

0196100
15/12/77

CELAS

5222
INSTITUTO
DE DEMOGRAFIA
Y ESTADISTICA
DOCPAL

INSTITUTO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

MATERIAL DE ENSEÑANZA
ME/1002

**EL MODELO DE MORTALIDAD
DE BRASS**

JUAN CHACKIEL

(Edición provisional)

San José, Costa Rica
Setiembre, 1977

U1961.00=No pedido DOCPAL (NACCESO) 1977=Fecha publ.

CHACKIEL, Juan (Au)
El modelo de mortalidad de Brass; edicion provisional.
Septiembre 1977; Pags:54
Editorial: CELADE. San Jose CR
Serie B 1009
Idioma:Es Distr:Interna Impresion:Impr

pais/region principal:ZZ Paises tratados:ZZ
Descriptor:<AJUSTE DE CURVAS*> <METODOLOGIA*> <TABLA MODELO DE MORTALIDAD*>
Categ. Revista:<MORTGEN:MEDICION>
Fechas datos demogr:9999-9999 No. de Ref= 23

En los paises cuyas estadisticas son incompletas, el uso de los modelos es de gran utilidad para aproximarse al conocimiento de la realidad demografica de un pais. El modelo de Brass o sistema logito, se basa en una transformacion de la funcion logistica que tiene la propiedad que dos distribuciones distintas de mortalidad se comportan linealmente. Esto permite, usando un patron o estandar, ajustar los valores de la funcion supervivientes de una poblacion determinada, mediante una funcion lineal, en que los parametros A y B tienen relacion con el nivel y la estructura de la mortalidad, respectivamente. Este tiene sobre otros modelos la ventaja de que se resume en una expresion sencilla y tiene mayor flexibilidad, lo que permite respetar en gran medida los datos observados. Los usos mas importantes de este sistema son: evaluacion y ajuste de datos, construccion de tablas de mortalidad, proyecciones de mortalidad y construccion de poblaciones estables; estas dos ultimas se logran haciendo variar los parametros de la funcion

(Inf. interna para DOCPAL: ISIS=05222 NRES=21-187 LS -m Cbd)

I N D I C E

	Página
INTRODUCCION	1
I. CONCEPTO ESTADISTICO-MATEMATICO DEL LOGITO	3
1. Desarrollo previo	3
2. Definición del "Logito"	6
3. Propiedad importante	6
II. USO DEL LOGITO	8
1. Uso en experimentos biológicos	8
2. Uso en poblaciones humanas (caso de tablas de mortalidad)	9
3. Comprobación empírica	12
4. Otro enfoque del uso en Tablas de Mortalidad	18
III. SIGNIFICADO DE LOS PARAMETROS	21
1. Conceptos generales	21
2. Estudio de α y β	22
IV. COMPARACION DEL SISTEMA DE TABLAS DE VIDA MODELO DE BRASS CON OTROS SISTEMAS	29
1. Planteamiento del problema	29
2. Las tablas modelo de mortalidad de Naciones Unidas	30
3. Las tablas modelo de mortalidad regionales de Coale y Demeny	31
4. Otros modelos	33
5. El sistema de tabla de vida modelo de Brass	34
V. USOS MAS IMPORTANTES DEL SISTEMA MODELO DE BRASS	36
1. Objetivo de esta sección	36
2. Evaluación y ajuste de información ya conocida ...	36
3. Construcción de una tabla de mortalidad	40
4. Proyecciones de la mortalidad	46
5. Construcción de poblaciones estables	46
ANEXO 1. FUNCIONES HIPERBOLICAS	49
BIBLIOGRAFIA	53

INDICE DE CUADROS Y GRAFICOS

Cuadro		Página
1	Medidas de la tabla de mortalidad "estándar general" confeccionada por Brass	13
2	Variación de la esperanza de vida al nacer en relación a α y β	28
Gráfico		
1	Función de densidad: $f(x) = 1/2 \operatorname{sech}^2 x = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$	4
2	Función de distribución: $P(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$	5
3	Curvas de muertes transformadas, en escala logito...	14
4	Distribución de las muertes de la "estándar general" en escala logito	15
5	Uruguay: Función de distribución $(1 - l_x^u)$ en escala logito	17
6	Uruguay: Logito de la función de distribución $(1 - l_x^u)$ en escala logito	17
7	Estándar general: función de sobrevivientes l_x^s y logito $(1 - l_x^s)$	23
8	Diferencias del estándar especial en los sobrevivientes por edades en escala logito, por períodos de tiempo	47

*

* *

INTRODUCCION

En los países en vía de desarrollo se carece de información confiable y actualizada sobre los niveles de la mortalidad de sus poblaciones. Esta circunstancia dificulta la construcción de tablas de mortalidad que son el instrumento más adecuado para medir estos niveles.

Para construir una tabla de mortalidad se requieren datos confiables, tanto de registros como de censos de población. Mientras se trabaja por mejorar los registros y los censos, se han ideado algunas formas de aproximarse al conocimiento de la realidad demográfica de estos países. Una de ellas es mediante el uso de modelos de tablas de mortalidad.

Estos modelos se utilizan, entre otras cosas, para tratar de completar el conocimiento de la mortalidad de un país, es decir, a partir de una información incompleta, se seleccionaría el modelo más adecuado. En verdad, no existe aquel modelo que pueda representar una situación en forma exacta. Lo que debe buscarse es una simple aproximación a la realidad. Ahí es donde se plantea una difícil alternativa entre no complicar demasiado el modelo y acercarse lo más posible al comportamiento del fenómeno que se quiere describir. Se hace complejo, en estos casos, combinar simplicidad con eficiencia. No siempre, por ejemplo, puede pensarse que con un solo parámetro como dato de entrada se logrará una buena descripción de la mortalidad de una población, pues puede resultar muy poco flexible el modelo dado que el comportamiento de la mortalidad por edades no es siempre el mismo.

Carrier y Hobcraft^{1/} mencionan las siguientes características que debe tener un modelo:

^{1/} Carrier y Hobcraft, Estimaciones demográficas para sociedades en desarrollo. CELADE, Serie D, No. 1026, San José, Costa Rica, 1975, pág. 10.

- a) Un modelo deberá ser tan flexible como sea posible para permitir expresar características genuinas.
- b) Un modelo deberá ser sólo lo suficientemente flexible para permitir expresar características genuinas.
- c) En la elección de la flexibilidad del modelo es importante utilizar el conocimiento empírico acumulado.

En la creencia de que el modelo de mortalidad ideado por William Brass representa un aporte importante en relación con la "flexibilidad" mencionada, en este trabajo se trata de describir con amplio detalle sus aspectos esenciales.

En la primera parte del documento se analizan conceptos relacionados con la estadística matemática, que dan lugar a las relaciones fundamentales que se utilizan luego en el resto del trabajo. El lector que no desee profundizar en dichos conceptos puede comenzar directamente en el capítulo III, y pasar por alto los capítulos I y II, para conocer el funcionamiento y usos más importantes de este sistema.

La idea central es dar una visión relativamente amplia del Sistema de Tablas Modelo de Mortalidad de Brass, que permita comprender sus aplicaciones, y que los usuarios conozcan qué significa cada paso dado y cada resultado obtenido.

I. CONCEPTO ESTADISTICO-MATEMATICO DEL LOGITO

1. Desarrollo previo

Con el objeto de entender con claridad el concepto y la función que cumple lo que se ha llamado "logito", sería necesario partir de la siguiente expresión 2/:

$$f(x) = 1/2 \operatorname{sech}^2 x = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$

Es conveniente conocer las características de esta función, cuyas propiedades más importantes se pueden apreciar en el gráfico 1. Es muy similar a una normal de Gauss, y cumple sin inconvenientes el papel de lo que en estadística se conoce como "función de densidad o de frecuencia", ya que verifica las condiciones:

a) $f(x) \geq 0$ para todo valor de x

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 x dx = 1/2 \operatorname{tgh} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= 1/2 (1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

En este caso particular, se refiere a una media igual a cero y varianza igual a uno:

2/ En un anexo al final de este documento se presentan algunos aspectos sobre funciones hiperbólicas.

4

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = 0$$

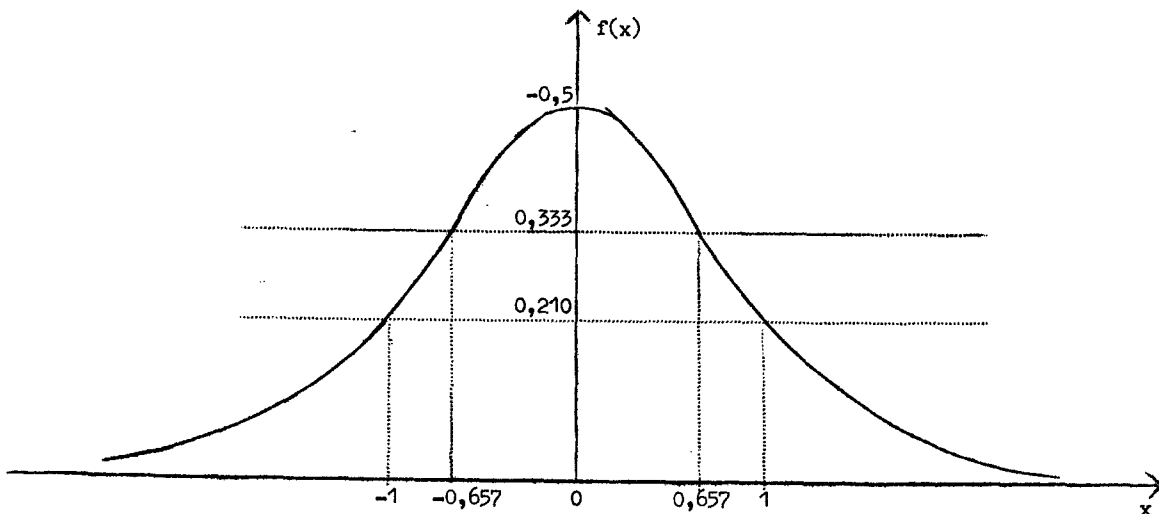
$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} x f^2(x) - [xf(x)]^2 dx = 1$$

Se podría generalizar de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech}^2(\alpha + \beta x) \quad (1)$$

Gráfico 1

$$\text{FUNCION DE DENSIDAD: } f(x) = 1/2 \operatorname{sech}^2 x = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$



A partir de estas funciones de frecuencia, se puede, integrando, encontrar la "función de distribución" que les pertenece:

caso $\alpha=0$ y $\beta=1$:

$$P(x) = 1/2 \int_{-\infty}^x \operatorname{sech}^2 x \, dx = 1/2 \left. \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right|_{-\infty}^x = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$$

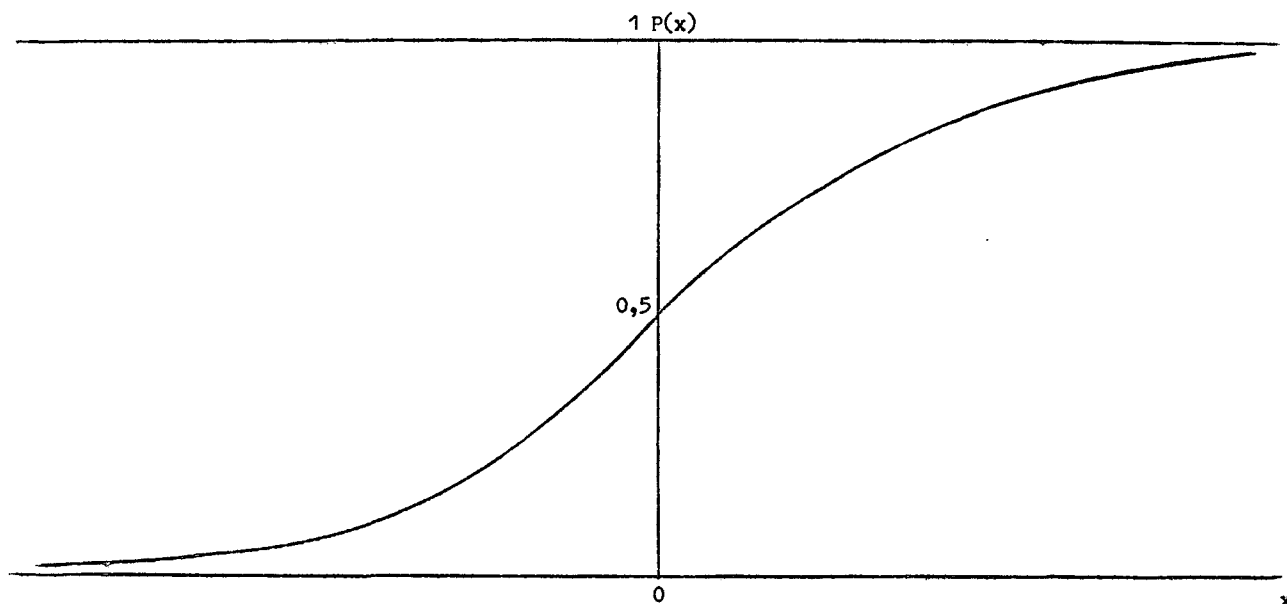
caso $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 1$:

$$P'(x) = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^x \operatorname{sech}^2 (\alpha + \beta x) \, dx = \frac{1}{1 + e^{-2(\alpha + \beta x)}} \quad (2)$$

En $P(x)$ y $P'(x)$ se reconoce la "función logística" (véase el gráfico 2).

Gráfico 2

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN: $P(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$



2. Definición del "Logito"

Se ha llamado "logito" a la operación que permite hacer una transformación lineal de la "logística":

$$\text{logito } P(x) = 1/2 \ln \frac{P(x)}{1-P(x)} = 1/2 \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + e^{-2x}}} = 1/2 \ln \frac{1}{e^{-2x}} = x$$

$$\text{logito } P'(x) = 1/2 \ln \frac{P'(x)}{1-P'(x)} = 1/2 \ln \frac{1}{e^{-2(\alpha + \beta x)}} = \alpha + \beta x \quad (3)$$

Un enfoque diferente de este mismo concepto es considerarlo como la función inversa de la "logística".

Si $P(A) = \frac{1}{1 + e^{-2A}}$ = "Función logística de A", se tiene:

$$A = 1/2 \ln \frac{P(A)}{1-P(A)} = \text{"Función logito de } P(A)\text{"}$$

3. Propiedad importante

Una propiedad inmediata que, como se verá más adelante, tendrá mucho interés, es que la relación entre los logitos de dos distribuciones correspondientes a curvas con α y β distintos, para el mismo valor de x , es también lineal.

Se define $Y^S(x) = \text{logito } P^S(x)$, $Y^0(x) = \text{logito } P^0(x)$ y $Y^1(x) = \text{logito } P^1(x)$ luego:

$$Y^S(x) = \text{logito } P^S(x) = x \text{ para } \alpha = 0 \text{ y } \beta = 1$$

$$Y^0(x) = \text{logito } P^0(x) = \alpha_0 + \beta_0 x = \alpha_0 + \beta_0 Y^S(x)$$

$$Y^1(x) = \text{logito } P^1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x = \alpha_1 + \beta_1 Y^S(x)$$

Siempre que se trabaje con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ se utilizará el índice s y se denominará "estándar".

Haciendo la diferencia de los dos últimos logitos, se obtiene:

$$Y^1(x) - Y^0(x) = (\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0) x = (\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0) Y^S(x)$$

despejando $Y^1(x)$ y sustituyendo $Y^S(x) = \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0}$

$$Y^1(x) = \alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0} - \beta_0 \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0} + Y^0(x)$$

$$Y^1(x) = \alpha_1 - \frac{\beta_1 \alpha_0}{\beta_0} + (\beta_1 / \beta_0) Y^0(x) = c + d Y^0(x)$$

II. USO DEL LOGITO

1. Uso en experimentos biológicos

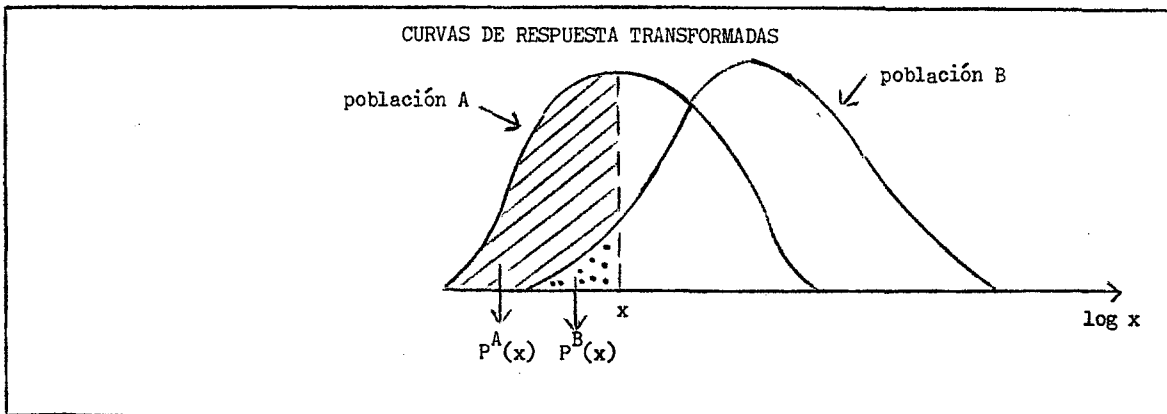
Una explicación de cómo se utilizan estos conceptos en ensayos biológicos ayudará a comprender sus aplicaciones a la Demografía.

A la "función de densidad" (1) se le llama curva "respuesta" frente a una "dosis" de determinada droga que se inyecta en animales. Se hacen experimentos aplicándoles una "dosis" x de cierta droga y se observan sus reacciones. Si suponemos que la reacción que se quiere medir es la muerte de los animales con una dosis inferior a x , la distribución $P(x)$ que se busca estaría dada por la proporción de los que mueren. Evidentemente, $P(x)$ crece con el aumento de x hasta que mueren todos los animales, siendo la proporción igual a 1.

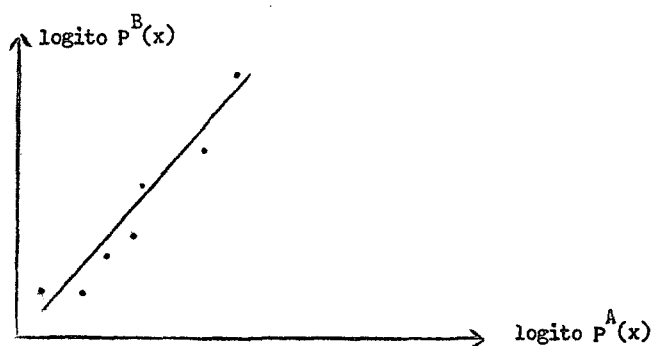
Las curvas "respuestas" que se obtienen del experimento no coinciden con el $f(x)$ teórico planteado, pero con un cambio de escala pueden parecerse aproximadamente. El cambio de escala que da buenos resultados, por ejemplo, en experimentos con ratas, consiste en usar escala logarítmica en la abscisa, en lugar de usar un gráfico con respecto a x .

Para una misma "dosis" en dos poblaciones (A y B) de ratas, se encontrarían curvas distintas, pero de acuerdo con la propiedad vista en el capítulo anterior, entre los logitos de ellas existiría, aproximadamente, la siguiente relación lineal:

$$\text{logito } P^B(x) = c + d \text{ logito } P^A(x)$$



El cálculo de \bar{c} y \bar{d} se logra fácilmente a través del ajuste de los logitos observados, utilizando cualquiera de los métodos convencionales (por ejemplo, mínimos cuadrados). Para ello, es conveniente hacer el siguiente gráfico, que debe mostrar los puntos más o menos alineados:

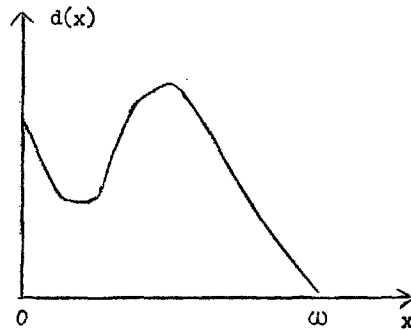


Conocida $P^A(x)$, es fácil deducir $P^B(x)$ como el "antilogito de $[c+d \logito P^A(x)]$ ".

2. Uso en poblaciones humanas (caso de tablas de mortalidad)

Si se intenta hacer un paralelo con los experimentos biológicos, podría suponerse que la "dosis" x es de tiempo, y éste se expresa en la edad de una cohorte de personas que, a medida que envejecen, van muriendo en forma acumulada y al final, para ω (edad extrema de la vida), la proporción de las muertes es uno.

Pero, como se sabe, la curva de muertes de la población humana, que se calcula a través de tablas de mortalidad $[d(x)]$, tiene aproximadamente la siguiente forma:



Se debe encontrar la escala apropiada para que $d(x) = l_x \mu_x = -\frac{d l_x}{d x}$ se transforme en una expresión similar a (1) y a su vez la integral, que es igual a $(1 - l_x)$, debe aproximarse en su forma a una logística (2).

La función de distribución de las muertes, que se busca transformar en una curva logística, es la siguiente:

$$\int_0^x d(x) dx = \int_0^x -\frac{d l_x}{d x} dx = -l_x \Big|_0^x = 1 - l_x$$

Así como en el caso de las ratas era satisfactorio usar escala logarítmica, según Brass en este caso es conveniente usar la escala logito. Así, se halla la siguiente relación empírica:

$$1 - l_x = \frac{1}{1 + e^{-2[\alpha + \beta \text{ logito}(1 - l_x^s)]}} \quad (4)$$

La escala se haría en el logito de una distribución estándar de las muertes $(1 - \ell_x^s)$, lo que implica:

$$d(x) = \frac{\beta}{2} D \left[\text{logito} (1 - \ell_x^s) \right] \text{sech} \left[\alpha + \beta \text{logito} (1 - \ell_x^s) \right] \quad (5)$$

La letra D tiene el significado de derivada de lo que encierra el paréntesis. La experiencia indica que, con ciertas variaciones, se obtiene la forma deseada.

Luego, aplicando la definición de logito (3) que se tiene en la sección 1.2, a la expresión (4), se obtiene la relación fundamental entre la tabla de mortalidad estándar y la otra tabla considerada:

$$\text{logito} (1 - \ell_x) = \alpha + \beta \text{logito} (1 - \ell_x^s)$$

Llamando $Y(x) = \text{logito} (1 - \ell_x)$ y $Y^s(x) = \text{logito} (1 - \ell_x^s)$ la expresión anterior toma la forma:

$$y(x) = \alpha + \beta Y^s(x) \quad (6)$$

Esto quiere decir que entre el logito de la distribución de las muertes de una tabla de mortalidad estándar y el de otra cualquiera, se esperaría una relación lineal en que, según el caso, variarían α y β .

Debe tenerse muy presente entonces, que esta relación es empírica y que no siempre se logrará una buena alineación.

3. Comprobación empírica

A título de ilustración, se verá todo el proceso descrito tomando como estándar la tabla de mortalidad que Brass llama "estándar general" en su trabajo "sobre la escala de la mortalidad" ^{3/}.

Como primer ejemplo sencillo, se considerará $\alpha=0$ y $\beta=1$, es decir que se relacionarán las distintas funciones de la estándar consigo misma.

De acuerdo con la fórmula (5) se tendría:

$$d^S(x) = \frac{1}{2} D \left[Y^S(x) \right] \operatorname{sech}^2 Y^S(x) \quad (7)$$

y las muertes transformadas equivaldrían a una función del tipo:

$$\frac{d^S(x)}{D \left[Y^S(x) \right]} = 1/2 \operatorname{sech}^2 Y^S(x)$$

siendo a su vez:

$$D \left[Y^S(x) \right] = 1/2 D \left[\ln \frac{1 - l_x^S}{l_x^S} \right] = 1/2 \left[\frac{d^S(x)}{1 - l_x^S} + \frac{d^S(x)}{l_x^S} \right] = 1/2 \frac{d^S(x)}{(1 - l_x^S) l_x^S}$$

Si se representa gráficamente la expresión $\frac{d^S(x)}{D \left[Y^S(x) \right]} = 2 (1 - l_x^S) l_x^S$ utilizando la información del cuadro 1, con abscisa en escala logito, se debería obtener, para estar satisfechos, la forma aproximada de la curva del gráfico 1.

^{3/} Brass, W., "Sobre la escala de la mortalidad" en Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados, CELADE, Serie E, No. 14, 1974, págs. 135 y siguientes.

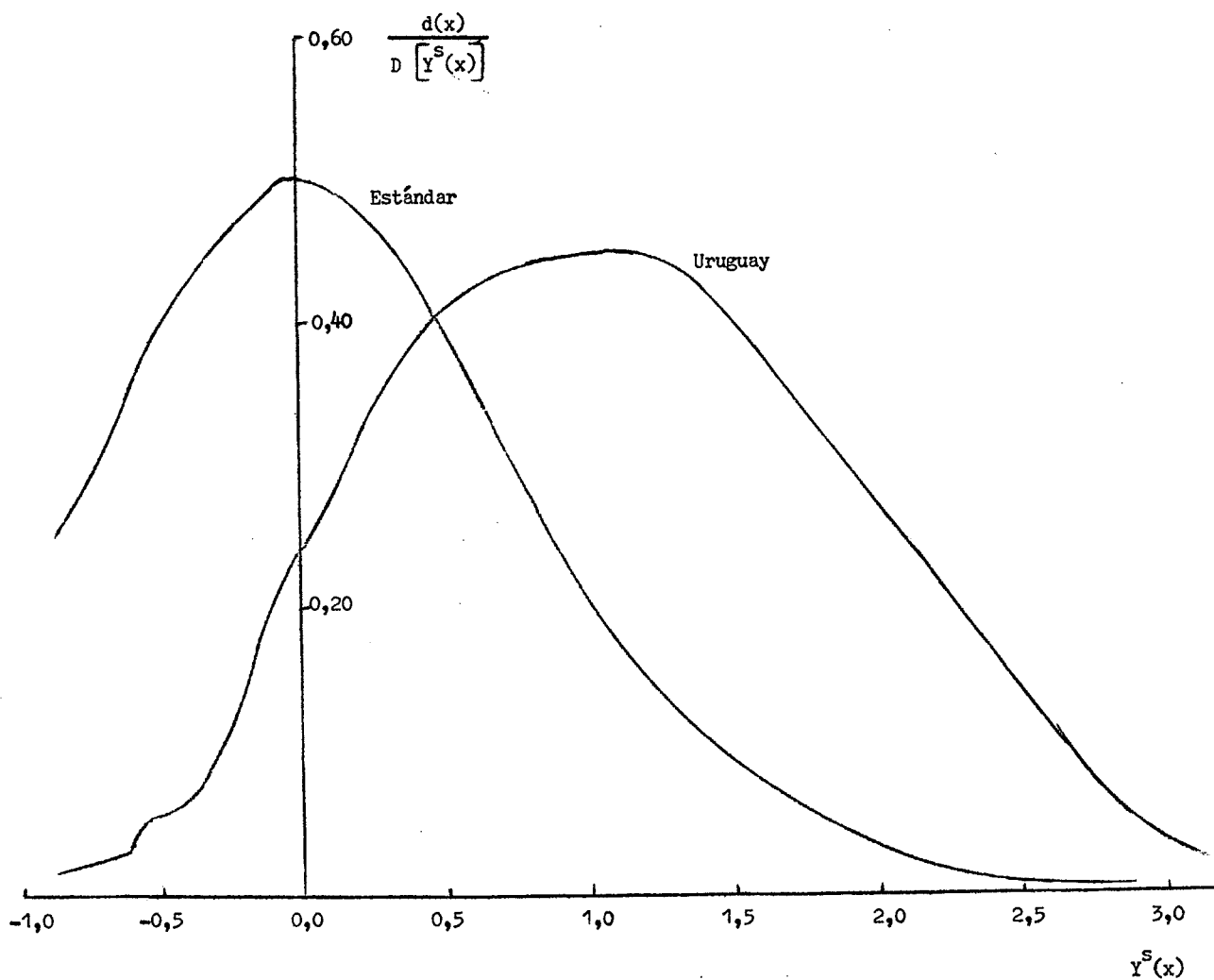
Cuadro 1

MEDIDAS DE LA TABLA DE MORTALIDAD "ESTANDAR GENERAL" CONFECCIONADA POR BRASS

Edad (x) años	l_x^s	Logito de ($1 - l_x^s$)	Edad (x) años	l_x^s	Logito de ($1 - l_x^s$)
0	1,0000	-	36	0,6160	-0,2364
1	0,8499	-0,8670	37	0,6097	-0,2230
2	0,8070	-0,7152	38	0,6032	-0,2094
3	0,7876	-0,6552	39	0,5966	-0,1956
4	0,7762	-0,6219	40	0,5898	-0,1817
5	0,7691	-0,6015	41	0,5830	-0,1676
6	0,7642	-0,5879	42	0,5759	-0,1530
7	0,7601	-0,5766	43	0,5686	-0,1381
8	0,7564	-0,5666	44	0,5612	-0,1229
9	0,7532	-0,5578	45	0,5535	-0,1073
10	0,7502	-0,5498	46	0,5454	-0,0911
11	0,7477	-0,5431	47	0,5371	-0,0743
12	0,7452	-0,5365	48	0,5285	-0,0572
13	0,7425	-0,5296	49	0,5197	-0,0395
14	0,7396	-0,5220	50	0,5106	-0,0212
15	0,7362	-0,5131	52,5	0,4857	0,0286
16	0,7328	-0,5043	55	0,4585	0,0832
17	0,7287	-0,4941	57,5	0,4291	0,1428
18	0,7241	-0,4824	60	0,3965	0,2100
19	0,7188	-0,4694	62,5	0,3602	0,2873
20	0,7130	-0,4551	65	0,3210	0,3746
21	0,7069	-0,4401	67,5	0,2801	0,4720
22	0,7005	-0,4248	70	0,2380	0,5818
23	0,6943	-0,4103	72,5	0,1945	0,7105
24	0,6884	-0,3963	75	0,1500	0,8673
25	0,6826	-0,3829	77,5	0,1090	1,0505
26	0,6764	-0,3686	80	0,0760	1,2490
27	0,6703	-0,3549	82,5	0,0490	1,4828
28	0,6643	-0,3413	85	0,0290	1,7555
29	0,6584	-0,3280	87,5	0,0155	2,0760
30	0,6525	-0,3150	90	0,0070	2,4774
31	0,6466	-0,3020	92,5	0,0030	2,9031
32	0,6405	-0,2889	95	0,0010	3,4534
33	0,6345	-0,2759	97,5	0,0001	4,6046
34	0,6284	-0,2627	100	0,0000	∞
35	0,6223	-0,2496			

El resultado de esto está en el gráfico 3 que parece concordar, aunque gruesamente, con lo esperado.

Gráfico 3
CURVAS DE MUERTES TRANSFORMADAS, EN ESCALA LOGITO



Si, como se dijo, la función de densidad de las muertes es la expresión (7), se deduce, integrando, que la función de distribución es:

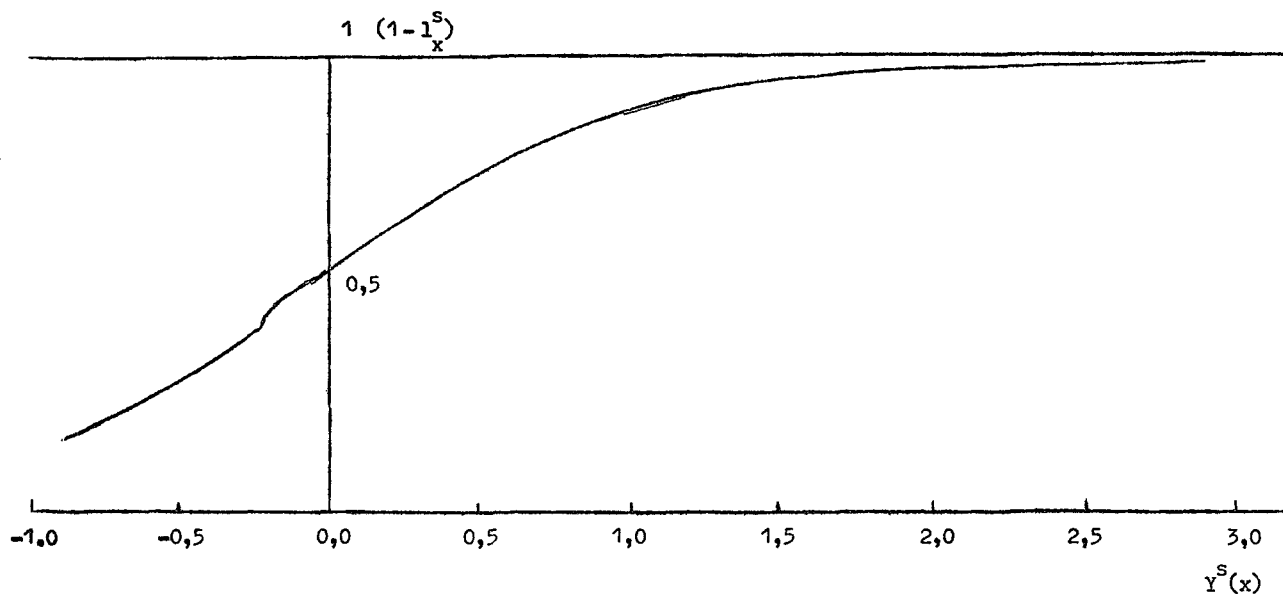
$$1 - l_x^s = \frac{1}{1 + e^{-2Y^s(x)}} \quad (8)$$

Al presentar la función (8) en forma gráfica, utilizando la información del cuadro 1, con la abscisa en escala logito, se logra una aproximación de la logística (véase el gráfico 4).

Ahora es necesario estudiar un caso para $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 1$, vale decir, buscar la relación existente entre la tabla de mortalidad estándar y otra cualquiera, (en este caso la del Uruguay 1963-1964) 4/.

Gráfico 4

DISTRIBUCION DE LAS MUERTES DE LA "ESTANDAR GENERAL", EN ESCALA LOGITO



4/ Dirección General de Estadística y Censos, República Oriental del Uruguay, Tablas de mortalidad 1963-1964.

Se tiene que:

$$d^u(x) = \beta/2 D[Y^s(x)] \operatorname{sech}^2 [\alpha + \beta Y^s(x)]$$

y por lo tanto:

$$\frac{d^u(x)}{D[Y^s(x)]} = \beta/2 \operatorname{sech}^2 [\alpha + \beta Y^s(x)]$$

siendo, como se vio:

$$D[Y^s(x)] = 1/2 \frac{d^s(x)}{(1 - l_x^s) l_x^s}$$

Poniendo, entonces, en la ordenada

$$2 d^u(x) \frac{(1 - l_x^s) l_x^s}{d^s(x)}$$

y en la abscisa $Y^s(x)$, se debería esperar una curva parecida a la de la estándar, pero quizás desplazada y más o menos concentrada (véase el gráfico 3).

En el gráfico 5 se representa $(1 - l_x^u)$ en escala logito y toma la forma aproximada de la "logística", lo que resulta muy alentador, pues esto hace suponer que entonces, aplicándole la relación (6), que figura en la página 11, deberían alinearse los puntos. En el gráfico 6 se trata de verificar esto último, obteniendo, con algunas desviaciones, puntos más o menos alineados.

Gráfico 5

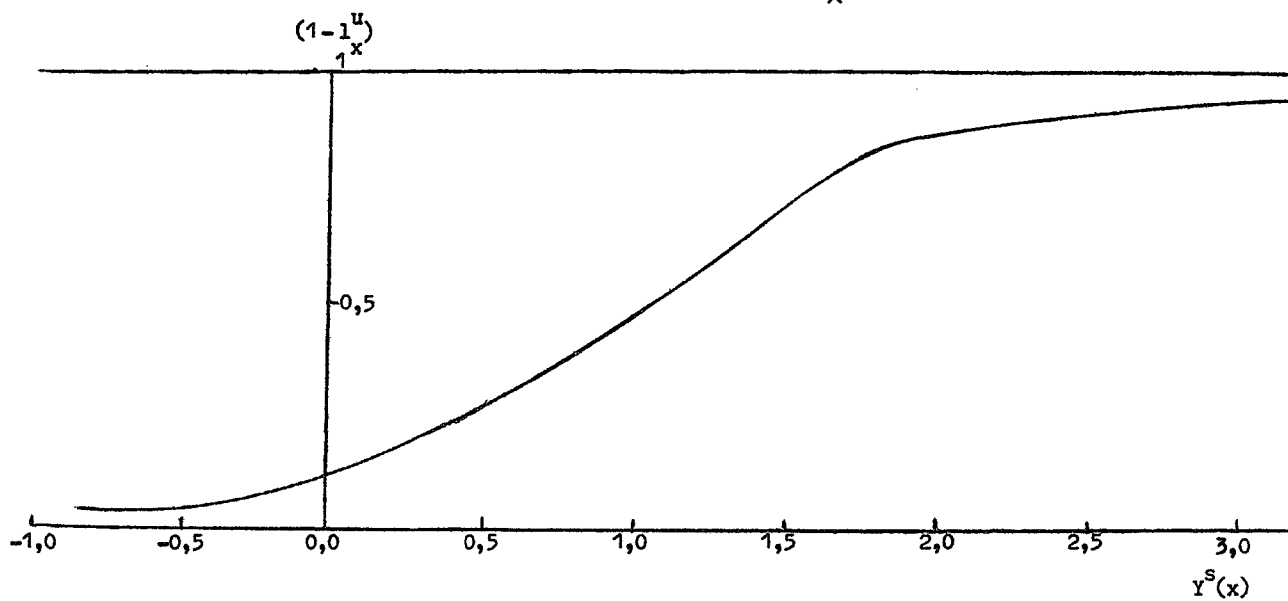
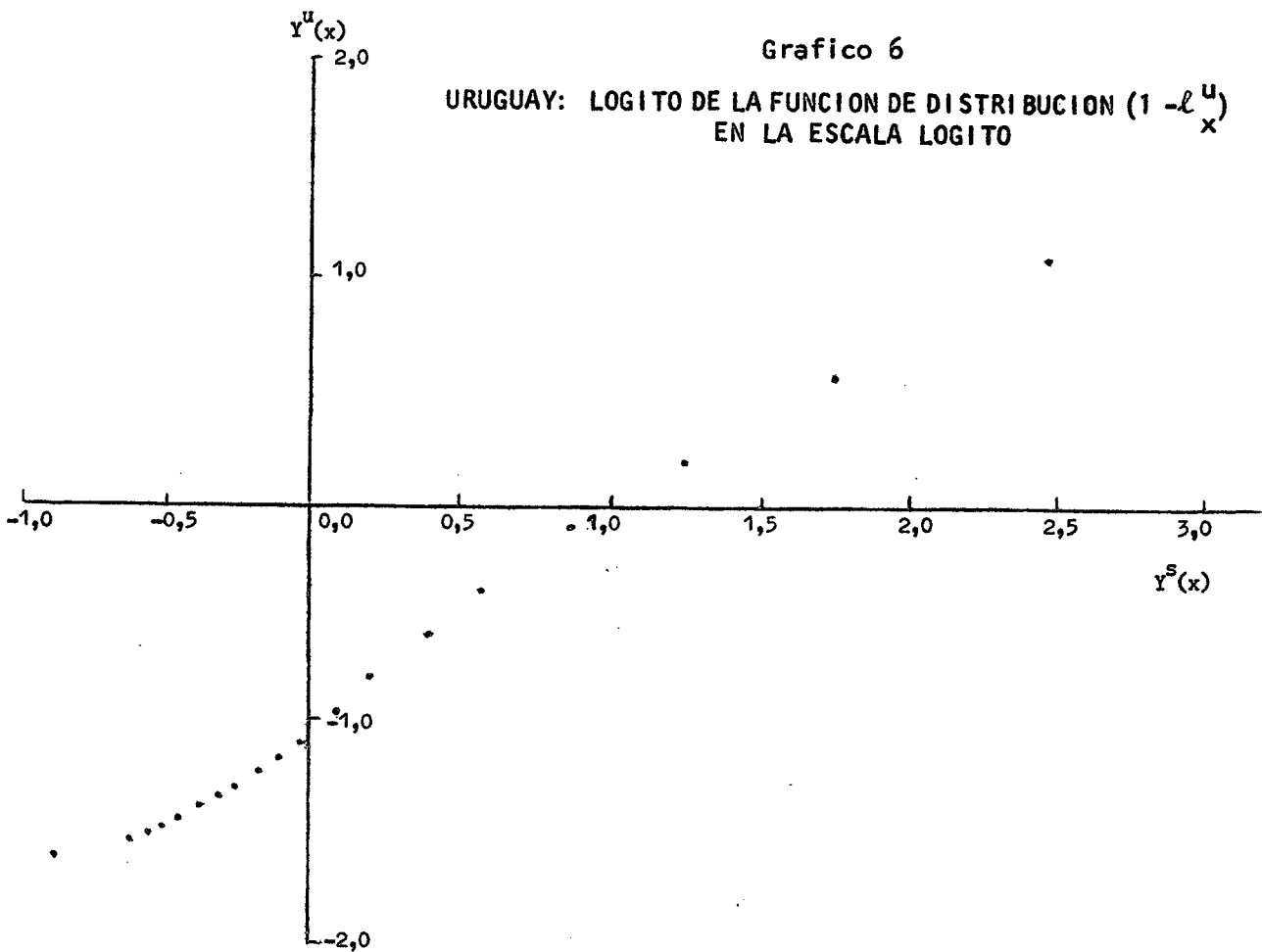
URUGUAY: FUNCION DE DISTRIBUCION $(1 - l_x^u)$ EN ESCALA LOGITO

Gráfico 6

URUGUAY: LOGITO DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION $(1 - l_x^u)$ EN LA ESCALA LOGITO

4. Otro enfoque del uso en Tablas de Mortalidad

Brass llega a las mismas conclusiones partiendo de un enfoque totalmente distinto ^{5/}. Parte de una observación de Kermack (y otros) ^{6/} referente a que los cambios relativos en las tasas específicas de mortalidad, en un período de tiempo limitado, no difieren con la edad.

Esto le permite escribir la siguiente relación:

$$\mu_1(x) = C \mu_2(x)$$

Siendo:

$\mu_1(x)$ = fuerza de la mortalidad o tasa instantánea para el período 1.

$\mu_2(x)$ = fuerza de la mortalidad o tasa instantánea para el período 2.

Como $\mu(x) = -\frac{\ell'_x}{\ell_x}$ para ℓ_x igual a los sobrevivientes de edad x , la expresión anterior resulta:

$$\frac{(\ell_x^1)'}{\ell_x^1} = \frac{(\ell_x^2)'}{\ell_x^2} C$$

o sea:

$$\ln \ell_x^1 = C \ln \ell_x^2$$

^{5/} Brass, W., "Sobre la escala ...", *op.cit.*, págs. 140 y siguientes.

^{6/} Kermack, Mc. Kendrick y Mc. Kinley, "Death Rates in Great Britain and Sweden"; the *Louet*, 1934.

Al llegar a este punto, se vuelve a plantear la hipótesis inicial, afirma que las relaciones entre las probabilidades de morir no son proporcionalmente constantes a través de todas las edades, sino que es más complicado y a edades mayores tiende a acercarse a 1.

Como solución, se propone usar la proporcionalidad considerando la probabilidad de morir $(1 - l_x)$ para $l_0 = 1$ y no los sobrevivientes l_x , como lo había hecho hasta aquí. Se seguirá trabajando, entonces, con la siguiente expresión:

$$\ln \frac{1 - l_x^1}{l_x^1} = c \ln \frac{1 - l_x^2}{l_x^2}$$

Derivando, se obtiene:

$$\frac{(l_x^1)'}{l_x^1 [1 - l_x^1]} = c \frac{(l_x^2)'}{l_x^2 [1 - l_x^2]}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\mu_1(x)}{1 - l_x^1} = c \frac{\mu_2(x)}{1 - l_x^2}$$

Ahora, integrando esta expresión, se obtiene:

$$\ln \frac{1 - l_x^1}{l_x^1} + \alpha_1 = c \ln \frac{1 - l_x^2}{l_x^2} + \alpha_2$$

o sea, que se podría escribir:

$$1/2 \ln \frac{1-l^1_x}{l^1_x} = \alpha + \beta 1/2 \ln \frac{1-l^2_x}{l^2_x}$$

Se reconoce en la expresión anterior:

$$Y^1(x) = 1/2 \ln \frac{1-l^1_x}{l^1_x} = \text{logito}(1-l^1_x)$$

$$Y^2(x) = 1/2 \ln \frac{1-l^2_x}{l^2_x} = \text{logito}(1-l^2_x)$$

por lo tanto, la relación fundamental entre las dos tablas de mortalidad, es la siguiente:

$$Y^1(x) = \alpha + \beta Y^2(x)$$

que es la fórmula (6) antes obtenida.

III. SIGNIFICADO DE LOS PARAMETROS

1. Conceptos generales

Brass vincula una tabla de mortalidad estándar con otros patrones por edades a través de la siguiente ecuación:

$$Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x) \quad (6)$$

siendo:

$$Y(x) = \text{logito}(1 - l_x) = 1/2 \ln \frac{1 - l_x}{l_x}$$

$$Y^S(x) = \text{logito}(1 - l_x^S) = 1/2 \ln \frac{1 - l_x^S}{l_x^S}$$

para l_x = sobrevivientes de una tabla de mortalidad a la edad x .

l_x^S = sobrevivientes de la tabla de mortalidad estándar a la edad x .

α y β = son parámetros cuyo significado hace el objeto de este capítulo.

Se tratará de demostrar que α está fundamentalmente ligado al nivel de la mortalidad y β a la forma de ésta, según la edad. Obviamente, esto no puede ser estrictamente así si se piensa que el nivel y la forma son dos conceptos muy asociados y que variaciones en uno de ellos repercuten, invariablemente, en el otro, pero existe, sí, una predominancia marcada en este sentido.

Para el análisis que sigue, es conveniente conocer con mucha claridad el comportamiento de $Y(x)$ y l_x^s (véase el gráfico 7). Si se llama x_1 a la edad en que $l_x^s = 0,5$, se podría resumir de la siguiente manera:

$$\text{para } x \rightarrow 0 ; l_x^s = 1 ; Y^s(x) \rightarrow -\infty$$

$$\text{para } 0 < x < x_1 ; l_x^s > 0,5 ; Y^s(x) < 0$$

$$\text{para } x = x_1 ; l_{x_1}^s = 0,5 ; Y^s(x_1) = 0$$

$$\text{para } x_1 < x < \omega ; l_x^s < 0,5 ; Y^s(x) > 0$$

$$\text{para } x_1 \rightarrow \omega ; l_x^s = 0 ; Y^s(x) \rightarrow +\infty$$

En el caso de la estándar general de Brass, x_1 es la edad 51.

2. Estudio de α y β

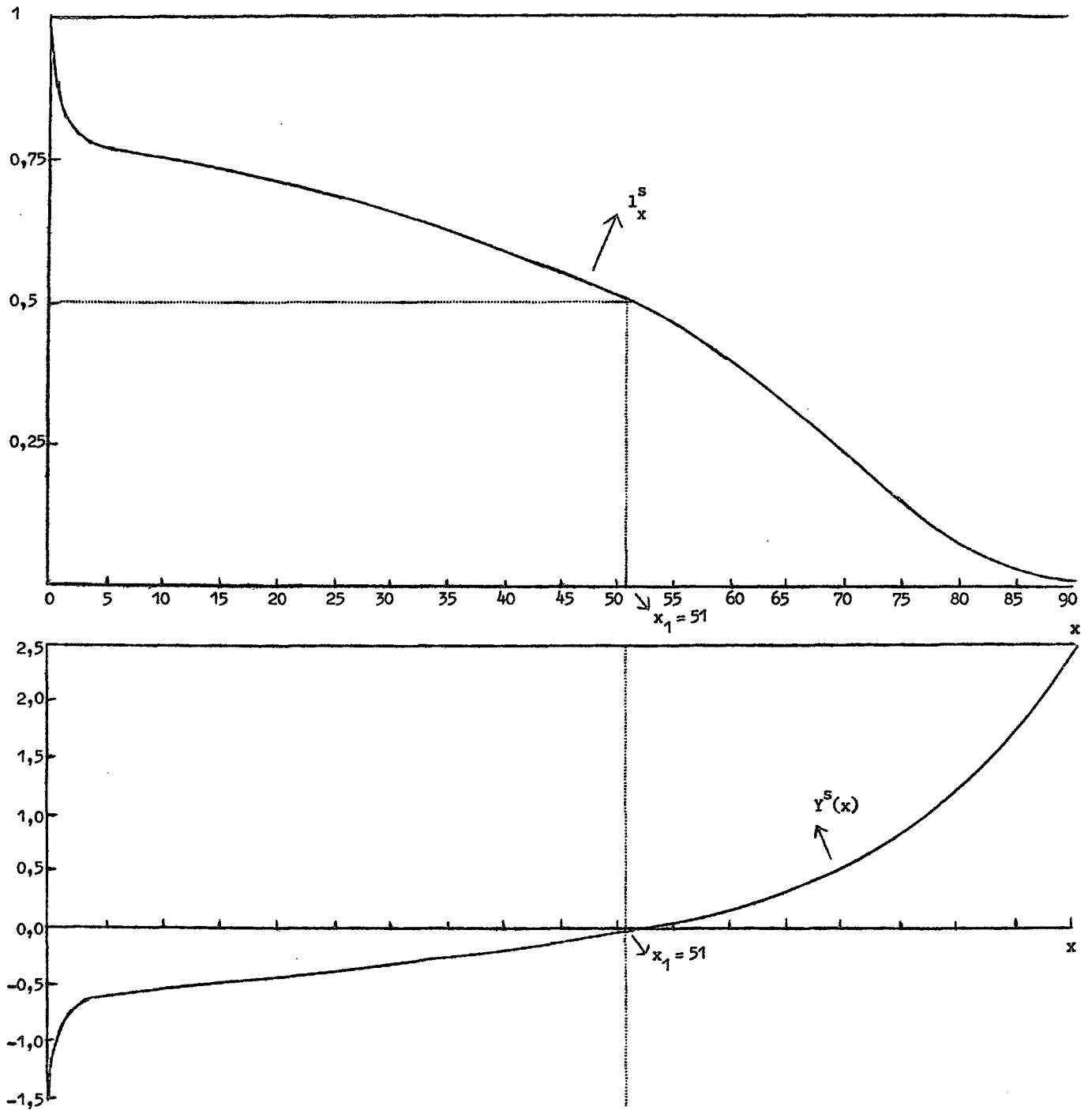
Se analizarán todos los casos posibles, de acuerdo con los valores que puedan adoptar ambos parámetros.

a) Variaciones solamente de α .

Se verán primero los efectos de variaciones de α alrededor de la edad mediana x_1 . A esa edad ocurre que $l_{x_1}^s = 0,5$ y, como se vio antes, implica que $Y^s(x_1) = 0$ y de acuerdo con esto, la relación (6) toma el valor:

$$Y(x_1) = \alpha$$

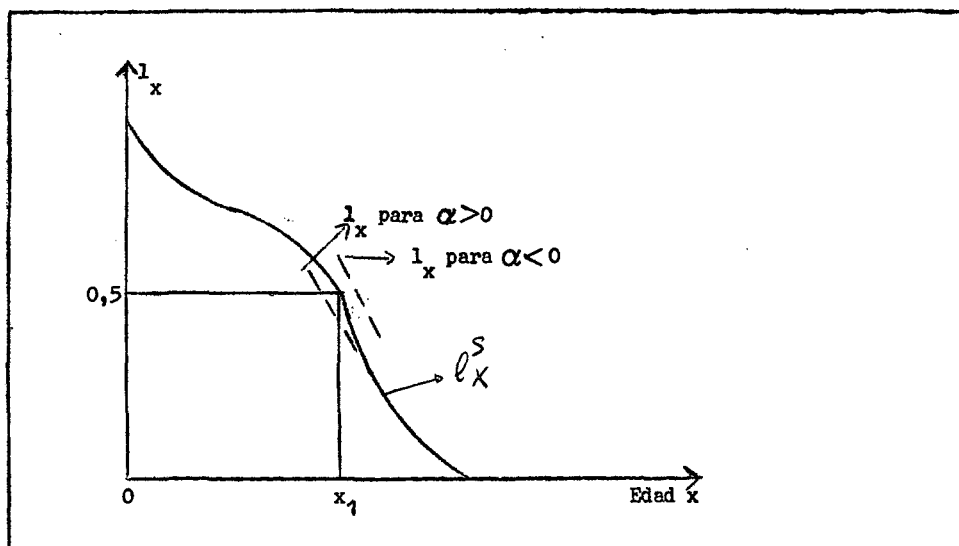
Gráfico 7

ESTANDAR GENERAL: FUNCION DE SOBREVIVIENTES ℓ_x^s Y LOGITO $(1-\ell_x^s)$ 

Fuente: Cuadro 1.

Si $\alpha > 0$, $Y(x_1)$ es también positivo y por lo tanto $l_{x_1} < 0,5$, que estaría por debajo del valor de $l_{x_1}^S = 0,5$. En caso de ser $\alpha < 0$ ocurrirá lo contrario, siendo $l_{x_1} > l_{x_1}^S = 0,5$.

El valor que tome l_x a edades más alejadas de x_1 depende exclusivamente de los valores de β , pero se puede afirmar que, esencialmente, $l_{x_1}^S$ representa, en promedio, el nivel de la mortalidad de la estándar si l_{x_1} está por debajo, es porque probablemente su mortalidad sería más alta y l_{x_1} si l_{x_1} está por encima, es porque su mortalidad será más baja:



b) Variaciones de α para $\beta = 1$

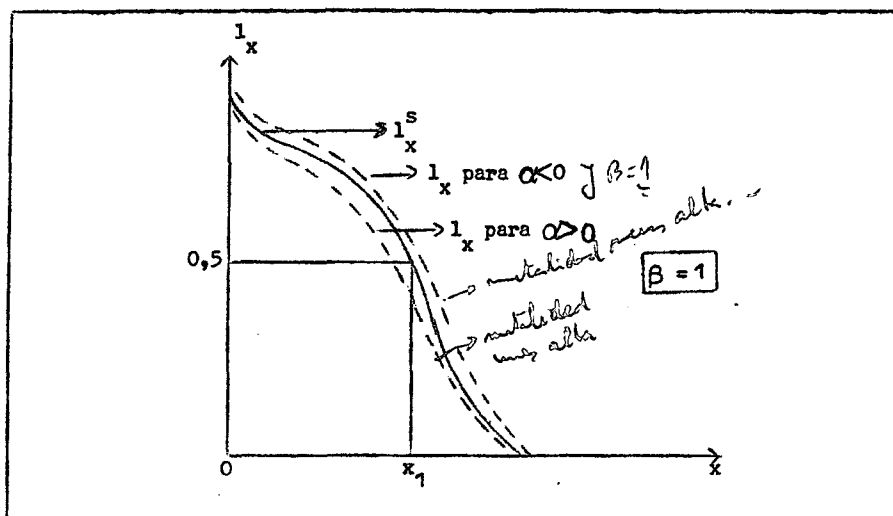
Se parte de la relación (6) que queda:

$$Y(x) = \alpha + Y^S(x)$$

trasponiendo términos:

$$Y(x) - Y^S(x) = \alpha$$

Cuando $\alpha > 0$, entonces $Y(x) > Y^S(x)$ y, por lo tanto, $l_x < l_x^S$ y si $\alpha < 0$, entonces $Y(x) < Y^S(x)$ y, por lo tanto, $l_x > l_x^S$.



Esto confirma lo que se dijo de la importancia de α en el nivel, ya que para un $\beta = 1$ constante, l_x depende solamente de α , no intersectándose nunca con l_x^S . Queda por aclarar qué pasa con $\beta \neq 1$.

c) Caso de $\beta > 1$

Si $Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x)$ y le restamos a ambos miembros $Y^S(x)$, se tiene:

$$D(x) = Y(x) - Y^S(x) = \alpha + (\beta - 1) Y^S(x) \quad (9)$$

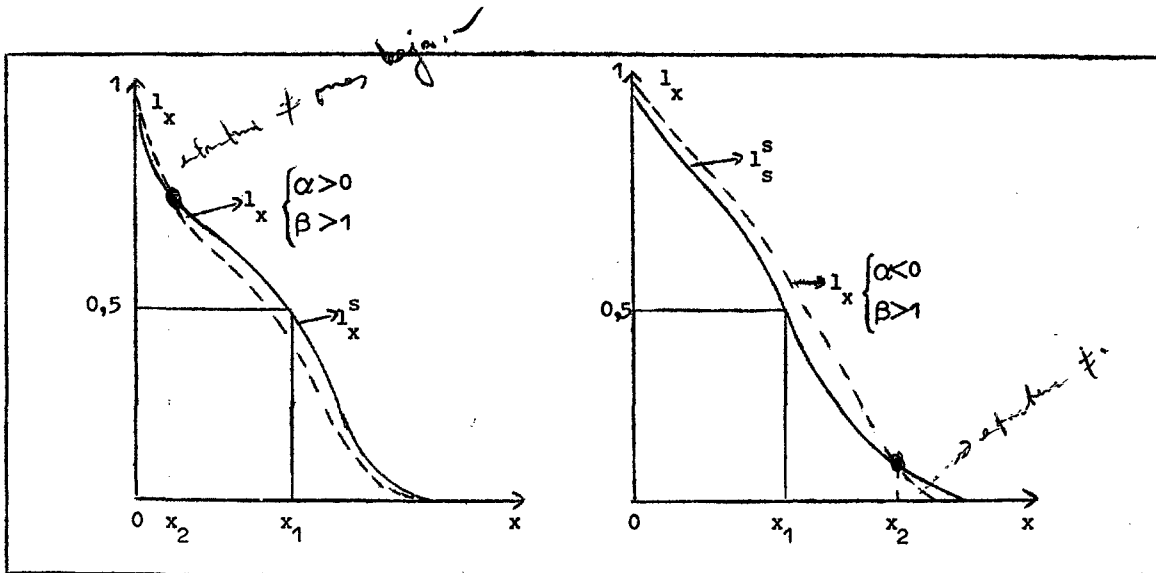
Es importante tener muy en cuenta esta relación $D(x)$, definida como diferencia de logitos, porque es muy usada por Brass, que la considera más sensible que la (6) para realizar los ajustes que permiten la estimación de α y β .

5 Cuando $\beta \neq 1$ existe un punto x_2 en que $Y(x)$ e $Y^S(x)$ por un lado y l_x y l_x^s , por el otro, se cortan, es decir que la relación (9) se hace cero.

$$Y^S(x_2) = -\frac{\alpha}{\beta-1}$$

En el caso de $\beta > 1$ el denominador es siempre positivo, todo depende del signo de α . Si $\alpha > 0$, se tiene que $Y^S(x_2) < 0$, lo que ocurre para $0 < x < x_1$, siendo, como se vio, x_1 la edad mediana, y dado que para α positivo, l_{x_1} estaba por debajo de $l_{x_1}^s$, la intersección sería entre 0 y x_1 .

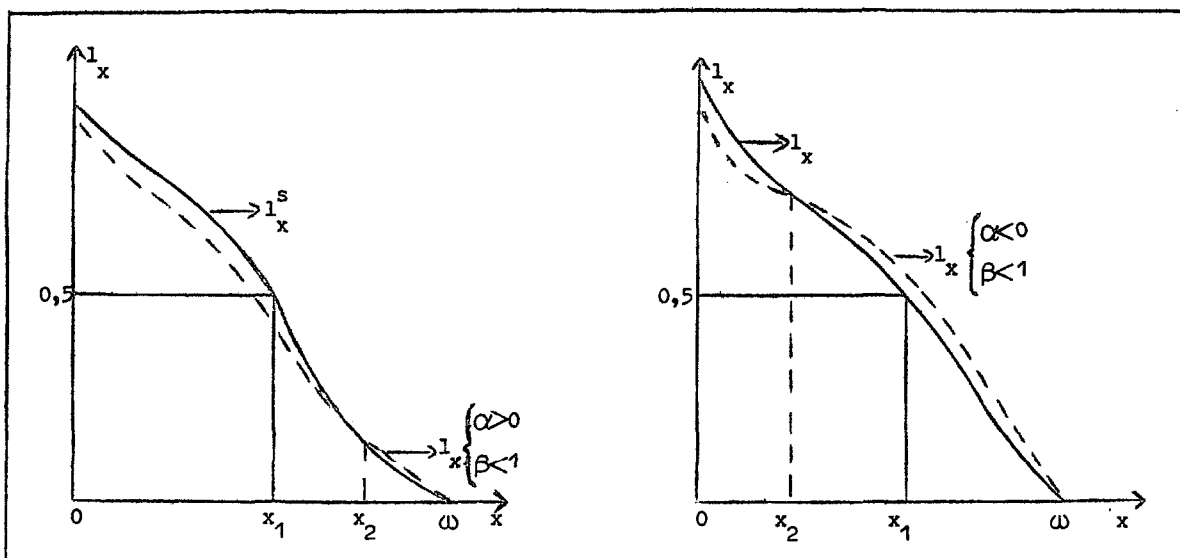
En cambio, si $\alpha < 0$, $Y^S(x_2) > 0$ y la intersección estaría entre x_1 y ω .



d) Caso de $\beta < 1$

Análogamente, en este caso se parte de $Y^S(x_2) = -\frac{\alpha}{\beta-1}$ pero con el denominador negativo.

Para α positivo, $Y^S(x_2)$ es mayor que cero, lo que ocurre para $x_1 < x < \omega$. Por el contrario, si $\alpha < 0$, $Y^S(x_2) < 0$ lo que sucede para $0 < x < x_1$.



La experiencia indica que los valores de β , ya sean mayores o menores que 1, están muy próximos a la unidad, significando esto que las intersecciones se dan en los extremos de la vida. El parámetro β señalaría diferencias de la incidencia de la mortalidad por edades entre la "estándar" y la otra tabla de mortalidad que se considere, pero los niveles se reflejan fundamentalmente en los valores de α .

Como ejemplo de lo anterior, en el cuadro 2 se muestra la variación de los niveles de mortalidad, medidos por la esperanza de vida al nacer, en relación a distintos valores de los parámetros.

El nivel de la estándar ($\alpha = 0$ y $\beta = 1$) está dado por $e_0^0 = 43,4$. Se puede ver si lo expuesto en este capítulo se verifica en este cuadro. Por ejemplo, se dijo que si $\alpha > 0$ es de esperar que la mortalidad sea más alta que para la estándar, así es que se encuentra, para $\alpha = +0,5$, que la esperanza de vida al nacer está entre 24,7 y 31,0 según sea el valor de β .

Cuadro 2
 VARIACION DE LA ESPERANZA DE VIDA AL NACER
 EN RELACION A α Y β

α	β		
	0,6	1,0	1,6
+0,5	24,7	26,9	31,0
0,0	43,1	43,4	45,0
-0,5	61,7	58,9	57,2
-1,0	75,8	70,7	66,5

Fuente: Brass, W., "Sobre la escala...", op.cit., cuadro 5, pág. 147.

IV. COMPARACION DEL SISTEMA DE TABLAS DE VIDA MODELO DE BRASS CON OTROS SISTEMAS

1. Planteamiento del problema

En la introducción de este documento ya se planteaba el problema de la flexibilidad que debería tener un modelo. ¿En qué caso es un modelo muy rígido? ¿Cuándo es demasiado flexible? En este caso particular, en que se trata de describir la mortalidad de un área determinada a través de todas las edades, la interrogante es: ¿qué dimensión debe tener el modelo que permita describir aproximadamente las probabilidades de muerte por edades? Dicho en otras palabras: ¿cuántos parámetros serían suficientes para obtener un resultado satisfactorio?

Otra interrogante posible es: ¿hasta qué punto se debe complicar un modelo para estar satisfechos de sus cualidades?

No se pretende dar respuesta aquí a esto, sino más bien hacer una comparación del sistema de Brass con los modelos más importantes que se han elaborado, enmarcándolos en ese contexto, es decir, enfrentándolos ante esas disyuntivas.

Los intentos de expresar la mortalidad por edades de las poblaciones pueden ser clasificados en dos grandes grupos: los que trataron de encontrar una relación matemática de la mortalidad en función de la edad y los que crearon conjuntos de tablas de mortalidad para que sirvan de marco de referencia. Los primeros han sido, además, los más antiguos, entre los que se pueden mencionar a Gompertz, Makeham, Pearson, etc. El problema más serio con que se enfrentaron estos autores fue el de poder abarcar con una sola función todos los tramos de edades, y así, algunos realizaron el modelo solamente para determinadas edades. O, como en el caso de Pearson, que tuvo que combinar tres distribuciones normales independientes.

Los sistemas de tablas modelo de mortalidad son los que más se han usado en demografía en las últimas décadas y los que interesan en este caso. En lo que sigue de este capítulo, se hará un breve análisis comparativo de los

siguientes modelos: a) Naciones Unidas (1955), b) Coale y Demeny (1966), c) Gabriel y Ronen (1958), d) Lederman y Breas (1959), e) Bourgeois-Pichat (1965), f) Lederman (1969) y g) William Brass.

2. Las tablas modelo de mortalidad de Naciones Unidas ^{7/}

Para construirlas, se tomaron en cuenta 158 tablas de mortalidad seleccionadas de la serie de Anuarios Demográficos de las Naciones Unidas para el período 1900-1950. Es conveniente hacer notar que, de ellas, 112 pertenecen a países de Europa y América del Norte. América del Sur, África y Asia están muy poco representadas.

Se encontró que existían correlaciones muy marcadas entre las probabilidades de morir a una edad determinada con las adyacentes. Esto quiere decir que si para determinado nivel de la mortalidad se conoce la probabilidad de muerte en el primer año de vida (${}_1q_0$), a partir de ella se deduce para las edades siguientes como ser ${}_4q_1$ y luego con esta probabilidad se encuentra el valor de ${}_5q_5$, y así sucesivamente hasta completar la tabla de mortalidad.

Si se adopta este procedimiento partiendo de distintos niveles de ${}_1q_0$, se genera un sistema de tablas modelo, que, en el caso de Naciones Unidas, fue hecho a través de regresiones parabólicas.

El criterio de nivel de mortalidad fijado fue la esperanza de vida al nacer (e_0^o) y se produjeron tablas de mortalidad para cada sexo y para el conjunto, a las que se adjudicaron desde lo que se llamó "nivel 0", que sería el más bajo y correspondería a una $e_0^o = 20,0$ hasta el "nivel 115" con $e_0^o = 73,9$.

Si bien se publicaron niveles solamente de 5 en 5 y, generalmente, para los intermedios se realizan interpolaciones, podría fácilmente, a través de las regresiones existentes, obtenerse la tabla de vida para cualquier "nivel" de mortalidad incluso superior a 115. Vale decir que si bien el sistema no se expresa por una sola fórmula matemática, sí puede manifestarse por un número limitado que son las parábolas de regresión encontradas.

^{7/} Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad, tablas de mortalidad para países insuficientemente desarrollados, ST/SOA/A 22, y Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, ST/SOA/A 25, Manual III.

Estas tablas están sujetas a varias críticas, entre las cuales interesa destacar:

- a) Existe un sesgo acumulado que es introducido por la serie de ecuaciones de regresión. Pero más importantes en este análisis son las objeciones que siguen.
- b) Como ya se dijo, las tablas de mortalidad elegidas para calcular los modelos no son representativas de la mortalidad de todas las áreas del mundo y quizás menos de los países con estadísticas insuficientes. Esto significa que no se estaría cubriendo toda la experiencia de mortalidad que existe en el mundo y aun menos la de países que más uso tendrían que hacer de estos instrumentos.
- c) Son modelos de una sola dimensión, dependen de un solo parámetro, por ejemplo, con un valor de l_{q_0} se determina una única tabla de mortalidad. Esto no corresponde de ninguna manera a la realidad, pues una mortalidad infantil alta no tiene por qué estar por fuerza asociada a una mortalidad adulta elevada, o a la inversa.

El modelo de Naciones Unidas es extremadamente rígido, puede ser útil en múltiples aspectos, pero difícilmente puede ser adaptado a distintas situaciones que pudieran encontrarse en las poblaciones humanas.

3. Las tablas modelo de mortalidad regionales de Coale y Demeny ^{8/}

Se trata de cuatro conjuntos de tablas modelo de mortalidad, a los que los autores designaron "Oeste", "Este", "Norte" y "Sur".

Para cada una de estas familias, se calcularon 24 tablas para hombres y mujeres por separado, con un máximo de mortalidad que corresponde a $e_0^0 = 20$ años, al que se llamó "Nivel 1" y luego, variando, siempre en el sexo femenino, la esperanza de vida al nacer de 2,5 en 2,5 hasta 77,5 años, que sería el "Nivel 24".

Cada "familia" refleja patrones homogéneos de mortalidad por edades, comparados con la experiencia mundial media, y se seleccionaron, aproximadamente, como sigue:

^{8/} Coale y Demeny, Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, 1966.

- a) "Norte". Está basada en la experiencia de tablas de mortalidad de los países escandinavos. Asocia, en general, una baja mortalidad de ancianos con una baja mortalidad infantil en relación a la de 1 a 4 años.
- b) "Este". Es el reflejo de una colección de tablas de mortalidad pertenecientes a Europa Central. Su característica principal es una relativamente alta mortalidad de ancianos y también elevada mortalidad infantil.
- c) "Sur". Como su nombre lo indica, esta familia representa la mortalidad de los países del sur de Europa (Italia, Portugal y España). Expresa una alta mortalidad hasta los 5 años de edad y tasas bajas en edades adultas avanzadas (40 a 60 años) y nuevamente alta por encima de los 65 años.
- d) "Oeste". Abarca la estructura de mortalidad perteneciente a Australia, Canadá, Estados Unidos, Israel, Japón, Nueva Zelandia, Sudáfrica, Taiwan y 13 países de Europa Occidental. Es una colección residual que no muestra desviaciones consecuentes con la media total mundial de estructura de la mortalidad según la edad.

El cálculo de cada familia estuvo basado en ecuaciones de regresión lineal y logarítmica que expresan las correlaciones encontradas entre la esperanza de vida a la edad 10 (e_{10}^0) por un lado y valores de las probabilidades de muerte (${}_nq_x$) por otro. Se encontraron muy altos coeficientes de correlación y más altos cuando se trataba de la correlación dentro de cada uno de los cuatro grupos, lo que constituye uno de los argumentos fundamentales para formar estas familias.

En el caso de estos modelos caben, entre otras, las siguientes consideraciones:

- a) Al igual que en el caso del sistema de Naciones Unidas, se considera la experiencia, fundamentalmente, de países con datos confiables con alta predominancia de europeos. Tres de las familias se calculan únicamente con países de Europa, y en la familia "Oeste" los países de Europa representan el 60 por ciento. No se puede pensar que la variedad encontrada en Europa alcance para cubrir la estructura y niveles de mortalidad que existen en todo el mundo.
- b) En cierta forma, la construcción de estas tablas constituye un intento por superar la extrema rigidez que ofrecía el sistema de Naciones Unidas, basado en un solo parámetro que definía totalmente una tabla de vida. Por eso se calcularon cuatro familias, es decir que existen cuatro posibilidades y si bien cada una es de una sola dimensión, si se sabe qué grupo adoptar, se puede hacer una mejor aproximación a la realidad.

Estos modelos son, en base de lo anterior, menos rígidos que los de Naciones Unidas, pero son solamente cuatro las combinaciones posibles y la realidad es mucho más compleja y más rica en variaciones de la mortalidad con la edad.

Coale y Demeny han mejorado las insuficiencias del Modelo de Naciones Unidas, pero siguen aún careciendo de la flexibilidad que en algunas ocasiones pudiera requerirse.

4. Otros modelos

Gabriel y Ronen, Lederman y Breas, y Bourgeois-Pichat, por ejemplo, hacen esfuerzos por superar las dificultades mencionadas. Estos autores analizan críticamente los modelos de Naciones Unidas y luego, a partir de los mismos datos básicos, realizan sus propias elaboraciones.

Gabriel y Ronen^{9/} utilizan como modelo ecuaciones de regresión, calculadas a través de la técnica de mínimos cuadrados, tanto para la esperanza de vida al nacer, relacionada con la probabilidad de muerte del primer año de vida, como para las probabilidades de morir en todas las edades con dicha 1^{q_0} .

Lederman y Breas^{10/} han aplicado una técnica que se basa en el análisis factorial y han calculado tres "componentes principales" de la mortalidad. Un artículo del Boletín No. 6 de Naciones Unidas^{11/} amplía este estudio encontrando cinco "componentes principales". Este análisis muestra que son cinco los factores independientes que actúan sobre la mortalidad.

Bourgeois-Pichat^{12/} toma de nuevo este mismo tipo de análisis y construye tres series de tablas modelo de mortalidad: la desviada hacia arriba, la intermedia y la desviada hacia abajo, en que están representados los extremos de la mortalidad y lo que sería el modelo de Naciones Unidas (intermedio).

9/ Gabriel y Ronen, "Estimates of Mortality from Infant Mortality Rates", Population Studies, Vol. XII, No. 2, noviembre, 1958.

10/ Lederman y Breas, "Les dimensions de la mortalité", Population, 14^e année, octobre-décembre, 1959, No. 4.

11/ Naciones Unidas, "Análisis factorial de las tasas de mortalidad por edad y por sexo", Boletín de Población No. 6, pág. 153, ST/SOA/No. 6, 1962.

12/ Naciones Unidas, El concepto de población estable, ST/SOA/A 39, Anexo II, pág. 139.

Sully Lederman^{13/} construye tablas modelo con una sola entrada que no necesariamente es la mortalidad infantil (7 posibilidades que incluyen el nivel general de la mortalidad, la mortalidad en la niñez y la mortalidad adulta) y tablas modelo de doble entrada con 3 combinaciones distintas.

Estos autores, si bien hacen un estudio crítico válido de los sistemas de Naciones Unidas, emplean elementos matemáticos poco operativos para ser utilizados a nivel de los que serían usuarios más directos de los modelos de mortalidad.

5. El sistema de tabla de vida modelo de Brass

Este sistema es distinto de los anteriores. No se trata de un conjunto de tablas de vida modelo, sino que, en cierta forma, se parece a los primeros intentos de expresar, con una relación matemática, la ley de mortalidad por edades.

Como se vio en capítulos anteriores, la relación fundamental es

$$\text{Logito}(1 - l_x) = \alpha + \beta \text{Logito}(1 - l_x^s)$$

Siendo:

$$\text{Logito}(1 - l_x) = 1/2 \ln \frac{1 - l_x}{l_x}$$

para l_x función de sobrevivencia que se desea describir con el modelo y l_x^s función de sobrevivencia estándar que se usa como escala para dicha descripción.

^{13/} Lederman, S., Nouvelles Tables - Types de Mortalité, Cahier No. 53, INED, Presses Universitaires de France, 1969.

Mientras en los modelos tradicionales (Naciones Unidas y Coaley Demeny) se usaba un solo parámetro, obsérvese que aquí juegan dos parámetros (α y β)^{14/} y, además, una tabla estándar que implica una curva determinada.

La mayor flexibilidad del modelo es obvia, las variaciones de α producen cambios en los niveles de la mortalidad y las de β en la forma de la mortalidad por edades.

Si β fuera igual a 1 y constante, se estaría en un caso parecido al sistema de Naciones Unidas: con α variarían el nivel, pero respetaría siempre el patrón de mortalidad por edades de la estándar.

La estándar a usar depende de la aplicación particular que se haga. Brass usa, generalmente: a) una "estándar general", que está basada, fundamentalmente, en la mortalidad de Europa y que tiene mucha similitud con la ley de mortalidad que usan Naciones Unidas y Coale y Demeny en su modelo "Oeste", b) una "estándar africana", que tiene una mortalidad de la niñez relativamente más alta que la infantil, comparada con la "estándar general".

Los indicios que se tengan de la mortalidad que se desea expresar a través de un modelo, darán las pautas de cuál estándar puede ser el más adecuado. Mientras en el modelo de Naciones Unidas se tenía una única opción, en Coale y Demeny 4 opciones, el sistema de Brass permite infinitas opciones y, además, adapta el nivel y la forma a través de la influencia de α y β .

La aplicación de esta técnica es muy ventajosa, por lo siguiente:

- a) El sistema de Brass se resume en una única expresión muy sencilla, cosa que no ocurre usando las otras técnicas descritas anteriormente. El hecho de usar una fórmula matemática única facilita, fundamentalmente, el uso de computadores en los cálculos que sean necesarios. Además, fácilmente puede generarse un conjunto de tablas modelo de mortalidad como las de Naciones Unidas y Coale y Demeny. En los anexos del trabajo citado de Carrier y Hobcraft se encuentra un ejemplo de ello.
- b) Teniendo ciertas orientaciones sobre la mortalidad por edades, con este sistema es posible respetar, en gran medida, los datos observados. El hecho de que exista esa flexibilidad dada por sus dos parámetros, asegura que no se esté forzando en demasía la propia realidad. En caso de no conocerse absolutamente nada de la mortalidad que se desea describir, siempre se está en condiciones de usar este sistema con la misma rigidez que el de Naciones Unidas, tomando $\beta = 1$.
- c) Las ventajas anteriores se logran sin las complicaciones que introducen otros autores, no siempre con mucho éxito, tratando de mejorar el esfuerzo pionero de Naciones Unidas y el posterior de Coale y Demeny.

^{14/} Los parámetros fueron estudiados exhaustivamente en el capítulo III.

V. USOS MAS IMPORTANTES DEL SISTEMA MODELO DE BRASS

1. Objetivo de esta sección

No es posible enumerar exhaustivamente los usos que se pueden hacer de la relación fundamental (6) planteada en este documento. Podrán darse algunas ideas importantes al respecto, pero depende, fundamentalmente, de la imaginación y sentido común del usuario.

Una división práctica para describir algunas formas de utilizar los conceptos expuestos en los capítulos anteriores, es la siguiente:

- a) Para evaluación y ajuste de información ya conocida.
- b) Para la construcción de una tabla de mortalidad.
- c) Para proyecciones de mortalidad.
- d) Para la construcción de poblaciones estables.

Se expondrá brevemente cómo puede procederse en ciertos casos concretos. Interesa principalmente mostrar los múltiples usos de este sistema modelo, sin profundizar cada uno en particular.

2. Evaluación y ajuste de información ya conocida

Es posible que se disponga de cierta información sobre la mortalidad de un área determinada, pero que, debido a la fuente que la proporciona, haya irregularidades que convenga corregir.

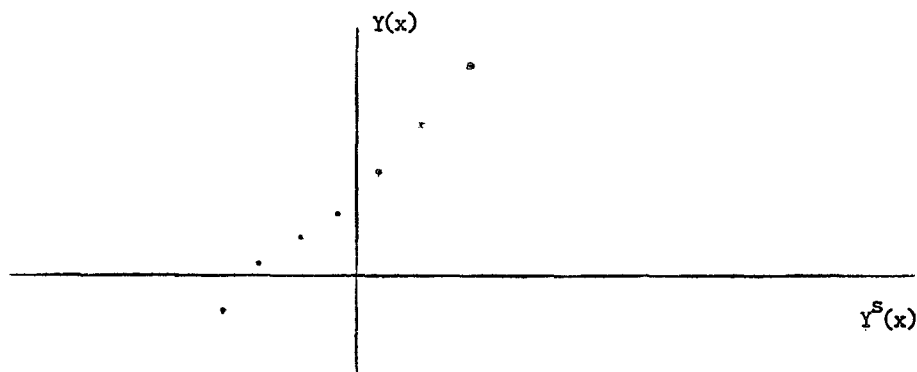
Se puede plantear el caso de que la información con que se cuenta es la función de supervivencia y se desea ajustar para eliminar desviaciones y sesgos que pudieran afectarla.

De acuerdo con la fórmula (6) la relación que existiría entre estos l_x observados y un l_x^S (estándar) teórico sería, aproximadamente, la siguiente:

$$Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x)$$

siendo $Y(x)$ el logito de $(1 - l_x)$ e $Y^S(x)$ el logito de $(1 - l_x^S)$.

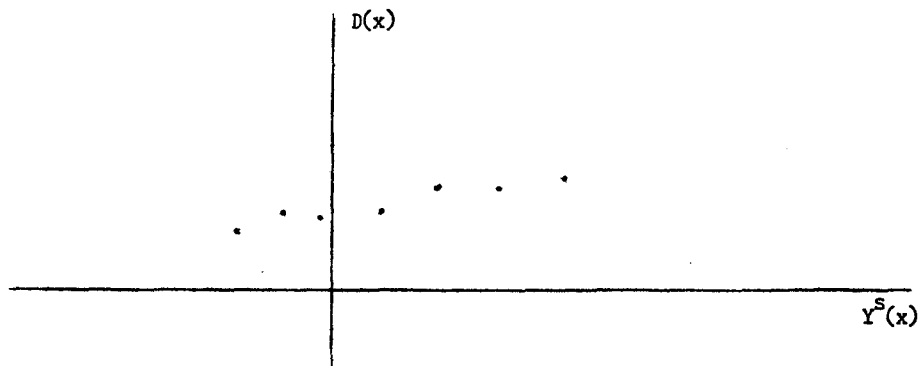
En un gráfico en que se ubique $Y(x)$ en la ordenada e $Y^S(x)$ en la abscisa, se esperaría que los puntos se situaran alrededor de una línea recta.



En lugar de $Y(x)$ en la ordenada, puede ser conveniente trabajar con $D(x) = Y(x) - Y^S(x)$ y los puntos también deberían comportarse en esta forma, pues

$$D(x) = Y(x) - Y^S(x) = \alpha + (\beta - 1) Y^S(x)$$

La ordenada en el origen $[Y^S(x) = 0]$ es la misma (α), pero el coeficiente angular, en lugar de estar en torno a 1, estaría alrededor de 0. Esto último hace que se puedan ver con más claridad las variaciones, al tratarse de una alineación casi paralela al eje horizontal;



Luego de un estudio de las desviaciones que se producen en los puntos, se hace necesario realizar el ajuste que permita hallar los valores estimados de los parámetros.

Se puede usar cualquiera de las técnicas que existen en la materia. Brass recomienda un método que consiste en calcular los siguientes valores:

$$\bar{Y}_1^S(x) = \text{Promedio de la primera mitad de los valores de } Y^S(x).$$

$$\bar{Y}_2^S(x) = \text{Promedio de la segunda mitad de los valores de } Y^S(x).$$

$$\bar{D}_1(x) = \text{Promedio de la primera mitad de los valores de } D(x).$$

$$\bar{D}_2(x) = \text{Promedio de la segunda mitad de los valores de } D(x).$$

y con ellos se deduce el coeficiente angular:

$$\widehat{(\beta - 1)} = \frac{\bar{D}_2(x) - \bar{D}_1(x)}{\bar{Y}_2^S(x) - \bar{Y}_1^S(x)}$$

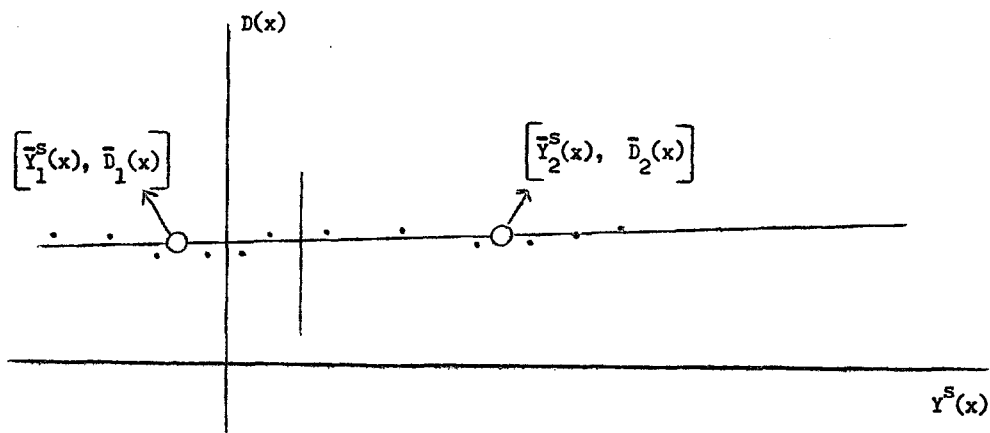
y $\hat{\alpha}$ se despeja de

$$\bar{D}_2(x) = \hat{\alpha} + \widehat{(\beta - 1)} \bar{Y}_2^S(x)$$

o

$$\bar{D}_1^S(x) = \hat{\alpha} + \widehat{(\beta - 1)} \bar{Y}_1^S(x)$$

Ilustrado gráficamente:



De aquí se obtiene, entonces, $\hat{Y}(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Y^S(x)$ y como se conoce $Y^S(x)$ para las distintas edades, se pueden obtener $\hat{Y}(x)$ ajustados y a través de la relación

$$Y(x) = 1/2 \ln \frac{1 - l_x}{l_x}$$

los valores de \hat{l}_x ajustados.

Lo fundamental es tener buen criterio en la selección del estándar, en el análisis crítico de los puntos presentados en el gráfico y en el criterio de ajuste. En el citado documento del seminario dirigido por Brass en Costa Rica, sesión 6, se pueden encontrar más elementos sobre esto.

Aun partiendo de algunos valores aislados de l_x , es posible, a través de este procedimiento, reproducir la función de supervivencia ajustada para todo el tramo de edades. Se puede usar la relación como forma de interpolación para lograr, partiendo de una tabla de mortalidad abreviada, una tabla completa. Para ello, solamente se necesitaría contar con una tabla estándar completa, luego de hallar $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ todo se resumiría a pasar de $Y^S(x)$ a $\hat{Y}(x)$ para cada edad individual.

3. Construcción de una tabla de mortalidad

La idea central del sistema de Brass está en no adjudicar rígidamente un modelo como representativo de la realidad, sino que respetar al máximo los datos observados, la información disponible y, a partir de ella, elaborar una tabla de mortalidad. Presenta un método para el caso de contar con un único censo y otro para cuando se tiene información de censos.

a) Caso de un solo censo (Tabla de mortalidad femenina)^{15/}

Se requiere información sobre mortalidad infantil y juvenil, por una parte, y mortalidad adulta, por otra, para luego formar la tabla en todo el tramo de edades.

^{15/} Farnós, A., Guatemala: Censo Experimental de 1970. Aplicación de las técnicas de Brass para estimar fecundidad y mortalidad, CELADE, Serie C, No. 743 y Chackiel, J. y Ortega, A., Tablas de mortalidad femenina de Guatemala, Honduras y Nicaragua, CELADE, Serie A, No. 1033.

Para las primeras edades, se debe recurrir a las preguntas censales de "número de hijos nacidos vivos" y "número de hijos sobrevivientes", lo que permite calcular, en forma confiable, la función de sobrevivientes (l_x) para las edades 2, 3 y 5 ^{16/}.

La mortalidad adulta se obtendría de la información de "madres vivas" y sería a través de las probabilidades especiales de supervivencia, como, por ejemplo, l_{35}/l_{25} , l_{40}/l_{25} , l_{45}/l_{25} , l_{50}/l_{25} , etc. ^{17/}.

En definitiva, se tiene el problema de construir una tabla de mortalidad femenina partiendo de la siguiente información:

$$\begin{array}{l} l_2 \\ l_3 \\ l_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{35}/l_{25} \\ l_{40}/l_{25} \\ l_{45}/l_{25} \\ l_{50}/l_{25} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

Con ayuda del gráfico de la página siguiente se tratará de explicar el funcionamiento del método.

Las edades 2, 3 y 5 están muy próximas y no se las puede considerar más que como un solo punto de apoyo. Es decir, de esa información de las primeras edades, no es posible definir los parámetros que las relacionarían

^{16/} Naciones Unidas, "Métodos para establecer mediciones demográficas fundamentales, a partir de datos incompletos", ST/SOA/A 42, Manual IV, cap. VII, y Brass, W. y Coale, A.J., "Métodos de Análisis y Estimación" en Métodos para estimar ..., op.cit., pág. 11.

^{17/} Brass, W., Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (Fecundidad y Mortalidad), CELADE, Serie DS, No. 9, Sesión 6 y Brass, W. y Hill, K.H., "Estimación de la mortalidad adulta a partir de información sobre orfandad" en Métodos para estimar ..., op.cit., pág. 225.

con una estándar. La idea de Brass es partir de esas edades con un $\beta = 1$ hasta la edad 25, lo que permite encontrar un $\hat{\ell}_{25}$ que, por supuesto, no es el verdadero. Analíticamente:

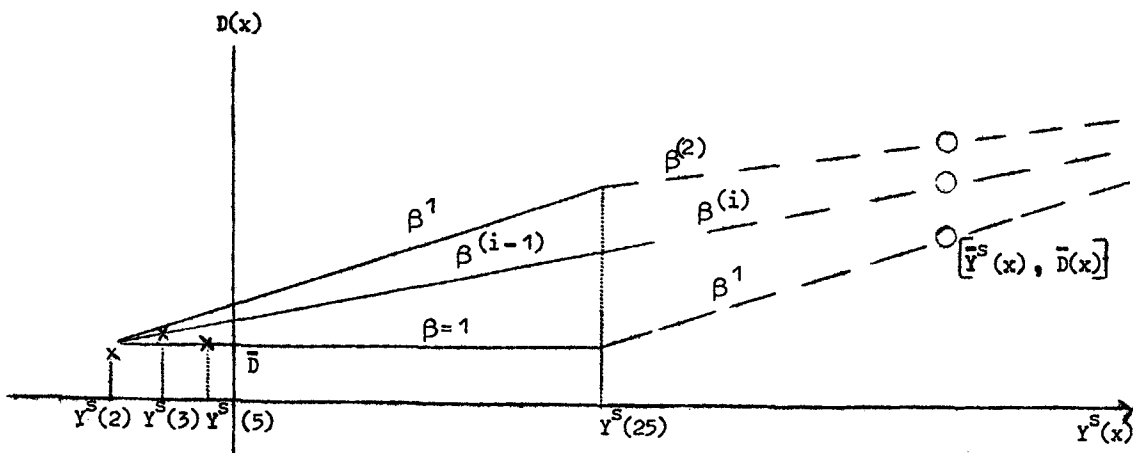
$$D(2) = Y(2) - Y^S(2)$$

$$D(3) = Y(3) - Y^S(3)$$

$$D(5) = Y(5) - Y^S(5)$$

$$\bar{D} = \frac{D(2) + D(3) + D(5)}{3}$$

Con el promedio de los tres valores, se ajustan los valores de esas edades, y se obtiene $\bar{D} = \alpha$ ya que $\beta = 1$.



De esta forma:

$$\hat{Y}(2) = Y^S(2) + \bar{D}$$

$$\hat{Y}(3) = Y^S(3) + \bar{D}$$

$$\hat{Y}(5) = Y^S(5) + \bar{D}$$

y la primera estimación de $\hat{Y}(25) = Y^S(25) + \bar{D}$, que permite calcular fácilmente $\hat{\ell}_{25}$.

A su vez, este $\hat{\ell}_{25}$, multiplicado por las probabilidades de supervivencia que brinda la información de orfandad, permite obtener $\hat{\ell}_{35}$, $\hat{\ell}_{40}$, $\hat{\ell}_{45}$, $\hat{\ell}_{50}$, etc., estimados.

La tendencia de $\hat{\ell}_{35}$ en adelante puede expresarse en un β^1 que representa el coeficiente angular de la recta de ajuste que va desde el punto

$$[Y^S(25), D(25)]$$

a

$$[\bar{Y}^S(x), \bar{D}(x)]$$

que es el promedio de los puntos siguientes.

Con este β^1 se inicia el procedimiento a partir de las edades 2, 3 y 5 para calcular un $\hat{\ell}_{25}^1$ estimado, que conducirá a $\hat{\ell}_{35}^1$, $\hat{\ell}_{40}^1$, $\hat{\ell}_{45}^1$, ..., y, por consiguiente, a un $\beta^{(2)}$.

Esto se continúa en forma iterativa hasta encontrar un coeficiente angular $\beta^{(i)}$ que sea igual o muy próximo a $\beta^{(i-1)}$.

La relación final será entonces:

$$Y^{(i)}(x) = \alpha^{(i)} + \beta^{(i)} Y^S(x)$$

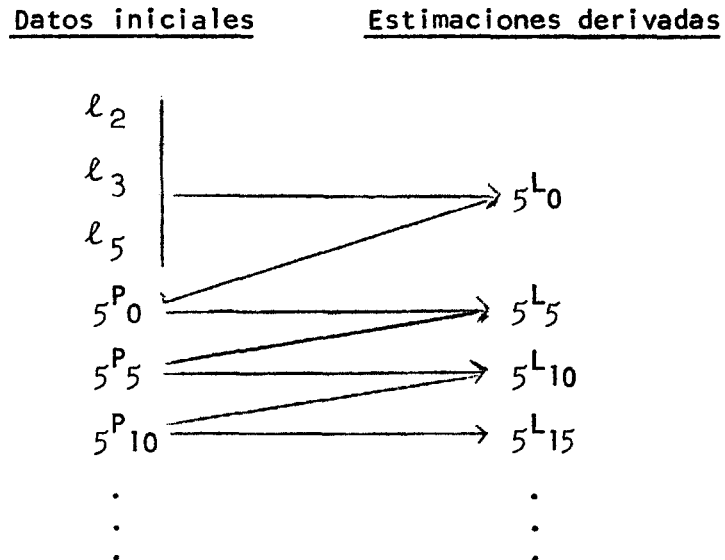
y a partir de ella se calculan todas las funciones de la tabla de mortalidad femenina.

b) Caso de dos censos^{18/}

La mortalidad infantil y juvenil obtenida a partir de "número de hijos nacidos vivos" y "número de hijos sobrevivientes" que suministra el censo más reciente, se combina con las relaciones de supervivencia intercensal que expresan la mortalidad adulta.

Las situaciones pueden ser muy variadas si se consideran los años que separan a ambos censos, pero aquí se ilustrará el caso más sencillo de un período intercensal de cinco años, y se puede ampliar el estudio de los otros casos en la publicación mencionada del seminario de San José, Sesión 7.

Se tienen, entonces, los datos iniciales que figuran en la primera columna del cuadro siguiente:



Siendo:

$5L_x$ = población estacionaria entre las edades x y $x+5$.

$5P_x$ = relación de supervivencia por cinco años de la población con x a $x+5$ años de edad.

Con los l_x de las primeras edades, se logra un valor estimado de $5L_0$ y luego, multiplicado por $5P_0$, se obtiene la estimación de $5L_5$ y así sigue la cadena que se muestra en el cuadro anterior.

^{18/} Rosero, L., El sistema modelo de Brass. El Salvador: 1961-1971, CELADE, Serie C, No 1001, San José, Costa Rica, 1976.

Ahora, para ajustar estos valores, se procede a pasar de ${}_5L_x$ a valores de ℓ_x de la siguiente manera:

$$1/5 {}_5L_5 = \ell_{7,5}$$

$$1/5 {}_5L_{10} = \ell_{12,5}$$

⋮

$$1/5 {}_5L_x = \ell_{x+2,5}$$

⋮

Los mismos valores se toman para la tabla de mortalidad estándar, y se plantea la ecuación:

$$D(x) = \text{logito} \left(1 - \frac{1}{5} {}_5L_x \right) - \text{logito} \left(1 - \frac{1}{5} {}_5L_x^s \right) = \alpha + (\beta - 1) \text{logito} \left(1 - \frac{1}{5} {}_5L_x^s \right)$$

o sea

$$D(x) = \alpha + (\beta - 1) \text{logito} \left(1 - \ell_{x+2,5}^s \right)$$

Luego, el ajuste se realiza por el procedimiento indicado en el punto 2 de este capítulo.

Sí no se contara con la información de ${}_5L_0$ en la forma antes mencionada, podría buscarse un valor razonable, estudiar la tendencia del gráfico en el momento del ajuste y modificarlo hasta lograr la linealidad deseada.

4. Proyecciones de la mortalidad

El método consta del estudio de la tendencia pasada de los parámetros α y β que surgen de relacionar las tablas de mortalidad pertenecientes al pasado, con una estándar. Esta relación se manifiesta tal como se aprecia en el gráfico 8, construido con datos de Suecia para diversos períodos.

La base de esto está en lo que se estudió en el capítulo III sobre el significado de los parámetros. Mientras α muestra las variaciones en los niveles de la mortalidad, β refleja los cambios que se han ido produciendo en el patrón por edades. De ahí que, con el tiempo, el valor del primero sea mucho más sensible, mientras que el segundo varía alrededor de su valor central 1, que da origen a la serie de líneas casi horizontales que describe el gráfico 8.

Lo anteriormente expuesto permite que para realizar la proyección en determinadas ocasiones sea conveniente considerar $\beta = 1$ y trabajar solamente con un parámetro. Si bien se pueden perder variaciones importantes del patrón de la mortalidad específica, es quizás una forma de eliminar ciertas desviaciones erróneas ^{19/}.

5. Construcción de poblaciones estables

Una población es estable cuando cumple con las condiciones de ser cerrada (no afectada por migraciones exteriores) y de tener niveles de mortalidad y fecundidad por edad constantes en el tiempo. Estas hipótesis conducen a una estructura por edades de la población, invariable, y que se representa por la siguiente expresión ^{20/}:

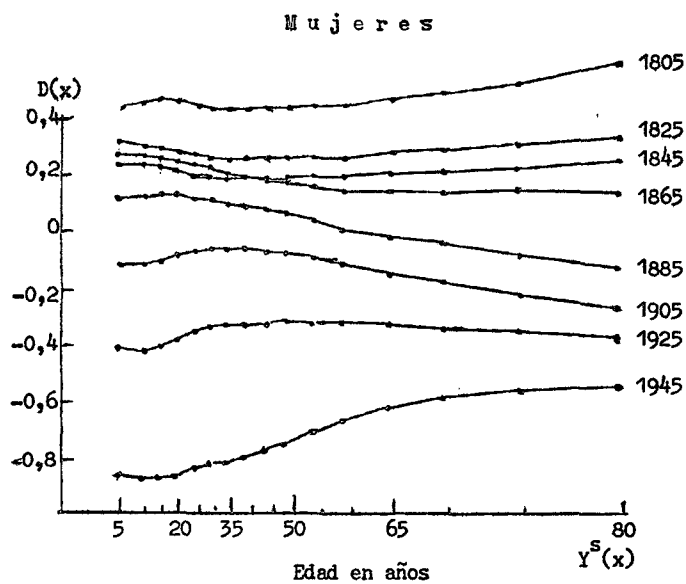
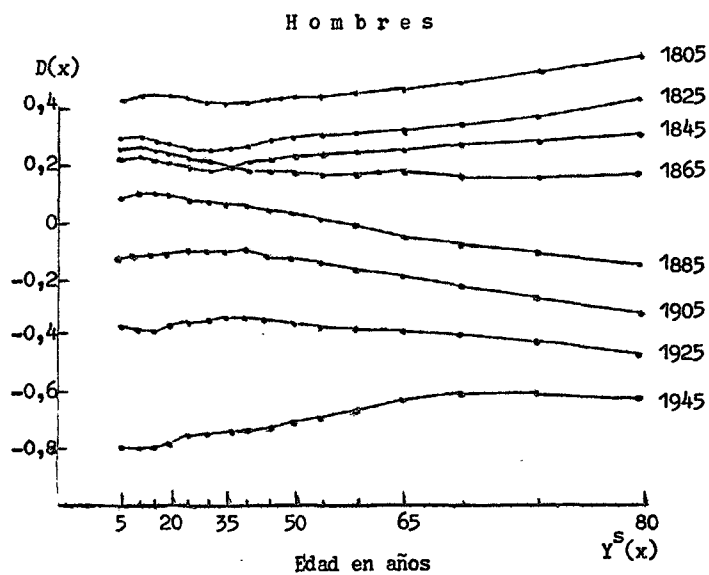
$$C(x) = b e^{-rx} p(x)$$

^{19/} Brass, W., "Método de generaciones para proyectar tasas de mortalidad", en Métodos para estimar ..., op.cit., pág. 87.

^{20/} Naciones Unidas, El concepto de población estable ..., op.cit.

Gráfico 8

SUECIA: DIFERENCIAS DEL ESTANDAR ESPECIAL EN
LOS SOBREVIVIENTES POR EDAD EN ESCALA
LOGITO, POR PERIODOS DE TIEMPO



Fuente: Brass, W., "Sobre la escala ...", op.cit.,
pág. 166.

siendo

b = tasa bruta de natalidad

r = tasa intrínseca de crecimiento

$p(x) = \frac{l_x}{l_0}$ probabilidad de sobrevivir del nacimiento a la edad exacta x.

Para su construcción se necesita, entre otras cosas, conocer la mortalidad a través de la función l_x . Cualquier juego de tablas de mortalidad generaría un juego de poblaciones estables. Esto lleva a plantearse la interrogante: ¿qué ventaja puede tener construir poblaciones estables a partir del sistema de tablas de mortalidad ideado por Brass?

Carrier y Hobcraft ^{21/} dan respuesta a esto elaborando modelos de poblaciones estables de dos y tres parámetros. Cuando se construye una población estable se toma como dato de entrada la fecundidad por edades (primer parámetro) y la mortalidad por edades (segundo parámetro). Ahora sucede que, en el caso particular de utilizar el sistema modelo de Brass, la mortalidad depende de dos parámetros, por lo que, de hecho, se tienen poblaciones estables de tres dimensiones, una dada por la fecundidad y dos por la mortalidad (α y β).

Así como antes se comentaba de la flexibilidad que se le daba a los modelos de tablas de mortalidad al incluir un parámetro más, en este caso cabe hacer las mismas conclusiones. Si se deseara un modelo más rígido, solamente se tiene que tomar $\beta = 1$ y se estaría en los modelos clásicos de poblaciones estables de dos parámetros.

Carrier y Hobcraft encuentran aspectos interesantes del uso que se puede hacer de estas poblaciones, lo que no es materia de este documento.

^{21/} Carrier y Hobcraft, "Estimaciones demográficas...", op.cit., págs. 39 y siguientes.

A N E X O I

FUNCIONES HIPERBOLICAS

1
2
3
4
5

6
7
8
9
10

a) Definiciones analíticas

El seno y el coseno hiperbólico se definen por las siguientes relaciones:

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

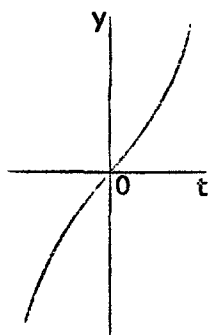
$$\operatorname{cosh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Para $-\infty < t < +\infty$ se tiene que:

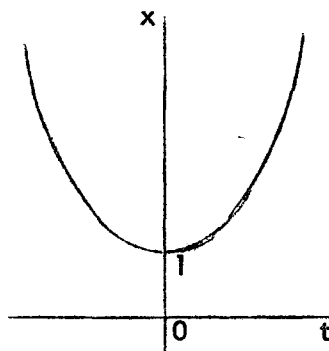
$$-\infty < \operatorname{senh} t < +\infty$$

$$+\infty < \operatorname{cosh} t < +\infty$$

Su representación gráfica es la siguiente:



$y = \operatorname{senh} t$



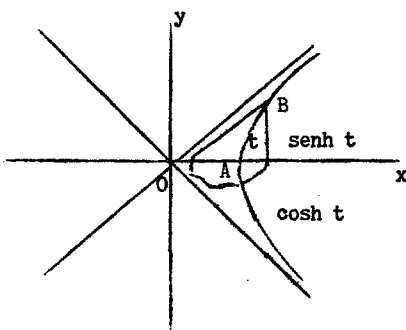
$x = \operatorname{cosh} t$

b) Interpretación geométrica

Así como las funciones trigonométricas se definen a partir de la circunferencia de radio igual a la unidad, en este caso se parte de un punto de la hipérbola equilátera, con parámetro igual a 1:

$$x^2 - y^2 = 1$$

Siendo B un punto de la hipérbola y t la medida del arco \widehat{AB} , las coordenadas de B definen las funciones $y = \sinh t$ $x = \cosh t$.



Si se hace la diferencia de los cuadrados de estas funciones que se expresaron analíticamente más arriba, se obtiene:

$$x^2 - y^2 = \sinh^2 t - \cosh^2 t = 1$$

que es concordante con la hipérbola equilátera de parámetro igual a la unidad.

c) Otras funciones hiperbólicas

La función tangente hiperbólica se define como:

$$\operatorname{tgh} t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

Luego, las funciones recíprocas de las funciones ya mencionadas serían:

$$\operatorname{cosech} t = 1/\sinh t \quad (\text{cosecante hiperbólica})$$

$$\operatorname{sech} t = 1/\cosh t \quad (\text{secante hiperbólica})$$

$$\operatorname{cotgh} t = 1/\operatorname{tgh} t \quad (\text{cotangente hiperbólica})$$

BIBLIOGRAFIA

- Berkson, J., "A Statistically Precise and Relatively Simple Method of Estimating the Bioassay with Quantal Response, Based on the Logistic Function", American Statistical Association Journal, setiembre, 1953.
- Brass, W., Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados, CELADE, Serie E, No. 14, Santiago, Chile, 1974.
- Brass, W., Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (fecundidad y mortalidad), CELADE, Serie DS, No. 9, San José, Costa Rica, 1971.
- Carrier y Hobcraft, Estimaciones demográficas para sociedades en desarrollo, CELADE, Serie D, No. 1026, San José, Costa Rica, 1975.
- Coale y Demeny, Regional Model Life Tables and Stable Populations, Princeton University Press, 1966.
- Chackiel, J. y Ortega, A., Tablas de mortalidad femenina de Guatemala, Honduras y Nicaragua, CELADE, Serie A, No. 1033, San José, Costa Rica, 1977.
- Debasa, Jorge, Chile: Aplicación del método de transformación logito propuesto por el profesor Brass, para analizar la evolución y proyección de la mortalidad, CELADE, inédito.
- Demeny, P., Methods of Demographic Estimation for Statistically Underdeveloped Areas, East-West Center, Honolulu, Hawaii, 1971.
- Farnós, Alfonso, Guatemala: Censo Experimental de 1970. Aplicación de las técnicas de Brass para estimar fecundidad y mortalidad, CELADE, Serie C, No. 143.
- Gabriel y Ronen, "Estimates of Mortality from Infant Mortality Rates", Population Studies, Vol. XII, No. 2, noviembre, 1958.
- Goursat, E., A Course in Mathematical Analysis, Vol. I, Dover Publications Inc., Nueva York, pág. 29.
- Hochsztajn, B. y López, A., Paraguay: Evaluación de nuevas preguntas censales destinadas a medir niveles de fecundidad y mortalidad, Censo Experimental de Ypacaraí, 1971, CELADE, inédito.
- Lederman y Breas, "Les dimensions de la mortalité", Population, 14^o année, No. 4, octubre-diciembre, 1959.
- Lederman, S., Nouvelles Tables Types de Mortalité, Cahier No. 53, INED, Presses Universitaires de France, 1969.

- Naciones Unidas, "Análisis factorial de las tasas de mortalidad por edad y por sexo", Boletín de Población, No. 6, ST/SOA/Serie No. 6, pág. 153, 1962.
- Naciones Unidas, El concepto de población estable. Aplicación al estudio de la población de países que no tienen buenas estadísticas demográficas, ST/SOA/Serie A, No. 39.
- Naciones Unidas, Métodos para establecer mediciones demográficas fundamentales a partir de datos incompletos, ST/SOA/Serie A, No. 42, Manual IV.
- Naciones Unidas, Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad, ST/SOA/Serie A, No. 25, Manual III.
- Naciones Unidas, Modelos de mortalidad por sexo y edad. Tablas modelo de mortalidad para países insuficientemente desarrollados, ST/SOA/Serie A, No. 22.
- Nordio, Raúl, Belén (Argentina): Aplicación del método de Brass a la estimación del nivel de la mortalidad, CELADE, inédito.
- Rinehart, Mathematical Tables, Formulas and Curves, págs. 206, 221 y 265.
- Rosero, L., El sistema modelo de Brass. El Salvador 1961-1971, CELADE, Serie C, No. 1001, San José, Costa Rica, 1976.
- Soto, Zaida, Chile, 1960-1970: Mortalidad intercensal. Una aplicación de la metodología de Brass, CELADE, inédito.

*
* *

F6rm. 578-150. Setiembre de 1977
Mecanograf6a: Juanita Araya

