

Centro Latinoamericano de Demografía



COMISION ECONOMICA PARA AMERICA LATINA Y EL CARIBE (CEPAL)
CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA (CELADE)

Distr.
GENERAL
LC/DEM/G.63
Serie, B-55
7 de junio, 1988

TECNICAS DE PROYECCIONES DE POBLACION DE AREAS MENORES. APLICACION Y EVALUACION*

* Esta investigación ha sido realizada por la señorita María del Pilar Granados, becaria colombiana, como Tesis de Grado del Programa de Maestría en Demografía 1985-1986. La revisión y publicación de esta Tesis se enmarca en el Programa de Cooperación e Intercambio CELADE/Canadá.

INDICE

	PAGINA
INTRODUCCION	1
A. Algunas definiciones básicas	1
1. Estimaciones y proyecciones de población	1
2. Proyecciones a corto, mediano y largo plazo	1
3. Relación, razón, proporción, participaciones, porcentaje y tasa	3
4. Calidad de las estimaciones	3
5. Proyecciones independientes, dependientes, individuales y en conjunto	4
B. Datos básicos	4
I. METODOLOGIAS EMPLEADAS PARA PROYECTAR LA POBLACION DE AREAS MENORES	7
A. Métodos de extrapolación del crecimiento de la población	10
1. Método de extrapolación gráfica de las tendencias	12
2. Extrapolación por métodos matemáticos	13
a) Cambio aritmético o lineal	13
b) Cambio geométrico o exponencial	15
c) Función logística	17
d) La Curva de Gompertz	24
e) La curva exponencial modificada	27
f) Curvas polinómicas (parábolas o curvas no lineales)	29
3. Técnica de regresión	31
a) Regresión lineal	32
b) Regresión geométrica o exponencial	33
c) Regresión con curvas polinómicas	34
B. Métodos de extrapolación de proporciones	34
1. Métodos de proyección de la proporción de población del área menor, con respecto a la población del área mayor	35
a) Funciones matemáticas para proyectar proporciones	36
b) Método de la proporción del Buró de Censos (Census Bureau Ratio)	36
c) Método de la tendencia de las proporciones de Pickard (The Ratio Trend Method)	39
2. Método de Pickard de proyección de la participación en el crecimiento (Apportionment Method)	41
3. Método del diferencial de crecimiento	42
C. Métodos demográficos	44
1. Método de los componentes brutos	44
2. Método de migración-sobrevivencia	45
3. Método de los componentes	45
D. Métodos o modelos económicos	46
1. Método de regresión	46
2. Método de covarianzas modificado de Berry	46
3. Modelo Obers. Fazon de empleos	47
4. Razón al stock de viviendas proyectadas	48

E. Otros métodos	49
1. Modelo de dispersión Genessee-Finger Lakes Region	49
2. Modelo de Newling	50
F. Alcance del presente trabajo	50
II. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES POR EXTRAPOLACION DE LA POBLACION EN FORMA DIRECTA	53
A. Información básica	54
B. Medidas estadísticas utilizadas para evaluar la calidad de las estimaciones	59
1. Estadístico Chi-cuadrado de Pearson (χ^2_p)	59
2. Promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación	61
3. Porcentaje de desviaciones por encima del 5 ó 10 por ciento (>5% ó >10%)	61
4. Porcentaje de desviaciones positivas o negativas	61
5. Porcentaje de frecuencia en que cada método arroja las mejores y las peores proyecciones	62
C. Evaluación de los Resultados	62
1. Análisis de los resultados, considerando las proyecciones de las áreas menores en forma independiente	62
2. Análisis de los resultados controlando las proyecciones de las áreas menores, con el total del área mayor, obtenido en forma independiente	67
III. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES, A PARTIR DE LA EXTRAPOLACION DE PROPORCIONES	72
A. Información básica	72
B. Resultados	76
1. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de la proyección de las proporciones en forma individual para cada área menor	77
2. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de la proyección de las proporciones de población de las áreas menores con respecto al área mayor, ajustadas para que reproduzcan el valor de ésta última	81
IV. ANALISIS COMPARATIVO DE LOS PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS	89
A. Resultados globales	91
B. Análisis considerando los métodos que arrojan los mejores resultados	92
RESUMEN Y CONSIDERACIONES FINALES	94
BIBLIOGRAFIA	99

INTRODUCCION

En América Latina, cada día en forma más insistente y para propósitos de planeamiento económico, social, político y comercial, usuarios de los diferentes ámbitos del quehacer nacional demandan conocer la capacidad potencial de: consumidores, de mano de obra, de población estudiantil, etc., al nivel de divisiones administrativas intermedias y menores.

De acuerdo a esto, algunos necesitan conocer sólo la población total de cada localidad, mientras que otros la necesitan en forma más desagregada, por sexo y edad.

Cuando los encargados de elaborar estas proyecciones inician su trabajo se enfrentan al gran dilema de cuál metodología, de todas las que se citan en la literatura, se debe utilizar.

En tal sentido, el objetivo central de este trabajo es examinar algunas de las metodologías utilizadas con mayor frecuencia para proyectar la población total de cada área menor (ya sea a mediano o corto plazo) y decidir a cerca de la o las metodologías más adecuadas para su posterior aplicación en los diferentes países y al nivel geográfico mencionado.

Para evaluar la bondad de los métodos existentes y considerando que la información básica que estos utilizan se encuentra disponible en la mayoría de los países latinoamericanos; a partir de la información recopilada en cuatro censos consecutivos se han elaborado proyecciones de población basadas en los tres primeros, cuyos resultados, posteriormente se han confrontado con la población empadronada en el último para igual fecha.

El desarrollo de este trabajo comprende cinco capítulos:

- en el primer capítulo se presenta una breve descripción a cerca de cuándo se está en presencia de una proyección ó de una estimación de población y la información básica utilizada en esta investigación,
- el segundo, contiene una breve reseña sobre los procedimientos utilizados para proyectar la población de las áreas menores,
- en el tercero, se aplican y evalúan los procedimientos empleados para proyectar la población en términos absolutos,
- en el cuarto capítulo, se emplean y evalúan aquellos métodos que estiman la población total habiendo proyectado previamente las proporciones de población del área menor respecto a la del área mayor y
- el capítulo quinto, comprende un análisis comparativo de los resultados obtenidos en los dos capítulos anteriores.

I. DEFINICIONES Y DATOS BASICOS

A. Algunas definiciones básicas

Es conveniente, antes de entrar en el tema de este trabajo, definir algunos de los términos que se emplearán y que en algún momento pueden crear confusión.

1. Estimaciones y proyecciones de población

Las estimaciones de población son todo cálculo del volumen de la población, tanto para el presente como para el pasado y el futuro. Estas estimaciones "pueden obtenerse mediante varios procedimientos, incluso algunos de los que se usan para las proyecciones de población" ^{1/}.

"Se entiende por proyecciones de población, al conjunto de resultados provenientes de cálculos relativos a la evolución futura de una población, partiendo usualmente de ciertos supuestos con respecto al curso que seguirá la fecundidad, la mortalidad y las migraciones" ^{2/} o la tasa de crecimiento de la población o de la participación de una subárea en el área mayor. En otras palabras, se está haciendo referencia a la estimación de la población en el futuro.

En el presente trabajo, los términos estimación y extrapolación, se utilizarán como sinónimos de proyección.

2. Proyecciones a corto, mediano y largo plazo

El número de años que comprende el período de una proyección, para poder ser llamada corto, mediano o largo plazo, varía mucho entre los autores.

^{1/} Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y Centro Latinoamericano de Demografía, CELADE, Diccionario Demográfico Multilingüe, Ediciones Ordina, Lieja, Bélgica, 1985. Pág. 116.

^{2/} Ibid, pág. 115.

Según Shryock y Siegel (1971) ^{3/}, el largo plazo se refiere a proyecciones a una distancia superior a los 25 años, el mediano plazo a las proyecciones en un período de 10 a 25 años y el corto plazo se refiere a un período inferior a los 10 años.

Según Rincón (1984) ^{4/}, se consideran proyecciones a corto plazo a "las estimaciones de población que se hacen para períodos de más o menos 5 años", las proyecciones de mediano plazo "las que se hacen para un período futuro hasta de 15 a 20 años" y las de largo plazo, "las que buscan cubrir períodos de 30 o más años".

Según Pujol (1985) ^{5/}, las proyecciones a corto plazo serán aquellas que se hagan para un período hasta de 5 años, las de mediano plazo entre 5 y 15 años y las de largo plazo, aquellas que vayan más allá de los 15 años.

Posiblemente la diversidad de criterios que se ha empleado para estos períodos radica en la calidad de los datos básicos, en el período histórico del cual se dispone y en la mayor o menor estabilidad que una población pueda tener.

Por estas razones, teniendo en cuenta que en este trabajo se busca ver la bondad de las diferentes metodologías para proyectar la población de áreas menores en los países latinoamericanos, para los cuales se dispone, en casi la generalidad de los casos, de un período muy corto en el cual la calidad de la información en ningún momento es óptima y donde la migración interna cobra gran importancia en el crecimiento de las localidades, se ha considerado como más apropiado usar para este trabajo el número de años que define Pujol, para cada uno de estos plazos de las proyecciones.

^{3/} Shryock, Henry S., Jacob S., Siegel and Associates (1971), The methods and materials of demography. U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, U.S. Printing Office, Washington D.C., pág. 775.

^{4/} Rincón, Manuel, Estimaciones y proyecciones de población, CELADE, Serie B.No. 1010, San José, Costa Rica 1984. Pág. 6-7.

^{5/} Pujol, José M., (1985), Apuntes de clase del curso "Proyecciones de Población", CELADE, Santiago de Chile.

3. Relación, razón, proporción, participaciones, porcentaje y tasa

Se entiende por razón o relación, al cociente cuyo "dividendo y divisor pertenecen a categorías diferentes (por ejemplo: hombres y mujeres, niños y mujeres, edades distintas" ^{6/}, crecimiento económico y crecimiento de la población, etc.).

Proporción o participación "es la magnitud que representa una parte con referencia al todo" ^{7/}. "El término porcentaje indica que una proporción está expresada en tanto por ciento del total" ^{8/}.

La tasa se emplea "para designar la frecuencia relativa con que un hecho o suceso se presenta dentro de una población o subpoblación en un determinado período de tiempo, generalmente un año, ..." ^{9/} (por ejemplo tasa media anual de crecimiento de la población).

4. Calidad de las estimaciones

Dado que los censos de población de América Latina (alrededor de 1970 y 1980) han tenido porcentajes de no cobertura que en general oscilan entre un 1.5 y un 13.8 por ciento ^{10/}, no parece muy razonable que a las proyecciones de población de áreas menores se les exija una extrema calidad; por esta razón, en este trabajo se considerarán como buenas proyecciones aquellas cuyo error o desviación con respecto al "verdadero valor" no es superior al 5 por ciento, como aceptables, aquellas que tienen un error entre 5 y 10 por ciento y malas, las que tienen errores extremos, por encima del 10 por ciento.

^{6/} Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y CELADE, op.cit, pág. 25.

^{7/} Idem.

^{8/} Idem.

^{9/} Idem.

^{10/} Instituto Nacional de Estadística y Censos y CELADE (1985), Los censos población del 80: Taller de Análisis y Evaluación. Buenos Aires, pág. 257.

5. Proyecciones independientes, dependientes ^{11/}, individuales y en conjunto

Las proyecciones individuales se refieren a aquéllas que se hacen para una o algunas localidades, pero sin que sus resultados estén afectados por el valor estimado para las demás, o sea, que la suma de las proyecciones de las subáreas no tiene que reproducir el total de la población del área mayor, que ha sido o no, proyectada en forma separada.

Las proyecciones en conjunto son aquellas que se hacen para un grupo de subáreas y por lo tanto, los resultados finales dependen de las estimaciones de todas las localidades.

Las proyecciones independientes de áreas menores, como su nombre lo indica, son aquellas que sólo requieren de la información de la subárea para proyectar su población; esto es, se toma a la población de la subárea como independiente de la población nacional o área mayor.

Las proyecciones dependientes involucran una conexión entre las subáreas y el área mayor o relaciones entre otras variables, por lo cual la proyección de la subárea requiere de la disponibilidad de la proyección del área mayor o de las variables relacionadas.

De acuerdo a lo anterior, las proyecciones individuales se pueden dividir en independientes y dependientes, mientras que las proyecciones en conjunto sólo pueden ser dependientes.

B. Datos básicos

Como se comentó anteriormente, para este ejercicio se requería disponer de la población en cuatro censos por lo tanto se escogieron dos países, para los cuales se contaba con dicha información: Colombia, donde se levantaron censos el 9 de mayo de 1951, el 15 de julio de 1964, el 24 de octubre de 1973 y el 15 de octubre de 1985; y Venezuela, que realizó sus censos el 26 de noviembre de 1950, el 26 de febrero de 1961, el 2 de noviembre de 1971 y el 20 de octubre de 1981.

^{11/} Shryock y Siegel (1971), op. cit., pág. 776.

Dentro de Colombia se escogieron 10 municipios que se encuentran ubicados en el Valle del Río Negro en el Departamento de Antioquia, los cuales fueron seleccionados, por considerarse que éstos han tenido una economía relativamente estable y no han estado afectados por las diferentes olas de violencia por las que han atravesado y aún sufren algunas regiones del país y que han afectado tanto la evolución de sus poblaciones, por lo cual, se espera que su comportamiento no presente fuertes variaciones; por otra parte, una ventaja adicional de estos municipios es que no han tenido cambios en sus límites en todo el tiempo considerado, lo cual facilita la disponibilidad de la información.

Para el caso de Venezuela se seleccionó el Estado de Mérida ya que éste cumplía igualmente con una serie de requisitos. Por un lado, no se encontraba muy cerca de la frontera internacional, lo cual hacía menos grave el efecto que podía causar una migración de este tipo en un momento dado y, por otra parte, era un estado cuyas divisiones administrativas no habían sufrido muchas transformaciones, lo que permitía obtener una serie de datos a lo largo del tiempo para los distritos en forma consistente.

A pesar de que las áreas menores seleccionadas para los dos países, como se mencionó anteriormente, tenían ciertas cualidades, éstas sin embargo, fueron escogidas en forma bastante arbitraria, lo cual se confirmó al encontrarse que en general las subáreas presentaban situaciones "ideales" con una evolución consistente, pero en algunos casos había ciertas irregularidades, lo cual se suele observar con alguna frecuencia en las áreas menores y con mayor razón, en la medida en que el tamaño de éstas disminuye.

Los diez municipios seleccionados en Colombia son Carmen de Vival, Concepción, Guarne, La Ceja, La Unión, Marinilla, Peñol, Rionegro, San Vicente y Santuario.

En 1981 el Estado de Mérida estaba conformado por doce distritos; sin embargo, para conseguir una secuencia histórica a partir de 1950, se agruparon en diez distritos: Andrés Bello, Arzobispo Chacón, Campo Elías, Justo Briceño, Libertador, Miranda, Rangel, Rivas Dávila, Sucre y Tovar. Los distritos Alberto Adriani y Antonio P. Salinas, se encuentran agrupados con Tovar.

En cuanto a la calidad de los datos básicos, se debe tener presente que la población de los censos publicada, no estaba corregida por cobertura en ningún caso, a excepción del Censo de Colombia de 1973, para el cual también se disponía ajustada aproximadamente en un 7 por ciento, en los municipios seleccionados. Sin embargo, para los fines del trabajo, se decidió utilizar la información sin ningún tipo de ajuste, debido a que no se disponía de la cobertura a nivel de las áreas menores, sino a nivel departamental y de cabecera-resto para el censo de 1973 de Colombia y a nivel nacional para los otros censos tanto colombianos como Venezolanos.

Sin embargo, vale la pena comentar que se hizo un ejercicio para comparar los resultados obtenidos por un lado con la información sin ningún ajuste, por otro lado, para el caso de Colombia con la información ajustada de 1973 que se encontraba publicada y finalmente con la población de las subáreas ajustadas en cada censo, con la cobertura estimada para el total del país. Como era de esperarse, la población obtenida en cada etapa fué diferente, pero como los resultados que aquí interesaban no eran en sí los de población sino los errores que se obtenían al comparar la proyección con la población censada, ésto fué lo que se analizó realmente, encontrándose que al proyectar la población, se obtenían en general mejores resultados, cuando se utilizaba la información sin ningún ajuste, y cuando se proyectaban las proporciones, los errores eran prácticamente los mismos, al utilizar la información ajustada o sin ajuste.

II. METODOLOGIAS EMPLEADAS PARA PROYECTAR LA POBLACION DE AREAS MENORES

Antes de examinar la bondad de las diferentes metodologías para proyectar la población de áreas menores, conviene clasificarlas de acuerdo al tipo de método empleado. En este sentido podemos agrupar las metodologías en cinco grupos:

A. Métodos de extrapolación del crecimiento de la población

Estos métodos consisten en examinar la tendencia del crecimiento de la población y extrapolar esta tendencia. Para esto se dispone de tres procedimientos generales, que son:

1. La extrapolación gráfica de tendencias,
2. la extrapolación por métodos matemáticos y,
3. la extrapolación por métodos estadísticos, utilizando la técnica de regresión.

1. La extrapolación gráfica de tendencias, proyecta la población en una forma no muy precisa, generalmente introduciendo un juicio sobre la posible evolución de la población.
2. La extrapolación por métodos matemáticos consiste en ajustar una curva a un mínimo de puntos requeridos y de acuerdo a esto, proyectar la población. Las curvas que se han utilizado con mayor frecuencia para esto son:
 - a) La línea recta o de crecimiento aritmético.
 - b) La curva geométrica o exponencial.
 - c) La función logística.
 - d) La curva de Gompertz.
 - e) La curva exponencial modificada.
 - f) Otras curvas polinómicas.

3. La extrapolación por métodos estadísticos consiste en ajustar a una curva matemática una serie histórica de datos, utilizando generalmente la técnica de regresión por mínimos cuadrados, y una vez calculados los parámetros, se estima la población al futuro. En otras palabras, la diferencia básica entre este procedimiento y el anterior radica en el número de puntos utilizados para la determinación de los parámetros y que en el caso anterior, la curva reproduce exactamente los puntos empleados en la estimación.

B. Métodos de extrapolación de proporciones

Estos métodos se diferencian de los anteriores en que aquí se extrapola no la población sino una proporción, por lo cual se requiere disponer de la población del área mayor a la fecha de la proyección, para estimar la población de cada una de estas subáreas, al multiplicar estos dos elementos. Los métodos de extrapolación de proporciones se pueden resumir en tres grupos:

1. Métodos de proyección de la proporción de población del área menor con respecto a la población del área mayor. Dentro de esta categoría se encuentran:
 - a) Las funciones matemáticas para proyectar proporciones,
 - b) El método de la proporción del Buró de Censos de Estados Unidos (The 1952 Census Bureau Ratio Method), y
 - c) El método de la tendencia de proporciones de Pickard (The Ratio-Trend Method).
2. Método de Pickard de proyección de la participación en el crecimiento (Apportionment Method), el cual utiliza la proporción de aumento de la población del área menor con respecto al aumento de la población del área mayor.
3. Método del diferencial del crecimiento, de Naciones Unidas, que utiliza para la proyección un supuesto sobre el comportamiento del diferencial de crecimiento del área menor y el resto del área mayor.

C. Métodos demográficos

Se refiere en general a los métodos de proyección en los cuales se proyecta en forma independiente, cada uno de los componentes del crecimiento de la población: fecundidad, mortalidad y migración.

D. Métodos o modelos económicos

En estos modelos se establece una relación entre las variables económicas y la población, de tal manera que la estimación de esta última, se obtiene en forma derivada de la proyección de las variables económicas. Dentro de estos modelos se pueden mencionar los siguientes:

1. Regresiones con variables económicas.
2. Método de covarianzas modificado de Berry.
3. Modelo Obers de razón de empleos.
4. Razón del stock de viviendas proyectadas.

E. Otros métodos

En esta categoría se resumen los métodos que no pudieron ser incluidos en las categorías anteriores. Básicamente son modelos de densidad (aunque éstos no son los únicos), donde precisamente lo que se proyecta es la densidad de población, y el número de personas se obtiene en forma derivada. Dos modelos se han incluido en esta categoría:

1. Modelo de dispersión Genessee-Finger Lakes Region.
2. Modelo de Newling.

Dada la gran cantidad de metodologías que han sido utilizadas para proyectar la población de áreas menores, y con el fin de ver en forma clara las diferencias de cada una de éstas, se ha considerado conveniente que en este capítulo, aunque en forma resumida, se reseñen estos procedimientos.

Vale la pena anotar que en lo que sigue, se describirán los métodos en su forma más general, al igual que algunas modificaciones introducidas por ciertos autores para lograr mejores ajustes o facilitar los cálculos.

A. Métodos de extrapolación del crecimiento de la población

Desde los tiempos más remotos ha existido una constante preocupación por los problemas demográficos, entre los cuales se contaba el comportamiento futuro del crecimiento de la población. En tal sentido, "el período comprendido entre fines del siglo XV y fines del siglo XVIII, fue testigo no sólo de una importante evolución de los puntos de vista sobre población, sino también de los comienzos de las mediciones y análisis sistemáticos de las tendencias demográficas" ^{12/}. Graunt (1662) ^{13/} examinó las tendencias de las variables demográficas y la dimensión de la ciudad de Londres, al igual que el futuro crecimiento de ésta. Petty (1691) ^{14/} sostuvo que la aritmética podría ser aplicada a la demografía. Gregory King (1696) ^{15/}, Sussmilch (1775) ^{16/}, Malthus (1798) ^{17/} y otros, observaron que la población crecía en forma geométrica.

Sin embargo, este comportamiento teórico de la población no se dió en todas partes o mejor en todos los períodos. Es así como Quetelet (1835) ^{18/} observó que la población evolucionaba en forma acelerada en un principio hasta un punto

^{12/} Naciones Unidas (1978), Factores determinantes y consecuencias de las tendencias demográficas". Volumen I.

^{13/} Graunt, John (1662), Natural and political observations made upon the bills mortality, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1939.

^{14/} Petty, William (1691), Political arithmetic: or a discourse concerning the value of lands, people, buildings,...", London, R. Clavel, 1961.

^{15/} King, Gregory (1696), Natural and political observations and conclusions upon the state and condition of England, ed. 1936.

^{16/} Sussmilch, Johann Peter (1775), Die Gottliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen. Berlin.

^{17/} Malthus, Thomas (1798), An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet and other writers. London, Johnson, Vol. 2.

^{18/} Quételet, Adolphe (1835), Sur l'homme et le développement de ses facultés; ou essai de physique sociale, Paris, Bachelier, Vol.2, págs. 1-20.

en que empezaba a hacerlo en forma más lenta. Luego Verhulst (1838) ^{19/}, a solicitud de Quetelet, examinó ese principio y sugirió la curva a la que llamó logística.

Posteriormente, Pritchett (1891) ^{20/}, sugirió un polinomio de tercer grado y Bowley (1925) ^{21/} utilizó ajustes de mínimos cuadrados para parábolas de segundo y tercer grado.

La curva logística fue redescubierta en 1920 por Pearl y Reed ^{22/} y trabajada posteriormente por Lotka (1939) ^{23/} y muchos otros autores, y más recientemente, por el CELADE (1982) ^{24/} y Naciones Unidas (1982) ^{25/}.

Todas estas curvas y otras pueden describir en un momento dado muy bien el comportamiento de una población, pero esto no significa que lo hagan hacia el futuro. Sin embargo, para realizar las proyecciones de población de áreas menores a corto y mediano plazo, con las limitaciones de tiempo, presupuesto e

-
- ^{19/} Verhulst, Pierre-Francois (1838), Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, En Correspondence Mathématique et Physique de l'Observatoire de Bruxelles, publicado por A. Quetelet, Vol. 10, págs. 113-121.
- ^{20/} Pritchett, H.S. (1891), A formula for predicting the population of the United States, Publications of the American Statistical Association, Boston, 2 (14).
- ^{21/} Bowley, A.L. (1925), Discussion on Dr. Stevenson's paper, Journal of the Royal Statistical Society, London, págs. 76-81.
- ^{22/} Pearl, Raimond and Reed, Lowell (1920), On the rate of growth of the population of the United States, since 1790 and its mathematical representation, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 6, págs. 275-288.
- ^{23/} Lotka, Alfred J. (1939), Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, No. 5, Santiago de Chile, 1976.
- ^{24/} Pujol, José y Chackiel, Juan (1982), Metodologías de las proyecciones de población urbana y rural y población económicamente activa elaboradas por CELADE, documento presentado en el Seminario de Proyecciones de Población, San José, Costa Rica. CELADE. Serie E, No.1003, San José, Costa Rica, 1984.
- ^{25/} Naciones Unidas (1982), Estimates and projections of urban, rural and city populations, 1950-2025, The 1980 Assessment, ST/ESA/SER.R/45, New York.

incluso, nivel de desagregación de la información disponible, estos métodos pueden arrojar en general, resultados bastante aproximados.

En lo que sigue, se describirán brevemente dichos métodos.

1. Método de extrapolación gráfica de las tendencias

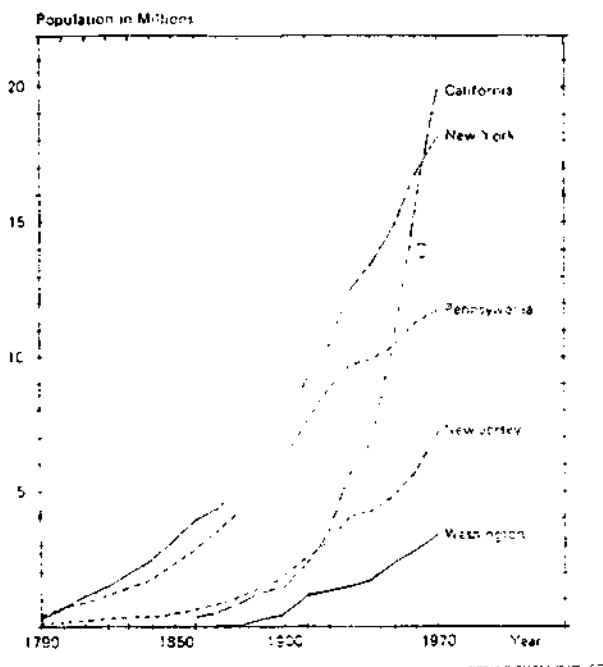
Como su nombre lo indica, este método se basa en la extrapolación de las tendencias de la población en forma gráfica. Para esto se requiere disponer de la población de las subáreas en diferentes momentos en el tiempo para que éstas sean graficadas y luego en base a su comportamiento, el cual debe estar totalmente explicado y a toda la demás información de que se disponga, se enjuicie el futuro comportamiento de la población de cada subárea.

De acuerdo a lo anterior, si el analista sabe de algún proyecto que afecte directamente alguna región, puede alterar en base a esta información la tendencia de crecimiento que se había observado hasta ese momento y proyectar dicha población en forma mas realista.

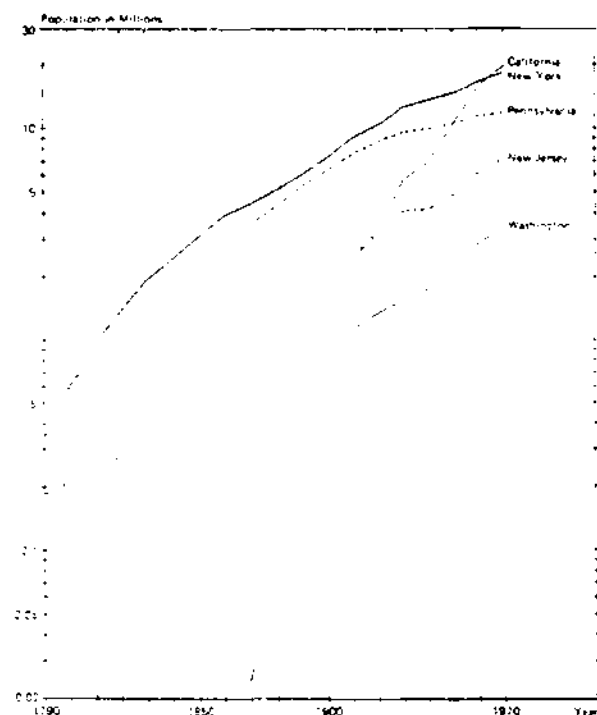
Gráfico 1

COMPORTAMIENTO GRAFICO DE LA POBLACION ENTRE 1790 Y 1970 DE ALGUNOS ESTADOS SELECCIONADOS DE ESTADOS UNIDOS

1.a. Escala aritmética



1.b. Escala semi-logarítmica



Fuente: Pittenger, D. (1976), Projecting State and Local Populations,
Cambridge, Mass., Ballinger Publishing Co., U.S.A.

Para graficar las poblaciones, existen dos posibilidades: la primera es graficar en escala aritmética (ver gráfico 1a), donde se puede observar el cambio absoluto de la población en el tiempo. La otra posibilidad es graficar a escala semi-logarítmica (ver gráfico 1b), donde se puede apreciar por un lado el cambio relativo en el tamaño de la población y por el otro, la tasa de crecimiento expresada por la pendiente de la línea.

2. Extrapolación por métodos matemáticos

El uso de fórmulas matemáticas para proyectar la población supone que ésta tiene un comportamiento histórico relativamente regular, lo cual suele suceder a las poblaciones cuando no están muy afectadas por fluctuaciones debidas a la migración.

Dentro de las ecuaciones matemáticas, las más usadas para proyectar la población son las que se describen a continuación:

a) Cambio aritmético o lineal

La más simple de las funciones matemáticas es la línea recta o polinomio de primer grado, la cual se deriva de una progresión aritmética.

El crecimiento aritmético supone que en cada período la población aumenta o disminuye en el mismo número de personas, como se puede ver en el gráfico 2.

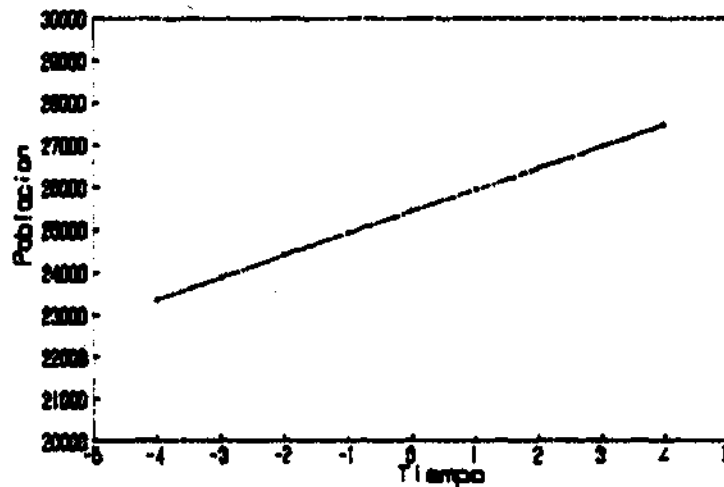
Según Pittenger (1976) ^{26/}, esta ecuación no debe ser muy utilizada debido a que es muy difícil encontrar una población que presente estas características y sólo justifica que se utilice en el caso de disponer únicamente de dos puntos en el tiempo.

Sin embargo, es posible que esta técnica matemática, a pesar de lo simple, pueda en la actualidad dar buenos resultados, especialmente si la proyección es a corto o mediano plazo ya que si bien es cierto este procedimiento asume que el crecimiento futuro será en términos absolutos el mismo que en el pasado, esto implícitamente quiere decir que la población estaría creciendo a una tasa decreciente (si la población está aumentando), supuesto que es bastante

^{26/} Pittenger, Donald (1976), Projecting state and local populations, Cambridge, Mass., Ballinger Publishing Co., U.S.A.

razonable, dados los descensos de la fecundidad observados, especialmente a partir de la década de 1970. Sin embargo, vale la pena recordar que en el caso de las poblaciones menores, el componente migratorio puede estar afectando en un mayor grado el crecimiento de la población, lo cual podría restringir su validez en ciertas áreas, como por ejemplo, en las áreas de fuerte inmigración.

Gráfico 2
 GRAFICO DE LA EVOLUCION DE LA POBLACION
 SEGUN UN CRECIMIENTO LINEAL



$$P_t = 25\,420 + 516 t$$

Si la población está disminuyendo, no sería muy conveniente usar este método, pues al hacerlo estaríamos haciendo disminuir la población a una tasa creciente y además, se podría llegar a una estimación negativa, lo cual no es lógico dentro de una población.

Matemáticamente el crecimiento lineal se puede expresar como:

$$P_t = P_0 + gt$$

donde P_t es la población en el momento t

P_0 es la población en el momento 0

t es el periodo de tiempo transcurrido ($t-0$)

g es el incremento anual de la población

De lo anterior se desprende que para su aplicación se requiere disponer de la población en dos momentos en el tiempo. Las ecuaciones para estimar los parámetros de la recta se encuentran en el Anexo I.

Ejemplo: Si la población de una región era de 25 420 personas al 30 de junio de 1960 y de 30 580 al 30 de junio de 1970, la población estimada al 30 de junio de 1980 sería:

$$g = \frac{30\ 580 - 25\ 420}{10} = 516$$

$$P_{80} = 25\ 420 + 516 (20)$$

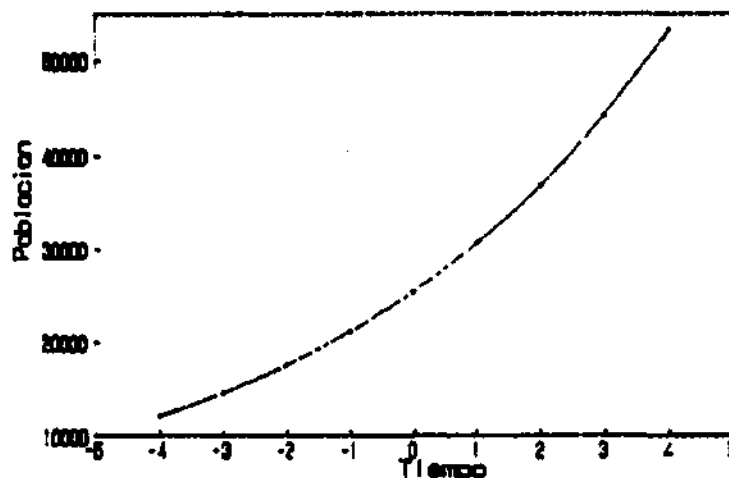
$$P_{80} = 35\ 740$$

b) Cambio geométrico o exponencial

Desde fines del siglo XVII y durante el siglo XVIII una gran cantidad de autores, entre los que se encuentran Sussmilch, King, Malthus y otros, observaron cómo la población tendía a crecer en forma geométrica y durante mucho tiempo este comportamiento se presentó en varias poblaciones, por lo cual esta función fue ampliamente utilizada.

Gráfico 3

GRAFICO DE LA EVOLUCION DE LA POBLACION SEGUN UN CRECIMIENTO EXPONENCIAL



$$P_t = 25\ 420 e^{0.01848 t}$$

Un crecimiento de la población en forma geométrica o exponencial (ver gráfico 3), supone que la población crece a una tasa constante, lo que significa que aumenta proporcionalmente lo mismo en cada período de tiempo, pero en número absoluto, las personas aumentan en forma creciente.

Si la población está disminuyendo, lo hará también a una tasa constante, pero el número absoluto irá disminuyendo, acercándose a cero, de tal forma que la población nunca llegaría a ser negativa, lo cual teóricamente es totalmente razonable.

El crecimiento geométrico o exponencial se puede expresar, respectivamente, como sigue:

$$P_t = P_0 (1 + r)^t \quad \text{ó}$$

$$P_t = P_0 e^{rt}$$

donde, P_t es la población en el momento t

P_0 es la población en el momento 0

r es la tasa de crecimiento

t es el período de tiempo ($t-0$)

e es la base de los logaritmos naturales o neperianos

La diferencia conceptual entre estas dos curvas es que, en el primero, el tiempo se toma como una variable discreta, mientras que en el segundo, es una variable continua y en tal sentido la tasa de crecimiento diferirá en los dos modelos; en el primero estará midiendo la tasa de crecimiento entre puntos en el tiempo que están igualmente espaciados y en el segundo, medirá la tasa instantánea de crecimiento. Sin embargo, en la medida en que el período de tiempo considerado se haga más pequeño, las dos ecuaciones serán más parecidas, hasta el punto que, la ecuación geométrica tiende a la exponencial, cuando el período de tiempo tiende a cero.

Para proyectar la población a partir de una curva geométrica o exponencial, se requiere contar al menos con la población en dos momentos en el tiempo. En el Anexo I aparecen las ecuaciones para estimar los parámetros de la curva.

Ejemplo: Disponiendo de la misma información del ejemplo anterior, la población estimada al 30 de junio de 1980 sería:

$$\begin{aligned}
 \text{Geométrica: } P_{80} &= P_{60} [(P_{70}/P_{60})^{1/10}]^{20} \\
 P_{80} &= 25\,420 (30\,580/25\,420)^2 \\
 P_{80} &= 36\,787 \\
 \\
 \text{Exponencial: } P_{80} &= P_{60} e^{(\ln(P_{70}/P_{60})/10) * 20} \\
 P_{80} &= 25\,420 e^{(\ln(30\,580/25\,420) * 2)} \\
 P_{80} &= 36\,787
 \end{aligned}$$

Vale la pena aclarar que, como se puede ver en los resultados anteriores, las curvas exponencial y geométrica, arrojan (prácticamente) los mismos resultados cuando se proyecta con la tasa de crecimiento intercensal generada por esta misma curva (tasa geométrica 18.65 por mil y tasa exponencial 18.48 por mil), a diferencia de los resultados que se obtendrían si se proyectara con una u otra curva, pero con una misma tasa de crecimiento.

c) Función logística

En 1835 Quetelet ^{27/} observó que la población evolucionaba en forma acelerada en un principio, hasta un punto en que empezaba a hacerlo en forma más lenta. A raíz de esto le encargó al estadista belga P.F. Verhulst que revisara este principio y éste en 1838 ^{28/} sugirió la curva a la que llamó logística.

Posteriormente esta curva fue redescubierta por Pearl y Reed (1920) ^{29/}, quienes la estudiaron, generalizaron y usaron ampliamente ^{30/}, al igual que muchos otros quienes posteriormente la utilizaron y/o le introdujeron modificaciones, para describir tanto el crecimiento de la población, como el de otras variables. Entre éstos se encuentran Vianelli (1935 y 1936) ^{31/},

^{27/} Quételet (1835), op.cit.

^{28/} P.F. Verhulst (1838), op.cit.

^{29/} Pearl y Reed (1920), op. cit.

^{30/} Pearl, Raymond (1924), Studies in Human Biology, Baltimore (Williams & Wilkins Co.), caps. XXIV y XXV.

^{31/} Vianelli, Silvio (1935), Evoluzione economica e demografica negli schemi delle curve logistiche. Revista Italiana di Scienze Economiche, Bologna, 7 (3) págs. 383-444.

_____, (1936) A general dynamic demographic scheme and its application to Italy and the United States, Econometrica (Colorado Springs, Colo.) 4(3) págs. 269-283.

Rhodes (1938) ^{32/}, Lotka (1939) ³³, Muhsam (1939) ³⁴, Plessing (1962) ³⁵, CELADE (1982) ³⁶, Naciones Unidas (1982) ³⁷.

Esta función tiene dos tipos de fundamentos teóricos ³⁸. Según Verhulst la curva logística se deriva de un concepto físico del crecimiento de la población, según el cual los obstáculos al crecimiento ilimitado aumentan en mayor proporción a la que tiende a aumentar la población. Por otra parte, la formulación de Pearl y Reed se deriva de funciones biológicas bajo la hipótesis de que las poblaciones tienden a alcanzar un límite máximo que luego no sobrepasan.

Aún cuando esta función fué desarrollada pensando en el crecimiento de una población, dadas sus características, esta curva ha sido aplicada a diversas clases de fenómenos de crecimiento: se ha utilizado para proyectar la población total o de áreas, para predecir el comportamiento de ciertas características de la población, como son la esperanza de vida al nacimiento, la tasa global de fecundidad, el porcentaje urbano, el porcentaje de alfabetos, y para suavizar funciones de la tabla de mortalidad.

De esta misma forma, la función logística ha ido evolucionando desde su planteamiento inicial, el cual tenía características muy particulares, hacia

³² Rhodes, E. (1938), A population growth curve for England and Wales. In Théorie générale de la population. Congrès International de la population. Paris, Vol. 1, págs. 40-47.

³³ Lotka (1939), op.cit.

³⁴ Muhsam, H. (1939), A note on migration and Verhulst's logistic curve, Journal of the Royal Estatistical Society (London) 102: págs. 445-448.

³⁵ Plessing (1962), ón den Logistiske Kurve og dens anvendelse i praksis. Erhvervsøkonomisk Tidsskrift, Copenhagen 26 (3), págs.205-231.

³⁶ CELADE (1982), op.cit.

³⁷ Naciones Unidas (1982), op. cit.

³⁸ Naciones Unidas (1978), op. cit.

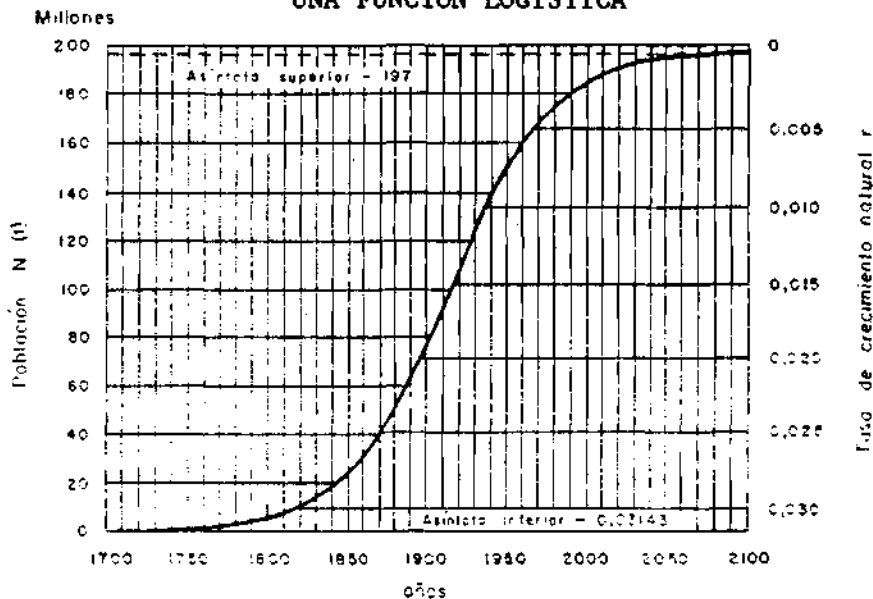
otros más generales y/o más flexibles. A continuación se presentarán por un lado, el planteamiento inicial, por otro alguna de estas modificaciones y finalmente una simplificación propuesta para relizar los cálculos.

i) Planteamiento inicial

La logística es una función que tiene forma de S alargada, con dos asintotas: una inferior y otra superior. Supone que en un principio la población crecerá aceleradamente, pero después de un crecimiento máximo, su ritmo cesará, y se irá reduciendo con la misma intensidad con que creció, hasta llegar a cero; por esta razón, la primera parte de la curva es convexa y la segunda parte cóncava, pero el inverso exacto de la primera .

Las formulaciones de Verhulst y primera de Pearl y Reed, suponen que la curva es monótonamente creciente ³⁹, a partir de una asintota inferior igual a cero (ver gráfico 4), con un punto de inflexión que se encuentra en el momento en que el tamaño de la población es un medio de la asintota superior.

Gráfico 4
EVOLUCION DE LA POBLACION SEGUN
UNA FUNCION LOGISTICA



Fuente: Lotka, Teoría analítica de las asociaciones biológicas.

³⁹ Vale la pena, comentar que la función logística inversa, esto es, monótonamente decreciente, se puede presentar al utilizar la logística en otra variable, e incluso en una población que está disminuyendo.

En cuanto al crecimiento de la población en valores absolutos, éste tiene un comportamiento simétrico, parecido a una curva normal ⁴⁰. Por su parte, la tasa de crecimiento, presenta una situación inversa a la de la población pues en lugar de crecer, va disminuyendo continuamente; en un principio, el proceso se acelera hasta el punto de inflexión donde el descenso se hace cada vez menor, hasta llegar a cero.

Dado lo anterior, esta curva sólo puede ser aplicada cuando la tasa de crecimiento es positiva y decreciente ⁴¹.

Matemáticamente esta función se puede escribir como:

$$P_t = \frac{K}{1 + e^{a+bt}}$$

donde P_t es la población en el momento t (variable dependiente),

t es el período de tiempo (variable independiente),

K es la asíntota superior

a y b son constantes

e es la base de los logaritmos naturales

Como se puede apreciar, la población está expresada fundamentalmente como un cociente, donde el numerador es la asíntota superior y el denominador es una función que se va volviendo cada vez más pequeña, acercándose a la unidad, haciendo tender el cociente al valor de K . Esto sucede porque el parámetro b tiene signo negativo y el valor de t va aumentando, por lo cual el producto bt también aumenta pero e^{a+bt} se va reduciendo acercándose a cero.

⁴⁰ Shryock, Henry S., Jacob S. Siegel and Associates, (1971), op.cit., pág. 382.

⁴¹ Si se considera la curva inversa, la tasa de crecimiento será negativa y monótonamente creciente, por tanto podrá también ser aplicada en estos casos, aunque teóricamente puede no ser muy frecuente ni normal. Aquí lo realmente importante, es que el valor obtenido para la asíntota superior, sea positivo y mayor a las poblaciones conocidas, y esto solo se logra, si se cumplen las condiciones de la tasa de crecimiento, según la curva que se considere: positiva y decreciente en la logística "normal" o negativa y creciente en la logística inversa.

Para aplicar esta metodología, estimando los parámetros como se indica en el Anexo I, se requiere contar al menos con la población en tres momentos en el tiempo separados en forma equidistante uno de otro.

ii) Modificación de Pearl y Reed

Pearl y Reed ⁴² en años posteriores introdujeron varias modificaciones a la curva logística. En una de ellas postularon que el crecimiento puede ocurrir en ondas o ciclos, como resultado de la expansión de los medios de subsistencia, por lo cual desarrollaron otras ecuaciones, en las cuales suponen que cada onda se empalma sobre una previa; en otras palabras, en un momento la población puede comportarse de acuerdo a la ley logística y tender a un valor máximo de la población (primera onda), pero después, cuando los medios de subsistencia aumentan, esta población puede nuevamente empezar a crecer en forma logística (segunda onda), tendiendo a una nueva asíntota superior, pero ahora, el límite inferior corresponderá a la asíntota superior del ciclo anterior ⁴³, y así sucesivamente. Un sistema de dos ondas es definido matemáticamente por la ecuación:

$$P_{t+n} = K_1 + \frac{K_2}{1 + e^{a+bn}}$$

donde K_1 ⁴⁴ es el límite inferior de la segunda onda y,
 $K_1 + K_2$ es el límite superior

Cuando se está trabajando con esta función logística, se debe tener presente que, la tasa de crecimiento ya no será monótonamente "decreciente durante todo el período de variabilidad de la función logística (como sería el

⁴² Pearl (1924), op. cit.

Zachariah, K.C., Notes on population projections, Demographic Training and Research Centre, Chembur, Bombay, India. (sin fecha).

⁴³ Esto será así, si el ciclo alcanzó su nivel máximo, pero si la expansión se inicia antes, la asíntota inferior de la nueva onda, se encontrará por debajo de la asíntota superior del ciclo anterior.

⁴⁴ Si se consideran diferentes ciclos logísticos de la población, el K_1 representará el crecimiento total alcanzado en todos los ciclos previos.

caso si la asíntota inferior fuese cero)" ⁴⁵, sino creciente al principio y decreciente después ⁴⁶, pero igualmente simétrica ⁴⁷.

Dado que esta logística tiene cuatro constantes que deben ser estimadas, para poderse utilizar, se necesita disponer de la población en igual número de puntos, a períodos igualmente espaciados, a menos que los valores asíntóticos se conozcan, en cuyo caso solo sería necesaria la población en dos momentos en el tiempo.

La curva logística fué utilizada por Pearl y Reed para proyectar la población de Estados Unidos durante mucho tiempo, y ésta se ajustó bastante bien por un largo período de tiempo; para su ajuste, ellos utilizaron los datos de los censos de 1790 a 1910, y proyectaron la población hacia adelante. El error de las cuatro primeras proyecciones decenales, no supero en promedio el 2 por ciento, pero despues de este período el error superó el 10 por ciento. Pittenger al proyectar el Estado de Pennsylvania por un período de 60 años, encontró que el error de estimación no superó el 5 por ciento en ninguna de las décadas proyectadas.

iii) Modificación de Murphy

Como se pudo observar anteriormente, para obtener los parámetros de la logística, se necesitaba conocer la población al menos en tres momentos igualmente espaciados, cuando se utilizaba la logística más sencilla, esto es, en su planteamiento inicial.

Más recientemente, Murphy ⁴⁸ planteó una forma para obtener el valor de estos tres parámetros, a partir de solo dos puntos. Según Murphy los resultados que se obtienen para las proyecciones de población no están muy afectadas por el

⁴⁵ Arriaga, Eduardo (sin fecha), Variaciones sobre un tema de la función logística. Inédito.

⁴⁶ También puede ser monótonamente decreciente, si no se tiene en cuenta la población de la asíntota inferior, al calcular la tasa de crecimiento.

⁴⁷ Pearl y Reed trabajaron también con una logística asimétrica, pero recomiendan usar preferiblemente la simétrica.

⁴⁸ Idea de Murphy que fue expuesta por W. Brass (Apuntes de J. Somoza).

valor de la asíntota superior ⁴⁹, por lo cual este valor puede ser calculado en una forma relativamente burda.

Sugiere por lo tanto, estimar el valor de la asíntota superior K como el valor de la población que es generada al mantener constante durante 60 años la tasa de crecimiento prevaeciente en ese momento, la cual es calculada normalmente como la tasa anual promedio del último período intercensal.

Contando con el valor de la población asíntótica, sólo se necesita disponer de la población en dos momentos en el tiempo para estimar los parámetros a y b.

Murphy, después de hacer un largo desarrollo matemático, llegó finalmente a la siguiente ecuación de cálculo ⁵⁰:

$$P_t = \frac{P_0 R^{60/T} (R^{60/T} - 1)[(t-t_0)/T-1]}{(R^{60/T} - 1)[(t-t_0)/T-1] + (R^{(60/T-1)} - 1)[(t-t_0)/T]}$$

siendo: $R = P_1/P_0$

$T = t_1 - t_0$

donde: P_t es la población proyectada al momento t.

P_0 y P_1 son las poblaciones en cada uno de los censos.

t_0 , t_1 y t son las fechas de los dos censos y de la proyección.

Por último, vale la pena aclarar que el comportamiento de la población y de su tasa de crecimiento es exactamente igual a la curva logística planteada inicialmente.

Ejemplo: Disponiendo de la misma información de los ejemplos anteriores, la población estimada al 30 de junio de 1980 utilizando la función logística de Murphy sería:

⁴⁹ Esto es cierto, siempre y cuando los valores de la población en el período considerado, no estén muy cerca de ese límite superior.

⁵⁰ Esta ecuación solo puede ser utilizada, cuando la población es creciente; sin embargo, cuando es decreciente, se puede aplicar, haciéndole una ligera modificación: multiplicando y dividiendo por (-1), de tal manera que $(R^{60/T} - 1)$, se convierta en $(1 - R^{60/T})$.

$$P_{80} = \frac{P_{60} (P_{70}/P_{60})^6 [(P_{70}/P_{60})^6 - 1]}{[(P_{70}/P_{60})^6 - 1] + [(P_{70}/P_{60})^5 - 1]^2}$$

$$P_{80} = 36\ 056$$

d) La Curva de Gompertz ⁵¹

Esta curva fue propuesta en 1825 por Gompertz "para determinar las curvas de los cuocientes de mortalidad o de sobrevivencia" ⁵², pero ésta, al igual que la logística, ha sido utilizada por varios autores con otros fines. Es así como R.D. Prescott (1922) ⁵³, la usó para describir su ley de crecimiento de la población. G.R. Davis (1927) ⁵⁴ aplicó esta misma fórmula a los datos de la población de Estados Unidos de 1810 a 1920. Más tarde A. Bocaz (1953) ⁵⁵ realizó múltiples aplicaciones para Chile.

Posteriormente, varios autores han planteado la posibilidad de representar la fecundidad actual acumulada o la paridez media a través de esta función, Brass ⁵⁶, Kendiah, V. ⁵⁷, y está siendo utilizada por el CELADE ⁵⁸ para

⁵¹ Ver Shryock y Siegel, op.cit., pág. 382 y 690 e Isard, op.cit., pág. 13.

⁵² Mattelart, Armand, (1964) Manual de Análisis Demográfico, Santiago de Chile.

⁵³ Prescott, R.D. (1922), Law of growth in forecasting demand, Journal of the American Statistical Association, Vol. 18, Dec.

⁵⁴ Davis, G.R. (1927) The growth curve, Journal of the American Statistical Association, Vol. 22, Sept.

⁵⁵ Bocaz S., Albino (1953), Curva de Gompertz aplicada al crecimiento de la ciudad de Santiago, Estadística Chilena, Vols. 10,11 (oct.-nov.).

-----, Curva de Gompertz aplicada al crecimiento de la población Chilena, Estadística Chlena, Vol. 7 (julio).

-----, La curva de la población media de Chile, Estadística Chilena, Vol. 9, (sept.)

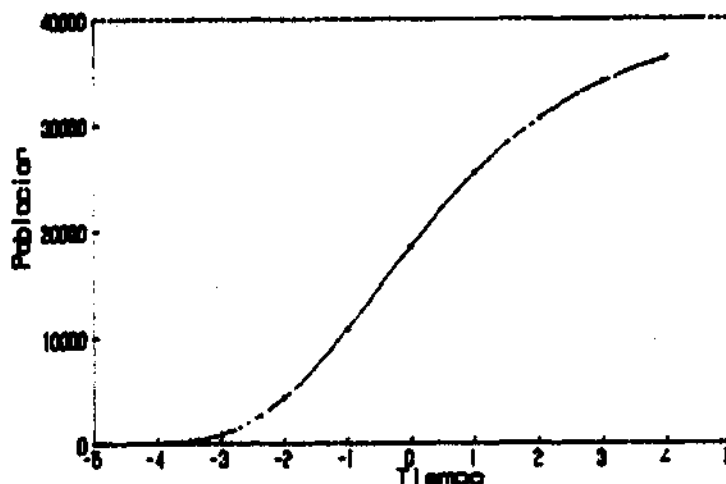
⁵⁶ Brass, W., The relational Gompertz Model of Fertility (inédito).

-----, An application of the relational Gompertz model of Fertility (inédito).

-----, Cuatro lecciones de William Brass (1977), CELADE, Serie D, No.

proyectar la estructura de la fecundidad por edades.

Gráfico 5
EVOLUCION DE LA POBLACION SEGUN
LA FUNCION DE GOMPERTZ



$$P_t = 39\,705 * 0.4669^{0.5856 t}$$

Como se observa en el gráfico 5, esta curva describe un proceso de evolución acumulativo hasta un valor máximo en forma muy parecida a la curva logística de la cual se diferencia especialmente porque la Gompertz "expresa una aceleración más rápida en las primeras fases del crecimiento y un retardo más gradual en las últimas fases" ⁵⁹. Por esta razón, el crecimiento de la población en valores absolutos deberá aparecer como una curva de frecuencias en forma de campana, sesgada hacia la derecha.

91, Santiago de Chile.

57 Kendiah, V., The use of the relational fertility model parameters in population projections. East West Center (inédito).

58 Chackiel, Juan (1984), Proyección de la fecundidad: criterios y procedimientos utilizados en el CELADE, en Métodos para proyecciones Demográficas, CELADE, Serie E, No 1003, San José, Costa Rica.

59 Naciones Unidas (1952), Métodos de cálculo de la población total para fechas corrientes, Manual I.

En otras palabras, esta curva describe una serie de datos donde los incrementos en los logaritmos de las observaciones, disminuyen en un porcentaje constante, por lo cual las diferencias de los logaritmos de la población deben descender a un porcentaje constante.

Matemáticamente esta curva se puede expresar como:

$$P_t = K a^{b^t} \quad \text{ó,}$$

$$\log P_t = \log K + (\log a)b^t$$

donde K representa el valor de la asíntota superior;

a y b son constantes

siendo siempre positivos los valores de a y K.

Si la tasa de crecimiento está disminuyendo (siendo positiva), b será siempre menor que la unidad (pero mayor que cero) y K será la asíntota superior. A pesar de que esta curva tiene 2 asíntotas, el límite inferior no aparece pues se considera que es cero ⁶⁰.

Si la tasa de crecimiento está aumentando, siendo positiva, no puede ser aplicada pues b será mayor que uno, K representará "una asíntota inferior", y al futuro la población tenderá a infinito ⁶¹.

Adicionalmente, si la tasa de crecimiento es negativa en algún período, tampoco puede ser utilizada, pues b será negativo, K será un valor intermedio al cual tienda la población, después de estar aumentando y disminuyendo continuamente, de un período a otro.

Para proyectar la población con esta curva, se necesita disponer del tamaño de la población en tres momentos en el tiempo, igualmente espaciados, estimando los parámetros como se indica en el Anexo I.

⁶⁰ Si la tasa de crecimiento disminuye, pero éstas son negativas, K será una asíntota superior, b será mayor que la unidad y la curva será decreciente.

⁶¹ Si la tasa de crecimiento está aumentando pero en los dos períodos es negativa, b estará entre cero y uno y K será una asíntota inferior a la cual se tenderá en el futuro, mientras que hacia atrás la población tenderá a infinito, por lo cual tampoco resulta conveniente su uso.

Ejemplo: Si además de la información presentada en los ejemplos anteriores se tiene al 30 de junio de 1950 una población de 18.540 personas, se puede estimar la población al 30 de junio de 1980 de la siguiente manera:

$$b = \frac{\ln(30\ 580) - \ln(25\ 420)}{\ln(25\ 420) - \ln(18\ 540)} = 0.58\ 557$$

$$a = \exp. \frac{\ln(30\ 580) - \ln(18\ 540)}{(b^2 - 1)} = 0.46\ 694$$

$$K = \frac{18\ 540}{a} = 39\ 705$$

$$P_{80} = 34\ 075$$

e) La curva exponencial modificada

Esta curva se desarrolló con el fin de solucionar el problema de la curva exponencial, que llevaba a un crecimiento infinito de la población. Fue usada por Goodrich en 1929⁶² para estimar la población futura de Estados Unidos con el fin de proyectar la Región de Nueva York. En 1952 Mc.Lean⁶³ usó una exponencial modificada como uno de los 6 métodos para proyectar la población de Dixon, Illinois.

Esta curva supone que la población parte de cero y se va incrementando a una tasa de crecimiento decreciente, hasta llegar a un valor asintótico por el cual, gráficamente, esta curva es cóncava (ver gráfico 6a).

Por su parte, el monto de crecimiento absoluto disminuye en una proporción constante de descenso, por lo cual gráficamente aparece como una curva convexa⁶⁴.

Matemáticamente la curva exponencial modificada se expresa como:

⁶² En James H. (1929), Estimates of future population, in Population, Land Values and Government, Vol. 2, New York.

⁶³ Mc.Lean, J.E. "More accurate population estimates by means of logistic curves", Civil Engineering, Vol. 22.

⁶⁴ Pittenger (1976), op.cit., pág. 67, e Isard (1960), op. cit., pág. 12.

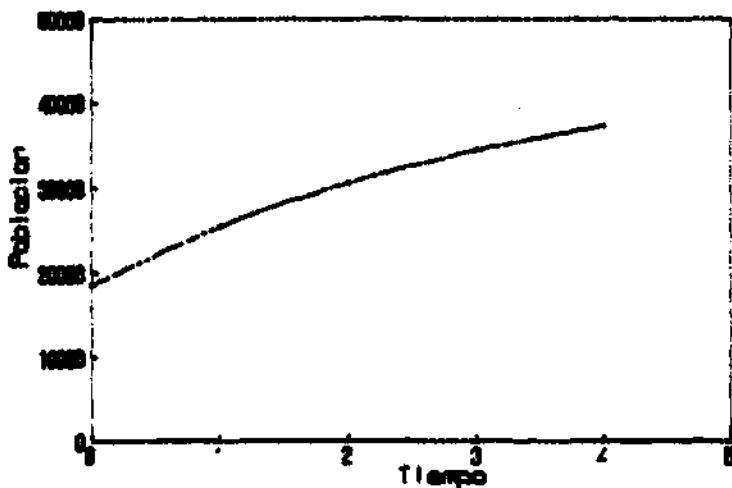
$$P_t = K + ab^t$$

donde K es el valor asintótico al cual tiende la población

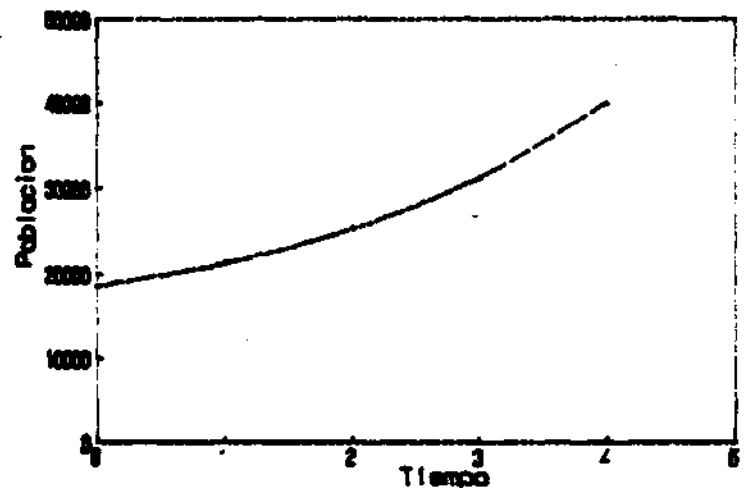
a es un valor negativo que hace que los aumentos sucesivos de la población decrezcan a una tasa constante que se define como la diferencia entre el valor de la población en un momento y el valor asintótico ⁶⁵.

b es un valor positivo menor que uno, que muestra la tasa de cambio.

Gráfico 6
EVOLUCION DE LA POBLACION SEGUN
UNA FUNCION EXPONENCIAL MODIFICADA



a) $P_t = 46\ 060 - 27\ 520 * .75^t$



b) $P_t = 12\ 685 + 5\ 855 * 1.47^t$

Si el supuesto de la tasa de crecimiento decreciente no se cumple, el valor de a resultaría positivo, la curva sería convexa y el valor de K pasaría a ser una asintota inferior (ver gráfico 6b).

Para su aplicación se requiere disponer al menos de tres puntos en el tiempo (igualmente espaciados). En el Anexo I se presentan algunas formas de estimar estos parámetros.

⁶⁵ Shryock, Siegel y Asociados (1976), op. cit., págs. 381-382, y Pitterger (1976), op. cit., pág. 69.

Ejemplo: Si se dispone de la información del ejemplo anterior, la población al 30 de junio de 1980 proyectada por la curva exponencial modificada sería:

$$b = \frac{30\ 580 - 25\ 420}{25\ 420 - 18\ 540} = 0.75$$

$$a = \frac{30\ 580 - 18\ 540}{b^2 - 1} = 27\ 520$$

$$K = 18\ 540 - a = 46\ 060$$

$$P_{80} = 34\ 450$$

f) Curvas polinómicas (parábolas o curvas no lineales)

El uso de curvas polinómicas o parabólicas ha sido muy generalizado para proyectar la población, ya que estas curvas tienen la ventaja de ser muy flexibles; la parábola de segundo grado es sensible al ritmo medio de crecimiento al igual que al aumento o disminución de velocidad observado en ese ritmo. La parábola de tercer grado tiene además, en cuenta el ímpetu variable del aumento o disminución de la velocidad. Estos cambios de ritmo se reflejan en los cambios de signo de los coeficientes.

La ecuación general de la curva polinómica puede ser expresada como:

$$P_t = a + bt + ct^2 + \dots + Kt^n$$

donde a, b, c, ..., K son constantes

P_t es la población al momento t

t es la fecha de la proyección o período de la proyección.

Si la ecuación sólo conserva los dos primeros componentes del lado derecho, será un polinomio de grado uno que representa la recta o crecimiento aritmético que fue descrito anteriormente.

Si la ecuación conserva los 3 primeros elementos del lado derecho, se tendrá una parábola de segundo grado, la cual requiere disponer de la población en tres momentos en el tiempo para su aplicación.

En una parábola de segundo grado, cuando la constante c es positiva, la curva es convexa y los patrones de crecimiento de la población asumidos tienen una suave y continua tasa de cambio, con aumentos de población en forma creciente; si la c es negativa, la curva parabólica es cóncava y la tasa de cambio de la población es igualmente suave y continua, pero los incrementos de población decrecen.

Una parábola de tercer grado, conserva cuatro elementos de la ecuación general y su mayor exponente estará elevado al cubo, y dado que requiere estimar 4 parámetros, necesita de la población en 4 momentos en el tiempo.

Para utilizar parábolas de mayor grado se requerirá disponer de más puntos en el tiempo (uno más que el grado de la parábola que se quiere), pero normalmente se han utilizado parábolas hasta de tercer grado, pues entre mayor sea el grado de la parábola, ésta sería más flexible y podría presentar un comportamiento de la población futura poco realista.

Las parábolas de segundo y tercer grado han sido usadas principalmente para proyecciones de población de áreas cerradas. Por ejemplo, en 1891 H.S. Pritchett⁶⁶ usó un polinomio de tercer grado ajustado a datos de 1790 a 1890 para proyectar la población de Estados Unidos hasta el año 2000. Para 1950 o sea 60 años después (largo plazo), la estimación fue 27 por ciento más grande. En 1925 A.L. Bowley⁶⁷ usó una parábola de segundo grado para describir la población de Inglaterra y Gales de 1801 a 1911 y un polinomio de tercer grado para describir la población de Estados Unidos de 1790 a 1910.

Ejemplos de aplicaciones de polinomios a la población de áreas abiertas fueron incluidos en el estudio de Massachusetts State Planning Board⁶⁸ en 1938, donde se utilizó una ecuación parabólica como uno de diez métodos para proyectar la población estatal. Las estimaciones con esta ecuación estuvieron 3 por ciento por debajo del Censo de 1940 y 5 por ciento más abajo de la que figura para 1950.

⁶⁶ Pritchett (1891) op.cit.

⁶⁷ Bowley (1925) op.cit.

⁶⁸ Massachusetts State Planning Board (1938), Population Study of Massachusetts, A Planning Forum, Vol. 2

En 1949 H. Bartholomew ⁶⁹ usó un polinomio de segundo grado ajustado por el método de los mínimos cuadrados para verificar la proyección de población de New Orleans hecha por otros cuatro métodos.

Ejemplo: Disponiendo de la población del ejemplo anterior, la población estimada al 30 de junio de 1980, utilizando una parábola de segundo grado, sería:

$$P_{80} = P_{50} + \frac{(P_{60} - P_{50})}{(1960-1950)} * (1980-1950) + \frac{P_{70} - P_{50}}{(1970-1950)} -$$

$$\frac{P_{60} - P_{50}}{(1960-1950)} * \frac{(1980-1950) * (1980-1960)}{(1970-1960)}$$

$$P_{80} = 18\ 540 + 6\ 880 * 3 + (602-688) * 60$$

$$P_{80} = 34\ 020$$

3. Técnica de regresión

La técnica de regresión es un método que estudia la relación entre una o varias variables "independientes" y una variable "dependiente". Esta técnica ha sido usada tanto para estimar la población a un momento actual o pasado, como para hacer proyecciones a un futuro, y su complejidad depende del número de variables que se involucren en la "explicación" de la variable dependiente.

La forma tradicional de estimar las ecuaciones de regresión es a través de la técnica de Mínimos Cuadrados, para lo cual normalmente se suelen emplear paquetes estadísticos de computación.

Lo más importante aquí es la selección de la variable o variables independientes, las cuales deben tener una relación teórica de causalidad con el comportamiento de la variable dependiente; por otra parte, es importante también determinar si la o las variables independientes afectan a la población en el mismo momento o si la afectan en forma rezagada.

Las variables independientes que se suelen utilizar son el tiempo,

⁶⁹ Bartholomew, H. (1949) The Master Plan for New Orleans. Population City Planning and Zoning Commission, New Orleans, Louisiana.

variables económicas como el incremento en el ingreso per cápita, grado de industrialización, salarios, etc., los cuales suelen ser usados en los modelos económicos de proyecciones de población; también se suele utilizar este procedimiento para verificar la relación entre el crecimiento de la población en una subárea y el crecimiento de la población en un área mayor.

La técnica de regresión puede ser aplicada tanto a tendencias lineales como no lineales, introduciendo una o varias variables independientes.

Para su aplicación se requiere disponer de una serie de datos de la población en diferentes momentos y otra serie de datos de la o las variables independientes, para cada una de las subáreas.

En el contexto de lo que se ha venido tratando en esta parte del trabajo, se está interesado en el análisis de la regresión simple (una variable independiente), utilizando el tiempo como variable explicativa; en tal sentido, este procedimiento puede ser utilizado en forma relativamente simple, especialmente si se aplica a una curva sencilla. A continuación se presentan algunas de estas curvas:

a) Regresión lineal

Cuando disponemos de la población en una serie de momentos en el tiempo, podemos estimar la ecuación de la recta que más se acerca a estos puntos, por un método matemático-estadístico que minimiza la suma de las distancias verticales al cuadrado, de cada uno de los puntos a la recta. Una vez que se han estimado los parámetros (constantes), el procedimiento para proyectar la población, es el mismo que se utilizó anteriormente en la proyección lineal. La ecuación general que se utilizará entonces, será:

$$P_t = a + bt$$

donde a y b son los parámetros de la ecuación los cuales son estimados por el procedimiento de mínimos cuadrados (como se indica en el anexo I); P es la población (variable dependiente) y t es el tiempo (variable independiente). De esta forma, una vez estimados los valores de a y b , es posible proyectar la población al momento t que se desee.

Ejemplo: A pesar de que esta técnica se utiliza cuando se dispone de una serie larga de datos, a modo de ejemplo, se aplicará para proyectar la población al 30 de junio de 1980, con la población presentada en los ejemplos anteriores en las tres fechas:

t'	P	t	$t*P$	t^2
1950	18 540	0	0	0
1960	25 420	1	25 420	1
1970	30 580	2	61 160	4
	74 540	3	86 580	5

$$b = \frac{3 * 86\ 580 - 3 * 74\ 540}{3 * 5 - (3)^2} = 6020$$

$$a = \frac{74\ 540 - 3 * 6020}{3} = 18\ 827$$

$$P_{80} = 18\ 827 + 6\ 020 * 3 = 36\ 887$$

b) Regresión geométrica o exponencial

Las ecuaciones geométricas y exponencial presentadas anteriormente se pueden generalizar de la siguiente manera:

$$P = ab^t \quad \text{Geométrica}$$

$$P = ae^{bt} \quad \text{Exponencial}$$

y ser linealizadas por medio de logaritmos, como sigue:

$$\log P = \log a + t (\log b) \quad y$$

$$\ln P = \ln a + bt$$

Esto significa que "con una proporción geométrica de aumento, los logaritmos (de la tasa de) crecimiento de la población aumentan en una proporción

aritmética" ⁷⁰, y con esta conveniente transformación es posible nuevamente aplicar el procedimiento de mínimos cuadrados, para estimar los parámetros de las ecuaciones.

c) Regresión con curvas polinómicas

Disponiendo de una serie de puntos en el tiempo, también es posible hacer un ajuste por mínimos cuadrados para polinomios de segundo o tercer grado, resolviendo las ecuaciones que se señalan en el Anexo I.

Vale la pena aclarar, que en lo anterior sólo se hizo referencia a la aplicación de la técnica de regresión para ajustar algunas curvas, pero esto no quiere decir que una serie de poblaciones no puedan ser ajustadas a otra curva utilizando esta técnica. Sin embargo, dado que los datos deben sufrir una serie de transformaciones, normalmente se utilizan programas de computador.

B. Métodos de extrapolación de proporciones

En esta parte se hará referencia a los métodos de proyección de la población de áreas menores, a partir de la extrapolación de relaciones existentes entre la población de las subáreas a la población del área mayor.

Este tipo de proyecciones es bastante racional, debido al hecho de que el crecimiento o el comportamiento de un área está íntimamente ligado al comportamiento de las subáreas que lo componen.

Para la aplicación de estas técnicas es requisito indispensable disponer de la proyección de la población del área mayor.

La medida que se utiliza normalmente es la proporción que representa la población del área menor con respecto a la población del área mayor; por ejemplo, si una subárea tiene 10 000 habitantes y el área mayor 50 000, la proporción para ese momento será de 0.2 (10000/50000), o de 20 por ciento.

⁷⁰ Naciones Unidas, (1952), op.cit. Manual I.

El procedimiento general consiste en proyectar dichas proporciones y posteriormente multiplicarlas por la población del área mayor, que había sido ya proyectada y como resultado de esto, derivar la población proyectada para la subárea.

Dado que es normal que la suma de las proporciones proyectadas de todas las áreas menores a la mayor, sea diferente a 1 (a excepción de la proyección lineal y de la parábola de segundo grado), éstas son normalmente corregidas, ajustando las participaciones proporcionalmente para que sumen 1.00 (ó 100 por ciento). El ajuste utilizado se puede formular así:

$$A = 1 / \sum_{i=1}^n S_i$$

donde A es el factor de ajuste por el cual deben ser multiplicadas las participaciones,

S_i es la participación de la i-ésima subárea y,

n es el número de subáreas.

Obviamente este ajuste debe hacerse para cada año de la proyección para que la suma reproduzca la suma del área mayor.

A continuación se describirán los métodos de proyección de proporciones usados más frecuentemente.

1. Métodos de proyección de la proporción de población del área menor, con respecto a la población del área mayor

Normalmente, antes de aplicar cualquier técnica de proyección es conveniente examinar el comportamiento histórico de la población, lo cual nos da una idea general de la dinámica de dicha población. De igual manera, al utilizar la proporción o la participación de las unidades menores en una mayor, conviene examinar gráficamente la tendencia histórica de dichas participaciones. Este examen permite conocer la dinámica interna de la región y del crecimiento de las divisiones. Sin embargo, si no se dispone de esta información, ésto no puede ser realizado.

Diferentes métodos han sido utilizados para proyectar la participación de las sub-unidades en las poblaciones mayores. Entre estos se encuentran los siguientes:

a) Funciones matemáticas para proyectar proporciones

En general, todos los modelos matemáticos descritos anteriormente para proyectar la población de las áreas menores pueden ser utilizados para describir la participación de una población ⁷¹.

La única diferencia radica en utilizar las proporciones de población del área menor a la mayor, en lugar de la población absoluta del área menor, pero la estimación de los parámetros de la ecuación se calculan de la misma manera.

Vale la pena recordar que al trabajar con proporciones, la logística solo requiere conocer la población en dos momentos, ya que el máximo valor que puede tomar una proporción es uno y el mínimo cero, por lo cual se puede asumir que las asíntotas son cero y uno. En cuanto a la aplicación de la logística de Murphy, se debe recordar, que aunque ésta fué pensada para proyectar población, matemáticamente puede ser aplicada para proporciones, si se le hace una ligera transformación, sin embargo, teóricamente no es adecuada, pues al proyectar la proporción de una subárea que está aumentando, por el método exponencial a 60 años, puede llevar a exceder el 100 % de la población del área mayor.

Una vez que se dispone de las proporciones extrapoladas, sólo hace falta ajustarlas para que sumen la unidad y multiplicarlas por la población del área mayor a esa fecha, para obtener la población proyectada de cada subárea.

b) Método de la proporción del Buró de Censos (Census Bureau Ratio)

Este método fue desarrollado por el Buró de Censos de Estados Unidos en 1952 para preparar proyecciones de población a nivel sub-nacional. Básicamente consiste en extrapolar la proporción de población del área para la cual la proyección es deseada a la población del área mayor, y multiplicar esta

⁷¹ Vale la pena mencionar que las proporciones, al igual que la población, también pueden ser proyectadas gráficamente o aplicando la técnica de regresión, utilizando el tiempo como variable independiente, si se dispone de una serie de puntos en el tiempo.

proporción extrapolada por la población del área mayor, la que ya debe haber sido proyectada independientemente por algún método como el de componentes, o este mismo procedimiento, relacionando el área mayor al total del país o a la siguiente área de mayor tamaño, a la cual pertenezca.

Como se puede apreciar, este método es el mismo que se describió en el punto anterior, y sólo se diferencia por la forma en que proyecta la proporción.

Para su extrapolación el Buró de Censos calculó las proporciones de las áreas menores a las mayores en cuatro censos diferentes (1920, 1930, 1940 y 1950), examinó sus tendencias de cambio y agrupó las subáreas en tres categorías:

- Áreas con dirección de cambio constante en las tres décadas;
- áreas con dirección constante en las dos décadas más recientes, pero con dirección diferente en la primera década;
- áreas donde la dirección de la década más actual difiere de la anterior.

De esta forma, se tenían grupos más homogéneos en cuanto a las variaciones de su crecimiento y así les asignó a cada una de estas áreas, las siguientes tasas de crecimiento de las proporciones, para que sirvieran de base para proyectarlas:

- Al primer grupo la menor tasa geométrica promedio anual de cambio de la participación, de los períodos 1920-50, 1930-50 y 1940-50;
- a las áreas del segundo grupo se les asignó la menor tasa promedio anual de los períodos 1930-50 y 1940-50; y, finalmente,
- a las del tercer grupo se les asignó una tasa de cambio igual a un medio de la tasa promedio anual de la década más reciente.

A partir de estas tasas, se supuso que el comportamiento futuro de éstas variaría anualmente en forma lineal hasta cero en 50 años. De esta manera, los valores proyectados de las proporciones se obtienen multiplicando la proporción de población del área menor con respecto a la mayor obtenida en el último censo, por la multiplicación sucesiva de uno más la tasa correspondiente a cada uno de los años que intervienen en la proyección; por ejemplo, si la participación de un área en el último censo era del 17.756 por ciento y las tasas de cambio para cada año fuesen .007952, .007789, .007627, .007465, .007303, la participación de esta

área cinco años después sería:

$$\begin{aligned}
 p &= .17756 * (1.007952 * 1.007789 * 1.007627 * 1.007465 * 1.007303) \\
 &= .17756 * 1.038722061 \\
 &= .18444
 \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las participaciones proyectadas de todas las subáreas que conforman un área mayor, éstas son ajustadas para que sumen la unidad.

Lógicamente la hipótesis respecto a la evolución de la participación puede ser modificada.

La metodología utilizada aquí ha involucrado una serie de juicios, en lo que se refiere al periodo a tener en cuenta para la determinación del crecimiento promedio de las proporciones, dado que se disponía de la información en una serie de fechas. Sin embargo, si sólo se tiene la información en dos momentos en el tiempo, sólo es posible tener una idea sobre la evolución que ha tenido esta participación en dicho periodo y, por lo tanto, se podría hacer un juicio sobre la evolución futura posible, a partir de esta información y/o del conocimiento de la existencia de algunas políticas específicas, que pudieran hacer variar la participación de alguna localidad.

El Buró de Censos utilizó su metodología para una proyección a 10 años, ya que a un periodo más largo existe un mayor riesgo de que la tendencia de la participación cambie de dirección.

Pittenger probó esta metodología para proyectar la población de los tres estados del Atlántico medio (New York, New Jersey y Pennsylvania), para un periodo de 10 años y encontró unos resultados muy prometedores, donde el error variaba entre .04 por ciento y 1.15 por ciento. Esto, aunque no es una prueba absoluta de su eficiencia, debido a que son sólo tres áreas con una población bastante grande, sí es un buen antecedente.

c) Método de la tendencia de las proporciones de Pickard (The Ratio Trend Method)

Esta técnica es similar conceptualmente al método de la razón del Buró de Censos. Fue ideada por Jerome Pickard, quien estaba interesado por un lado en proyectar las poblaciones a un plazo más largo y por el otro, en hacer proyecciones de áreas metropolitanas. El supuesto que utilizó Pickard para la extrapolación es que una proyección a corto plazo requiere de una tendencia histórica corta y una proyección a largo plazo requiere de un período histórico largo.

Su lógica se basa en que la parte más reciente de la tendencia histórica puede tener más impacto en la participación de la población futura que lo que tendría el principio del período observado.

Por esta razón, según el período requerido para la proyección, utiliza más o menos datos, pero dándole un mayor peso a los valores más recientes. En general, se puede decir que la parte más compleja del modelo, es la proyección de los pesos para los datos históricos, cuando la proyección es a largo plazo.

Pittenger sugiere que presumiblemente -por la forma en que calculaba los pesos- Pickard requería una tendencia histórica igual al doble de la distancia del último período observado al período de la proyección ⁷².

El procedimiento general de Pickard consiste en transformar las participaciones porcentuales de la población subnacional a logaritmos; calcular las tasas de cambio de las participaciones, expresadas como diferencias de los logaritmos; proyectar las participaciones y transformar nuevamente las proporciones de su forma logarítmica a porcentual.

Pickard notó que cuando la proporción de una región aumentaba muy rápidamente, fácilmente se exageraba su proyección, por lo cual sugirió finalmente que en los casos donde la participación de una subregión es mayor en

⁷² Para detalles de su aplicación ver Pittenger, Donald (1976), op. cit.

Kayani, Ashraf (1980), Preparing subnational Population Projections: A Manual for selected indirect methods, CELADE, serie B, No. 48, Santiago de Chile.

la fecha más reciente, se trabaje con el complemento de la proporción pues, dadas las propiedades de los logaritmos, las diferencias de los logaritmos de las proporciones transformadas son menores, que las diferencias entre los logaritmos de las proporciones no transformadas.

Pittenger, al probar esta metodología, para proyectar los estados del Atlántico Medio (New York, New Jersey y Pennsylvania), encontró una mayor desviación, la cual iba en aumento a medida que la proyección era más lejana. Así, encontró que la proyección a 10 años variaba entre 1.1 y 2.1 por ciento; a 20 años entre 2.2 y 3.6 por ciento y a 40 años, entre 4.5 y 12.4 por ciento.

Ejemplo: Si se dispone de la proporción de población de una subárea para 3 momentos en el tiempo, así: para 1950, 14.3%, para 1960 16.4% y para 1970 16.9%, la población proyectada para 1980 sería:

Año	Proporción	log (% prop.)	log
1950	.153	1.18469	-
1960	.164	1.21484	.03015
1970	.169	1.22789	.01305

$$\log (\% \text{ prop. } 1980) = 1.22789 + \frac{2 (.01305) + (.03015)}{3} = 1.24664$$

$$\text{Proporción proyectada a 1980} = .176$$

Posteriormente, esta proporción es ajustada de tal forma que la suma de las participaciones de todas las subáreas sea igual a uno y, finalmente, multiplicada por la población del área mayor, para obtener la población proyectada de la respectiva área menor.

Como se puede observar, en este ejemplo no se introdujo la modificación sugerida por Pickard, sin embargo, al aplicar esta modificación, el resultado fue el mismo si se consideran sólo tres decimales. Posiblemente esto se deba a que el crecimiento de las proporciones no es muy acelerado.

2. Método de Pickard de proyección de la participación en el crecimiento
(Apportionment Method)

En esta metodología no se proyecta la futura participación de una subárea en la unidad mayor, sino la participación o contribución de una subárea en el cambio absoluto de población experimentado en el área mayor.

Pickard operacionalizó el método estipulando que la distancia al futuro que está siendo proyectado requiere de un período histórico de igual longitud. Por lo tanto se requiere disponer de la población a iguales períodos de tiempo. Por ejemplo, si se quiere obtener la población para 1980 a partir de la de 1970, el período de proyección es de 10 años; por lo tanto, calculó la diferencia en el tamaño de la población entre 1960 y 1970, tanto para el área mayor como para la subárea, y la proporción entre la diferencia de población de la subárea y el área mayor, la multiplicó por la diferencia de población del área mayor entre 1970 y la proyección (ya disponible, realizada independientemente) de 1980. El resultado de esto sería la diferencia de población del área menor, entre 1970 y 1980, la cual, al ser sumada a la población de la subárea en 1970 dará finalmente la proyección de población para 1980. Si se requiere la población para el año 2000, la proporción que se aplicará a la diferencia de población del área mayor entre 1970-2000 será la obtenida a partir de la relación entre la diferencia de aumento de población entre 1940 y 1970 de la subárea al área mayor.

Normalmente, esta técnica considera que las áreas con población en descenso tienen un aporte nulo al crecimiento del área mayor.

En la prueba hecha por Pickard, proyectando la población de Pennsylvania en relación a la de Estados Unidos, encontró que el error que arrojaba esta metodología no era muy grande para las tres primeras décadas de la proyección, pero luego el error resultaba exageradamente grande. De todas maneras, se debe tener en cuenta que dado que se proyecta con la tendencia del pasado, cualquier cambio de tendencia en el futuro afecta la proyección, al igual que todas las demás metodologías.

Ejemplo: Si el aumento de población de una subárea entre 1960 y 1970 fue de 1 500 personas y del área mayor fue de 18 230, la subárea aportó un 8.23% del crecimiento de la región mayor. Por lo tanto, se espera que en el período 1970-1980 aporte esta misma proporción, de tal forma que si la población del área mayor en

este período aumentó en 20 230 personas, la población de la subárea en 1980 sería.

$$P_{80} = P_{70} + .0823 * 20230$$

$$P_{80} = P_{70} + 1669$$

3. Método del diferencial de crecimiento

Este método fue presentado por Naciones Unidas, ⁷³ con el fin de proyectar la población urbana y rural de un país, esto es, para dos subgrupos de la población; igualmente lo presentó para proyectar las ciudades con respecto a la población urbana, proyectando nuevamente dos subgrupos, la ciudad y el resto del área urbana, en forma sucesiva. En este mismo sentido, puede ser aplicado para estimar la población de las subáreas, proyectando el área menor y el resto del área mayor.

El procedimiento general consiste en proyectar los porcentajes de población de cada subárea, suponiendo que existe una diferencia constante entre las tasas de crecimiento de la subárea y del resto del área, lo cual implica una evolución de los porcentajes de población de cada subárea, en forma logística, con una asíntota inferior de 0 y superior de 100.

Al aplicar este procedimiento para proyectar la población de las subáreas, se puede proceder en dos formas: una es proyectando en forma separada para cada subárea y el resto, o en forma sucesiva, modificando el resto, eliminando cada vez la subárea ya proyectada, con lo cual la última subárea resulta por diferencia. Cuando se proyecta en forma individual las proporciones de cada subárea, posteriormente se deben ajustar para que sumen la unidad; cuando se hace en forma sucesiva, no se tiene que prorratear, pero se tiene el inconveniente de que los resultados variarán, de acuerdo al orden en que se proyecta cada subárea, lo cual la hace poco adecuada teóricamente.

La evolución del porcentaje de población del resto del área mayor se puede definir como:

$$\frac{R_t}{N_t} = \frac{1}{1 + (S_0/R_0)e^{-dt}}$$

⁷³ Naciones Unidas (1975), Métodos para hacer proyecciones de la población Urbana y Rural, Manual VIII, ST/ESA/SER.A/55, Nueva York.

donde R_t = población del resto del área mayor en el momento t
 N_t = población total del área mayor en el momento t
 S_0 = población de la subárea en el momento 0
 R_0 = población del resto del área mayor en el momento 0
 d = diferencia subárea-resto de las tasas de crecimiento
 exponencial
 t = período de tiempo ($t-0$)

Ejemplo: si para 1960 se tiene 2 500 personas en el resto y 150 en la subárea y en 1970 en el resto se tenían 2 800 y en la subárea 160, el valor de d se puede determinar como:

$$d = \frac{1}{10} * \ln \frac{2\ 800}{2\ 500} - \ln \frac{160}{150} = 0.004879$$

De acuerdo a esto, la proporción del resto para 1980 sería:

$$\frac{R_{80}}{N_{80}} = \frac{1}{1 + \frac{150}{2\ 500} e^{.004879*20}} = 0.9484$$

y la proporción de la subárea 0.0516.

Luego, al multiplicar esta proporción por la población total proyectada en forma independiente del área mayor, se obtendrá la población de la subárea.

Como se ha comentado anteriormente, este método supone que el diferencial de crecimiento entre dos subconjuntos de la población permanece constante. Sin embargo, este supuesto no es necesariamente muy realista, por tanto, se ha sugerido que es posible hacer variar la diferencia de crecimiento entre una subárea y el resto y esta variación puede hacerse de dos formas:

- Asumiendo para un período futuro un mayor o menor diferencial de crecimiento, o
- asumiendo un aumento o disminución gradual año a año.

En el primer caso la proyección se haría de la siguiente manera:

$$\frac{R_{t+n}}{N_{t+n}} = \frac{1}{1 + (S_t/R_t)e^{-d'n}}$$

donde d' es el diferencial futuro asumido para todo el período de la proyección.

n es el período entre la última información y la proyección.

En el segundo caso, la proyección se haría:

$$\frac{R_{t+n}}{N_{t+n}} = \frac{1}{1 + (S_t/R_t) e^{-[d'(t+1)+d'(t+2)+\dots + d'(t+n)]}}$$

donde $d'(t+1)$ es el diferencial asumido para un año después de la última información

$d'(t+2)$ es el diferencial asumido para el segundo año después de la información, ..., y

$d'(t+n)$ es el diferencial asumido para el año de la proyección.

C. Métodos demográficos

Los métodos demográficos son aquéllos que tienen en cuenta para proyectar la población, cada uno de los componentes del crecimiento, esto es, la fecundidad, la mortalidad y la migración. Estos métodos son usados cuando se dispone de la información requerida.

Dentro de los métodos demográficos se pueden mencionar los siguientes:

1. Método de los componentes brutos

Este método estima la población total de las áreas menores a partir de la proyección de las tasas brutas de natalidad, mortalidad y migración, por lo cual requiere de la información de los nacimientos, las defunciones y las migraciones.

2. Método de relación de cohortes

Este método proyecta la población por sexo y edad, tomando el efecto de la migración y la mortalidad en forma conjunta, calculando las "relaciones de sobrevivencia" que resultan de comparar la población por sexo y edad de cada subárea en dos censos consecutivos. Sin embargo, con este procedimiento sólo es posible proyectar la población de diez años y más (cuando el período intercensal es de 10 años), por lo tanto para la población menor de diez años se debe utilizar otro procedimiento. Una adaptación de esta metodología fué utilizada en

Canadá ⁷⁴ para proyectar áreas menores, y actualmente ésta adaptación está siendo probada en el CELADE, para proyectar las provincias de Chile, encontrándose hasta el momento resultados muy prometedores.

3. Método de los componentes

El método de los componentes es el procedimiento demográfico más sofisticado, con el cual se obtienen proyecciones de población por sexo y edad. Con este procedimiento se proyecta cada uno de los componentes del crecimiento de la población: fecundidad, mortalidad y migración, en dos aspectos, su nivel y su estructura por edad.

El mecanismo utilizado para la proyección de cada componente es muy variado y depende básicamente del tipo de información disponible y de su calidad.

Vale la pena resaltar que en este procedimiento la migración es el componente que presenta mayores inconvenientes, pues esta última está muy afectada por la situación económica por la que atraviesa cada área menor y las subáreas vecinas.

De los tres procedimientos descritos anteriormente, obviamente el más adecuado es el de los componentes, ya que el resultado obtenido en la estructura y en el volumen de cada población está totalmente explicado por los cambios en el comportamiento por edad de cada uno de los componentes del crecimiento de una población. Por esta razón, si se dispusiese de la información necesaria, este es el procedimiento que debería ser empleado.

D. Métodos o modelos económicos

Teniendo en cuenta que el crecimiento de la población está afectado en gran medida por la situación económica que atraviesa el área menor y las subáreas vecinas, se han utilizado en varias oportunidades modelos que involucran estas dos variables para proyectar la población. A continuación se describirán algunos de estos procedimientos.

⁷⁴ Duchesne, Louis (1984), Perspectives démographiques infrarégionales, 1981-2001, Bureau de la statistique du Québec.

1. Método de regresión

La única diferencia existente entre la regresión en los modelos económicos para proyectar la población y los modelos matemáticos, consiste en el tipo de variables independientes que se utilizan. Aquí, en lugar del tiempo, se emplean indicadores como el incremento en los salarios de cada una de las ramas de actividad (agricultura, industria, etc.), el aumento en el empleo o en el desempleo, el porcentaje de propietarios de viviendas, etc. de cada una de las subáreas, las que reflejan en forma aproximada la situación económica por la que se está pasando. Estos indicadores son proyectados en primera instancia, para luego obtener en forma derivada la población.

2. Método de covarianzas modificado de Berry

La covarianza es una técnica que intenta mejorar la descripción estadística, separando el comportamiento de las variables independientes, en subgrupos basados en criterios nominales.

El uso de la covarianza como un medio para proyectar la población, parece que fue propuesto por primera vez por Isard y Carrothers (1960)⁷⁵. Berry (1972)⁷⁶ utilizó este procedimiento para proyectar la población de las regiones de Estados Unidos, pues observó que el crecimiento de las subáreas dependía, por un lado, de su tamaño y por el otro, del porcentaje de salarios pagados en cada sector económico: agricultura, minería, manufactura, gobierno federal y actividades residenciales (industrias no básicas).

En base a lo anterior, se obtuvieron subgrupos de regiones, donde se combinaban diferentes tamaños de población con diferentes porcentajes de salarios pagados en cada sector económico; posteriormente, se calculó la tasa de crecimiento promedio de cada subgrupo y las desviaciones de cada uno de éstos con respecto a la tasa de crecimiento nacional.

⁷⁵ Isard, Walter (1960), Methods of regional analysis, an introduction to regional science, The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, U.S.A.

⁷⁶ Berry, Brian, Population growth in the daily urban systems of the Unites States, 1980-2000, in U.S. Commission on Population Growth and the American Future. Population Distribution and Policy, Sara Mills Mazie, ed. Vol. V of Commission Research Reports. En Pittenger, op.cit., págs. 112-116.

De esta forma, las proyecciones de población para cada subunidad fueron obtenidas aplicando la tasa de crecimiento relevante a los miembros de cada categoría, la que resultaba de la comparación de la tasa de crecimiento nacional utilizada por el Buró de Censos, y la desviación de ésta a la subunidad, obtenida anteriormente.

Posteriormente, los resultados se ajustaron al total de población presentado por el Buró de Censos.

3. Modelo Obers. Razón de empleos

El modelo Obers ^{1/} fue desarrollado por la Oficina de Asuntos Económicos y Servicios de Investigaciones Económicas (Office of Business Economics and the Economic Research Service) a mediados de la década de 1960, en respuesta a las necesidades de datos de las agencias públicas encargadas de un amplio plan para el uso, administración y desarrollo del agua y de los recursos relacionados en Estados Unidos.

El Obers es un modelo complejo, compuesto por cuatro submodelos. El primero proyecta las industrias básicas (excluyendo la agricultura y las fuerzas armadas); el segundo proyecta la agricultura; el tercero las industrias residenciales (no básicas o no exportables) y con una modificación proyecta las posibilidades de ingreso, la transferencia de pagos y las contribuciones personales al seguro social. Finalmente, el cuarto modelo proyecta en forma derivada la población civil de cada subárea; las fuerzas armadas son tratadas separadamente.

La proyección de población se fundamentó en la hipótesis que las variaciones regionales en el incremento natural tienen menos impacto en el cambio de población que la migración neta, y que ésta es motivada por oportunidades económicas, presentes y futuras, en la población de 15-64 y 0 - 14 años, por lo cual fueron proyectadas como una función del empleo del área. La población mayor

^{1/} U.S. Water Resources Council, 1972 Obers Projections, Vol. 1, "Concepts, Methodology and summary Data", (Washington D.C.: Government Printing Office, 1974). En Pittenger, op. cit., pág. 116-123.

de 65 años fue proyectada en forma separada, dado que sus patrones de migración no están determinados por oportunidades de empleo.

Cabe mencionar, que dado que la orientación de las agencias relacionadas con el diseño de este modelo eran económicas, el submodelo demográfico no es muy sofisticado, pero se espera que éste pueda ser mejorado posteriormente.

4. Razón al stock de viviendas proyectadas

Este método de proyección consiste en estimar la población al futuro, a partir de la proyección por un lado del número de viviendas y por el otro, del número de personas por vivienda de cada localidad y posteriormente ajustar las poblaciones, para que la suma reproduzca el total del área mayor.

El Consejo de Metas del Plan Regional y el Comité de Objetivos de los Condados de Erie y Niágara ^{2/}, con la asistencia de una firma consultora, proyectó la población a ser planificada, como la suma de la población en grupos acuartelados (viviendas colectivas), más la población de las casas (viviendas particulares), obtenida de la multiplicación del tamaño medio de familias y el número de viviendas.

Para proyectar las viviendas se basaron en la tendencia histórica de las licencias de construcción y los registros de demolición; por su parte, para el tamaño de las familias, en la proporción que representa el cambio en el tamaño medio de las familias de las divisiones civiles menores al cambio nacional del tamaño de la familia.

Tal vez este procedimiento arroje buenos resultados al estimar la población a un momento dado, pero posiblemente como proyección hacia el futuro, puede volverse más compleja.

^{2/} Erie and Niagara Counties Regional Planning Board, Regional population projections, Erie and Niagara Counties, Grand Island, N.Y., 1972. En Pittenger, op.cit., pág. 123-125.

E. Otros métodos

Dentro de esta categoría se incluyen los modelos de densidad de población, los cuales son usados con frecuencia para proyectar la población de subunidades de ciudades o áreas metropolitanas y áreas menores, con límites relativamente permanentes.

A continuación se describirán dos de estos modelos, que han sido diseñados para proyectar algunas áreas específicas de Estados Unidos.

1. Modelo de dispersión Genessee-Finger Lakes Region

Este modelo fue diseñado por Bruce B. Herbert y usado por el Genessee-Finger Lakes Regional Planning Board ^{3/} en 1971, para proyectar la población de 111 subáreas de ocho regiones (distritos) del oeste del Estado de Nueva York, localizados alrededor de la ciudad de Rochester.

Este modelo proyecta la población total de las subáreas, las cuales son controladas posteriormente, por la población del área mayor, proyectada en forma independiente. Se fundamenta en la hipótesis de que los centros urbanos expanden su territorio a medida que su población aumenta, y que la densidad de su población varía según la distancia al centro de la ciudad.

De esta forma se estimó, por medio de mínimos cuadrados, un polinomio de sexto grado, donde la variable independiente era la distancia aérea del centro de cada área menor al centro de Rochester y la variable dependiente era el logaritmo de la densidad de población por milla cuadrada. Este modelo explicaba el 91 por ciento de la varianza para las 40 subáreas dentro de un radio de 25 millas del centro y el 63 por ciento de la varianza para las demás subáreas y, dado que los coeficientes mostraban una tendencia aproximadamente lineal para 1950, 1960 y 1970, se asumió que esta tendencia podía continuar, por lo cual se podría utilizar para proyectar la población.

^{3/} Genessee-Finger Lakes Regional Planning Board, Regional population distribution and projections, (Rochester, N.Y., 1971). Citado en Pittenger (1976) op.cit., pág. 105-107.

2. Modelo de Newling

Este modelo fue desarrollado por Bruce Newling (1968) ^{4/} para proyectar la población de las subáreas del Estado de New Jersey, ya que muchas de éstas tuvieron un crecimiento muy fuerte, que hace que la curva exponencial dé resultados exagerados, y otras curvas, como la de Gompertz, distorsione los resultados.

El modelo se fundamentó en la observación empírica de la tendencia de la población total de las áreas menores de New Jersey, que tenían tasas de crecimiento que eran inversamente relacionadas a la densidad de población al principio del períodos 1950-1960.

En la formulación de Newling no se consideró ajustar la suma de las proyecciones locales, pero posteriormente Greenberg (1972) ^{5/} realizó este ajuste.

F. Alcance del presente trabajo

Si bien es cierto que en los países latinoamericanos es posible realizar, a nivel nacional e incluso a nivel de las áreas administrativas mayores, las proyecciones de población por el método de los componentes, estimando y proyectando independientemente cada uno de los componentes del crecimiento de la población -fecundidad, mortalidad y migración-, a nivel municipal o de las áreas administrativas menores, este tipo de proyección se complica debido a múltiples aspectos.

Por un lado, normalmente las estadísticas vitales no son muy confiables, tanto por la calidad de los registros como por las fluctuaciones aleatorias en los nacimientos y defunciones que se pueden presentar debido al tamaño de la

^{4/} Newling, Bruce (1968), Population projections for New Jersey to 2000 (New York), Citado en Pittenger, op.cit., pág. 107-109.

^{5/} Greenberg, Michael(1972), A test of combination of models for projecting the populations of minor civil divisions, Economic Geography 48,2. pags. 179-188.

población, lo cual llevaría a estimaciones erróneas de la mortalidad y la fecundidad.

Por otra parte, si lo anterior no tuviera mayor dificultad, la migración interna cobra gran importancia en la determinación del crecimiento de las poblaciones menores, y es aquí donde surgen más problemas pues normalmente no se tienen estadísticas de migración interna, y aun cuando se contara con la información necesaria - por ejemplo de un censo- a lo más, se podría estimar la migración interna en algún (os) período(s), pero su proyección es muy compleja pues este componente presenta fluctuaciones muy repentinas que dependen básicamente de las condiciones económicas y de las políticas de desarrollo. Por lo tanto, para proyectarla, tendríamos que proyectar estas variables, lo que es también un problema, o hacer una serie de supuestos (que seguramente no coinciden con la realidad) sobre el comportamiento de la migración.

Adicionalmente existe otro inconveniente, que es la limitación del presupuesto y del tiempo destinado para realizar dichas proyecciones de población. Es por esto que, en general, el método de los componentes no suele ser usado para la estimación de la población de las áreas menores en los países en desarrollo.

Por su parte, las proyecciones de población de áreas menores por métodos económicos, por medio de diferentes modelos en los cuales, además del tiempo, se involucran variables de tipo socioeconómico, como el aumento de salarios, del empleo o desempleo, etc., serían una buena perspectiva de ser posible una proyección realista de éstas. Sin embargo, dada la carencia en general de la información necesaria desagregada a nivel de las subáreas, su uso también se dificulta en nuestros países.

Por estas razones es que para la proyección de áreas menores se ha preferido utilizar otro tipo de herramientas, entre las cuales se encuentran los métodos para extrapolar directamente la población de dichas áreas o la proporción que ésta representa en el área mayor, las cuales pueden resolverse en forma matemática, gráfica o estadística, pero dado que los dos últimos requieren de una serie de puntos referidos a un período largo de tiempo, en general se han utilizado los procedimientos matemáticos que requieren para su estimación un

mínimo de puntos.

Sin embargo, puesto que existen muchos métodos pero no se sabe cual de todos estos es mejor, en lo que sigue se tratará de resolver esta inquietud.

Dentro de los métodos matemáticos que extrapolan la población se examinarán: la curva lineal, la exponencial y, dentro de las logísticas, la de Murphy, por requerir sólo dos puntos; dentro de los que requieren tres puntos, la parábola de segundo grado, la exponencial modificada y la Gompertz. La parábola de tercer grado no se utilizará por requerir un cuarto punto, así como tampoco la geométrica, pues como se mencionó anteriormente, arroja los mismos resultados que la exponencial.

Dentro de los métodos de proporciones, se examinarán por un lado los mismos métodos matemáticos señalados anteriormente, y adicionalmente se utilizará la curva logística, la cual sólo necesita de dos valores para su aplicación en proporciones, pues éstas sólo pueden variar entre cero y uno, por lo cual se pueden asumir estos valores como los de las asíntotas; adicionalmente se examinarán algunas técnicas que involucran algunos juicios para la proyección de las proporciones: el método de proporciones del Buro de Censos, el de la tendencia de las proporciones y la participación en el crecimiento, de Pickard y el método del diferencial de crecimiento de Naciones Unidas.

III. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES POR EXTRAPOLACION DE LA POBLACION EN FORMA DIRECTA

En el capítulo anterior se presentaron una gran cantidad de métodos que se han desarrollado en forma gráfica, matemática o estadística, para proyectar la población de áreas pequeñas, extrapolando las tendencias observadas del crecimiento de la población, a partir de los valores absolutos de ésta, o de la proporción que representa la población del área menor respecto a la del área mayor.

Dada la variedad de métodos que se han desarrollado, cuando los encargados de realizar las estimaciones de población de áreas menores se enfrentan al problema de hacer este tipo de proyecciones, surge la incertidumbre de cuál metodología es la más apropiada.

Para tratar de resolver esta inquietud, en este capítulo se evaluarán los métodos de extrapolación de la población de áreas menores y en el próximo, se examinarán las proyecciones a partir de la extrapolación de las proporciones de población.

Como se recordará, para evaluar las técnicas de proyección, se estimará la población de las subáreas a la fecha del último censo, para que la censada en éste, sirva como punto de comparación. Por esta razón, los resultados que se obtengan corresponderán a una proyección a mediano plazo, aproximadamente a 12 años en Colombia y a 10 años en Venezuela.

Adicionalmente se debe tener presente, que la concordancia entre el total proyectado del área mayor y la suma de las proyecciones de las áreas menores puede requerirse para la coherencia de las estimaciones cuando se proyectan todas las subáreas de un país o de una región, pero en un momento determinado puede ser necesario proyectar únicamente una cierta localidad, y en tal caso esta conciliación no podría ser hecha.

Dado lo anterior, los métodos de extrapolación de la población de áreas

menores se examinarán en dos etapas: en una primera instancia, se proyectará la población de cada subárea en forma independiente y posteriormente, se prorratarán de acuerdo a la población total del área mayor, con el fin de ver las diferencias entre estos dos procedimientos.

A. Información básica

La información básica para la aplicación de estas metodologías, con el fin de proyectar en forma independiente la población global de las subáreas, es la población total de cada una de ellas en por lo menos dos o tres momentos, según el método, como se resumen en el cuadro 1, mientras que en las proyecciones dependientes, se requiere adicionalmente la población proyectada del área mayor, para ajustar la suma de las proyecciones locales a este total.

Cuadro 1

INFORMACION MINIMA NECESARIA PARA LA APLICACION DE LAS PROYECCIONES MATEMATICAS DE LA POBLACION

Método	Número de valores		
	2	3	4
Línea recta	x		
Parábola		x	
Polinomio de tercer grado			x
Logística <u>1</u> /		x	
Logística Murphy	x		
Geométrica-exponencial	x		
Gompertz <u>1</u> /		x	
Exponencial modificada <u>1</u> /		x	

Nota: 1/ Para la estimación de los parámetros de estas curvas se requiere que los datos básicos se encuentren a periodos igualmente espaciados.

Dados los requerimientos, se escogió como se había mencionado anteriormente, una región tanto de Colombia como de Venezuela, ya que para estos países se disponía de la información de los censos en las cuatro últimas décadas, lo cual era indispensable para que los tres primeros sirvieran de base para la proyección y el cuarto se utilizara para verificar la calidad de las estimaciones (en los procedimientos que sólo requerían dos puntos, no se consideró el primer censo).

En cuanto a esta información, se debe tener en cuenta que los datos publicados, no estaban corregidos por cobertura en ningún censo, a excepción del Censo de Colombia de 1973, para el cual la población de los municipios en referencia también se encontraba ajustada aproximadamente en un 7 por ciento ^{6/}.

Sin embargo, para los fines de este trabajo, se decidió utilizar la información de los censos sin ningún tipo de ajuste por cobertura, ya que como se mencionó en el capítulo introductorio, en general, solo se podía contar con la cobertura a nivel nacional.

Por esta razón, los errores que se obtengan en las proyecciones independientes, incluirán por un lado el efecto causado por la diferencia de cobertura en cada subárea, lo que lleva a un aparente cambio de tendencia en el crecimiento y por otro, por los verdaderos cambios ocurridos en ésta, como consecuencia de las modificaciones soci-económicas y culturales, que pudo enfrentar, mientras que los errores que se obtengan en las proyecciones dependientes, estarán afectadas además, por los cambios "reales o ficticios", ocurridos en las otras áreas menores.

Por otra parte, debido a que algunas de las metodologías requerían para su aplicación que los períodos intercensales y/o los períodos de la proyección estuvieran igualmente espaciados, se interpoló la población censal para que se cumpliera esta condición. El procedimiento utilizado para esto, fué la curva exponencial, siendo prorratedos los resultados de tal forma que la suma de las áreas menores coincidiera con la interpolación de la población del área mayor.

El hecho de interpolar la población para ajustarla a períodos igualmente

^{6/} Colombia, DANE, Censo de 1973, Resumen General.

espaciados, lleva implícito un suavizamiento en la tendencia del crecimiento, el cual es mayor, en la medida en que ésta se desplace por más tiempo. Por esta razón, para el caso de Venezuela se interpoló la población a períodos de 10 años, lo que significó desplazarla a lo más por un año; mientras que para Colombia, se hizo para períodos de 11 años, de tal forma que se corrió a lo más por un año y medio.

Vale la pena comentar, que en una prueba realizada para Colombia, interpolando la población a períodos de 10 años (lo que implicó desplazar la población hasta por más de 4 años en algún caso), al proyectar la población por los procedimientos que utilizan esta información, se lograron unos resultados que arrojaban siempre unos errores menores a los obtenidos con la población ajustada a 11 años, lo cual confirma la forma como actúa el mayor desplazamiento, en el sentido indicado, de suavizar las tendencias, permitiendo que los métodos se ajusten mejor, pero a la vez, distorsionando más la "verdadera" tendencia.

En los cuadros 2 y 4 se presenta la población de las regiones escogidas de los dos países en las fechas censales, las cuales son utilizadas para la aplicación de la línea recta, la parábola de segundo grado, la logística de Murphy y la exponencial, mientras que en los cuadros 3 y 5 se presenta esta información, pero para momentos igualmente espaciados, con lo que fue posible aplicar la Gompertz y la exponencial modificada.

Cuadro 2

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO
INFORMACION CENSAL

MUNICIPIO	AÑO DEL CENSO			
	1951	1964	1973	1985
VALLE DEL RIO NEGRO	120847	159902	188159	244186
CARMEN DE VIVORAL	18147	21420	21540	29132
CONCEPCION	4327	5536	5934	6077
GUARNE	10318	13788	16213	23269
LA CEJA	10568	16507	20851	28766
LA UNION	6531	10666	11047	13313
MARINILLA	14273	17466	22368	31310
PEÑOL	9702	11700	12491	13791
RIONEGRO	21809	30637	40494	56195
SAN VICENTE	11183	14852	17518	19643
SANTUARIO	13989	17330	19703	22690

Fuente: Colombia, Censos Nacionales de Población, 1951, 1964, 1973, 1985

Cuadro 3

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO
POBLACION CENSADA, INTERPOLADA A PERIODOS IGUALMENTE ESPACIADOS

MUNICIPIO	FECHA DE REFERENCIA			
	1952.8	1963.8	1974.8	1985.8
VALLE DEL RIO NEGRO	124582	157812	192196	244186
CARMEN DE VIVORAL	18486	21402	22085	29132
CONCEPCION	4447	5503	5948	6077
GUARNE	10653	13603	16704	23269
LA CEJA	11098	16191	21413	28766
LA UNION	6892	10631	11220	13313
MARINILLA	14596	17113	22998	31310
PEÑOL	9906	11634	12597	13791
RIONEGRO	22640	29941	41605	56195
SAN VICENTE	11539	14649	17689	19643
SANTUARIO	14325	17144	19938	22690

Fuente: Cuadro 2

Nota : La no coincidencia absoluta en la suma, corresponde exclusivamente a problemas de aproximación en los decimales.

Cuadro 4

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA
INFORMACION CENSAL

DISTRITO	AÑO DEL CENSO			
	1950	1961	1971	1981
MERIDA	211110	270668	347095	459361
ANDRES BELLO	6457	18853	26370	31645
ARZ. CHACON	15450	16060	16614	14902
CAMPO ELIAS	24766	26598	31615	37009
JUSTO BRICENO	13078	18721	21148	20762
LIBERTADOR	49500	69636	103621	166617
MIRANDA	11309	16294	19491	24631
RANGEL	11907	12262	15295	18166
RIVAS DAVILA	15594	15251	16100	16958
SUCRE	22533	20650	21659	25581
TOVAR	40516	56343	75182	103090

Fuente: Venezuela, Censos Nacionales de Poblacion, 1950, 1961, 1971, 1981.

Cuadro 5

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA
POBLACION CENSADA, INTERPOLADA A PERIODOS IGUALMENTE ESPACIADOS

DISTRITO	FECHA DE REFERENCIA			
	1951.8	1961.8	1971.8	1981.8
MERIDA	215768	274795	346763	459361
ANDRES BELLO	7111	19251	26352	31645
ARZ. CHACON	15539	16101	16619	14902
CAMPO ELIAS	24980	26892	31596	37009
JUSTO BRICENO	13528	18869	21148	20762
LIBERTADOR	51125	71374	103448	166617
MIRANDA	11705	16480	19474	24631
RANGEL	11966	12434	15285	18166
RIVAS DAVILA	15600	15308	16096	16958
SUCRE	22413	20720	21646	25581
TOVAR	41803	57367	75097	103090

Fuente: Cuadro 4

Nota : La no coincidencia absoluta en la suma, corresponde exclusivamente a problemas de aproximación en los decimales.

**B. Medidas estadísticas utilizadas para evaluar la
calidad de las estimaciones**

Para medir la calidad de las estimaciones se calculó el error porcentual de las proyecciones obtenidas para cada área menor, por cada uno de los métodos considerados.

El error porcentual (porcentaje de desviación) se definió como:

$$de = \left[\frac{P_p - P_c}{P_c} \right] * 100$$

donde, P_p es la población proyectada y,

P_c es la población real (en el presente caso, la censada en la última década).

Por esta razón, un error positivo estará indicando que la proyección sobreestimó el valor "real" o censado de la población, mientras que un valor negativo indicará que la proyección subestimó el crecimiento de la población.

Por otra parte, en la medida en que el valor absoluto de este error o desviación se acerca a cero, nos indica que la estimación es de mejor calidad.

Dado que el error porcentual varía entre una localidad y otra, el análisis de la bondad en forma global de cada método se dificulta, en base a esta medida, por lo cual, para facilitar su evaluación se calcularon una serie de medidas resumen. Estas medidas son:

1. Estadístico Chi-cuadrado de Pearson (X^2_p)

El X^2 es una medida de la bondad de ajuste de un modelo; es un "método clásico de comparación ...", que contrasta las frecuencias observadas en varios

grupos, con las frecuencias esperadas ...^{1/}, se define como:

$$X^2_p = \sum_{i=1}^n \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

donde, o se refiere a la frecuencia observada en cada caso,

e se refiere a la frecuencia esperada en cada caso, y

n es el número de casos.

Para la presente aplicación, el valor observado será la proyección de población en cada uno de los métodos; el valor esperado será la población enumerada en el Censo de la década del 80 y n será el número de municipios o distritos, los cuales en el ejercicio son 10 en cada caso.

En la medida que el valor del X^2 sea menor, indicará un mejor ajuste o un menor error del método de proyección en referencia. Sin embargo, dado que el valor del X^2 es una función lineal del tamaño de la población, los resultados obtenidos para los dos países no son comparables en forma directa, pero ponderando los resultados de un país al tamaño del otro país, la comparación se hace posible.

Esta medida puede ser engañosa en el sentido de lo que se quiere medir aquí, pues si por ejemplo, un procedimiento arroja muy buenos resultados en 9 de los 10 casos, pero justamente el área menor cuya proyección no fue buena es muy grande, el valor del X^2 puede ser mayor que en otra técnica, donde los errores de los 9 casos anteriores sean mayores (en términos absolutos), o sea, que la proyección es de inferior calidad y el restante, se aproxime más al valor "real".

Sin embargo, se incluyó aquí como una medida general de resumen, pero no se consideró necesario hacer la modificación para que los valores del X^2 fuesen comparables entre los dos países.

^{1/} Rodríguez, Germán (1986), Modelos estadísticos para el análisis de datos demográficos, Apuntes de clase del curso "Métodos Cuantitativos II", CELADE, Santiago.

2. Promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación

Esta es una medida que con frecuencia se utiliza para resumir el error porcentual de una serie de observaciones o casos, e indica el error promedio de cada metodología. Por comodidad, en el texto se denominará también "desviación media" o "error medio".

Esta medida se puede formular como:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d\%| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{P_p - P_c}{P_c} \right| * 100$$

donde $d\%$, P_p , P_c y n se definen de la misma forma como se mencionó anteriormente.

Aunque esta medida no está afectada por el tamaño de la población de las subáreas, sí lo puede estar por los errores extremos que se presentan en una o unas pocas proyecciones.

3. Porcentaje de desviaciones por encima del 5 ó 10 por ciento (>5% ó >10%)

Se refiere a la frecuencia expresada en porcentaje, en que el valor absoluto de los errores porcentuales de las proyecciones de las subáreas, está por encima del 5 ó 10 por ciento. Esta medida indica la frecuencia de valores extremos en las proyecciones, lo cual es de interés ya que puede ser mejor un método que arroje la mayor cantidad de "buenas" proyecciones, aunque las pocas malas tengan errores muy altos. Dado que se han considerado como buenas proyecciones aquéllas cuyo error no sobrepasa el 5 por ciento, en base a esta medida se podrá evaluar esto.

4. Porcentaje de desviaciones positivas o negativas

Esta medida considera la frecuencia en que el error porcentual es positivo o negativo. Sirve para determinar la presencia o ausencia de un sesgo sistemático hacia arriba o hacia abajo, del método que se está revisando. Por ejemplo, si la tasa de crecimiento ha disminuido, se espera que los métodos que asumen que la tasa permanece contante, sobreestimarán en forma sistemática la población.

5. Porcentaje de frecuencia en que cada método arroja las mejores y las peores

proyecciones

Esta medida pretende examinar con qué frecuencia, dentro de las técnicas examinadas en cada etapa, un método arroja la mejor o la peor proyección de cada subárea. Por lo tanto, en el cuadro que aparece, la suma horizontal debe ser el cien por ciento.

Se debe tener en cuenta que aquí los resultados pueden ser también engañosos, pues puede suceder que la estimación obtenida para una subárea por un método sea la mejor, pero ésta a su vez puede darse en una subárea donde todas las técnicas arrojaron buenos resultados o por el contrario, donde se obtuvieron malos resultados. Puede suceder, también, que el error de la mejor proyección para una subárea por un método sea superior que el obtenido para las peores proyecciones de otros métodos.

Teniendo en cuenta todas las limitaciones de estas medidas resumen, en lo que sigue, se revisarán los resultados obtenidos por los diferentes métodos.

C. Evaluación de los Resultados

Como se mencionó anteriormente, los resultados de las proyecciones se analizarán en dos etapas. En la primera se considerarán los resultados de las proyecciones obtenidas en forma independiente, y en la segunda se examinarán después de haber sido prorrateadas al total de la población del área mayor censada en la década de los 80.

1. Análisis de los resultados, considerando las proyecciones de las áreas menores en forma independiente

Al observar los cuadros 6 y 7, se puede apreciar que a diferencia de lo deseado, mientras para algunas áreas menores una metodología de proyección resulta muy adecuada, en otros casos esta misma metodología tiene errores muy altos. Esto resulta lógico, si se tiene en cuenta que la bondad de un método depende básicamente de si el crecimiento de la población en referencia, cumple o no con los supuestos implícitos de la técnica.

Sin embargo, en el caso de Colombia (ver cuadro 6) resulta interesante observar que en tres municipios: Carmen de Vival, Guarne y La Unión, todos los métodos arrojan errores muy altos (20% en promedio), mientras que en todos los demás, los errores están alrededor del 5%, lo cual pone de manifiesto, que estos tres municipios, tuvieron algún tipo de problema particular, como puede ser una significativa omisión en el censo de 1973 y/o un gran crecimiento en el último período, como parece confirmarse al observar el comportamiento de la tasa de crecimiento (ver cuadro A.11), por ejemplo de Carmen de Vival, donde la tasa del período 1951-64 fué 1.26 %, la del período 1964-73, 0.06 % y la del último período, 2.52 %.

Por otra parte, en los municipios de Colombia y en los distritos de Venezuela que cumplieron en forma aproximada los supuestos de las diferentes curvas, se lograron buenos resultados; es así como en la medida en que el cociente entre la tasa anual de crecimiento (ver cuadros A.11 y A.12) del período intercensal 1973-85 ó 1971-81 y 1964-73 ó 1961-71 de Colombia o Venezuela se acercaba a 1, se conseguían mejores proyecciones exponenciales (donde los errores se acercaban a cero) y cuando el cociente entre el incremento medio anual de población (ver cuadros 2 y 4) en los mismos períodos se acercaba a uno, se lograron buenas proyecciones lineales.

Igualmente sucedió en las proyecciones con la ecuación de Gompertz y exponencial modificada, donde se lograron buenos resultados en los municipios que cumplieron con el supuesto requerido para la estimación de los parámetros, esto es, que la tasa de crecimiento hubiese disminuido (siendo positiva), de tal forma que el valor obtenido de K, representara la asíntota superior; pero además, que en el período de la proyección, la tasa de crecimiento también hubiese disminuido, de tal manera que la estimación hecha, se aproximara a la población censada.

Cuadro 6

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO
ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION, POR
METODO, SEGUN MUNICIPIO AL 15 DE OCTUBRE DE 1985

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
VALLE DEL RIO NEGRO	-8.00	-5.82	-3.64	-7.61	-1.75	-0.40
CARMEN DE VIVORAL	-25.53	-25.62	-25.53	-34.68	-23.64	-23.68
CONCEPCION	6.10	5.39	6.80	-3.00	0.96	0.69
GUARNE	-16.87	-16.20	-14.11	-16.95	-14.21	-14.70
LA CEJA	-8.02	-4.80	-1.99	-7.31	-6.96	-8.46
LA UNION	-13.33	-13.81	-13.17	-36.53	-15.02	-15.15
MARINILLA	-8.34	-4.54	-1.68	2.02	17.40	27.21
PENOL	-2.02	-2.68	-1.44	-7.47	-4.76	-4.99
RIONEGRO	-5.29	0.21	3.30	2.64	7.19	9.04
SAN VICENTE	6.71	7.66	10.37	7.23	5.17	4.52
SANTUARIO	0.34	0.33	2.49	0.46	0.08	-0.24

Fuente: Cuadros 2 y A1

Cuadro 7

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL
DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION, POR METODO,
SEGUN DISTRITO AL 20 DE OCTUBRE DE 1981

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
MERIDA	-8.92	-5.38	-3.35	-6.05	-1.70	1.58
ANDRES BELLO	5.49	11.12	13.96	-10.23	-3.60	-8.06
ARZ. CHACON	14.96	14.48	15.07	14.45	14.74	14.73
CAMPO ELIAS	-1.93	-1.56	0.37	5.80	16.66	21.45
JUSTO BRICENO	12.76	12.39	14.13	-2.55	6.54	5.92
LIBERTADOR	-18.78	-12.15	-9.90	-11.61	-7.42	-6.18
MIRANDA	-8.76	-8.31	-6.47	-16.23	-13.31	-14.23
RANGEL	-0.23	1.21	3.47	13.26	79.72	155.43
RIVAS DAVILA	-0.39	-0.92	-0.14	6.16	-17.65	-16.95
SUCRE	-11.65	-12.10	-11.48	-0.96	-17.36	-17.42
TOVAR	-10.03	-6.86	-4.56	-7.94	-7.56	-8.39

Fuente: Cuadros 4 y A2

Como se vió anteriormente, no existe un método con el cual se obtengan buenos resultados para todas las áreas menores, pero a nivel global, un método puede ser más adecuado que otro.

En tal sentido, de acuerdo a las medidas resumen calculadas (ver cuadro 8), se encontró que la función exponencial, arrojaba los mejores resultados, tanto en Colombia como en Venezuela, pues se lograron los menores X^2 , error medio y porcentaje de errores por encima del 5%, aunque ésto no es muy alentador, si se tiene en cuenta que el 50 y el 60 por ciento de las proyecciones de Colombia y

Cuadro 8

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, ERROR MEDIO, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POR ENCIMA DEL 5 Y 10 POR CIENTO, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES PROYECCIONES DE POBLACION, POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF.	GOMPERTZ
<u>COLOMBIA</u>						
X^2	3474.13	3050.43	2930.33	6340.32	3861.10	5499.59
Error medio	9.25	8.12	8.09	11.83	9.54	10.87
>5% a/	80.00	50.00	50.00	60.00	70.00	60.00
>10% a/	30.00	30.00	40.00	30.00	40.00	40.00
desv.posit. a/	30.00	40.00	40.00	40.00	40.00	30.00
mej. proy. a/ b/	0.00	10.00	50.00	0.00	20.00	10.00
peor proy. a/ b/	0.00	0.00	30.00	40.00	0.00	30.00
<u>VENEZUELA</u>						
X^2	8231.85	4523.15	3677.95	4708.14	16269.05	49318.46
Error medio	8.50	8.11	7.95	8.92	18.46	26.88
>5% a/	70.00	70.00	60.00	80.00	90.00	100.00
>10% a/	50.00	50.00	40.00	50.00	60.00	60.00
desv.posit. a/	30.00	40.00	50.00	40.00	40.00	40.00
mej. proy. a/ b/	10.00	0.00	40.00	30.00	10.00	10.00
peor proy. a/ b/	20.00	0.00	30.00	10.00	10.00	30.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 6, 7, A1 y A2

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 subareas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo 60.00 %, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrió el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

Venezuela respectivamente, tienen un error por encima del 5% y el 40 por ciento por encima del 10%, en una extrapolación a mediano plazo (12 y 10 años).

Adicionalmente, con esta función se obtuvo el más alto porcentaje de frecuencias en que el método logró las mejores estimaciones, aunque también tuvo un alto porcentaje (30%) en que fué la peor estimación. Sin embargo en el caso de Colombia, el error obtenido en este porcentaje de municipios, fué inferior a algunos que resultaban de la mejor proyección.

En cuanto a las otras metodologías, vale la pena resaltar los siguientes resultados: Con la logística de Murphy se lograron unos resultados muy similares a los obtenidos con la exponencial, y a pesar de no ser las mejores estimaciones, en ningún caso fueron las peores.

Por su parte, las proyecciones obtenidas a partir de las curvas de Gompertz y exponencial modificada, arrojaron unos resultados algo contradictorios, pues aunque la suma de las proyecciones de las subáreas, se desvía muy poco de la población censada en el área mayor, las desviaciones por encima del 5 y 10% son en general las más altas de todos los métodos. Es así como, para el distrito de Rangel en Venezuela, estas desviaciones llegan a 155.43% y 79.72% lo cual explica los altos valores obtenidos en el estadístico X^2 e incluso en el promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación (ver cuadros 7 y 8).

Los resultados obtenidos con las curvas polinómicas variaron de acuerdo al país de referencia.

En el caso de Colombia, la parábola de segundo grado fué el método que en general menos se ajustó a los datos; tiene el X^2 y el error medio más grandes, arrojó altos porcentajes de desviaciones por encima del 5 por ciento y en el 40 % de los casos, éstas fueron las peores estimaciones; sin embargo, si no se tienen en cuenta los tres municipios para los cuales todas las proyecciones son inadecuadas, el error medio obtenido para las restantes áreas menores, es el más bajo de todos los métodos (3.24 %) y por consiguiente, el error medio para estos tres municipios, es el más alto.

Por su parte la lineal, arroja en general unos resultados intermedios que en ningún momento llegaron a ser la peor proyección, a pesar de ser el método que tiene más estimaciones con errores por encima del 5%.

En el caso de Venezuela, la proyección lineal y el polinomio de segundo grado, presentan resultados intermedios en general, según las medidas resumen, pero tienen al igual que en Colombia, el mayor error porcentual al comparar la población del Estado, obtenida a partir de la suma de los distritos y la efectivamente censada en 1981 (ver cuadro 7).

En cuanto a la posibilidad de que algunos métodos tengan un sesgo sistemático hacia arriba o hacia abajo, de los resultados anteriores no se puede concluir en forma muy determinante nada, ya que el porcentaje de desviaciones positivas es muy similar en todos los métodos.

De lo observado anteriormente se puede concluir, que no siempre una metodología de proyección arroja los mejores resultados, sino que por el contrario, en algunos casos una metodología puede ser la más adecuada, mientras que en otros, la menos adecuada, y esto dependerá por un lado, de la calidad de los datos básicos y por otro, de la mayor o menor estabilidad que una población haya tenido y pueda tener en el futuro.

Por otra parte, se observó que aunque en general todos los métodos son bastante sensibles al no cumplimiento de sus supuestos y a los cambios en la tendencia del crecimiento, la Gompertz y la exponencial modificada, lo son especialmente, por lo cual su uso se hace inadecuado en las proyecciones de áreas menores, ya que éstas con alguna frecuencia, tienen un comportamiento no muy estable. En cuanto a la parábola de segundo grado, tampoco parece muy adecuado su uso, pues como se puede apreciar, en algunas oportunidades puede ser buena, como ocurrió en Venezuela, pero en otras no, como en Colombia.

2. Análisis de los resultados controlando las proyecciones de las áreas menores, con el total del área mayor, obtenido en forma independiente

Como se había mencionado anteriormente, cuando se realizan proyecciones para todas las subáreas de un país o una región, se requiere que la suma de las subáreas sea igual a la población del área mayor, para que los resultados sean

coherentes. Por otra parte, como se obseró en el punto anterior, proyectar las áreas menores en forma totalmente independiente no llevó a muy buenos resultados, por lo tanto, a continuación se ajustarán dichas proyecciones al total del área mayor (que se supone se ha proyectado en forma independiente y en consecuencia está disponible), con el fin de hacer coherentes estas proyecciones a nivel general, para verificar en que medida las proyecciones se mejoraron.

En el presente caso, como proyección independiente se considerará, a la población enumerada en las áreas mayores en los censos de la década del 80.

Dado que el ajuste consiste en prorratear los resultados de la proyección al total de la población del área mayor, la proporción de población en cada subárea permanecerá constante; sin embargo, al hacer este ajuste, el resultado de la proyección ya no dependerá solo de la tendencia en el crecimiento de la población de la subárea en el pasado y en el futuro, sino también de la tendencia en las demás subáreas, medido por el error obtenido al comparar la suma de las proyecciones de las subáreas y la censada en el área mayor; a tal punto, que en la medida que este error es más grande, el ajuste cambiará más las proyecciones y estos resultados dependerán menos del comportamiento de la población de cada subárea individualmente.

En los cuadros 9 y 10 aparecen los errores porcentuales de la proyección ajustada al total "verdadero", donde se aprecia como se esperaba, que las proyecciones cuyo error era negativo, en general mejoraran, pues el error obtenido al sumar las subáreas era negativo, indicando una subestimación en la proyección, por lo cual al ajustar por este valor, los errores que individualmente indicaban una subestimación similar o mayor, mejoraron, pero las que habían sido sobrestimadas, al ajustarlas se exageraban aún más; adicionalmente, algunos municipios que al ser proyectados independientemente tuvieron el menor error por un método, al ajustar dichas proyecciones, pasaron a ser las peores estimaciones o viceversa. Tal es el caso de Peñol en Colombia con la parábola de segundo grado y Tovar con la lineal en Venezuela. Con los resultados anteriores resulta difícil saber si con el procedimiento de ajuste, se obtienen mejores resultados a nivel global, que proyectando en forma independiente. Por lo tanto, para poder hacer una mejor evaluación se calcularon las medidas resumen del cuadro 11.

En este cuadro se observa, que aunque la diferencia entre los resultados obtenidos con la lineal, la exponencial y la logistica de Murphy, no son muy

Cuadro 9

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION DE LAS AREAS MENORES, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, CONTROLANDO POR EL TOTAL DEL AREA MAYOR, POR METODO, SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
CARMEN DE VIVORAL	-19.05	-21.02	-22.71	-29.30	-22.28	-23.37
CONCEPCION	15.33	11.91	10.84	5.00	2.75	1.10
GUARNE	-9.64	-11.02	-10.86	-10.11	-12.68	-14.36
LA CEJA	-0.02	1.08	1.71	0.32	-5.30	-8.09
LA UNION	-5.79	-8.48	-9.89	-31.30	-13.51	-14.81
MARINILLA	-0.37	1.36	2.04	10.42	19.49	27.72
PEÑOL	6.50	3.33	2.28	0.16	-3.07	-4.61
RIONEGRO	2.95	6.41	7.21	11.09	9.10	9.48
SAN VICENTE	15.99	14.32	14.55	16.07	7.05	4.94
SANTUARIO	9.07	6.53	6.36	8.74	1.86	0.17

Fuente: Cuadros 2 y A3

Cuadro 10

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES DE POBLACION DE LAS AREAS MENORES, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, CONTROLANDO POR EL TOTAL DEL AREA MAYOR, POR METODO, SEGUN DISTRITO

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF.	GOMPERTZ
ANDRES BELLO	15.82	17.44	17.90	-4.45	-1.93	-9.49
ARZ. CHACON	26.21	20.99	19.06	21.82	16.72	12.94
CAMPO ELIAS	7.68	4.04	3.84	12.60	18.67	19.56
JUSTO BRICENO	23.81	18.78	18.08	3.72	8.39	4.27
LIBERTADOR	-10.83	-7.15	-6.78	-5.92	-5.82	-7.64
MIRANDA	0.18	-3.09	-3.24	-10.84	-11.81	-15.56
RANGEL	9.54	6.96	7.06	20.55	82.83	151.46
RIVAS DAVILA	9.37	4.71	3.32	12.99	-16.22	-18.25
SUCRE	-3.00	-7.10	-8.41	5.41	-15.93	-18.70
TOVAR	-1.21	-1.57	-1.25	-2.01	-5.96	-9.82

Fuente: Cuadros 4 y A4

Cuadro 11

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, ERROR MEDIO, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POR ENCIMA DEL 5 Y 10 POR CIENTO, PORCENTAJES DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES PROYECCIONES DE POBLACION, DESPUES DE SER AJUSTADAS AL TOTAL DEL AREA MAYOR, POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	PROCEDIMIENTO					
	LINEAL	MURPHY	EXPONENC.	GRADO-2	EXP.MODIF	GOMPERTZ
<u>COLOMBIA</u>						
X ²	2257.02	2505.79	2806.81	5770.45	3922.42	5540.09
Error medio	8.47	8.54	8.85	12.25	9.71	10.86
>5% a/	70.00	70.00	70.00	70.00	70.00	60.00
>10% a/	30.00	40.00	40.00	60.00	40.00	40.00
desv.posit. a/	50.00	70.00	70.00	70.00	50.00	50.00
mej. proy. a/b/	60.00	0.00	0.00	10.00	0.00	30.00
peor proy. a/b/	30.00	0.00	0.00	40.00	0.00	30.00
<u>VENEZUELA</u>						
X ²	5516.90	3567.45	3385.90	3430.88	16699.33	47684.55
Error medio	10.76	9.18	8.89	10.03	18.43	26.77
>5% a/	70.00	60.00	60.00	70.00	90.00	90.00
>10% a/	40.00	30.00	30.00	50.00	60.00	60.00
desv.posit. a/	70.00	60.00	60.00	60.00	40.00	40.00
mej. proy. a/b/	30.00	10.00	20.00	10.00	20.00	10.00
peor proy. a/b/	30.00	0.00	10.00	0.00	0.00	60.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 9, 10, A3 y A4

Notas : a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 subáreas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo 60.00 %, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrió el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

grandes, en Venezuela el método exponencial continúa siendo el mejor, pero en Colombia pasa a ser la curva lineal la que arroja los mejores resultados, de acuerdo a todas las medidas resumen, a excepción del porcentaje de proyecciones en que se obtuvo la peor proyección, que es bastante elevado pero en dos de los tres casos en que la lineal arrojó la peor proyección, éstas resultaron aceptables (con un error inferior al 10%)

Por otra parte, al comparar los cuadros 8 y 11, no parece muy claro si se mejoraron o no las proyecciones, pues según la medida que se utilice, en unos métodos los resultados son superiores, pero en otros inferiores.

Es así como, según el X^2 , las proyecciones mejoraron bastante, pues se eliminó el error que implicaba que la suma de las proyecciones de áreas menores no reprodujese el total censado; solamente en el caso de la Gompertz en Colombia y la exponencial modificada en los dos países no sucedió esto, sino que por el contrario el X^2 aumentó, pero en forma muy poco significativa.

Al considerar el error medio, pareciera que las proyecciones empeoraron al prorratear los resultados, pues tanto en Venezuela como en Colombia este error aumentó en el caso de la logística de Murphy, la exponencial modificada y la parábola de segundo grado; sin embargo, para la lineal el error medio aumentó en Venezuela, pero en Colombia disminuyó. Finalmente, en el caso de la exponencial modificada y la Gompertz, en general disminuyó, pero estas variaciones no fueron muy significativas.

De los resultados anteriores se puede concluir que, al ajustar las proyecciones independientes al total del área mayor, obtenido en forma independiente, solo se puede decir que las proyecciones mejoraron, por el hecho que al sumarlas se reproduce el total, de tal manera que el valor del X^2 disminuyó, pero de resto se puede decir que empeoraron, pues en general el error medio aumentó y la tendencia en las otras medidas no es muy claro; por otra parte, las "buenas" proyecciones no están muy claramente asociadas a un determinado comportamiento de la tasa de crecimiento.

En cuanto a los resultados de la exponencial modificada y la Gompertz, éstos no variaron mayormente y así las medidas globales continúan expresando igualmente, la inconveniencia de su aplicación.

Finalmente, de acuerdo a los resultados obtenidos de las técnicas que utilizan dos o tres datos de base para la proyección, se puede decir que en general parecen mejores las estimaciones obtenidas a partir de la información de sólo dos puntos, esto es, los métodos que consideran solamente la tendencia del crecimiento en el período más reciente.

IV. PROYECCION DE LA POBLACION DE AREAS MENORES, A PARTIR DE LA EXTRAPOLACION DE PROPORCIONES

En el capítulo anterior se evaluaron los resultados de las proyecciones de población de áreas menores, extrapolando directamente la población. Sin embargo, existe la idea generalizada que, al proyectar subáreas, es mejor hacerlo en forma indirecta, extrapolando la proporción que representa la población del área menor con respecto a la del área mayor..

En tal sentido, en este capítulo se examinarán los resultados de las estimaciones de población de áreas menores, a partir de la proyección de proporciones.

El análisis se desarrollará en tres bloques. En el primero se evaluará la proyección de las proporciones de población del área menor, con respecto al área mayor, en forma individual, esto es, sin preocuparse que la suma de las proporciones dé uno, con el fin de examinar la posibilidad de utilizarla cuando sólo se requiere la proyección de una localidad específica y no la de todas las localidades del área mayor.

Posteriormente, se analizarán estas proyecciones pero ajustando las proporciones de tal manera que sumen uno, para que la suma de la población de las áreas menores reproduzca la del área mayor siendo así consistentes y, en la tercera parte, se evaluarán algunos métodos que utilizan criterios específicos para proyectar las proporciones, tanto de población como de crecimiento.

A. Información básica

La información básica para la aplicación de estas metodologías, es la proporción de población del área menor con respecto al área mayor a excepción del método de participación en el crecimiento de Pickard y del diferencial de

crecimiento de Naciones Unidas, que aunque utilizan proporciones, requieren directamente la población.

El mínimo número de puntos requeridos para la aplicación de éstos, varía según el tipo de método utilizado, tal como se presenta en el cuadro 12, pero adicionalmente se requiere contar con la población de área mayor, ya proyectada a la fecha respectiva.

Cuadro 12
INFORMACION MINIMA NECESARIA PARA LA PROYECCION DE PROPORCIONES

Método	Número de valores		
	2	3	4
Línea recta	x		
Parábola de segundo grado		x	
Polinomio de tercer grado			x
Logística	x		
Geométrica- exponencial	x		
Gompertz <u>1/</u>		x	
Exponencial modificada <u>1/</u>		x	
Proporción (Buro de Censos) <u>2/</u>			x
Tendencia modificada (Pickard) <u>1/</u>		x	
Participación en el crecimiento (Pickard) <u>1/</u>	x		
Diferencial de crecimiento indiv. (N.U.)	x		

Notas: 1/ Para la estimación de los parámetros de estas curvas, se requiere que los datos básicos se encuentren a períodos igualmente espaciados.

2/ Aunque en el planteamiento original, requiere de cuatro puntos, es posible utilizarla con solo tres puntos.

En los cuadros 13 y 15 aparece la distribución relativa de la población de las subáreas, obtenida de los censos de población, y en los cuadros 14 y 16 aparece esta misma información, pero a partir de la población desplazada a períodos igualmente espaciados, para que los métodos que requerían esta condición pudieran ser aplicados, al igual que en el capítulo anterior.

La información necesaria para la aplicación de los otros métodos es directamente la población, la cual se encuentra en los cuadros 2, 3, 4 y 5.

Cuadro 13

COLOMBIA, ANTIOQUIA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS MUNICIPIOS
EN EL VALLE DEL RIO NEGRO. INFORMACION A FECHAS CENSALES

MUNICIPIO	AÑO DEL CENSO			
	1951	1964	1973	1985
CARMEN DE VIVORAL	15.02	13.40	11.45	11.93
CONCEPCION	3.58	3.46	3.15	2.49
GUARNE	8.54	8.62	8.62	9.53
LA CEJA	8.74	10.32	11.08	11.78
LA UNION	5.40	6.67	5.87	5.45
MARINILLA	11.81	10.92	11.89	12.82
PEÑOL	8.03	7.32	6.64	5.65
RIONEGRO	18.05	19.16	21.52	23.01
SAN VICENTE	9.25	9.29	9.31	8.04
SANTUARIO	11.58	10.84	10.47	9.29

Fuente: Cuadro 2.

Cuadro 14

COLOMBIA, ANTIOQUIA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS MUNICIPIOS EN EL
VALLE DEL RIO NEGRO, CON LA INFORMACION DE LOS CENSOS
INTERPOLADOS A IGUALES PERIODOS DE TIEMPO

MUNICIPIO	AÑO			
	1952.8	1963.8	1974.8	1985.8
CARMEN DE VIVORAL	14.84	13.56	11.49	11.93
CONCEPCION	3.57	3.49	3.09	2.49
GUARNE	8.55	8.62	8.69	9.53
LA CEJA	8.91	10.26	11.14	11.78
LA UNION	5.53	6.74	5.84	5.45
MARINILLA	11.72	10.84	11.97	12.82
PEÑOL	7.95	7.37	6.55	5.65
RIONEGRO	18.17	18.97	21.65	23.01
SAN VICENTE	9.26	9.28	9.20	8.04
SANTUARIO	11.50	10.86	10.37	9.29

Fuente: Cuadro 3

Cuadro 15

VENEZUELA, MERIDA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS DISTRITOS EN EL ESTADO DE MERIDA. INFORMACION A FECHAS CENSALES

DISTRITO	AÑO DEL CENSO			
	1950	1961	1971	1981
ANDRES BELLO	3.06	6.97	7.60	6.89
ARZ. CHACON	7.32	5.93	4.79	3.24
CAMPO ELIAS	11.73	9.83	9.11	8.06
JUSTO BRICENO	6.19	6.92	6.09	4.52
LIBERTADOR	23.45	25.73	29.85	36.27
MIRANDA	5.36	6.02	5.62	5.36
RANGEL	5.64	4.53	4.41	3.95
RIVAS DAVILA	7.39	5.63	4.64	3.69
SUCRE	10.67	7.63	6.24	5.57
TOVAR	19.19	20.82	21.66	22.44

Fuente: Cuadro 4

Cuadro 16

VENEZUELA, MERIDA. DISTRIBUCION RELATIVA DE LOS DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA, CON LA INFORMACION DE LOS CENSOS INTERPOLADOS A IGUALES PERIODOS DE TIEMPO

DISTRITO	AÑO			
	1951.8	1961.8	1971.8	1981.8
ANDRES BELLO	3.30	7.01	7.60	6.89
ARZ. CHACON	7.20	5.86	4.79	3.24
CAMPO ELIAS	11.58	9.79	9.11	8.06
JUSTO BRICENO	6.27	6.87	6.10	4.52
LIBERTADOR	23.69	25.97	29.83	36.27
MIRANDA	5.42	6.00	5.62	5.36
RANGEL	5.55	4.52	4.41	3.95
RIVAS DAVILA	7.23	5.57	4.64	3.69
SUCRE	10.39	7.54	6.24	5.57
TOVAR	19.37	20.88	21.66	22.44

Fuente: Cuadro 5

B. R e s u l t a d o s

Los métodos de extrapolación de la población a partir de proporciones fueron divididos en la introducción en tres grupos. En el primero se agrupaban las técnicas que proyectaban la proporción que representaba la población del área menor con respecto a la del área mayor, las cuales a su vez se dividieron en las funciones matemáticas y dos metodologías que, a pesar de ser matemáticas, emplearon ciertos criterios específicos para la proyección de las proporciones. En el segundo grupo se presenta un método que proyecta la participación de la subárea en el crecimiento de la población del área mayor, y en el tercer grupo se presenta el método del diferencial del crecimiento, en el cual se proyecta la población asumiendo que existe un diferencial entre la tasa de crecimiento del área mayor y el área menor.

Sin embargo, la evaluación de las proyecciones a partir de proporciones no seguirá el orden anterior sino que, como ya se había mencionados, se elaborará en tres etapas: 1) Proyección de las proporciones de población del área menor a la mayor por los métodos matemáticos, en forma individual; 2) Ajustando las proporciones proyectadas en la etapa anterior, de tal manera que se reproduzca la población del área mayor y 3) Proyectando las proporciones de acuerdo a ciertos criterios específicos.

Los métodos matemáticos empleados para proyectar las proporciones son los mismos empleados en el capítulo anterior, a excepción de la logística, ya que la simplificación de Murphy no puede ser aplicada a las proporciones ya que al hacerlo, se puede hacer sobrepasar el valor de una proporción del cien por ciento, esto es, del valor del área mayor, o al menos se pueden exagerar algunas proporciones y subestimar otras, en forma importante, por lo cual se utilizó una logística general, pues al estar trabajando con proporciones, se pueden sumir como 0 y 1, las asíntotas mínima y máxima, y de esta manera, solo se requerirán 2 puntos para su aplicación.

Sin embargo, dado que estas asíntotas son muy exagerada, ya que asumen que la población de una localidad puede llegar a ser igual al total del área mayor, para lo cual se requeriría que las demás localidades desaparecieran o que una localidad puede desaparecer -lo que no es muy realista-, se probó una segunda

logística, donde las asíntotas eran 0.2 y 0.5. A pesar de que estos límites son totalmente arbitrarios, en el fondo están asumiendo que el valor de una localidad podría llegar a representar la mitad del área mayor, lo cual aún puede ser elevado, pero no tan absurdo como el anterior y que podría llegar a representar sólo el .2 por ciento de la población del área mayor.

1. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de la proyección de las proporciones en forma individual para cada área menor

En los cuadros 17 y 18 se pueden ver los errores porcentuales de cada una de las proyecciones, y en el cuadro 19 algunas estadísticas y medidas resumen de la bondad de las proyecciones.

En los cuadros 17 y 18 se puede observar que al igual que en el caso de la población, las proyecciones de proporciones, arrojan buenos resultados para unas subáreas, mientras que para otras los errores son muy altos.

Se debe recordar que aquí, la bondad de la estimación depende del comportamiento presentado por la proporción de población, y por tanto es ésta, la que debe cumplir con los supuestos implícitos de cada Método, para que con ellos se obtenga un buen resultado.

Por lo tanto se debe tener presente que el hecho que la población cumpla o no con determinados supuestos, no implica que con las proporciones ocurra lo mismo; es así como al comparar los cuadros 6 y 7 con 17 y 18 ^{8/}, se puede apreciar por ejemplo que en el caso de Carmen de Vivoral, las proyecciones tanto de la población como de las proporciones, arrojan errores muy altos en todos los métodos, pero en el caso de Concepción, mientras que al proyectar la población se obtienen por todos los métodos errores por debajo del 10 %, al proyectar las proporciones, los errores obtenidos superan el 10 %, a excepción del obtenido con la parábola de segundo grado. Igualmente se presentan casos como el de Tovar, donde al proyectar la población, se lograron proyecciones aceptables o malas, pero al hacerlo con proporciones, fueron buenas.

^{8/} Aunque esta comparación no es muy lícita porque una proyección es independiente y la otra dependiente, se hace en el sentido, de que ambas representan una proyección individual.

Cuadro 17

COLOMBIA. ANTIOQUIA, VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS ESTIMACIONES DE LA POBLACION A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENORMAYOR, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, POR METODO, SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG.1 _a /	LOG.2 _a /	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMP.
VALLE DEL RIO NEGRO	0.00	1.12	0.82	1.35	0.00	2.36	5.01
CARMEN DE VIVORAL	-25.13	-22.04	-22.49	-21.67	-33.40	-31.84	-29.02
CONCEPCION	10.72	12.29	12.34	12.34	-0.33	-50.85	-32.51
GUARNE	-9.66	-9.66	-9.66	-9.66	-10.50	-8.02	-8.02
LA CEJA	2.38	2.99	2.88	3.09	-1.27	-0.55	-0.77
LA UNION	-11.24	-8.81	-8.89	-8.67	-49.11	19.38	18.82
MARINILLA	2.43	3.27	3.10	3.42	17.57	-17.93	-17.66
PENOL	2.03	3.56	3.49	3.66	-1.82	-4.37	-3.31
RIONEGRO	6.77	8.08	7.17	8.66	15.14	32.91	40.84
SAN VICENTE	16.09	16.09	16.09	16.09	16.06	18.16	18.22
SANTUARIO	7.60	7.77	7.75	7.80	9.61	7.58	7.54

Fuente: Cuadros 2 y A5

Nota: a/ La primera logistica se definió con asintotas 0 y 1 mientras que la segunda logistica se definió con asintotas 0.2 y 0.5.

Cuadro 18

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LA ESTIMACION DE LA POBLACION A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, POR METODO, SEGUN DISTRITO

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG.1 _a /	LOG.2 _a /	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
MERIDA	0.00	1.11	0.52	1.43	0.00	6.05	6.31
ANDRES BELLO	18.84	19.52	19.47	19.59	-27.11	11.70	11.29
ARZOBISPO CHACON	14.57	20.50	20.44	20.76	22.99	21.62	21.48
CAMPO ELIAS	4.74	5.27	5.22	5.33	19.21	9.95	9.72
JUSTO BRICENO	17.80	19.65	19.58	19.77	-14.28	56.79	57.50
LIBERTADOR	-7.08	-6.19	-7.70	-5.44	-2.64	0.26	1.36
MIRANDA	-2.31	-1.88	-1.89	-1.85	-21.11	9.47	9.34
RANGEL	8.51	8.58	8.58	8.59	32.55	11.13	11.09
RIVAS DAVILA	0.48	4.62	4.59	4.80	21.17	11.65	10.67
SUCRE	-11.22	-7.33	-7.48	-7.10	18.26	1.47	0.28
TOVAR	0.03	0.12	0.06	0.16	-3.46	-1.69	-1.74

Fuente: Cuadros 4 y A6

Nota: a/ La primera logistica se definió con asintotas 0 y 1 mientras que la segunda logistica se definió con asintotas 0.2 y 0.5.

Cuadro 19

ESTADISTICO CHICUADRADO, ERROR MEDIO, PORCENTAJE DE DESVIACION POR ENCIMA DEL 5 Y 10%, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES ESTIMACIONES DE POBLACION, A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DEL AREA MENOR EN LA MAYOR, POR METODO, SEGUN PAIS.

PAIS	PROCEDIMIENTO						
	LINEAL	LOG.1 _{c/}	LOG.2 _{c/}	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
COLOMBIA							
x ²	3231.71	2916.28	2892.67	2927.52	9697.90	13074.57	14865.78
Err.med.	9.40	9.46	9.39	9.51	15.48	19.16	17.67
>5% a/	70.00	70.00	70.00	70.00	70.00	80.00	80.00
>10% a/	40.00	30.00	30.00	30.00	60.00	60.00	60.00
d(+) a/	70.00	70.00	70.00	70.00	40.00	40.00	40.00
mej. a/ b/	20.00	0.00	0.00	20.00	30.00	15.00	15.00
peor a/ b/	0.00	0.00	0.00	10.00	40.00	30.00	20.00
VENEZUELA							
x ²	3483.59	3693.25	4029.12	3577.31	9777.12	8903.40	8998.23
Err.med.	8.56	9.37	9.50	9.34	18.28	13.57	13.45
>5% a/	60.00	70.00	70.00	70.00	80.00	70.00	70.00
>10% a/	40.00	30.00	30.00	30.00	80.00	50.00	50.00
d(+) a/	70.00	70.00	70.00	70.00	50.00	90.00	90.00
mej. a/ b/	50.00	0.00	0.00	10.00	10.00	10.00	20.00
peor a/ b/	0.00	0.00	10.00	0.00	80.00	0.00	10.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 17, 18, A5 y A6

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 sub-áreas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo, 60.00, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrió el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

c/ La primera logística se definió con asíntotas cero y uno, mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.2 : y 0.5

De lo observado en esta comparación, no parece muy claro si se mejoraron o no las proyecciones, por lo tanto se recurrió a las medidas resumen, para que se pudiera determinar algo con mayor claridad.

De acuerdo al cuadro 19, las proyecciones lineal, exponencial y logísticas (independientemente de las asíntotas) varían ligeramente una de otra y en forma muy significativa de los demás métodos, tanto en el caso de Venezuela como en el de Colombia.

En el caso de Colombia, la logística-2 se ajusta mejor según el X^2 , y el promedio de valores absolutos y la lineal de acuerdo al porcentaje de frecuencias en que este método obtiene las mejores proyecciones. En cuanto al porcentaje de proyecciones mayores del 5% todos estos métodos tienen un 70% pero sólo un 30% por encima del 10% (a excepción de la lineal, que tiene un 40%), los cuales corresponden a dos de los tres municipios que en el capítulo anterior daban malos resultados y los cuales mostraron una tasa de crecimiento de las proporciones que cambiaba de sentido o variaba muy fuertemente, pues en el período base se tenía una tasa de crecimiento positiva o negativa (San Vicente y Carmen de Vival, respectivamente) y en el período siguiente cambiaron de signo, o la tasa negativa que tenían (Concepción y Marinilla) variaron negativamente en forma muy fuerte.

Para el caso de Venezuela, aunque la lineal, la exponencial y las logísticas se ajustan mucho mejor que los demás métodos, en todas las estadísticas la función lineal presenta los mejores resultados, a excepción del porcentaje de desviaciones por encima del 10 por ciento, que es ligeramente superior a los otros métodos.

Por su parte, la Gompertz, la Exponencial modificada y la parábola de segundo grado, presentan resultados bastante malos en ambos países, con unas proyecciones para algunas subáreas, donde el error es mínimo, pero en general son altas, especialmente en el caso de Colombia.

En cuanto a los resultados obtenidos con las dos logísticas, se puede apreciar que los errores son muy similares unos y otros, indicándonos que tal vez no tienen mucha importancia al menos a corto plazo, la determinación de una u otra asíntotas, al proyectar proporciones, o quizás, que éstas no fueron muy

apropiadas. Solo en el caso del distrito Libertador, se encontró una diferencia de más de un 1.5 % en la proyección, según si se utilizaba unas asíntotas u otras, lo cual se puede deber al alto porcentaje que representa esta subárea.

De los resultados obtenidos aquí, es posible concluir que si se desea proyectar la población de una localidad en forma individual, las técnicas más aconsejables son la lineal, la exponencial y la logística. Por otra parte, si se escoge el método lineal, se tiene la ventaja de que esta proyección va a ser consistente con el total del área mayor en el caso que posteriormente se realicen para las demás localidades que pertenezcan a dicha área; pero si se escogiese uno de los otros dos métodos, el porcentaje de error no sería muy grande.

2. Análisis de las estimaciones obtenidas a partir de la proyección de las proporciones de población de las áreas menores con respecto al área mayor, ajustadas para que reproduzcan el valor de ésta última

Como se observó anteriormente, el método lineal además de arrojar unos resultados bastante buenos, tiene la ventaja de que la suma de las proyecciones de las áreas menores reproduce el total, mientras que el polinomio de segundo grado, a pesar de cumplir también con esta característica, no arrojó muy buenos resultados sino por el contrario, los errores individuales resultaron exageradamente grandes, sugiriendo la inconveniencia de su uso. Dada la característica común de estos dos métodos, en esta parte del análisis, no sufrirán ninguna variación y el primero seguirá siendo un procedimiento adecuado mientras que el segundo continuará siendo malo, pero los demás métodos sí puede mejorar al ajustarlos al total de la población, o lo que es lo mismo, al ajustar las proporciones para que éstas sumen uno.

En los cuadros 20 y 21 se encuentran los errores porcentuales de las proyecciones de cada área menor, las cuales variaron más en la medida que el error total que aparecía en los cuadros 17 y 18 era mayor.

Al examinar los resultados obtenidos en los cuadros anteriores se observa, que aunque en algunos casos los errores aumentaron, en general sucedió lo contrario, y se lograron mejores estimaciones, lo cual se confirma al comparar el cuadro 22 con el 19 del punto anterior, donde se aprecia que los resultados no variaron mucho y en general mejoraron.

Cuadro 20

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS ESTIMACIONES DE LA POBLACION, A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, AJUSTADAS A LA UNIDAD, POR METODO SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG.1 _a /	LOG.2 _a /	EXPON.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
CARMEN DE VIVORAL	-25.13	-22.90	-23.12	-22.71	-33.40	-33.41	-32.41
CONCEPCION	10.72	11.04	11.43	10.84	-0.33	-51.98	-35.73
GUARNE	-9.66	-10.66	-10.39	-10.86	-10.50	-10.14	-12.41
LA CEJA	2.38	1.84	2.05	1.71	-1.27	-2.84	-5.51
LA UNION	-11.24	-9.82	-9.63	-9.89	-49.11	16.63	13.15
MARINILLA	2.43	2.12	2.27	2.04	17.57	-19.82	-21.60
PENOL	2.03	2.41	2.65	2.28	-1.82	-6.57	-7.93
RIONEGRO	6.77	6.87	6.30	7.21	15.14	29.85	34.12
SAN VICENTE	16.09	14.80	15.15	14.55	16.06	15.44	12.57
SANTUARIO	7.60	6.58	6.87	6.36	9.61	5.10	2.41

Fuente: Cuadros 2 y A7

Nota: _a/ La primera logística se definió con asíntotas 0 y 1 mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.2 y 0.5.

Cuadro 21

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LAS ESTIMACIONES DE LA POBLACION, A PARTIR DE LA PROYECCION DE LA PROPORCION DE POBLACION DEL AREA MENOR A LA MAYOR, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, AJUSTADAS A LA UNIDAD, POR METODO SEGUN DISTRITO

DISTRITO	ERROR PORCENTUAL POR METODO						
	LINEAL	LOG.1 _a /	LOG.2 _a /	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MOD.	GOMPERTZ
ANDRES BELLO	18.84	18.22	18.85	17.90	-27.11	5.32	4.69
ARZOBISPO CHACON	14.57	19.19	19.82	19.06	22.99	14.69	14.28
CAMPO ELIAS	4.74	4.12	4.67	3.84	19.21	3.67	3.21
JUSTO BRICENO	17.80	18.35	18.96	18.08	-14.28	47.84	48.15
LIBERTADOR	-7.08	-7.22	-8.18	-6.78	-2.64	-5.46	-4.65
MIRANDA	-2.31	-2.95	-2.40	-3.24	-21.11	3.23	2.85
RANGEL	8.51	7.40	8.02	7.06	32.55	4.79	4.50
RIVAS DAVILA	0.48	3.48	4.05	3.32	21.17	5.28	4.10
SUCRE	-11.22	-8.35	-7.96	-8.41	18.26	-4.32	-5.67
TOVAR	0.03	-0.97	-0.46	-1.25	-3.46	-7.30	-7.57

Fuente: Cuadros 4 y A8

Nota: _a/ La primera logística se definió con asíntotas 0 y 1 mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.2 y 0.5.

Cuadro 22

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, ERROR MEDIO, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POR ENCIMA DEL 5 Y 10%, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES ESTIMACIONES DE POBLACION A PARTIR DE LA PROYECCION DE LAS PROPORCIONES DE LAS AREAS MENORES A LA MAYOR, AJUSTADAS A LA UNIDAD, POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	PROCEDIMIENTO						
	LINEAL	LOG.1 $\underline{c/}$	LOG.2 $\underline{c/}$	EXPONEN.	GRADO-2	EXP.MODIF.	GOMPERTZ
<u>COLOMBIA</u>							
X ²	3231.71	2821.57	2829.73	2806.81	9697.89	12349.87	12923.89
Err.med.	9.40	8.91	8.99	8.85	15.48	19.18	17.78
>5% a/	70.00	70.00	70.00	70.00	70.00	90.00	90.00
>10% a/	40.00	40.00	40.00	40.00	60.00	70.00	70.00
d (+) a/	70.00	70.00	70.00	70.00	40.00	40.00	40.00
mej. a/ b/	20.00	0.00	10.00	20.00	30.00	0.00	20.00
peor a/ b/	10.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	50.00
<u>VENEZUELA</u>							
X ²	3483.59	3558.10	3975.38	3385.90	9777.12	6421.61	6345.59
Err.med.	8.56	9.02	9.34	8.89	18.28	10.19	9.97
>5% a/	60.00	60.00	60.00	60.00	80.00	60.00	40.00
>10% a/	40.00	30.00	30.00	30.00	80.00	20.00	20.00
d (+) a/	70.00	60.00	60.00	60.00	50.00	70.00	70.00
mej. a/ b/	30.00	0.00	0.00	0.00	20.00	10.00	40.00
peor a/ b/	0.00	0.00	0.00	0.00	70.00	0.00	20.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 20, 21, A7 y A8

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 subáreas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo, 60.00, significa que en 6 de los 10 casos, ocurrió el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

c/ La primera logística se definió con asíntotas cero y uno, mientras que la segunda logística se definió con asíntotas 0.2 y 0.5

Por otra parte, las mejores técnicas continúan siendo la lineal, la exponencial y la logística, aunque de acuerdo al X^2 , la exponencial sería la mejor en los dos países, pero de acuerdo al error medio, en el caso de Colombia nuevamente la exponencial es la mejor técnica, pero en Venezuela es la lineal.

Resulta especialmente interesante observar que en el caso de Venezuela, las mejoras son apreciables, al ajustar las proporciones obtenidas con la exponencial modificada y la Gompertz. Entre éstas sobresalen por un lado el hecho que, sólo el 20% de las desviaciones obtenidas a partir de la Gompertz y la Exponencial modificada son mayores del 10%; por otra parte, el elevado valor de X^2 en estas mismas curvas y del error medio, se deben a los exagerados errores obtenidos en la proyección del Distrito Justo Briceño, que fue de 47.84% con la exponencial modificada y 48.15% con la Gompertz.

Al comparar los cuadros 11 y 22, surgió algo muy interesante, ya que la estimación obtenida a partir de las proporciones ajustadas o a partir de la proyección de la población ajustada al total por el método exponencial conduce exactamente a las mismas poblaciones (ver cuadros A-3 y A-7 ó A-4 y A-8), resultado que sorprende, pero que puede ser demostrado matemáticamente.

Otro resultado interesante es que, contrariamente a lo que se suele pensar, cuando se dispone de la población del área mayor proyectada en forma independiente, no siempre es mejor proyectar en forma matemática las proporciones en lugar de la población.

Como se puede observar, para el caso de Colombia en todos los métodos (sin considerar ninguna logística ya que no son comparables en los dos cuadros y la exponencial que ya se mencionó que son iguales), se obtienen mejores resultados según los valores del X^2 , el error medio, y en general, por las otras medidas en las proyecciones obtenidas a partir de extrapolar la población.

En el caso de Venezuela, ocurrió lo contrario y se obtuvieron mejores resultados a partir de la proyección de proporciones, a excepción de la curva exponencial la cual no se modifica y la parábola de segundo grado donde sucedió lo mismo que para Colombia.

Sin embargo, se debe tener presente que al hacer este ajuste, los resultados dependen por un lado del comportamiento presentado por cada una de las proporciones, en forma individual pero también por el comportamiento de las proporciones en las otras subáreas.

3. Análisis de otros métodos matemáticos que utilizan criterios específicos para proyectar las proporciones

En este punto se examinarán los resultados de las proyecciones de áreas menores obtenidas por el método de la proporción del Buró de Censos, la tendencia de las proporciones y la participación en el crecimiento, de Pickard, y el método del diferencial de crecimiento, de Naciones Unidas. En el caso del método de la tendencia de las proporciones, se utilizará la modificada, esto es, la alternativa que él sugiere para las localidades en las cuales la proporción está aumentando y en el caso del diferencial de crecimiento, se utilizará el que calcula cada área menor en forma individual, aunque posteriormente se deba ajustar al total del área mayor, pues el procedimiento en el cual la proyección de cada subárea se va obteniendo en forma sucesiva, arrojará resultados que van a depender del orden en que éstas se vayan haciendo.

Vale la pena recordar que todos estos métodos están diseñados para que la suma de las proyecciones de las áreas menores sea igual a la población del área mayor, por lo cual, estos procedimientos son analizados en una sola etapa.

En los cuadros 23 y 24 se encuentran los errores porcentuales de las proyecciones y en el cuadro 25 las medidas resumen, donde se observa al igual que en los casos anteriores, que según el área menor e incluso, según el país, una metodología funciona mejor que otra.

En el caso de Colombia, el método de la tendencia de las proporciones de Pickard, es el que mejor se ajusta, en general de acuerdo a los indicadores resumen. Es especialmente interesante el bajo porcentaje (comparativamente con todas las estimaciones hechas) de proyecciones con errores por encima del 5 por ciento, lo cual se observa también para el caso de Venezuela, pero aquí, dado los altos porcentajes de error de unas pocas estimaciones, hacen que el valor del X^2 y del error medio se eleven, y sean los más altos dentro de los métodos considerados.

Cuadro 23

COLOMBIA, ANTIOQUIA, MUNICIPIOS DEL VALLE DEL RIO NEGRO. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES POR ALGUNOS METODOS CON CRITERIOS PARTICULARES, AL 15 DE OCTUBRE DE 1985, POR METODO, SEGUN MUNICIPIO

MUNICIPIO	METODO			
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TEND. PROP. DE PICKARD MODIFICADA	PARTICIP. CRECIM. PICKARD	DIF. CRECIM. NAC. UNIDAS INDIVIDUAL
CARMEN DE VIVORAL	-17.01	-16.64	-20.65	-22.90
CONCEPCION	18.84	13.50	8.95	11.04
GUARNE	-9.76	-8.43	-8.07	-10.66
LA CEJA	1.69	2.83	1.88	1.84
LA UNION	-0.47	3.52	-9.03	-9.82
MARINILLA	-2.93	-3.53	1.87	2.12
PEÑOL	6.55	4.21	1.90	2.41
RIONEGRO	1.30	2.28	5.42	6.87
SAN VICENTE	15.85	13.39	13.45	14.80
SANTUARIO	8.07	5.81	6.49	6.58

Fuente: Cuadros 2 y A9

Cuadro 24

VENEZUELA, DISTRITOS DEL ESTADO DE MERIDA. ERROR PORCENTUAL DE LAS PROYECCIONES POR ALGUNOS METODOS CON CRITERIOS PARTICULARES, AL 20 DE OCTUBRE DE 1981, POR METODO, SEGUN DISTRITO

MUNICIPIO	METODO			
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TEND. PROP. DE PICKARD MODIFICADA	PARTICIP. CRECIM. PICKARD	DIF. CRECIM. NAC. UNIDAS INDIVIDUAL
ANDRES BELLO	17.99	31.92	18.39	18.22
ARZOBISPO CHACON	18.38	19.35	16.97	19.19
CAMPO ELIAS	5.22	0.88	5.26	4.12
JUSTO BRICENO	26.94	27.15	19.04	18.35
LIBERTADOR	-9.25	-10.06	-7.79	-7.22
MIRANDA	1.19	2.56	-1.92	-2.95
RANGEL	8.34	1.27	8.70	7.40
RIVAS DAVILA	3.27	0.99	2.19	3.48
SUCRE	-8.60	-12.13	-9.72	-8.35
TOVAR	-0.69	-0.11	-0.25	-0.97

Fuente: Cuadros 4 y A10

Cuadro 25

ESTADISTICO CHI-CUADRADO, ERROR MEDIO, PORCENTAJE DE DESVIACION POR ENCIMA DEL 5 Y 10 POR CIENTO, PORCENTAJE DE DESVIACIONES POSITIVAS Y PORCENTAJE DE FRECUENCIAS EN QUE CADA METODO ARROJA LAS MEJORES Y LAS PEORES ESTIMACIONES DE POBLACION UTILIZANDO ALGUNOS METODOS QUE EMPLEAN CRITERIOS ESPECIFICOS, POR METODO, SEGUN PAIS

PAIS	METODO			
	PROPORC. BURO DE CENSOS	TEND. PROP. DE PICKARD MODIFICADA	PARTICIP. CRECIM. PICKARD	DIF. CREC. NAC. UNIDAS INDIVIDUAL
<u>COLOMBIA</u>				
X ²	2026.11	1643.46	2192.68	2821.56
Error medio	8.25	7.41	7.77	8.91
>5% a/	60.00	50.00	70.00	70.00
>10% a/	30.00	30.00	20.00	40.00
desv. posit. a/	60.00	70.00	70.00	70.00
mej. proy. a/ b/	40.00	10.00	50.00	0.00
peor proy. a/ b/	40.00	20.00	0.00	40.00
<u>VENEZUELA</u>				
X ²	4903.45	7397.75	3763.00	3558.08
Error medio	9.99	10.64	9.02	9.02
>5% a/	70.00	50.00	70.00	60.00
>10% a/	30.00	50.00	30.00	30.00
desv. posit. a/	70.00	70.00	60.00	60.00
mej. proy. a/ b/	20.00	40.00	10.00	30.00
peor proy. a/ b/	0.00	50.00	20.00	30.00

Fuente: Cuadros 2, 4, 22, 23, A9 y A10

Notas: a/ Dado que tanto para Colombia como para Venezuela, se examinaron 10 sub-areas, estos porcentajes resultan en valores enteros. Por ejemplo, 60.00 significa que en 6 de los 10 casos, ocurrio el suceso.

b/ La suma horizontal reproduce el 100%

Por su parte, de acuerdo a estas medidas, para el caso de Venezuela el método que mejor se ajustó fué el del diferencial de crecimiento y especialmente, cuando las proyecciones se obtienen en forma individual, aunque las diferencias con el método de participación en el crecimiento, no son muy grandes.

Finalmente, el método de la proporción del Buró de Censos, arrojó unos resultados intermedios en ambos países.

Al comparar los resultados de la logística con asintotas 0 y 1, una vez que las proporciones han sido ajustadas, con los obtenidos del diferencial de crecimiento, se puede apreciar que éstos son exactamente los mismos, aunque en un primer momento puede no resultar tan obvia esta igualdad, dado que el diferencial de crecimiento supone que éste permanece constante, su evolución es exactamente una logística con asintotas 0 y 1.

V. ANALISIS COMPARATIVO DE LOS PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS

Como se pudo apreciar en los dos capítulos anteriores, tratar de definir cuál es el mejor procedimiento era algo muy complejo, pues esto dependía de la subárea, del país, de si se hacían en forma independiente, individual o corrigiendo las proyecciones de las subáreas para que reprodujeran el total del área mayor, e incluso, del tipo de medida que se utilizará para la evaluación.

Teniendo en cuenta lo anterior, se consideró necesario hacer un análisis global de todos los procedimientos experimentados en este trabajo, para tratar de llegar a algunas conclusiones generales.

Dado que, como ya se había mencionado, el resultado de la evaluación dependía en parte del tipo de medida resumen que se utilizara, para este caso se debía seleccionar la o las medidas que ayudaran más en una decisión. En tal sentido, se escogió el promedio de los valores absolutos de los porcentajes de desviación (error medio), pues esta medida nos da el error promedio que se obtiene con cada metodología, y no está afectada por el tamaño de la población como el estadístico χ^2 .

Por otra parte, podría ser de utilidad conocer en qué porcentaje las proyecciones resultan malas, con errores extremos por encima del 10 por ciento, ya que puede ser preferible un método que arroje la mayor cantidad de resultados buenos, aunque los pocos malos tengan errores muy grandes, por lo cual también se utilizó esta medida.

En el cuadro 26 se presenta un resumen general a partir de los valores obtenidos para estas dos medidas, en todos los métodos y etapas en que fueron desarrollados; en base a éste se desprenden algunos resultados generales y otros más particulares.

Cuadro 26

PROMEDIO DE LOS VALORES ABSOLUTOS DE LOS PORCENTAJES DE DESVIACION (ERROR MEDIO)
(NUMERO DE DESVIACIONES POR ENCIMA DEL 10% DE CADA DIEZ SUBAREAS):
RESUMEN COMPARATIVO DE TODOS LOS PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS.

LA SUMA DE LAS PROYECCIONES DE LAS SUBAREAS								
METODO	NO REPRODUCEN EL TOTAL			II	REPRODUCEN EL TOTAL			
	COLOMBIA	VENEZUELA	TOTAL <u>1/</u>	II	COLOMBIA	VENEZUELA	TOTAL <u>1/</u>	
				II				
		<u>CUADRO 8</u>		II		<u>CUADRO 11</u>		
				II				
LINEAL	9.25(3)	8.50(5)	8.88(4)	II	8.47(3)	10.76(4)	9.62(3.5)	
MURPHY	8.12(3)	8.11(5)	8.12(4)	II	8.54(4)	9.18(3)	8.86(3.5)	
EXPONEN.	8.09(4)	7.95(4)	8.02(4)	II	8.85(4)	8.89(3)	8.87(3.5)	
GRADO-2	11.83(3)	8.92(5)	10.38(4)	II	12.25(6)	10.03(5)	11.14(5.5)	
EXP. MOD.	9.54(4)	18.46(6)	14.00(5)	II	9.71(4)	18.43(6)	14.07(5)	
GOMPertz	10.87(4)	26.88(6)	18.88(5)	II	10.86(4)	26.77(6)	18.82(5)	
				II				
		<u>CUADRO 19</u>		II		<u>CUADRO 22</u>		
				II				
LINEAL	9.40(4)	8.56(4)	8.98(4)	II	9.40(4)	8.56(4)	8.98(4)	
MURPHY	28.23(7)	36.07(8)	32.15(7.5)	II	30.95(8)	34.99(9)	32.97(8.5)	
LOGIST-1 <u>2/</u>	9.46(3)	9.37(3)	9.42(3)	II	8.91(4)	9.02(3)	8.97(3.5)	
LOGIST-2 <u>2/</u>	9.39(3)	9.50(3)	9.45(3)	II	8.99(4)	9.34(3)	9.17(3.5)	
EXPONEN.	9.51(3)	9.34(3)	9.43(3)	II	8.85(4)	8.89(3)	8.87(3.5)	
GRADO-2	15.48(6)	18.28(8)	16.88(7)	II	15.48(6)	18.28(8)	16.88(7)	
EXP. MOD.	19.16(6)	13.57(5)	16.37(5.5)	II	19.18(7)	10.19(2)	14.69(4.5)	
GOMPertz	17.67(6)	13.45(5)	15.56(5.5)	II	17.78(7)	9.97(2)	13.88(4.5)	
				II				
				II		<u>CUADRO 25</u>		
				II				
PROP. BURO				II	8.25(3)	9.99(3)	9.12(3)	
TEND. MOD.				II	7.41(3)	10.64(5)	9.03(4)	
PART. CRE.				II	7.77(2)	9.02(3)	8.40(2.5)	
DIFER. IND.				II	8.91(4)	9.02(3)	8.97(3.5)	
				II				

Fuente: Cuadros 8, 11, 19, 22 y 25

Notas : 1/ El total representa el promedio entre Colombia y Venezuela.

2/ La primera logistica se definió con asíntotas 0 y 1 y la segunda con asíntotas 0.2 y 0.5.

A. Resultados globales

Al proyectar la población en forma independiente, en general se obtienen menores errores que los que se encuentran cuando se hace coincidir la suma de la proyección de población de las subáreas a la del área mayor, aunque los errores extremos disminuyen ligeramente.

A diferencia de lo que algunos autores piensan, si se dispone de la proyección del área mayor y se desea que la suma de las subáreas reproduzca ese valor, no necesariamente es mejor proyectar, por los métodos matemáticos, las proporciones en lugar de la población. Más aún, si se utiliza la ecuación exponencial, se obtienen exactamente los mismos resultados al proyectar en forma conjunta la población o las proporciones.

Si se desea proyectar en forma individual la proporción de una localidad, los resultados no van a diferir mayormente de los obtenidos una vez que se ajustan las proporciones a la unidad; incluso, si se proyecta la población, extrapolando individualmente las proporciones de población, con los polinomios de primer (lineal) o segundo grado, la suma de la población de las subáreas reproduce directamente la población del área mayor, por lo cual si se requiere en un determinado momento la proyección de una subárea, al utilizar proporciones, el resultado puede no diferir o variar muy poco, de los que se obtendrían si se hicieran posteriormente, para todas las subáreas.

Al utilizar los métodos matemáticos tradicionales para proyectar la población directa o indirectamente a partir de las proporciones, se obtienen mejores resultados con las curvas que utilizan sólo dos puntos.

Por su parte, los procedimientos que utilizan algunos criterios específicos para proyectar las proporciones o el diferencial del crecimiento, arrojan en general unos resultados muy similares a los que se obtienen con los métodos lineal, exponencial y logística, independientemente del número de datos que requieren.

B. Análisis considerando los métodos que arrojan los mejores resultados

Si se desea proyectar la población de las subáreas en forma independiente, se podría decir que la curva más adecuada es la exponencial, pues con ésta se lograron los mejores resultados en los dos países, sin embargo esto no puede ser muy definitivo, pues las diferencias obtenidas entre ésta, la lineal y la logística de Murphy son poco significantes.

Si se proyecta la población de las subáreas en forma conjunta, haciendo coincidir la suma de estas con la población proyectada del área mayor, en el caso de Venezuela, la exponencial continua siendo la que arroja los mejores resultados, mientras que en el caso de Colombia, la lineal pasa a ser la que da las mejores proyecciones, aunque las diferencias con los resultados de la logística de Murphy y con la exponencial, no son muy grandes. A nivel total, los mejores resultados se obtienen con la logística de Murphy y la exponencial, cuyos errores son prácticamente los mismos.

Si se estima la población de las subáreas en forma individual a partir de la proyección matemática de las proporciones, nuevamente aparecen muy pocas diferencias entre la lineal, la exponencial y la logística, independientemente de las asíntotas que se consideren; en el caso de Colombia los resultados de todas éstas son muy similares considerando las dos medidas resumen. En el caso de Venezuela, de acuerdo al error medio, es mejor la lineal, pero la exponencial y la logística tienen menos valores extremos. A nivel total, ocurre lo mismo que en Venezuela.

Si se estima la población de las localidades en forma conjunta a partir de la proyección matemática de las proporciones, garantizando que éstas sumen uno, los resultados son muy similares a los anteriores pero tanto la logística como la exponencial se mejoran un poco.

Si se estima la población por medio de los procedimientos que proyectan las proporciones de acuerdo a ciertos criterios, o que proyecta el diferencial de crecimiento, las mejores proyecciones se lograron a nivel total con el método de Pickard de la participación en el crecimiento, aunque las diferencias entre los distintos procedimientos considerados aquí no son muy grandes. En el caso de Colombia, el método de la tendencia arrojó los mejores resultados y en el caso de

Venezuela las mejores proyecciones se lograron con los métodos de la participación en el crecimiento y con el diferencial de crecimiento, los cuales arrojaron el mismo error medio y desviaciones extremas. A nivel total, el mejor método resultó el de la participación en el crecimiento, tanto por el error medio como por el porcentaje de errores por encima del 10 por ciento.

En cuanto a los resultados obtenidos por la parábola de segundo grado, la exponencial modificada y la gompertz, se observó que no resultaba muy adecuada su aplicación en forma general para proyectar la población en forma directa o a partir de la proyección de las proporciones e incluso, después de que los resultados eran ajustados al total "verdadero", ya que, tanto los errores medios como el número de proyecciones con valores extremos, resultaron superiores a los demás métodos.

En forma global, considerando los cinco grupos de proyecciones, para el total de los dos países, se obtuvieron los mejores resultados, según el error medio, al aplicar la curva exponencial a la población, pues éste fue de 8.02 por ciento, aunque en el 40 % de las proyecciones, su error fue superior al 10% y, de acuerdo a este último, los mejores resultados se lograron con el método de la participación en el crecimiento, cuyo porcentaje fué de solo 25% mientras que su error medio fué de 8.4%.

En el caso de Colombia, el menor error medio fué de 7.41 por ciento, obtenido por el método de la tendencia modificado, pero el menor porcentaje de errores por encima del 10% (20%) fué obtenido con el método de la participación en el crecimiento.

Por su parte, en Venezuela las mejores estimaciones se lograron proyectando independientemente la población con la curva exponencial, encontrándose un error medio de 7.95, y aunque el menor porcentaje (20%) de errores por encima del 10%, se lograron con las curvas exponencial modificada y Gompertz, aplicadas a las proporciones ajustadas, este resultado parece totalmente fortuito, si se consideran todos los demás resultados obtenidos con estas curvas.

RESUMEN Y CONSIDERACIONES FINALES

Como se mencionó en un principio, el objetivo general de este trabajo era examinar y evaluar la mayor cantidad de los métodos que se han desarrollado para proyectar el total de la población de las áreas menores, con el fin de determinar cuál de todas estas metodologías era la más apropiada para ser utilizada en los países de América Latina.

Para cumplir con este objetivo, en el primer capítulo se describieron cada uno de los procedimientos que se han utilizado para proyectar la población de las subáreas: métodos de proyección de la población absoluta, métodos que utilizan proporciones, métodos demográficos, métodos económicos y otros métodos, con el fin de apreciar sus diferencias, el comportamiento que suponen y los datos básicos que requieren para su aplicación. Sin embargo, esto no se hizo con el mismo nivel de detalle, sino que por el contrario, los dos primeros tipos de métodos se desarrollaron en forma más detallada que los últimos, pues el objetivo específico de este trabajo se refería a los primeros tipos de métodos, pero se consideró conveniente hacer una sucinta reseña de los otros tres tipos de técnicas, para dar un panorama general de todos los tipos de procedimientos que se han utilizado, y para resaltar por qué razón, especialmente en los países en desarrollo, se recurre en general a los primeros.

En el segundo capítulo se examinaron los métodos matemáticos para proyectar la población de cada subárea en dos etapas; inicialmente, se proyectó en forma independiente la población, con el fin de determinar cuál procedimiento arrojaba los mejores resultados cuando sólo se disponía de la información de las subáreas en dos o tres momentos, encontrándose que todos los métodos conducen a errores bastante grandes, pero en general, se obtienen mejores resultados con aquellos que utilizan solo dos puntos.

Posteriormente, se examinaron los mismos procedimientos para determinar cuál resultaba mejor si se disponía adicionalmente de la población ya proyectada del área mayor, donde se observó que en general todos los métodos empeoran sus

resultados si se considera como medida el error medio, pero si se considera el porcentaje de errores extremos, éstos mejoran, aunque ligeramente. Por otra parte se observó que los métodos que arrojaban los mejores resultados eran los mismos que en la etapa anterior.

En el tercer capítulo se evaluaron los procedimientos que estiman la población de las localidades a partir de proporciones entre la población de la subárea y la población del área mayor, por lo cual para su aplicación era indispensable disponer previamente de la población del área mayor proyectada. La evaluación en este capítulo se dividió en tres etapas: en la primera se examinaron los resultados de proyectar con los métodos matemáticos, en forma individual, las proporciones de cada una de las localidades, con el fin de tener presente los errores que se podrían encontrar al utilizar alguna de estas metodologías en forma aislada para alguna(s) localidad(es); aquí se encontró que en todos los procedimientos los errores también eran muy grandes, y nuevamente las proyecciones eran mejores cuando se utilizaban las técnicas que utilizaban dos puntos.

En la segunda parte, se examinaron los mismos procedimientos anteriores, pero proyectando en forma conjunta todas las localidades, esto es, haciendo que la suma de las proporciones fuese el 100%, para que la suma de las estimaciones de las subáreas reprodujese la población proyectada del área mayor; en esta parte se apreció que en general aunque los resultados se mejoraron, las diferencias no son muy grandes con respecto a la etapa anterior.

Posteriormente, en la tercera parte se evaluaron algunos procedimientos que utilizan ciertos criterios específicos para la proyección de las proporciones, en los cuales se encontró que todos arrojaban resultados muy similares a los obtenidos por los mejores procedimientos en las etapas anteriores.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentaron algunos resultados del análisis comparativo de todos los procedimientos considerados en este trabajo, donde se evidencia nuevamente, como al proyectar la población de áreas menores por métodos que asumen una tendencia al futuro genera una serie de errores, a nivel general.

Sin embargo al considerar particularmente cada subárea, se encontró, como era de esperarse, que en los casos donde las áreas menores continuaban una suave evolución en la tendencia de su crecimiento, se obtenían buenos resultados, por lo general en todos los métodos. Por el contrario, en los casos donde el comportamiento de una subárea cambiaba de tendencia, ninguno de los métodos examinados llevó a una proyección razonable, pues estos procedimientos extrapolan la tendencia observada.

Por otra parte, se observó que se obtienen mejores resultados con los métodos que consideran solo dos puntos, indicando posiblemente que para la proyección de áreas menores es más importante su presente evolución, que la que tuvo en un pasado, confirmando la idea en que se basó Pickard para la definición de su método de tendencia de las proporciones.

Dado lo anterior, al realizar las proyecciones de áreas menores a mediano y corto plazo, se deben considerar estos resultados, y no descartar algunos métodos muy sencillos, pues aunque lo sean, éstos arrojan unos mejores resultados.

Finalmente, se debe tener presente, que la población de las áreas menores está expuesta a fluctuaciones en la tendencia del crecimiento, debido principalmente a tres razones:

- Variación de algún (os) componente (s) del crecimiento: la variable que más influye en el cambio o fluctuaciones que presenta el crecimiento de una localidad, es la migración, la cual depende en gran medida de la situación socio-económica por la que atraviesa una subárea o las localidades vecinas y debido a que en los países en desarrollo no se cuenta con la información de las variaciones en este componente, no es posible proyectarla, como se mencionó al examinar los métodos demográficos y económicos.

Sin embargo, si fuese posible lograr determinar cuales subáreas son de atracción o de expulsión, esto serviría para facilitar la decisión en el sentido de cual curva utilizar en la proyección, pues en principio se puede decir que si la fecundidad ha disminuido a nivel general, posiblemente sea más indicado considerar una curva que implique este comportamiento, pero si alguna localidad es algún foco de atracción, seguramente sería más adecuado utilizar otro tipo de

curva; adicionalmente, si se sabe de algún evento que pueda llevar a cambiar una tendencia, se puede involucrar este conocimiento en la proyección.

- Diferencias en las coberturas censales en ciertas localidades: Las diferencias en las coberturas censales es un gran problema que es difícil solucionar, debido a que el análisis de la cobertura censal se realiza a nivel nacional y/o a nivel regional y/o a nivel urbano-rural y/o desagregado entre las grandes ciudades y el resto, pero no a nivel de cada una de las áreas menores para las que se puede requerir la proyección. Por lo tanto, para corregir los datos censales de las subáreas, se tendría que asumir que la cobertura de cada una de éstas es igual a la del área para la cual se haya hecho el análisis respectivo y aquí entonces, cabría preguntarse si esto es mejor, pues podría suceder que la no cobertura de una región se debiera por ejemplo al hecho de que no fue posible censar una subárea, pero el resto está "correctamente" censada.

- Variación en los límites geográficos. Dado que especialmente las áreas menores pueden sufrir modificaciones en sus límites geográficos, se debe hacer una verificación, desagregación o reagrupación en las localidades que hayan sido afectadas.

Dados los tres aspectos anteriores, resultará muy conveniente, como algunos autores han recomendado, que en la elaboración de las proyecciones de áreas menores se involucren personas que conozcan lo que ha sucedido en éstas, cómo ha sido su desarrollo y que posibilidades tiene de crecimiento futuro.

Si lo anterior no es posible, de antemano se sabe que utilizando dos censos como información básica, se tendrán algunas proyecciones buenas y otras malas, pues las subáreas que hayan tenido y tengan en el futuro una suave evolución, independientemente del método empleado arrojará una buena proyección, mientras que aquellas áreas menores que cambien su tendencia, igualmente arrojarán malos resultados sin importar el método empleado.

Después de todo lo visto anteriormente, se pueden concluir algunos puntos, que pueden ayudar en un momento dado en la decisión sobre qué métodos pueden ser más adecuados para proyectar la población global de las subáreas, por métodos

matemáticos utilizando tanto la población como las proporciones, y cuales no son recomendables, al menos para subáreas de la población.

1. En general, los métodos que utilizan dos puntos, arrojan mejores resultados que los que utilizan tres puntos.

2. Las curvas de Gompertz y exponencial modificada no resultan muy adecuadas, pues éstas son muy sensibles al no cumplimiento de los supuestos para su aplicación y a las variaciones que se suelen presentar en la evolución de estas poblaciones.

3. La parábola de segundo grado, tampoco resulta satisfactoria, pues si bien es cierto es más flexible en cuanto a las exigencias de la evolución que pudo haber tenido la población en el período que sirve para la estimación de los parámetros, en el período de la proyección ya no lo es, y por tanto puede arrojar errores muy altos.

4. Los dos métodos sugeridos por Pickard, el de la tendencia de las proporciones y el de la participación en el crecimiento resultan tal vez como los "mejores" métodos, y uno u otro pueden ser utilizados en la medida en que se disponga de tres o dos puntos respectivamente.

5. La curva logística en todas sus formas: Murphy para valores absolutos de población, diferencial de crecimiento y para proporciones, en general presenta bastante buenos resultados, por lo cual también puede ser utilizada.

6. La curva exponencial, arroja unos resultados bastante buenos, que en muchas oportunidades resultaron ser los mejores.

7. Finalmente, la curva lineal, aunque teóricamente puede no ser muy buena, para un período corto, puede arrojar estimaciones aceptables.

BIBLIOGRAFIA

Arriaga, Eduardo E., Variaciones sobre un tema de la función logística. (Inédito).

Bartholomew, H. (1949), The Master Plan for New Orleans. Population City Planning and Zoning Commission, New Orleans, Louisiana.

Berry, Brian, Population growth in the daily urban systems of the United States, 1980-2000, in U.S. Commission on Population Growth and the American Future. Population Distribution and Policy, Sara Mills Mazie, ed. Vol. V of Commission Research Reports. En Pittenger, op.cit., págs. 112-116.

Bocaz A., (1953), Curva de Gompertz aplicada al crecimiento de la ciudad de Santiago, Estadística Chilena, Vols. 10, 11 (oct.-nov.).

_____, Curva de Gompertz aplicada al crecimiento de de la población Chilena, Estadística Chilena, Vol. 7 (julio).

_____, La curva de población media de Chile, Estadística Chilena, Vol. 9, (sept.).

Bogue, Donald J. (1950), A technique for making extensive population estimates. Journal of the American Statistical Association, Vol. 45, págs. 149-163.

_____ and Duncan, Beverly (1956), A composite method for estimating postcensal populations of small areas by age, sex and color. Paper read at the Third Annual Conference of Business Research, Chicago, April 13-14.

Bowley, A.L. (1925), Discussion on Dr. Stenvenson's Paper, Journal of the Royal Statistical Society, London, págs. 76-81.

Brass, W., The relational Gompertz Model of Fertility (inédito).

_____, An application of the relational Gompertz model of Fertility. (inédito).

_____ (1977), Cuatro lecciones de William Brass, CELADE, Serie D, No. 91, Santiago, Chile.

CELADE, Boletín Demográfico No. 32, Santiago de Chile, julio de 1983.

Croxton, Frederick y Cowden, Dudley J. (1945), Estadística General Aplicada. Fondo de Cultura Económica, México, 1959.

Chackiel, Juan, Proyección de la fecundidad: criterios y procedimientos utilizados en el CELADE, en Métodos de Proyecciones Demográficas, CELADE, Serie E, No. 1003, San José, Costa Rica, noviembre 1984.

Colombia, DANE, Censos Nacionales de Población, 1951, 1964, 1973 y 1985.

Davis, G.R. (1927), The growth curve, Journal of the American Statistical Association, Vol. 22, Sept.

Dorn, Harold F. (1950), Pitfalls in population forecasts and projections. Journal of the American Statistical Association, Vol. 45, págs. 311-334.

Duchesne, Louis (1984), Perspectives démographiques infrarégionales, 1981-2001, Bureau de la statistique du Québec.

_____ (1987), Método de proyecciones de población por sexo y edad para áreas menores, por relaciones de cohortes, (Borrador), CELADE.

Erie and Niagara Counties Regional Planning Board (1972), Regional population projections, Erie and Niagara Counties, Grand Island, N.Y. En Pittenger, op.cit.

Genessee-Finger Lakes Regional Planning Board (1971), Regional population distribution and projections, Rochester, N.Y. Citado en Pittenger. op.cit.

Graunt, John (1662), Natural and political observations made upon the bills mortality, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1939.

Greenberg, Michael, A test of combination of models for projecting the population of minor civil divisions, Economic geography 48,2.

Hakkert, Ralph, Nucleo de Estudios de Populacao, Universidade de Campinas, Brasil; en: International Population Conference, Florence 1985, IUSSP.

Instituto Nacional de Estadística y Censos y CELADE (1985), Los censos de población del 80: taller de análisis y evaluación. Buenos Aires.

Isard, Walter (1960), Methods of Regional Analysis. An introduction to regional science. The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, U.S.A.

James H., (1929), Estimates of future population, in Population, Land, Values and Government, Vol. 2, New York.

Kayani, Ashraf (1980), Preparing subnational population projections: A manual for selected indirect methods, CEELADE, Serie B, No. 48, Santiago, Chile.

Kendiah, V., The use of the relational fertility model parameters in population projections. East West Center (inédito).

Keyfitz, Nathan (1968), Introduction to the mathematics of population, Addison-Wesley Publishing Co.

King, Gregory (1696), Natural and political observations and conclusions upon the state and condition of England, ed. 1936.

Lotka, Alfred J. (1939), Teoría analítica de las asociaciones biológicas, CELADE, Serie E, No. 5, Santiago, Chile.

MacLean, J.E. More accurate population estimates by means of logistic curves. Civil Ingeneering, Vol. 22.

Malthus, Thomas (1798), An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet and other writers. London,, Jhonson, Vol. 2.

Massachusetts State Planning Board (1938), Population Study of Massachusetts, A Planning Forum, Vol. 2.

Matterlart, Armand (1964), Manual de Análisis Demográfico, Santiago, Chile.

Muhsam, H. (1939), A note on migration and Verhulst's logistic curve, Journal of the Royal Statistical Society (London) 102: págs. 445-448.

Murphy, Propuesta de Murphy para calcular la asíntota superior en la función logística para proyectar población. Presentada por W. Brass. Apuntes de Jorge L. Somoza.

Naciones Unidas (1982), Estimates and projections of urban, rural and city populations, 1950-2025, The 1980 Assessment, ST/ESA/SER.R.45, New York.

_____ (1978), Factores determinantes y consecuencias de las tendencias demográficas. Vol. 1. ST/SOA.SER.A/50.

_____ (1975a), Guidelines for preparing subnational population projections. Economic and Social Commission for Asia and the Pacific, Asian Population Studies, Series No. 32, Bangkok, Thailand.

_____ (1952), Métodos de cálculo de la población total para fechas corrientes, Manual I de "Manuales sobre métodos de cálculo de la población", ST/SOA/SER.A/10, Nueva York.

_____ (1975b), Métodos para hacer proyecciones de la población urbana y rural, Manual VIII, ST/ESA/SER.A/55, Nueva York.

_____ (1956), Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, Manual III, ST/SOA.A/SER.A.

Newling, Bruce (1968), Population projections for New Jersey to 2000. New York.

Pearl, Raymond and Lowell, Reed (1920), On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 6, págs. 275-288.

Pearl, Raymond (1924), Studies in human biology, Baltimore (Williams & Wilkins Co.)

Petty, William (1691), Political arithmetic; or a discourse concerning the value of lands, people, buildings, London, R. Clavel, 1961.

Pittenger, Donald (1976), Projecting state and local populations, Ballinger Publishing Company, Cambridge, Mass., USA.

Plessing (1962), On den Logistiske Kurve og dens anvendelse i praksis Erhvervsøkonomisk Tidsskrift, Copenhagen 26 (3), págs. 205-231.

Prescott, R.D. (1922), Law of growth in forecasting demand, Journal of the American Statistical Association, Vol. 18. Dec.

Pritchett, H.S. (1891), A formula for predicting the population of the United States, Publications of the American Statistical Association, Boston, 2 (14).

Pujol, José M. (1985), Apuntes de clase del curso "Proyecciones de Población", CELADE, Santiago, Chile.

_____ y Chackiel, Juan (1982), Metodologías de las proyecciones de población urbana y rural y población económicamente activa elaboradas por CELADE. Documento presentado en el Seminario de Proyecciones de Población, San José, Costa Rica, en CELADE, "Métodos para proyecciones demográficas", Serie E, No.1003, San José, Costa Rica, 1984.

Quételet, Adolphe (1835), Sur l'homme et le développement de ses facultés: ou essay de physique sociale. Paris, Bachelier, Vol. 2, págs. 1-20.

Rhodes, E. (1938), A population growth curve for England and Wales. en: Théorie générale de la population. Congres International de la Population. Paris, Vol. 1, págs. 40-47.

Rincón, Manuel, Estimaciones y proyecciones de población. CELADE, Serie B. No. 1010, San José, Costa Rica, 1984.

Rodríguez, Germán (1986), Modelos estadísticos para el análisis de datos demográficos, Apuntes de clase del curso "Métodos Cuantitativos II", CELADE, Santiago de Chile.

Shryock, Henry S., Jacob, S., Siegel and Associates (1971), The methods and materials of demography. U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, U.S. Printing Office, Washington D.C., pág.775.

Spiegel, Murray R. (1961), Statistics, Schaum Publishing Co., New York.

Sussmilch, Johann P. (1775), Die Gottliche Ordnung in den Veranderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode and dur Fortpflanzung desselben erwiesen. Berlin.

Todorovic, Gordana, Some dilemmas appearing at work on population projections of small areas. Demographic Research Center of the Institute for Social Sciences, Beograd, Yugoelavlia (sin fecha, posterior a 1980).

Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población y Centro Latinoamericano de Demografía (1985), Diccionario Demográfico Multilingüe, Ediciones Ordina, Lieja, Bélgica.

U.S. Water Resources Council, 1972 Obers Projections, Vol. 1, "Concepts, Methodology and summary Data", (Washington D.C.: Government Printing Office, 1974). En Pittenger, op.cit.

Verhulst, Pierre-Francois (1838), Notice sur le loi que la population suit dans son accroissement. En Correspondence Mathématique et Physique de l'Observatoire de Bruxelles, publicado por A. Quetelet, Vol. 10, págs. 113-121.

Vianelli, Silvio (1935), Evoluzione economica e demografica negli schemi delle curve logistiche. Revista Italiana di Scienze Economiche, Bologna, 7 (3). Págs. 383-444.

_____ (1936), A general dynamic demographic scheme and its application to Italy and the United States, Econometrica (Colorado Springs, Colo.) 4(3). Págs. 269-283.

Zachariah, K.C. (1980), International migration and subnational population projections. En "U.S. Population Projections: Problems and Solutions". Report of the Workshop on Population Projections, Budapest, Hungary 17-28 March, 1980., TCD/SEM.81/3.

_____ Notes on Population Projections, Demographic Training and Research Centre, Chembur, Bombay, India. (Sin fecha, anterior a 1961).

1
2
3
4
5

6
7