15.57	18.01	17.46	20.35	20.11	19.31
SANTUARIO	7.05	16.42	6.41	5.95	8.76	4.27	3.42

Fuente: Cuadros 2 y A7

Nota: a/ La primera logística se definió con asíntotas 0 y 1 mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.002 y 0.5

Cuadro 20

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LAS ESTIMACIONES DE LA POBLACION, A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, AJUSTADAS A LA UNIDAD, POR METODO SEGUN DISTRITO

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG. a/	LOG. 2a/	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
ANDRES BELLO	18.84	1.69	18.45	17.90	-27.11	5.32	4.68
ARZOBISPO CHACON	14.57	80.59	19.82	19.06	22.99	14.67	14.26
CAMPO ELIAS	4.74	21.45	4.67	3.84	19.21	3.67	3.21
JUSTO BRICENO	17.80	51.91	18.96	18.08	-14.28	47.85	48.16
LIBERTADOR	-7.08	-28.38	-8.18	-6.78	-2.64	-5.46	-4.65
MIRANDA	-2.31	11.84	-2.40	-3.24	-21.11	3.23	2.85
RANGEL	8.51	14.41	8.02	7.06	32.55	4.78	4.50
RIVAS DAVILA	0.48	50.89	4.05	3.32	21.17	5.28	4.11
SUCRE	-11.22	35.39	-7.96	-8.41	18.26	-4.32	-5.67
TOVAR	0.03	-6.98	-0.46	-1.25	-3.46	-7.30	-7.57

Fuente: Cuadros 4 y A8

Nota: a/ La primera logística se definió con asíntotas 0 y 1 mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.002 y 0.5.

Cuadro 21

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, PROMEDIO DE LOS VALORES ABSOLUTOS DE LOS PORCENTAJES DE DESVIACION, PORCENTAJE DE DESVIACION POR ENCIMA DEL 5 Y 10%, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES ESTIMACIONES DE POBLACION A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AJUSTADAS A LA UNIDAD POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	PROCEDIMIENTO						
	LINEAL	LOG.c/	LOG.2 c/	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
COLOMBIA							
X ²	3172.89	6892.83	2800.68	2755.85	9223.51	5544.49	5392.69
Error medio	9.38	18.45	9.04	8.97	15.74	12.99	12.34
>5% a/	70.00	100.00	70.00	70.00	80.00	60.00	60.00
>10% a/	30.00	90.00	30.00	30.00	50.00	60.00	60.00
d (+) a/	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	40.00	40.00
mej. a/ b/	10.00	20.00	20.00	10.00	20.00	10.00	10.00
peor a/ b/	0.00	50.00	0.00	10.00	30.00	10.00	0.00
VENEZUELA							
X ²	3483.59	39220.54	3975.38	3385.90	9777.12	6421.10	6345.23
Error medio	8.56	30.35	9.34	8.89	18.28	10.19	9.97
>5% a/	60.00	90.00	60.00	60.00	80.00	60.00	40.00
>10% a/	40.00	80.00	30.00	30.00	80.00	20.00	20.00
d (+) a/	70.00	80.00	60.00	60.00	50.00	70.00	70.00
mej. a/ b/	30.00	10.00	0.00	0.00	20.00	10.00	30.00
peor a/ b/	0.00	60.00	0.00	0.00	30.00	0.00	10.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 19, 20, A7 y A8

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 sub-áreas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo, 60.00, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrió el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

c/ La primera logística se definió con asíntotas cero y uno, mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.002 y 0.05.

Al comparar los cuadros 11 y 21, surgió un resultado muy interesante ya que la estimación obtenida a partir de las proporciones ajustadas o a partir de la proyección de la población ajustada al total por el método exponencial conduce exactamente a las mismas poblaciones (ver cuadros A-3 y A-7 ó A-4 y A-8), resultado que sorprende, pero que puede ser demostrado matemáticamente.

Otro resultado interesante es que, contrariamente a lo que se suele pensar, disponiendo de la población del área mayor proyectada en forma independiente, no siempre es mejor proyectar en forma matemática las proporciones en lugar de la población.

Como se puede observar, para el caso de Colombia en todos los métodos (sin considerar ninguna logística ya que no son comparables en los dos cuadros y la exponencial que ya se mencionó que son iguales), se obtienen mejores resultados según los valores del χ^2 , el promedio de valores absolutos de los porcentajes de desviación, y en general, por las otras medidas en las proyecciones obtenidas a partir de extrapolar la población, si esto se hace a partir de dos puntos.

En el caso de Venezuela, ocurrió lo contrario y se obtuvieron mejores resultados a partir de la proyección de proporciones, a excepción de la curva exponencial la cual no se modifica y la parábola de segundo grado donde sucedió lo mismo que para Colombia.

3. Análisis de otros métodos matemáticos que utilizan criterios específicos para proyectar las proporciones

En este punto se examinarán los resultados de las proyecciones de áreas menores obtenidas por el método de la proporción del Buró de Censos, la tendencia de las proporciones y la participación en el crecimiento, de Pickard, y el método del diferencial de crecimiento, de Naciones Unidas, en sus dos alternativas de aplicación.

Vale la pena recordar que todos estos métodos están diseñados para que la suma de las proyecciones de las áreas menores sea igual a la población del área mayor, por lo cual, estos procedimientos son analizados en una sola etapa.

Cuadro 22

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES POR ALGUNOS METODOS CON CRITERIOS PARTICULARES, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, POR METODO, SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	METODO					
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TENDENCIA DE LAS PROP. DE MODIFIC.	DE LAS PICKARD SIN MOD.	PARTICIP. CRECIM. PICKARD	DIFERENC. NACIONES UNIDAS INDIVID.	CRECIM SUCESIVO
CARMEN DE VIVORAL	-14.76	-14.04	-14.40	-10.26	-22.30	-21.50
CONCEPCION	-7.27	12.39	11.92	14.89	13.59	14.22
GUARNE	4.53	-6.34	-6.70	-6.48	-9.30	- 8.84
LA CEJA	4.91	0.83	1.36	-2.71	-0.84	- 0.30
LA UNION	-16.21	2.57	2.14	-0.48	-8.68	- 8.40
MARINILLA	7.97	-2.46	-2.61	-1.84	2.16	2.40
PEÑOL	-10.57	4.12	3.68	7.87	3.65	3.47
RIONEGRO	6.30	1.56	2.31	-0.53	5.67	5.31
SAN VICENTE	6.05	12.75	12.28	13.15	17.69	16.62
SANTUARIO	-5.88	4.65	4.21	7.23	6.14	5.20

Fuente: Cuadros 2 y A9

Cuadro 23

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES POR ALGUNOS METODOS CON CRITERIOS PARTICULARES, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, POR METODO, SEGUN DISTRITO

MUNICIPIO	METODO					
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TENDENCIA DE LAS PROP. DE MODIFIC.	DE LAS PICKARD SIN MOD.	PARTICIP. CRECIM. PICKARD	DIFERENC. NACIONES UNIDAS INDIVID.	CRECIM SUCESIVO
ANDRES BELLO	17.99	31.92	45.30	18.38	18.22	19.52
ARZOBISPO CHACON	18.39	19.34	17.04	16.96	19.19	20.43
CAMPO ELIAS	5.23	0.88	-1.07	5.26	4.12	4.97
JUSTO BRICENO	26.94	27.15	24.70	19.03	18.35	19.17
LIBERTADOR	-9.25	-10.06	-9.75	-7.79	-7.22	- 6.70
MIRANDA	1.20	2.56	0.58	-1.92	-2.95	- 3.16
RANGEL	8.34	1.26	-0.69	8.70	7.40	7.13
RIVAS DAVILA	3.28	0.99	-0.96	2.19	3.48	3.04
SUCRE	-8.60	-12.14	-13.82	-9.73	-8.35	- 9.49
TOVAR	-0.69	-0.11	-1.63	-0.25	-0.97	- 2.41

Fuente: Cuadros 4 y A10

Cuadro 24

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, PROMEDIO DE LOS VALORES ABSOLUTOS DE LOS PORCENTAJES DE DESVIACION, PORCENTAJE DE DESVIACION POR ENCIMA DEL 5 Y 10%, PORCENTAJE PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES ESTIMACIONES DE POBLACION UTILIZANDO ALGUNOS METODOS QUE EMPLEAN CRITERIOS ESPECIFICOS POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	METODO					
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TENDENCIA DE PICKARD MODIFIC.	PROPORC. PARTICIP. CRECIM. SIN MOD. PICKARD	DIFERENC. NACIONES UNIDAS INDIVID.	CRECIM. SUCESIVO	
COLOMBIA						
X ²	1860.27	1196.09	1212.49	1116.22	2778.63	2544.12
Error medio	8.45	6.17	6.16	6.54	9.00	8.63
>5%	a/ 80.00	40.00	40.00	60.00	70.00	70.00
>10%	a/ 30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
desv.posit.	a/ 50.00	70.00	70.00	40.00	60.00	60.00
mej. proy.	a/ b/ 30.00	0.00	10.00	40.00	0.00	20.00
peor proy.	a/ b/ 50.00	0.00	0.00	20.00	30.00	0.00
VENEZUELA						
X ²	4904.43	7397.33	10301.94	3762.27	3558.25	3853.49
Error medio	9.99	10.64	11.55	9.02	9.03	9.60
>5%	a/ 70.00	50.00	50.00	70.00	60.00	60.00
>10%	a/ 30.00	40.00	50.00	30.00	30.00	30.00
desv.posit.	a/ 70.00	40.00	70.00	50.00	60.00	60.00
mej. proy.	a/ b/ 10.00	20.00	30.00	10.00	20.00	10.00
peor proy.	a/ b/ 0.00	20.00	20.00	20.00	10.00	30.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 22, 23, A9 y A10

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 sub-areas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo, 60.00 significa que en 6 de los 10 casos, ocurrio el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

En los cuadros 22 y 23 se encuentran los errores porcentuales de las proyecciones, donde se observa al igual que en los casos anteriores, que según el área menor e incluso, según el país, una metodología funciona mejor que otra; sin embargo, sobresalen los bajos errores obtenidos por el método de la participación del crecimiento, sugerido por Pickard, donde hay una gran cantidad de proyecciones que se ajustan bastante bien en los dos países, y solamente en las áreas menores, donde anteriormente no se ajustaban los mejores métodos, este error también es significativo.

Por otra parte, en los cuadros 22, 23 y 24, se puede observar que las variaciones entre los dos procedimientos para proyectar la población a partir del diferencial de crecimiento, no son muy grandes y, según el caso, una se comporta mejor que la otra. Sin embargo, entre estos dos procedimientos puede ser preferible utilizar el que calcula cada área menor en forma *individual*, aunque posteriormente se deba ajustar al total del área mayor, pues el procedimiento en el cual la proyección de cada subárea se va obteniendo en forma sucesiva, arrojará resultados que van a depender del orden en que éstas se vayan haciendo.

En cuanto a los resultados obtenidos por el método de Pickard de la tendencia de las proporciones, considerando la modificación que él sugiere para las localidades en las cuales la proporción está aumentando, se puede observar que en el caso de Venezuela, se lograron unos errores inferiores a los obtenidos, cuando no se realiza la modificación, pero en el caso de Colombia esto no sucede, sino que por el contrario, los resultados son muy similares.

Finalmente, el método de la proporción del Buró de Censos, arrojó unos resultados intermedios en ambos países.

En el caso de Colombia, los métodos de la tendencia de las proporciones de Pickard (con o sin la modificación), son los que mejor se ajustan, en general de acuerdo a los indicadores resumen. Es especialmente interesante el bajo porcentaje (comparativamente con todas las estimaciones hechas) de proyecciones con errores por encima del 5 por ciento, lo cual se observa también para el caso de Venezuela, pero aquí, dado los altos porcentajes de error de unas pocas estimaciones, hacen que el valor del χ^2 y del promedio de los valores absolutos de los errores porcentuales se eleven, y sean los más altos dentro de los métodos considerados.

Por su parte, de acuerdo a estas medidas, para el caso de Venezuela los métodos que mejor se ajustaron fueron los del diferencial de crecimiento y especialmente, cuando las proyecciones se obtienen en forma individual para cada distrito, contrariamente a lo que sucedió en el caso de Colombia.

IV. ANALISIS COMPARATIVO DE LOS PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS

Como se pudo apreciar en los dos capítulos anteriores, tratar de definir cuál es el mejor procedimiento es algo muy complejo, pues esto dependía de las subáreas, del país, de si se hacían en forma independiente, individual o corrigiendo las proyecciones de las subáreas para que reprodujeran el total del área mayor, e incluso, del tipo de medida que se utilizará para la evaluación.

Teniendo en cuenta lo anterior, se consideró necesario hacer un análisis global de todos los procedimientos experimentados en este trabajo, para tratar de llegar a algunas conclusiones generales.

Dado que, como ya se había mencionado, el resultado de la evaluación dependía en parte del tipo de medida resumen que se utilizara, se debía seleccionar la o las medidas que ayudaran más en una decisión. En tal sentido, se escogió el promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación, pues esta medida nos da el error promedio que se obtiene con cada metodología, y no está afectada por el tamaño de la población como el estadístico χ^2 .

Por otra parte, podría ser de utilidad conocer en qué porcentaje las proyecciones resultan malas, con errores extremos por encima del 10 por ciento, ya que puede ser preferible un método que arroje la mayor cantidad de resultados buenos, aunque los pocos malos tengan errores muy grandes, por lo cual también se utilizó esta medida.

En el cuadro 25 se presenta un resumen general a partir de los valores obtenidos para estas dos medidas, en todos los métodos y etapas en que fueron desarrollados; en base a éste se desprenden algunos resultados generales y otros más particulares.

Cuadro 25

PROMEDIO DE LOS VALORES ABSOLUTOS DE LOS PORCENTAJES DE DESVIACION
(NUMERO DE DESVIACIONES POR ENCIMA DEL 10% DE CADA DIEZ SUBAREAS):
RESUMEN COMPARATIVO DE TODOS LOS PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS

LA SUMA DE LAS PROYECCIONES DE LAS SUBAREAS							
METODO	NO REPRODUCEN EL TOTAL			II	REPRODUCEN EL TOTAL		
	COLOMBIA	VENEZUELA	TOTAL <u>1/</u>		II	COLOMBIA	VENEZUELA
	<u>CUADRO 8</u>			II	<u>CUADRO 11</u>		
LINEAL	11.01(5)	9.50(5)	10.26(5)	II	8.84(3)	10.77(4)	9.81(3.5)
MURPHY	14.14(7)	8.11(5)	11.13(6)	II	8.85(3)	9.18(3)	9.02(3)
EXPONEN.	16.84(8)	7.96(4)	12.40(6)	II	8.97(3)	8.89(3)	8.93(3)
GRADO-2	18.22(8)	8.92(5)	13.57(6.5)	II	11.77(4)	10.03(5)	10.90(4.5)
EXP. MOD.	13.74(6)	18.45(6)	16.10(6)	II	8.46(3)	18.43(6)	13.45(4.5)
GOMPERTZ	15.32(6)	26.88(6)	21.10(6)	II	9.87(3)	26.77(6)	18.32(4.5)
				II			
	<u>CUADRO 18</u>			II	<u>CUADRO 21</u>		
LINEAL	9.38(3)	8.56(4)	8.97(3.5)	II	9.38(3)	8.56(4)	8.97(3.5)
LOGIST.	18.44(9)	30.32(8)	24.38(8.5)	II	18.45(9)	30.35(8)	24.40(8.5)
LOGIST-2	9.24(3)	9.50(3)	9.37(3)	II	9.04(3)	9.34(3)	9.19(2.5)
EXPONEN.	9.38(3)	9.34(3)	9.36(3)	II	8.97(3)	8.89(3)	8.93(3)
GRADO-2	15.74(5)	18.28(8)	17.01(6.5)	II	15.74(5)	18.28(8)	17.01(6.5)
EXP. MOD.	12.96(6)	13.57(5)	13.27(5.5)	II	12.99(6)	10.19(2)	11.59(4)
GOMPERTZ	12.24(6)	13.45(5)	12.85(5.5)	II	12.34(6)	9.97(2)	11.16(4)
				II			
				II	<u>CUADRO 24</u>		
PROPORCION				II	8.45(3)	9.99(3)	9.22(3)
TEND. MOD.				II	6.17(3)	10.64(5)	8.41(4)
TEN.SIN MO.				II	6.17(3)	11.55(5)	8.86(4)
PARTICIPAC.				II	6.54(3)	9.02(3)	7.78(3)
DIFER.IND.				II	9.00(3)	9.03(3)	9.02(3)
DIFER.SUC.				II	8.63(3)	9.60(3)	9.12(3)
				II			

Fuente: Cuadros 8, 11, 18, 21 y 24

1/ El total representa el promedio entre Colombia y Venezuela.

A. Resultados globales

Al proyectar la población en forma independiente, en general se obtienen mayores errores que los que se encuentran cuando se hace coincidir la suma de la proyección de población de las subáreas a la del área mayor. Pero, esto no es general pues en el caso de Venezuela se obtiene un error medio mayor cuando se ajusta la población, pero a pesar de esto, los errores extremos disminuyen.

A diferencia de lo que algunos autores piensan, si se dispone de la proyección del área mayor, no necesariamente es mejor proyectar por los métodos matemáticos las proporciones en lugar de la población. Más aún, si se utiliza la ecuación exponencial, se obtienen exactamente los mismos resultados al proyectar en forma conjunta la población o las proporciones.

Si se desea proyectar en forma individual la proporción de una localidad, los resultados no van a diferir mayormente de los obtenidos una vez que se ajustan las proporciones a la unidad; incluso, si se proyecta la población, extrapolando individualmente las proporciones de población, con los polinomios de primer (lineal) o segundo grado, la suma de la población de las subáreas reproduce directamente la población del área mayor.

Al utilizar los métodos matemáticos para proyectar la población directamente o indirectamente a partir de las proporciones, en general se obtienen mejores resultados con las curvas que utilizan sólo dos puntos.

Por su parte, los procedimientos que utilizan algunos criterios específicos para proyectar las proporciones o el diferencial del crecimiento, arrojan en general unos resultados muy similares a los que se obtienen con los métodos lineal, exponencial y logística, utilizando las asíntotas .002 y .05, independientemente del número de datos que requieren.

B. Análisis considerando los métodos que arrojan los mejores resultados

Si se desea proyectar la población de las subáreas en forma independiente, de acuerdo a los resultados obtenidos, no se puede ser muy definitivo en decir cuál procedimiento es mejor; sin embargo, en el caso de Colombia se lograron mejores resultados con la lineal, mientras que en Venezuela éstos se lograron con la exponencial. A nivel total, (promedio entre

Venezuela y Colombia) nuevamente resultó mejor la lineal. Sin embargo, se debe mencionar que los resultados de la logística de Murphy en los 3 casos arrojó resultados intermedios entre la lineal y la logística.

Si se proyecta la población de las subáreas en forma conjunta, haciendo coincidir la suma de estas con la población proyectada del área mayor, a nivel total, la exponencial pasó a ser la que arroja los mejores resultados, al igual que para Venezuela, mientras que en el caso de Colombia, a pesar de que la lineal continúa dando las mejores proyecciones, las diferencias con los resultados de la logística de Murphy son ^{prácticamente} inexistentes.

Si se estima la población de las subáreas en forma individual a partir de la proyección matemática de las proporciones, nuevamente aparecen muy pocas diferencias entre la lineal, la exponencial y ahora la logística con asíntotas (.002 y .5); en el caso de Colombia los tres resultados son muy similares considerando las dos medidas resumen. En el caso de Venezuela, de acuerdo al error medio, es mejor la lineal, pero la exponencial y la logística tienen menos valores extremos. A nivel total, ocurre lo mismo que en Venezuela.

Si se estima la población de las localidades en forma conjunta a partir de la proyección matemática de las proporciones, garantizando que éstas sumen uno, los resultados son muy similares a los anteriores pero tanto la logística como la exponencial se mejoran un poco.

Si se estima la población por medio de los procedimientos que proyectan las proporciones de acuerdo a ciertos criterios, o que proyecta el diferencial de crecimiento, las mejores proyecciones se lograron a nivel total con el método de Pickard de la participación en el crecimiento, aunque las diferencias entre los distintos procedimientos considerados aquí no son muy grandes. En el caso de Colombia, el método de la tendencia arrojó los mejores resultados, tanto si se incluía la modificación propuesta por Pickard o si ésta no era incluida. Por su parte, en el caso de Venezuela las mejores proyecciones se lograron con los métodos de la participación en el crecimiento y con el diferencial de crecimiento, utilizando la alternativa de proyectar cada subárea con respecto al resto del área mayor.

En cuanto a los resultados obtenidos por la parábola de segundo grado, la exponencial modificada y la gompertz, se observó que no resultaba muy adecuada

su aplicación en forma general para proyectar la población en forma directa o a partir de la proyección de las proporciones e incluso, después de que los resultados eran ajustados al total "verdadero", ya que, tanto los errores medios como el número de proyecciones con valores extremos, resultaron superiores a los demás métodos.

En forma global, considerando los cinco grupos de proyecciones, a nivel total se obtuvieron los mejores resultados al aplicar el método de la tendencia de las proporciones sugerido por Pickard donde el error medio fue de 8.41 por ciento; lo mismo sucedió para el caso de Colombia, donde el error medio fue de 6.17 por ciento, mientras que en el caso de Venezuela las mejores estimaciones se lograron proyectando independientemente la población con la curva exponencial, encontrándose un error medio de 7.96.

Un resultado muy interesante y que justifica se profundice en él, es el obtenido en la proyección de proporciones por medio de la curva logística, pues, de acuerdo a los errores obtenidos, la buena o mala calidad de las proyecciones depende en forma significativa de las asíntotas que se le asignen. Es así como por ejemplo, el error medio obtenido a nivel total, utilizando la logística ajustando las proporciones para que sumen uno, pasa de 9.19 por ciento a 24.4 por ciento y el número de proyecciones extremas pasa de 2.5 a 8.5 (de cada 10) al utilizar la logística con asíntotas .002 y .5 ó 0 y 1, respectivamente.

RESUMEN Y CONSIDERACIONES FINALES

Como se mencionó en un principio, el objetivo general de este trabajo era examinar y evaluar la mayor cantidad de los métodos que se han desarrollado para proyectar el total de la población de las áreas menores, con el fin de determinar cuál de todas estas metodologías era la más apropiada para ser utilizada en los países de América Latina.

Para cumplir con este objetivo, en el primer capítulo se describieron cada uno de los procedimientos que se han utilizado para proyectar la población de las subáreas: métodos de proyección de la población absoluta, métodos que utilizan proporciones, métodos demográficos, métodos económicos y otros métodos, con el fin de apreciar sus diferencias, el comportamiento que suponen y los datos básicos que requieren para su aplicación. Sin embargo, esto no se hizo con el mismo nivel de detalle, sino que por el contrario, los dos primeros tipos de métodos se desarrollaron en forma más detallada que los últimos, pues el objetivo específico de este trabajo se refería a los primeros tipos de métodos, pero se consideró conveniente hacer una sucinta reseña de los otros tres tipos de técnicas para dar, por un lado, un panorama general de todos los tipos de procedimientos y por el otro, para resaltar por qué razón, especialmente en los países en desarrollo, se recurre en general a los primeros.

En el segundo capítulo se examinaron los métodos matemáticos para proyectar la población de cada subárea en dos etapas; inicialmente, se proyectó en forma independiente la población, con el fin de determinar cuál procedimiento arrojaba los mejores resultados cuando sólo se disponía de la información de las subáreas en dos o tres momentos, encontrándose que todos los métodos conducen a errores bastante grandes, pero en general, se obtienen mejores resultados con aquellos que utilizan solo dos puntos.

Posteriormente, se examinaron los mismos procedimientos para determinar cuál resultaba mejor si se disponía adicionalmente de la población ya proyectada del área mayor, donde se observó que todos los métodos se mejoran en forma general y que los métodos que arrojan los mejores resultados eran los mismos que en la etapa anterior.

En el tercer capítulo se evaluaron los procedimientos que estiman la población de las localidades a partir de proporciones entre la población de la subárea y la población del área mayor, por lo cual para su aplicación era indispensable disponer previamente de la población del área mayor proyectada. La evaluación en este capítulo se dividió en tres etapas: en la primera se examinaron los resultados de proyectar con los métodos matemáticos, en forma individual, las proporciones de cada una de las localidades, con el fin de tener presente los errores que se podrían encontrar al utilizar alguna de estas metodologías en forma aislada para alguna(s) localidad(es); aquí se observó que en todos los procedimientos los errores también eran muy grandes, y nuevamente las proyecciones eran mejores cuando se utilizaban las técnicas que utilizaban dos puntos (exceptuando el caso de la logística con asíntotas 0 y 1).

En la segunda parte, se examinaron los mismos procedimientos anteriores, pero proyectando en forma conjunta todas las localidades, esto es, garantizando que la suma de las estimaciones de las subáreas reprodujera la población proyectada del área mayor, donde se observó que en general aunque los resultados se mejoraron, las diferencias no son muy grandes con respecto a la etapa anterior.

Posteriormente, en la tercera parte se evaluaron algunos procedimientos que utilizan ciertos criterios específicos para la proyección de las proporciones, en los cuales se encontró que todos arrojaban resultados muy similares a los obtenidos por los mejores procedimientos en las etapas anteriores.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentaron algunos resultados del análisis comparativo de todos los procedimientos considerados en este trabajo, donde se evidencia nuevamente, como al proyectar la población de áreas menores por métodos que asumen una tendencia al futuro genera una serie de errores, a nivel general.

Sin embargo al considerar particularmente cada subárea, se encontró, como era de esperarse, que en los casos donde las áreas menores continuaban una suave evolución en la tendencia de su crecimiento, se obtenían buenos resultados, por lo general en todos los métodos. Por el contrario, en los casos donde el comportamiento de una subárea cambiaba de tendencia, ninguno de los métodos examinados llevó a una proyección razonable, pues estos procedimientos extrapolan la tendencia observada.

Finalmente, se debe tener presente, que la población de las áreas menores están sujetas a fluctuaciones las cuales se pueden deber principalmente a tres razones:

- Variación de algún (os) componente (s) del crecimiento: la variable que más influye en el cambio o fluctuaciones que presenta el crecimiento de una localidad, es la migración, la cual depende en gran medida de la situación socio-económica por la que atraviesa una subárea o las localidades vecinas y debido a que en los países en desarrollo no se cuenta con la información de las variaciones en este componente, no es posible proyectarla, como se mencionó al examinar los métodos demográficos y económicos. Sin embargo, si fuese posible lograr determinar cuáles subáreas son de atracción o de expulsión, esto serviría para facilitar la decisión en el sentido de cual curva utilizar en la proyección, pues en principio se puede decir que si la fecundidad ha disminuido a nivel general, posiblemente sea más indicado considerar una curva que implique este comportamiento, pero si alguna localidad es algún foco de atracción, seguramente sería más adecuado utilizar otro tipo de curva.

- Diferencias en las coberturas censales en ciertas localidades: Las diferencias en las coberturas censales es un gran problema que es difícil solucionar, debido al hecho de que el análisis de la cobertura censal se realiza a nivel nacional y/o a nivel regional y/o a nivel urbano-rural y/o desagregado entre las grandes ciudades y el resto, pero no a nivel de cada una de las áreas menores para las que se puede requerir la proyección. Por lo tanto, para corregir los datos censales de las subáreas, se tendría que asumir que la cobertura de cada una de éstas es igual a la del área para la cual se haya hecho el análisis respectivo y aquí entonces, cabría preguntarse si esto es mejor, pues podría suceder que la no cobertura de una región se debiera por ejemplo al hecho de que no fue posible censar una subárea, pero el resto está "correctamente" censada.

- Variaciones en los límites geográficos: Dado que especialmente las áreas menores pueden sufrir modificaciones en sus límites geográficos, se debe hacer una verificación, desagregación o reagrupación en las localidades que hayan sido afectadas.

Dados los tres aspectos anteriores, resultará muy conveniente, como algunos autores han recomendado, que en la elaboración de las proyecciones de áreas menores se involucren personas que conozcan lo que ha sucedido en éstas, cómo ha sido su desarrollo y que posibilidades tiene de crecimiento futuro.

BIBLIOGRAFIA

- Arriaga, Eduardo E., Variaciones sobre un tema de la función logística. (Inédito).
- Bartholomew, H. (1949), The Master Plan for New Orleans. Population City Planning and Zoning Commission, New Orleans, Louisiana.
- Berry, Brian, Population growth in the daily urban systems of the United States, 1980-2000, in U.S. Commission on Population Growth and the American Future. Population Distribution and Policy, Sara Mills Mazie, ed. Vol. V of Commission Research Reports. En Pittenger, op.cit., págs. 112-116.
- Bocaz A., (1953), The Gompertz curve applied to the city of Santiago, Estadística Chilena, Vols. 10, 11 (oct.-nov.).
- _____, The Gompertz curve applied to the growth of the Chilean population, Estadística Chilena, Vol. 7 (julio).
- _____, The population curve of Chile, Estadística Chilena, Vol. 9, (sept.).
- Bogue, Donald J. (1950), A technique for making extensive population estimates. Journal of the American Statistical Association, Vol. 45, págs. 149-163.
- _____ and Duncan, Beverly (1956), A composite method for estimating postcensal populations of small areas by age, sex and color. Paper read at the Third Annual Conference of Business Research, Chicago, April 13-14.
- Bowley, A.L. (1925), Discussion on Dr. Stenvenson's Paper, Journal of the Royal Statistical Society, London, págs. 76-81.
- Brass, W., The relational Gompertz Model of Fertility (inédito).
- _____, An application of the relational Gompertz model of Fertility. (inédito).
- _____, Cuatro lecciones de William Brass, (1977), CELADE, Serie D, No. 91, Santiago, Chile.
- CELADE, Boletín Demográfico No. 32, Santiago de Chile, julio de 1983.
- Croxtton, Frederick y Cowden, Dudley J. (1945), Estadística General Aplicada. Fondo de Cultura Económica, México, 1959.

- Chackiel, Juan, Proyección de la fecundidad: criterios y procedimientos utilizados en el CELADE, en Métodos de Proyecciones Demográficas, CELADE, Serie E, No. 1003, San José, Costa Rica, noviembre 1984.
Colombia, DANE, Censos Nacionales de Población, 1951, 1964, 1973 y 1985.
- Davis, G.R. (1927), The growth curve, Journal of the American Statistical Association, Vol. 22, Sept.
- Dorn, Harold F. (1950), Pitfalls in population forecasts and projections. Journal of the American Statistical Association, Vol. 45, págs. 311-334.
- Erie and Niagara Counties Regional Planning Board (1972), Regional population projections, Erie and Niagara Counties, Grand Island, N.Y. En Pittenger, *op.cit.*
- Genessee-Finger Lakes Regional Planning Board (1971), Regional population distribution and projections, Rochester, N.Y. Citado en Pittenger. *op.cit.*
- Graunt, John (1662), Natural and political observations made upon the bills mortality, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1939.
- Greenberg, Michael, A test of combination of models for projecting the population of minor civil divisions, Economic geography 48,2.
- Hakkert, Ralph, Nucleo de Estudios de Populacao, Universidade de Campinas, Brasil; en: International Population Conference, Florence 1985, IUSSP.
- Instituto Nacional de Estadística y Censos y CELADE (1985), Los censos de población del 80: taller de análisis y evaluación. Buenos Aires.
- Isard, Walter (1960), Methods of Regional Analysis. An introduction to regional science. The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, U.S.A.
- James H., (1929), Estimates of future population, in Population, Land, Values and Government, Vol. 2, New York.
- Kayani, Ashraf (1980), Preparing subnational population projections: A manual for selected indirect methods, CEELADE, Serie B, No. 48, Santiago, Chile.
- Kendiah, V., The use of the relational fertility model parameters in population projections. East West Center (inédito).
- Keyfitz, Nathan (1968), Introduction to the mathematics of population, Addison-Wesley Publishing Co.
- King, Gregory (1696), Natural and political observations and conclusions upon the state and condition of England, ed. 1936.
- Lotka, Alfred J. (1939), Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, No. 5, Santiago, Chile.

- MacLean, J.E. More accurate population estimates by means of logistic curves. Civil Ingeneering, Vol. 22.
- Malthus, Thomas (1798), An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet and other writers. London,, Jhonson, Vol. 2.
- Massachusetts State Planning Board (1938), Population Study of Massachusetts, A Planning Forum, Vol. 2.
- Matterlart, Armand (1964), Manual de Análisis Demográfico, Santiago, Chile.
- Muhsam, H. (1939), A note on migration and Verhulst's logistic curve, Journal of the Royal Statistical Society (London) 102: págs. 445-448.
- Murphy, Propuesta de Murphy para calcular la asíntota superior en la función logística para proyectar población. Presentada por W. Brass. Apuntes de Jorge L. Somoza.
- Naciones Unidas (1982), Estimates and projections of urban, rural and city populations, 1950-2025, The 1980 Assessment, ST/ESA/SER.R.45, New York.
- _____ (1978), Factores determinantes y consecuencias de las tendencias demográficas. Vol. 1. ST/SOA/SER.A/50.
- _____ (1975a), Guidelines for preparing subnational population projections. Economic and Social Commission for Asia and the Pacific, Asian Population Studies, Series No. 32, Bangkok, Thailand.
- _____ (1952), Métodos de cálculo de la población total para fechas corrientes, Manual I de "Manuales sobre métodos de cálculo de la población", ST/SOA/SER.A/10, Nueva York.
- _____ (1975b), Métodos para hacer proyecciones de la población urbana y rural, Manual VIII, ST/ESA/SER.A/55, Nueva York.
- _____ (1956), Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, Manual III, ST/SOA.A/SER.A.
- Newling, Bruce (1968), Population projections for New Jersey to 2000. New York.
- Pearl, Raymond and Lowell, Reed (1920), On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 6, págs. 275-288.
- Petty, William (1691), Political arithmetic; or a discourse concerning the value of lands, people, buildings, London, R. Clavel, 1961.
- Pittenger, Donald (1976), Projecting state and local populations, Ballinger Publishing Company, Cambridge, Mass., USA.

- Plessing (1962), On den Logistiske Kurve og dens anvendelse i praksis Erhvervsokonomisk Tidsskrift, Copenhagen 26 (3), págs. 205-231.
- Prescott, R.D. (1922), Law of growth in forecasting demand, Journal of the American Statistical Association, Vol. 18. Dec.
- Pritchett, H.S. (1891), A formula for predicting the population of the United States, Publications of the American Statistical Association, Boston, 2 (14).
- Pujol, José M. (1985), Apuntes de clase del curso "Proyecciones de Población", CELADE, Santiago, Chile.
- _____ y Chackiel, Juan (1982), Metodologías de las proyecciones de población urbana y rural y población económicamente activa elaboradas por CELADE. Documento presentado en el Seminario de Proyecciones de Población, San José, Costa Rica, en CELADE, "Métodos para proyecciones demográficas", Serie E, No.1003, San José, Costa Rica, 1984.
- Quételet, Adolphe (1835), Sur l'homme et le développement de ses facultés: ou essay de physique sociale. Paris, Bachelier, Vol. 2, págs. 1-20.
- Rhodes, E. (1938), A population growth curve for England and Wales. en: Théorie générale de la population. Congres International de la Population. Paris, Vol. 1, págs. 40-47.
- Rincón, Manuel, Estimaciones y proyecciones de población. CELADE, Serie B. No. 1010, San José, Costa Rica, 1984.
- Rodríguez, Germán (1986), Modelos estadísticos para el análisis de datos demográficos, Apuntes de clase del curso "Métodos Cuantitativos II", CELADE, Santiago de Chile.
- Shryock, Henry S., Jacob, S., Siegel and Associates (1971), The methods and materials of demography. U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, U.S. Printing Office, Washington D.C., pág.775.
- Spiegel, Murray R. (1961), Statistics, Schaum Publishing Co., New York.
- Sussmilch, Johann P. (1775), Die Gottliche Ordnung in den Veranderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode and der Fortpflanzung desselben erwiesen. Berlin.
- Todorovic, Gordana, Some dilemmas appearing at work on population projections of small areas. Demographic Research Center of the Institute for Social Sciences, Beograd, Yugoslavia (sin fecha, posterior a 1980).
- Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y Centro Latinoamericano de Demografía (1985), Diccionario Demográfico Multilingüe, Ediciones Ordina, Lieja, Bélgica.
- U.S. Water Resources Council, 1972 Obbers Projections, Vol. 1, "Concepts, Methodology and summary Data", (Washington D.C.: Government Printing Office, 1974). En Pittenger, op.cit.
- Venezuela, Censos Nacionales de Población, 1950, 1961, 1971 y 1981.

Verhulst, Pierre-Francois (1838), Notice sur le loi que la population suit dans son accroissement. En Correspondence Mathématique et Physique de l'Observatoire de Bruxelles, publicado por A. Quetelet, Vol. 10, págs. 113-121.

Vianelli, Silvio (1935), Evoluzione economica e demografica negli schemi delle curve logistiche. Revista Italiana di Scienze Economiche, Bologna, 7 (3). Págs. 383-444.

_____ (1936), A general dynamic demographic scheme and its application to Italy and the United States, Econometrica (Colorado Springs, Colo.) 4(3). Págs. 269-283.

Zachariah, K.C. (1980), International migration and subnational population projections. En "U.S. Population Projections: Problems and Solutions". Report of the Workshop on Population Projections, Budapest, Hungary 17-28 March, 1980., TCD/SEM.81/3.

_____ Notes on Population Projections, Demographic Training and Research Centre, Chembur, Bombay, India. (Sin fecha, anterior a 1961).

A N E X O S

ANEXO I

FORMULAS PARA DETERMINAR LOS PARAMETROS DE CADA UNA DE LAS ECUACIONES MATEMATICAS UTILIZADAS PARA PROYECTAR LA POBLACION

1. Cambio aritmético o crecimiento lineal

$$P_t = P_0 + gt \quad \text{ó en forma más general} \quad P_t = a + bt$$

a) Si se dispone de 2 puntos

$$g = \frac{P_t - P_0}{t - 0} \quad \text{ó} \quad b = \frac{P_1 - P_0}{t_1 - t_0} \quad \text{y}$$

$$a = P_0 - bt_0$$

b) Si se dispone de una serie de puntos, los parámetros se pueden determinar por el procedimiento de mínimos cuadrados.

$$b = \frac{n \sum(tP) - \sum(t) \sum(P)}{n \sum(t^2) - [\sum(t)]^2} \quad a = \frac{\sum(P) - b \sum(t)}{n}$$

donde n es el número de observaciones.

2. Cambio geométrico o exponencial

$$P_t = P_0 (1 + r)^t \quad \text{ó en forma más general} \quad P_t = ab^t \quad \text{y}$$

$$P_t = P_0 e^{rt} \quad \text{ó en forma más general} \quad P_t = ae^{bt}$$

a) Si se dispone de 2 puntos:

$$r = \sqrt[t-0]{P_t/P_0} - 1 \quad \text{ó}$$

i

$$r = \frac{1}{(t-o)} \ln (P_t/P_o)$$

b) Si se dispone de una serie de puntos, se linealizan las ecuaciones, aplicando logaritmos y luego se utiliza el procedimiento de mínimos cuadrados, obteniendo los parámetros **a** y **b** con las mismas ecuaciones del punto 1. b), de este anexo.

3. Función logística

En su forma general, la logística se define como:

$$P_t = \frac{K}{1 + e^{a+bt}}$$

En esta función, los valores de las constantes **K**, **a** y **b** pueden ser determinados de varias maneras, según si se cuenta o no con la facilidad de un computador y según el número de puntos en el tiempo de que se disponga.

a) Si se tienen 2 puntos, existen dos posibilidades de solución: una es asignar un(os) posible(s) valor(es) para la(s) asíntota(s) superior (e inferior), lo cual produce incertidumbre sobre el(los) valor(es) más razonable(s); o, aplicar la logística de Murphy, la cual, como se mencionó anteriormente ya involucra un juicio sobre el valor de las asíntotas, y debido a la forma como está expresada no requiere determinar ningún parámetro.

b) Si se dispone de 3 puntos en los momentos **o**, **t** y **m** (igualmente espaciados), los parámetros se pueden estimar como:

$$a = \ln \left[\frac{K}{P_o} - 1 \right]$$

$$b = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{P_0 (K - P_t)}{P_t (K - P_0)} \right]$$

$$K = \frac{2 P_0 P_t P_m - P_t^2 (P_0 + P_m)}{P_0 P_m - P_t^2}$$

donde n es el período de tiempo entre los censos.

c) Si se dispone de una larga serie de puntos, Keyfitz (1968)1/ sugiere estimar los valores de K, a y b, por medio de ajustes sucesivos, partiendo de unos valores iniciales arbitrarios de estos parámetros y la serie de valores de la población para un período largo de tiempo. Utiliza un programa iterativo de computación, que va ajustando los parámetros en cada situación, hasta lograr el ajuste de menor suma de cuadrados de desviaciones.

4. La curva de Gompertz

$$P_t = K a^{b^t} \quad \text{ó} \quad \ln P_t = \ln K + (\ln a)b^t$$

a) Si se dispone de 3 puntos igualmente espaciados, los parámetros a, b y K se pueden estimar como:

$$b = \frac{\ln P_2 - \ln P_1}{\ln P_1 - \ln P_0}$$

$$a = \exp \left[\frac{\ln P_2 - \ln P_0}{(b^2 - 1)} \right]$$

$$k = \frac{P_0}{a}$$

1/ Keyfitz, Nathan (1968), Introduction to the mathematics of population, Addison-Wesley Publishing Company, págs. 214-ss.

b) Si se dispone de 3*n puntos igualmente espaciados se pueden estimar los parámetros **a**, **b** y **K** de acuerdo al procedimiento sugerido por Croxton y Cowden (1945) 2/ y aplicado por Pittenger (1976). 3/

$$b = \sqrt[n]{(\sum_3 \log P - \sum_2 \log P) / (\sum_2 \log P - \sum_1 \log P)}$$

$$\log a = (\sum_2 \log P - \sum_1 \log P) (b - 1) / (b^n - 1)^2$$

$$\log K = \frac{1}{n} \left[\sum_1 \log P - \left(\frac{b^n - 1}{b - 1} \right) \log a \right]$$

donde, $\sum_1 (\log P)$, $\sum_2 (\log P)$ y $\sum_3 (\log P)$ representan la sumatoria de los logaritmos de la población en **n** censos sucesivos (en el caso de Pittenger, dado que disponía de 12 censos y necesitaba 3 puntos, sumó en cada grupo 4 censos consecutivos).

Keyfitz (1968)4/ por su parte, sugiere que los parámetros sean estimados en un proceso iterativo utilizando un programa de computador.

5. Curva exponencial modificada

$$P_t = K + ab^t$$

a) Si se dispone de 3 puntos en los momentos **o**, **t** y **m**, los cuales se encuentran igualmente espaciados, los parámetros **a**, **b** y **K** se pueden estimar como:

$$b = \frac{P_m - P_t}{P_t - P_o}$$

2/ Croxton, Frederick y Cowden, Dudley J., (1945), Estadística General Aplicada, Fondo de Cultura Económica, México, 1959.

3/ Pittenger, Donald (1976), Projecting Stgate and Local Population, Ballinger Publishing Company, Cambridge, Mass., USA.

4/ keyfitz (1968), op.cit.

$$a = \frac{P_m - P_o}{b^2 - 1}$$

$$K = P_o - a$$

b) Si se dispone de más puntos, los parámetros **a**, **b** y **K** pueden ser estimados en la misma forma que se presenta para la curva de Gompertz.

6. Curvas polinómicas

$$P_t = a + bt + ct^2 + \dots + Kt^n$$

- a) Si se dispone de 2 puntos, ver numeral 1 'Cambio aritmético o crecimiento lineal'.
- b) Si se dispone de 3 puntos, en los momentos **o**, **m** y **K**, se puede definir la ecuación de cálculo de la proyección como:

$$P_t = P_o + \left(\frac{P_m - P_o}{m - o} \right) * (t - o) + \left[\left(\frac{P_K - P_o}{K - o} \right) - \left(\frac{P_m - P_o}{m - o} \right) \right] * \left(\frac{(t - o)(t - m)}{(K - m)} \right)$$

- c) Si se dispone de 4 puntos igualmente espaciados, para estimar los parámetros **a**, **b**, **c** y **d** de un polinomio de tercer grado, se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_o &= a + bt_o + ct_o^2 + dt_o^3 \\ P_1 &= a + bt_1 + ct_1^2 + dt_1^3 \\ P_2 &= a + bt_2 + ct_2^2 + dt_2^3 \quad \text{y} \\ P_3 &= a + bt_3 + ct_3^2 + dt_3^3 \end{aligned}$$

Es conveniente para facilitar los cálculos, asumir que el primer año para el cual se dispone de la información es cero, el segundo uno, y así sucesivamente.

- d) Si se dispone de una serie de puntos igualmente espaciados y se quieren ajustar a una parábola de segundo grado, se puede utilizar el procedimiento de mínimos cuadrados, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(P) = Na + b \sum (t) + c \sum (t^2)$$

$$(tP) = a \sum (t) + b \sum (t^2) + c \sum (t^3)$$

$$(t^2P) = a \sum (t^2) + b \sum (t^3) + c \sum (t^4)$$

donde N es el número de puntos que se tienen.

Para la solución de estas ecuaciones es conveniente asumir al año central para el cual se dispone de la población como año cero, el siguiente como año uno, el anterior como año menos uno y así sucesivamente.

- e) Si se dispone de una serie de puntos y se quieren ajustar a una parábola de tercer grado, se utiliza al igual que en el caso anterior, el procedimiento de mínimos cuadrados, resolviendo un sistema de 4 ecuaciones similares al anterior pero con 4 variables.

ANEXO II

RESULTADOS DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION POR CADA UNO DE
LOS METODOS UTILIZADOS

Cuadro A1

Colombia, Antioquia, Valle del Río Negro: Proyecciones matemáticas de la
población, al 15 de octubre de 1985, por método según municipio

MUNICIPIO	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
V.DEL RIO NEGRO(SUMA)	257253	270250	277779	275599	257406	280310
CARMEN DE VIVORAL	25585	25426	25815	24993	26624	26595
CONCEPCION	7616	7657	7840	7687	6956	6928
GUARNE	22405	23268	23961	24018	24407	24611
LA CEJA	29452	31425	32403	31250	30421	30172
LA UNION	13592	13554	13821	11598	12737	12659
MARINILLA	32560	35260	36363	37865	41251	45009
PENOL	15826	15876	16242	16309	15220	15196
RIONEGRO	59687	65693	67740	67590	67822	69739
SAN VICENTE	24452	25480	26246	26418	23859	23854
SANTUARIO	26078	26611	27348	27871	26109	26188

Fuente: Cuadros 2 y 3

Cuadro A2

Venezuela, Mérida: Proyecciones matemáticas de la población al 20 de
octubre de 1981, por método según distrito

DISTRITO	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
MERIDA (SUMA)	418385	434651	443980	431584	451553	466632
ANDRES BELLO	33382	35165	36061	28409	30506	29094
ARZOBISPO CHACON	17131	17060	17148	17055	17096	17095
CAMPO ELIAS	36295	36432	37144	39154	43169	44942
JUSTO BRICENO	23412	23335	23695	20233	22120	21991
LIBERTADOR	135321	146381	150127	147279	154253	156317
MIRANDA	22473	22585	23036	20634	21351	21127
RANGEL	18124	18386	18797	20574	32653	46416
RIVAS DAVILA	16892	16802	16934	18002	13969	14087
SUCRE	22600	22487	22645	25335	21140	21126
TOVAR	92755	96018	98393	94909	95296	94439

Fuente: Cuadros 4 y 5

Cuadro A3

Colombia, Antioquia, Valle del Río Negro: Proyecciones matemáticas de la población de los municipios, al 15 de octubre de 1985, contolando por el total de la población del área mayor a dicha fecha, por método según municipio

MUNICIPIO	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
CARMEN DE VIVORAL	24286	22974	22693	22145	23606	23115
CONCEPCION	7229	6918	6892	6810	6167	6021
GUARNE	21267	21024	21063	21280	21640	21390
LA CEJA	27956	28394	28484	27689	26972	26223
LA UNION	12901	12247	12149	10276	11293	11003
MARINILLA	30906	31860	31965	33549	36575	39119
PENOL	15022	14345	14278	14451	13495	13207
RIONEGRO	56655	59357	59548	59886	60134	60613
SAN VICENTE	23210	23023	23072	23407	21154	20733
SANTUARIO	24753	24044	24040	24694	23150	22761

Fuente: Cuadros 2, 3 y A1

Cuadro A4

Venezuela, Mérida: Proyecciones matemáticas de la población de los distritos al 20 de octubre de 1981, contolando por el total de la población del área mayor a dicha fecha, por método, según distrito

DISTRITO	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
ANDRES BELLO	36651	37164	37311	30238	31033	28641
ARZOBISPO CHACON	18809	18030	17742	18153	17392	16828
CAMPO ELIAS	39849	38504	38431	41674	43915	44241
JUSTO BRICENO	25705	24662	24516	21535	22503	21648
LIBERTADOR	148575	154703	155327	156758	156920	153881
MIRANDA	24674	23869	23834	21962	21720	20797
RANGEL	19899	19431	19448	21899	33218	45693
RIVAS DAVILA	18546	17757	17521	19161	14211	13867
SUCRE	24814	23765	23429	26965	21505	20796
TOVAR	101839	101477	101802	101017	96944	92968

Fuente: Cuadros 4, 5 y A2

Cuadro A5

Colombia, Antioquia, Valle del Río Negro: Estimación de la población a partir de la proyección de la proporción de población de las áreas menores en la mayor al 15 de octubre de 1985, por método, según municipio

MUNICIPIO	PROCEDIMIENTO						
	LINEAL	LOG. <u>a</u> /	LOG-2 <u>b</u> /EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ	
V.DEL RIO NEGRO (SUMA)	244185	244139	246045	247222	244186	245322	247348
CARMEN DE VIVORAL	22002	32438	22743	22976	19694	23780	23929
CONCEPCION	6898	8415	6978	6978	6316	4744	5155
GUARNE	21324	21062	21325	21325	21290	22886	22926
LA CEJA	28701	25289	28800	28838	27251	28051	28012
LA UNION	11983	16180	12273	12300	7031	15976	15970
MARINILLA	32054	26796	32264	32363	36787	24241	24583
PENOL	14251	17777	14433	14454	13816	13507	13597
RIONEGRO	59330	47074	59544	60288	63683	64664	65665
SAN VICENTE	23353	22696	23358	23359	23640	23704	23740
SANTUARIO	24289	26412	24327	24339	24678	23769	23771

Fuente: Cuadros 12 y 13

a/ asintotas 0 y 1

b/ asintotas 0.002 y .05

Cuadro A6

Venezuela, Mérida: Estimación de la población a partir de la proyección de la proporción de población de las áreas menores a la mayor, al 20 de octubre de 1981, por método, según distrito

DISTRITO	PROCEDIMIENTO						
	LINEAL	LOG. <u>a</u> /	LOG-2 <u>b</u> /EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ	
MERIDA (SUMA)	459361	459186	461745	465930	459361	487152	488334
ANDRES BELLO	37607	32167	37806	37844	23066	35345	35217
ARZOBISPO CHACON	17074	26902	17948	17996	18328	18122	18102
CAMPO ELIAS	38763	44932	38939	38981	44117	40689	40605
JUSTO BRICENO	24459	31527	24828	24866	17797	32553	32701
LIBERTADOR	154817	119293	153782	157548	162213	167056	168884
MIRANDA	24062	27536	24165	24175	19432	26964	26931
RANGEL	19712	20775	19725	19726	24079	20187	20180
RIVAS DAVILA	17039	25578	17736	17772	20549	18934	18768
SUCRE	22712	34620	23666	23764	30253	25957	25653
TOVAR	103116	95856	103150	103258	99527	101345	101293

Fuente: Cuadros 14 y 15

a/ asintotas 0 y 1

b/ asintotas 0.002 y .05

Cuadro A7

Colombia, Antioquia, Valle del Río Negro: Estimación de la población a partir de la proyección de la proporción de población de las áreas menores en la mayor, al 15 de octubre de 1985, ajustando la suma de las proporciones al cien por ciento, por método, según municipio

MUNICIPIO	PROCEDIMIENTO						
	LINEAL	LOG a/	LOG-2 b/EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ	
CARMEN DE VIVORAL	22002	32444	22571	22694	19694	23670	23623
CONCEPCION	6898	8417	6925	6892	6316	4722	5089
GUARNE	21324	21066	21164	21063	21290	22780	22633
LA CEJA	28701	25294	28582	28484	27251	27921	27654
LA UNION	11983	16183	12181	12149	7031	15902	15766
MARINILLA	32054	26801	32020	31965	36787	24129	24268
PENOL	14251	17780	14324	14278	13816	13444	13424
RIONEGRO	59330	47083	59094	59548	63683	64365	64826
SAN VICENTE	23353	22701	23181	23072	23640	23594	23436
SANTUARIO	24289	26417	24144	24040	24678	23659	23467

Fuente: Cuadros 12, 13 y A5

a/ asíntotas 0 y 1

b/ asíntotas 0.002 y .05

Cuadro A8

Venezuela, Mérida: Estimación de la población a partir de la proyección de la proporción de población de las áreas menores en la mayor, al 20 de octubre de 1981, ajustando la suma de las proporciones al cien por ciento, por método, según distrito

DISTRITO	PROCEDIMIENTO						
	LINEAL	LOG a/	LOG-2 b/EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ	
ANDRES BELLO	37607	32180	37610	37311	23066	33329	33127
ARZOBISPO CHACON	17074	26912	17855	17742	18328	17088	17028
CAMPO ELIAS	38763	44949	38738	38431	44117	38368	38196
JUSTO BRICENO	24459	31539	24699	24516	17797	30696	30761
LIBERTADOR	154817	119338	152988	155327	162213	157525	158865
MIRANDA	24062	27546	24041	23834	19432	25426	25333
RANGEL	19712	20783	19624	19448	24079	19035	18983
RIVAS DAVILA	17039	25588	17645	17521	20549	17854	17654
SUCRE	22712	34633	23544	23429	30253	24477	24131
TOVAR	103116	95893	102617	101802	99527	95563	95284

Fuente: Cuadros 14, 15 y A6

a/ asíntotas 0 y 1

b/ asíntotas 0.002 y .05

Cuadro A9

Colombia, Antioquia, Valle del Río Negro: Proyección de la población de las áreas menores, al 15 de octubre de 1985, por método, según municipio

MUNICIPIO	PROCEDIMIENTO					CRECIM. NACIONES UNIDAS INDIVID.SUCESIVO
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TENDENCIA DE LAS PROPORC. MODIFIC.	DE LAS PICKARD SIN MOD.	PARTICIP. CRECIMIEN PICKARD	DIFERENC. NACIONES UNIDAS	
CARMEN DE VIVORAL	24833	25042	24937	26143	22635	22870
CONCEPCION	5635	6830	6801	6982	6903	6941
GUARNE	24324	21793	21709	21762	21106	21213
LA CEJA	30180	29005	29156	27986	28524	28680
LA UNION	11154	13655	13598	13249	12157	12195
MARINILLA	33807	30540	30493	30734	31985	32060
PENOL	12333	14359	14299	14877	14294	14270
RIONEGRO	59733	57070	57493	55899	59381	59179
SAN VICENTE	20832	22147	22054	22225	23118	22908
SANTUARIO	21355	23744	23645	24331	24084	23870

Fuente: Cuadro 2

Cuadro A10

Venezuela, Mérida: Proyección de la población de las áreas menores al 20 de octubre de 1985, por método, según distrito

DISTRITO	PROCEDIMIENTO					CRECIM. NACIONES UNIDAS INDIVID.SUCESIVO
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TENDENCIA DE LAS PROPORC. MODIFIC.	DE LAS PICKARD SIN MOD.	PARTICIP. CRECIMIEN PICKARD	DIFERENC. NACIONES UNIDAS	
ANDRES BELLO	37338	41745	45980	37462	37410	37823
ARZOBISPO CHACON	17642	17784	17442	17429	17761	17947
CAMPO ELIAS	38943	37334	36615	38956	38534	38847
JUSTO BRICENO	26356	26399	25890	24714	24571	24742
LIBERTADOR	151202	149858	150367	153630	154587	155452
MIRANDA	24926	25260	24774	24158	23905	23852
RANGEL	19681	18396	18041	19746	19510	19462
RIVAS DAVILA	17514	17125	16795	17329	17548	17474
SUCRE	23381	22480	22047	23095	23446	23154
TOVAR	102377	102979	101411	102837	102089	100609

Fuente: Cuadro 4

Cuadro All

Colombia, Antioquia, Valle del Río Negro: Tasas de crecimiento exponencial de la población, por periodo, según municipio (por cien).

MUNICIPIO	PERIODO			
	51-64	64-73	73-85	51-73
VALLE DEL RIO NEGRO	2.12	2.54	1.57	2.30
CARMEN DE VIVORAL	1.26	0.88	1.89	1.10
CONCEPCION	1.87	1.64	-0.49	1.77
GUARNE	2.20	2.60	2.36	2.36
LA CEJA	3.38	3.17	2.18	3.30
LA UNION	3.72	1.22	0.91	2.69
MARINILLA	1.53	3.45	2.20	2.32
PENOL	1.42	1.54	0.18	1.47
RIONEGRO	2.58	3.73	2.17	3.06
SAN VICENTE	2.15	2.68	0.26	2.37
SANTUARIO	1.62	2.15	0.59	1.18

Fuente: Cuadro 2

Cuadro A12

Venezuela, Mérida: tasas de crecimiento exponencial la población, por periodo, según distrito (por cien)

DISTRITO	PERIODO			
	50-61	61-71	71-81	50-71
MERIDA	2.42	2.33	2.81	2.38
ANDRES BELLO	10.45	3.14	1.83	6.72
ARZ. CHACON	0.38	0.32	-1.09	0.35
CAMPO ELIAS	0.70	1.62	1.58	1.17
JUSTO BRICENO	3.50	1.14	-0.18	2.30
LIBERTADOR	3.33	3.72	4.77	3.53
MIRANDA	3.56	1.68	2.35	2.60
RANGEL	0.29	2.07	1.73	1.20
RIVAS DAVILA	-0.22	0.51	0.52	0.15
SUCRE	-0.85	0.45	1.67	-0.19
TOVAR	3.22	2.70	3.17	2.95

Fuente: Cuadro 4

Cuadro A13

Colombia, Antioquia, Valle del Río Negro: Tasas de crecimiento exponencial de las proporciones, por período, según municipio (por cien).

MUNICIPIO	PERIODO			
	51-64	64-73	73-85	51-73
CARMEN DE VIVORAL	-0.87	-1.66	0.32	-1.20
CONCEPCION	-0.26	-0.90	-2.06	-0.52
GUARNE	0.07	0.06	0.79	0.07
LA CEJA	1.26	0.63	0.61	1.00
LA UNION	1.60	-1.32	-0.66	0.39
MARINILLA	-0.60	0.91	0.63	0.03
PENOL	-0.70	-1.00	-1.39	-0.82
RIONEGRO	0.45	1.19	0.61	0.76
SAN VICENTE	0.03	0.14	-1.31	0.07
SANTIUARIO	-0.50	-0.40	-0.98	-0.46

Fuente: Cuadro 2

Cuadro A14

Venezuela, Mérida: Tasas de crecimiento exponencial de las proporciones, por período, según distrito (por cien)

DISTRITO	PERIODO			
	50-61	61-71	71-81	50-71
ANDRES BELLO	8.03	0.81	-0.98	4.35
ARZ. CHACON	-2.05	-2.01	-3.90	-2.03
CAMPO ELIAS	-1.73	-0.71	-1.23	-1.21
JUSTO BRICENO	1.08	-1.19	-3.00	-0.08
LIBERTADOR	0.91	1.39	1.95	1.15
MIRANDA	1.14	-0.65	-0.46	0.23
RANGEL	-2.14	-0.26	-1.09	-1.18
RIVAS DAVILA	-2.64	-1.82	-2.29	-2.22
SUCRE	-3.28	-1.88	-1.14	-2.56
TOVAR	0.79	0.37	0.36	0.58

Fuente: Cuadro 14

Este documento se complementa con :

Programas de computador usados en la elaboración de este
y diseño para su aplicación.

PAGINAS POCO CLARAS PARA MICROFILMACION

CONSULTAR DOCUMENTO ORIGINAL

```

940 FOR I=1 TO F-1
950 S13=S13+X2LA(I):S14=S14+X2MA(I):S15=S15+X2EA(I):S16=S16+X2GA(I)
960 S17=S17+X2EMA(I):S18=S18+X2GA(I):NEXT I
970 'SALIDA DE DATOS (OUTPUT)'
980 L$=" 8888888888" :P$=" 8888.88 " :M$=" 8888888.88"
990 PRINT 22," INFORMACION BASICA DE LOS CENSOS DE POBLACION"
1000 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1010 PRINT 22," CENSO1 CENSO2 CENSO3 CENSO4" :PRINT 22," "
1020 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT 22,USING L$;A(I,J);
1030 NEXT J : PRINT 22," " : NEXT I : PRINT 22," " :PRINT 22," "
1040 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1050 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1060 PRINT 22," INFORMACION BASICA DE LOS CENSOS DE POBLACION AJUSTADOS A AÑOS I
GUALMENTE ESPACIADOS"
1070 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1080 PRINT 22," CENSO1 CENSO2 CENSO3 CENSO4" :PRINT 22," "
1090 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT 22,USING L$;E(I,J);
1100 NEXT J : PRINT 22," " : NEXT I : PRINT 22," " :PRINT 22," " :PRINT 22," "
1110 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1120 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1130 PRINT 22,"PROYECCION MATEMATICAS DE LA POBLACION"
1140 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1150 PRINT 22,"PROYECCION DEL TOTAL DE LA POBLACION POR SUMA DE LAS AREAS MENORE
S"
1160 PRINT 22," "
1170 PRINT 22," LINEAL MURPHY EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMBERTZ "
1180 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1190 PRINT 22,USING L$+L$+L$+L$+L$+L$;S1,S2,S3,S4,S5,S6
1200 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1210 PRINT 22,"PROYECCION DE LA POBLACION, POR METODO "
1220 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1230 PRINT 22," LINEAL MURPHY EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMBERTZ "
1240 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1250 FOR I=1 TO F : PRINT 22,USING L$+L$+L$+L$+L$+L$;LINEAL(I),MURPHY(I),EP(I),G
RADO2(I),EPMO(I),GOMB(I)
1260 NEXT I :PRINT 22," " : PRINT 22," "
1270 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1280 PRINT 22," ERROR PORCENTUAL DE LA PROYECCION " : PRINT 22," "
1290 PRINT 22," LINEAL MURPHY EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMBERTZ " :
PRINT 22," " :PRINT 22," "
1300 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO 6 : PRINT 22,USING P$;DIF(I,J);
1310 NEXT J : PRINT 22," " : NEXT I : PRINT 22," " :PRINT 22," " :PRINT 22," "
1320 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1330 PRINT 22," PROYECCIONES AJUSTADAS DE LAS PROPORCIONES" : PRINT 22," "
1340 PRINT 22," LINEAL MURPHY EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMBERTZ " : PRIN
T 22," "
1350 FOR I=1 TO F-1 : PRINT 22,USING L$+L$+L$+L$+L$+L$;LIA(I),MURA(I),SPA(I),GRA
2A(I),EPMOA(I),GOMPA(I)
1360 NEXT I : PRINT 22," " : PRINT 22," "
1370 PRINT 22," " : PRINT 22," "
1380 PRINT 22," ERROR PORCENTUAL DE LA PROYECCION AJUSTADA" : PRINT 22," "
1390 PRINT 22," LINEAL MURPHY EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMBERTZ "
: PRINT 22," "
1400 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO 6 : PRINT 22,USING P$;DIFA(I,J);

```

```

1410 NEXT J : PRINT &2." " : NEXT I : PRINT &2," "
1420 PRINT &2," " : PRINT &2," "
1430 PRINT &2," ESTADISTICO CHI CUADRADO (X2) DE LAS PROYECCIONES" : PRINT &2,"
"
1440 PRINT &2," LINEAL MURPHY EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ " :
PRINT &2," "
1450 PRINT &2,USING M6+M6+M6+M6+M6+M6;S7,S8,S9,S10,S11,S12
1460 PRINT &2," " : PRINT &2," "
1470 PRINT &2," " : PRINT &2," "
1480 PRINT &2," ESTADISTICO CHI CUADRADO (X2) DE LAS PROYECCIONES AJUSTADAS" : P
RINT &2," "
1490 PRINT &2," LINEAL MURPHY EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ "
: PRINT &2," "
1500 PRINT &2,USING M6+M6+M6+M6+M6+M6;S13,S14,S15,S16,S17,S18
1510 PRINT &2," " : PRINT &2," "
1520 PRINT &2," " : PRINT &2," "

```

B. Programa para estimar la población a partir de la proyección de proporciones.

1. Matemáticamente.

```

10 'R.BAS: ESTE PROGRAMA PERMITE ESTIMAR LA POBLACION DE AREAS MENORES PROYEC-
TANDO LA PARTICIPACION DE LA POBLACION DEL AREA MENOR AL AREA MAYOR'
20 CLS : LOCATE 5,10
30 INPUT " NOMBRE DE SU ARCHIVO DE DATOS " : Z1$
40 OPEN Z1$+".DAT" FOR INPUT AS 1
50 OPEN Z1$+".LST" FOR OUTPUT AS 2
60 INPUT &1.F
70 INPUT &1.C : F=F+1
80 DIM A(F,C),FE(3,C),LINEAL(F),MURPHY(F),N(F),D(F),B(F),C(F),E(F),EP(F),Y(F,C)
90 DIM DIE(F,7),LIA(F),MURA(F),EPA(F),DIFA(F,7),B(F),GRADO2(F),GRA2A(F),W(F,C)
100 DIM Z(F,C),H(F),K(F),L(F),M(F),P(F),O(F),GOMP(F),GOMPA(F),EPMO(F),EPMOA(F)
110 DIM X2L(F),X2M(F),X2E(F),X2G2(F),X2EM(F),X2G(F),GL(F),HL(F),LIL(F),LJL(F)
120 DIM X2LA(F),X2MA(F),X2EA(F),X2GA2A(F),X2EMA(F),X2GA(F),LO(F),LOA(F)
130 ' ENTRADA DE DATOS
140 FOR I=1 TO F: FOR J=1 TO C : INPUT &1,Y(I,J) :NEXT J,I
150 FOR I=1 TO 3: FOR J=1 TO C : INPUT &1,FE(I,J) :NEXT J,I
160 FOR I=1 TO F: FOR J=1 TO C : INPUT &1,W(I,J) :NEXT J,I
170 ' PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION'
180 ' CALCULO DE LAS PROPORCIONES
190 FOR I=1 TO F: FOR J=1 TO C
200 A(I,J)=Y(I,J)/Y(F,J):NEXT J:NEXT I
210 FOR I=1 TO F: FOR J=1 TO C
220 Z(I,J)=W(I,J)/W(F,J):NEXT J:NEXT I
230 ' CALCULOS DE LAS FECHAS Y PERIODOS DE TIEMPO'
240 FOR J=1 TO C
250 FECHA(J)=FE(1,J)+(FE(2,J)-1)/12+FE(3,J)/365 : NEXT J

```

```

260 CTE3=(FECHA(4)-FECHA(2))/(FECHA(3)-FECHA(2))
270 CTE1=FECHA(2)-FECHA(1)
280 CTE4=FECHA(3)-FECHA(1)
290 CTE5=FECHA(4)-FECHA(1)
300 ' PROYECCIONES DE LA POBLACION'
310 FOR I=1 TO F-1 : LINEAL(I)=(A(I,2)+(A(I,3)-A(I,2))*CTE3)*Y(F,C) : NEXT I
320 FOR I=1 TO F-1
330 B(I)=A(I,3)/A(I,2) : NEXT I : CTE2=60/(FECHA(3)-FECHA(2))
340 FOR I=1 TO F-1 : D(I)=(LOG((1/A(I,3)-1)/(1/A(I,2)-1)))/((-1)*CTE2*60))
350 MURPHY(I)=(1/(1+(1/A(I,2)-1)*EXP(-D(I)*(FECHA(4)-FECHA(2))))) *Y(F,C)
360 NEXT I
370 FOR I=1 TO F-1 : EP(I)=(A(I,2)*EXP(LOG(B(I))*CTE3))*Y(F,C) : NEXT I
380 FOR I=1 TO F-1
390 GRADO2(I)=(A(I,1)+(A(I,2)-A(I,1))/CTE1*CTE5+((A(I,3)-A(I,1))/CTE4-(A(I,2)-A(I,1))/CTE1)*CTE5*CTE3)*Y(F,C)
400 H(I)=(Z(I,3)-Z(I,2))/(Z(I,2)-Z(I,1))
410 L(I)=(Z(I,3)-Z(I,1))/(H(I)^2-1)
420 K(I)=Z(I,1)-L(I)
430 EPMO(I)=(K(I)+L(I)+H(I)^3)*Y(F,C)
440 M(I)=(LOG(Z(I,3))-LOG(Z(I,2)))/(LOG(Z(I,2))-LOG(Z(I,1)))
450 P(I)=EXP((LOG(Z(I,3))-LOG(Z(I,1)))/(M(I)^2-1))
460 O(I)=Z(I,1)/P(I)
470 GOMP(I)=(O(I)+P(I)^(M(I)^3))*Y(F,C)
480 GL(I)=LOG((.5-A(I,2)))/(A(I,2)-.002))
490 HL(I)=LOG((.5-A(I,3)))/(A(I,3)-.002))
500 LIL(I)=(GL(I)-HL(I))/(FECHA(2)-FECHA(3))
510 LJL(I)=GL(I)-LIL(I)*FECHA(2)
520 LO(I)=(.002+.498/(1+EXP(LJL(I)+LIL(I)*FECHA(4))))*Y(F,C) : NEXT I
530 ' ESTIMACION DE LOS ERRORES PORCENTUALES DE LA ESTIMACION VS. EL CENSO'
540 FOR I=1 TO F-1 : DIF(I,1)=(LINEAL(I)/Y(I,4)-1)*100
550 DIF(I,2)=(MURPHY(I)/Y(I,4)-1)*100
560 DIF(I,3)=(EP(I)/Y(I,4)-1)*100
570 DIF(I,4)=(GRADO2(I)/Y(I,4)-1)*100
580 DIF(I,5)=(EPMO(I)/Y(I,4)-1)*100
590 DIF(I,6)=(GOMP(I)/Y(I,4)-1)*100
600 DIF(I,7)=(LO(I)/Y(I,4)-1)*100
610 NEXT I
620 ' CALCULO DE LA PROYECCION DEL TOTAL, POR SUMA DE LAS AREAS MENORES'
630 S1=0 : S2=0 : S3=0 : S4=0 : S5=0 : S6=0 : S7=0
640 ' AJUSTE DE LAS PROYECCIONES AL TOTAL CORRECTO (CENSO DEL 80)'
650 FOR I=1 TO F-1 : S1=S1+LINEAL(I) : S2=S2+MURPHY(I) : S3=S3+EP(I)
660 S4=S4+GRADO2(I) : S5=S5+EPMO(I) : S6=S6+GOMP(I) : S7=S7+LO(I) : NEXT I
670 FOR I=1 TO F-1 : LIA(I)=(LINEAL(I)/S1)*Y(F,C)
680 MURA(I)=(MURPHY(I)/S2)*Y(F,C)
690 EPA(I)=(EP(I)/S3)*Y(F,C)
700 GRA2A(I)=(GRADO2(I)/S4)*Y(F,C)
710 EPMOA(I)=(EPMO(I)/S5)*Y(F,C)
720 GOMPA(I)=(GOMP(I)/S6)*Y(F,C)
730 LOA(I)=(LO(I)/S7)*Y(F,C)
740 NEXT I
750 ' ESTIMACION DE LOS ERRORES PORCENTUALES DE LA ESTIMACION AJUSTADA VS. EL CENSO'
760 FOR I=1 TO F-1 : DIFA(I,1)=(LIA(I)/Y(I,C)-1)*100
770 DIFA(I,2)=(MURA(I)/Y(I,C)-1)*100
780 DIFA(I,3)=(EPA(I)/Y(I,C)-1)*100
790 DIFA(I,4)=(GRA2A(I)/Y(I,C)-1)*100
800 DIFA(I,5)=(EPMOA(I)/Y(I,C)-1)*100

```

```

805 DIFA(I,6)=(GOMPA(I)/Y(I,C)-1)*100
810 DIFA(I,7)=(LOA(I)/Y(I,C)-1)*100
820 NEXT I
830 ' ESTIMACION DEL ESTADISTICO CHI CUADRADO (X2)'
840 FOR I=1 TO F-1
850 X2L(I)=(LINEAL(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
860 X2M(I)=(MURPHY(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
870 X2E(I)=(EP(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
880 X2G2(I)=(GRADO2(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
890 X2EM(I)=(EPMO(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
900 X2G(I)=(GOMP(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
910 X2LO(I)=(LO(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
920 NEXT I
930 S8=0:S9=0:S10=0:S11=0:S12=0:S13=0:S14=0
940 FOR I=1 TO F-1
950 S8=S8+X2L(I):S9=S9+X2M(I):S10=S10+X2E(I):S11=S11+X2G2(I)
960 S12=S12+X2EM(I):S13=S13+X2G(I):S14=S14+X2LO(I):NEXT I
970 FOR I=1 TO F-1
980 X2LA(I)=(LIA(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
990 X2MA(I)=(MURA(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
1000 X2EA(I)=(EPA(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
1010 X2G2A(I)=(GRA2A(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
1020 X2EMA(I)=(EPMOA(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
1030 X2GA(I)=(GOMPA(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
1040 X2LOA(I)=(LOA(I)-Y(I,4))^2/Y(I,4)
1050 NEXT I
1060 S15=0:S16=0:S17=0:S18=0:S19=0:S20=0:S21=0
1070 FOR I=1 TO F-1
1080 S15=S15+X2LA(I):S16=S16+X2MA(I):S17=S17+X2EA(I):S18=S18+X2G2A(I)
1090 S19=S19+X2EMA(I):S20=S20+X2GA(I):S21=S21+X2LOA(I):NEXT I
1100 'SALEDA DE DATOS (OUTPUT)'
1110 L$="#####" :P$=" ##### " :J$=" ##.##### " :M$=" #####.##"
1120 PRINT #2," INFORMACION BASICA DE LOS CENSOS DE POBLACION"
1130 PRINT #2," " : PRINT #2," "
1140 PRINT #2," CENSO1 CENSO2 CENSO3 CENSO4" :PRINT #2," "
1150 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT #2,USING L$:Y(I,J):
1160 NEXT J : PRINT #2," " : NEXT I : PRINT #2," " :PRINT #2," " :PRINT #2," "
1170 PRINT #2," " : PRINT #2," "
1180 PRINT #2," " : PRINT #2," "
1190 PRINT #2," INFORMACION BASICA DE LOS CENSOS DE FOBLACION AJUSTADOS A ANOS I
GUALMINTNE ESPACIADOS"
1200 PRINT #2," " : PRINT #2," "
1210 PRINT #2," CENSO1 CENSO2 CENSO3 CENSO4" :PRINT #2," "
1220 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT #2,USING L$:W(I,J):
1230 NEXT J : PRINT #2," " : NEXT I : PRINT #2," " :PRINT #2," " :PRINT #2," "
1240 PRINT #2," " : PRINT #2," "
1250 PRINT #2," PROPORCION DE LA FOBLACION DEL AREA MENOR AL AREA MAYOR SEGUN LO
S CENSOS"
1260 PRINT #2," " : PRINT #2," "
1270 PRINT #2," CENSO1 CENSO2 CENSO3 CENSO4" :PRINT #2," "
1280 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT #2,USING J$:A(I,J):
1290 NEXT J : PRINT #2," " : NEXT I : PRINT #2," " :PRINT #2," " :PRINT #2," "
1300 PRINT #2," " : PRINT #2," "
1310 PRINT #2," PROPORCION DE LA FOBLACION DEL AREA MENOR AL AREA MAYOR SEGUN LO
S CENSOS AJUSTADOS A ANOS IGUALMENTE ESPACIADOS Y AJUSTADOS AL TOTAL"
1320 PRINT #2," " : PRINT #2," "

```

```

1330 PRINT £2,"      CENSO1      CENSO2      CENSO3      CENSO4" :PRINT £2," "
1340 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT £2,USING J$;Z(I,J);
1350 NEXT J : PRINT £2," " : NEXT I : PRINT £2," " :PRINT £2," " :PRINT £2," "
1360 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1370 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1380 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1390 PRINT £2,"PROYECCION MATEMATICAS DE LA POBLACION"
1400 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1410 PRINT £2,"PROYECCION DEL TOTAL DE LA POBLACION POR SUMA DE LAS AREAS MENORE
S"
1420 PRINT £2," "
1430 PRINT £2," LINEAL LOGISTICA EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ LOGIST-2
"
1440 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1450 PRINT £2,USING L$+L$+L$+L$+L$+L$+L$;S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7
1460 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1470 PRINT £2,"PROYECCION DE LA POBLACION, POR METODO "
1480 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1490 PRINT £2," LINEAL LOGISTICA EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ LOGIST-2
"
1500 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1510 FOR I=1 TO F : PRINT £2,USING L$+L$+L$+L$+L$+L$+L$;LINEAL(I),MURPHY(I),EP(I
),GRADO2(I),SPMO(I),GOMP(I),LO(I)
1520 NEXT I :PRINT £2," " : PRINT £2," "
1530 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1540 PRINT £2," ERROR PORCENTUAL DE LA PROYECCION " : PRINT £2," "
1550 PRINT £2," LINEAL LOGISTICA EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ LOG
IT-2" : PRINT £2," " :PRINT £2," "
1560 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO 7 : PRINT £2,USING P$;DIF(I,J);
1570 NEXT J : PRINT £2," " : NEXT I : PRINT £2," " :PRINT £2," " :PRINT £2," "
1580 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1590 PRINT £2," PROYECCIONES AJUSTADAS DE LAS PROPOCIONES" : PRINT £2," "
1600 PRINT £2," LINEAL LOGISTICA EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ LOGIST-
2" : PRINT £2," "
1610 FOR I=1 TO F-1 : PRINT £2,USING L$+L$+L$+L$+L$+L$+L$;LIA(I),MURA(I),EPA(I),
GRA2A(I),SPMOA (I), GOMPA (I),LOA(I)
1620 NEXT I : PRINT £2," " : PRINT £2," "
1630 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1640 PRINT £2," ERROR PORCENTUAL DE LA PROYECCION AJUSTADA" : PRINT £2," "
1650 PRINT £2," LINEAL LOGISTICA EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ LO
GIST-2" : PRINT £2," "
1660 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO 7 : PRINT £2,USING P$;DIFA(I,J);
1670 NEXT J : PRINT £2," " : NEXT I : PRINT £2," "
1680 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1690 PRINT £2," ESTADISTICO CHI CUADRADO (X2) DE LAS PROYECCIONES" : PRINT £2,"
"
1700 PRINT £2," LINEAL LOGISTICA EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ LO
GIST-2" : PRINT £2," "
1710 PRINT £2,USING M$+M$+M$+M$+M$+M$+M$;S8,S9,S10,S11,S12,S13,S14
1720 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1730 PRINT £2," " : PRINT £2," "
1740 PRINT £2," ESTADISTICO CHI CUADRADO (X2) DE LAS PROYECCIONES AJUSTADAS" : P
RINT £2," "
1750 PRINT £2," LINEAL LOGISTICA EXPONENCIAL GRADO2 EXP.MODIF GOMPERTZ LO
GIST-2" : PRINT £2," "
1760 PRINT £2,USING M$+M$+M$+M$+M$+M$+M$;S15,S16,S17,S18,S19,S20,S21

```

2. Utilizando algunos criterios especificos para proyectar las proporciones.

```
10 'PI.BAS: ESTE PROGRAMA PERMITE ESTIMAR LA POBLACION DE AREAS MENORES POR LOS
    METODOS DE PICKARD (TENDENCIA AJUSTADA)'
20 CLS : LOCATE 5,10
30 INPUT " NOMBRE DE SU ARCHIVO DE DATOS ";Z1$
40 OPEN Z1$+".DAT" FOR INPUT AS 1
50 OPEN Z1$+".LST" FOR OUTPUT AS 2
60 INPUT $1,F
70 INPUT $1,C : F=F+1
80 DIM A(F,C),FE(3,C),Y(F,C),L(F,C),PROY(F),PROP(F),PROPA(F),D3(F),D4(F),D5(F)
90 DIM DIF(F,7),W(F,C),AUMENTO(F),R(F),INC(F),EST(F)
100 DIM Z(F,C), P(F)
110 DIM X2L(F),X2AP(F)
120 DIM X2LA(F),X2APA(F)
130 ' ENTRADA DE DATOS
140 FOR I=1 TO F: FOR J=1 TO C : INPUT $1,Y(I,J) :NEXT J,I
150 FOR I=1 TO 3: FOR J=1 TO C : INPUT $1,FE(I,J) :NEXT J,I
160 FOR I=1 TO F: FOR J=1 TO C : INPUT $1,W(I,J) :NEXT J,I
170 ' PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION'
180 ' CALCULO DE LAS PROPORCIONES
190 FOR I=1 TO F: FOR J=1 TO C
200 Z(I,J)=W(I,J)/W(F,J)*100:NEXT J:NEXT I
210 ' PROYECCIONES DE LA POBLACION'
220 FOR I=1 TO F-1:FOR J=1 TO 3
230 IF Z(I,3)<Z(I,2) ,THEN L(I,J)=LOG(Z(I,J))
240 IF Z(I,3)>Z(I,2) ,THEN L(I,J)=LOG(100-Z(I,J))
250 NEXT J,I
260 FOR I=1 TO F-1 :D3(I)=L(I,2)-L(I,1) :NEXT I
270 FOR I=1 TO F-1 :D4(I)=L(I,3)-L(I,2) :NEXT I
280 FOR I=1 TO F-1 :D5(I)=(2*D4(I)+D3(I))/3 :NEXT I
290 FOR I=1 TO F-1 :L(I,4)=L(I,3)+D5(I) :NEXT I
300 FOR I=1 TO F-1:P(I)=EXP(L(I,4))/100:NEXT I
310 FOR I=1 TO F-1
320 IF Z(I,3)<Z(I,2),THEN PROP(I)=P(I)
330 IF Z(I,3)>Z(I,2),THEN PROP(I)=1-P(I)
340 NEXT I
350 S1=0:S2=0 :S3=0
360 FOR I= 1 TO F-1:S1=S1+PROP(I)
370 NEXT I
380 FOR I=1 TO F-1:PROPA(I)=PROP(I)/S1 :NEXT I
390 FOR I=1 TO F-1 : PROY(I)=PROPA(I)*W(F,C):NEXT I
```

```

400 FOR I=1 TO F :AUMENTO(I)=W(I,3)-W(I,2) :NEXT I
410 FOR I=1 TO F-1 :R(I)=AUMENTO(I)/AUMENTO(F) :NEXT I
420 FOR I=1 TO F-1:INC(I)=R(I)*(W(F,4)-W(F,3)):NEXT I
430 FOR I=1 TO F-1 :EST(I)=W(I,3)+INC(I) :NEXT I
440 ' ESTIMACION DE LOS ERRORES PORCENTUALES DE LA PROYECCION VS. EL CENSO '
450 FOR I=1 TO F-1 : DIF(I,1)=(PROY(I)/W(I,4)-1)*100
460 DIF(I,2)=(EST(I)/W(I,4)-1)*100
470 NEXT I
480 ' ESTIMACION DEL ESTADISTICO CHI CUADRADO (X2) '
490 FOR I=1 TO F-1
500 X2L(I)=(PROY(I)-W(I,4))^2/W(I,4)
510 X2AP(I)=(EST(I)-W(I,4))^2/W(I,4)
520 NEXT I
530 FOR I= 1 TO F-1:S2=S2+X2L(I) :NEXT I
540 FOR I= 1 TO F-1:S3=S3+X2AP(I) :NEXT I
550 'SALIDA DE DATOS (OUTPUT)'
560 L$="     " :P$="     " :J$="     " :M$="     "
570 PRINT 2," INFORMACION BASICA DE LOS CENSOS DE POBLACION"
580 PRINT 2," " : PRINT 2," "
590 PRINT 2,"     CENSO1     CENSO2     CENSO3     CENSO4" :PRINT 2," "
600 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT 2,USING L$;Y(I,J);
610 NEXT J : PRINT 2," " : NEXT I : PRINT 2," " :PRINT 2," " :PRINT 2," "
620 PRINT 2," " : PRINT 2," "
630 PRINT 2," INFORMACION BASICA DE LOS CENSOS DE POBLACION AJUSTADOS A ANOS IG
UALMENTE ESPACIADOS"
640 PRINT 2," " : PRINT 2," "
650 PRINT 2,"     CENSO1     CENSO2     CENSO3     CENSO4" :PRINT 2," "
660 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT 2,USING L$;W(I,J);
670 NEXT J : PRINT 2," " : NEXT I : PRINT 2," " :PRINT 2," " :PRINT 2," "
680 PRINT 2," " : PRINT 2," "
690 PRINT 2," PROPORCION DE LA POBLACION DEL AREA MENOR AL AREA MAYOR SEGUN LOS
CENSOS AJUSTADOS A ANOS IGUALMENTE ESPACIADOS Y AJUSTADOS AL TOTAL"
700 PRINT 2," " : PRINT 2," "
710 PRINT 2,"     CENSO1     CENSO2     CENSO3     CENSO4" :PRINT 2," "
720 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO C : PRINT 2,USING P$;Z(I,J);
730 NEXT J : PRINT 2," " : NEXT I : PRINT 2," " :PRINT 2," " :PRINT 2," "
740 PRINT 2," " : PRINT 2," "
750 PRINT 2,"PROYECCION DE LA POBLACION POR LOS METODOS DE PICKARD"
760 PRINT 2,"PROYECCION DE LA POBLACION, POR METODO "
770 PRINT 2," " : PRINT 2," "
780 PRINT 2," TENDENCIA APPORTIONMENT "
790 PRINT 2," " : PRINT 2," "
800 FOR I=1 TO F-1 : PRINT 2,USING L$+L$;PROY(I),EST(I)
810 NEXT I :PRINT 2," " : PRINT 2," "
820 PRINT 2," " : PRINT 2," "
830 PRINT 2," ERROR PORCENTUAL DE LA PROYECCION " : PRINT 2," "
840 PRINT 2," TENDENCIA APPORTIONMENT "
850 FOR I=1 TO F : FOR J=1 TO 2 : PRINT 2,USING P$;DIF(I,J);
860 NEXT J : PRINT 2," " : NEXT I : PRINT 2," " :PRINT 2," " :PRINT 2," "
870 PRINT 2," " : PRINT 2," "
880 PRINT 2," ESTADISTICO CHI CUADRADO (X2) DE LAS PROYECCIONES" :PRINT 2," "
890 PRINT 2," " : PRINT 2," "
900 PRINT 2," TENDENCIA APPORTIONMENT "
910 PRINT 2,USING M$+M$;S2,S3

```