

DS/19
c.1

LA MEDIDA DE LA REPRODUCTIVIDAD

Traducción del artículo "The Measurement of Reproductivity" publicado en
Journal of the INSTITUTE OF ACTUARIES Vol. LXXIV, part. 339.
Londres, 1948

A. H. POLLARD

CENTRO LATINOAMERICANO
DE DEMOGRAFIA - CELADE

SERIE DS NO. 19

SAN JOSE' COSTA RICA

1973

BIBLIOTECA "SIGLO VEINTI"
CENTRO LATINOAMERICANO
DE DEMOGRAFIA

LA MEDIDA DE LA REPRODUCTIVIDAD

Traducción del artículo "The Measurement of Reproductivity" publicado en
Journal of the INSTITUTE OF ACTUARIES Vol. LXXIV, part. 339.
Londres, 1948

A. H. POLLARD

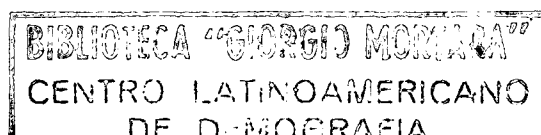
**M. Sc., M.Sc, (Econ),
F. I. A., F. S. S.**

**Secretario Asistente de Mutual Life and Citizen's
Assurance Company, Lt.**

SERIE DS NO. 19

SAN JOSE' COSTA RICA

1973



0231

I N D I C E

	Página
INTRODUCCION.....	1
1. FORMULAS ELEMENTALES	
1.1 Tasas brutas de natalidad y de mortalidad.....	2
1.2 Tasas tipificadas de natalidad y mortalidad.....	2
1.3 Índice de reemplazo.....	2
2. FORMULAS MAS EFICIENTES	
2.1 Tasa neta de reproducción R_0	4
2.2 Tasa verdadera de crecimiento natural.....	5
2.3 Tasa bruta de reproducción.....	6
2.4 Propiedades de estas tasas de reproducción.....	6
2.5 Fórmula de Karmel.....	7
2.6 Fórmula de Clark-Dyne.....	8
2.7 Tasas anuales correspondientes.....	10
2.8 Cálculos numéricos.....	10
3. EL EFECTO DE LOS CAMBIOS EN LA PROPORCION DE CASADAS A LA EDAD X SOBRE LAS FORMULAS DE REPRODUCTIVIDAD.....	12
4. FORMULAS DE REPRODUCTIVIDAD MASCULINA VS. FEMENINA.....	32
5. TASA CONJUNTA DE AUMENTO.....	
5.1 Objetivo.....	34
5.2 Los datos básicos.....	34
5.3 La teoría.....	34
6. APLICACION A LOS DATOS AUSTRALIANOS	
6.1 Índice de reemplazo λ_3	45
6.2 Tasa bruta de crecimiento.....	45
6.3 Tasas netas de reproducción y tasas de crecimiento.....	46
6.4 Índice de reemplazo λ_2	49
6.5 Fórmula de Karmel.....	49
6.6 Fórmula de Clark-Dyne.....	52
6.7 Observaciones.....	52

INDICE DE CUADROS Y GRAFICOS

Cuadros	Página
1 Tasas de fecundidad del matrimonio en cada grupo de edad quinquenal basados en todos los nacimientos legales registrados en 1944 - Inglaterra	9
2 Porcentaje de mujeres casadas a una edad determinada...	10
3 Cálculo de C_0 e γ usando la mortalidad de Australia en 1933 y la fecundidad de Queensland en 1944.....	11
4 Matrimonios por grupos de edad al tiempo t	15
5 Matrimonios anuales durante un cambio desde p_x hasta P_x a lo largo de 6 años.....	17
6 Entradas (para años seleccionados) en la hoja de trabajo para calcular los nacimientos anuales adicionales luego de un aumento a lo largo de 6 años desde p_x hasta P_x cuadro 2..	18
7 Cálculo de S_0 y σ usando la fecundidad de Australia en 1944 y el censo de mortalidad de 1933	44
8 Índice de reemplazo J_3 - Australia.....	45
9 Proporción de mujeres de un grupo de edad determinado que se casa en un año específico - Australia.....	48
10 Valores de varias medidas de reproductividad para Australia 1933-44.....	50
Gráficos	
1a. Efecto sobre R_0 , C_0 y K_0 de un aumento en la proporción de mujeres casadas a una edad determinada, desde p_x hasta P_x (cuadro 2) a lo largo de 3 años.....	24
1b. Efecto del gráfico 1a., sobre R_0 , C_0 y K_0 , a lo largo de 6 años.....	25
1c. Efecto del gráfico 1a., sobre R_0 , C_0 y K_0 , a lo largo de 12 años.....	26
2a. Efecto sobre R_0 , C_0 y K_0 , de un aumento en la proporción de mujeres casadas a una edad determinada, desde p_x hasta P_x (cuadro 2), a lo largo de 3 años, seguido inmediatamente de un retorno simétrico a p_x en 3 años más.....	27

Gráficos	Página
2b. Efecto del gráfico 2 a., sobre R_0 , C_0 y K_0 , realizándose el incremento a lo largo de 6 años, seguido por un retorno simétrico a p_x en 6 años más.....	28
2c. Efecto del gráfico 2 a., sobre R_0 , C_0 y K_0 , realizándose el incremento a lo largo de 12 años, seguido por un retorno simétrico a p_x en 12 años más.....	29
3a. Efecto sobre R_0 y C_0 , de un incremento en la proporción de mujeres casadas a una edad determinada desde p_x hasta P_x (cuadro 2) a lo largo de 3 años permaneciendo constante en P_x por 6 años y volviendo en forma simétrica a p_x , a lo largo de 3 años más.....	30
3b. Efecto del gráfico 3 a., sobre R_0 y C_0 , realizándose el incremento a lo largo de 6 años, permaneciendo constante en P_x durante 6 años, y volviendo luego simétricamente a p_x , a lo largo de 6 años más.....	31
4 Edad promedio de la reproductividad neta (hombres y mujeres) y diferencia en edades, Australia 1933-44.....	47
5 Medidas de reproductividad, Australia 1933-44.....	51

Por A. W. POLLARD, B.Sc., M.Sc.(Econ.), F.I.A., F.S.S.
Secretario Asistente de Mutual Life and Citizen's
Assurance Company, Ltd.

(Este trabajo, por el cual le fue otorgado el Premio Rhodes al autor (Ver Year Book 1947-48, pág. 208) fue suministrado al Instituto para su discusión el día 3 de mayo de 1946).

INTRODUCCION

La medida de la tasa de crecimiento de la población ha atraído considerablemente la atención en la literatura científica de años recientes. Esto es, sin duda, el resultado del continuo decrecimiento de las tasas de natalidad, las que han constituido el tema de innumerables artículos en la prensa popular. Se han hecho varios intentos para poder obtener una medida estadística simple, de la reproductividad de una población en un período determinado, o sea, una medida de la extensión en la cual la población se reemplazará a sí misma si la fecundidad y la mortalidad actuales continúan indefinidamente. El propósito de este trabajo es:

- En la Sección 1: Examinar las fórmulas elementales sugeridas;
- En la Sección 2: Examinar algunas fórmulas mejor elaboradas y más eficientes;
- En la Sección 3: Analizar el efecto de un cambio en la proporción de matrimonios a cierta edad, sobre las fórmulas de la Sección 2;
- En la Sección 4: Señalar la incoherencia entre la tasa masculina frente a la femenina;
- En la Sección 5: Sugerir una fórmula que evite esa incoherencia, y finalmente;
- En la Sección 6: Discutir la aplicación de estas fórmulas a las estadísticas de la población australiana.

1. FORMULAS ELEMENTALES

1.1 Tasas brutas de natalidad y de mortalidad

En un principio, los estadísticos vitales se sentían satisfechos al estudiar el exceso de la tasa bruta de natalidad sobre la tasa bruta de mortalidad. Con los marcados cambios en la estructura por edad que habían resultado del decrecimiento de la mortalidad y la fecundidad, pronto pareció que esta medida no era la más apropiada para comparar la velocidad a la cual poblaciones diferentes (lo cual incluye la misma población en diferentes periodos) se estaban reproduciendo. Por ejemplo las tasas brutas de natalidad, de dos poblaciones "igualmente fecundas", serían bastante diferentes si tuvieran proporciones de mujeres en el grupo de edad reproductiva desiguales.

1.2. Tasas tipificadas de natalidad y mortalidad

La diferencia entre las tasas tipificadas de natalidad y mortalidad es una medida del mismo tipo, pero más satisfactoria ya que toma en cuenta la distribución por edad. La tasa tipificada de mortalidad es la tasa bruta de mortalidad de una población tipo que experimenta en las diferentes edades, las tasas de mortalidad de la población en estudio. Esta medida dependerá en parte del tipo de población escogida, pero estará sujeta a objeciones más serias explicadas por C. D. Rich (1) como sigue: suponiendo que el número de muertes en edades reproductivas aumente y disminuya en edades inferiores, de modo que la tasa tipificada de mortalidad no sea alterada, aunque, un número más grande de niños sobrevivirán a edades reproductivas y eventualmente concebirán niños, esta medida de reproductividad no cambia, y sin embargo en nuestra suposición no cabe duda de que en una población como la descrita la tasa de crecimiento se incrementará.

Para determinar esta (y cualquier otra) medida de reproductividad, se requieren datos básicos, extensos, sobre las fuerzas de mortalidad y fecundidad. Además de las dos objeciones mencionadas anteriormente sobre este asunto, podemos agregar una tercera: esta medida no hace uso óptimo de estos datos básicos. Para una medida que llene estos requisitos véase el párrafo 2.2.

1.3. Índice de reemplazo

El índice de reemplazo fue introducido por W.S. Thompson y más tarde usado por Lorimer y Osborne en su libro "Dinámica del Crecimiento de la Población" ("The dynamics of population growth"). Es la más útil entre las fórmulas elementales de reproductividad y requiere solamente la distribución de la población en grupos de edad y la tabla de vida correspondiente.

El índice de reemplazo tiene tres formas que pueden utilizarse. Todas ellas son casos particulares de la fórmula general que se obtiene al dividir el número de niños de un grupo determinado de edad de la población actual entre el número de mujeres de la misma población que hubieran estado en grupos de edad reproductiva cuando estos niños nacieron, y después dividiendo el cociente entre el cociente correspondiente en la población de la tabla de vida.

Las tres formas útiles del índice de reemplazo son :

- I) J_1 , obtenido usando niños menores de edad 5 y las mujeres con edades de 20-45 años en la fórmula descrita anteriormente.
- II) J_2 , obtenido usando los nacimientos anuales y las mujeres de 20-45 años en la fórmula; y
- III) J_3 , obtenido usando cualquier grupo de niños (digamos de edades 10-14) y las mujeres correspondientes de edades 30-55.

A.J. Lotka (2) ha probado que J está relacionado con otras fórmulas de reproductividad p , la tasa de crecimiento natural verdadera (ver párrafo 2.2) y R_0 , la tasa neta de reproducción (ver párrafo 2.1) por la siguiente fórmula aproximada :

$$\log_e J \cong (\alpha_2 - \alpha_1) p \quad \text{y} \quad J \cong R_0 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$$

donde α_1 y α_2 son las edades medias de los grupos mayor y menor respectivamente y α es la edad media de la reproductividad neta de las mujeres.

Deberán anotarse las siguientes observaciones acerca de este índice (para detalles ver Lotka (2)) :

I) Aunque hubieran cambios sustanciales en la fecundidad y mortalidad, causan poca alteración en las medidas α_1 , α_2 y α , y por lo tanto $(\alpha_2 - \alpha_1)/\alpha$ es aproximadamente constante para todas las situaciones prácticas. Además numéricamente se aproxima a la unidad, y por lo tanto, como una aproximación inicial burda, podemos tomar $J = R_0$ para todas las poblaciones. En cualquier caso, podemos comparar R_0 para varias poblaciones comparando las J correspondientes.

II) Si determinamos las J_3 (mencionadas anteriormente) para varios grupos de edad con los datos de un solo año calendario (Exe.g. Austria 1939, cuadro 8) obtenemos índices de reemplazo para los años anteriores, el valor de J_3 obtenido usando el grupo de edad 10-14, da el índice de reemplazo de diez años atrás, y así con los otros grupos. Para años más remotos la medida es bastante burda ya que el factor inmigración por sí solo es capaz de producir discrepancias importantes.

III) Es simple de calcular y es el único índice aplicable cuando no se dispone de la fecundidad por edades. Si estas tasas estuvieran disponibles se podría usar una medida mejor.

IV) El alterar los límites en la edad del grupo de edad inferior (digamos de menores de 5 a menores de 3) tiene un efecto que, a pesar de no ser marcado, tampoco es insignificante. Por lo tanto, el índice de reemplazo no es una medida única de la fecundidad neta.

V) No está relacionado de manera natural al análisis general de la población y da poca información sobre otro aspecto que no sea la tasa de crecimiento.

2. FORMULAS MAS EFICIENTES

2.1 Tasa neta de reproducción R_0

Esta medida fue introducida originalmente por R. Boeckh en su estudio sobre la población de Berlín de 1879, y ha sido usada en forma extensa por R.R. Kuczynski y otros. Consiste simplemente en la proporción de nacimientos de un sexo determinado (generalmente femenino) en dos generaciones sucesivas bajo condiciones constantes de fuerza de mortalidad $\mu(x)$ y fecundidad $f(x)$:

$$R_0 = \int_0^{\infty} \frac{l_x}{l_0} f(x) dx \quad (1)$$

La población crecerá, permanecerá estacionaria, o decrecerá según que R_0 sea mayor, igual o menor que la unidad.

Lotka (a) ha demostrado que en una comunidad que aumenta lentamente por crecimiento natural, R_0 está especificado en forma aproximada por la relación del total de nacimientos anuales en dos épocas t y $t-\alpha$, separados por α años, donde α es (como anteriormente) la edad media de la reproductividad neta de las mujeres.

R_0 no es una tasa anual de crecimiento, sino una tasa de crecimiento por unidad de tiempo (en este caso la generación), que varía ligeramente de una población a otra. Por eso se introdujo una medida más satisfactoria (p), convirtiendo R_0 en una base anual.

2.2 Tasa verdadera de crecimiento natural

En 1911 Sharpe y Lotka (a) probaron que una población sujeta a un comportamiento específico de mortalidad y fecundidad por edad, no importa cual sea su distribución original por edades se aproximaría eventualmente a una distribución estable, con una tasa fija de crecimiento anual p^* . En 1925 Dublin y Lotka (4) demostraron que p , que satisface la ecuación integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{1}{l_0} f(x) dx = 1 \quad (2)$$

puede ser obtenida con suficiente precisión resolviendo la cuadrática (ecuación de 2º grado):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{R_2}{R_0} \right) p^2 + \frac{R_1}{R_0} p - \log_e R_0 = 0 \quad (3)$$

donde

$$R_n = \int_0^{\infty} x^n \frac{1}{l_0} f(x) dx$$

Mediante un ajuste de una curva de Pearson de Tipo III a la función de fecundidad neta $(\frac{1}{l_0} f(x))$, S.D. Wicksell (5) obtuvo la siguiente fórmula que en la práctica da idénticos resultados:

$$p = \frac{R_0 R_1}{R_0 R_2 - R_1^2} \left\{ R_0 (R_0 R_2 - R_2^2) / R_1^2 - 1 \right\} \quad (4)$$

Se ha demostrado (Rhodes (6)), que $p \geq 0$ si $R \geq 1$. p es una medida verdadera de la tasa de crecimiento que permite el uso óptimo de los datos suministrados. Ocupa una posición central en el análisis general de la población.

*/ Véase también C.D. Rich (1) pp. 44, 45 y 70-77, p. 43 para fórmula (3)

2.3 Tasa bruta de reproducción

Solo cabe hacer mención de la tasa bruta de reproducción que es el esquema total de la fecundidad por edades o $\int_0^{\infty} f(x) dx$. Proporciona un límite superior a R_0 cuando las condiciones de mortalidad han mejorado hasta llegar a ser insignificantes.

2.4 Propiedades de estas tasas de reproducción

Debe recordarse que al permanecer iguales las características restantes, si todas las personas tuvieran que morir después de sobrepasar las edades reproductivas, no cambiarían las tres medidas de reproductividad mencionadas anteriormente, aunque la esperanza de vida y la distribución por edad de la población se alterase.

Cada una de estas medidas puede ser usada para estimar el efecto de diferentes tasas de mortalidad si la fecundidad permanece constante, o de varias tasas de fecundidad con la misma mortalidad. Por lo tanto, pueden ser usadas para medir en forma separada el efecto que sobre la reproductividad tienen el descenso de la mortalidad y la fecundidad del presente siglo.

Dada la estructura por edad de la mortalidad y la fecundidad para un sexo, podemos determinar no sólo R_0 y p , sino también muchas otras características de la población final, la cual es interesante de comparar con la población presente. Podemos, por lo tanto, determinar la distribución final por edades, las verdaderas tasas de natalidad y mortalidad, la distribución por edad de las hijas para una edad determinada de las madres, la edad media de las hijas para una determinada edad de la madre, la proporción de hijas de una determinada edad cuyas madres están vivas o la proporción de hijas huérfanas de madre. Si se obtuvieran mayores datos y más precisos, nuestro conocimiento sobre la población final podría ser más extenso.

Si se ignora la duración de los matrimonios, estas medidas de reproductividad, conducen a resultados engañosos, si por cualquier razón las condiciones de los matrimonios son anormales. Debido a la alta fecundidad de la vida conyugal temprana un repentino aumento temporal en el número de matrimonios, podría resultar en nacimientos aumentados en los años siguientes inmediatos si la fecundidad de las casadas permanece constante. Si usamos estos nacimientos aumentados para determinar la fecundidad por edades, sin tener en cuenta el número anormal de matrimonios (como en el caso de R_0 y p) estaríamos sobreestimando la reproductividad ya que, estamos suponiendo que las altas tasas de matrimonios continuarán indefinidamente. Esto es teóricamente imposible en muchos casos, pues podría conducir al supuesto de que estarán casadas más mujeres de las que realmente existen. En los siguientes párrafos se indicarán dos medidas sugeridas con el propósito de subsanar esta dificultad, la cual sin duda, ha ocurrido en la mayoría de los países civilizados durante los últimos 15 años, debido a los matrimonios postergados y a los matrimonios acelerados en tiempos de guerra. El efecto de la variación en las tasas de matrimonio sobre las diferentes medidas, será examinado más de cerca en la sección 3.

2.5 Fórmula de Karmel

Pueden tomarse en cuenta los nacimientos aumentados que resultan de un número anormal de matrimonios de corta duración, usando una fórmula basada en tasas corrientes de natalidad, como función de la duración del matrimonio combinadas con tasas normales de matrimonio que se pueden esperar en el futuro.

Surge aquí la dificultad práctica de que los datos necesarios para determinar las tasas de natalidad en la forma requerida, no están disponibles. Con los datos de Australia debemos estar satisfechos de poder relacionar el número anual de nacimientos para el año estudiado, dividido según la duración del matrimonio (r), con los matrimonios anuales registrados en años anteriores. Esta relación b_r , que en una forma modificada fue usada por primera vez por P.H.Karmel (7) al determinar su índice de fecundidad de matrimonios corrientes, no toma en cuenta la interrupción del matrimonio debido a divorcio o muerte de cualquiera de los cónyuges, y no es una tasa de natalidad en el verdadero sentido. A pesar de no proporcionar toda la información deseada, puede ser utilizado para obtener la medida de reproductividad de Karmel, K_0 , que corresponde a R_0 si sabemos la proporción m_y de mujeres en edad y , que se casan a esa edad. Por lo tanto:

$$K_0 = \int_0^{\infty} \frac{l_y}{l_0} m_y dy \sum_0^{\infty} b_r = \sum_0^{\infty} b_r \frac{\int_0^{\infty} l_y m_y dy}{l_0} \quad (5)$$

Hay tres métodos obvios para determinar m_y , a saber:

- I) Según los matrimonios durante el año que se está investigando;
- II) Según la proporción de mujeres casadas a la edad y al final del año que se está investigando; o
- III) Usando valores promedios típicos de las proporciones mencionadas en el punto II), como por ejemplo el de las proporciones durante un período de matrimonios normales o las proporciones en un censo anterior.

El Método I) no se debe usar debido a las grandes fluctuaciones en los matrimonios, que se han mencionado en el párrafo 2.4, las cuales pueden dar valores de m_y tales como $\int_0^{\infty} l_y m_y dy > l_0$, lo que es imposible. Si usamos el Método II) durante un período de incremento en los matrimonios (tiempo de guerra) puede resultar inverosímil que se mantengan proporciones de matrimonios tan altas. Sin embargo, el hecho de que puedan o no mantenerse, esta fuera del tema; ciertamente puede ser y probablemente será usado como es una

indicación de tendencias recientes. Para muchos países, las proporciones de los nunca casados solo se disponían en las fechas censales y tendrá que utilizarse el Método III). Si los censos anteriores se llevaron a cabo en un tiempo en que las proporciones eran anormalmente bajas, como en el caso de Australia, la reproductividad estará subestimada siempre, con este método.

Deberán señalarse los siguientes puntos relativos a esta medida:

- I) La migración afecta a b_r , particularmente para grandes valores de r -son incluidos los nacimientos de matrimonios contraídos afuera y viceversa;
- II) Los nacimientos ilegítimos, aunque pequeños en proporción, deberán incluirse. Un método simple y suficientemente preciso es aumentar los resultados obtenidos en la relación existente entre nacimientos totales y nacimientos legítimos;
- III) Los cambios en la proporción de segundas nupcias alterarán muy poco el índice, debido a su baja fecundidad, resultado probable de la más alta edad al casarse; y, más importante que todo,
- IV) No se toma en cuenta la edad al casarse. El número de hijos por familia depende, en gran parte, de la edad de los cónyuges al contraer nupcias (ver cuadro 1) y por lo tanto, si la edad promedio al casarse está cambiando apreciablemente, la fecundidad debe ser considerada en función de ella.

2.6 Fórmula de Clark-Dyne

Clark y Dyne (8) sugirieron una modificación a la fórmula de Karmel para tomar en consideración la edad al casarse y corregir así los puntos III) y IV) mencionados anteriormente. Obtuvieron b_r para varias edades y (o grupos de edades) al contraer matrimonio, $y b_r$, y obtuvieron una medida de reproductividad C_0 , correspondiente a R_0 y K_0 , dada por:

$$C_0 = \int_0^{\infty} \frac{l_y}{l_0} m_y \sum_0^{\infty} y b_r dy \quad (6)$$

Esta fórmula implica mayores cálculos y requiere datos que no se han publicado para muchos países. Su superioridad indiscutible sobre R_0 y K_0 , en condiciones anormales de matrimonios será demostrada en la Sección 3.

Cuadro 1.

TASAS DE FECUNDIDAD DEL MATRIMONIO EN CADA GRUPO DE EDAD QUINQUENAL BASADOS
EN TODOS LOS NACIMIENTOS LEGALES REGISTRADOS EN 1944 - INGLATERRA

(Datos de Clark y Dyne (8), pág. 32)

Año de matrimonio	Nacimientos por 1 000 matrimonios, según la edad de la madre al casarse							Todas las edades
	-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-	
TOTAL.....	3 832	2 884	2 244	1 519	758	158	6	2 580
1944.....	140	76	53	52	50	21	...	78
1943.....	490	364	315	265	208	70	...	346
1942.....	278	250	224	186	126	23	6	229
1941.....	275	252	228	200	97	22	...	229
1940.....	281	236	211	177	93	10	...	215
1939.....	248	217	200	166	63	6	...	199
1938.....	213	186	183	119	27	170
1937.....	200	176	153	101	38	156
1936.....	174	160	135	85	32	6	...	139
1935.....	159	150	123	48	7	119
1934.....	153	129	92	39	7	106
1933.....	135	117	88	30	5	103
1932.....	128	98	64	23	85
1931.....	148	89	52	11	5	78
1930.....	123	77	43	7	72
1929.....	112	69	33	4	58
1928.....	96	58	20	4	44
1927.....	80	46	16	34
1926.....	76	36	5	29
1925.....	67	30	2	2	26
1924.....	68	25	3	20
1923.....	54	18	1	15
1922.....	55	9	10
1921.....	27	7	7
1920.....	21	4	5
1919.....	24	2	3
1918.....	8	2	2
1917.....	7	1
1916.....	5	1
1915.....	7	1	1

2.7 Tasas anuales correspondientes

C_0 y K_0 son tasas de aumento por "generación" y no tasas anuales de aumento. Las correspondientes tasas anuales, que son de más utilidad, se indicarán por medio de las letras griegas minúsculas α y k respectivamente siguiendo el precedente de R_0 y p . Sean C_n y K_n los momentos correspondientes a R_n . Los nacimientos en cada edad al alumbramiento x , que en el caso de R_0 están dados por $(l_x/l_0) f(x)$, para C_0 se obtienen por:

$$\sum_{y=0}^x \frac{l_y}{l_0} m_y y^{b_{x-y}}$$

Habiendo determinado estos nacimientos se obtiene C_n , tomando momentos, y α sustituyendo estos valores de C_n para R_n en la ecuación (3) y resolviéndola.

2.8 Cálculos numéricos

El cálculo de C_0 e α se muestra en el cuadro 3. La columna 3 se obtiene de los sobrevivientes de la columna (1) y las proporciones P_x del cuadro 2 con un pequeño aumento por las segundas nupcias. Las columnas (4) y (5) resultan de la aplicación de las tasas de fertilidad del cuadro 1 a los matrimonios de la columna (3). El total de la columna (4), ajustado según los nacimientos femeninos ilegítimos, da como resultado C_0 . Sumando diagonalmente las columnas (5), se obtienen la columna (7). Los totales de las columnas (7), (8) y (9) permiten deducir la ecuación para α . Las agrupaciones por edades y duración son amplias; para resultados más exactos, deben emplearse grupos más pequeños o duraciones individuales.

El procedimiento es similar para el cálculo de K_0 y k . Para determinar R_0 y p (para varios ejemplos, véase Dublin y Lotka (9)) se obtiene la columna (7) inmediatamente de la columna (2) multiplicándola por $f(y)$ y se continúa del mismo modo, usando α (columna (1)) para las edades al alumbramiento.

Cuadro 2.
PORCENTAJE DE MUJERES CASADAS A UNA EDAD DETERMINADA
(Datos de Clark y Dyne (8), p.33)

Edad x	20	25	30	35	40	45
Queensland 1938 (p_x)..	16.0	51.3	72.8	81.6	86.0	87.2
Queensland "tiempo de guerra" (P_x).....	17.3	64.0	80.3	84.5	86.0	87.3

Cuadro 3.

CALCULO DE C_0 E y USANDO LA MORTALIDAD DE AUSTRALIA EN 1933 Y LA FECUNDIDAD DE QUEENSLAND EN 1944

(1) Edad al casarse (y)	(2) $1,000 \times \frac{y}{10}$	(3) Matrimonios anuales	(4) Nacimientos legítimos de (3)	(5) Nacimientos legítimos(4)según la duración del matrimonio						(6) Edad al alumbramiento (x)	(7) Nacimientos legítimos anuales	(8) x x (7)	(9) x ² x (7)
				-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29				
-19.....	937.04	149.89	574.4	219.4	149.0	100.0	64.6	33.7	7.6	19 1/2	219.4	4 279	83 441
20-24.....	928.88	332.58	959.2	391.8	295.7	169.6	79.5	21.0	1.7	24 1/2	540.8	13 249	324 591
25-29.....	917.89	215.97	484.6	222.7	171.5	73.2	16.4	.9	...	29 1/2	618.4	18 240	538 074
30-34.....	905.27	102.33	155.4	90.1	53.1	11.3	1.0	34 1/2	495.8	17 104	590 081
35-39.....	690.31	61.47	46.6	35.3	10.3	1.0	39 1/2	274.8	10 855	428 757
40-44.....	672.68	32.32	5.3	4.9	.4	44 1/2	71.5	3 180	144 510
										49 1/2	5.0	246	12 157
			2 225.3								2 225.7 ^{*/}	67 453	2 118 611

Total de nacimientos femeninos = $2\ 225.5 \times 1.077 \times .487 = 1\ 167.26$,

$C_1/C_0 = 30.174$, $C_2/C_0 = 951.979$, $\log_e C_0 = .154659$

Por lo tanto $-20.754 y^2 + 30.174 y - .154659 = 0$

Se deriva que

$$C_0 = 1.167,$$

$$y = .524 \text{ \% p.a.}$$

^{*/} La diferencia en el total se debe a los redondeos.

3. EL EFECTO DE LOS CAMBIOS EN LA PROPORCION DE CASADAS A LA EDAD X SOBRE LAS FORMULAS DE REPRODUCTIVIDAD

(Nota: el lector interesado solo en los resultados puede pasar del párrafo 3.1 al 3.8)

3.1 Los períodos de crisis económica o los años de guerra son ejemplos de "hechos" que aceleran o postergan los matrimonios en una comunidad. Aunque en fecha posterior llegan a constituirse exactamente las mismas parejas y éstas tienen el mismo número de hijos, se producirán grandes variaciones en los nacimientos anuales. Si no se interpretan correctamente estas variaciones en los nacimientos, se dará origen a falsas impresiones respecto a la tendencia de la fecundidad y a la tendencia de la reproductividad. Por lo tanto, el objetivo de esta sección será investigar el efecto de un cambio en la proporción de mujeres casadas a una edad determinada sobre las fórmulas de reproductividad de la sección anterior, suponiendo que la fecundidad, medida de acuerdo a la edad al casarse y duración del matrimonio, permanece constante de comienzo a fin. Esta investigación dará alguna indicación sobre la eficiencia de las diversas fórmulas de reproductividad, y, con respecto a una fórmula determinada, indicará al mismo tiempo las condiciones bajo las cuales cabe esperar una subestimación o sobreestimación de la reproductividad.

3.2 Supongamos que la población considerada es el resultado de nacimientos anuales constantes en el pasado, que está sujeta a una mortalidad fija; y designemos con l_x el total de mujeres a la edad x . La proporción de mujeres de edad x que están casadas se representará en el tiempo t por $\Pi(x,t)$, o, en forma más breve, por Π_x .

Luego, para un valor determinado de t , los matrimonios entre las edades x y $x+dx$, menos las defunciones de casadas entre estas edades es igual a:

$$l_{x+dx} \Pi(x+dx, t+dx) - l_x \Pi(x, t).$$

Lo cual puede escribirse:

$$dx \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) l_x \Pi(x, t),$$

es decir,

$$dx \left(l_x \frac{\partial \Pi_x}{\partial t} + l_x \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \Pi_x \frac{\partial l_x}{\partial x} \right)$$

Puesto que el último término, con su signo cambiado, es igual a las defunciones de casadas entre las edades x , $x+dx$, el número de matrimonios entre x y $x+dx$, para un valor determinado de t , está dado por :

$$l_x \left(\frac{\partial \pi_x}{\partial t} + \frac{\partial \pi_x}{\partial x} \right) dx. \quad (7)$$

Este resultado pudo haberse obtenido en forma inmediata.

Para una t determinada, el número de matrimonios entre x_1 y x_2 es :

$$\int_{x_1}^{x_2} l_x \left(\frac{\partial \pi_x}{\partial t} + \frac{\partial \pi_x}{\partial x} \right) dx. \quad (8)$$

Integrando por partes, tenemos :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} l_x \pi_x dx + l_{x_2} \pi_{x_2} - l_{x_1} \pi_{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} \pi_x \frac{\partial l_x}{\partial x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} l_x \pi_x dx + l_{x_2} \pi_{x_2} - l_{x_1} \pi_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} \pi_x l_x \mu_x dx \quad (9) \end{aligned}$$

Si suponemos que π_x cambia gradualmente con el tiempo de acuerdo a una función tangente inversa desde un valor constante de p_x hasta un valor constante de P_x , ocurriendo un porcentaje determinado del cambio (digamos 95 por ciento) a lo largo de n años, entonces, al ajustar polinomios a l_x , p_x , P_x y a la función edad al casarse -duración del matrimonio- nacimiento, podríamos obtener, haciendo uso de la expresión (9), una expresión analítica para los nacimientos al tiempo t puesto que :

$$\int \tan^{-1} k t dt, \int t \tan^{-1} k t dt, \text{ etc.} \quad \text{son integrables.}$$

No obstante lo anterior, este método no presenta ventajas sobre el método directo que se discute en el párrafo siguiente, especialmente cuando en varias fórmulas se requiere el efecto de variaciones en π_x .

3.3 Sea $x_1 x_2 b_r$ la probabilidad de que una mujer que se casa entre las edades x_1 y x_2 tenga un hijo durante el r simo año calendario después de su matrimonio;

\int indica la suma para todos los grupos de edad al casarse;

S la suma para todos los valores de r;

$$B_{x_1 x_2} = S_{x_1 x_2} b_r.$$

Procederemos a determinar los nacimientos anuales en una comunidad sujeta de comienzo a fin a la mortalidad femenina del Censo australiano de 1933 (A^{F33}) y, para $t > 0$, a las tasas de fecundidad según edad al casarse y duración del matrimonio, dadas en el cuadro 1 (es decir, Queensland 1944), en las cuales $\Pi_x = p_x + (P_x - p_x) \theta_t$, donde θ_t es únicamente función de t .

Suponemos que la fecundidad en el pasado fue tal que la población apenas se auto-reemplazaba.

Los valores escogidos para p_x y P_x en nuestros ejemplos están dados en el cuadro 2 y son, respectivamente, las proporciones de Queensland en 1938 y de Queensland en "tiempo de guerra". De este modo, las cifras no se exageran sino que están seleccionadas de la realidad.

A partir de (9), para una t_{x_2} determinada, los matrimonios entre las edades x_1 y x_2 son:

$$A + B \theta_t + \frac{\partial \theta_t}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} l_x (P_x - p_x) dx = A + B \theta_t + C \theta_t'$$

donde

$$A = l_{x_2} p_{x_2} - l_{x_1} p_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} p_x l_x \mu_x dx$$

y

$$A + B = l_{x_2} p_{x_2} - l_{x_1} p_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} p_x l_x \mu_x dx$$

Utilizando valores para edades simples de los cuadros de A^{33} y la fórmula de Newton-Cotes para la integración aproximada de 5 intervalos, obtenemos los valores para A, B y C que se dan en el cuadro 4.

Cuadro 4.
MATRIMONIOS POR GRUPOS DE EDAD AL TIEMPO t

Grupos de edad	$A + B \theta_t + C \theta_t'$		
TOTAL..	<u>80 547</u>	+	<u>309</u> θ_t + <u>121 509</u> θ_t'
- 19...	14 959	+	1 214 θ_t + 400 θ_t'
20 - 24...	32 769	+	10 613 θ_t + 44 313 θ_t'
25 - 29...	19 749	-	4 768 θ_t + 48 292 θ_t'
30 - 34...	7 978	-	4 169 θ_t + 22 030 θ_t'
35 - 39...	3 919	-	2 581 θ_t + 6 474 θ_t'
40 - 44...	1 136		

Integrando los matrimonios al tiempo t desde t hasta $t+1$, obtendremos el total de matrimonios desde el año calendario t a $t+1$. Si escribimos:

$$Q_t = \int_t^{t+1} \theta_t dt, \text{ y } Q_t' = \int_t^{t+1} \theta_t' dt,$$

el total de matrimonios desde el año calendario t hasta $t+1$, para todos los valores integrables de t , está dado por:

$$\sum_{x_1 x_2} (A + BQ_t + CQ_t') \quad (10)$$

y el total de nacimientos anuales durante el año r , por:

$$\sum_{x_1 x_2 t} S (A + BQ_t + CQ_t') x_1 x_2 b_{r-t} \quad (11)$$

3.4 Consideraremos ahora varias formas para ϑ_t .

1) Un aumento permanente en π_x . Si π_x aumenta constantemente a lo largo de n años, desde valores constantes de p_x hasta valores constantes de P_x , siguiendo una función combinada de coseno, la variación en el tiempo en π_x está dada por:

$$\left. \begin{aligned} t < 0, & \quad \vartheta_t = 0 & \quad \vartheta'_t = 0, \\ 0 \leq t \leq n, & \quad \vartheta_t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{t\pi}{n}, & \quad \vartheta'_t = \frac{\pi}{2n} \operatorname{sen} \frac{t\pi}{n} \\ t > n, & \quad \vartheta_t = 1 & \quad \vartheta'_t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Escribiendo en (10) q en lugar de los valores de Q que se aplican a este ejemplo, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} t < 0 & \quad q_t = 0 & \quad q'_t = 0, \\ 0 \leq t \leq n, & \quad q_t = \frac{1}{2} - \frac{n}{2\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{t+1}{n} \pi - \operatorname{sen} \frac{t}{n} \pi \right), & \quad q'_t = \frac{1}{2} \cos \frac{t}{n} \pi - \frac{1}{2} \cos \frac{t+1}{n} \pi, \\ t > n & \quad q_t = 1, & \quad q'_t = 0 \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo estos valores en (10) obtenemos los matrimonios anuales iniciales $\sum A$ en los grupos de edad al casarse, y los matrimonios anuales adicionales

$$\sum (B q_t + C q'_t),$$

que se muestran en el cuadro 5, para $n = 6$.

Cuadro 5.

MATRIMONIOS ANUALES DURANTE UN CAMBIO DESDE p_x HASTA P_x
A LO LARGO DE 6 AÑOS

Grupos de edad	Matrimonios anuales adicionales	Matrimonios anuales adicionales desde el año t hasta t + 1, siendo t						
		0	1	2	3	4	5	≥6
TOTAL	80 547	8 147	22 285	30 495	30 577	22 506	8 436	309
- 19	14 969	54	255	551	861	1 103	1 212	1 214
20 - 24	32 796	3 202	9 710	15 030	17 748	17 140	13 348	10 613
25 - 29	19 749	3 131	8 121	10 298	9 078	4 785	- 1 434	- 4 768
30 - 34	7 978	1 383	3 402	3 958	2 890	485	- 2 600	- 4 169
35 - 39	3 919	377	797	658	...	-1 007	- 2 090	- 2 581
40 - 44	1 136

Aplicando estos matrimonios a las tasas de fecundidad del cuadro 1, obtenemos los nacimientos anuales iniciales y los nacimientos anuales adicionales

$$\sum_{x_1, x_2} S(B q_t + C q_t) x_1 x_2^{b_{r-t}}$$

En el cuadro 6 se muestra, a modo de ilustración, el cálculo de la última función para años seleccionados.

ii) Una disminución permanente en n_x . Si n_x disminuye en forma constante durante n años, desde valores constantes de P_x hasta valores constantes de p_x , con la misma función combinada, entonces los valores de θ_t se obtienen, para todos los valores de t, restando los valores en (12) de la unidad y los valores de θ'_t son iguales en magnitud a los valores en (12), pero de signo contrario.

Por consiguiente en este caso,

$$\theta_t = 1 - q_t, \text{ y } \theta'_t = - q'_t.$$

Cuadro 6.

ENTRADAS (PARA AÑOS SELECCIONADOS) EN LA HOJA DE TRABAJO PARA CALCULAR LOS NACIMIENTOS ANUALES
ADICIONALES LUEGO DE UN AUMENTO A LO LARGO DE 6 AÑOS DESDE p_x HASTA p_x DEL CUADRO 2

Grupos de edad al casarse	Año del matrimonio	Nacimientos adicionales desde el año t hasta t+1, siendo t									
		0	2	4	6	9	12	15	19	23	27
TOTAL		508	11 111	26 069	29 641	25 050	21 148	18 684	17 130	16 533	16 309
- 19	0	8	15	15	12	9	6	6	4	1	...
	1	...	125	70	63	44	34	31	19	14	2
	2	...	77	152	55	110	84	82	44	30	13
	3	422	237	183	137	93	83	59	18
	4	154	307	274	192	149	124	74	30
	5	594	341	242	185	149	92	67
	≥6	170	1 436	2 337	2 983	3 642	4 141	4 463
20 - 24	0	243	801	756	596	480	314	221	96	22	...
	1	...	3 534	2 447	2 107	1 554	1 136	748	350	87	19
	2	...	1 142	3 758	3 547	2 645	1 939	1 338	691	271	30
	3	6 460	4 472	3 301	2 662	1 739	1 029	444	71
	4	1 303	4 285	3 719	2 742	2 005	1 183	515	120
	5	4 859	3 150	2 349	1 722	1 028	481	120
	≥6	807	9 997	16 779	21 937	26 533	29 189	30 345
25 - 29	0	166	701	661	573	385	200	103	6
	1	...	2 558	1 852	1 624	1 096	715	349	41
	2	...	546	2 307	2 173	1 576	947	535	165	10	...
	3	2 860	2 070	1 661	1 117	581	182	27	...
	4	254	1 072	957	646	421	158	10	...
	5	- 452	- 303	- 219	- 132	- 62	- 7	...
	≥6	- 253	- 3 910	- 6 743	- 8 703	- 10 115	- 10 648	- 10 701

Cuadro 6. (Continuación)

ENTRADAS (PARA AÑOS SELECCIONADOS) EN LA HOJA DE TRABAJO PARA CALCULAR LOS NACIMIENTOS ANUALES
ADICIONALES LUEGO DE UN AUMENTO A LO LARGO DE 6 AÑOS DESDE p_x HASTA p_x DEL CUADRO 2

Grupos de edad al casarse	Año del matrimo nio	Nacimientos adicionales desde el año t hasta t+1, siendo t									
		0	2	4	6	9	12	15	19	23	27
30 - 34	0	72	257	245	165	66	32	6	3
	1	...	902	680	565	289	102	24
	2	...	206	736	701	400	154	44
	3	766	578	344	139	66	12
	4	25	90	81	41	14	2	1	...
	5	- 689	- 460	- 263	- 101	- 18
≥ 6	- 217	-2 931	-4 857	-5 832	-6 262	-6 323	-6 331	
35 - 39	0	19	48	35	10	3
	1	...	166	77	50	26	4
	2	...	33	83	61	25	5	3
	3
	4	-50	- 127	- 63	- 32	- 5
	5	- 435	- 194	- 79	- 15
≥ 6	- 129	-1 241	-1 714	-1 913	-1 957	-1 957	-1 957	

Sustituyendo en (11), el total de nacimientos anuales durante el año r está dado por :

$$\sum_{x_1 x_2 t} S (A + B - Bq_t - Cq'_t) x_1 x_2^b r - t$$

Por lo tanto, podemos encontrar el total de nacimientos anuales restando a los nacimientos iniciales

$$\sum_{x_1 x_2} (A + B) B_{x_1 x_2}$$

los nacimientos anuales adicionales determinados para el caso 1) visto anteriormente.

III) Aumento temporal en π_x . Si π_x aumenta en n años desde p_x hasta P_x según la misma fórmula combinada, permanece constante en P_x por m años volviendo luego simétricamente a p_x durante los próximos años.

En este caso los valores de θ_t se obtienen, para todos los valores de t , a partir de los valores en (12) restando el valor al tiempo $t - m - n$ que allí figura del valor al tiempo t . De la misma manera los valores de θ'_t se obtienen de los valores en (12).

Por consiguiente, en este caso, para todos los valores de

$$Q_t = q_t - q_{t-m-n}, \quad \text{y} \quad Q'_t = q'_t - q'_{t-m-n}$$

Sustituyendo en (11), el total de nacimientos anuales durante el año r está dado por :

$$\begin{aligned} & \sum_{x_1 x_2 t} S \left(A + B \left[q_t - q_{t-m-n} \right] + C \left[q'_t - q'_{t-m-n} \right] \right) x_1 x_2^b r - t \\ &= \sum_{x_1 x_2 t} S (A + B q_t + C q'_t) x_1 x_2^b r - t - \sum_{x_1 x_2 t} S (B q_{t-m-n} + C q'_{t-m-n}) x_1 x_2^b r - t \end{aligned}$$

Por lo tanto, el total de nacimientos anuales durante el año r puede obtenerse, para este caso, restando del total de nacimientos anuales del año r , del caso 1) anterior, los nacimientos anuales adicionales allí obtenidos para el año, $m + n$ años antes.

El resultado de estos ejemplos puede corroborarse mediante un raciocinio general.

IV) El efecto de una disminución temporal en \bar{M}_x puede determinarse de la misma manera.

$$3.5 \text{ De 1) tenemos } R_0 = \sum \frac{l_x \text{ Nacimientos femeninos de mujeres en edad } x}{l_0 \text{ Total de mujeres en edad } x}$$

En el caso particular que consideramos (definido al inicio del párrafo 3.2), los nacimientos para $t < 0$ han sido constantes e iguales a l_0 . Por lo tanto, para $t < 15$, el total de mujeres de edad x en las edades fértiles es igual a l_x y por lo tanto, para $t < 15$, R_0 es igual al total de nacimientos femeninos anuales dividido por l_0 .

El número de aumentos anuales a la edad 0 para $t > 0$, es diferente de l_0 debido a la alteración de la fecundidad y a la intensidad de matrimonios después de $t = 0$. No obstante, si en un año particular el aumento anual es kl_0 en vez de l_0 , y además es constante la intensidad de matrimonios y la fecundidad de los mismos, entonces, x años más tarde, el número de mujeres de edad x será kl_x en lugar de l_x y los nacimientos femeninos anuales durante ese año aumentarán en la misma proporción. Podemos apreciar, en la fórmula anterior que para $t > 15$, cuando ocurran más nacimientos que los adicionales del cuadro 6, podemos determinar R_0 despreciando esta segunda generación de nacimientos y suponiendo l_0 entrantes durante todo el período. La razón de este procedimiento es que en este caso el numerador y el denominador de la expresión anterior varían en la misma proporción. Por lo tanto, hemos demostrado que para todos los valores de t , R_0 es igual al total de nacimientos femeninos anuales (restando a los nacimientos adicionales del cuadro 6) dividido por l_0 .

3.6 El índice sintético de fecundidad de los matrimonios de Karmel puede obtenerse, para un año determinado, dividiendo el total de nacimientos para duraciones de matrimonio dadas (proscindiendo de la edad al casarse) por los matrimonios correspondientes y sumando para todas las duraciones. Como, según nuestro supuesto, la población que consideramos experimenta la fecundidad del cuadro 1, para determinar el total de nacimientos para una duración de matrimonio determinada r , es necesario multiplicar los matrimonios a las diversas edades que ocurrieron hace r años por la fecundidad de los matrimonios de duración r para las diversas edades al casarse que se dan en el cuadro 1. Sin embargo, dado que conocemos la proporción de los matrimonios de un año determinado que ocurrió en los diversos grupos de edades, podemos determinar la contribución al índice de Karmel de los matrimonios de duración r para un año determinado, ponderando la fecundidad del cuadro 1, para una duración r , por la proporción de matrimonios a las diversas edades que efectivamente ocurrieron hace r años. Esto nos dará la fecundidad de los matrimonios de duración r que se hubiese obtenido en nuestra población dada, ignorando por completo la edad al casarse. La suma de todas las duraciones de matrimonio da el índice de Karmel para el año en estudio.

Un cambio en los nacimientos anuales efectivos alterará este índice de la misma manera que alterará en los años posteriores, las proporciones que se casan a diversas edades. (Estas proporciones se utilizan para ponderar las tasas de fecundidad para una duración determinada de matrimonio). Por lo tanto, para $t > 20$, será necesario considerar los matrimonios adicionales que resultan del aumento de los nacimientos, a partir de $t = 0$.

3.7 La fórmula Clark-Dyne al tiempo t la obtenemos ponderando los valores de $B_{x_1 x_2}$ no por los matrimonios entre las edades x_1 a x_2 que tienen lugar en el tiempo t , sino por los que tendrían lugar en ese grupo de edades si los valores de π_x siempre hubiesen sido iguales a los de ese tiempo en particular. Es decir, está dada por:

$$\sum_{x_1 x_2} (A + B \theta_t) B_{x_1 x_2}$$

3.8 Se dibujaron gráficos (véase Gráficos 1-3) mostrando las variaciones que ocurren en I), la tasa neta de reproducción, II), la fórmula de Karmel, y III), la fórmula de Clark-Dyne, en una comunidad estructurada a partir de nacimientos anuales constantes en el pasado, y sujeta durante todo el período a una mortalidad AF^{33} , y, a la fecundidad del cuadro 1 para $t > 0$. Las grandes variaciones que aparecen son resultado del único factor al que se le permitió variar en el tiempo: la proporción de mujeres casadas a una edad determinada. Los límites de la variación (que se dan en el cuadro 2) están seleccionados de la realidad y son las proporciones de Queensland para 1938 y de Queensland en "tiempos de guerra". Los gráficos muestran el efecto de: I) un aumento permanente en las proporciones de casadas desde p_x a P_x que se produce en forma gradual (véase (12)) a lo largo de n años ($n = 3, 6$ y 12), y II) un aumento temporal desde p_x a P_x a lo largo de n años ($n = 3, 6$ y 12) a la misma tasa, permaneciendo constante en P_x durante m años ($m = 0$ y 6) volviendo simétricamente a p_x a lo largo de n años adicionales.

I) Aumento permanente. Pueden anotarse las siguientes observaciones:

- a. Después que han cambiado las proporciones, el número de matrimonios anuales es prácticamente igual a antes del cambio, debiéndose la reproductividad mayor que se produce casi enteramente a la mayor fecundidad (véase cuadro 1) asociada a las menores edades al casarse después del cambio.
- b. El número de matrimonios que ocurre cada año durante el cambio es considerablemente más elevado que antes o después, para estructurar las proporciones más altas de casadas. Para el caso de $n = 6$ dicho número se eleva a un valor que se sitúa un 37.5 por ciento por sobre lo normal para el tercer año del cambio. La tasa neta de reproducción no toma en cuenta estos matrimonios anormales. En realidad, supone que continuarán en forma indefinida. Esta puede ser una suposición imposible, como se

mencionó anteriormente, que puede llevar a un mayor número de mujeres que se casan de las que en realidad existen. Los nacimientos que resultan de estos matrimonios anormales, particularmente en los años siguientes, hace que la tasa neta de reproducción sobreestime en forma burda la reproductividad. R_0 alcanza su cúspide en el momento en que la comunidad alcanza las proporciones más altas de casadas, retrocediendo a la cifra correcta a medida que los nacimientos provenientes de matrimonios anormales se tornan despreciables. El grado de error depende de la rapidez del cambio.

c. Los matrimonios durante los primeros años del cambio ocurren, de manera relativa, en los grupos de edades mayores, a fin de estructurar las proporciones más elevadas de casadas. A medida que estas proporciones aumentan, se requieren cada vez menos matrimonios en los grupos de edades mayores y cada vez más en los menores (véase cuadro 5). Por lo tanto, durante los primeros años del cambio, la edad media al casarse de hecho aumenta, pero luego vuelve rápidamente hacia atrás más allá de la cifra inicial, hasta la edad media más baja que sea commensurable con las proporciones más elevadas de casadas. La fórmula de Karmel, que depende de la suma del número promedio de nacidos a los matrimonios de cada año anterior, descenderá por lo tanto, durante los primeros años del cambio y aumentará bastante durante los últimos años de éste. De allí en adelante asciende en forma casi lineal en dirección a la cifra correcta, a medida que se incluyen más y más años con las proporciones de casadas más elevadas, y por lo tanto con menores edades al casarse. Después de unos 25 años comienzan a tener lugar los matrimonios de los hijos nacidos durante el cambio. En un principio están solamente en los grupos de edades más jóvenes. La fórmula de Karmel sobrestima entonces, en forma leve, la reproductividad, acercándose gradualmente al valor correcto.

d. La fórmula de Clark-Dyne no presenta un sesgo demasiado grande por el aumento súbito de los nacimientos y da una indicación inmediata del cambio en la reproductividad. Las otras fórmulas dan una imagen totalmente falsa durante unos 20 años.

II) Descenso permanente. El razonamiento es el mismo que en el caso anterior. La fórmula de Clark-Dyne es nuevamente exacta; la fórmula de Karmel sobreestima la reproductividad en unos veinte años y subestima la tasa neta de reproducción en otro tanto.

III) Aumento temporal. El razonamiento puede deducirse del caso anterior y por lo tanto no lo daremos. Habría que anotar las siguientes características de las curvas:

a. R_0 sobreestima la cúspide;

b. Aun cuando la comunidad siempre está más que reemplazándose, R_0 pasa por una depresión con valores menores a la unidad;

Gráfico 1.a

EFFECTO SOBRE R_0 , C_0 Y K_0 , DE UN AUMENTO EN LA PROPORCION DE MUJERES CASADAS A UNA EDAD DETERMINADA, DESDE p_x HASTA P_x (cuadro 2) A LO LARGO DE 3 AÑOS

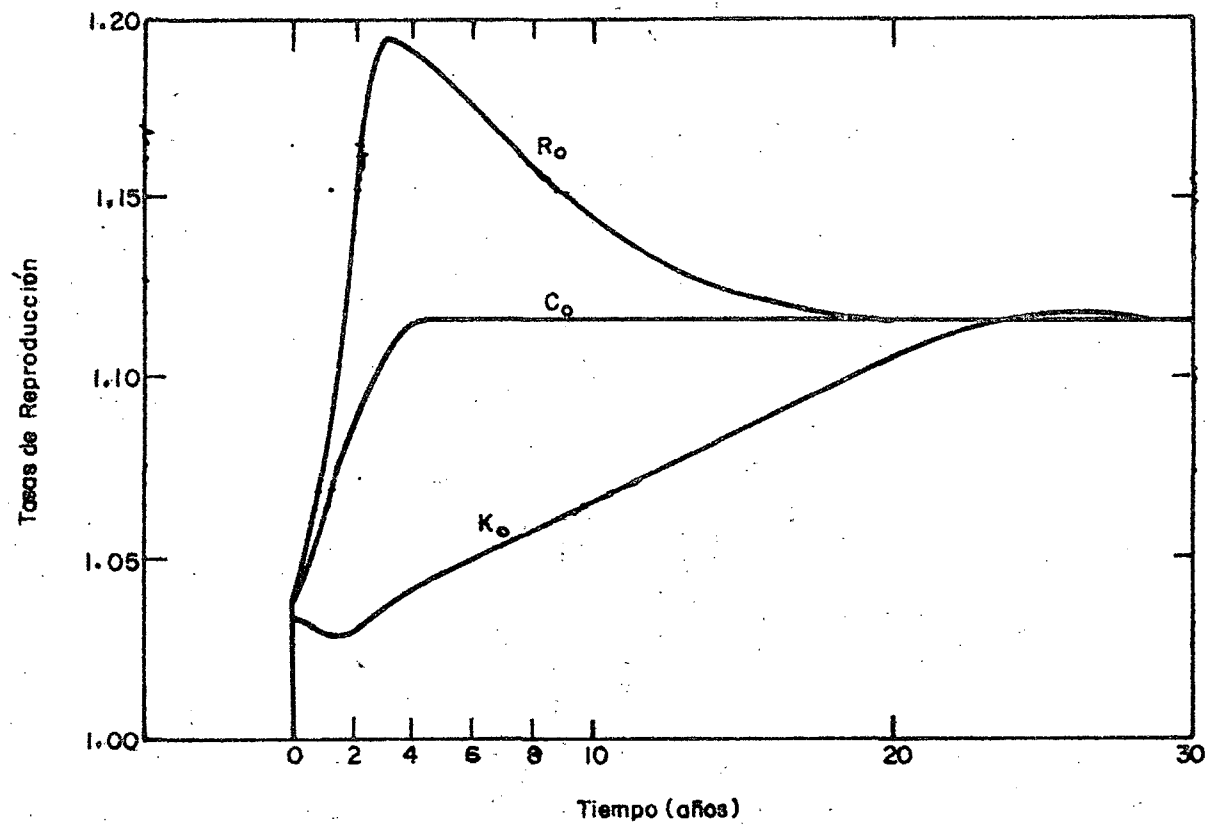


Gráfico 1.b

EFFECTO DEL GRAFICO 1.a, SOBRE R_0 , C_0 Y K_0 , A LO LARGO DE 6 AÑOS

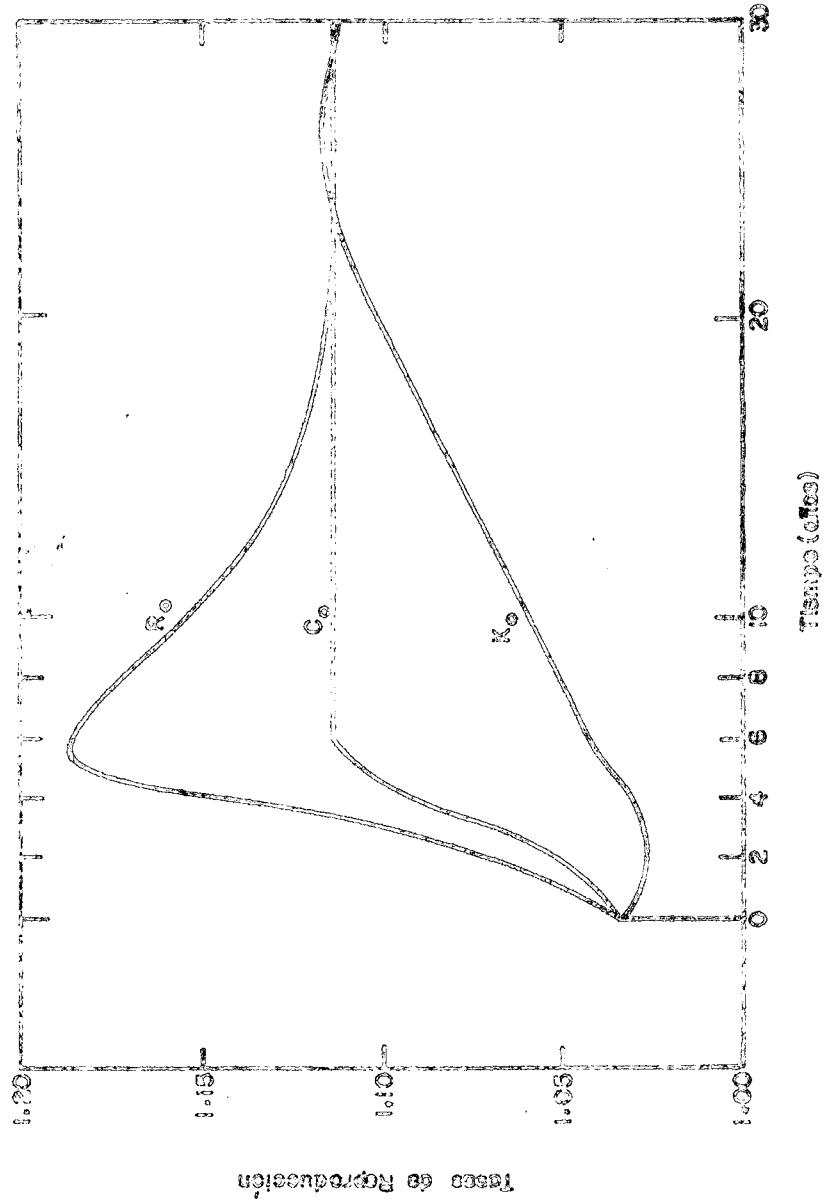


Gráfico 1.c.

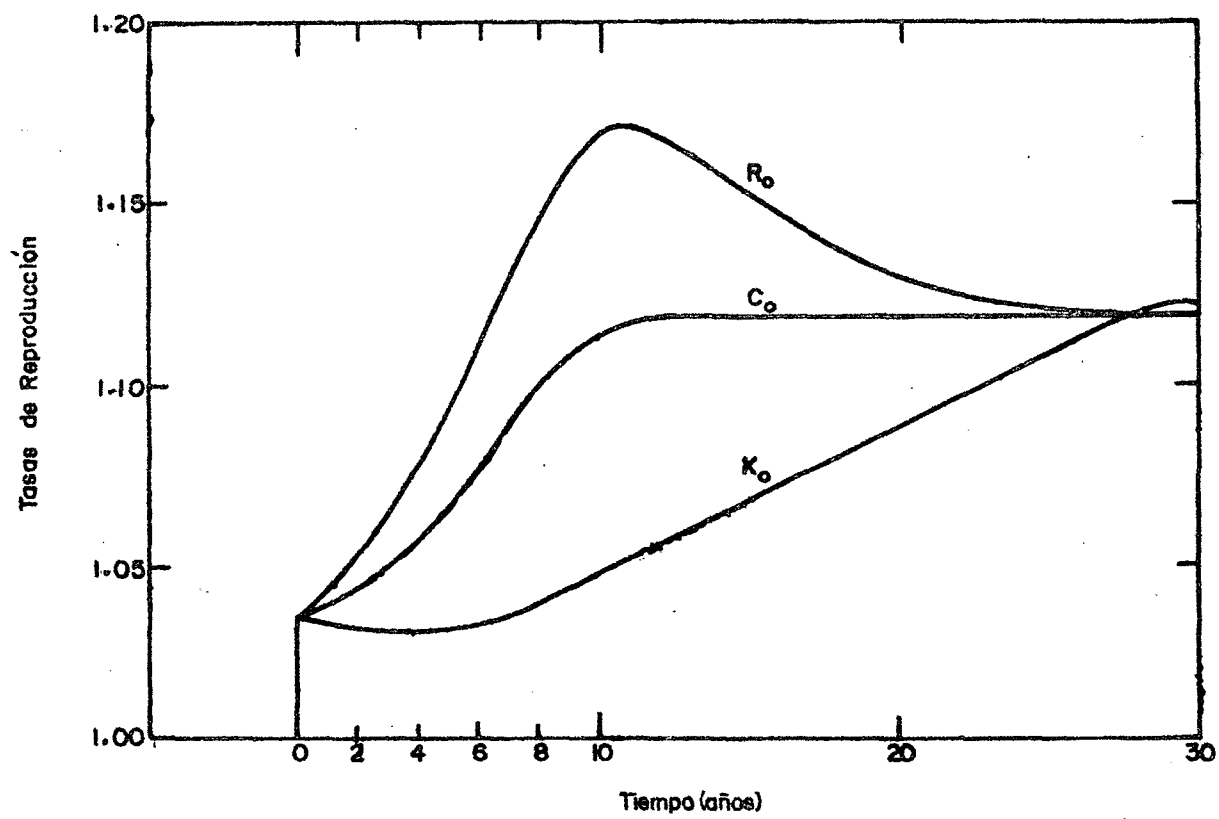
EFECTO DEL GRAFICO 1.a, SOBRE R_o , C_o Y K_o , A LO LARGO DE 12 AÑOS

Gráfico 2. a.

EFFECTO SOBRE R_0 , C_0 Y K_0 DE UN AUMENTO EN LA PROPORCION DE MUJERES CASADAS A UNA EDAD DETERMINADA, DESDE P_1 HASTA P_2 (cuadro 2), A LO LARGO DE 3 AÑOS, SEGUIDO INMEDIATAMENTE DE UN RETORNO SIMETRICO A P_1 EN 3 AÑOS MAS

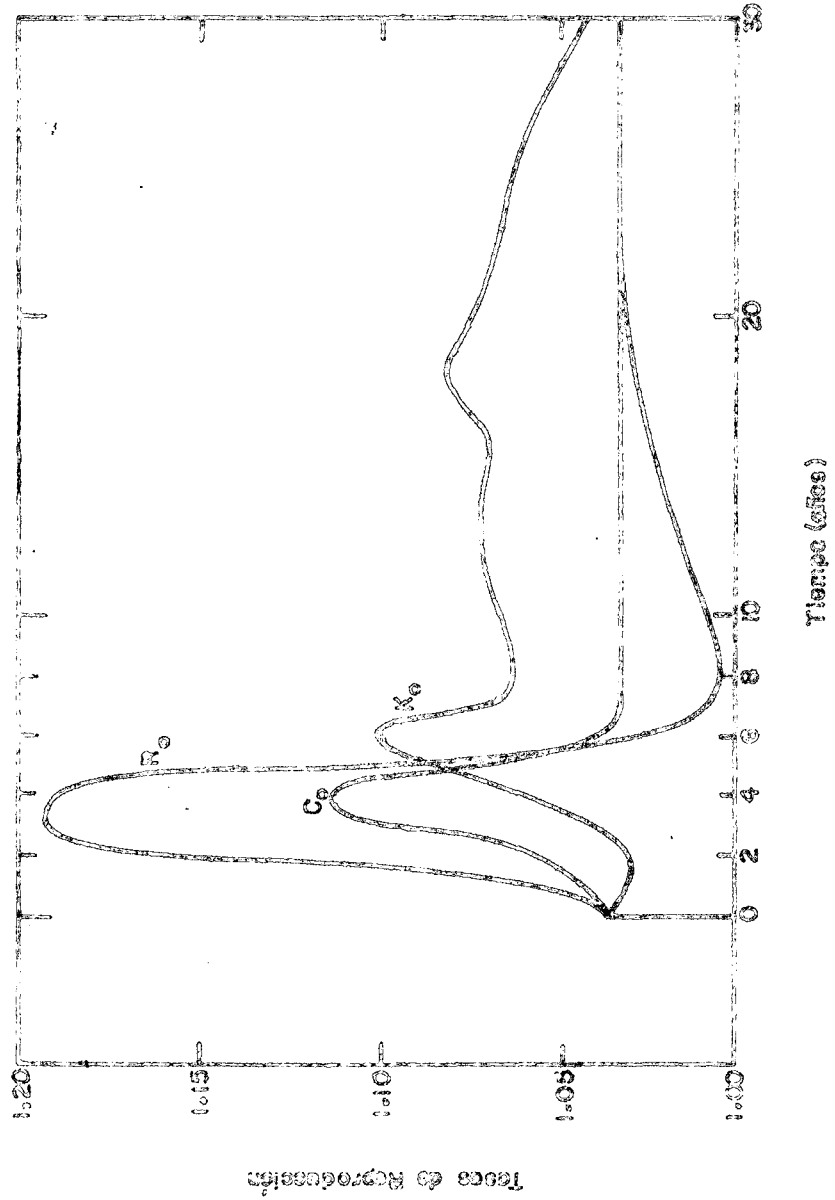


Gráfico 2.b

EFFECTO DEL GRAFICO 2.a. SOBRE R_o , C_o Y K_o , REALIZANDOSE EL INCREMENTO A LO LARGO DE 6 AÑOS, SEGUIDO POR UN RETORNO SIMETRICO A p_x EN 6 AÑOS MAS

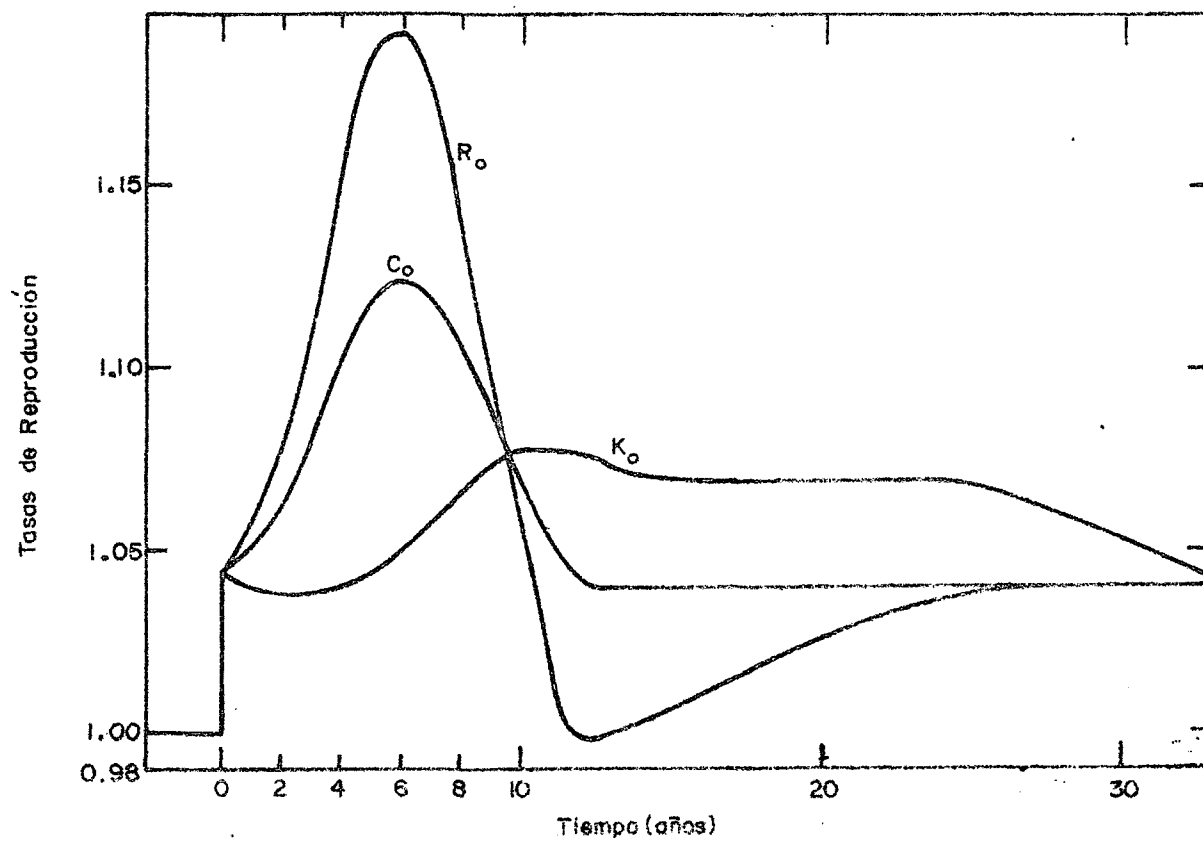


Gráfico 2. e.

EFFECTO DEL GRAFICO 2. a. SOBRE R_0 , C_0 Y K_0 , REALIZANDOSE EL INCREMENTO A LO LARGO DE 12 AÑOS, SEGUIDO POR UN RETORNO SIMETRICO A P_1 EN 12 AÑOS MAS

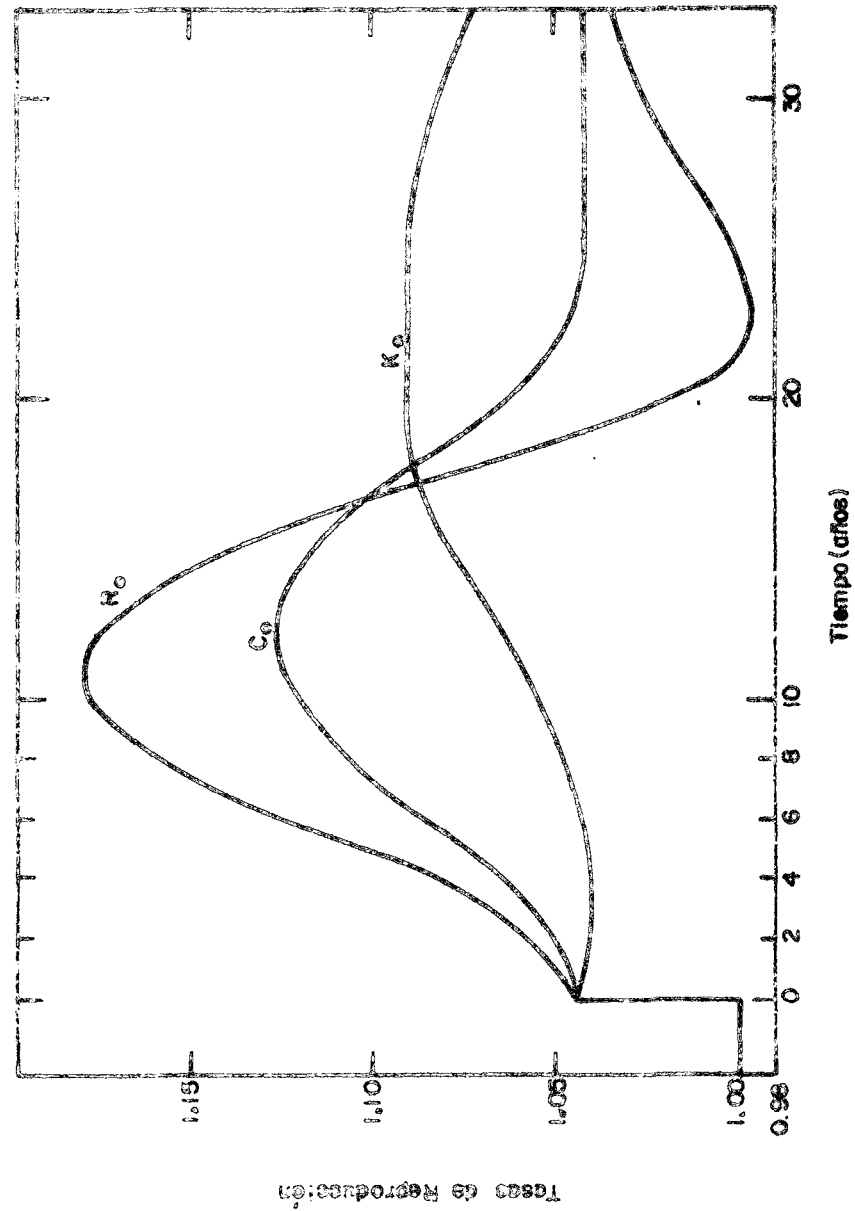


Gráfico 3. a.

EFFECTO SOBRE R_0 Y C_0 , DE UN INCREMENTO EN LA PROPORCION DE MUJERES CASADAS A UNA EDAD DETERMINADA DESDE p_x HASTA P_x (cuadro 2) A LO LARGO DE 3 AÑOS PERMANECIENDO CONSTANTE EN P_x POR 6 AÑOS Y VOLVIENDO EN FORMA SIMETRICA A p_x , A LO LARGO DE 3 AÑOS MAS

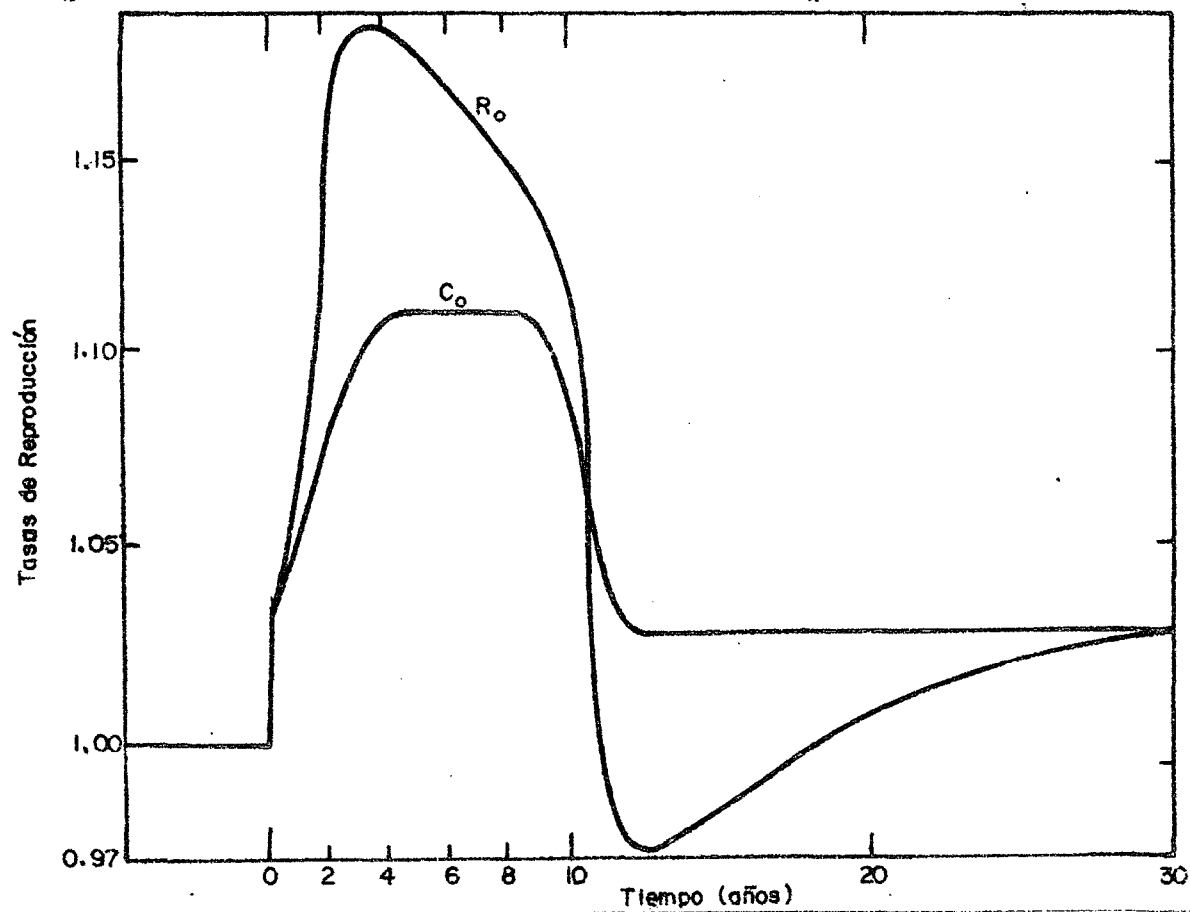
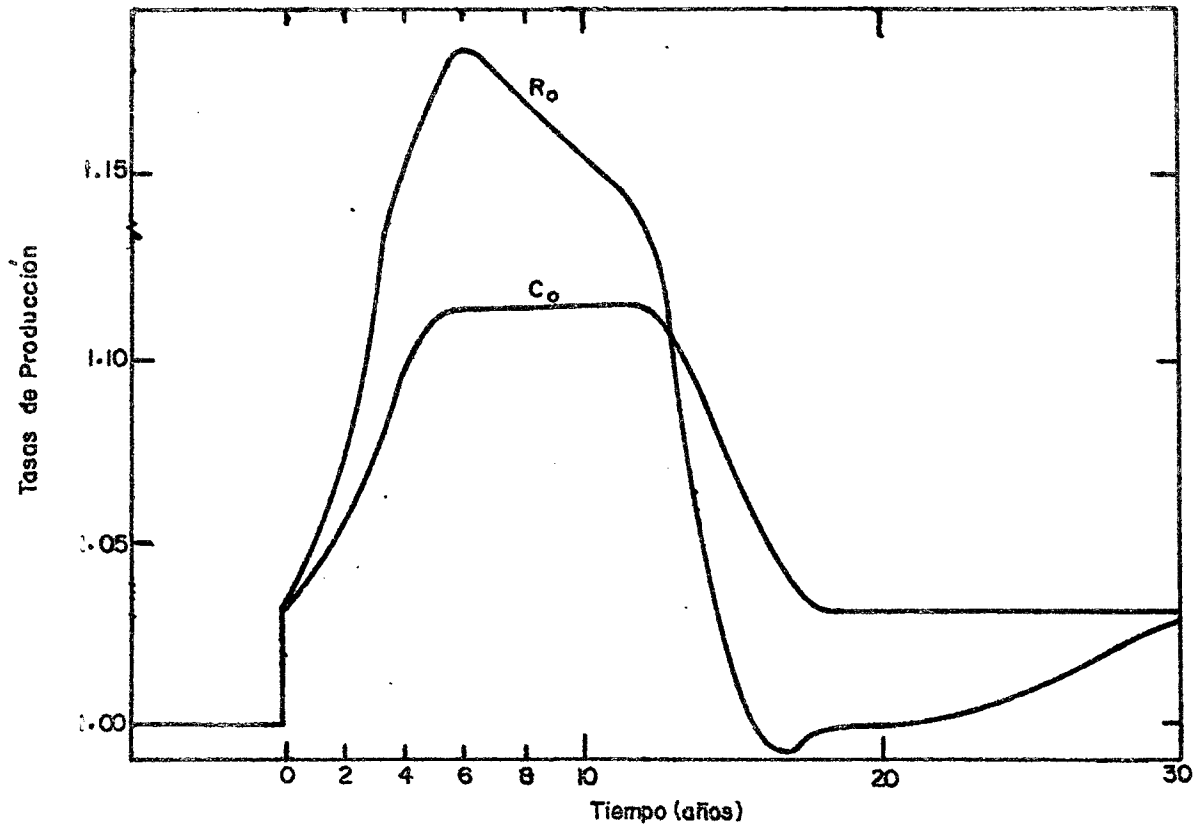


Gráfico 3. b.

EFFECTO DEL GRAFICO 3. a. SOBRE R_o Y C_o , REALIZANDOSE EL INCREMENTO A LO LARGO DE 6 AÑOS, PERMANECIENDO CONSTANTE EN p_x DURANTE 6 AÑOS, Y VOLVIENDO LUEGO SIMÉTRICAMENTE A p_x , A LO LARGO DE 6 AÑOS MAS



- c. K_0 es demasiado baja durante el cambio y se sobreestima luego durante muchos años;
- d. C_0 es satisfactoria.

IV) Descenso temporal. Aquí se aplica la misma discusión que en III) con las curvas aproximadamente invertidas.

V) Observaciones generales. De lo anterior parecería que habría que dedicar una mayor atención que la prestada hasta aquí a los movimientos en las proporciones de casadas a una edad determinada. Las variaciones en R_0 no pueden evaluarse correctamente a menos que se las considere a la luz de estos datos adicionales (véase sección 6). Este parecería ser un buen argumento en pro de la publicación de los nacimientos anuales de acuerdo a la edad de la madre al casarse y al año del matrimonio, de modo que se pueda determinar C_0 . Si se dispusiera de esta información, se podrían desprestigiar las variaciones en las proporciones de casadas, que por lo general son de índole temporal y podrían usarse valores típicos durante todo el período.

4. FORMULAS DE REPRODUCTIVIDAD MASCULINA VS. FEMENINA

Una de las objeciones más serias que puede hacerse a las fórmulas de la sección 2 no ha sido mencionada hasta aquí. En los siguientes párrafos se la considerará en cierto detalle.

Las fórmulas de la sección 2 se basan en una determinación de la tasa a la cual un sexo determinado se reemplaza a sí mismo. Por lo común se emplea el sexo femenino, por diversas razones (su período de reproducción más breve que hace que el cálculo sea más fácil; los datos necesarios se encuentran más a menudo disponibles para el sexo femenino; los nacimientos ilegítimos se pueden referir con facilidad a la madre, etc.). Naturalmente, no hay motivo para no utilizar el sexo masculino como base. Es aquí donde surge la anomalía. En la práctica, por razones que se discuten más adelante, al utilizar los dos sexos se obtienen dos valores totalmente distintos para una medida dada de la reproductividad. Si estos dos valores de p para los hombres y para las mujeres continuaran hasta surgir eventualmente condiciones estables, con el transcurso del tiempo un sexo absorbería totalmente al otro. La concepción de dos poblaciones estables, una para los hombres y otra para las mujeres, con valores diferentes de p resulta por lo tanto insostenible. La población en general, y cada sexo en particular, deben entonces aumentar en último término a la misma tasa, la cual presumiblemente se ubicaría en algún lugar entre los valores obtenidos para los sexos por separado. Desgraciadamente esto deja con frecuencia una gran amplitud (por ejemplo, véase sección 6), en cualquier lugar de la cual podría

ubicarse el valor requerido, por lo que la validez del método disminuye seriamente. Traducida en otros términos, la anomalía significa que resulta imposible plantear la hipótesis de que las tasas de fecundidad obtenidas para cada sexo puedan continuar en forma indefinida en el futuro.

Para ayudarnos a decidir en un caso particular, donde se ubica la verdadera tasa de aumento, dentro de la amplitud limitada por los valores de p para los sexos por separado, consideraremos brevemente algunas posibles razones de la diferencia entre las tasas masculinas y femeninas. R.J. Myers (10) detalla razones con algunas cifras reales.

I) Si existe un exceso temporal de mujeres (v.g., como resultado de los estragos de la guerra) en las edades reproductivas, las tasas de fecundidad por edad y la tasa neta de reproducción para las mujeres serán relativamente bajas en comparación con las de los hombres.

II) Si ya las mujeres cuentan con una buena representación, es poco probable que se aumente apreciablemente el número de nacimientos con el exceso de inmigración femenina respecto a la masculina en las edades fértiles. Esto bajaría la tasa femenina en relación a la masculina.

III) La tendencia de las mujeres mayores de 30 años a subestimar su edad y de las mujeres menores de 20 a sobreestimarla tiende a rebajar la tasa neta de reproducción femenina calculada.

IV) Debido a que, por lo común, los maridos son unos cinco años mayores que sus esposas, la disponibilidad de maridos tenderá a caer más rápidamente mientras más rápidamente aumenta la población, y, por consiguiente, la tasa femenina se hará más pequeña en relación a la tasa masculina mientras más rápido sea el aumento de la población.

Por lo general, se ha encontrado que las tasas masculinas son apreciablemente más elevadas que las femeninas, por lo que, en vista de la discusión anterior, podría suceder que una parte del debate pesimista de la literatura demográfica, provocada por la caída de la tasa neta de reproducción femenina por debajo de la unidad, carezca de buenos fundamentos.

La grave dificultad teórica de las tasas masculinas vs las femeninas que se discute en esta sección, y las dificultades prácticas de contar con una tasa intrínseca de aumento de la que sólo se sabe que está situada entre dos límites (quizá) muy separados, justifican ampliamente una investigación adicional considerable sobre la posibilidad de encontrar un índice único de la reproductividad. Se discutirá a continuación un índice que puede calcularse con facilidad, para el cual se dispone fácilmente de datos, que teóricamente es único y que está ubicado entre las tasas masculinas y femeninas.

5. TASA CONJUNTA DE AUMENTO

5.1 Objetivo

El objetivo de esta sección consiste en delinear las propiedades de un Índice de la reproductividad con todas las ventajas de los índices discutidos anteriormente y que, no obstante, no presenta la mayor debilidad de estos: la anomalía descrita en la sección 4.

5.2 Los datos básicos

Los datos básicos que se requieren para la determinación de este índice consisten en la probabilidad al nacimiento de que un hombre tenga una hija entre las edades x y $x+dx$ (denominado con $\phi(x) dx$), y la probabilidad al nacimiento de que una mujer de a luz un hijo entre las edades y e $y+dy$ ($\psi(y) dy$). En casi todos los países los nacimientos masculinos y femeninos anuales se publican según la edad de la madre y , para la mayoría de los países, también de acuerdo a la edad del padre. Estos datos son de índole tan sencilla que si no se publican pueden obtenerse con facilidad de los registros de nacimientos. Las funciones netas de fecundidad $\phi(x)$ y $\psi(y)$ se obtienen combinando estos datos de fecundidad con la mortalidad. En los párrafos siguientes se desarrollará la teoría, la cual, en algunas de sus partes, se asemeja a la aplicada por Rhodes (6) para R_0 y p , y el resultado obtenido será resumido en el párrafo 5.13. Los lectores que sólo se interesen por los resultados pueden leer de inmediato ese párrafo.

5.3 La teoría

Los nacimientos femeninos $F(t)$ y los nacimientos masculinos $M(t)$ en el tiempo t , están dados por:

$$F(t) = \int_0^{\infty} M(t-x) \phi(x) dx, \quad y \quad (13)$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} F(t-y) \psi(y) dy \quad (14)$$

Por consiguiente, tenemos que:

$$F(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(t-x-y) \vartheta(x) \xi(y) dx dy \quad (15)$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} M(t-x-y) \vartheta(x) \xi(y) dx dy \quad (16)$$

y el total de nacimientos :

$$B(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(t-x-y) \vartheta(x) \xi(y) dx dy \quad (17)$$

Las tres últimas ecuaciones son de la misma forma y por consiguiente también lo sería su solución. Podemos apreciar de inmediato que la ecuación (17) sería satisfecha por una función de la forma :

$$B(t) = \sum_n B_n e^{s_n t}$$

Sustituyendo en (17) encontramos que la ecuación es satisfecha por la función anterior, si los valores de s están dados por :

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)s} \vartheta(x) \xi(y) dx dy = 1 \quad (18)$$

Esta ecuación (18) se obtiene resolviendo (15), (16) o (17) y los valores de s obtenidos se aplican a los nacimientos masculinos, femeninos y totales.

5.4 Esta ecuación tiene una única solución real; si suponemos que s es real y denominamos el lado izquierdo de (18) por f , tenemos :

$$\frac{df}{ds} = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x+y) e^{-(x+y)s} \vartheta(x) \xi(y) dx dy .$$

Ahora bien, puesto que $\vartheta(x)$, $\xi(y)$, $e^{-(x+y)s}$, y , $x+y$ son mayores que, o iguales a cero, df/ds tiene que ser siempre negativa para todos los valores de t . Por consiguiente $f=1$ pueda tener solamente una solución real σ .

5.5. Si $\sigma = 0$, entonces :

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta(x) \xi(y) dx dy = 1$$

Si $\sigma > 0$, entonces :

$$e^{-\sigma(x+y)} < 1,$$

y por consiguiente, a partir de (18),

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta(x) \xi(y) dx dy > 1$$

En forma análoga,

si $\sigma < 0$,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta(x) \xi(y) dx dy < 1$$

Por lo tanto $\sigma \neq 0$, según

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta(x) \xi(y) dx dy \neq 1$$

Esta última expresión, que será denotada por S_0 es similar a la tasa neta de reproducción y puede utilizarse como una medida de la reproductividad, independiente del sexo y se denominará "tasa conjunta de reproducción". Es una tasa de crecimiento que utiliza como unidad de tiempo la "generación" masculina y femenina total. Por lo tanto, no puede compararse directamente con la tasa neta de reproducción o con otras tasas, por lo que no se la recomienda.

5.6 Si $s = u + iv$ es una raíz compleja de (18), al sustituir y poner en ecuación las partes reales e imaginarias

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)u} \cos \{(x+y)v\} \theta(x) \xi(y) dx dy = 1$$

$$y \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)u} \sin \{(x+y)v\} \theta(x) \xi(y) dx dy = 0$$

Por lo tanto $u - iv$ es también una raíz. Puesto que $\cos(x+y)v < 1$, al comparar la primera de estas ecuaciones con la solución real de (18) tenemos

$$e^{-(x+y)u} > e^{-(x+y)\sigma}$$

Por lo tanto u , la parte real de cualquier raíz imaginaria, es menor que la raíz real σ .

Combinando las raíces complejas conjugadas podemos expresar la solución de (17) de la siguiente forma:

$$B(t) = B_0 e^{\sigma t} + \sum_n e^{u_n t} (\alpha_n \text{ sen } v_n t + \beta_n \text{ cos } v_n t),$$

que tiende hacia $B_0 e^{\sigma t}$ a medida que t se hace mayor ya que $u_n < \sigma$.

Hemos probado así que los nacimientos totales de una comunidad sujeta a la fecundidad neta de 5.2., aumenta todos en último término, a una tasa anual de σ . Para los nacimientos masculinos y femeninos podemos probar lo mismo. σ se denominará la "tasa conjunta de crecimiento natural".

5.7 σ , dada a partir de (18) por:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma x} \vartheta(x) dx \int_0^\infty e^{-\sigma y} \xi(y) dy = 1, \tag{19}$$

puede obtenerse por dos métodos para determinar la tasa intrínseca de crecimiento natural, que corresponden a Lotka (4) y Wicksell (5).

Denotando $\int_0^\infty e^{-\sigma x} \vartheta(x) dx$ por z , tenemos que $dz/d\sigma = Cz$, donde:

$$C = \frac{\int_0^\infty x e^{-\sigma x} \vartheta(x) dx}{\int_0^\infty e^{-\sigma x} \vartheta(x) dx} \tag{20}$$

$$= \frac{M_1 - \sigma M_2 + \frac{\sigma^2}{2} M_3 - \dots}{M_0 - \sigma M_1 + \frac{\sigma^2}{2} M_2 - \dots}, \quad \text{donde}$$

$$M_n = \int_0^\infty x^n \vartheta(x) dx$$

$$= a + b\sigma + c\sigma^2 + \dots, \quad \text{donde}$$

$$a = \frac{M_1}{M_0}, \quad b = \frac{M_2}{M_0} - \frac{M_0}{M_0}, \quad \text{etc.}$$

Lotka demostró que esta serie converge muy rápidamente, y que sólo se requiere tomar en cuenta los dos primeros términos. Por consiguiente, integrando, y determinando la constante introducida, al sustituir en la ecuación diferencial, tenemos :

$$Z = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \vartheta(x) dx = M_0 e^{-a\sigma - \frac{1}{2}b\sigma^2} \quad (21)$$

Podemos obtener una expresión semejante para $\int_0^{\infty} e^{-\sigma y} \xi(y) dy$, y, llamando N_0, α, β , etc. a las funciones de $\xi(y), y, M_0, a, b$, etc., a las de $\vartheta(x)$, podemos obtener, la siguiente ecuación para σ sustituyendo en (19)

$$\frac{1}{2}(b+\beta)\sigma^2 + (a+\alpha)\sigma - \log_e M_0 N_0 = 0 \quad (22)$$

En forma alternativa podemos utilizar, siguiendo a Wickseil, una curva de Pearson de Tipo III para representar $\vartheta(x)$, del siguiente modo :

$$\vartheta(x) = M_0 \frac{t^u}{r(u)} x^{u-1} e^{-tx},$$

donde :

$$t = \frac{M_0 M_1}{M_0 M_2 - M_1^2}, \quad y \quad u = \frac{M_1^2}{M_0 M_2 - M_1^2}$$

Si la curva de Tipo III, que representa a $\xi(y)$ incluye las constantes \underline{v} y \underline{w} correspondientes a \underline{t} y \underline{u} para $\vartheta(x)$, al sustituir en (19) e integrar, tenemos :

$$\frac{M_0}{(1 + \frac{\sigma}{t})^u} \frac{N_0}{(1 + \frac{\sigma}{v})^w} = 1 \quad (23)$$

En la práctica (23) da los mismos resultados que (22), pero (22) es más fácil de resolver en este caso.

5.8 El siguiente método puede utilizarse para determinar B_m habiendo obtenido un valor de s , digamos s_m , a partir de la ecuación (18) o de una forma más exacta de la ecuación (22).

Llamando l y L los límites del período reproductivo y sustituyendo en $B(t)$ tenemos:

$$\int_1^{L+1} B(t) e^{-s_n t} dt = \sum_{n \neq m} \frac{B_n}{s_n - s_m} \left[e^{(s_n - s_m)(L+1)} - e^{(s_n - s_m)l} \right] + B_m L \quad (24)$$

También:

$$\begin{aligned} \int_{21}^{L+1} \left[\int_1^{t-1} B(t-x) \vartheta(x) dx \right] e^{-s_n t} dt &= \int_1^L \left[\sum B_n e^{-s_n x} \vartheta(x) \int_{x+1}^{L+1} e^{(s_n - s_m)t} dt \right] dx = \\ &= \sum_{n \neq m} \frac{B_n}{s_n - s_m} \left[e^{(s_n - s_m)(L+1)} \int_1^L e^{-s_n x} \vartheta(x) dx - e^{(s_n - s_m)l} \int_1^L e^{-s_n x} \vartheta(x) dx \right] + \\ &+ B_m L \int_1^L e^{-s_m x} \vartheta(x) dx - B_m \int_1^L x e^{-s_m x} \vartheta(x) dx \end{aligned} \quad (25)$$

A partir de (24) y (25)

$$\begin{aligned} \frac{\int_{21}^{L+1} \left[\int_1^{t-1} B(t-x) \vartheta(x) dx \right] e^{-s_n t} dt}{\int_1^L e^{-s_n x} \vartheta(x) dx} &= \frac{\int_1^{L+1} B(t) e^{-s_n t} dt + B_m \int_1^L x e^{-s_m x} \vartheta(x) dx}{\int_1^L e^{-s_m x} \vartheta(x) dx} \\ &= \sum_{n \neq m} \frac{B_n e^{(s_n - s_m)(L+1)}}{s_n - s_m} \left[\frac{\int_1^L e^{-s_n x} \vartheta(x) dx}{\int_1^L e^{-s_m x} \vartheta(x) dx} - 1 \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Haciendo uso nuevamente de una curva Pearson de Tipo III para representar a $\vartheta(x)$ podemos poner en la ecuación (26)

$$\frac{\int_1^L e^{-s_n x} \vartheta(x) dx}{\int_1^L e^{-s_m x} \vartheta(x) dx} - 1 = \left(\frac{t + s_n}{t + s_m} \right)^{-u} - 1 = \left(1 + \frac{s_n - s_m}{t + s_m} \right)^{-u} - 1$$

$$= -u \left(\frac{s_n - s_m}{t + s_m} \right) + \frac{u(u+1)}{2} \left(\frac{s_n - s_m}{t + s_m} \right)^2 - \dots \quad (27)$$

Si sustituimos sucesivamente en la ecuación (26) modificada anteriormente,

$$x \vartheta(x), \quad x^2 \vartheta(x), \dots,$$

en vez de $\vartheta(x)$ obtenemos una serie de ecuaciones de las cuales se conocen todos los términos izquierdos (excepto B_m) y de las que se pueden eliminar los términos desconocidos de la derecha. Llamando $I_1 B_m$, $I_2 B_m$, etc. a los términos de la izquierda y eliminando las incógnitas, tenemos:

$$\begin{bmatrix} I_1 B_m, & u, & \frac{u(u+1)}{2}, & \dots \\ I_2 B_m, & u+1, & \frac{(u+1)(u+2)}{2}, & \dots \\ I_3 B_m, & u+2, & \frac{(u+2)(u+3)}{2}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

El determinante (28), con tantos términos como sea necesario, puede utilizarse para determinar B_m .

5.9 A medida que $t \rightarrow \infty$ la razón $M(t)/F(t)$, entre los nacimientos masculinos y femeninos tiende hacia

$$M_0 e^{\sigma t} \div F_0 e^{\sigma t} = M_0 / F_0, \quad \text{que es constante. */}$$

*/ Obsérvese que M_0 en la sección 5.9 es diferente de M_0 en la sección 5.7. - Eds. J.I.A.

Si la razón entre los nacimientos masculinos y femeninos hasta el tiempo t ha sido constante e igual a X , ampliando el determinante (28) para obtener M_0 y F_0 puede verse, mediante el examen de la forma IB_0 , que la razón M_0/F_0 debe ser igual a X . Si la relación de masculinidad no ha sido constante en el pasado, M_0/F_0 es un promedio ponderado de las relaciones pasadas. Por consiguiente, la última distribución por sexo y edad de la población es determinada por la tasa conjunta de crecimiento natural, la mortalidad masculina y femenina y las relaciones de masculinidad de los nacidos en el pasado. Esta distribución final por sexo y edad es:

$$f(x) = l_x^{(f)} e^{-\delta x}, \quad y \quad m(x) = X l_x^{(m)} e^{-\delta x}. \quad (29)$$

5.10 Si suponemos que la relación de masculinidad al nacimiento es constante e igual a X , independientemente del sexo y edad del progenitor considerado como referencia, entonces las tasas intrínsecas de crecimiento natural para los hombres p_m y las mujeres p_f están dadas por:

$$\int_0^{\infty} e^{-p_m x} \vartheta(x) X dx = 1, \quad y \quad \int_0^{\infty} e^{-p_f y} \xi(y) X^{-1} dy = 1$$

Por consiguiente, a partir de (19) tenemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta x} \vartheta(x) dx \int_0^{\infty} e^{-\delta y} \xi(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-p_m x} \vartheta(x) dx \int_0^{\infty} e^{-p_f y} \xi(y) dy \quad (30)$$

Ahora, si

$$p_m \geq \delta, \quad \text{entonces} \quad e^{-p_m x} \leq e^{-\delta x}$$

Es decir,

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta y} \xi(y) dy \leq \int_0^{\infty} e^{-p_f y} \xi(y) dy.$$

Esto es,

$$e^{-\delta y} \leq e^{-p_f y} \quad \delta > p_f$$

Así, si

$$p_m \geq \delta, \quad p_m \geq \delta > p_f$$

En forma análoga, si

$$P_f \geq \sigma, \quad P_f \geq \sigma \geq P_m$$

Por lo tanto, si la relación de masculinidad al nacimiento es constante independientemente del sexo o edad del progenitor tomado como referencia, σ debe estar situada entre P_m y P_f .

5.11 Si continuamos con el supuesto de que la relación de masculinidad al nacimiento es constante para progenitores de cualquier edad o sexo, podemos encontrar, aproximadamente, la relación entre S_0 y las tasas netas de reproducción para hombres y mujeres R_0^m y R_0^f , respectivamente, así como una relación aproximada entre σ y P_m y P_f .

Puesto que :

$$S_0 = \int_0^{\infty} \vartheta(x) dx \int_0^{\infty} \xi(y) dy, \quad R_0^m = \int_0^{\infty} \vartheta(x) X dx, \quad R_0^f = \int_0^{\infty} \xi(y) X^{-1} dy,$$

sobre la base de los supuestos anteriores, tenemos :

$$S_0 = R_0^m \cdot R_0^f \quad (31)$$

Si en lugar de las integrales de la ecuación (30) colocamos la fórmula exponencial de Lotka (21), poniendo en ecuación las potencias de \underline{e} , obtenemos :

$$(a + \alpha)\sigma + \frac{1}{2}(b + \beta)\sigma^2 = a P_m + \frac{1}{2}b P_m^2 + \alpha P_f + \frac{1}{2}\beta P_f^2.$$

Resolviendo para σ :

$$\sigma = \left[-(a + \alpha) \pm \left\{ (a + \alpha)^2 + 2(b + \beta)(a P_m + \alpha P_f + \frac{1}{2}b P_m^2 + \frac{1}{2}\beta P_f^2) \right\}^{1/2} \right] (b + \beta)^{-1}$$

Pero según, sobre nuestro supuesto, σ debe estar ubicada entre P_f y P_m . Por consiguiente, si $P_f = P_m = 0$, $\sigma = 0$, sustituyendo estos valores en la expresión anterior se ve que entre las alternativas para σ debemos escoger la de signo positivo.

Expandiendo el binomio de Newton y simplificando m tenemos :

$$\sigma = \frac{a + p_m + \alpha p_f}{a + \alpha}, \text{ aproximadamente} \quad (32)$$

Esta sencilla fórmula reproduce los valores de σ , con dos decimales, para Australia 1933-34 calculados a partir de la fórmula (22) y dados en la sección 6,

5.12 Hay que recalcar que las medidas S_0 y σ no dependen del supuesto del índice de masculinidad al nacimiento constante que se planteó en los párrafos anteriores. Una de sus funciones es tomar en cuenta las variaciones en esta relación. La utilidad de S_0 y σ para estructurar una teoría completa se perdería si definiésemos sencillamente S_0 como el lado derecho de la ecuación (31). Las relaciones (31) y (32), aunque son fórmulas prácticas de utilidad, están limitadas a causa de este supuesto.

5.13 Resumen

Dada una población sujeta a las funciones netas de fecundidad $\theta(x)$ y $\xi(y)$ hemos demostrado, entre otras cosas, que :

- I) Los nacimientos masculinos, femeninos y totales aumentan todos en último término a la "tasa conjunta de crecimiento natural" dada por la ecuación (19) o en forma aproximada por las ecuaciones (22) y (23);
- II) S_0 la "tasa conjunta de reproducción" definida en el párrafo 5.5, es una tasa de reproducción única correspondiente a σ ;
- III) $\sigma \gtrless 0$ según $S \gtrless 1$;
- IV) la distribución final por edad y por sexo de la población está dada por (29);
- V) si el índice de masculinidad al nacimiento ha sido constante en el pasado σ se ubica entre p_f y p_m ;
- VI) sobre la base del mismo supuesto, S_0 y σ se relacionan con R_0^m , R_0^f , p_m y p_f , mediante las relaciones aproximadas (31) y (32).

En el cuadro 7 se muestra el cálculo de S_0 y σ .

Esta sugerencia podría aplicarse a las fórmulas de Karmel o de Clark-Dyne para evitar en ellas, la anomalía hombres vs. mujeres.

Cuadro 7.
CALCULO DE S_0 Y σ USANDO LA FECUNDIDAD DE AUSTRALIA EN 1944 Y EL CENSO DE MORTALIDAD DE 1933

Edad (x)	P a d r e					M a d r e				
	$1\ 000 \times \frac{l_x}{l_0}$	Probabilidad de tener una hija	Nacimientos femeninos $5 \times (2) \times (3)$	$x(4)$	$x^2(4)$	$1\ 000 \times \frac{l_x}{l_0}$	Probabilidad de tener un hijo	Nacimientos masculinos $5 \times (7) \times (8)$	$x(9)$	$x^2(9)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Total...			1 122.4	37 135	1 289 871			1 228.8	35 572	1 075 924
- 19...	922.40	.00125	5.7	101	1 760	937.04	.01196	56.0	981	17 161
20 - 24...	912.72	.02785	127.1	2 859	64 331	928.88	.06507	302.2	6 800	152.989
25 - 29...	901.46	.06573	296.3	8 147	224 032	917.89	.08072	370.5	10 188	280 170
30 - 34...	889.42	.06543	291.0	9 456	307 325	905.27	.06298	285.1	9 265	301 103
35 - 39...	874.48	.04908	214.6	8 047	301 772	890.31	.03663	163.0	6 114	229 284
40 - 44...	854.96	.02705	115.6	4 915	208 879	872.68	.01123	49.0	2 082	88 491
45 - 49...	828.03	.01146	47.4	2 253	107 022	850.68	.00070	3.0	142	6 726
50 - 54...	789.88	.00408	16.1	846	44 436
55 - 59...	734.76	.00156	5.7	330	18 998
60 -	659.05	.00088	2.9	181	11 316

Corrección de M_0 por nacimientos ilegítimos, $M_0 = 1\ 122.4 \times 1.04532 = 1\ 173.3$, $N_0 = 1\ 228.8$, $M_1/M_0 = 33\ 084$, $M_2/M_0 = 1149\ 154$, $\log_e M_0 = .159837$,

$N_1/N_0 = 28\ 948$, $N_2/N_0 = 875\ 593$, $\log_e N_0 = .206033$. La ecuación (22) es $-46\ 104.5\sigma^2 + 62\ 032\sigma - .365870 = 0$

Por lo tanto $\sigma = .592\%$ p.a. y $S_0 = M_0 N_0 = 1\ 442$.

6. APLICACION A LOS DATOS AUSTRALIANOS

6.1 Indice de reemplazo J_3

El cuadro 8 da valores de J_3 calculados a partir de la población femenina australiana estimada para 1939 y con mortalidad AF^{33} . Las cifras dan una indicación aproximada, pero clara, de la tendencia descendente de la fecundidad durante el presente siglo.

Cuadro 8.

INDICE DE REEMPLAZO J_3 - AUSTRALIA

Edad de las "hijas"	Edad de las "madres"	Razón entre las mujeres en (1) y en (2) junio 1939	Razón en AF	$J_3 = (3) \cdot (4)$	Año promedio de nacimiento
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0 - 4	20 - 44	.20844	.21296	979	1937
5 - 9	25 - 49	.21412	.21343	1 003	1932
10 - 14	30 - 54	.26487	.21717	1 220	1927
15 - 19	35 - 59	.29721	.22239	1 336	1922
20 - 24	40 - 64	.31712	.22944	1 382	1917
25 - 29	45 - 69	.35975	.24017	1 498	1912
30 - 34	50 - 74	.39213	.25811	1 519	1907
35 - 39	55 - 79	.46048	.28895	1 594	1902

6.2 Tasa bruta de crecimiento

Los valores de este índice que figuran en el cuadro 10 demuestran que, si bien es una medida de la tasa actual de crecimiento, no tiene ninguna utilidad como medida de la reproductividad o de la tasa final de crecimiento. Durante el período considerado, su magnitud no es del mismo orden que las medidas de la reproductividad y sus variaciones en el tiempo son relativamente pequeñas. Estas discrepancias son principalmente resultado del hecho que esta medida se basa en la distribución actual por edades, la que está aumentada

en las edades reproductivas por la fecundidad más alta de las décadas anteriores (véase cuadro 8) y, por consiguiente, da una tasa bruta de natalidad elevada. A medida que esta tasa bruta de natalidad, disminuye la tasa bruta de mortalidad no disminuye en igual forma a causa del envejecimiento de la población.

6.3 Tasas netas de reproducción y tasas de crecimiento

I) Tasas masculinas vs. femeninas. Las tasas masculinas y femeninas son bastante similares y por consiguiente cualquiera de las dos puede ser utilizada para medir la tendencia de la reproductividad en el tiempo. Respecto a la magnitud real habría que considerar las ventajas relativas de ambos. En ausencia de información que favorezca a uno en particular, la tasa conjunta de crecimiento natural resulta muy recomendable.

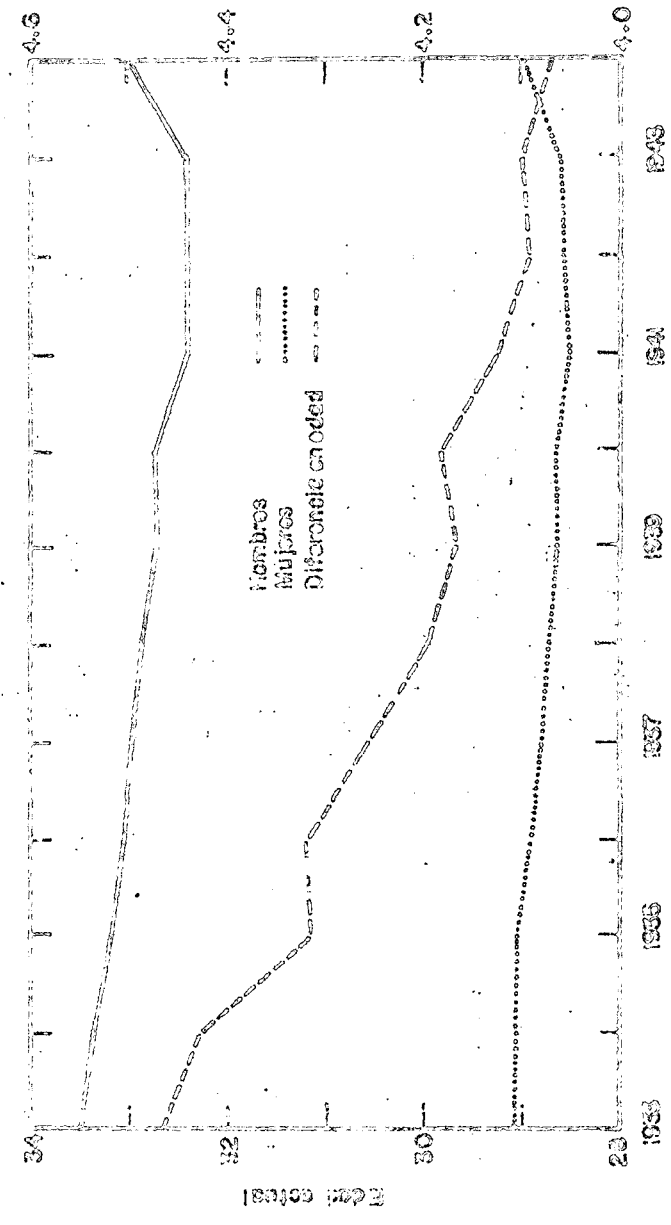
II) Tasas de reproducción vs tasas de crecimiento. Las tasas de reproducción para hombres y mujeres se mueven paralelamente a lo largo del período de 12 años; aun así, las tasas de crecimiento natural convergen con el tiempo. Esta convergencia es un resultado directo de la convergencia que aparece en el gráfico 4 entre las edades medias de las secuencias de reproductividad neta de hombres y mujeres. La constante disminución en ambas medias a lo largo de 12 años hace que las tasas de crecimiento natural se eleven en forma más pronunciada que las tasas de reproducción correspondientes. Con estas dos correcciones, la tasa de crecimiento natural es una medida más eficiente de la reproductividad que la correspondiente tasa de reproducción.

III) Valores negativos. Los valores negativos de p_f o las tasas de crecimiento natural, obtenidas durante la década de 1930 para el sexo femenino fueron la causa de muchas profecías sombrías. La tasa masculina, que presenta iguales ventajas como medida de la reproductividad de la población, es negativa solamente durante un breve período de 2 años. Esto proporcionaría una base inadecuada para las profecías tenebrosas. Además, puede perfectamente suceder que la tasa de reproducción masculina para estos 2 años sea demasiado baja en lugar de demasiado alta y, si se dispusiera de datos completos, quizá se podría haber demostrado que la población más que se reemplazó a sí misma durante toda la década de 1930. Esta posibilidad es justificada por el cuadro 9 que muestra la proporción de la población femenina en un grupo de edades determinado que se casa en un año específico. Podríamos deducir de este cuadro que la proporción de mujeres casadas a una edad determinada baja justamente después de mediados de la década de 1920 hasta comienzos de la década de 1930. Los resultados de la sección 3 muestran que, en estas circunstancias, la tasa neta de reproducción (y la correspondiente tasa intrínseca de crecimiento natural) subestimaría la reproductividad durante algunos años después del comienzo de la década de 1930. Es probable que los valores negativos obtenidos durante la década de 1930 para p_f no indiquen que la población dejó de reemplazarse a sí misma, sino que son el resultado directo de fluctuaciones en los casamientos en una comunidad que siempre se está más que reemplazando a sí misma.

Gráfico N°4

EDAD PROMEDIO DE LA REPRODUCTIVIDAD NETA (HOMBRES Y MUJERES) Y DIFERENCIA EN CIUDADES

AUSTRALIA 1933-44



Cuadro 9.

PROPORCIÓN DE MUJERES DE UN GRUPO DE EDAD DETERMINADO QUE SE CASA EN UN AÑO ESPECÍFICO
AUSTRALIA

Grupos de edad	A ñ o										
	1927	1929	1931	1932	1934	1936	1938	1940	1942	1943	1944
- 19	.0283	.0270	.0242	.0251	.0256	.0275	.0276	.0337	.0407	.0359	.0381
20 - 24	.0842	.0778	.0618	.0674	.0773	.0859	.0909	.1186	.1345	.1031	.1035
25 - 29	.0465	.0427	.0331	.0396	.0475	.0536	.0543	.0643	.0588	.0427	.0410
30 - 34	.0178	.0163	.0120	.0139	.0177	.0205	.0212	.0249	.0247	.0187	.0181
35 - 39	.0097	.0088	.0063	.0067	.0083	.0094	.0103	.0123	.0132	.0105	.0107
40 - 44	.0058	.0052	.0039	.0042	.0044	.0051	.0056	.0066	.0080	.0069	.0068

IV) Tendencia ascendente de la fecundidad. Después de mediados de la década de 1930, la tendencia ascendente uniforme en los valores del cuadro 9 parece indicar un aumento permanente en la proporción de mujeres que se casan a una edad determinada, hasta el año 1942, después del cual las proporciones parecen ser constantes. Los resultados de la sección 3 sugieren que, si bien la reproductividad ha aumentado, estas medidas la sobrestiman considerablemente, y, suponiendo que permanece constante, cabe esperar que estas medidas bajarán gradualmente a valores menores.

V) Posibles movimientos futuros. Es posible que las "proporciones de mujeres casadas a una edad determinada" vuelvan a sus valores de antes de la guerra. Si esto, y si la fecundidad permanece constante, en la sección 3 se prueba que R_0 caerá a un valor bajo indebido, e incluso si la población más que se reemplaza a sí misma, se pueden obtener valores negativos de p (o valores de $R_0 < 1$). Debe tenerse presente que estos valores indican un índice defectuoso, y la subestimación en este momento debe equilibrarse con sobrestimación de algunos años antes.

6.4 Índice de reemplazo J_2

Los valores de J_2 en el cuadro 10 indican el grado en que este sencillo índice puede utilizarse para medir la reproductividad. A lo largo de los 12 años, en que se han producido grandes variaciones en la reproductividad, J_2 se mueve en forma paralela a R_0^f dentro de una amplitud de error de menos del 2 por ciento. En los primeros años, J_2 sobrepasa a R_0^f en poco más del 4 por ciento y a comienzos de la década de 1940 aproximadamente en un 4% por ciento. La variación de ambas curvas respecto a la línea paralela sigue estrechamente el cambio en la edad media de reproductividad neta de las mujeres (gráfico 5). Las cifras confirman la relación dada en el párrafo 1.3 entre estos índices.

6.5 Fórmula de Karmel

Resulta bastante difícil explicar el curso de las tasas de Karmel en la práctica. En la sección 3 demostramos que un cambio temporal en las "proporciones de casadas" produce escaso efecto inmediato sobre las tasas de Karmel, pero provoca discrepancias a lo largo de los próximos 20 años. En el cuadro 9, la tendencia ascendente en las "proporciones de casadas" durante la década de 1930 ejercerá, por lo tanto, escasa influencia sobre las tasas de Karmel. Los elevados valores iniciales probablemente reflejan las elevadas tasas de nupcialidad de postguerra, y el descenso constante es el resultado de las proporciones decrecientes de casadas hasta 1931.

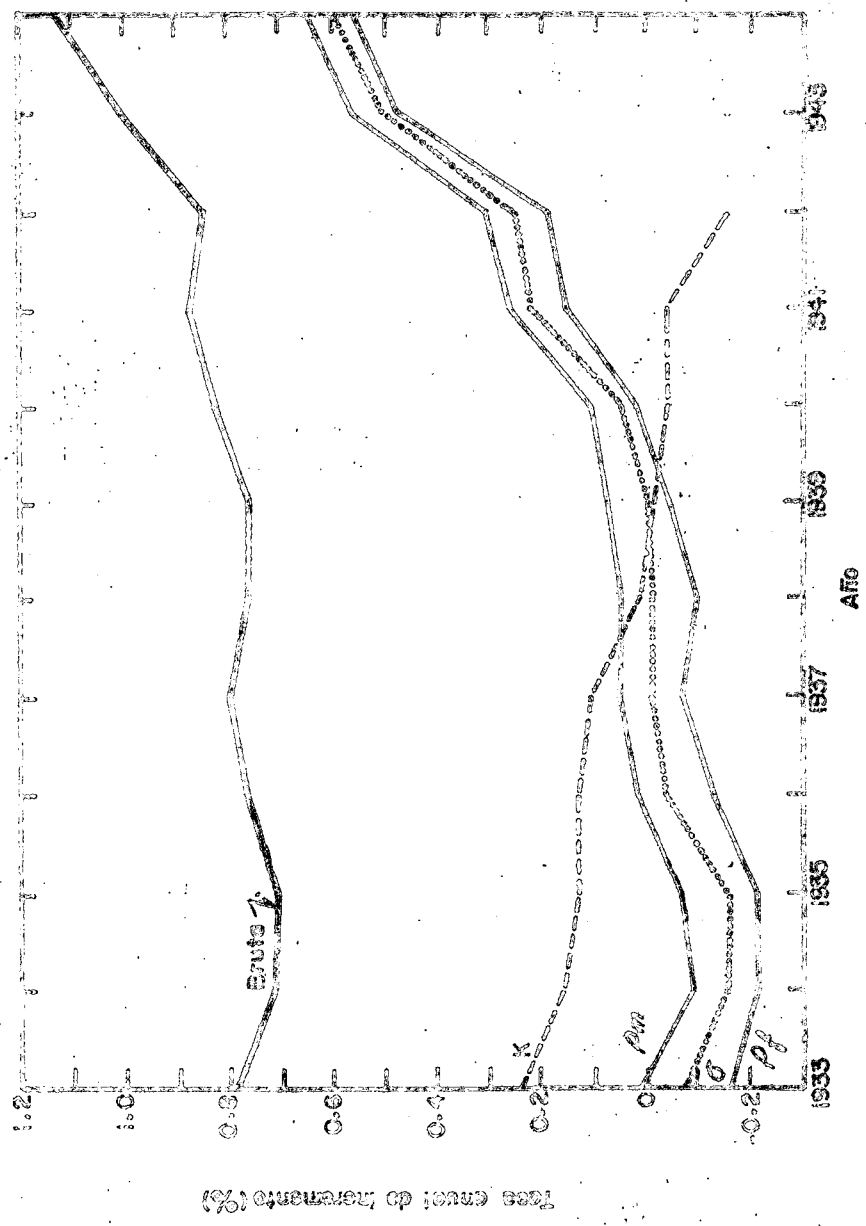
Cuadro 10.

VALORES DE VARIAS MEDIDAS DE REPRODUCTIVIDAD PARA AUSTRALIA 1933-44

Año	Aumento natural bruto (%)	Tasa bruta de reproducción		R_o^m	R_o^f	J_2	K_o	S_o	P_m (%)	P_f (%)	σ (%)	k (%)
		Hombre	Mujer									
1933...	.786	1.142	1.052	1.003	.959	.981	1.075	.963	.009	-.143	-.061	.224
1934...	.707	1.102	1.030	.969	.939	.962	1.050	.910	-.093	-.215	-.151	.151
1935...	.709	1.105	1.030	.973	.939	.965	1.037	.916	-.082	-.216	-.141	.112
1936...	.770	1.138	1.060	1.003	.967	.995	1.041	.970	.009	-.114	-.048	.125
1937...	.799	1.149	1.075	1.014	.981	1.014	1.035	.996	.042	-.065	-.007	.106
1938...	.783	1.151	1.069	1.016	.976	1.011	1.006	.992	.048	-.084	-.013	.018
1939...	.772	1.156	1.080	1.020	.986	1.025	.998	1.005	.061	-.050	.008	-.005
1940...	.825	1.170	1.102	1.033	1.007	1.051	.988	1.044	.099	.023	.070	-.038
1941...	.892	1.232	1.154	1.089	1.054	1.100	.994	1.149	.261	.185	.226	-.019
1942...	.857	1.247	1.156	1.102	1.056	1.101	.961	1.164	.297	.191	.251	-.123
1943...	1.035	1.350	1.257	1.193	1.148	1.194	...	1.369	.538	.484	.514	...
1944...	1.146	1.388	1.289	1.225	1.176	1.216	...	1.442	.617	.563	.592	...

Gráfico 5

MEIDAS DE REPRODUTIVIDAD - AUSTRALIA 1933-44



6.6 Fórmula de Clark-Dyne

No se ha hecho una aplicación de esta fórmula a los datos australianos ya que la forma en que se publican los datos de nacimiento no lo justifica. En el Demography Bulletin se publican los nacimientos legítimos de Australia para un año determinado, de acuerdo a la duración abreviada del matrimonio, a la edad de la madre al momento del nacimiento, según grupos quinquenales de edades. La fórmula de Clark-Dyne requiere que la fecundidad sea expresada en la forma del cuadro 1; es decir, los nacimientos de un año determinado se deben relacionar con los casamientos correspondientes. Como estos últimos están dados por año calendario, sería necesario publicar los nacimientos de acuerdo a la duración del matrimonio, expresada en años calendarios. La edad de la madre debe darse en grupos de edades al casarse, en lugar de edad al momento del alumbramiento.

La determinación de la fecundidad en la forma del cuadro 1 a partir de los presentes datos involucraría promediar casamientos anuales con grandes variaciones mientras que los grandes grupos de edades introducirían errores en la transformación de las edades. Se dispone de escasa información satisfactoria para Australia respecto a las proporciones típicas de mujeres casadas a una edad determinada. Esto tiene que usarse junto con la fecundidad indicada anteriormente.

Tan grandes son las aproximaciones que los resultados no tienen ningún grado de confianza al ser utilizados. Por lo tanto, no se efectuaron los cálculos.

6.7 Observaciones

Después de todo lo anterior, la primera pregunta que podría plantearse sería: cuál fue entonces el verdadero curso de la reproductividad durante los últimos 15 años? Una respuesta honrada a esta pregunta es "no lo sabemos en forma exacta". La dirección general del cambio que sugieren las tasas de reproducción es probablemente correcta, pero las cifras reales son más engañosas de lo que se supone en general. Si es preciso que utilicemos este método sería mejor basar nuestras profecías en la tasa conjunta de crecimiento natural, considerada junto con las variaciones anteriores en las "proporciones de casadas".

La información adicional sobre las tendencias de la población que da la fórmula de Clark-Dyne debe, indudablemente, justificar el pequeño cambio en la presentación de los nacimientos anuales; es decir, su tabulación de acuerdo a la edad de la madre al casarse y el año calendario del matrimonio. Esta información puede obtenerse a partir del formulario actual de registro de los nacimientos. A partir de estos datos, podríamos determinar con confianza los movimientos de la reproducción.

Los valores obtenidos al aplicar la fórmula de Clark-Dyne a los datos femeninos nos daría cifras anuales relativas exactas. Hay que tomar en cuenta al sexo masculino si se desea una medida absoluta de la reproductividad. Para este fin, se sugiere la determinación de una tasa conjunta de crecimiento mediante el método de Clark-Dyne. Esto involucraría la tabulación de los nacimientos femeninos según la edad del padre y de los nacimientos masculinos según la edad de la madre. Dados los nacimientos de cada año en esta forma y las cifras para las proporciones de casados cada 5 o 10 años, podríamos determinar en ese caso una medida absoluta que revelaría en forma correcta las tendencias inherentes de la población.

* * *

REFERENCIAS

- (1) C.D. Rich (1934), The measurement of the rate of population growth. F.I.A. Vol. LXV, pág. 38.
- (2) A.J. Lotka (1936), The geographic distribution of intrinsic natural increase in the United States, and an examination of the relation between several measures of net reproductivity. F. Amer. Statist. Ass. Vol. XXXI, pág. 273
- (3) F.R. Sharpe, A.J. Lotka (1911), A problem in age distribution. Philosophical Magazine, Vol. XXI, pág. 435.
- (4) L.I. Dublin, A.J. Lotka (1925), On the true rate of natural increase. F. Amer. Statist. Ass., Vol. XX, pág. 305.
- (5) S.D. Wicksell (1931), Nuptiality, fertility and reproductivity. Skand Akt. Vol. XIV, pág. 125.
- (6) E.C. Rhodes (1940), Population mathematics I, II and III. F.R. Statist. Soc. Vol. CIII., págs. 61, 218 y 362.
- (7) P.H. Karmel (1944), Fertility and marriages - Australia 1933-42. Econ. Rec. Vol. XX, No. 38, pág. 74
- (8) C. Clark, R.E. Dyne (1946), Application and extension of the Karmel formula for reproductivity. Econ. Rec., Vol. XXII, No. 42, pág. 23.
- (9) L.I. Dublin, A.J. Lotka (1931). The true rate of natural increase of the population of the United States. Revision on basis of recent data. Metron, Vol. VIII, No. 4, pág. 107.
- (10) R.J. Myers (1941), The validity and significance of male net reproduction rates. F. Amer. Statist. Ass., Vol. XXXVI, pág. 275.

* * *

Fórm. 441-500, Diciembre 1973

