INT-0306

60/65

...LIMINAR
Instituto Latinoamericano de
Planificación Económica y Social
Santiago, julio de 1965

APUNTES SOBRE LOS PRINCIPIOS BASICOS DE LA PROGRAMACION LINEAL

Programa de Capacitación, cursos de Programación Lineal. Profesor señor Eligio Alves.

1. Fundamentos y formulación matemática del problema de programación lineal

1.1 La programación se ocupa en general de obtener máximos o mínimos absolutos de una función z de n variables independientes:

$$(1.1.1) \qquad z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$$

cuando estas están sujetas a un conjunto de restricciones o limitaciones dadas por las funciones:

$$(1.1.2) \qquad \begin{cases} q_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \end{cases}$$

y siempre que:

$$(1.1.3) \qquad x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

De este problema se han estudiado los casos de programación lineal, programación cuadrática y ciertas funciones no lineales.

1.2 El enfoque y solución al problema de programación lineal, que es el principal objeto de este curso, consiste en encontrar los máximos o mínimos absolutos de una función lineal (o sea la función objetiva o económica) sujeta a un número finito de restricciones lineales.

En términos matemáticos, se tiene:

Maximizar la función:

$$(1.2.1) \qquad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_j x_j + \ldots\ldots c_n x_n$$

Sujeta a las siguientes restricciones lineales:

$$(1.2.2) \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1j} x_j + \ldots\ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots\ldots + a_{ij} x_j + \ldots\ldots + a_{in} x_n \leq b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mj} x_j + \ldots\ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases}$$

y siempre que:

/(1.2.3)

(1.2.3) $x_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$

En la función y en el sistema de desigualdades, a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$, b_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots m)$ y c_j $(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$, son constantes dadas.

Existe una variedad de notaciones para expresar el problema general de programación lineal; las más comunes son:

1. Maximizar

(1.2.4) $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

sujeta a

(1.2.5) $x_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$

(1.2.6) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ para $i = 1, 2, \ldots\ldots, m$

2. Maximizar

(1.2.7) $z = cX$

sujeta a

(1.2.8) $X \geq 0$

(1.2.9) $AX \leq 0$

donde $c = [c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n]$ es un vector fila, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un vector columna, $A = [a_{ij}]$ es una matriz de orden m.n, $b = \{b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n\}$ es un vector columna y $\underline{0}$ es un vector columna $\underline{n}$ dimensional nulo.

3. Maximizar

(1.2.10) $z = cX$

sujeta a

(1.2.11) $X > 0$

(1.2.12) $P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots\ldots + P_jx_j + \ldots\ldots + P_nx_n \leq P_o$

donde P_j para $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$, es la j-ésima columna de la matriz A y $P_o = b$

/La descripción

La descripción de un problema de programación lineal en la forma dada en las restricciones (1.2.3) no se presta a ser resuelto mediante la aplicación de métodos tradicionales. Se puede obtener una expresión más simple y por lo tanto más manejable mediante la introducción de unas variables que en adelante designaremos como "variables de holgura o de "exceso" que nos permitirán transformar las desigualdades de las restricciones (1.2.3) por igualdades.

Por ejemplo la ecuación i-ésima del sistema (1.2.3) es:

(1.2.13) $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots\ldots + a_{in} x_n \leq b_i$

Supóngase que sustituimos esa desigualdad por la ecuación:

(1.2.14) $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots\ldots + a_{in} x_n + x_{n+i} = b_i$

donde x_{n+i} es no negativa ($x_{n+i} \geq 0$). Entonces cualquier conjunto $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, que satisfaga (1.2.13) satisfará (1.2.14) y a la inversa. A la nueva variable x_{n+i} se la denomina "variable de holgura" y expresa el exceso del segundo miembro de la desigualdad (1.2.13) sobre el primero. Por lo tanto, podemos formular el problema de máximos de programación lineal de la siguiente forma:

<u>Maximizar</u>

(1.2.15) $z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_i$

Sujeta

(1.2.16) $x_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\ldots, n+m$

(1.2.17) $P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots\ldots + P_j x_j + \ldots\ldots + P_n x_n + P_{n+1} x_{n+1} + \ldots +$
$+ P_{n+m} x_{n+m} = P_o$

donde P_j para $j = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m$, es la j- ésima columna de la matriz A y $P_o = b$.

Por este procedimiento las desigualdades de (1.2.3) se sustituyen por las igualdades de (1.2.17) debido a la introducción de <u>m</u> nuevas variables no negativas.

La <u>solución</u> en sus diversas acepciones para el caso del problema general de programación lineal, se define según el caso en la forma siguiente.

<u>Solución</u>: Es el conjunto de n + m valores x_j que satisfacen el sistema de ecuaciones (1.2.17).

/<u>Solución posible</u>:

Solución posible: Es el conjunto de $n + m$ valores que satisfacen las restricciones (1.2.16) y (1.2.17).

Solución posible básica: (Llamada solución básica o solución posible básica no degenerada): Es el conjunto de m valores x_j no negativos ($x_j \geq 0$) y n valores x_j nulos ($x_j = 0$) que satisfacen al sistema de ecuaciones (1.2.17).

Solución básica óptima: (Llamada solución óptima); Es la solución básica que hace óptima a (1.2.15).

2. Ejemplos de la aplicación de la programación lineal en algunos casos específicos.

Antes de tratar de los métodos de solución genérica de los problemas de programación lineal, consideremos dos problemas típicos con sus respectivas soluciones gráficas.

Problema del Agricultor

2.1 Un agricultor quiere cultivar maíz y trigo, dispone de 70 hectáreas y desea obtener el beneficio máximo. Los precios de venta para maíz y trigo son E° 4,50 y E° 6,00 por quintal métrico, respectivamente.

Una hectárea puede rendir 30 qq. de maíz o 25 qq. de trigo. Cada hectárea requiere un capital de E° 30,00 si se cultiva con maíz, mientras que con trigo necesita un capital de E° 40,00. El capital total disponible es de E° 2.500,00. Las necesidades de agua de riego son en octubre 900 m^3 por hectárea de maíz y 650 m^3 por hectárea de trigo y 1 200 m^3 y 850 m^3 por hectárea de maíz y trigo, respectivamente, en el mes de noviembre. Para octubre la disponibilidad es de 57 900 m^3 de agua y en noviembre de 115 200 m^3.

El primer paso para resolver el problema es resumir la información sobre los cultivos en una tabla (tabla 2.1.1).

Tabla 2.1.1

	Maíz	Trigo
Rendimiento (qq. por hectárea)	30,00	25,00
Requerimiento por hectárea:		
Capital (E°)	30,00	40,00
Riego en octubre (m^3)	900,00	650,00
Riego en noviembre (m^3)	1 200,00	850,00

/y después

y después elaborar una tabla con los requerimientos de cada recurso o factor por unidad de producción, recursos disponibles y precio del producto (tabla 2.1.2).

Tabla 2.1.2

	Requerimientos por unidad de producción (quintal métrico)		Recursos disponibles
	Maíz (P_1)	Trigo (P_2)	
Tierra (hectárea)	0,03333	0,04000	70
Capital (E°)	1,00000	1,60000	2.500
Riego en octubre (m^3)	30,00000	26,00000	57.900
Riego en noviembre (m^3)	40,00000	34,00000	115.200
Precio del producto (E° por q.q.)	4,50000	6,00000	—

El ingreso total - z - es la función económica que se quiere maximizar, llamemos x_1 la cantidad de maíz que se debe producir y x_2 la de trigo. La función vendrá expresada por la formula:

(2.1.1) $z = 4{,}50\ x_1 + 6{,}00\ x_2$

siendo los coeficientes los precios de venta de los respectivos productos.

Las restricciones son:

(2.1.2) $0{,}03333\ x_1 + 0{,}04000\ x_2 \leq 70$

(2.1.3) $1{,}00000\ x_1 + 1{,}60000\ x_2 \leq 2.500$

(2.1.4) $30{,}00000\ x_1 + 26{,}00000\ x_2 \leq 57.900$

(2.1.5) $40{,}00000\ x_1 + 34{,}00000\ x_2 \leq 115.200$

(2.1.6) $x_1 \geq 0$

(2.1.7) $x_2 \geq 0$

Existen infinitas soluciones posibles: entre ellas hay una o varias para las cuales z es máxima.

Determinemos la región del plano (x_1, x_2) cuyos puntos satisfacen a las seis desigualdades. Como $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, esta región se localiza en el primer cuadrante.

Además se exige que cumpla con las restricciones 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, y 2.1.5. Los puntos que cumplen estas condiciones son los inferiores a las rectas R_1, R_2, R_3 y R_4, respectivamente (gráfica 2.1.1).

/(2.1.8)

(2.1.8)	R_1:	$0{,}03333\ x_1 + 0{,}04000\ x_2$	=	70
(2.1.9)	R_2:	$1{,}00000\ x_1 + 1{,}60000\ x_2$	=	2.500
(2.1.10)	R_3:	$30{,}00000\ x_1 + 26{,}00000\ x_2$	=	57.900
(2.1.11)	R_4:	$40{,}00000\ x_1 + 34{,}00000\ x_2$	=	115.200

Todos los programas posibles de producción, compatibles con las limitaciones de los recursos disponibles, están dados por los infinitos puntos de la superficie limitada por el polígono $OA_1A_2A_3A_4$ (incluyendo su perímetro) cada uno de los puntos de la poligonal $A_1A_2A_3A_4$ representanla utilización plena de uno de los recursos, y los vértices A_2 y A_3 del polígono, la de tierra y capital en el primero, y tierra y riego en octubre en el segundo.

Una vez establecido el campo de todos los programas posibles, es necesario determinar cual de entre todos ellos será el que se llevará a cabo. Consideramos por ejemplo los valores de las variables $x_1 = 750$ y $x_2 = 500$ determinados por las coordenadas del punto A_5. La función, particularizando este punto, toma el siguiente valor:

(2.1.12) $\quad z = 4{,}50 \times 750 + 6{,}00 \times 500 = 6.375{,}00$

Ahora representamos por una recta la función (2.1.1) para z igual a 6.375,00. Como los coeficientes 4,50 y 6,00 son constantes, esta recta va a permanecer paralela a si misma cuando cambie el valor de z. Cuanto más grande sea z, la recta se alejará más del origen, e inversamente se aproximará al disminuir el valor de esta.

Al desplazar paralelamente la recta que representa z, puede apreciarse que el punto A_2 de plano de coordenadas 900 y 1.000, resultante de la intersección de las rectas R_1 y R_2, es el punto de valor máximo de z.

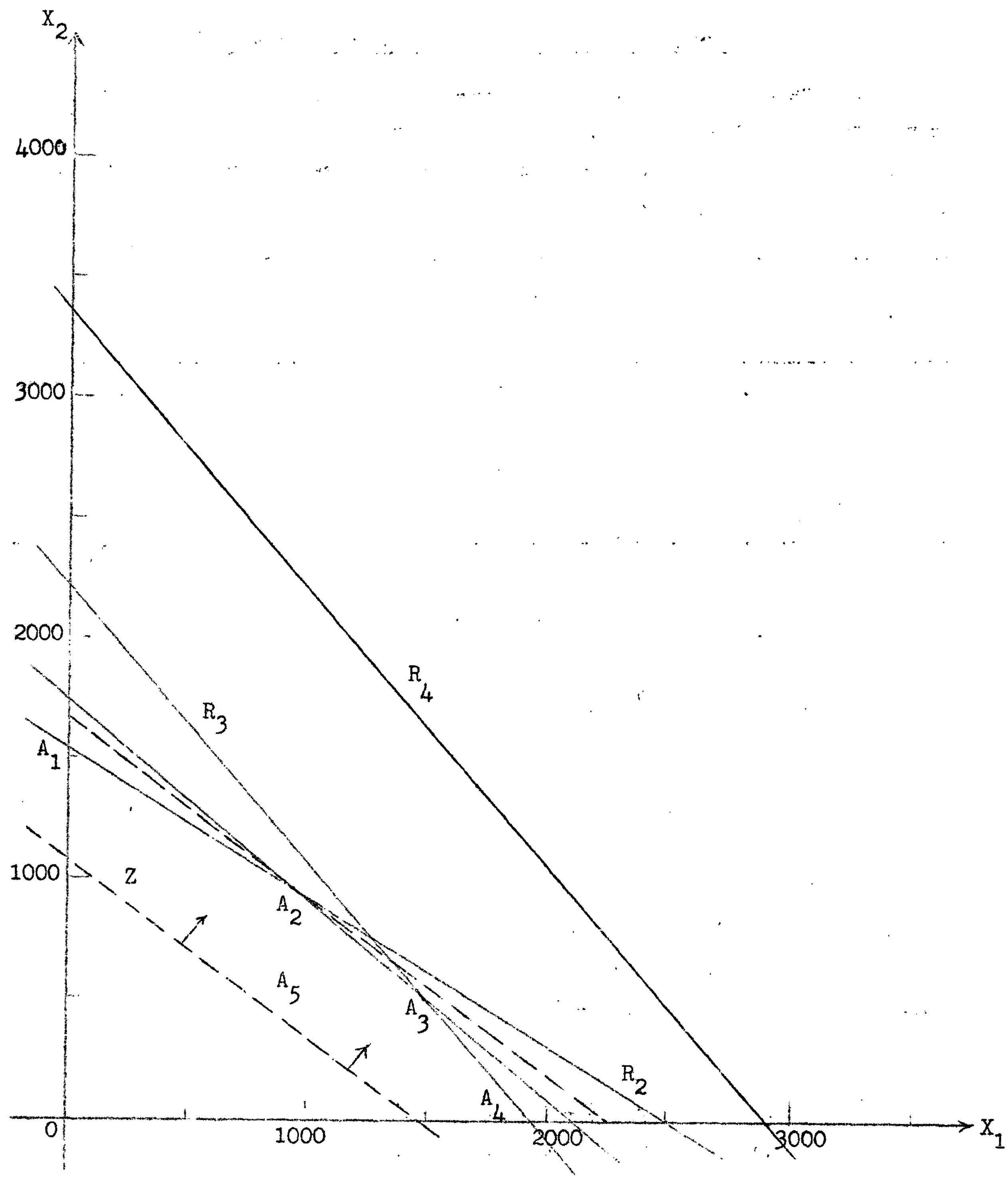
(2.1.13) $\quad z_{max} = 4{,}50 \times 900 + 6{,}00 \times 1.000 = 10.050{,}00$

La solución $x_1 = 900$, $x_2 = 1.000$ que da el máximo corresponde a la ocupación plena de los recursos tierra y capital, de los recursos riego en octubre y riego en noviembre quedan disponibles, 4.900 m^3 y 45.209 m^3 de agua, respectivamente.

Examinando la gráfica 2.1.1, se comprende el porqué hay necesariamente dos recursos no ocupados plenamente en la solución que proporciona el óptimo. Unicamente si las cuatro rectas que representanlas limitaciones fuerán

/Gráfica 2.1.1

Gráfico 2.1.1



/concurrentes puede

concurrentes puede afirmarse que todos los recursos estarían ocupados plenamente.

Problema de selección de materias primas

2.2 Supongamos que la calidad del producto consiste en el porcentaje que contenga de cierto factor F, y que se dispone de cuatro materias primas (representadas por A, B, C y D) cuyos costos y porcentajes de contenido de F son los siguientes:

Materias Primas	Contenido de F (%)	Costo (Libras esterlinas por toneladas)
A	51	40
B	11	20
C	14	24
D	36	30

Se trata de obtener una mezcla de dichas materias primas que contenga un porcentaje mínimo de F del 18 por ciento y cuyo costo sea el menor posible.

Establecimiento del sistema y elección de variables

Si x_1, x_2, x_3 y x_4 representan, respectivamente, cantidades de las materias primas A, B, C y D que componen una tonelada de mezcla; y si representamos por z el costo, en libras esterlinas, de una tonelada de dicha mezcla, el problema consiste en:

Minimizar:

(2.2.1) $z = 40\,x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 30x_4$

Sujeta a las restricciones

(2.2.2) $0.51x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}36x_4 \geq 0{,}18$

(2.2.3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

(2.2.4) $x_j \geq 0$ para $j = 1, 2, 3, y\ 4$

Si llamanos u_1 la cantidad de mezcla y u_2 la cantidad del factor F que contiene, las restricciones (2.2.2) y (2.2.3), se transforman en:

/(2.2.5)

(2.2.5) $u_2 \geq 0,18$

(2.2.6) $u_1 = 1$

Representando los datos graficamente en un sistema de ejes coordenados, cuyos ejes horizontal y vertical llamaremos respectivamente u_2 y u_1. De esta forma representados puede verse en el gráfico (2.2.1) que los puntos que satisfacen a las restricciones (2.2.5) y (2.2.6) son los que estan sobre la recta R_1 y a la derecha de la recta R_2 (inclusive el punto E).

Determinemos, ahora, para cada materia prima el punto correspondiente a un determinado costo,1/ por ejemplo: $z_1 = 48$. Los resultados son los siguientes:

1/ Expliquemos como se obtiene un punto correspondiente a un determinado costo.

Sea
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$
$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$
$$u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

Supongamos que $z = z_1$ y $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots\ldots = x_n = 0$

Entonces:
$$z_1 = c_i\, x_i$$
$$u_1^{(i)} = a_{1i}\, x_i \quad y \quad u_2^{(i)} = a_{2i}x_i$$

Eliminando x_i obtenemos
$$u_1^{(i)} = a_{1i}\,\frac{z_1}{c_i} \quad y \quad u_2^{(i)} = a_{2i}\,\frac{z_1}{c_i}$$

Así para cada variable x_i existe un punto P_i de coordenadas $u_1^{(i)}$ y $u_2^{(i)}$, la recta que pasa por el punto P_i y el origen del sistema de coordenadas constituye un radio vector. Los puntos P_i se unen mediante segmentos para formar una poligonal de isocosto.

Supongamos que

$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots\ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = \ldots\ldots =$
$= x_n = 0$

Entonces:

/Continuación 1/

Continuación 1/

$$z_1 = c_i\ x_i + c_k\ x_k$$

$$u_1 = a_{1i}\ x_i + a_{1k}\ x_k$$

$$u_2 = a_{2i}\ x_i + a_{2k}\ x_k$$

Elimando x_i obtenemos:

$$u_1 = a_{1i}\ \frac{z_1}{c_i} + \left(a_{1k} - a_{1i}\ \frac{c_k}{c_i}\right) x_k$$

$$u_2 = a_{2i}\ \frac{z_1}{c_i} + \left(a_{2k} - a_{2i}\ \frac{c_k}{c_i}\right) x_k$$

Siendo estas las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos P_i y P_k.

Tomemos ahora otro valor z_2 de z. Para este le corresponde a la variable x_i un punto $\bar{P}_i$ de coordenadas:

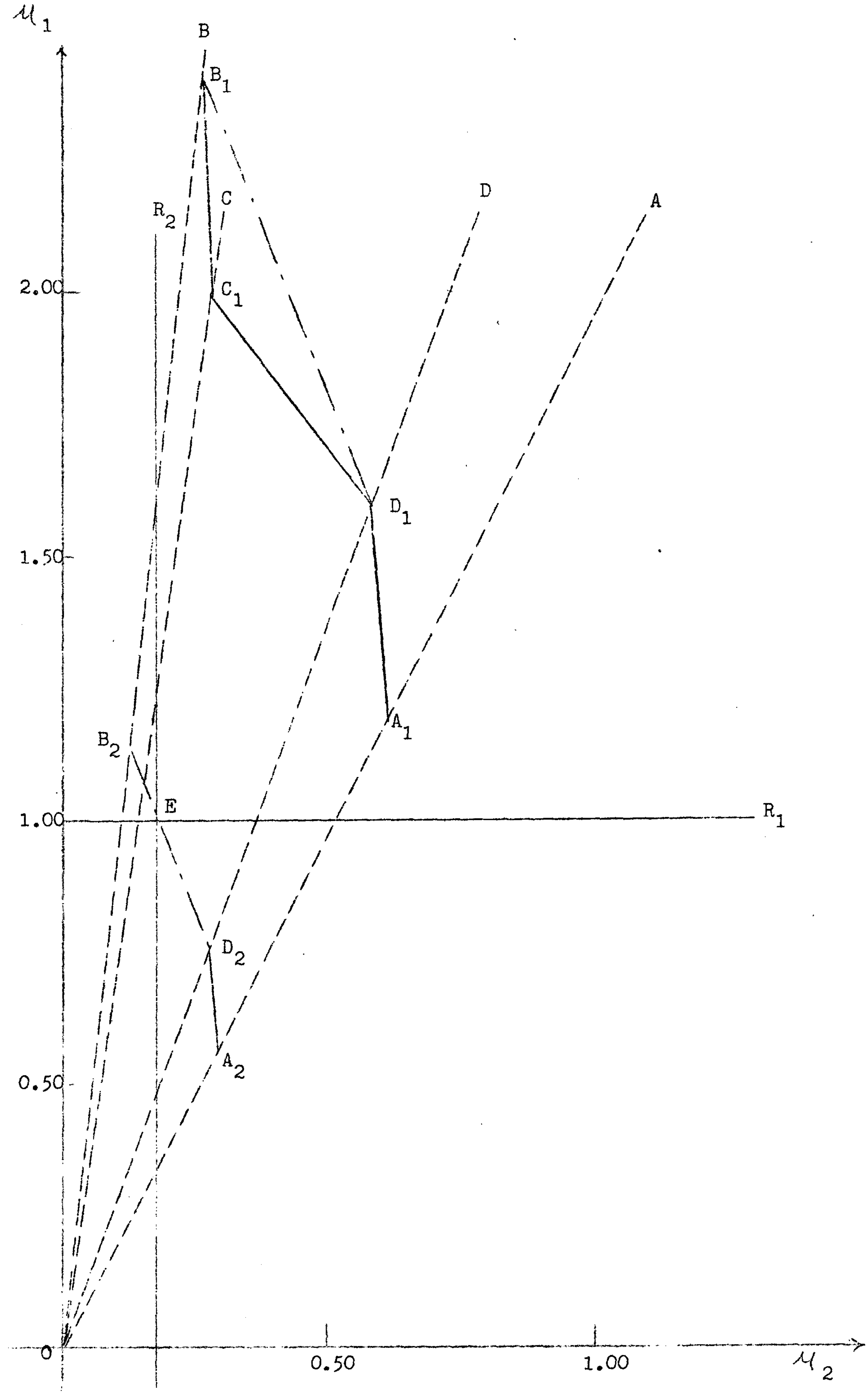
$$\bar{u}_1^{(i)} = a_{1i}\ \frac{z_2}{c_i} \quad \text{y} \quad \bar{u}_2^{(i)} = a_{2i}\ \frac{z_2}{c_i}$$

Como

$\bar{u}_1^{(i)} = u_i^{(i)}\ \frac{z_2}{z_1}$ y $\bar{u}_2^{(i)} = \frac{z_2}{z_1}$ los radios vectores correspondientes son colineales; y siendo la constante de proporcionalidad $\frac{z_2}{z_1}$ la misma para cada variable los trazos rectilíneas correspondientes de dos poligonales distintas son paralelos.

/Gráfico 2.2.1

Gráfico 2.2.1



$$A \begin{cases} u_2^{(A)} = 0{,}51 \times \frac{48}{40} = 0{,}612 \\ u_1^{(A)} = 1 \times \frac{48}{40} = 1{,}200 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} u_2^{(B)} = 0{,}11 \times \frac{48}{20} = 0{,}264 \\ u_1^{(B)} = 1 \times \frac{48}{20} = 2{,}400 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} u_2^{(C)} = 0{,}14 \times \frac{48}{24} = 0{,}280 \\ u_1^{(C)} = 1 \times \frac{48}{24} = 2{,}00 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} u_2^{(D)} = 0{,}36 \times \frac{48}{30} = 0{,}576 \\ u_1^{(D)} = 1 \times \frac{48}{30} = 1{,}600 \end{cases}$$

Como para una determinada materia prima los radios vectores correspondientes a dos valores de z son colineales, se puede concluir que para las materias primas A, B, C y D los puntos correspondientes a un valor arbitrario de z se encuentran, respectivamente, sobre los radios vectores que pasan por los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1.

Las líneas que unen los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1, constituyen las rectas de isocosto. Si el fabricante desea producir una mezcla con las materias primas B y D de costo igual a 48 libras esterlinas, esta mezcla se encontrará en algún punto comprendido entre B_1 y D_1. Interpretaciones similares se puede hacer con las demás rectas.

Observese en la gráfica 2.2.1, que C_1 se encuentra situado por debajo de la recta que une B_1 y D_1. Esto significa que para una cierta cantidad de mezcla y por el mismo costo se puede obtener más factor F empleando la combinación adecuada de B y D que con la utilización de la materia prima C. Por tanto, las dos rectas $B_1 D_1$ y $D_1 A_1$ que se han trazado representan lugares geométricos de mezclas eficientes.

Estos lugares geométricos representan solamente como se pueden gastar 48 libras esterlinas en mezclas eficientes (para otros niveles de gastos corresponderán lugares geométricos análogos). De esta forma la solución óptima se encuentra sobre una poligonal convexa paralela a la poligonal $B_1D_1A_1$.

/Al desplazar

Al desplazar la poligonal $B_1D_1A_1$ en la dirección del origen, puede concluirse que el menor valor de z corresponde a la poligonal que pasa por el punto E, que es la intersección de las rectas R_1 y R_2.

La solución óptima es una mezcla de las materias primas B y D, cuyas cantidades están determinadas por las ecuaciones paramétricas de la recta que une B_2 y D_2 o sea:

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} 1,00 = \frac{1}{30} z_{min} + \frac{1}{3} x_2 \\ 0,18 = 0,012 z_{min} - 0,13 x_2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.2.7) y considerando que:

$$(2.2.8) \qquad x_2 + x_4 = 1$$

Se llega al resultado de que el programa óptimo, es aquel en el que se emplean 0,72 toneladas de la materia prima B y 0,28 toneladas de la materia prima D, y que el porcentaje del factor F es 18 por ciento. El costo de la tonelada de mezcla será de 22,8 libras esterlinas.

3. Método simplex o de Dantzig

3.1 Planteamiento general

El método fundamental para encontrar el óptimo de la función económica de un programa lineal, es el método simplex o de Dantzig, publicado por primera vez en el año 1947 por George Dantzig, este consiste en mejorar una solución básica dada.

Los criterios de Dantzig para mejorar una solución básica dada serán analizados a continuación.

Tomemos la ecuación (1.2.15) y las restricciones (1.2.16) y (1.2.17).

$$(3.1.1) \qquad z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j$$

$$(3.1.2) \qquad x_j \geq 0 \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, n, n+1, \ldots\ldots, n+m$$

$$(3.1.3) \qquad P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots\ldots + P_jx_j + \ldots\ldots + P_nx_n + P_{n+1}x_{n+1} + \\ + P_{n+m}x_{n+m} = P_o$$

/donde P_j

donde P_j para $j = 1, 2, \ldots\ldots, n, n+1, \ldots\ldots, n+m$, es la j-ésima columna de la matriz A, que es por hipótesis de rango $\underline{m}$, y $P_o = b$.

Supongamos que se conoce una solución básica en términos de $\underline{m}$ vectores P_i del conjunto original de $\underline{n+m}$ vectores P_j. Podemos hacer que este conjunto de $\underline{m}$ vectores linealmente independientes sean los vectores $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots\ldots P_{n+m}$, y hacer que:

$$X = (0, \ldots\ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots, x_{n+m})$$

sea el vector solución. Entonces tendríamos:

$$(3.1.4) \qquad z_o = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i x_i$$

$$(3.1.5) \qquad P_{n+1}x_{n+1} + P_{n+2}x_{n+2} + \ldots\ldots + P_{n+m}x_{n+m} = P_o$$

$$(3.1.6) \qquad x_i \geq 0 \quad \text{para } i = n+1, n+2, \ldots\ldots, n+m$$

Planteado de esta forma, el problema consiste en determinar, mediante un proceso relativamente rápido y simple de cómputo, una nueva solución básica.

Puesto que los vectores $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots\ldots, P_{n+m}$, son linealmente independientes, forman una base en un espacio vectorial $\underline{m}$ dimensional. Podemos entonces expresar $\underline{n}$ vectores P_j numerados de 1 a n, como una combinación lineal de estos vectores base, escribiremos:

$$(3.1.7) \qquad \sum_{i=n+1}^{n+m} P_i x_{ij} = P_j \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

y llamando z_j, a las cantidades correspondientes a P_j en que se incrementa z, tendremos:

$$(3.1.8) \qquad z_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i x_{ij} \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

Supongamos, ahora, que algún vector que no se encuentra en la base dada, digamos P_j, tiene al menos un elemento $x_{ij} > 0$ en la expresión:

$$(3.1.9) \qquad P_j = P_{n+1}x_{n+1,j} + P_{n+2}x_{n+2,j} + \ldots\ldots + P_{n+m}x_{n+m,j}$$

/y definamos:

y definamos:

(3.1.10) $$z_j = c_{n+1}x_{n+1,j} + c_{n+2}x_{n+2,j} + \cdots\cdots + c_{n+m}x_{n+m,j}$$

donde las c_i son los coeficientes de costos correspondiente a x_i.

Multiplicando (3.1.9) por cierto número θ, y restando de (3.1.5) y, en forma similar, multiplicando (3.1.10) por la misma θ y restando de (3.1.4), obtenemos:

(3.1.11) $$P_{n+1}(x_{n+1} - \theta x_{n+1,j}) + P_{n+2}(x_{n+2} - \theta x_{n+2,j}) +$$

$$+ \cdots\cdots + P_{n+m}(x_{n+m} - \theta x_{n+m,j}) + \theta P_j = P_o$$

(3.1.12) $$c_{n+1}(x_{n+1} - \theta x_{n+1,j}) + c_{n+2}(x_{n+2} - \theta x_{n-2,j}) +$$

$$+ \cdots\cdots + c_{n+m}(x_{n+m} - \theta_{n+m,j}) + \theta c_j = z_o + \theta(c_j - z_j)$$

habiendo sumado θc_j a los dos miembros de la ecuación (3.1.12) con lo cual ésta no cambia.

El vector $X' = (x_{n+1} - \theta x_{n+1,j}; x_{n+2} - \theta x_{n+2,j}; \cdots\cdots;$ $x_{n+m} - \theta x_{n+m,j}; 0)$ es una solución al problema, y si todos los elementos de X' son no negativos, X' es una solución posible.

Puesto que deseamos que X' sea una solución posible diferente de X, restringimos θ en tal forma que sea mayor que cero. Con esta restricción, todos los elementos de X' que tienen una x_{ij} negativa o igual a cero, también tendrán una $x_i - \theta x_{ij}$ no negativa. Necesitamos tomar en cuenta solamente aquellos elementos que tengan una x_{ij} positiva.

Buscaremos una θ mayor que cero, que cumpla con la condición:

(3.1.13) $$x_i - \theta x_{ij} \geq 0$$

para todas las $x_{ij} > 0$

Por (3.1.13) tenemos $\theta \leq \dfrac{x_i}{x_{ij}}$ y por consiguiente cualquier θ para la cual

(3.1.14) $$0 < \theta \leq \min_j \frac{x_i}{x_{ij}}$$

proporcionará una solución posible para (3.1.11). Sin embargo, como estamos /buscando

buscando una solución posible básica, no podemos tener todos los elementos $m + 1$ de X', positivos. Entonces, debemos forzar cuando menos uno de los elementos de X' para que sea exactamente igual a cero. Puede verse que si hacemos

$$(3.1.15) \qquad \theta = \theta_o = \min_j \frac{x_i}{x_{ij}}$$

para $x_{ij} > o$; es decir, θ correspondiendo al más pequeño valor de las relaciones $\frac{x_i}{x_{ij}}$ entre aquellas que son positivas.

Si θ se selecciona en esta forma; todos los términos

$$(3.1.16) \qquad x_i - \theta x_{ij}$$

serán positivos menos uno, que será nulo y que corresponderá a (3.1.15).

Habiendo sido determinada así, se le llama θ_o y se hará salir de la base al vector P_i, tal que $\theta_o = \frac{x_i}{x_{ij}}$ puesto que su coeficiente se anulará en (3.1.11) en donde será reemplazado por el vector P_j con coeficientes θ_o. La solución básica obtenida es entonces distinta de la precedente.

Finalmente, deberemos incrementar z_o, para lo cual si partimos de (3.1.12), puede verse que esto ocurrirá, si se escoge una j de tal manera que:

$$(3.1.17) \qquad c_j - z_j > 0$$

Según este procedimiento el valor de $c_j - z_j$ más elevado corresponderá el mayor aumento posible de z_o. Es este valor el que escogeremos y que nos designará el vector P_j que entrará en la base. También se puede decir que se escoge el valor de j correspondiente a la cantidad más negativa de los valores de $z_j - c_j$.

Podemos, entonces, resumir los criterios de Dantzig de la siguiente forma:

Al seleccionar P_j tal que $z_j - c_j$ sea el más negativo y tomando la línea i para la cual $\theta = x_i/x_{ij}$ sea mínimo pero positivo, se podrá determinar una transformación de la solución básica inicial, tal que se tenga el mayor incremento posible de z_o. Cuando ya no sea posible encontrar una sola cantidad $z_j - c_j$ negativa, ya no será posible aumentar z_o, y se habrá alcanzado así el máximo de z. Esa conclusión está ligada a la propiedad

/de convexidad

de convexidad del poliedro formado por las restricciones. Un razonamiento análogo al tomar $c_j - z_j$ más negativo, nos habría conducido a disminuir z_o y alcanzar el mínimo.

Las cantidades $z_j - c_j$ o $c_j - z_j$, representan la variación unitaria de la función económica cuando se cambia de base. Estas cantidades permiten valorar la sensibilidad de la función económica alrededor de cada punto estacionario (solución básica), y en particular, alrededor del óptimo. En algunos casos se prefiere considerar las variaciones:

$$(3.1.18) \qquad \frac{x_i}{x_{ij}} (z_j - c_j) \quad \text{o} \quad \frac{x_i}{x_{ij}} (c_j - z_j)$$

correspondientes a la entrada de un vector P_j y a la salida de un vector P_i en la base.

3.2 Aplicación de los criterios de Dantzig

Con el objeto de aclarar los criterios de Dantzig, presentaremos a continuación un caso concreto:

Para fabricar dos productos A_1 y A_2, deben someterse a ciertos procesos en tres máquinas M_1, M_2, y M_3, sucesivamente, sin que sea necesario ajustarse a un orden. Los tiempos unitarios de ejecución están dados por la tabla 3.2.1 en la cual puede verse por ejemplo, que el tiempo unitario de ejecución de la pieza A_1 al operar sobre la máquina M_2, es de siete minutos.

Tabla 3.2.1

Producto	Tiempo necesario por unidad (minutos)		
	M_1	M_2	M_3
A_1	11	7	6
A_2	9	12	16

Supondremos que las máquinas no tienen tiempos muertos al esperar un producto que se esté procesando en otra máquina, lo cual puede suceder ya que el orden de las operaciones es indiferente.

/Las horas

Las horas disponibles para cada máquina para una actividad de un mes son:

165 horas = 9.900 minutos para la máquina M_1

140 horas = 8.400 minutos para la máquina M_2

160 horas = 9.600 minutos para la máquina M_3

La ganancia que producen los dos artículos A_1 y A_2 por unidad producida es respectivamente de 0,99 y 1,00 escudo.

En esas condiciones, ¿cuántos productos A_1 y A_2 se deben de fabricar, mensualmente para tener un beneficio total máximo?

<u>Planteamiento</u>:

La ganancia será por lo tanto la función económica que hay que hacer máxima; llamemos x_1 al número de unidades del producto A_1 y x_2 al del producto A_2. Se trata entonces de maximizar:

(3.2.1) $z = 0{,}90\, x_1 + 1{,}00\, x_2$, suponiendo que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

sujeta las restricciones:

(3.2.2) $11x_1 + 9x_2 \leq 9.900$ para la máquina M_1

(3.2.3) $7x_1 + 12x_2 \leq 8.400$ para la máquina M_2

(3.2.4) $6x_1 + 16x_2 \leq 9.600$ para la máquina M_3

Introduciendo las variables de holgura, tenemos:

(3.2.5) $z = 0{,}90x_1 + 1{,}00x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$

(3.2.6) $11x_1 + 9x_2 + x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 = 9.900$

(3.2.7) $7x_1 + 12x_2 + 0.x_3 + x_4 + 0.x_5 = 8.400$

(3.2.8) $6x_1 + 16x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + x_5 = 9.600$

Cuya expresión matricial es:

/(3.2.9)

$$(3.2.9)\quad \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 11 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix}\end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.900 \\ 8.400 \\ 9.600 \end{bmatrix}$$

Partamos de una solución básica formada por los vectores P_3, P_4 y P_5:

$$(3.2.10)\quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.900 \\ 8.400 \\ 9.600 \end{bmatrix}$$

o sea:

$$(3.2.11)\quad x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 9\ 900,\ x_4 = 8\ 400 \text{ y } x_5 = 9\ 600$$

A esta solución le corresponde el valor:

$$(3.2.12)\quad z = 0{,}90 \times 0 + 1{,}00 \times 0 + 0 \times 9\ 900 + 0 \times 8\ 400 + 0 \times 9\ 600 = 0$$

Busquemos ahora, la transformación (3.1.7), es decir, los coeficientes x_{ij}, tales que:

$$(3.2.13)\quad P_j = \sum_{i=3}^{5} P_i\, x_{ij} \qquad j = 1,2$$

lo que da la ecuación de matrices:

$$(3.2.14)\quad \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 12 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} (1) & (2) \end{matrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} (3) & (4) & (5) \end{matrix}\end{array} \begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix}$$

Como la base constituye una matriz unidad los coeficientes x_{ij} están dados directamente por los vectores P_1 y P_2.

/(3.2.15)

$$(3.2.15) \qquad \begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 12 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Determinemos ahora las cantidades z_j dadas por las relaciones (3.1.8):

$$(3.2.16) \qquad z_j = \sum_{i=3}^{5} c_i x_{ij} \qquad j = 1,2$$

o sea:

$$(3.2.17) \qquad \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 12 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinemos las cantidades $z_j - c_j$, correspondientes:

$$(3.2.18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1 - c_1 = 0 - 0,90 = - 0,90 \\ z_2 - c_2 = 0 - 1,00 = - 1,00 \end{array} \right.$$

Seleccionaremos el subíndice 2, para el cual $z_j - c_j$ es la más negativa. Introduciremos pues un coeficiente no nulo para el vector P_2. Busquemos ese coeficiente, y con este fin haremos el cálculo de las relaciones $\frac{x_i}{x_{ij}}$, y escogeremos el subíndice $\underline{i}$ para el cual se obtiene el valor positivo más pequeño:

$$(3.2.19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_3}{x_{32}} = \dfrac{9\ 900}{9} = 1\ 100 \\[2ex] \dfrac{x_4}{x_{42}} = \dfrac{8\ 400}{12} = 700 \\[2ex] \dfrac{x_5}{x_{52}} = \dfrac{9\ 600}{16} = 600 \end{array} \right.$$

Tomaremos por lo tanto para este caso $\theta_0 = \dfrac{x_5}{x_{52}} = 600$, por ser el más pequeño positivo.

Obteniendo de esta forma la segunda solución básica:

/(3.2.20)

$$
(3.2.20)\quad \begin{cases}
x'_1 = 0 \\[2ex]
x'_2 = \theta_o = \dfrac{x_5}{x_{52}} = 600 \\[2ex]
x'_3 = x_3 - \dfrac{x_5}{x_{52}} \cdot x_{32} = 9\,900 - 600 \text{ x } 9 = 4\,500 \\[2ex]
x'_4 = x_4 - \dfrac{x_5}{x_{52}} \cdot x_{42} = 8\,400 - 600 \text{ x } 12 = 1\,200 \\[2ex]
x'_5 = x_5 - \dfrac{x_5}{x_{52}} \cdot x_{52} = 9\,600 - 600 \text{ x } 16 = 0
\end{cases}
$$

El nuevo valor de z vendrá dado por la expresión

$$
(3.2.21)\qquad z = 0.90 \cdot 0 + 1.00 \cdot 600 + 0 \cdot 4\,500 + 0 \cdot 1\,200 + 0 \cdot 0 = 600
$$

que puede comprobarse como sigue

$$
(3.2.22)\qquad z = z_o + \theta_o\ (c_2 - z_2) = 0 + 600\ (1{,}00 - 0) = 600
$$

$$
(3.2.23)\qquad \begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 11 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array}
\end{array}
\begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 4\,500 \\ 1\,200 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\,900 \\ 8\,400 \\ 9\,600 \end{bmatrix}
$$

A continuación pasamos a la tercera etapa, buscando la transformación de los vectores P_1 y P_5.

$$
(3.2.24)\qquad \begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{cc} (1) & (5) \end{array}
\end{array}
= \begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccc} (3) & (4) & (2) \end{array}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_{31} & x_{35} \\ x_{41} & x_{45} \\ x_{21} & x_{25} \end{bmatrix}
$$

Pre-multiplicando ambos miembros de (3.2.24) por la inversa de la matriz cuadrada formada por los vectores P_3, P_4 y P_2, tenemos:

./(3.2.25)

$$(3.2.25) \qquad \begin{bmatrix} x_{31} & x_{35} \\ x_{41} & x_{45} \\ x_{21} & x_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/16 \\ 0 & 1 & -12/16 \\ 0 & 0 & -1/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122/16 & -9/16 \\ 40/16 & -12/16 \\ 6/16 & 1/16 \end{bmatrix}$$

Calculemos z_1 y z_5

$$(3.2.26) \qquad \begin{bmatrix} z_1 & z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 122/16 & -9/16 \\ 40/16 & -12/16 \\ 6/16 & 1/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/16 & 1/16 \end{bmatrix}$$

donde

$$(3.2.27) \qquad \begin{cases} z_1 - c_1 = 6/16 - 0{,}9 = -0{,}525 \\ z_5 - c_5 = 1/16 - 0 = 1/16 \end{cases}$$

$$(3.2.28) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_{21}} = \dfrac{600}{6/16} = 1.600 \\[2ex] \dfrac{x_3}{x_{31}} = \dfrac{4.500}{122/16} = 590{,}16 \\[2ex] \dfrac{x_4}{x_{41}} = \dfrac{1.200}{40/16} = 480 \end{cases}$$

Escogeremos pues P_1 para entrar en la base en lugar de P_4.
La tercera solución básica será:

$$(3.2.29) \qquad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{x_4}{x_{41}} = 480 \\[2ex] x'_2 = x_2 - \dfrac{x_4}{x_{41}} \cdot x_{21} = 600 - 480 \cdot 6/16 = 420 \\[2ex] x'_3 = x_3 - \dfrac{x_4}{x_{41}} \cdot x_{31} = 4.500 - 480 \cdot 122/16 = 840 \\[2ex] x'_4 = x_4 - \dfrac{x_4}{x_{41}} \cdot x_{41} = 1.200 - 480 \cdot 40/16 = 0 \\[2ex] x'_5 = 0 \end{cases}$$

/o sea:

(3.2.30) $z = 0,90 \cdot 480 + 1,00 \cdot 420 + 0 \cdot 840 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 852$

$$(3.2.31)\quad \begin{array}{ccccc} \left[\begin{array}{ccccc} 11 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ (1)\;\;(2)\;\;(3)\;\;(4)\;\;(5) \end{array} \begin{bmatrix} 480 \\ 420 \\ 840 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.900 \\ 8.400 \\ 9.600 \end{bmatrix}$$

Buscaremos una cuarta solución básica:

$$(3.2.32)\quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (4)\;\;(5) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 7 & 12 \\ 0 & 6 & 16 \end{bmatrix} \\ (3)\;\;(1)\;\;(2) \end{array} \begin{bmatrix} x_{34} & x_{35} \\ x_{14} & x_{15} \\ x_{24} & x_{25} \end{bmatrix}$$

Pre-multiplicando ambos miembros de (3.2.32) por la inversa de la matriz cuadrada formada por los vectores P_3, P_1 y P_2, tenemos:

$$(3.2.33)\quad \begin{bmatrix} x_{34} & x_{35} \\ x_{14} & x_{15} \\ x_{24} & x_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 7 & 12 \\ 0 & 6 & 16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3,050 & 1,725 \\ 0 & 0,400 & -0,300 \\ 0 & -0,150 & 0,175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,050 & 1,725 \\ 0,400 & -0,300 \\ -0,150 & 0,175 \end{bmatrix}$$

Determinemos las cantidades z_4 y z_5

$$(3.2.34)\quad \begin{bmatrix} z_4 & z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,90 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3,050 & 1,725 \\ 0,400 & -0.300 \\ -0,150 & 0,175 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,210 & -0,095 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$(3.2.35)\quad \begin{cases} z_4 - c_4 = 0,210 - 0 = 0,210 \\ z_5 - c_5 = -0,095 - 0 = -0,095 \end{cases}$$

/Seleccionamos P_5

Seleccionames P_5 para lo cual tenemos $z_5 - c_5 = -0,095$, calculando después las relaciones $\frac{x_i}{x_{ij}}$:

$$(3.2.36) \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_{15}} = \frac{480}{-0,300} = -1\,600 \\ \frac{x_2}{x_{25}} = \frac{420}{0,175} = 2\,400 \\ \frac{x_3}{x_{35}} = \frac{840}{1,725} = 486,96 \end{cases}$$

En las relaciones anteriores puede verse que el número positivo menor corresponde a $\theta_0 = \frac{x_3}{x_{35}} = 486,96$, que será por lo tanto el seleccionado.

La cuarta solución básica será:

$$(3.2.37) \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 - \frac{x_3}{x_{35}} \cdot x_{15} = 480 - 486,96\ (-0,300) = 626,088 \\ x'_2 = x_2 - \frac{x_3}{x_{35}} \cdot x_{25} = 420 - 486,96 \cdot 0,175 = 334,782 \\ x'_3 = x_3 - \frac{x_3}{x_{35}} \cdot x_{35} = 840 - 486,96 \cdot 1,725 = 0 \\ x'_4 = 0 \\ x'_5 = \frac{x_3}{x_{35}} = 486,96 \end{cases}$$

O sea:

$$(3.2.38) \quad z = 0,90 \cdot 626,088 + 1,00 \cdot 334,782 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 486,96 = \\ = 898,261$$

$$(3.2.39) \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 11 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} (1) & \ (2) & \ (3) & \ (4) & \ (5) \end{matrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 626,088 \\ 334,782 \\ 0 \\ 0 \\ 486,96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.900 \\ 8.400 \\ 9.600 \end{bmatrix}$$

Pasamos a una nueva solución, buscando la transformación de los vectores P_3 y P_4.

/(3.2.40)

(3.2.40)
$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}(3) & \quad(4)\end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}11 & 9 & 0\\ 7 & 12 & 0\\ 6 & 16 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}(1) & \quad(2) & \quad(5)\end{array}\end{array} \cdot \begin{array}{c}\begin{bmatrix}x_{13} & x_{14}\\ x_{23} & x_{24}\\ x_{53} & x_{54}\end{bmatrix}\\ \end{array}$$

de donde

(3.2.41)
$$\begin{bmatrix}x_{13} & x_{14}\\ x_{23} & x_{24}\\ x_{53} & x_{54}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & 9 & 0\\ 7 & 12 & 0\\ 6 & 16 & 1\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}0,174 & -0,130 & 0\\ -0,101 & 0,159 & 0\\ 0,580 & -1,768 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,174 & -0,130\\ -0,101 & 0,159\\ 0,580 & -1,768\end{bmatrix}$$

Calculamos las cantidades z_3 y z_4

(3.2.42)
$$\begin{bmatrix}z_3 & z_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,90 & 1,00 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0,174 & -0,130\\ -0,101 & 0,159\\ 0,580 & -1,768\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,056 & 0,042\end{bmatrix}$$

donde

(3.2.43)
$$\begin{cases} z_3 - c_3 = 0,056 - 0 = 0,056\\ z_4 - c_4 = 0,042 - 0 = 0,042\end{cases}$$

Vemos en estas igualdades que ya no existe ningún valor negativo de $z_j - c_j$ y no puede por lo tanto aumentar $\underline{z}$, por lo tanto:

(3.2.44) $z = 898,261$ es el máximo, con:

(3.2.45) $x_1 = 626,088$; $x_2 = 334,782$ y

las holguras $x_3 = 0$; $x_4 = 0$ y $x_5 = 486,96$

3.3 Interpretación geométrica del procedimiento simplex

Representemos en el gráfico (3.3.1) las restricciones correspondientes a cada máquina e interpretemos las soluciones básicas obtenidas en las diversas etapas del simplex:

1a. etapa:

Significa que la industria estaría paralizada y existiría capacidad ociosa de 9.900, 8.400 y 9.600 minutos, respectivamente, en las máquinas M_1, M_2 y M_3. Esta situación está representada por el punto O, origen del sistema de referencia. En el cual el valor de la función económica es nulo.

2a. etapa:

El fabricante produciría 600 unidades del producto A_2 y ocuparía plenamente la máquina M_3. Este programa de producción está representado por el punto B_1, por estar situado por debajo de las rectas R_1 y R_2, significa que existen capacidades ociosas en las máquinas M_1 y M_2, que son de 4.500 y 1.200 minutos, respectivamente. El beneficio que se obtiene con este programa dado por la función económica, es de 540,00 escudos.

3a etapa:

Representa un programa combinado de producción de 480 y 420 unidades de los productos A_1 y A_2, con ocupación plena de las máquinas M_2 y M_3 y una capacidad ociosa de 840 minutos en la máquina M_1. Este programa de producción está representado por el punto B_2 y proporciona un beneficio de 852,00 escudos.

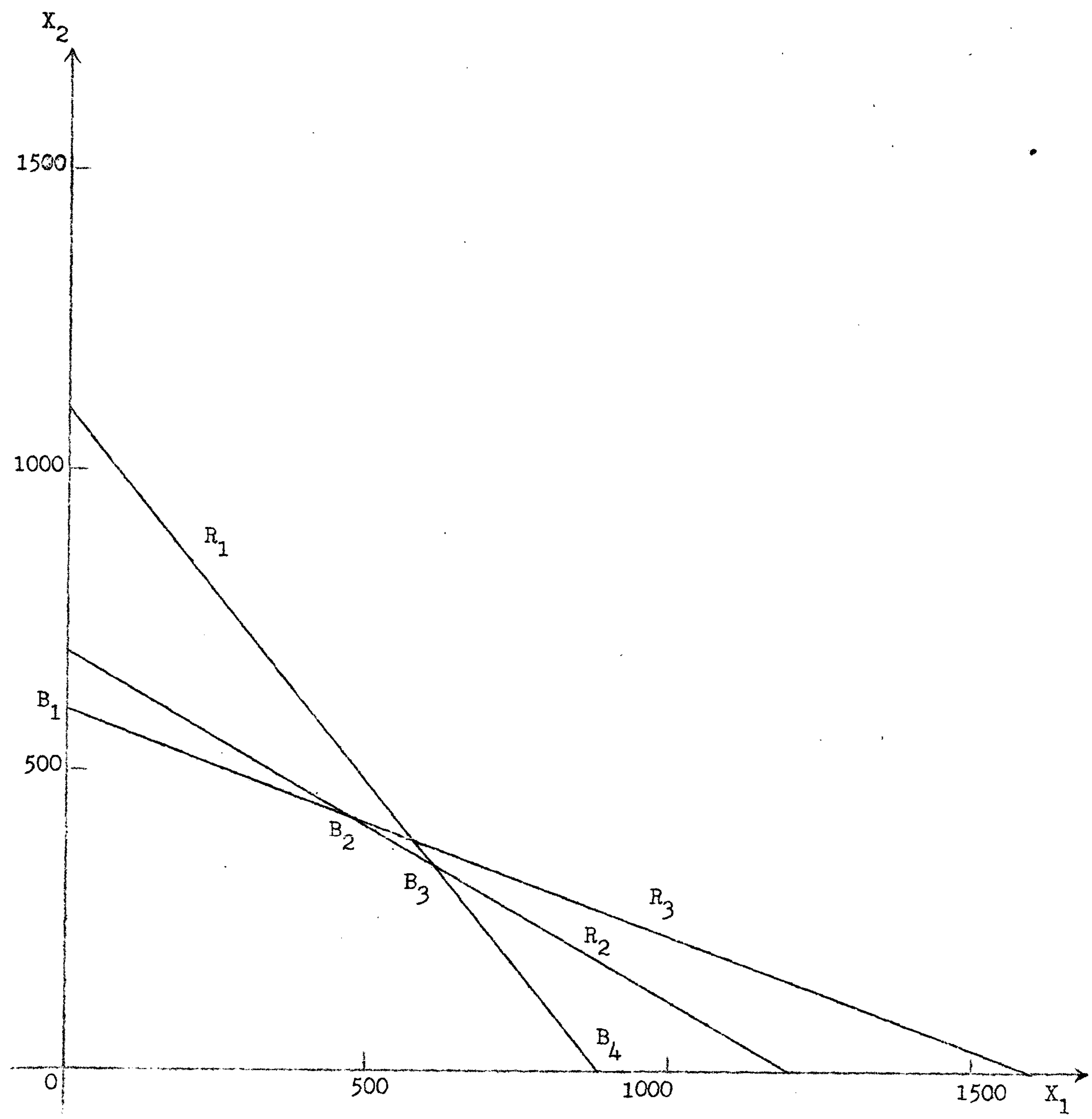
4a etapa:

En esta solución básica tenemos un programa óptimo, que corresponde a una producción de 626,088 y 334,782 unidades de los productos A_1 y A_2, respectivamente, que dará un beneficio máximo de 898,26 escudos. Este programa esta representado en el gráfico por el punto B_3 y supone una ocupación plena de las máquinas M_1 y M_2, y una capacidad ociosa de 486,96 minutos en la máquina M_3.

Como puede observarse, en el gráfico, el método simplex, en el caso bi-dimensional, consiste: en partir de un vértice del polígno convexo formado por la intersección del sistema ($x_i \geq 0$) y las rectas que constituyen

/Gráfica 3.3.1

Gráfico 3.3.1



/las restricciones

las restricciones y desplazarse sucesivamente a otros que dan origen a un valor cada vez más elevado de la función económica hasta llegar después de un número finito de etapas, al máximo pedido.

Generalizando para el caso de n-dimensional, se puede afirmar: que toda solución que dé un máximo o un mínimo de la función z corresponderá a uno de los vertices del poliedro convexo formado por intersección del enésimo poliedro de referencia ($x_i \geq 0$) y los hiper-planos que constituyen las restricciones. Esta afirmación es rigurosa si el máximo o el mínimo se alcanza en un solo punto. Son posibles no obstante casos de degeneración en las cuales el máximo o el mínimo se alcanza en todos y cada uno de los puntos de una cara.

Es fundamental hacer notar que todos los poliedros así constituidos son convexos. En esta forma, estamos seguros de que al desplazarse de vértice en vértice aumentando z en cada uno de los casos o disminuyendo z, necesariamente se llegará al máximo o al mínimo.

3.4 Condiciones para que la función económica tenga un óptimo

Si en un programa lineal existen soluciones posibles, se pueden formular las condiciones de existencia de un óptimo, de la forma siguiente:

Hay tres alternativas: A_1, A_2 y A_3

A_1 : max.z $= \infty$;

A_2 : max.z es finito y ha sido obtenido mediante la presente solución;

A_3 : no se ha obtenido una solución óptima de z, y debe buscarse un valor mayor.

I) Si cuando al menos un valor de la expresión $z_j - c_j$ es menor que cero, entonces A_1 o A_3 es verdadera.

i) Si todas las $x_{ij} \leq 0$, para las columnas $z_j - c_j \leq 0$, entonces A_1 será la verdadera. En efecto, en este caso los coeficientes de las P_i y de las P_j en (3.1.11)

$$(3.4.1) \quad (x_{n+1} + \theta x_{n+1,j}) P_{n+1} + (x_{n+2} + \theta x_{n+2,j}) P_{n+2} + \dots + (x_{n+m} + \theta x_{n+m,j}) P_{n+m} + \theta P_j = P_o$$

/Son positivos

Son positivos, constituyendo una solución posible, que por otra parte no es una solución básica, puesto que contiene m + 1 variables no nulas.

El valor correspondiente de z, es

$$(3.4.2) \qquad z = \sum_{i = n+1}^{n+m} (x_i + \theta x_{ij}) c_i + \theta c_j$$

θ puede ser tan grande como se desee, por consiguiente lo mismo sucede para z, y en consecuencia no hay máximo.

ii) Si algunos de los valores de $x_{ij} > 0$, se puede mejorar la solución lo cual significaría que A_3 es verdadero.

II) Si se cumple que $z_j - c_j \geq 0$, entonces se ha alcanzado el máximo para la función económica z y por lo tanto la alternativa A_2 es verdadera.

En el caso de un mínimo, reemplazamos en la exposición de las condiciones para que la función económica tenga un óptimo la alternativa max $z = \infty$ por min $z = \infty$ y la expresión $z_j - c_j$ por $c_j - z_j$.

4. Método de las sub-matrices

4.1 Planteamiento general

Para facilitar la presentación del método de las sub-matrices, consideremos el problema de buscar un máximo en el caso de las desigualdades, después pasaremos al caso general de la investigación de un óptimo con cualquier tipo de ecuaciones.

Consideremos en primer lugar el problema de maximizar:

$$(4.1.1) \qquad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots + c_j x_j + \dots\dots + c_n x_n$$

Estando sujetas a las restricciones

$$(4.1.2) \left\{ \begin{array}{l} x_{11} x_1 + x_{12} x_2 + \dots\dots + x_{1j} x_j + \dots\dots + x_{1n} x_n \leq b_1 \\ x_{21} x_1 + x_{22} x_2 + \dots\dots + x_{2j} x_j + \dots\dots + x_{2n} x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{i1} x_1 + x_{i2} x_2 + \dots\dots + x_{ij} x_j + \dots\dots + x_{in} x_n \leq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} x_1 + x_{m2} x_2 + \dots\dots + x_{mj} x_j + \dots\dots + x_{mn} x_n \leq b_m \end{array} \right.$$

/(4.1.3)

(4.1.3) $x_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$.

Las relaciones (4.1.2) y (4.1.1), después de introducir las variables de holgura, tienen la siguiente expresión matricial.

$$(4.1.4)\quad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} & 1 & 0\ldots0\ldots0 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} & 0 & 1\ldots0\ldots0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} & 0 & 0\ldots1\ldots0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} & 0 & 0\ldots0\ldots1 \\ -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_j & \cdots & -c_n & 0 & 0\ldots0\ldots0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \\ -z \end{bmatrix}$$

Supongamos que todas las cantidades b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), son positivas. Como se explicará más adelante y basados en facilidades de cálculo, se ha cambiado el signo de z.

Descomponiendo el sistema anterior en submatrices, tendremos:

$$(4.1.5)\quad \left[\begin{array}{c|cccccccc} x_{11} & x_{12} \cdots & x_{1j} \cdots & x_{1n} & 1 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 \\ \hline x_{21} & x_{22} & x_{2j} & x_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{ij} & x_{in} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{mj} & x_{mn} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_j & -c_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \\ -z \end{bmatrix}$$

Si hacemos:

(4.1.6) $\alpha_1 = x_{11}$

/(4.1.7)

(4.1.7) $\alpha_2 = [x_{12} \cdots x_{1j} \cdots x_{1n} \quad 1 \quad 0 \ldots 0 \ldots 0]$

(4.1.8) $$\alpha_3 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{i1} \\ x_{m1} \\ -c_1 \end{bmatrix}$$

(4.1.9) $$\alpha_4 = \begin{bmatrix} x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ -c_2 & & -c_j & & -c_n & 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

(4.1.10) $\lambda_1 = x_1$

(4.1.11) $\beta_1 = b_1$

(4.1.12) $$\lambda_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$ (4.1.12) $$\beta_2 = \begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \\ -z \end{bmatrix}$$

Ahora el sistema de ecuaciones (4.1.5) tendrá la siguiente forma:

(4.1.13) $$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

O sea:

(4.1.14) $$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 = \beta_1 \\ \alpha_3 \lambda_1 + \alpha_4 \lambda_2 = \beta_2 \end{cases}$$

Tratemos a continuación de transformar el sistema anterior de tal manera que el nuevo sistema se presente bajo la forma:

/(4.1.15)

$$(4.1.15)\quad \begin{cases} \lambda_1 + \alpha'_2\, \lambda_2 = \beta'_1 \\ \alpha'_4\, \lambda_2 = \beta'_2 \end{cases}$$

En tal forma que el conjunto de las soluciones de (4.1.14), permanezca invariable en la transformación que conduce a (4.1.15). Como puede verse esto equivale a reemplazar la primera columna de (4.1.4) por el vector columna:

$$(4.1.16)\quad \{1 \quad 0 \,\ldots\ldots\, 0 \quad 0\}$$

Sacando λ_1 de la primera ecuación del sistema (4.1.14):

$$(4.1.17)\quad \lambda_1 - \alpha^{-1} \beta_1 \quad - \alpha_1^{-1}\, \alpha_2\, \lambda_2$$

y sustituyendo el valor de λ_1 en la segunda ecuación:

$$(4.1.18)\quad \alpha_3\, \alpha_1^{-1} \beta_1 - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_4\, \lambda_2 = \beta_2$$

o bien:

$$(4.1.19)\quad (\alpha_4 - \alpha_3\, \alpha_1^{-1} \alpha_2)\, \lambda_2 = \beta_2 - \alpha_3\, \alpha_1^{-1} \beta_1$$

El sistema de ecuaciones (4.1.14), se convierte en:

$$(4.1.20)\quad \begin{cases} \lambda_1 + \alpha_1^{-1} \alpha_2\, \lambda_2 = \alpha_1^{-1} \beta_1 \\ \left(\alpha_4 - \alpha_3\, \alpha_1^{-1} \alpha_2\right) \lambda_2 = \beta_2 - \alpha_3\, \alpha_1^{-1} \beta_1 \end{cases}$$

que es la nueva forma buscada. Identifiquemos el sistema de ecuaciones (4.1.20) con el sistema (4.1.15), obteniéndose así:

$$(4.1.21)\quad \alpha'_1 = 1$$

$$(4.1.22)\quad \alpha'_2 = \alpha_1^{-1} \alpha_2$$

$$(4.1.23)\quad \beta'_1 = \alpha_1^{-1} \beta_1$$

$$(4.1.24)\quad \alpha'_3 = 0$$

/(4.1.25)

(4.1.25) $\alpha'_4 = \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \alpha_2$

(4.1.26) $\beta'_2 = \beta_2 - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \beta_1$

4.2 Aplicación del método de las submatrices

Con el objeto de presentar y plantear en una forma más clara el método de las submatrices, consideraremos el siguiente problema numerico.

Se desea producir armas anti aereas de defensa: cohetes teleguiados, aviones de caza y cañones. Cada tipo de arma requiere por unidad las cantidades de mano de obra y material que están indicadas en el cuadro 4.2.1. En la última columna de ese cuadro están anotadas las probabilidades de exito de cada arma.

Cuadro 4.2.1

Tipo de arma	Requerimiento por unidad		Probabilidad de exito
	Mano de obra	Material	
Cohetes teleguiados	0,003	0,001	0,40
Aviones de caza	0,001	0,001	0,30
Cañones	0,001	0,003	0,40

Las cantidades disponibles de mano de obra y material son iguales, respectivamente, a 50 y a 25 unidades.

El problema se presentará en los términos siguientes:

¿Cuantas unidades se debe producir de cada tipo de arma, a fin de que el número probable de aciertos sea máximo?

Planteamiento:

Si suponemos que x_1, x_2 y x_3 representan, respectivamente, las cantidades de cohetes teleguiados, aviones de caza y cañones; y representamos por z el número esperado de aciertos; se trata de maximizar:

(4.2.1) $z = 0{,}40\ x_1 + 0{,}30\ x_2 + 0{,}40\ x_3$

que también se puede expresar en la forma:

(4.2.2) $-z = -0{,}40\ x_1 - 0{,}30\ x_2 - 0{,}40\ x_3$

Sujeta a las restricciones:

/(4.2.3)

$$(4.2.3) \qquad \begin{aligned} 0{,}003\, x_1 + 0{,}001\, x_2 + 0{,}001\, x_3 &\leq 50 \\ 0{,}001\, x_1 + 0{,}001\, x_2 + 0{,}003\, x_3 &\leq 25 \end{aligned}$$

$$(4.2.4) \qquad x_j \geq 0 \text{ para } j = 1,\ 2,\ 3$$

Introduciendo las variables de holgura, tenemos:

$$(4.2.5) \qquad \begin{cases} 0{,}003\, x_1 + 0{,}001\, x_2 + 0{,}001\, x_3 + x_4 + 0.x_5 = 50 \\ 0{,}001\, x_1 + 0{,}001\, x_2 + 0{,}003\, x_3 + 0.x_4 + x_5 = 25 \end{cases}$$

$$(4.2.6) \qquad -0{,}400\, x_1 - 0{,}300\, x_2 - 0{,}400\, x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 = -z$$

cuya expresión matricial es:

$$(4.2.7) \qquad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|cccc} 0{,}003 & 0{,}001 & 0{,}001 & 1 & 0 \\ \hline 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}003 & 0 & 1 \\ -0{,}400 & -0{,}300 & -0{,}400 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} (1) & \quad(2) & \quad(3) & \quad(4) & (5) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ \hline 25 \\ -z \end{bmatrix}$$

La primera solución básica está formada por los vectores P_4 y P_5; o sea:

$$(4.2.8) \qquad x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 50 \quad y \quad x_5 = 25$$

A esta solución le corresponde en la función el valor:

$$(4.2.9) \qquad z = 0{,}40 \,.\, 0 + 0{,}30 \,.\, 0 + 0{,}40 \,.\, 0 + 0 \,.\, 0 + 0 \,.\, 0 = 0$$

Ahora, apliquemos los criterios de Dantzig para determinar cual es el vector que debe entrar en la solución básica y cual es el que debe salir. Examinando los elementos de la última línea se verifica que las cantidades más negativas corresponden a los vectores (1) y (3), por esta razón podemos elegir uno de los dos vectores, y por ser el vector (1) en este caso la primera columna de la matriz será elegido este, en seguida obtenemos los cocientes:

$$(4.2.10) \qquad \begin{cases} \dfrac{50}{0{,}003} = 16{,}667 \\ \dfrac{25}{0{,}001} = 25{,}00 \end{cases}$$

Seleccionaremos el elemento de la primera fila, para el cual se ha obtenido la menor cantidad positiva.

/Descompongamos pues,

Descompongamos pues, en sub-matrices como se indica en (4.2.7); obteniéndose:

(4.2.11) $\alpha'_1 = 1$

(4.2.12) $\alpha'_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2 = \begin{bmatrix} 333,33333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,001 & 0,001 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0,33333 & 0,33333 & 333,33333 & 0 \end{bmatrix}$

(4.2.13) $\alpha'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(4.2.14) $\alpha'_4 = \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,003 & 0 & 1 \\ -0,300 & -0,400 & 0 & 0 \end{bmatrix} -$

$- \begin{bmatrix} 0,001 \\ -0,400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,33333 & 0,33333 & 333,33333 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0,00067 & 0,00267 & -0,33333 & 1 \\ -0,16667 & -0,26667 & 133,33333 & 0 \end{bmatrix}$

(4.2.15) $\beta'_1 = \alpha_1^{-1}\beta_1 = 333,33333 \cdot 50 = 16.666,66650$

(4.2.16) $\beta'_2 = \beta_2 - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \beta_1 = \begin{bmatrix} 25 \\ -z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,001 \\ -0,400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16.666,66650 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 25 \\ -z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16,66667 \\ -6666,66660 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,33333 \\ -z + 6.666,66660 \end{bmatrix}$

Lo que da

(4.2.17)
$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0,33333 & 0,33333 & 333,33333 & 0 \\ 0 & 0,00067 & 0,00267 & -0,33333 & 1 \\ 0 & -0,16667 & -0,26667 & 133,33333 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 16666,66650 \\ 8,33333 \\ -z + 6666,66660 \end{bmatrix}$$

Esta vez según los criterios de Dantzig, seleccionaremos la tercera columna y la segunda fila. Efectuemos la permutación para colocarlos en la primera columna y en la primera fila.

/(4.2.18)

$$(4.2.18)\quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|cccc} 0,00267 & 0 & 0,00067 & -0,33333 & 1 \\ 0,33333 & 1 & 0,33333 & 333,33333 & 0 \\ -0,26667 & 0 & -0,16667 & 133,33333 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} (3) & (1) & (2) & (4) & (5) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,33333 \\ 16666,66650 \\ -z+6666,66660 \end{bmatrix}$$

Resulta

$$(4.2.19)\quad \alpha'_1 = 1$$

$$(4.2.20)\quad \alpha'_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2 = \begin{bmatrix} 374,53184 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,00067 & -0,33333 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0,25094 & -124,84270 & 374,53184 \end{bmatrix}$$

$$(4.2.21)\quad \alpha'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(4.2.22)\quad \alpha'_4 = \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_1^{-1}\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,33333 & 333,33333 & 0 \\ 0 & -0,16667 & 133,33333 & 0 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} 0,33333 \\ -0,26667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,25094 & -124,84270 & 374,53184 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0,24968 & 291.71951 & -124,84270 \\ 0 & -0,09975 & 100,04153 & 99,87641 \end{bmatrix}$$

$$(4.2.23)\quad \beta'_1 = \alpha_1^{-1}\beta_1 = 374,53184 \cdot 8,33333 = 3121,09742$$

$$(4.2.24)\quad \beta'_4 = \beta_4 - \alpha_3 \alpha_1^{-1}\beta_1 = \begin{bmatrix} 16666,66650 \\ -z+6666,66660 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,33333 \\ -0,26667 \end{bmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{bmatrix} 3121,09742 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16666,66650 \\ -z+6666,66660 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1040,35540 \\ -832,30305 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15626,31110 \\ -z+7498,96965 \end{bmatrix}$$

Lo que dá:

$$(4.2.25)\quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,25095 & -124,84270 & 374,53184 \\ 0 & 1 & 0,24968 & 291,71951 & -124,84270 \\ 0 & 0 & -0.09975 & 100,04153 & 99,87641 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} (3) & (1) & (2) & (4) & (5) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 3121,09742 \\ 15626,31110 \\ -z+7498,96965 \end{bmatrix}$$

/Aplicando los

Continuando con la aplicación de los criterios de Dantzig, seleccionaremos la tercera columna y la primera fila. Efectuemos la permutación con el objeto colocarla en la primera columna.

$$(4.2.26) \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:ccrr} \underline{0,25094} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{-124,84270} & \underline{374,53184} \\ 0,24968 & 0 & 1 & 291,71951 & -124,84270 \\ -0,09975 & 0 & 0 & 100,04153 & 99,87641 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} (2) & (3) & (1) & (4) & (5) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_2 \\ \overline{x_3} \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,121,09742 \\ 15\,626,31110 \\ -z + 7\,498,96965 \end{bmatrix}$$

/Descompongamos ahora,

Descompongamos ahora, en submatrices como se indica en (4.2.26), obteniéndose:

(4.2.27) $\alpha'_1 = 1$

(4.2.28) $\alpha'_2 = \begin{bmatrix} 3,98502 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -124,84270 & 374,53184 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3,98502 & 0 & -497,50066 & 1492,51687 \end{bmatrix}$

(4.2.29) $\alpha'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(4.2.30) $\alpha'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 291.71951 & -124,84270 \\ 0 & 0 & 100,04153 & 99,87641 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,24968 \\ -0,09975 \end{bmatrix} \cdot$

$\cdot \begin{bmatrix} 3,98502 & 0 & -497,50066 & 1492,51687 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0,99498 & 1 & 415,93547 & -497,49431 \\ 0,39751 & 0 & 50,41584 & 248,75497 \end{bmatrix}$

(4.2.31) $\beta'_1 = \alpha_1^{-1} \beta_1 = 3,98502 \cdot 3121,09742 = 12437,63564$

(4.2.32) $\beta'_2 = \beta_2 - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \beta_1 = \begin{bmatrix} 15626,31110 \\ -z+7498,96965 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,24968 \\ 0,09975 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12437,63566 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 15626,31110 \\ -z+ \ 7498,96965 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3105,42557 \\ -1240,65416 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12520,88223 \\ -z+8739,62381 \end{bmatrix}$

Lo que da:

$$(4.2.33) \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3,98502 & 0 & -497,50066 & 1942,51687 \\ 0 & 0,99498 & 1 & 415,93547 & -497,49431 \\ 0 & 0,39751 & 0 & 50,41584 & 248,75497 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} (2) & (3) & (1) & (4) & (5) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12437,63564 \\ 12520,88223 \\ -z+8739,62381 \end{bmatrix}.$$

No hay ya números negativos en la última fila, la solución básica obtenida con los vectores (2) y (1) constituye la solución óptima, que podemos expresar de esta manera:

/(4.2.34)

$$
(4.2.34) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\ 437{,}63564 \\ 12\ 520.88223 \\ -z + 8\ 739{,}62381 \end{bmatrix}
$$

O sea:

$$
(4.2.35) \quad \begin{cases} x_2 = 12437{,}63564 \\ x_1 = 12520{,}88223 \\ 0 = -z + 8739{,}62381 \end{cases}
$$

Por lo tanto la interpretación de la solución expresada más arriba teniendo presente el ejercicio práctico que se ha planteado, será la siguiente:

Se debe producir 12 521 cohetes teleguiados, 12 438 aviones de caza, cero cañones y las variables de holgura de mano de obra y material son iguales a cero. Este programa de producción dá un número probable de aciertos igual a 8 740.

4.3 La técnica de la base artificial

Para la aplicación del método de las submatrices en la resolución de los problemas de programación lineal son necesarias las siguientes condiciones:

a) que todos los elementos del vector P_o, sean no negativos ($b_i \geq 0$);

b) que los m vectores que constituyen la solución básica inicial formen una matriz unidad.

La primera condición es siempre posible porque en el caso de existir un elemento del vector P_o negativo, se puede transformar en positivo, multiplicando por menos uno (-1) la igualdad correspondiente.

Generalmente, cuando algunas de las restricciones se presentan bajo la forma de igualdades o de desigualdades mayeres o iguales, no se tiene de inmediato en la solución básica inicial una matriz unidad. Para esto se necesita agregar a estas restricciones las variables artificiales o complementarias.

En el problema de maximizar la función económica: esta se transforma por la adición de las variables artificiales, para las que se toman coeficientes iguales y muy grandes, de signo negativo; de esta forma se tiene la seguridad de que la solución que corresponde al máximo no contendrá estas variables.

En cuanto que, en los problemas de minimizar las variables artificiales en la función económica tienen coeficientes iguales y muy grandes con signo positivo; para tener la seguridad de que no se encontrarán estas variables artificiales en la solución que corresponda al mínimo.

Consideremos el problema de selección de materias primas (2.2) cuya función económica es:

(4.3.1) $z = 40\ x_1 + 20\ x_2 + 24\ x_3 + 30\ x_4$

Sujeta a las restricciones:

(4.3.2) $0,51\ x_1 + 0,11\ x_2 + 0,14\ x_3 + 0,36\ x_4 \geq 0,18$

(4.3.3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

(4.3.4) $x_j \geq 0$ para $j = 1, 2, 3, 4$

/Transformemos la

Transformemos la restricción (4.3.2) en una igualdad con la introducción de la variable de holgura correspondiente, de esta manera tenemos:

$$(4.3.5) \qquad z = 0.x_5 + 40\ x_1 + 20\ x_2 + 24\ x_3 + 30\ x_4$$

$$(4.3.6) \qquad -x_5 + 0{,}51\ x_1 + 0{,}11\ x_2 + 0{,}14\ x_3 + 0{,}36\ x_4 = 0{,}18$$

$$(4.3.7) \qquad 0{,}x_5 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

cuya expresión matricial es la siguiente:

$$(4.3.8) \qquad \begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\begin{bmatrix} -1 & 0{,}51 & 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}36 \\ 0 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}} \\ (5) & (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}18 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse en cualquier solución básica inicial que se considere, los vectores que la constituyen no forman una matriz unidad. Para utilizar el método de las submatrices en la resolución del problema es necesario introducir tanto en la restricción (4.3.6) como en la (4.3.7) las correspondientes variables artificiales, y como es un problema de minimizar los coeficientes de las variables artificiales en la función económica estos deben ser muy grandes y de signo positivo, de esta forma tenemos:

$$(4.3.9) \qquad z = Mx_6 + Mx_7 + 0.x_5 + 40\ x_1 + 20\ x_2 + 24\ x_3 + 30\ x_4$$

$$(4.3.10) \qquad x_6 + 0.x_7 - x_5 + 0{,}51\ x_1 + 0{,}11\ x_2 + 0{,}14\ x_3 + 0{,}36\ x_4 = 0{,}18$$

$$(4.3.11) \qquad 0.x_6 + x_7 + 0.x_5 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1{,}00$$

cuya expresión matricial incluyendo la función económica con el signo cambiado, es la siguiente:

/(4.3.12)

$$(4.3.12)\quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & -1 & 0{,}51 & 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}36 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \\ \hline -M & -M & 0 & -40{,}00 & -20{,}00 & -24{,}00 & -30{,}00 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccc} (6) & (7) & (5) & (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \end{array} \cdot \left[\begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ \hline x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0{,}18 \\ 1{,}00 \\ \hline -z \end{array}\right]$$

Descompongamos ahora el sistema anterior en submatrices como se indica en (4.3.12), obteniéndose:

$$(4.3.13)\quad \alpha'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4.3.14)\quad \alpha'_2 = \alpha_1^{-1} \cdot \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0{,}51 & 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}36 \\ 0 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0{,}51 & 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}36 \\ 0 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

$$(4.3.15)\quad \alpha'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4.3.16)\quad \alpha'_4 = \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & -40{,}00 & -20{,}00 & -24{,}00 & -30{,}00 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -M & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0{,}51 & 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}36 \\ 0 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -m & -40{,}00 + 1{,}51M & -20{,}00 + 1{,}11M & -24{,}00 + 1{,}14M & -30{,}00 + 1{,}36M \end{bmatrix}$$

$$(4.3.17)\quad \beta'_1 = \alpha_1^{-1} \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}18 \\ 1{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}18 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

$$(4.3.18)\quad \beta'_2 = \beta_2 - \alpha_3^{-1} \alpha_1 \beta_1 = \begin{bmatrix} -z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -M & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}18 \\ 1{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z + 1{,}18M \end{bmatrix}$$

Lo que da

/(4.3.19)

$$(4.3.19)\quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0{,}51 & 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}36 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \\ 0 & 0 & -M & (-40{,}00 + 1{,}51M) & (-20{,}00 + 1{,}11M) & (-24{,}00 + 1{,}14M) & (-30{,}00 + 1{,}36M) \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} (6) & (7) & (5) & (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}18 \\ 1{,}00 \\ -z + 1{,}18M \end{bmatrix}$$

La primera solución está formada por los vectores P_6 y P_7, correspondiente correspondientes a las variables artificiales x_6 y x_7; o sea:

$$(4.3.20)\quad x_1 = 0;\ \ x_2 = 0;\ \ x_3 = 0;\ \ x_4 = 0;\ \ x_5 = 0;\ \ x_6 = 0{,}18 \text{ y } x_7 = 1{,}00$$

A esta solución corresponde en la función primitiva el valor:

$$(4.3.21)\quad z = M.0{,}18 + M.1{,}00 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 1{,}18\ M$$

Ahora, apliquemos los criterios de Dantzig para determinar cual es el vector que debe entrar en la solución básica y cual es el que debe salir. Examinando los elementos de la última línea se verifica que la cantidad más grande y positiva corresponde al vector (1), por esta razón será elegido este, a continuación obtenemos los cocientes:

$$(4.3.22)\quad \begin{cases} \dfrac{0{,}18}{0{,}51} = 0{,}35 \\[2ex] \dfrac{1{,}00}{1{,}00} = 1{,}00 \end{cases}$$

Seleccionaremos el elemento de la primera fila, para el cual se ha obtenido la menor cantidad positiva.

Efectuemos ahora la permutación del vector (1) para colocarlo en la primera columna.

/(4.3.23)

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c|ccccccc}
0{,}51 & 1 & 0 & -1 & 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}36 \\
1{,}00 & 0 & 1 & 0 & 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \\
(1{,}51M-40{,}00) & 0 & 0 & -M & (1{,}11M-20{,}00) & (1{,}14M-24{,}00) & (1{,}36M-30{,}00)
\end{array}\right] \\
\begin{array}{ccccccc}
(1) & (6) & (7) & (5) & (2) & (3) & (4)
\end{array}
\end{array}
$$

(4.3.23)

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}18 \\ 1{,}00 \\ -z + 1{,}18M \end{bmatrix}
$$

La transformación proporciona:

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1{,}96078 & 0 & -1{,}96078 & 0{,}21569 & 0{,}27451 & 0{,}70588 \\
0 & -1{,}96078 & 1 & 1{,}96078 & 0{,}78431 & 0{,}72549 & 0{,}29412 \\
0 & (-2{,}96078M + 78{,}43120) & 0 & (1{,}96078M - 78{,}43120) & (0{,}78431M - 11{,}37240) & (0{,}72549M - 13{,}01960) & (0{,}29412M - 1{,}76480)
\end{array}\right] \\
\begin{array}{ccccccc}
(1) & (6) & (7) & (5) & (2) & (3) & (4)
\end{array}
\end{array}
$$

(4.3.24)

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}35294 \\ 0{,}64706 \\ -z + 0{,}64706M + 14{,}11760 \end{bmatrix}
$$

/Para llegar

Para llegar a la solución óptima de este problema son necesarias tres etapas más cuyos resultados son los siguientes:

$$
(4.3.25)\quad
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0,51000 & 0,40000 & 1,37000 & 0,15000 \\
0 & 1 & 0 & 1,00000 & 1,00000 & 1,00000 & 1,00000 \\
0 & 0 & -M & (-M+39,99991) & 20,00008 & 15,99994 & 9,99988
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
(5) & (1) & (6) & (7) & (2) & (3) & (4)
\end{array}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0,33000 \\ 1,00000 \\ -z+39,99990 \end{bmatrix}
$$

$$
(4.3.26)\quad
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 25,0000 & 0 & -2,50000 & 1,27500 & 0,92500 & 0,37500 \\
0 & -2,5000 & 1 & 2,50000 & -0,27500 & 0,07500 & 0,62500 \\
0 & -50,0020 & 0 & (-M+50,0020) & (-M+34,49981) & -2,50013 & 2,49925
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
(2) & (5) & (1) & (6) & (7) & (3) & (4)
\end{array}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0,82500 \\ 0,17500 \\ -z+23,49983 \end{bmatrix}
$$

$$
(4.3.27)\quad
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -4,00000 & 1,60000 & 4,00000 & -0,44000 & 0,12000 \\
0 & 1 & 4,00000 & -0,60000 & -4,00000 & 1,44000 & 0,88000 \\
0 & 0 & -40,00320 & -3,99880 & (-M+40,00320) & (-M+15,59948) & -2,80004
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
(4) & (2) & (5) & (1) & (6) & (7) & (3)
\end{array}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0,28000 \\ 0,72000 \\ -z+22,80004 \end{bmatrix}
$$

/Examinando la

Examinando la última línea podemos observar que se verifica que todos los elementos son negativos o nulos, por lo tanto no hay posibilidades de mejorar el valor de z, obteniendo por lo tanto de esta forma la solución óptima del problema, que expresaremos en la forma siguiente:

$$(4.3.28) \qquad \begin{cases} x_1 = 0; \quad x_2 = 0{,}72; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0{,}28 \\ x_5 = 0; \quad x_6 = 0; \quad x_7 = 0 \\ z = 22{,}80 \end{cases}$$

5. Tabla del Simplex

5.1 Planteamiento general

Consideremos las ecuaciones matriciales comprendidas entre la (4.1.21) y (4.1.26), expresandolas utilizando los símbolos empleados en (4.1.4); si r es el subindice en la fila permutada para ser colocada en lamprimera fila, y j es el subindice de la columna permutada para ser colocado en la primera columna se obtiene:

	En lugar de	Se escribirá
(5.1.1)	$\alpha'_1 = 1$	$x'_{rj} = 1$
(5.1.2)	$\alpha'_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2$	$x'_{rl} = \dfrac{x_{rl}}{x_{rj}} \quad l \neq j$
(5.1.3)	$\alpha'_3 = 0$	$x'_{ij} = 0$ $z'_j - cj = 0 \qquad i \neq c$
(5.1.4)	$\alpha'_4 = \alpha_4 - \alpha_3\alpha_1^{-1}\alpha_2$	$x'_{il} = x_{il} - x_{ij}\left(\dfrac{x_{rl}}{x_{rj}}\right)$ $i \neq r \quad y \quad l \neq j$ $z'_l - c_l = (z_l - c_l) - (z_j - c_j)\left(\dfrac{x_{rl}}{x_{rj}}\right)$ $l \neq j$

/(5.1.5)

En lugar de		Se escribirá
(5.1.5)	$\beta'_1 = \alpha_1^{-1} \beta_1$	$b'_r = \frac{b_n}{x_{rj}}$
(5.1.6)	$\beta'_2 = \beta_2 - \alpha_3 \alpha^{-1} \beta_1$	$b'_i = b_i - x_{ij}\left(\frac{b_n}{x_{rj}}\right) \quad i \neq r$ $-z' = -\left[z - (z_j - c_j)\left(\frac{b_n}{x_{rj}}\right)\right]$

Si hacemos:

$$(5.1.7) \qquad b_r = x_{ro}, \quad b_i = x_{io} \quad y \quad z_o = x_{m+1},$$

las relaciones anteriores pueden expresarse en una forma más condensada.

$$(5.1.8) \quad \begin{cases} x'_{rl} = \dfrac{x_{rl}}{x_{rj}} & l = 0, 1, 2, \ldots, n+m \\ x'_{il} = x_{il} - x_{ij}\left(\dfrac{x_{re}}{x_{rj}}\right) & i \neq r \\ & l = 0, 1, 2, \ldots, n+m \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las relaciones que abarcan las referencias (5.1.7) y (5.1.8) arreglamos la matriz del problema como si muestra en la tabla 5.1. En la práctica no es necesario agrupar entre sí vectores unitarios, en esta ocasión se hará únicamente con propósito ilustrativo.

De las ecuaciones del problema dadas por $AX = b$, tenemos que z_j para $j = 0, 1, 2, \ldots, n+m$ se obtiene tomando el producto interno del vector j con el vector columna c, esto es:

$$z_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i x_{ij} \quad \text{para} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n+m$$

que quedan localizados en la fila $(m+2)$ en sus respectivas columnas.

Los elementos z_o y $z_j - c_j$ entran en la fila $(m+1)$ en sus respectivas columnas. Las $z_j - c_j$ para aquellos vectores que están en la base serán siempre iguales a cero.

/Tabla 5.1

Tabla 5.1 Paso inicial del Procedimiento de Cómputo

i	C_j	$\longrightarrow$		c_{n+1}	c_{n+2}	•	c_{n+r}	•	c_{n+m}	c_1	•	c_j	•	c_e	•	c_n
	$\downarrow$	Base	P_o	P_{n+1}	P_{n+2}	•	P_{n+r}	•	P_{n+m}	P_1	•	P_j	•	P_1	•	P_n
1	c_{n+1}	P_{n+1}	$X_{n+1,0}$	1	0	•	0	•	0	X_{11}	•	X_{1j}	•	X_{11}	•	X_{1n}
2	c_{n+2}	P_{n+2}	$X_{n+2,0}$	0	1	•	0	•	0	X_{21}	•	X_{2j}	•	X_{21}	•	X_{2n}
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
r	c_{n+r}	P_{n+r}	$X_{n+r,0}$	0	0	•	1	•	•	X_{r1}	•	X_{rj}	•	X_{r1}	•	X_{rn}
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
m	c_{n+m}	P_{n+m}	$X_{n+m,0}$	0	0	•	0	•	1	X_{m1}	•	X_{mj}	•	X_{m1}	•	X_{mn}
m+1			z_o	0	0	•	0	•	0	$z_1 - c_1$	•	$z_j - c_j$	•	$z_1 - c_1$	•	$z_n - c_n$
m+2			z_o	z_{n+1}	z_{n+2}	•	z_{n+r}	•	z_{n+m}	z_1	•	z_j	•	z_1	•	z_n

/Con objeto

Con objeto de obtener la nueva solución x', los nuevos vectores y las correspondientes $z'_j - c_j$, se transforman cada elemento de la tabla 5.1 mediante las fórmulas (5.1.8), exceptuando los elementos de la fila (m + 2) a la cual se le aplica la fórmula (5.1.9) donde:

$$z'_o = x'_{m+1,\,0} = x'_{m+2,\,0} \qquad z'_j = x'_{m+2,\,j}$$

$$z'_j - c_j = x'_{m+1,\,j}$$

Una vez que se dispone de una tabla inicial de cómputo, se continua el procedimiento simplex con la aplicación sucesiva de los pasos siguientes:

1. La prueba de los elementos $z_j - c_j$ para determinar si se ha encontrado una solución máxima, mediante la verificación de que $z_j - c_j \geq 0$ para todas las j.

2. La selección del vector que deberá, introducirse en la base si es cierto que $z_j - c_j < 0$, o sea, la selección del vector con $z_j - c_j$ el más negativo. Si hay empates, en ese caso la regla será seleccionar el vector con el menor (o el mayor) subindice j. Este criterio es el que comunmente se sigue en la mayor parte de los centros de cómputo habiendo sido probada su bondad. Cuando se usa esta regla, se requieren aproximadamente m cambios de base para llegar, desde la primera solución posible, hasta la máxima.

3. La selección del vector que va a ser eliminado de la base para asegurar la posibilidad de una nueva solución, o sea, el vector con

$\min\left(\dfrac{x_i}{x_{il}}\right)$ para aquellas $x_{il} > o$, donde l corresponde al vector seleccionado en el paso 2. Si todas las $x_{il} \leq o$, tendremos que la solución es ilimitada.

4. La transformación de la tabla por el procedimiento de eliminación completa para obtener la nueva solución y los elementos asociados.

Cada una de estas interacciones produce una nueva solución posible básica, o bien determinaremos una solución ilimitada.

Una aplicación del procedimiento simplex en la tabla inicial proporciona los valores transformados de la tabla 5.2

/Tabla 5.2

Tabla 5.2 Segundo paso del Procedimiento de Cómputo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
I	C_j	→		C_{n+1}	C_{n+2}	•	C_{n+r}	•	C_{n+m}	C_1	•	C_j	•	C_e	•	C_n
	↓	Base	P_o	P_{n+1}	P_{n+2}	•	P_{n+r}	•	P_{n+m}	P_1	•	P_j	•	P_e	•	P_n
1	C_{n+1}	P_{n+1}	$X'_{n+1,0}$	1	0	•	$X_{1,n+r}$	•	0	X'_{11}	•	X'_{1j}	•	0	•	X'_{1n}
2	C_{n+2}	P_{n+2}	$X'_{n+2,0}$	0	1	•	$X'_{2,n+r}$	•	0	X'_{21}	•	X'_{2j}	•	0	•	X'_{2n}
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
n	C_e	P_e	X'_{eo}	0	0	•	$X'_{r,n+r}$	•	0	X'_{r1}	•	X'_{rj}	•	1	•	X'_{rn}
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
M	C_{n+m}	P_{n+m}	X'_{n+mo}	0	0	•	$X'_{m,n+r}$	•	1	X'_{m1}	•	X'_{mj}	•	0	•	X'_{mn}
M+1			Z'_o	0	0	•	$Z'_{n+r}-C_{n+r}$	•	0	Z'_1-C_1	•	Z'_j-C_j	•	0	•	Z'_n-C_n
M+2			Z'_o	Z'_{n+1}	Z'_{n+2}	•	Z'_{n+r}	•	Z'_{n+m}	Z'_1	•	Z'_j	•	0	•	Z'_n