



NACIONES  
UNIDAS

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA



UNIVERSIDAD  
DE CHILE

DISTRIBUCION RESTRINGIDA

UN MODELO MATEMATICO PARA CONSTRUIR  
TABLAS DE VIDA

por

ALBINO BOCAZ SAAVEDRA  
Profesor del CELADE

Este trabajo está sujeto a modificaciones. Se reproduce para consulta exclusiva del personal docente y estudiantes de este Centro.

Santiago, Chile

1965

Serie B  
E/CN.CELADE.B.21

2419 ✓

## INDICE

	<u>Página</u>
1. Introducción .....	1
2. El modelo matemático .....	2
3. Los ejemplos numéricos .....	4
4. Construcción de una tabla de vida cualquiera ....	10
5. Análisis futuros .....	18

## INDICE DE TABLAS

1. Coeficientes ortogonales para el cálculo de $l_x$ ..	4
2. Coeficientes ortogonales para el cálculo de $l_x$ ..	7
3. Multiplicadores para calcular directamente las $z(x)$ .....	17
4. Valores de $\lambda(x)$ para diversos valores del pará- metro (m) .....	18

## 1. Introducción

En el modelo matemático que se va a considerar, se introducen 6 condiciones para representar lo más cercanamente posible las condiciones de mortalidad de un área.

Estas 6 condiciones se introducen por la naturaleza específica del modelo matemático, ya que en la función que se analizará aparecen 6 cantidades indeterminadas (o parámetros).

En los ejemplos numéricos que se indican -y mientras se investiga con mayor detalle y efectividad el modelo matemático- estas 6 condiciones son:

- a) Conocimiento de 5 valores de sobrevivencia desde el nacimiento:  
 $l_1, l_5, l_{25}, l_{45}$  y  $l_{85}$ .
- b) Nivel de la mortalidad general, resumida a través de la esperanza de vida al nacer:  $e_0^0$ .

La efectividad del modelo matemático o más bien, su capacidad para reproducir los valores ( $l_x$ ) de una tabla de vida real, se ha hecho usando los valores:  $l_5, l_{15}, l_{25}, l_{35}, l_{45}, l_{55}, l_{65}, l_{75}, l_{85}$  como valores de observación y ajustando estos valores por el conocido método de mínimos cuadrados.

Los valores dados por el modelo matemático, luego de determinar la curva de mínimos cuadrados, los denominaremos "valores de mínimos cuadrados" y los denotaremos por las letras mayúsculas "MC".

A través de los ejemplos numéricos que luego se indicarán, podrá verse que estos valores presentan discrepancias relativamente pequeñas desde los valores de las tablas usadas.

La efectividad del modelo y en especial su elasticidad de adaptación se ha probado ajustando los valores quinquenales de 4 tablas de vida, elegidas de las tablas ya conocidas. Estas tablas son:

a) Dos tablas teóricas:

- Tablas modelo de las Naciones Unidas
- Tablas regionales de Coale-Demeny

b) Dos tablas reales:

- Tabla para hombres, en Chile, en 1960
- Tabla para mujeres, en Argentina, en 1947.

Los valores elegidos han sido los valores de las  $(l_x)$  terminados en 5, pero también podrían haberse usado los valores terminados en 0:  $l_{10}$ ,  $l_{20}$ ,  $l_{30}$ ,  $l_{40}$ ,  $l_{50}$ ,  $l_{60}$ ,  $l_{70}$ ,  $l_{80}$ ,  $l_{90}$ . Los terminados en 5 tienen la ventaja que permiten estudiar la tabla de vida en edades más jóvenes.

En un estudio más extenso de la bondad del modelo que se va a proponer pueden estudiarse todas las tablas de vida construidas para la América Latina, para las cuales aún no existen modelos de ninguna naturaleza que las representen con debida propiedad. Este análisis permitirá ver la posibilidad de construir alguna vez tablas modelo propias a la América Latina.

## 2. El modelo matemático

El modelo matemático usado es el siguiente:

$$l_x = e^{\frac{x^m}{\sqrt{\log(w-x)}}} F_4(x) \quad (1)$$

siendo:

- e = base de los logaritmos naturales,
- m = parámetro que puede hacerse depender de la esperanza de vida al nacer,
- w = edad límite de vida,
- $F_4(x)$  = función de 4° grado en (x),
- x = edad, en años.

Este polinomio de 4° grado puede colocarse en la forma:

$$F_4(x) = F_4(v) = b_0 + b_1 f_1(v) + b_2 f_2(v) + b_3 f_3(v) + b_4 f_4(v) \quad (2)$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{x-45}{10} & f_1(v) &= v & f_2(v) &= 3v^2-20 \\
 & & f_3(v) &= v(5v^2-59)/6 & & \\
 & & f_4(v) &= 18 + v^2(7v^2-115)/12 & & 
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

y suponiendo, como se dijo anteriormente, que se hace uso de los valores quinquenales de las  $l_x$ , desde  $l_5$  a  $l_{85}$ .

De acuerdo con la relación (1), este polinomio de 4º grado es igual a:

$$z(x) = \frac{\sqrt{\log(w-x)}}{x^m} \cdot \log l_x = \lambda(x) \cdot \log l_x \tag{4}$$

siendo:

$$\lambda(x) = \frac{\sqrt{\log(w-x)}}{x^m} \tag{5}$$

y notándose por lo tanto que los valores  $z(x)$  no solamente dependen del nivel que puedan alcanzar los valores ( $l_x$ ), sino del valor que pueda atribuirse al parámetro ( $m$ ). Por esta razón, más adelante, se dan los valores de  $\lambda(x)$  para los diversos valores de ( $x$ ) de una tabla abreviada de vida y según sea el valor de ( $m$ ). (Véase la tabla 5).

Con el uso de estos 9 valores de  $l_x$ , los polinomios ortogonales indicados en la relación (3), adquieren los valores indicados en la tabla 1, pudiendo calcularse los coeficientes de regresión ( $b_j$ ) que se indican en (2) en base a las relaciones:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \sum z(v)/9 \\
 b_1 &= \sum f_1(v)z(v)/60 \\
 b_2 &= \sum f_2(v)z(v)/2772 \\
 b_3 &= \sum f_3(v)z(v)/990 \\
 b_4 &= \sum f_4(v)z(v)/2002
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

siendo los denominadores de estas fracciones, la suma de los cuadrados de los diversos valores de los polinomios.

Tabla 1

COEFICIENTES ORTOGONALES PARA EL CALCULO DE  $l_x$

x	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$	$f_4(v)$
5	- 4	28	- 14	14
15	- 3	7	7	- 21
25	- 2	- 8	13	- 11
35	- 1	-17	9	9
45	0	-20	0	18
55	1	-17	- 9	9
65	2	- 8	- 13	- 11
75	3	7	- 7	- 21
85	4	28	14	14

### 3. Los ejemplos numéricos

Tal como se dijo en el punto 1, la bondad del modelo matemático indicado en 2, la probaremos para el caso de 4 tablas de mortalidad.

#### Caso 1

Aplicaremos el modelo primeramente a los valores quinquenales de la tabla de vida, para hombres, Chile, 1960, construida por José Pujol y Odette Tacla, becarios del CELADE.

Como no sabemos qué valor de  $(m)$  es el más apropiado, elegiremos los valores 0.20 y 0.25 para ver los valores de  $(l_1)$  que se obtendrán. Posteriormente, por interpolación lineal, se determinarán los valores  $(l_x)$  de mínimos cuadrados para coincidir con la  $(l_1)$  de la tabla original y ver la bondad del modelo matemático.

Usando el valor  $m = 0.25$ , la tabla de cálculo es la siguiente:

x	$l_x^{PT}$	$-\log l_x^{PT}$	$\lambda(x)$	$z(x)$	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$	$f_4(v)$	$z(x)^{MC}$	$-\log l_x^{MC}$	$l_x^{MC}$
5	84 595	0.07266	0.9457	0.6871	- 4	28	- 14	14	0.6892	0.07268	84 551
15	83 357	0.07906	0.7103	0.5616	- 3	7	7	- 21	0.5561	0.07829	83 505
25	81 099	0.09098	0.6169	0.5613	- 2	- 8	13	- 11	0.5626	0.09120	81 059
35	77 284	0.11191	0.5585	0.6250	- 1	- 17	9	9	0.6316	0.11309	77 074
45	71 300	0.14691	0.5148	0.7563	0	- 20	0	18	0.7544	0.14654	71 361
55	61 906	0.20827	0.4786	0.9968	1	- 17	- 9	9	0.9901	0.20687	62 106
65	46 972	0.32816	0.4458	1.4629	2	- 8	- 13	- 11	1.4662	0.32889	46 893
75	26 579	0.57546	0.4130	2.3766	3	7	- 7	- 21	2.3786	0.57593	26 550
85	8 653	1.06283	0.3756	3.9920	4	28	14	14	3.9908	1.06251	8 659

  

$f_j(v)z(v)$	=	12.0196	20.8396	92.6920	18.4966	9.7486
$b_j$	=	1.33551	0.34733	0.03344	0.01868	0.00487

obteniéndose como valores de los coeficientes de regresión:

$$b_0 = 1.33551, b_1 = 0.34733, b_2 = 0.03344, b_3 = 0.01868, b_4 = 0.00487$$

que permiten calcular el valor de  $z(1)$  mediante la relación:

$$z(1) = b_0 - 4.400b_1 + 38.0800b_2 - 27.7200b_3 + 51.1056b_4$$

con lo que se llega al valor  $l_1 = 87 668$ , superior a 87 444, valor en la tabla original.

Usando el valor de  $m = 0.20$  de la misma manera anterior se obtienen los siguientes valores de  $l_x$ :

x	$l_x^{MC}$
5	84 518
15	83 622
25	80 997
35	76 989
45	71 376
55	62 176
65	46 906
75	26 515
85	8 664

encontrándose como valor de  $l_1$  el valor 86 814, inferior a 87 444, valor de la tabla original.

De esa manera el apropiado valor de  $(m)$  debe ser un valor intermedio. ( $m = 0.24$ ). Realizando una interpolación, que tome el 26 por ciento de los valores para  $m = 0.20$  y el 74 por ciento de los valores para  $m = 0.25$ , se llega a los siguientes valores:

x	$l_x^{MC}$	$l_x^{PT}$
5	84 542	84 595
15	83 535	83 357
25	81 043	81 099
35	77 052	77 284
45	71 365	71 300
55	62 198	61 906
65	46 896	46 972
75	26 541	26 579
85	8 660	8 653

que pueden compararse con los valores  $l_x^{PT}$  de la tabla original (Pujol-Tacla), notándose que la representación dada por el modelo es bastante satisfactoria.

Nota.

Los valores de las  $l_x$  terminadas en 0 se calculan usando los multiplicadores ortogonales que aparecen en la tabla 2, y la esperanza de vida al nacer, usando la relación aproximada:

$$T_0 \approx 0.25 l_0 + 2.65 l_1 + 4.60 l_5 + 5.00 \sum_{x=2}^{16} l_x + l_{85} (2.50 + \log l_{85}) \quad (7)$$

$$e_0^0 = T_0 / 100\ 000 \quad (8)$$

Caso 2: Tablas modelo de las Naciones Unidas

Tomaremos como segundo ejemplo numérico una tabla modelo del juego de las Tablas Modelo, preparadas por la Subdivisión de Población de las Naciones



Tabla 2

COEFICIENTES ORTOGONALES PARA EL CALCULO DE  $l_x$

x	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$	$f_4(v)$
10	- 3.5000	16.7500	- 1.3125	- 11.8544
20	- 2.5000	- 1.2500	11.5625	- 19.1094
30	- 1.5000	- 13.2500	11.9375	- 0.6094
40	- 0.5000	- 19.2500	4.8125	15.6406
50	0.5000	- 19.2500	- 4.8125	15.6406
60	1.5000	- 13.2500	- 11.9375	- 0.6094
70	2.5000	- 1.2500	- 11.5625	- 19.1094
80	3.5000	16.7500	1.3125	- 11.8594

Unidas (Manual 3, Métodos para preparar proyecciones de Población por sexo y edad). La tabla modelo en referencia será la del Nivel 50 para mujeres.

Los valores de  $(m)$  que se usarán serán  $m=1/3$  y  $m=0.40$ , ya que para esos valores del parámetro se consiguen los valores 83 936 y 85 338 para  $l_1$ , siendo 85 095 el correspondiente valor en la tabla modelo.

En la tabla siguiente se indican las cifras usadas y los cálculos realizados, a la manera del caso 1.

x	m = $\frac{1}{3}$				m = 0.40			
	$l_x^{NU}$	$-\log l_x^{NU}$	$\lambda(x)$	$z(x)$	$l_x^{MC}$	$\lambda(x)$	$z(x)$	$l_x^{MC}$
5	78 133	0.10717	0.8270	0.8863	78 010	0.7429	0.7962	78 078
15	74 637	0.12705	0.5668	0.7201	75 034	0.4732	0.6012	74 774
25	69 792	0.15619	0.4718	0.7369	69 830	0.3807	0.5446	69 979
35	64 013	0.19373	0.4153	0.8046	63 489	0.3276	0.6346	63 666
45	57 919	0.23718	0.3749	0.8892	57 602	0.2909	0.6900	57 565
55	50 107	0.30010	0.3427	1.0284	50 640	0.2624	0.7875	50 534
65	38 331	0.41645	0.3148	1.3110	38 748	0.2383	0.9924	38 707
75	20 805	0.68183	0.2882	1.9650	20 381	0.2161	1.4734	20 467
85	4 729	1.32606	0.2594	3.4398	4 756	0.1929	2.5580	4 748

Realizando una interpolación (18 por ciento para los valores con  $m = 1/3$  y 82 por ciento para los valores con  $m = 0.40$ , o sea con un valor de  $m = 0.39$ ), se llega a los valores que se indican a continuación:

x	m = 0.39	
	$l_x^{NU}$	$l_x^{MC}$
5	78 133	78 066
15	74 637	74 821
25	69 792	69 952
35	64 013	63 634
45	57 919	57 572
55	50 107	50 553
65	38 331	38 714
75	20 805	20 452
85	4 720	4 749

pudiendo notarse nuevamente, que la reproducción dada por el modelo matemático es bastante aceptable.

Caso 3: Tablas modelo regionales de Coale-Demeny

Este es un juego de 192 tablas modelo, divididas en 24 niveles por sexo y 4 regiones (Norte, Sur, Este y Oeste). Presentan con respecto a las tablas modelo de las Naciones Unidas una flexibilidad de adaptación mayor, pero parece ser que para la América Latina siguen siendo inapropiadas, si se descarta la hipótesis de los autores en el sentido de que los valores  $l_x$  dados por las tablas de vida ya construidas son deficientes.

Tomemos como ejemplo los valores dados por el modelo regional Oeste, Nivel 2, sexo masculino.

Adoptando los valores de  $m = 1/3$  y  $m = 0.40$ , se tienen los siguientes resultados:

x	m = $\frac{1}{3}$		m = 0.40	m = 0.46
	$l_x^{CD}$	$l_x^{MC}$	$l_x^{MC}$	$l_x^{MC}$
5	50 716	50 887	50 783	50 811
15	44 868	44 041	44 569	44 426
25	38 324	38 999	38 618	38 721
35	31 057	31 448	31 101	31 195
45	24 113	23 943	24 060	24 028
55	17 512	17 111	17 365	17 296
65	9 848	9 909	9 932	9 926
75	3 100	3 160	3 097	3 114
85	250 <sup>a/</sup>	248	250	249

a/ El valor 250 para  $l_{85}$  se ha supuesto, ya que la tabla de Coale-Demeny no lo presenta.

y obteniéndose para  $l_1$  los valores 69 202 y 65 570 según sea  $1/3$  o 0.40 el valor de (m). Interpolando linealmente de modo que tomemos el 73 por ciento para  $m = 0.40$  y el 27 por ciento para  $m = 1/3$ , se llega a los valores indicados en la última columna de la tabla anterior.

Las discrepancias observadas entre los valores de mínimos cuadrados y los valores dados por Coale-Demeny, para propósitos prácticos son aceptables.

Caso 4: Tabla para el Nordeste de Argentina, mujeres, 1947

Procediendo de la misma manera que los casos anteriores, se ha encontrado que con  $m = 0.40$ , se logra reproducir con bastante aproximación el valor  $l_1$  de la tabla original calculada por la Srta. Hilda Ré, becaria del CELADE.

Los resultados obtenidos con este valor de  $m(0.40)$  son los siguientes:

x	$l_x^{Ré}$	$\lambda(x)$	$l_x^{MC}$
5	89 943	0.7429	89 867
15	88 471	0.4732	88 709
25	85 128	0.3807	85 310
35	80 892	0.3276	80 371
45	75 643	0.2909	75 272
55	68 089	0.2624	68 696
65	56 039	0.2383	56 579
75	36 259	0.2161	35 650
85	12 456	0.1929	12 535
(1)	(93 055)		(93 041)

e igual que antes la reproducción es bastante aceptable.

4. Construcción de una tabla de vida cualquiera

Las comprobaciones numéricas anteriores permiten pasar a considerar el problema fundamental:

"Construir una tabla de vida para un área determinada a base de la adopción de un juego de valores  $l_x$  o de cualquiera otra función de la tabla de vida, en los que se reflejen las posibles condiciones de mortalidad del área".

Tal como se indicó en la introducción, estas condiciones deben ser 6, dado que el modelo matemático contiene 6 cantidades indeterminadas.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, estas condiciones deben ser tales que los valores dados por el modelo discrepen lo menos posible de los valores que se consigan, si se pudiera construir la tabla con la información básica disponible (censos y estadísticas vitales).

Por ahora, las 6 condiciones que se han introducido son: el uso de 5 posibles valores de la línea de sobrevivencia ( $l_x$ ) y la esperanza de vida al nacer ( $e_0^0$ ).

Aparte de este criterio puramente matemático, deberá tomarse en cuenta la mayor estabilidad o tendencia en cierto sentido (decreciente en el tiempo) de los valores que intervienen en las 6 condiciones y el hecho que esos valores discriminen bien la situación en lo que a mortalidad se refiere.

Un valor de indiscutible consideración lo constituye el valor de  $l_1$ , en el cual se encuentra reflejado el mayor o menor peso que tiene la mortalidad del primer año de vida.

Otro valor tan importante como éste es el de  $l_5$ , en el que se reflejan las condiciones del ambiente que rodea a los menores después de su primera año de vida. En los países de la América Latina, este elemento es signo de mayor o menor desarrollo.

El valor de  $l_{85}$ , o cualquier otro vecino a él, también fija parte importante del comportamiento de la línea de las  $l_x$ . Cuanto más alta resulte la mortalidad a partir de los 50 años, por ejemplo, este valor será cada vez menor.

De esa manera pareciera ser que 3 valores de  $l_x$  se imponen ya desde la partida, ajenos a cualquier consideración de orden matemático y más bien puramente objetivos.

Queda por decidir qué otros valores de las  $l_x$  pueden ser usados como puntos de apoyo para determinar con mayor seguridad la línea de las  $l_x$  y obtener discrepancias desde los verdaderos valores, mínima en un sentido puramente estadístico.

En este trabajo se han introducido los valores de  $l_{25}$  y  $l_{45}$  como esos dos otros valores, pero ésta es una situación que debe investigarse con cifras, más que con criterio puramente matemático.

La introducción de estos dos valores de las  $l_x$  pretende considerar de alguna manera los efectos de las afecciones bronco-pulmonares y de los tumores malignos respectivamente.

Puede notarse que el hecho de introducir el valor de  $l_{85}$  aparte de su interés puramente matemático, está en que es un valor que presenta discrepancias muy notorias, si se comparan una tabla real y una tabla modelo. Así por ejemplo para el caso de Chile, por citar un caso, para hombres, 1960, con una esperanza de vida al nacer de 54.35 años la tabla modelo correspondiente nos da  $l_{85} = 29\ 040$  y en cambio la tabla real apenas nos indica  $l_{85} = 8\ 653$ .

Aún usando los modelos regionales de Coale-Demeny se tiene:

Modelo	Niveles	$l_1$	$l_5$	$l_{80}$
Norte	16-17	91 311	85 973	19 004
Sur	16-17	88 722	83 006	16 986
Este	16-17	87 994	84 345	15 240
Oeste	16-17	90 250	86 202	15 108

siendo:

$$l_1 = 87\ 444,$$

$$l_5 = 84\ 595,$$

$$l_{80} = 16\ 597$$

los correspondientes valores de la tabla real calculada para Chile. Puede

verse que el modelo Este es el que más se acerca a los valores de la tabla chilena y esto se debe a que este modelo ha sido preparado incluyendo las siguientes condiciones:

"Alta mortalidad en las primeras edades y tasas altas crecientes para 50 años y más"

Estas condiciones son aceptables para Chile, pero no suficientes, como puede constatarse comparando los otros valores de las  $l_x$

Aparte del uso de 5 valores de  $l_x$  elegidos considerando que por su posición en la tabla de vida le dan la conformación de variación más probable, es necesario elegir algún valor para el parámetro (m).

Esta condición -que completa las 6 condiciones- puede resolverse eligiendo sea algún otro valor de las  $l_x$  o bien algún valor de esperanza de vida. Como valor de las  $l_x$  podría elegirse por ejemplo el de  $l_{65}$ .

En este trabajo, por comodidad operacional más que nada, se ha elegido el valor de la esperanza de vida al nacer como sexto elemento de condición, pero eso no quiere decir que, por ejemplo,  $e_{10}^0$ , no podría elegirse también como elemento de condición.

En resumen: Construiremos una tabla abreviada de vida para un área, dándonos los siguientes valores:

$$l_1, l_5, l_{25}, l_{45}, l_{85} \text{ y } e_0^0$$

Ya que no es posible saber desde la partida el valor de (m) que nos da la esperanza de vida al nacer deseada, tenemos que proceder por tanteos, usando algunos valores de (m).

El método que se usará será reproducir los 5 valores de  $l_x$  con los mismos coeficientes usados para el caso en que se hace un ajuste por mínimos cuadrados usando los 9 valores quinquenales de las  $l_x$ . Esto es, se trata de encontrar una función que reproduzca los 5 valores de la tabla de vida y que los otros discrepen lo menos posible de los valores de la tabla real.

Conociendo 5 valores de  $l_x$ , es posible calcular los coeficientes de regresión ( $b_j$ ) sabiendo la relación que existe entre estos coeficientes. Véase relación (2).

Para el caso recién indicado y luego de resolver el sistema de 5 ecuaciones con las 5 incógnitas ( $b_j$ ) se tiene:

$$\begin{aligned} b_0 &= -0.7892 z_1 + 1.3020 z_5 - 0.4861 z_{25} + 0.7823 z_{45} + 0.1910 z_{85} \\ b_1 &= -0.2368 z_1 + 0.2688 z_5 - 0.3208 z_{25} + 0.1909 z_{45} + 0.0979 z_{85} \\ b_2 &= 0.0040 z_1 + 0.0048 z_5 + 0.0025 z_{25} - 0.0218 z_{45} + 0.0105 z_{85} \quad (9) \\ b_3 &= 0.0677 z_1 - 0.1125 z_5 + 0.0917 z_{25} - 0.0546 z_{45} + 0.0077 z_{85} \\ b_4 &= 0.0483 z_1 - 0.0670 z_5 + 0.0298 z_{25} - 0.0122 z_{45} + 0.0011 z_{85} \end{aligned}$$

obteniéndose los restantes valores quinquenales de  $l_x$  usando los coeficientes ortogonales de la tabla 1 y los valores terminados en 0, indicados en la tabla 2.

Para el caso de los valores de la tabla de Chile, indicados en el Caso 1, se tiene:  $l_1 = 87\ 444$ ,  $l_5 = 84\ 595$ ,  $l_{25} = 81\ 099$ ,  $l_{45} = 71\ 300$ ,  $l_{85} = 8\ 653$  y  $e_0^0 = 54.35$ , de los cuales se deducen los siguientes valores de las  $z(x)$ :

$m = 0.20$	$m = 0.25$
$z_1 = 0.8276$	$z_1 = 0.8276$
$z_5 = 0.7448$	$z_5 = 0.6871$
$z_{25} = 0.6593$	$z_{25} = 0.5613$
$z_{45} = 0.9150$	$z_{45} = 0.7563$
$z_{85} = 4.9857$	$z_{85} = 3.9920$

y de allí los valores de los coeficientes de regresión:



n = 0.20		n = 0.25	
$b_0$	= 1.66418	$b_0$	= 1.32274
$b_1$	= 0.45550	$b_1$	= 0.34385
$b_2$	= 0.04094	$b_2$	= 0.03344
$b_3$	= 0.02113	$b_3$	= 0.01964
$b_4$	= 0.00404	$b_4$	= 0.00583

con estos valores de los coeficientes de regresión, se tienen finalmente los siguientes valores de las tablas abreviadas:

n = 0.20				n = 0.25			
x	$l_x^{MC}$	x	$l_x^{MC}$	x	$l_x^{MC}$	x	$l_x^{MC}$
0	100 000	45	71 300	0	100 000	45	71 300
1	87 444	50	66 857	1	87 444	50	67 476
5	84 595	55	60 650	5	84 595	55	62 596
10	83 821	60	53 278	10	84 349	60	56 172
15	83 255	65	44 549	15	83 931	65	47 942
20	82 406	70	34 879	20	82 840	70	38 065
25	81 099	75	25 012	25	81 099	75	27 303
30	79 570	80	15 950	30	79 128	80	16 998
35	77 478	85	8 653	35	76 817	85	8 653
40	74 760			40	74 234		

y aplicando la relación (7), se tienen los valores de la esperanza de vida al nacer:

Para n = 0.20	Para n = 0.25
$e_0^0 = 53.74$	$e_0^0 = 54.53$

y como debe alcanzarse el valor 54.35 años, hacemos una interpolación lineal con el 23 por ciento para  $m = 0.20$  y el 77 por ciento para  $m = 0.25$ , obteniendo finalmente los valores:

x	MC $l_x$	PT $l_x$	x	MC $l_x$	PT $l_x$
0	100 000	100 000	45	71 300	71 300
1	87 444	87 444	50	67 334	67 141
5	84 595	84 595	55	62 148	61 906
10	84 228	83 867	60	55 506	55 300
15	83 776	83 357	65	47 162	46 972
20	82 740	82 511	70	37 332	37 080
25	81 099	81 099	75	26 776	26 579
30	79 230	79 393	80	16 757	16 597
35	76 969	77 284	85	8 653	8 653
40	74 355	74 642			

que pueden compararse con los valores de la tabla original, notándose que la reproducción es satisfactoria para propósitos prácticos.

Los valores indicados en las dos tablas anteriores pueden calcularse también directamente, sin pasar por el cálculo de los coeficientes de regresión.

Si se reemplazan las relaciones (9) en las tablas 1 y 2, se consigue el juego de multiplicadores que aparece en la tabla 3, y dado que los valores de  $\log l_x$  se deducen de la relación:

$$\log l_x = z(x) / \lambda(x) \quad (10)$$

siendo:

$$\lambda(x) = \sqrt{\log(w-x)} / x^m \quad (11)$$

una vez que se conocen los valores de  $z(x)$ , se hace necesario conocer los valores de  $\lambda(x)$  para los otros valores de  $(x)$  de la tabla abreviada.

Tabla 3

MULTIPLICADORES PARA CALCULAR DIRECTAMENTE LAS  $z(x)$

x	$z_1$	$z_5$	$z_{25}$	$z_{45}$	$z_{85}$
1	1.0000	-	-	-	-
5	-	1.0000	-	-	-
10	- 0.5551	1.3839	0.2048	- 0.0347	0.0011
15	- 0.5912	1.1487	0.5099	- 0.0690	0.0016
20	- 0.3424	0.6036	0.8036	- 0.0659	0.0011
25	-	-	1.0000	-	-
30	0.2917	- 0.4669	1.0385	0.1404	- 0.0037
35	0.4236	- 0.6639	0.8857	0.3608	- 0.0062
40	0.3341	- 0.5141	0.5336	0.6529	- 0.0058
45	-	-	-	1.0000	-
50	- 0.5550	0.8375	- 0.6698	1.3693	0.0180
55	- 1.2686	1.8987	- 1.4065	1.7254	0.0510
60	- 2.0350	3.0254	- 2.1132	2.0167	0.1061
65	- 2.7062	4.0007	- 2.6676	2.1825	0.1906
70	- 3.0920	4.5491	- 2.9210	2.1513	0.3126
75	- 2.9598	4.3365	- 2.6987	1.8408	0.4812
80	- 2.0349	2.9701	- 1.8001	1.1543	0.7066
85	-	-	-	-	1.0000

Para facilitar el cálculo de esos valores de  $\log l_x$ , se incluyen en la tabla 4, los valores de  $\lambda(x)$  para diversos valores del parámetro (m) y en las edades usadas en una tabla abreviada.

Tabla 4

VALORES DE  $\lambda(x)$  PARA DIVERSOS VALORES DEL PARAMETRO ( $n$ )

x	n=0,20	n=1/4	n=1/3	n=0.40	n=1/2	n=0.60
1	1.4202	1.4202	1.4202	1.4202	1.4202	1.4202
5	1.0250	0.9457	0.8270	0.7429	0.6324	0.5384
10	0.8873	0.7908	0.6528	0.5599	0.4447	0.3532
15	0.8133	0.7103	0.5668	0.4732	0.3609	0.2753
20	0.7630	0.6568	0.5117	0.4191	0.3106	0.2302
25	0.7247	0.6169	0.4718	0.3807	0.2759	0.2000
30	0.6936	0.5851	0.4407	0.3513	0.2500	0.1779
35	0.6671	0.5585	0.4153	0.3276	0.2296	0.1609
40	0.6438	0.5354	0.3937	0.3079	0.2129	0.1472
45	0.6228	0.5148	0.3749	0.2909	0.1988	0.1358
50	0.6033	0.4961	0.3581	0.2759	0.1866	0.1262
55	0.5848	0.4786	0.3427	0.2624	0.1758	0.1177
60	0.5669	0.4620	0.3284	0.2500	0.1660	0.1102
65	0.5492	0.4458	0.3148	0.2383	0.1570	0.1034
70	0.5313	0.4296	0.3015	0.2271	0.1485	0.0971
75	0.5125	0.4130	0.2882	0.2161	0.1403	0.0911
80	0.4922	0.3954	0.2744	0.2049	0.1322	0.0853
85	0.4691	0.3756	0.2594	0.1929	0.1237	0.0793

### 5. Análisis futuros

En el presente trabajo se han dado los pasos iniciales para buscar un modelo matemático que permita construir tablas de vida con mayor flexibilidad que la propuesta por las tablas modelo. ya existentes.

En la prosecución de estos análisis, resolución de problemas diversos, podrá intentarse:

- a) buscar el campo de variación de los coeficientes de regresión para las tablas de vida latinoamericanas,
- b) buscar los valores más frecuentes del parámetro (m) y su relación con la esperanza de vida y la mayor o menor mortalidad en el área,
- c) reducir el número de valores pivotaes de las  $l_x$ , a fin de reducir el juego de hipótesis. Esto se puede hacer buscando la correlación, si es que existe y es relativamente alta, entre los valores  $l_1$  y  $l_5$  y los otros 3 valores usados:  $l_{25}$ ,  $l_{45}$  y  $l_{85}$ ,
- d) buscar el uso de otras funciones de la tabla de vida, si es que las anteriores no presentan correlaciones entre sí o no mantienen a través del tiempo una tendencia definida. Tales valores podrían ser las esperanzas de vida en 5 edades predeterminadas junto con la esperanza de vida al nacer.