

C/106
a4

20 DEC 1969

CELADE

DOCUMENTO
MICROFILMADO

LOCAL

C 4

CELADE

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Juan C. Lerda

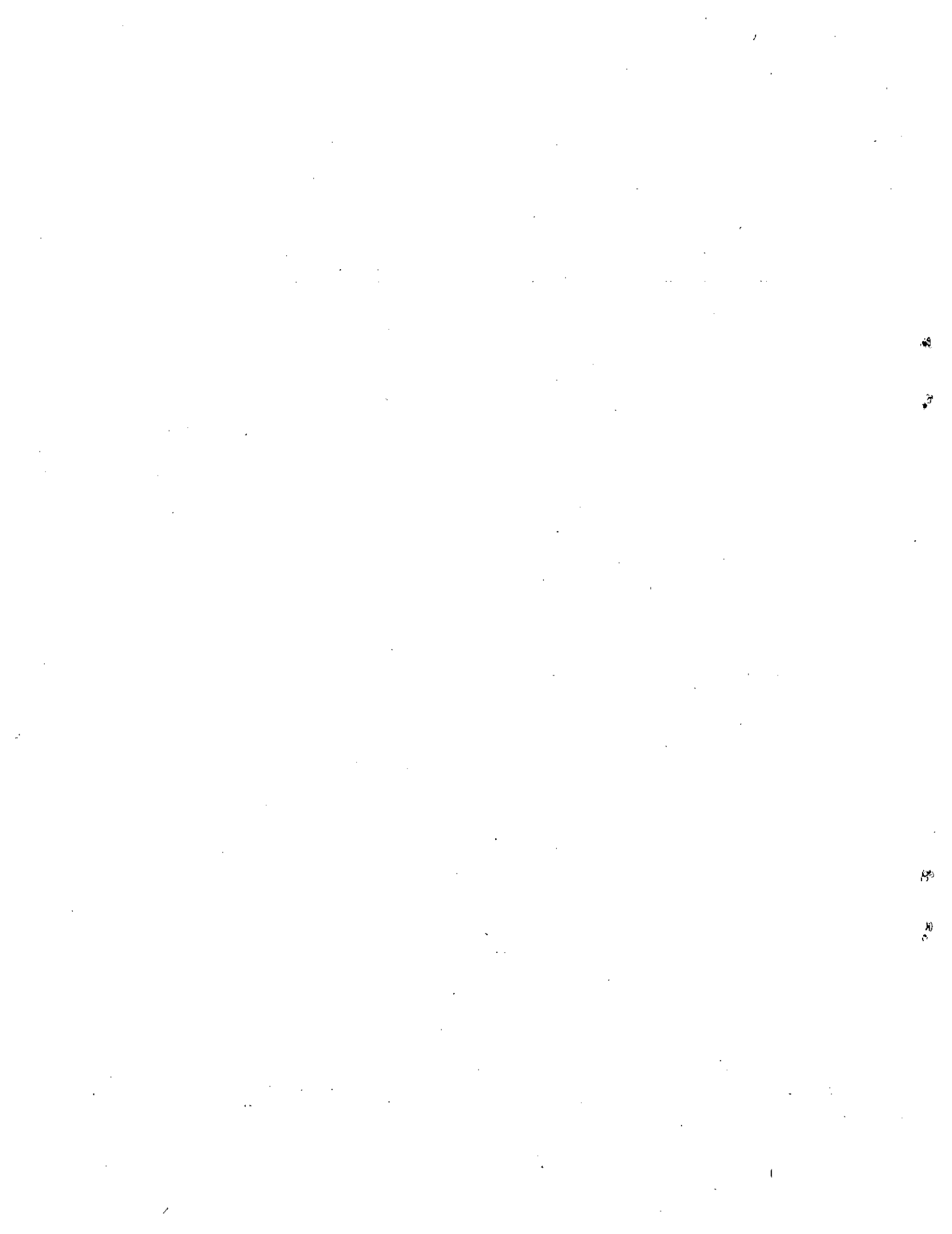
APLICACION DE UN PROCESO EN
CADENA DE MARKOV A LA PROYECCION DE
LA MORTALIDAD, POR SEXO Y
GRUPOS DE EDADES

Santiago de Chile

Julio de 1969

Serie C, N° 106

BIBLIOTECA "MARIANA MONTEALEME"
CENTRO LATINOAMERICANO
DE DEMOGRAFIA



I N D I C E

	Página
INTRODUCCION.....	1
Capítulo I	
1. Breves consideraciones acerca de un proceso de Markov..	4
2. Algunos ejemplos de aplicación de los procesos de Markov a las ciencias.....	5
Capítulo II	
1. Objetivo del trabajo.....	8
2. Simbología.....	8
3. Supuestos.....	12
4. Elección de la información básica.....	13
Capítulo III	
1. Triangular superior ($P_S(O-1)$).....	16
2. Triangular inferior ($P_I(O-1)$).....	19
3. Combinación de las matrices P_S y P_I	23
Capítulo IV.	
1. Método de trabajo.....	24
2. Aspectos prácticos y comentario de los resultados en base a las matrices P_S y P_I	25
3. Aspectos prácticos y resultados del trabajo con la combinación de los resultados de P_S y P_I	32
4. Comentarios finales.....	41
Apéndice I.....	43
Apéndice II.....	49
Apéndice III.....	65
Apéndice IV.....	75

Cuadros

1	Distribuciones de error (por ciento), de la proyección a 10 y 20 años respectivamente, con las matrices $P_S(40-50)$ y $P_I(40-50)$, para ambos sexos.....	35
2	Cálculo de vectores estimados \hat{x}_S y \hat{x}_I , para los niveles 60 y 70 mediante el uso de las matrices $P_S(40-50)$ y $P_I(40-50)$ respectivamente; de vectores estimados promedio para los mismos niveles y de vectores de error correspondientes (del promedio respecto al teórico), ambos sexos.....	39

Gráficos

1	Distribuciones de error $\xi^{(t)}$, de la proyección con la matriz $P_S(40-50)$	29
2	Distribuciones de error $\xi^{(60)}$, de la proyección con las matrices $P_S(40-50)$ y $P_I(40-50)$	36
3	Distribuciones de error $\xi^{(70)}$, de la proyección con las matrices $P_S(40-50)$ y $P_I(40-50)$	37
4	Distribuciones de error promedio resultantes de combinar las proyecciones hechas con $P_S(40-50)$ y $P_I(40-50)$	40

INTRODUCCION

La proyección de una población por el método de las componentes, implica la necesidad de elaborar hipótesis acerca del comportamiento futuro de las tres variables fundamentales del crecimiento demográfico: mortalidad, fecundidad y migración.

Nuestro trabajo centra su atención en el desarrollo de una metodología para la proyección de la mortalidad por sexo y grupos de edad. Además, se probó su utilidad aplicándola a las tablas modelo de Naciones Unidas con fines comparativos, por las razones que se exponen en el capítulo II (punto 4). Sin embargo, debe notarse la independencia del método respecto al mencionado conjunto de tablas.

El procedimiento aquí presentado podría ser clasificado como matemático, en el sentido de que se basa en funciones cuya variable independiente es el tiempo, más bien que en ciertos factores que pueden influir sobre la tendencia durante los períodos considerados (económicos, sociales, etc.).

Difiere de los más conocidos de este grupo (método de Campbell, curva logística, función exponencial simple o modificada, etc.), en, por lo menos, dos aspectos:

- a) su base teórica, que viene dada por el capítulo de la estadística conocido bajo el nombre de: procesos en cadena de Markov;
- b) su tratamiento formal, que hace uso del álgebra matricial.

Pero sobre el punto a), es preciso aclarar algo, que es de primordial importancia desde el punto de vista demográfico.

La proyección de las tasas de mortalidad observadas por sexo y edad, mediante el uso de funciones matemáticas de ajuste, requiere el conocimiento de series históricas (pueden abarcar una o dos décadas), que permitan observar una tendencia y proyectarla, de acuerdo a ellas,

Por ejemplo, consideremos la tasa específica de mortalidad de un grupo de edad cualquiera $(x, x+5)$, que denotamos como: ${}_5^m_x$. Conociendo los valores observados de, por ejemplo, 5 puntos del tiempo (supongamos,

equiespaciados) anteriores al momento a partir del cual se inicia la proyección ($t = 0$), tendríamos:

$$\underline{5^m_x^{(-5)}}, \underline{5^m_x^{(-4)}}, \underline{5^m_x^{(-3)}}, \underline{5^m_x^{(-2)}}, \underline{5^m_x^{(-1)}} \text{ y } \underline{5^m_x^{(0)}}$$

donde: los superíndices encerrados entre paréntesis se refieren a la variable tiempo (t).

Con tal conjunto de valores, resta calcular los parámetros de la función de ajuste elegida, y una vez identificados éstos, se comienza la proyección sustituyendo la variable t por los números que representen los puntos del tiempo en que se desea evaluar la tasa mencionada. Este procedimiento se repite para cada una de las tasas en las distribuciones de cada sexo.

Tal manera de operar implica que se trabaja en el supuesto de que las ganancias que se produzcan con la reducción de la mortalidad de un cierto grupo de edades, es independiente de la futura situación en los grupos contiguos.

Por el contrario, el método aquí presentado, desatiende la tendencia histórica (en el sentido que lo hacen los métodos señalados) de la mortalidad por cada grupo de edad y sólo considera dos puntos como necesarios; según la notación utilizada: $\underline{5^m_x^{(-1)}}$ y $\underline{5^m_x^{(0)}}$. Pero, por otra parte, pone énfasis en que la estimación mediante la proyección del valor: $\overswarrow{5^m_x^{(1)}}$ ^{1/} no sólo es función de los dos valores señalados, sino también, de lo que haya ocurrido en la mortalidad:

- a) de los grupos anteriores (matriz triangular superior)
- b) de los grupos posteriores (matriz triangular inferior)
- c) de los grupos anteriores y posteriores (matriz combinada).

Quizá se pueda ver más claramente la diferencia fundamental entre los métodos mencionados y el que se detalla en el texto, acudiendo a la notación de funciones:

1/ El símbolo \overswarrow significa: estimado o proyectado.

Para funciones matemáticas de ajuste:

$$5_x^m(1) = F \left(5_x^m(0), 5_x^m(-1), 5_x^m(-2), \dots, 5_x^m(-t+1), 5_x^m(-t) \right)$$

(no se han incluido algunos parámetros típicos de estas formas analíticas dado que no son de fondo en lo que se plantea).

Para un proceso en cadena de Markov:

En una matriz Triangular Superior,

$$5_x^m(1) = F \left(\begin{array}{cccc} 5_0^m(-1), & 5_5^m(-1), & \dots, & 5_{x-5}^m(-1), & \underline{5_x^m(-1)} \\ 5_0^m(0), & 5_5^m(0), & \dots, & 5_{x-5}^m(0), & \underline{5_x^m(0)} \end{array} \right)$$

En una matriz Triangular Inferior,

$$5_x^m(1) = F \left(\begin{array}{cccc} \underline{5_x^m(-1)}, & 5_{x+5}^m(-1), & \dots, & 5_{w-5}^m(-1) \\ \underline{5_x^m(0)}, & 5_{x+5}^m(0), & \dots, & 5_{w-5}^m(0) \end{array} \right)$$

En una matriz Combinada

$$5_x^m(1) = F \left(\begin{array}{ccccccc} 5_0^m(-1), & \dots, & 5_{x-5}^m(-1), & \underline{5_x^m(-1)}, & 5_{x+5}^m(-1), & \dots, & 5_{w-5}^m(-1) \\ 5_0^m(0), & \dots, & 5_{x-5}^m(0), & 5_x^m(0), & 5_{x+5}^m(0), & \dots, & 5_{w-5}^m(0) \end{array} \right)$$

Creemos que la idea de hacer depender la mortalidad de un grupo (x,x+n) en un momento t, de la que haya presentado el mismo grupo en los momentos t-1 y t-2, como también de la que se haya observado en estos últimos dos momentos para los grupos anteriores, posteriores, o, anteriores y posteriores al mismo tiempo, es de un sentido claro y que por su importancia merece se lo siga investigando.

Además de su aplicación en las necesidades de una proyección de población, puede también ser empleado entre otros, con los siguientes fines:

- a) Confeccionar una tabla de vida para años futuros;
- b) proyectar la fecundidad por tasas específicas;

- c) proyectar la población por sexo y grupos de edad, con independencia de las hipótesis sobre el curso futuro de la mortalidad, fecundidad y migración, cuando los objetivos de la misma no lo requiera, y
- d) en general, para proyectar distribuciones relativas que respondan, en la evolución de los valores de cada celda, a un proceso en cadena de Markov.

Cabe finalmente señalar que, no obstante haberse trabajado con tablas de vida con mortalidad para todas las causas, el método es aplicable para proyectar la mortalidad por causas específicas.

Capítulo I

i. Breves consideraciones acerca de un proceso de Markov^{2/}

En este punto expondremos las ideas más generales sobre este tipo especial de proceso estocástico.

Una presentación elemental del contenido del tema es la siguiente:

Se realiza una serie de pruebas que tienen un número finito (o infinito) de resultados posibles, los que designamos con $E_1 E_2 \dots E_i \dots E_n$ y a los que se les llama estados posibles del sistema en un momento t .

El supuesto fundamental en lo que sigue es el de que la probabilidad de obtener un resultado E_i en una prueba cualquiera, no es independiente de los resultados obtenidos en las pruebas ya realizadas o, por lo menos, del que se haya obtenido en la anterior.

A continuación se define la probabilidad (p_{ij}) de que se obtenga el resultado E_j en una prueba cualquiera, conociendo que en la anterior se obtuvo E_i . Estos valores numéricos se llaman probabilidades de transición y su cálculo constituye la médula del problema.

2/ A.A. Markov: (1856-1922)

Una vez definido el juego de probabilidades (que se considera invariante) y dada una estructura inicial de los estados, la evolución en el tiempo de esta última por la reiteración de la acción del primero, es lo que constituye un proceso en cadena de Markov.

La clasificación más general que se puede hacer del tema, es la tradicional dentro de las matemáticas (según la continuidad de la variable tiempo):

tipo (a) procesos discretos o finitos

tipo (b) procesos continuos

y tienen la misma interpretación. En nuestro caso interesan los del tipo (a), por dos razones:

1. La simplicidad del tratamiento, y
2. lo que es más importante, porque la naturaleza del problema así lo requiere (recuérdese que deseamos proyectar la mortalidad por decenios).

Cabe finalmente decir que existen dos formas clásicas para representar las probabilidades de transición:^{3/}

Matricial (matriz de transición)

Gráfica (diagrama de transición)

y que en este trabajo se adopta la primera por ser la adecuada al problema de la solución numérica.

2. Algunos ejemplos de aplicación de los procesos de Markov a las ciencias

El propósito de este punto es el de presentar ejemplos de aplicación que permitan formar una idea del amplio frente de estudios que puede ser tratado por el método y motivar hacia un empleo más intenso para que, en nuestro caso la demografía, cuente con más y mejor número de caminos alternativos para resolver sus problemas.

^{3/} Para un tratamiento elemental, véase de la referencia bibliográfica 2., la página 198. Una fundamentación rigurosa se puede consultar en las páginas 27-35 de la referencia 5.

En un principio, su uso se restringió a las ciencias exactas, pero posteriormente se fue incorporando a los instrumentos de análisis de otros campos de investigación.

Así, algunos ejemplos lo constituyen, en:

Economía: -para "programación dinámica"; Gordon Patrick: "Théorie des Chaines de Markov Finies et ses applications": 3.^a parte, capítulo 3, pág. 117-120.

-Economía Matemática, modelos de crecimiento estable (teoremas de Perron); Bellman R.: Introducción al análisis Matricial, cap. 16, págs. 305 y siguientes.

Sociología Política: problemas de predicción sobre la forma de votar en una cierta provincia según partidos:

Kemeny J.G., Snell I.L., Thompson G.L.: "Introducción a las matemáticas finitas". Cap. 5, Ejemplos de Cadenas de Markov, pág. 257 y siguientes.

Empresas: En el análisis de las cuentas corrientes y políticas de créditos. Irwin Richard D.: Analysis for financial decisions Traducción provisoria para uso exclusivo de los alumnos de la Facultad de Ciencias Económicas de La Universidad de Chile. Cap. 10, pág. 49

Biología: en problemas genéticos de la herencia:

Gordon Patrick "Théorie des Chaines ..." (op. cit.) parte introductiva; pág. 20.

Sociología: para el estudio de la movilidad social: Frais S.J. "Measuring Social Mobility" Journal Royal Statistical Society; Vol. CXVIII, 1955, págs. 55-66.

Frais S.J. "The Formal Theory of Social Mobility" Population Studies; Vol IX; N° 1, julio 1955; págs. 72-81.

Demografía: para la investigación de la escolaridad por edad y grados:

Blot Daniel "Les déperditions déffetifs scolaires: analyse théorique et applications". Tiers-Monde, Abril-Junio 1965

Proyecciones de la mortalidad: Damiani M.P. "Essai méthodologique sur les perspectives de mortalité". Etudes et conjoncture, revue mensuelle de l'INSEE, N° 3, Mars 1967 (22 année)

En el estudio de modelos de migración urbano-rural:

Thomlinson, Ralph: "Methodological Needs in Migration Research". Population Review, Vol 6, N°1, January 1962.

Kemeny John G, Snell I.L., Thompson G.L. "Introducción a las ,," (op. cit.) Cap. 5, Ejemplos de Cadenas de Markov. Ej. 4°. pág. 260

Capítulo II

1. Objetivo del trabajo

Presentar y probar una metodología para la proyección de la mortalidad por sexo y grupos de edad.

Se eligió un período de 10 años como unidad de tiempo de la proyección para exigir al método una prueba de bondad, en el supuesto de que no eran suficientes los intervalos quinquenales.

Considerando que no existen restricciones para el agrupamiento por edades se adoptó el siguiente:

(-1), (1-4), (5-9), (10-14), (15-24), (25-34), (35-44), (45-54), (55-64), (65-74), (75 y más),

en donde se toma en cuenta el control de los cambios en la mortalidad infantil y se prescinde de un análisis fino en las edades avanzadas.

En consecuencia, trabajaremos con 11 grupos de edad que en orden creciente estarán en correspondencia con la variable auxiliar i , que tiene por dominio los 11 primeros números de la sucesión fundamental. Así, cuando hagamos referencia a $i=5$, estaremos indicando el grupo (15-24), siguiendo dicha nomenclatura, para los restantes.

2. Simbología

1. $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$

Vectores de probabilidad absoluta verdaderos (o teóricos), correspondientes a los momentos $t = 0, 1, 2, 3, 4$, respectivamente. Los superíndices no hacen referencias a potencias del vector, sino, a la variable tiempo.

2. $x_i^{(t)}$

Estado i del vector \underline{x} , correspondiente al momento t . Los subíndices indican estados dentro de los vectores.

3. $x^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_i^{(t)}, \dots, x_{11}^{(t)})$

forma general de un vector $\underline{x}^{(t)}$.

4. $\hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)}, \hat{x}^{(4)}$

Vectores de probabilidad absoluta obtenidos de la proyección, que llamaremos estimados. (Recuérdese que el símbolo \wedge indica: estimado o proyectado).

5. $\hat{x}_i^{(t)}$

Estado i del vector \hat{x} , correspondiente al momento t .

6. $\hat{x}^{(t)} = (\hat{x}_1^{(t)}, \hat{x}_2^{(t)}, \dots, \hat{x}_i^{(t)}, \dots, \hat{x}_{11}^{(t)})$

Forma general de un vector $\hat{x}^{(t)}$.

7. $m =$ vector de las n^m_x ; $d =$ vector de las n^d_x

$q =$ vector de las n^q_x ; $s =$ vector de las n^p_x

$p =$ vector de las n^p_x ;

8. $\hat{e}^{(t)} = x^{(t)} - \hat{x}^{(t)}$ vector de error.

9. $e = (1, 1, \dots, 1)$ vector unitario.

10. $(x^{(t)})_e = \sum_{i=1}^{11} x_i^{(t)}$; $(\hat{x}^{(t)})_e = \sum_{i=1}^{11} \hat{x}_i^{(t)}$

Producto interno de dos vectores.

11. $\sqrt{(x^{(t)}, x^{(t)})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{11} (x_i^{(t)})^2}$ Longitud del vector x^t

Cuadrada (resulta de una combinación de las matrices $P_{s(0-1)}$ y $P_{I(0,1)}$)

$$P_{c(0-1)} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1i} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1,11} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2i} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2,11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ii} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{i,11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{j1} & P_{j2} & \dots & P_{ji} & \dots & P_{jj} & \dots & P_{j,11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{11,1} & P_{11,2} & \dots & P_{11,i} & \dots & P_{11,j} & \dots & P_{11,11} \end{pmatrix}$$

En las cuales:

p_{ij} = Probabilidad de que el estado i del sistema, en el momento t, pase al estado j en el momento t+1.

$p_{j,i}$ = Probabilidad de que un sistema en el estado i del tiempo t, permanezca en ese mismo estado en el momento t+1.

A los efectos del cálculo numérico de las probabilidades, se efectúa la descomposición:

$$P_{ij} = \alpha_i P_j$$

donde: el segundo miembro es un producto de dos coeficientes constantes en el tiempo.

13. $y^{(0)} = e - x^{(0)}$

$y^{(1)} = e - x^{(1)}$

.....

$y^{(t)} = e - x^{(t)}$

(vector complementario del $x^{(t)}$, respecto al vector unitario).

3. Supuestos

A causa de que en el trabajo se utilizan tres tipos de matrices de transición.

P_s (triangular superior)

P_I (triangular inferior)

P_c (combinada) y vector fijo \underline{a} .

Se debe aclarar que salvo el primero (que es diferencial), los demás supuestos son generales.

- 1.a Cuando se trabaje con P_s , la hipótesis es de que el estado E_i en el tiempo \underline{t} , es función de los estados E_i, E_{i-1}, \dots, E_1 en el momento $\underline{t-1}$.
- 1.b Cuando se trabaje con P_I , la hipótesis es de que el estado E_i en el tiempo \underline{t} , es función de los estados $E_i, E_{i+1}, \dots, E_{11}$ en el momento $\underline{t-1}$.
- 1.c Cuando se maneje la matriz $P_{\frac{I+s}{2}}$, la hipótesis es de que el estado E_i en el tiempo \underline{t} , es función de los estados $E_1, \dots, E_{i-1}, E_i, E_{i+1}, \dots, E_{11}$ en el tiempo $\underline{t-1}$.
2. Los cambios en la mortalidad se observan en el transcurso del tiempo para $t \geq 0$, con un dominio $D = (0, 1, 2, 3, 4)$.
3. Deben darse como punto de partida dos distribuciones por sexo y grupos de edad, de alguna medida de la mortalidad. Quedarán referidas a los momentos $\underline{0}$ y $\underline{1}$, simbolizadas con la notación vectorial $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$.
4. Se supone que la evolución de la mortalidad entre los tiempos $\underline{0}$ y $\underline{1}$, es aceptable como modelo de variación entre los momentos $\underline{1}$ y $\underline{2}$, $\underline{2}$ y $\underline{3}$, etc.
5. Dichas distribuciones, como toda otra derivada del proceso de proyección, deben tener su producto interno respecto del vector unitario, igual a la unidad. En símbolos:

$$\begin{aligned} (x^{(0)})_e &= 1 ; & (\hat{x}^{(2)})_e &= 1 \\ (x^{(1)})_e &= 1 ; & (\hat{x}^{(3)})_e &= 1 \\ & & (\hat{x}^{(t)})_e &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad x_1^{(0)} &> x_1^{(1)} && \text{(Triangular superior)} \\ x_1^{(0)} &< x_1^{(1)} && \text{(Triangular inferior)} \end{aligned}$$

4. Elección de la información básica

Previo al tratamiento de los dos problemas que se presentaron cuando se debió decidir acerca de este punto, damos algunas ideas sobre el procedimiento seguido para efectuar la proyección, en la forma más simple posible.

Dados los vectores base $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$, con ellos es posible calcular una matriz de transición P, que por construcción debe cumplir con:

$$x^{(0)} P = x^{(1)}$$

Si ahora queremos la distribución de la mortalidad en el momento $t=2$, bajo la hipótesis (4), se hace:

$$x^{(1)} P = \hat{x}^{(2)}$$

que equivale a la aplicación sobre la estructura inicial $x^{(1)}$, de las condiciones de evolución de la mortalidad entre 0 y 1, que se encuentran representadas en la matriz P. A causa de ello, el vector estimado $\hat{x}^{(2)}$ mediante la proyección, difierirá del vector teórico $x^{(2)}$, lo que podemos representar por un vector de error $\xi^{(2)}$ que contiene en sus celdas el patrón de sesgo causado por la hipótesis lineal implícita en el mencionado supuesto (4).

Lo mismo se hace en caso de que se desee encontrar las distribuciones (estimadas) correspondientes a los momentos $t = (3, 4)$,

$$\hat{x}^{(2)} P = \hat{x}^{(3)}$$

$$\hat{x}^{(3)} P = \hat{x}^{(4)}$$

y con el mismo razonamiento se podrá pensar en vectores de error correspondientes, que llamaremos $\xi^{(3)}$ y $\xi^{(4)}$, que son el complemento de las estimaciones para

obtener los verdaderos (o teóricos) vectores $x^{(3)}$ y $x^{(4)}$. 5/

Como veremos, la longitud de los vectores $\xi^{(t)}$ es creciente para $t \rightarrow \infty$ y ya en $t = 3$ representan errores inadmisibles desde un punto de vista práctico.

Ya con estos elementos podemos presentar el primero de los problemas de que se habló: ¿Cómo evaluar el patrón de sesgo introducido por la hipótesis del método?

Comparando los vectores estimados con sus correspondientes vectores verdaderos o teóricos.

Por cierto que en una proyección decenal que se inició en el año 1960, por ejemplo, al llegar a las distribuciones estimadas de 1970, 1980, 1990, no tendremos posibilidad de compararlas; pero el propósito de confrontar, se explica por su importancia en el control de la confiabilidad de las proyecciones con este método. Dependiendo del resultado de la comparación (satisfactorio o no), estaremos en condiciones de prever un parecido comportamiento al trabajar con datos de un país específico.

En síntesis: ¿cómo disponer de un juego de 5 distribuciones por sexo y grupos de edad que hagan las veces de vectores teóricos?

Aparecían dos caminos optativos:

1. O buscar un país que tuviese los vectores $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ ya calculados, lo que en América Latina no resulta fácil en el caso de Chile que dispone de tablas de mortalidad para los años 1920,

5/ Nótese que los errores $\xi^{(2)}$ tienen un sólo origen: aplicación al período (1,2) de condiciones propias del período (0,1). Mientras que los errores $\xi^{(3)}$ tienen dos causas: la ya señalada (que en general se hace más importante) y la distorsión de $\hat{x}^{(2)}$. Lo mismo podría decirse para $\hat{x}^{(4)}$ y su error $\xi^{(4)}$.

No obstante, en última instancia, hay una sola causa (la primera) que se va acumulando.

El estudio analítico de la propagación del error no fue incluido como parte del trabajo; pero se incluyen resultados.

1930, 1940, 1952/53, 1960/61, pero que tiene el problema del desigual espaciamiento en la información y que además no tienen un único método de construcción;^{6/}

2. o utilizar el juego de tablas modelo de Naciones Unidas^{7/} que obviaba todo problema.

Finalmente, se optó por la segunda alternativa por tres razones principales:

- a) por corresponder mejor a un régimen de mortalidad cambiante en forma aceptablemente regular.
- b) porque el método de confección de las 24 tablas fue el mismo, y
- c) porque tenía sus distribuciones equiespaciadas respecto a la variable tiempo.

Una vez resuelto el primer problema se debió encarar el segundo, que, consistía en decidir qué medida de la mortalidad sería considerada como la más adecuada para la metodología empleada y, por lo tanto, adoptada en el trabajo.

De las funciones de la tabla de vida se podían considerar los vectores m, q, p, d, s.

De ellos, los juegos de q y s, aparecían como los más convenientes; en especial este último, el que es de aplicación inmediata en la proyección de la población.

La elección se hizo con el criterio de que el vector cumpliera con el supuesto (5).^{8/}

^{6/} Las tablas correspondientes a los años 1920, 1930 y 1940 tuvieron un método y las de 1952/53 y 1960/61 otro.

^{7/} Naciones Unidas: "Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad", Estudios sobre población N° 25, Manual III, ST/SOA/Serie A, págs. 76-85.

^{8/} En el artículo de M.P. Damiani: "Essai méthodologique sur les perspectives de mortalité", referencia bibliográfica N° 12, se hace uso del vector q sin dar explicaciones acerca de alguna posible transformación lineal que la ponga de acuerdo con el supuesto (5).

De allí surgió que el vector \underline{d} fuera elegido, ya que es el único que, sin necesidad de ser tipificado por su producto interno con respecto al vector unidad, constituye a la vez una distribución absoluta y una distribución relativa (o función de densidad o vector de probabilidades o vector de probabilidades absolutas).

Así es como cuando en adelante se mencione el vector $\underline{x}^{(t)}$ o $\hat{\underline{x}}^{(t)}$, se estará haciendo referencia al vector \underline{d} , es decir, a la distribución por grupos de edad (los ya indicados en la sección I de este capítulo) de las defunciones correspondientes a un sexo (o ambos), provenientes de una cohorte inicial de 100.000 personas.

Lamentablemente la serie de vectores \underline{d} no se encuentran tabulados en las mencionadas tablas modelo y por ello se procedió a calcularlos.^{9/}

Capítulo III

En este capítulo nos ocupamos del cálculo de los elementos de los distintos tipos de matrices utilizados.

1. Triangular superior ($P_{s(0-1)}$)

Dadas las dos distribuciones de partida:

$$\underline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_{i-1}^{(0)} \ x_i^{(0)} \ \dots \ x_{11}^{(0)})$$

$$\underline{x}^{(1)} = (x_1^{(1)} \ x_2^{(1)} \ \dots \ x_{i-1}^{(1)} \ x_i^{(1)} \ \dots \ x_{11}^{(1)})$$

se trata de identificar los elementos de la matriz:

^{9/} En el apéndice I se encuentran los vectores \underline{d} correspondientes a los niveles utilizados y también para el resto de las tablas, según nuestra agrupación por edades.

$$P_{s(0-1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1p_1} & \alpha_{1p_2} & \dots & \alpha_{1p_{i-1}} & \alpha_{1p_i} & \dots & \alpha_{1p_{11}} \\ & \alpha_{2p_2} & \dots & \alpha_{2p_{i-1}} & \alpha_{2p_i} & \dots & \alpha_{2p_{11}} \\ & & \dots & & & \dots & \\ & & & \alpha_{i-1p_{i-1}} & \alpha_{i-1p_i} & \dots & \alpha_{i-1p_{11}} \\ & & & & \alpha_{ip_i} & \dots & \alpha_{ip_{11}} \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & \alpha_{11p_{11}} \end{pmatrix}$$

que tiene las siguientes restricciones:

- a) $0 \leq \alpha_{ip_j} \leq 1$; $i = j = (1, 2, \dots, 10)$
 $i \neq j = (1, 2, \dots, 10, 11)$
- b) $\alpha_{ip_j} = 1$; $i = j = 11$
- c) $\sum_{j=1}^{11} \alpha_{ip_j} = 1$; $j = (1, 2, \dots, 11)$

Cálculo de los coeficientes α_i

La condición c) permite su deducción:

$$\sum_{j=1}^{11} \alpha_{ip_j} = \alpha_i \sum_{j=1}^{11} p_j = 1 \dots \alpha_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{11} p_j}$$

pero al no quedar aquí resuelto el problema, es preciso una transformación lineal.

Haciendo $\alpha_1 = 1$; $\sum_{j=1}^{11} p_j = 1 = \sum_{j=1}^{i-1} p_j + \sum_{j=1}^{11} p_j \dots \sum_{j=1}^{11} p_j = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j$

Reemplazando, se obtiene:

(I) $\alpha_i = \frac{1}{i-1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j}$; $i = (2, 3, \dots, 11)$

que es la fórmula definitiva.

Cálculo de los coeficientes p_i

Consiste en hacer explícita la fórmula fundamental:

$$x^{(0)} P_s = x^{(1)}$$

y reemplazar por la expresión conocida de C_1 .

Operando:

$$x_1^{(1)} = p_1 \alpha_1 x_1^{(0)}$$

$$x_2^{(1)} = p_2 (\alpha_1 x_1^{(0)} + \alpha_2 x_2^{(0)})$$

$$x_{i-1}^{(1)} = p_{i-1} (\alpha_1 x_1^{(0)} + \alpha_2 x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1}^{(0)})$$

$$x_i^{(1)} = p_i (\alpha_1 x_1^{(0)} + \alpha_2 x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1}^{(0)} + \alpha_i x_i^{(0)})$$

$$x_{11}^{(1)} = p_{11} (\alpha_1 x_1^{(0)} + \alpha_2 x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{11} x_{11}^{(0)})$$

Se deduce que:

$$x_i^{(1)} = p_i \left(\frac{x_{i-1}^{(1)}}{p_{i-1}} + \frac{x_i^{(0)}}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j} \right)$$

$$(II) \quad i = \frac{x_i^{(1)} p_{i-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j \right)}{x_{i-1}^{(1)} \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j \right) x_i^{(0)} p_{i-1}}$$

$$i = 1, 2, \dots, 11$$

En consecuencia, las fórmulas (II) y (I) permitirán (en ese orden de operaciones) identificar numéricamente los coeficientes p_i y α_i respectivamente.

Conviene aclarar que en la expresión (I), el campo de variabilidad del subíndice i no incluye el origen porque previamente se supuso $\alpha_1 = 1$. Esto no introduce soluciones extrañas puesto que se está trabajando con un sistema de ecuaciones resuelto por un proceso iterativo. Por otra parte, se trata de proporciones y no de números absolutos (aunque en realidad se trata también de ellos, por la propiedad enunciada en el punto 4 respecto de este capítulo respecto del vector \underline{d}).

Relacionado con la expresión (II) se puede plantear una dificultad de interpretación acerca de p_1 . Reemplazando $i = 1$ queda:

$$p_1 = \frac{x_1^{(1)} p_{1-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{1-1} p_j \right)}{x_{1-1}^{(1)} \left(1 - \sum_{j=1}^{1-1} p_j \right) + x_1^{(0)} p_{1-1}}$$

donde se debe considerar que:

$$p_{1-1} = p_0 = 1 ; \quad \sum_{j=1}^0 p_j = 0 ; \quad x_0^{(1)} = 0$$

con lo que:

$$p_1 = \frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(0)}}$$

2. Triangular inferior ($P_{I(0-1)}$)

Se procede de manera análoga que para la deducción de los coeficientes p_i y α_i en la matriz P_S , salvo algunas transformaciones.

Dados los dos vectores iniciales que exige el método:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \dots \quad x_{i-1}^{(0)} \quad x_i^{(0)} \quad \dots \quad x_{10}^{(0)} \quad x_{11}^{(0)}) \\ x^{(1)} &= (x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad \dots \quad x_{i-1}^{(1)} \quad x_i^{(1)} \quad \dots \quad x_{10}^{(1)} \quad x_{11}^{(1)}) \end{aligned}$$

se trata de calcular los coeficientes de la matriz:

Así, nuestros vectores de trabajo fueron:

$$y^{(0)} = e - x^{(0)}$$

$$y^{(1)} = e - x^{(1)}$$

planteándose entonces la ecuación:

$$y^{(0)} P_{I(0-1)} = y^{(1)}$$

que se desarrolla en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1^{(1)} = p_1 (\alpha_{11} y_{11}^{(0)} + \dots + \alpha_{i+1} y_{i+1}^{(0)} + \alpha_i y_i^{(0)} + \dots + \alpha_2 y_2^{(0)} + \alpha_1 y_1^{(0)})$$

$$y_2^{(1)} = p_2 (\alpha_{11} y_{11}^{(0)} + \dots + \alpha_{i+1} y_{i+1}^{(0)} + \alpha_i y_i^{(0)} + \dots + \alpha_2 y_2^{(0)})$$

$$y_i^{(1)} = p_i (\alpha_{11} y_{11}^{(0)} + \dots + \alpha_{i+1} y_{i+1}^{(0)} + \alpha_i y_i^{(0)})$$

$$y_{i+1}^{(1)} = p_{i+1} (\alpha_{11} y_{11}^{(0)} + \dots + \alpha_{i+1} y_{i+1}^{(0)})$$

$$y_{11}^{(1)} = \alpha_{11} y_{11}^{(0)}$$

Cálculo de los coeficientes α_i

A partir de la restricción c) se deduce:

$$\sum_{j=1}^i \alpha_i p_j = \alpha_i \sum_{j=1}^i p_j = 1 \quad \therefore \alpha_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^i p_j}$$

pero nuevamente nos encontramos con que la forma de la expresión no resuelve el problema.

Se supuso $\alpha_{11} = 1$

$$\sum_{j=1}^{11} p_j = 1 = \sum_{j=1}^i p_j + \sum_{j=i+1}^{11} p_j \quad \therefore \sum_{j=1}^i p_j = 1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j$$

con lo cual, al reemplazar se obtuvo:

$$\alpha_i = \frac{1}{1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j}$$

$$i = (1, 2, \dots, 10)$$

la expresión final para el cálculo numérico.

Cálculo de los coeficientes p_i

Del sistema de ecuaciones planteado, se obtiene:

$$y_i^{(1)} = p_i \left(\alpha_i y_i^{(0)} + \frac{y_{i+1}^{(1)}}{p_{i+1}} \right)$$

considerando la forma analítica encontrada para α_i y substituyendo:

$$y_i^{(1)} = p_i \left(\frac{y_i^{(0)}}{1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j} + \frac{y_{i+1}^{(1)}}{p_{i+1}} \right) \therefore$$

de donde se deduce:

$$p_i = \frac{y_i^{(1)} p_{i+1} \left(1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j \right)}{y_{i+1}^{(1)} \left(1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j \right) + y_i^{(0)} p_{i+1}}$$

$$i = (1, 2, \dots, 11)$$

Mientras en la matriz $P_{s(0-1)}$ se debían comenzar los cálculos por p_1 y a causa de ello surgían dificultades en la interpretación de dos expresiones; en la matriz $P_{I(0-1)}$ las operaciones se deben iniciar en p_{11} y de allí, análogos inconvenientes. Con el mismo criterio del caso P_s , aquí será para $i = 11$:

$$P_{11+1} = P_{12} = 1 ; \quad \sum_{j=11+1}^{11} P_j = 0 ; \quad y_{11+1}^{(1)} = 0$$

con lo que:

$$P_{11} = \frac{y_{11}^{(1)}}{y_{11}^{(0)}}$$

3. Combinación de las matrices P_s y P_I

Una vez que se tuvieron las matrices P_s y P_I , se obtuvo la matriz cuadrada y un vector fijo a de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (1) \quad x^{(1)} &= x^{(0)} P_s \\ y^{(1)} &= y^{(0)} P_I \cdot \cdot \cdot \quad e^{-x^{(1)}} = (e^{-x^{(0)}}) P_I \cdot \cdot \cdot \\ x^{(1)} &= e^{-x^{(0)}} P_I \cdot \cdot \cdot \\ (2) \quad x^{(1)} &= e^{-e P_I} + x^{(0)} P_I \end{aligned}$$

Sumando, miembro a miembro, las ecuaciones (1) y (2):

$$2x^{(1)} = x^{(0)} P_s + e^{-x^{(0)}} P_I + e P_I$$

$$x^{(1)} = \frac{e^{-e P_I} + x^{(0)} P_I + P_s}{2}$$

haciendo el vector:

$$\frac{e^{-e P_I}}{2} = a$$

y la matriz

$$\frac{P_I + P_s}{2} = P_c$$

resultó finalmente:

$$x^{(1)} = a + x^{(0)} P_c$$

Capítulo IV

1. Método de trabajo

Importa presentar como primer punto de este capítulo, destinado en especial a los aspectos prácticos, el orden lógico del método de trabajo.

Para facilitar la explicación, supondremos que trabajamos para el sexo masculino y además, que la matriz es del tipo: P_s . Esta particularización no resta generalidad a la idea, la que podría ser desarrollada igualmente con cualquier combinación posible entre sexo y clase de matriz.

- a) Se dan dos vectores \underline{d} , que simbolizamos con $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$, llamados, de partida.
- b) También se dan los vectores $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, que servirán para el cálculo de errores.
- c) Con la metodología indicada en el capítulo III y en base a los dos vectores de partida, se identifican los parámetros de la matriz P_s .
- d) Se procede a proyectar, tomando como estructura inicial el vector $x^{(1)}$ y aplicando en forma reiterada P_s , sobre las distribuciones que se vayan obteniendo. Así:

$$x^{(1)} P_s (0-1) = \hat{x}^{(2)}$$

$$\hat{x}^{(2)} P_s (0-1) = \hat{x}^{(3)}$$

$$\hat{x}^{(3)} P_s (0-1) = \hat{x}^{(4)}$$

donde:

$\hat{x}^{(2)}$, $\hat{x}^{(3)}$, $\hat{x}^{(4)}$, son los vectores estimados que resultan de la proyección.

- e) por comparación, entre vectores estimados y teóricos, se calcula el error por grupo de edades correspondientes:

$$\left(\frac{\hat{x}_1(t)}{x_1(t)} - 1 \right) \cdot 100 = \xi_1(t)$$

f) Del análisis de los resultados que significa el patrón de sesgo $\xi(t)$, se acepta o rechaza el método.

2. Aspectos prácticos y comentario de los resultados en base a las matrices

$$\underline{P}_S \text{ y } \underline{P}_I$$

a) Matriz triangular superior

Aspectos prácticos

Se seleccionaron los vectores \underline{d} (para cada sexo) correspondientes a los niveles 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110.^{11/}

Con ellos, y tomando cada par consecutivo como un juego de vectores de partida, se calcularon las siguientes matrices (por sexo):

$$\begin{array}{ccc} P_{S(40-50)} \quad \S & P_{S(50-60)} \quad \S & P_{S(60-70)} \quad \S \\ P_{S(70-80)} \quad \S & P_{S(80-90)} \quad \S & P_{S(90-100)} \quad \S \end{array}$$

en base a la metodología del capítulo III. Cabe decir que las distribuciones obtenidas por la proyección son muy sensibles a las distorsiones que puedan presentar las celdas de la matriz, razón por la cual se debió trabajar con 6 cifras decimales. Pruebas que se hicieron con sólo 3 cifras decimales, mostraban una apreciable diferencia y aumentaban los errores. Por último, el orden de cálculo es:

- i) las p_i a partir de p_1 y así siguiendo hasta p_{11}
- ii) las α_i sin importar el orden pero recordando que $\alpha_1 = 1$.

El cuadro de trabajo utilizado en los cálculos es el siguiente:

^{11/} Hasta aquí hemos venido refiriéndonos a los vectores de partida, como $x^{(i)}$ y $x^{(1)}$, pero con el fin de mantener la notación de niveles que traen las tablas modelo, cuando los vectores de partida correspondían, por ejemplo, a los niveles 40 y 50, los llamamos $x^{(40)}$ y $x^{(50)}$, respectivamente.

Sexo:

	Nivel <u>k</u>	Nivel <u>k+10</u>					
1	$x_i^{(k)}$	$x_i^{(k+10)}$	p_i	$1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j$	$x_i^{(k+10)} p_i \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j \right)^{\binom{i-1}{i-1}}$	$\left(\frac{(k+10)_{i-1}}{(k)_{i-1}} \prod_{j=1}^{i-1} p_j \right)^+$	$\alpha_i = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j}$
	(1)	(2)	(3)=(5)/(6)	(4)	(5)	(6)	(7)=(1)/(4)

1
2
3
.
.
.
.
.
.
.
11

Para cada una de las matrices se hizo la operación de proyección por períodos decenales y hasta treinta años, en los casos en que la existencia de tres vectores teóricos (aparte de los de partida), lo permitió. Así, para ejemplificar:

Con $x^{(40)}$ y $x^{(50)}$, se calculó la matriz $P_{S(40-50)}$ y luego se procedió a proyectar:

$$x^{(50)} P_{S(40-50)} = \hat{x}^{(60)}$$

$$\hat{x}^{(60)} P_{S(40-50)} = \hat{x}^{(70)}$$

$$\hat{x}^{(70)} P_{S(40-50)} = \hat{x}^{(80)}$$

Comparándose finalmente los errores cometidos edad por edad entre:

$$x^{(60)} \quad y \quad \hat{x}^{(60)}$$

$$x^{(70)} \quad y \quad \hat{x}^{(70)}$$

$$x^{(80)} \quad y \quad \hat{x}^{(80)}$$

Por cierto que en el caso de los vectores $x^{(90)}$ y $x^{(100)}$, que dieron lugar a la matriz $P_{S(90-100)}$ sólo se pudo calcular el error por comparación de $x^{(110)}$ y $\hat{x}^{(110)}$, puesto que las tablas modelo sólo se tabulan hasta el nivel 115.

Comentario de los resultados

De los cuadros que presentan los resultados de las proyecciones y los correspondientes errores (sexo masculino), se pueden deducir las siguientes conclusiones:

- 1) La longitud del vector de error, para un mismo par de distribuciones de partida, es creciente a medida que se pasa de la proyección de 10 años, a la de 20 años y a la de 30 años.

En símbolos:

$$\sqrt{\left(\varepsilon^{(2)} \quad \varepsilon^{(2)}\right)} < \sqrt{\left(\varepsilon^{(3)} \quad \varepsilon^{(3)}\right)} < \sqrt{\left(\varepsilon^{(4)} \quad \varepsilon^{(4)}\right)}$$

- ii) La longitud del mencionado vector es, también, función de los niveles de e_0 de los de partida y en consecuencia, de los que correspondan a los vectores teóricos con los que se deba efectuar la comparación.

En general se advierte un desmejoramiento progresivo en la calidad de los resultados de la proyección, a medida que se atraviesa por el tramo de $e_0 = \{55; 65,8\}$ en que la mortalidad infantil mejora rápidamente.

iii) Por lo común, la distribución de los errores por grupos de edad presenta un comportamiento típico para cualquier par de vectores de partida (véase el gráfico 1).

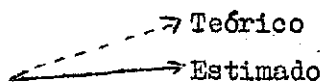
Esta forma se repite persistentemente, con ligeras variantes para todas las pruebas hechas con las distintas matrices y difiere, según sea el par de vectores de partida, en cuanto al valor absoluto del error por estado. Puede verse (apéndice III) que, salvo excepciones, las edades inferiores al grupo (45-54) presentan errores por exceso (+), y las superiores (salvo en el último grupo de edad 75 y (+)), presentan errores por defecto.

iv) ¿Cómo interpretar el signo del error correspondiente a un grupo de edades cualesquiera?

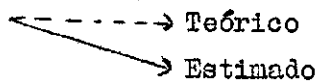
Algebraicamente el signo (+) del error en un estado E_1 , indica un exceso del valor estimado sobre el teórico; recíprocamente, el signo (-) equivale a un defecto del valor estimado sobre el teórico.

Desde un punto de vista demográfico se puede decir que el signo (-) del error representa para un estado E_1 :

1) Una subestimación del ascenso real del nivel de mortalidad del mismo;

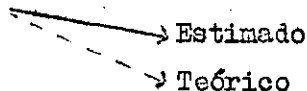


2) o bien, una sobreestimación del descenso real de su nivel de mortalidad;

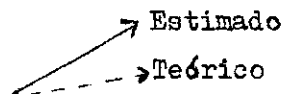


De manera similar se razona para el signo (+) diciendo que implica:

1) una subestimación del descenso real del nivel de mortalidad del estado;



- 2) o bien, una sobreestimación del ascenso real del nivel de mortalidad de E_1 ;



Gabrían varias posibilidades más; pero no son analizadas en razón de que no se presentan en la realidad (al menos en la por nosotros estudiada).

- v) Finalmente, se puede enunciar como conclusión que, salvo excepciones (niveles de e_0^0 muy bajos o muy altos y esto último con reservas), los resultados obtenidos al proyectar con matrices triangulares superiores no aseguran un mínimo de confiabilidad, razón por la que no se recomienda este método.

b) Matriz triangular inferior

Aspectos prácticos.

Por tratarse de una idea esencialmente simétrica a la de proyectar con P_s , los comentarios hechos respecto de ella son válidos en su mayoría al referirnos a P_I . A causa de ello, sólo incluiremos en este punto todo aquello que sea opuesto o distinto a lo ya expuesto.

En primer lugar, para evitar problemas ya presentados al trabajar con 3 cifras decimales en lugar de 6, en el caso de P_s , debióse incluir en los cálculos 9 cifras decimales con lo que se alcanzó un resultado satisfactorio.

Respecto al orden de cálculo, subsiste, en cuanto a que primero deberían ser identificadas numéricamente las p_i y en base a éstas se hallaron las α_i ; pero respecto a lo primero hay un cambio sobre lo actuado en P_s y es de que se debe partir del cálculo de p_{11} y así continuar, ordenadamente, hasta p_1 . En cuanto a las α_i , debe recordarse que ahora el supuesto es $\alpha_{11} = 1$.

El cuadro de trabajo es en todo similar al empleado para P_s , salvo los cambios necesarios para obtener el vector-complemento y la adecuación a la fórmula correspondiente:

Sexo:

	Nivel k	Nivel k+10	Nivel k	Nivel k+10					
i	$x_i^{(k)}$	$x_i^{(k+10)}$	$y_i^{(k)} = e^{-x^{(k)}}$	$y_i^{(k+10)} = e^{-x^{(k+10)}}$	p_i	$1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j$	$y_i^{(k+10)} p_{i+1} \left(1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j \right)$	$y_{i+1}^{(k+10)} \left(1 - \sum_{j=i+1}^{11} p_j \right) + y_i^{(k)} p_{i+1}$	$\alpha_i = \frac{1}{\sum_{j=i+1}^{11} p_j}$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (7)(8)	(6)	(7)	(8)	(9) = (1)/(6)

1
2
3
.
.
.
.
.
.
.
.
11

Comentario de los resultados

Puesto que se proyectó a partir del vector $y^{(k+10)}$, se obtuvieron también distribuciones de la forma $\hat{y}^{(k+n)}$; pero como lo que interesaba en última instancia eran los vectores $\hat{x}^{(k+n)}$, se pasó a ellos a través de las relaciones:

1) $e - x^{(t)} = y^{(t)} \quad \therefore \quad x^{(t)} = e - y^{(t)}$

que constituye la definición dada en el punto 2 del capítulo II.

2) $e - \hat{x}^{(t)} = \hat{y}^{(t)} \quad \therefore \quad \hat{x}^{(t)} = e - \hat{y}^{(t)}$

que en realidad es la expresión de interés en nuestro caso.

Sobre las conclusiones presentadas en relación con los resultados de la matriz P_s , son las mismas en el caso de P_I para las notadas con i), ii), iv) y v). En cuanto a la iii), se observa un comportamiento adecuadamente simétrico respecto del que presentaba el gráfico 1, tomando como referencia el eje horizontal. Esta forma típica del gráfico que representa el vector de error para cualquier nivel y período de proyección, fue de fundamental importancia para el planteamiento del punto siguiente.

3. Aspectos prácticos y resultados del trabajo con la combinación de los resultados de P_s y P_I

Antecedentes

En vista de que la investigación con las matrices P_s y P_I no dio resultados satisfactorios, se podría considerar que el método debe desecharse por carecer de aplicabilidad. Sin embargo, la condición señalada de que presentan errores adecuadamente simétricos (por exceso y por defecto) para cada estado, hace que la solución promedio surja desde el primer momento.

El caso óptimo sería aquel en que los vectores de error, provenientes de proyectar con P_s y P_I , fueran perfectamente simétricos por grupos de edades, de manera que al sumarlos se obtuviera cero. O sea:

$x^{(t)} = \hat{x}_s^{(t)} + \xi_s^{(t)} \quad (\text{obtenido con } P_s)$

$x^{(t)} = \hat{x}_I^{(t)} + \xi_I^{(t)} \quad (\text{obtenido con } P_I)$

entonces, si $\xi_s^{(t)} + \xi_I^{(t)} = 0$, resulta exactamente:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}(\hat{x}_S(t) + \hat{x}_I(t))$$

Numéricamente, para un vector de (1.3), sería:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ x(t) &= \hat{x}_S(t) + \xi_S(t) \end{aligned} \right\} \text{obtenido con } P_S$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ x(t) &= \hat{x}_I(t) + \xi_I(t) \end{aligned} \right\} \text{obtenido con } P_I$$

Sumando miembro a miembro y despejando, resulta:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+4 \\ 7+11 \\ 14+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Pero no es éste nuestro caso; no obstante, el nuevo vector de error es lo bastante pequeño en longitud como para que los resultados sean aceptables.

Aspectos prácticos

En primer lugar digamos que no se ha desarrollado una metodología que provea, mediante fórmulas similares a las obtenidas para P_S y P_I , la identificación de las probabilidades p_{ij} para una matriz cuadrada. Como se desprende de lo expuesto en el capítulo III, la expresión:

$$x^{(1)} = a + x^{(0)} P_c$$

formaliza relaciones entre e , P_S y P_I , pero en ningún momento trata de calcular los p_{ij} por un procedimiento independiente.

Aun más, la forma lineal presentada, no fue seguida rigurosamente ya que los resultados de cada proyección por P_S y P_I se promediaron, obteniéndose así los resultados en forma indirecta.

Por otra parte, en vista de que habitualmente los problemas de proyección de la población o de construcción de una tabla de mortalidad, exigen cálculos por separado para cada sexo, nos encontramos con que el método demandaría la confección de cuatro matrices (superior e inferior para hombres y lo mismo para mujeres) lo que sería costoso en esfuerzo y tiempo. Por ello se pensó en algún procedimiento complementario que evitase lo ya anotado. El llamado método de la tabla cuadrada^{12/} permitió trabajar con sólo dos matrices (una triangular superior y otra triangular inferior) para datos de ambos sexos que fueron después de la proyección abiertos para hombres y mujeres (por grupos de edad), en base a las distribuciones para cada sexo y estado que se conocen en un año (o) y de los marginales que se tienen de la proyección para el año t ; se consideró que la constancia del índice de masculinidad al nacimiento (=105) era un supuesto, realista en el período de 10 años que se trabajó.

Comentario de los resultados

Al contrario de las conclusiones v), relacionadas con las proyecciones hechas mediante el uso de P_S y P_I , creemos que los vectores estimados por la combinación de los anteriores en forma de promedio son aceptables y nos permite resolver el problema de la proyección.

En el caso en que nos encontramos (proyectar la distribución correspondiente al nivel 50, ambos sexos), se presentan los resultados obtenidos al utilizar una matriz triangular superior y una triangular inferior, en forma independiente, en el cuadro 1, y de ellos se pasó a la representación geométrica de los gráficos 2 y 3.

Es obvio que no se puede pensar en ninguno de los dos procedimientos (mediante P_S o P_I) para proyectar una distribución de mortalidad en forma independiente; pero una combinación promedio de tales resultados, en vista de su regular simetría, tiene la propiedad de originar un vector que sin ser el teórico, difiere de él por tan escaso margen de error relativo que lo convierte en una solución aceptable del problema.

^{12/} Bocaz, Albino: Tomado de sus clases sobre "Ajuste y evaluación de datos demográficos" CELADE, 1967. Véase apéndice IV de este trabajo.

Cuadro 1

DISTRIBUCIONES DE ERROR (POR CIENTO), DE LA PROYECCION A 10 Y 20 AÑOS RESPECTIVAMENTE, CON LAS
MATRICES $P_S(40-50)$ Y $P_I(40-50)$, PARA AMBOS SEXOS

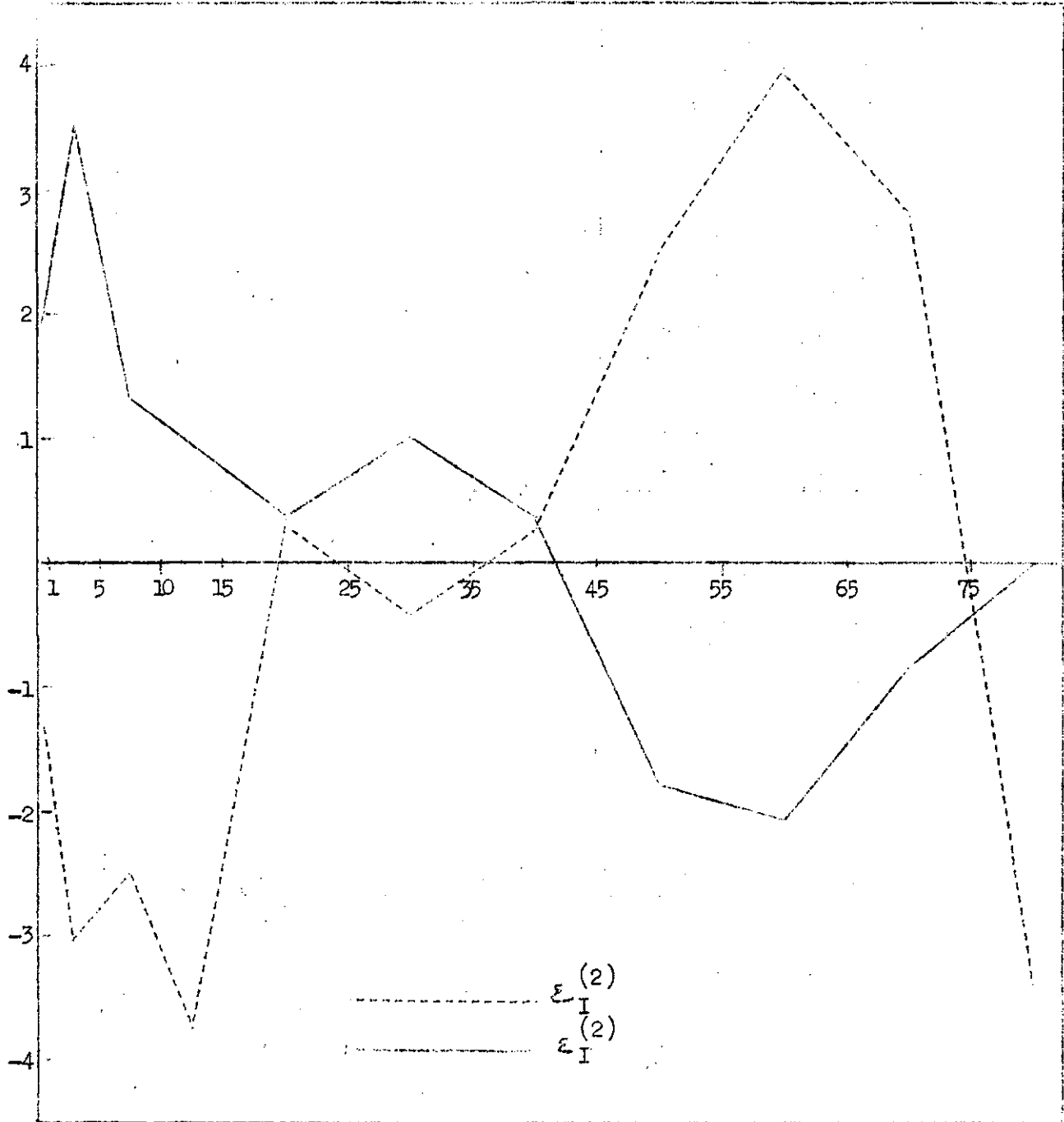
Grupos de edad $x, x+n$	Vector de error en el nivel 60; (por ciento)		Vector de error en el nivel 70; (por ciento)	
	Proveniente de la matriz P_S	Proveniente de la matriz P_I	Proveniente de la matriz P_S	Proveniente de la matriz P_I
- 1	1.89	-1.28	7.29	-3.91
1 - 4	3.53	-3.02	13.70	-9.54
5 - 9	2.31	-2.50	9.64	-8.50
10 - 14	0.98	-3.76	5.92	-13.76
15 - 24	0.38	0.30	3.84	1.15
25 - 34	1.02	-0.42	5.00	-0.31
35 - 44	0.38	0.29	2.08	1.45
45 - 54	-1.79	2.50	-4.08	8.02
55 - 64	-2.08	3.92	-5.81	11.04
65 - 74	-0.84	2.83	-2.92	7.45
75 y más	-0.04	-3.39	-1.04	-8.32

Gráfico 2

DISTRIBUCIONES DE ERROR $\epsilon^{(60)}$, DE LA PROYECCION CON LAS MATRICES
 $P_S(40-50)$ Y $P_I(40-50)$

Porcentaje de
error

(Ambos sexos)

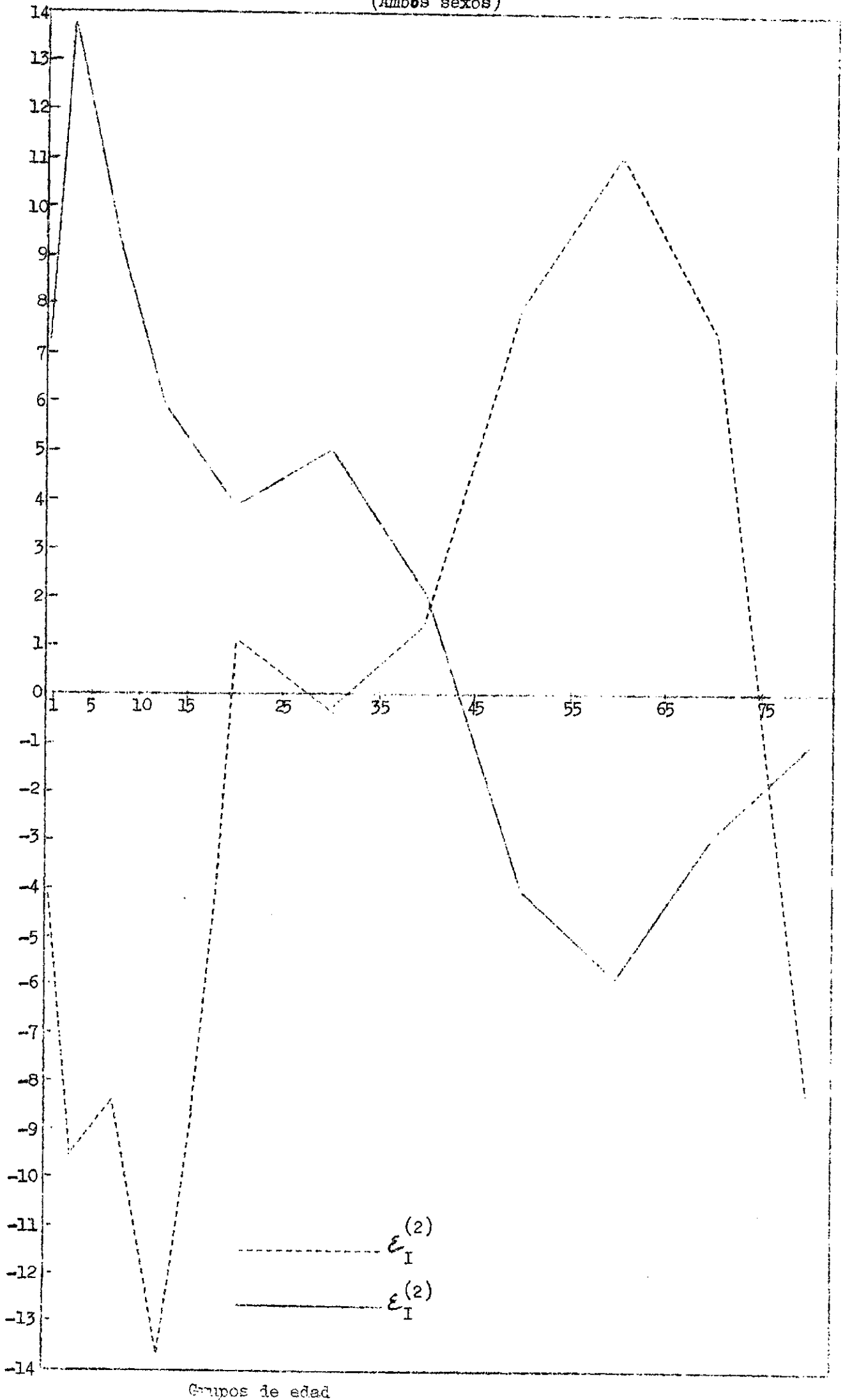


Grupos de edad

Gráfico 3

DISTRIBUCIONES DE ERROR $\epsilon^{(70)}$ DE LA PROYECCION CON LAS MATRICES
 $P_S(40-50)$ Y $P_I(40-50)$
(Ambos sexos)

Porcentaje de error



Claro está que cuando hablamos de promedio, no especificamos de que tipo. De los tres más utilizados -aritmético, geométrico, armónico-, se optó por el primero por razones de simplicidad y, lo que es mucho más importante, porque a pesar de la relación numérica que guardan entre sí para dos números Z_1 y Z_2 :^{13/}

$$\frac{\sum_{i=1}^2 Z_i}{2} > \sqrt{Z_1 \cdot Z_2} > \frac{2}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

(aritmético) (geométrico) (armónico)

las diferencias que presentan son muy pequeñas.

Por otra parte, como se trata de funciones de densidad, el hecho de que para algunos grupos de edad el error sea por exceso, implica que para otros debe ser por defecto y de esta manera, al optar por la media geométrica estaremos reduciendo, respecto de lo que daría la aritmética, la importancia de los errores relativos positivos, pero simultáneamente acrecentando los negativos. El mismo razonamiento se aplica para la media armónica respecto de la geométrica y por carácter transitivo, a la aritmética.^{14/}

Sobre este punto cabe por último decir que al promediar se afecta la distribución relativa y se pierde la condición fundamental mencionada en el supuesto 5 del capítulo II. En el caso de aplicar una media aritmética la distorsión es mínima; pero cuando se trata de un promedio geométrico o armónico, aumenta.

Una exposición numérica y gráfica de los resultados promedios (aritmético) que finalmente se adoptaron, figura en el cuadro 2 y gráfico 4, respectivamente.

^{13/} Esta relación es general para $Z_1, Z_2 \dots Z_n$ elementos, pero la referimos a dos, puesto que ese es nuestro caso.

^{14/} En el Apéndice III, tabla 4 se presentan resultados comparativos.

Cuadro 2

CALCULO DE VECTORES ESTIMADOS \hat{x}_s Y \hat{x}_l , PARA LOS NIVELES 60 Y 70 MEDIANTE EL USO DE LAS MATRICES $P_{s(40-50)}$ Y $P_{l(40-50)}$, RESPECTIVAMENTE; DE VECTORES ESTIMADOS PROMEDIO PARA LOS MISMOS NIVELES Y DE VECTORES DE ERROR CORRESPONDIENTES (DEL PROMEDIO RESPECTO AL TEORICO). AMBOS SEXOS

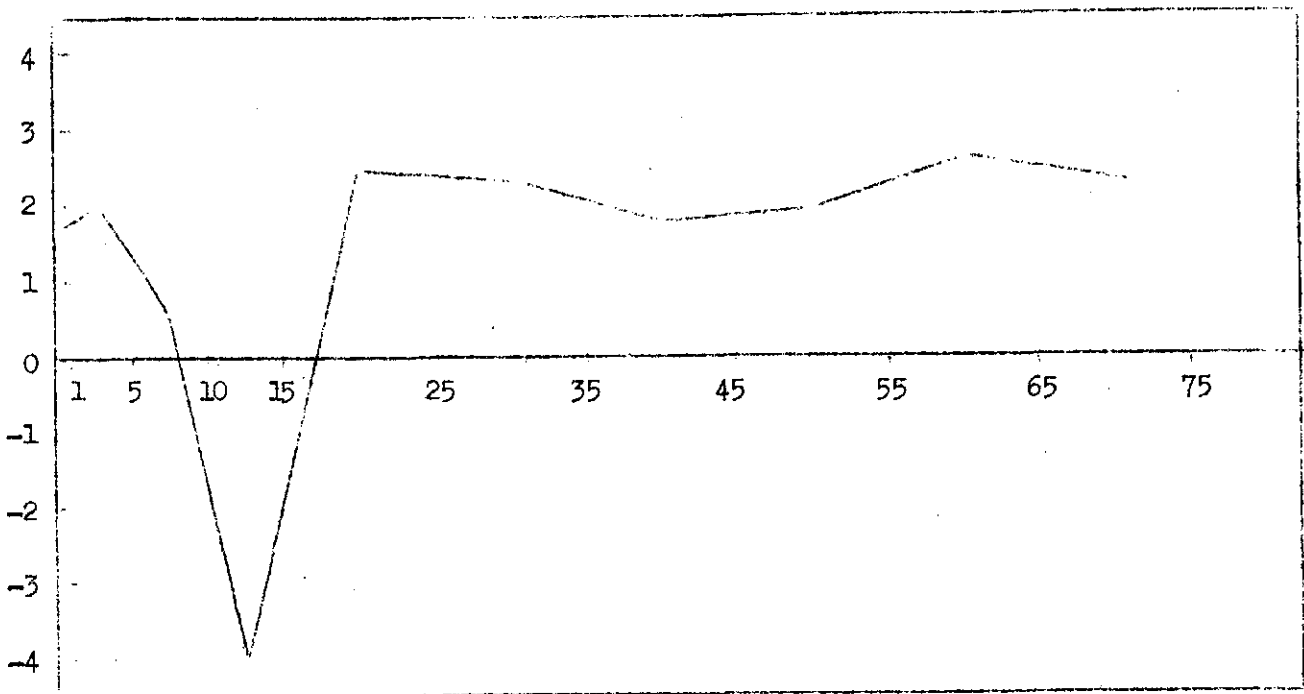
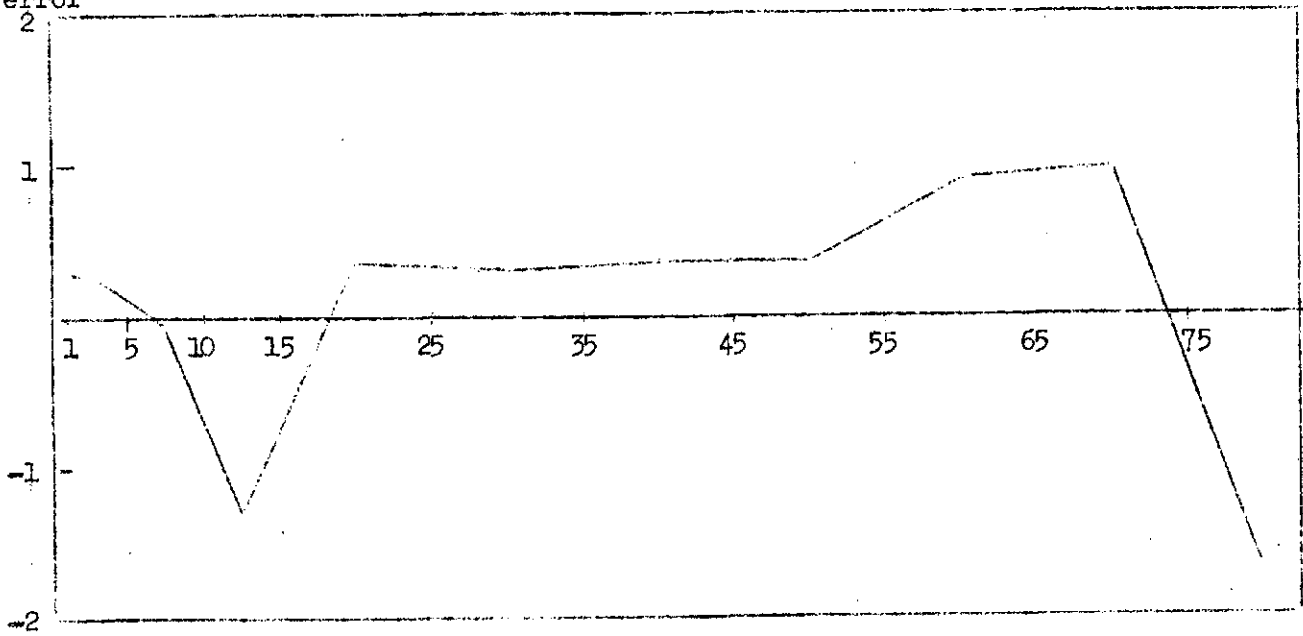
i	Nivel 60					Nivel 70				
	$\hat{x}_s^{(60)}$ $x_s^{(50)}P_s$ Estimado	$\hat{x}_l^{(60)}$ $a-(c-x^{(50)})P_l$ Estimado	$\hat{x}^{(60)}$ $a+x^{(50)}P_c$ Estimado Promedio	$x^{(60)}$ Teórico	Error Por ciento	$\hat{x}_s^{(70)}$ $\hat{x}_s^{(60)}P_s$ Estimado	$\hat{x}_l^{(70)}$ $a-(c-\hat{x}_l^{(60)})P_l$ Estimado	$\hat{x}^{(70)}$ $a+\hat{x}^{(60)}P_c$ Estimado Promedio	$x^{(70)}$ Teórico	Error Por ciento
1	13 654	13 229	13 442	13 401	0.31	11 702	10 481	11 092	10 907	1.70
2	5 658	5 300	5 479	5 465	0.26	4 697	3 737	4 217	4 131	2.08
3	1 638	1 561	1 600	1 601	-0.06	1 354	1 130	1 242	1 235	0.57
4	1 127	1 074	1 101	1 116	-1.34	931	758	844	879	-3.98
5	4 001	3 998	4 000	3 985	0.35	3 352	3 265	3 308	3 228	2.48
6	4 028	4 759	4 794	4 779	0.31	4 098	3 891	3 994	3 903	2.33
7	5 480	5 475	5 478	5 459	0.35	4 715	4 686	4 701	4 619	1.78
8	7 788	8 128	7 958	7 930	0.35	6 927	7 801	7 354	7 222	1.97
9	12 406	13 166	12 786	12 670	0.92	11 793	13 904	12 848	12 521	2.61
10	19 051	19 756	19 404	19 213	0.99	20 099	22 246	21 172	20 703	2.26
11	24 369	23 554	23 962	24 380	-1.71	30 332	28 101	29 216	30 652	-4.68

Gráfico 4

DISTRIBUCIONES DE ERROR PROMEDIO RESULTANTES DE COMBINAR LAS PROYECCIONES HECHAS
CON $P_s(40-50)$ Y $P_I(40-50)$

(Ambos sexos)

Porcentaje de
error



Grupos de edad

4. Comentarios finales

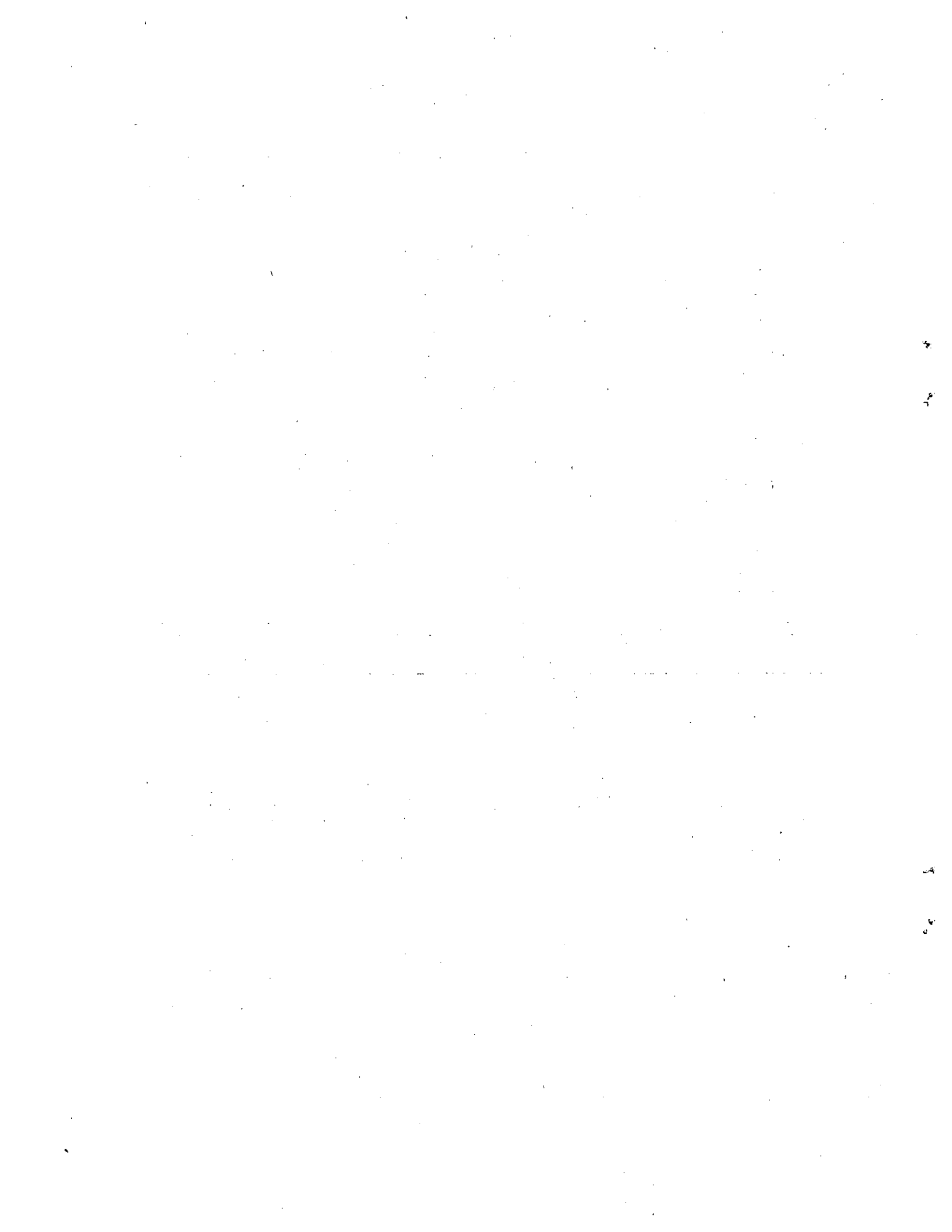
Del examen del método y basándose en los resultados podría decirse que son:

Desventajas del método

- a) La hipótesis de constancia en la evolución del fenómeno estudiado (capítulo II, supuesto 4) que no se adapta suficientemente a la realidad y que se transforma en un serio factor de distorsión de las proyecciones que van más allá de dos décadas.
- b) Su relativa laboriosidad, la cual radica más en el cuidado que demanda la identificación de los elementos de las matrices, que en el tiempo necesario para su cálculo.
- c) La necesidad de trabajar con los resultados combinados de las proyecciones hechas mediante matrices: triangular superior e inferior, en lugar de hacerlo con cada uno de ellos por separado.

Ventajas del método

- a) Quizá debiera recalcar lo ya anotado en la introducción acerca de la idea que está subyaciendo en todo proceso de Markov y que introducida en nuestro problema avanza respecto de lo que se hace al utilizar funciones matemáticas de ajuste.
- b) Podría agregarse su flexibilidad, que hace posible extender su aplicación a otros problemas demográficos, como se señaló y ejemplificó en la introducción.



A P E N D I C E I

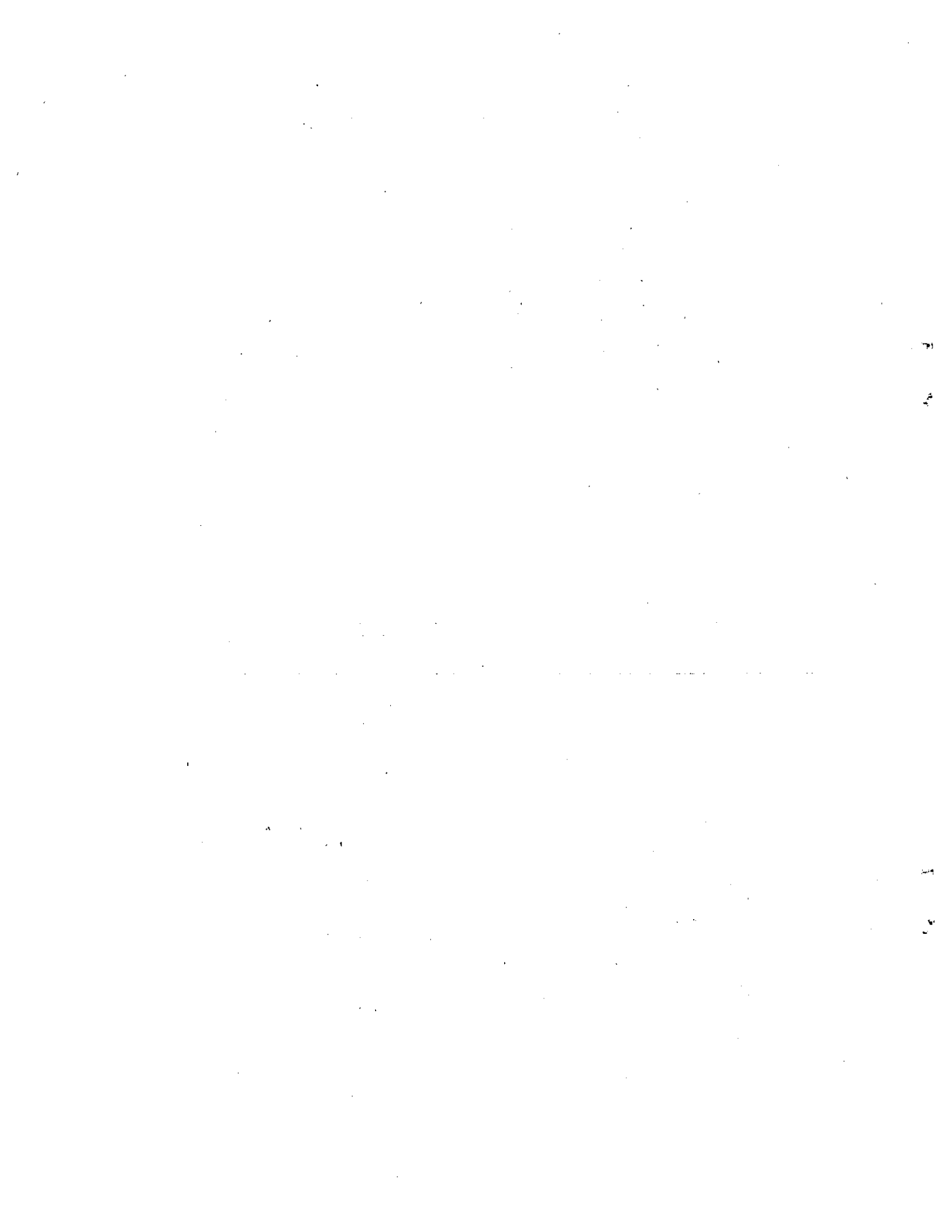
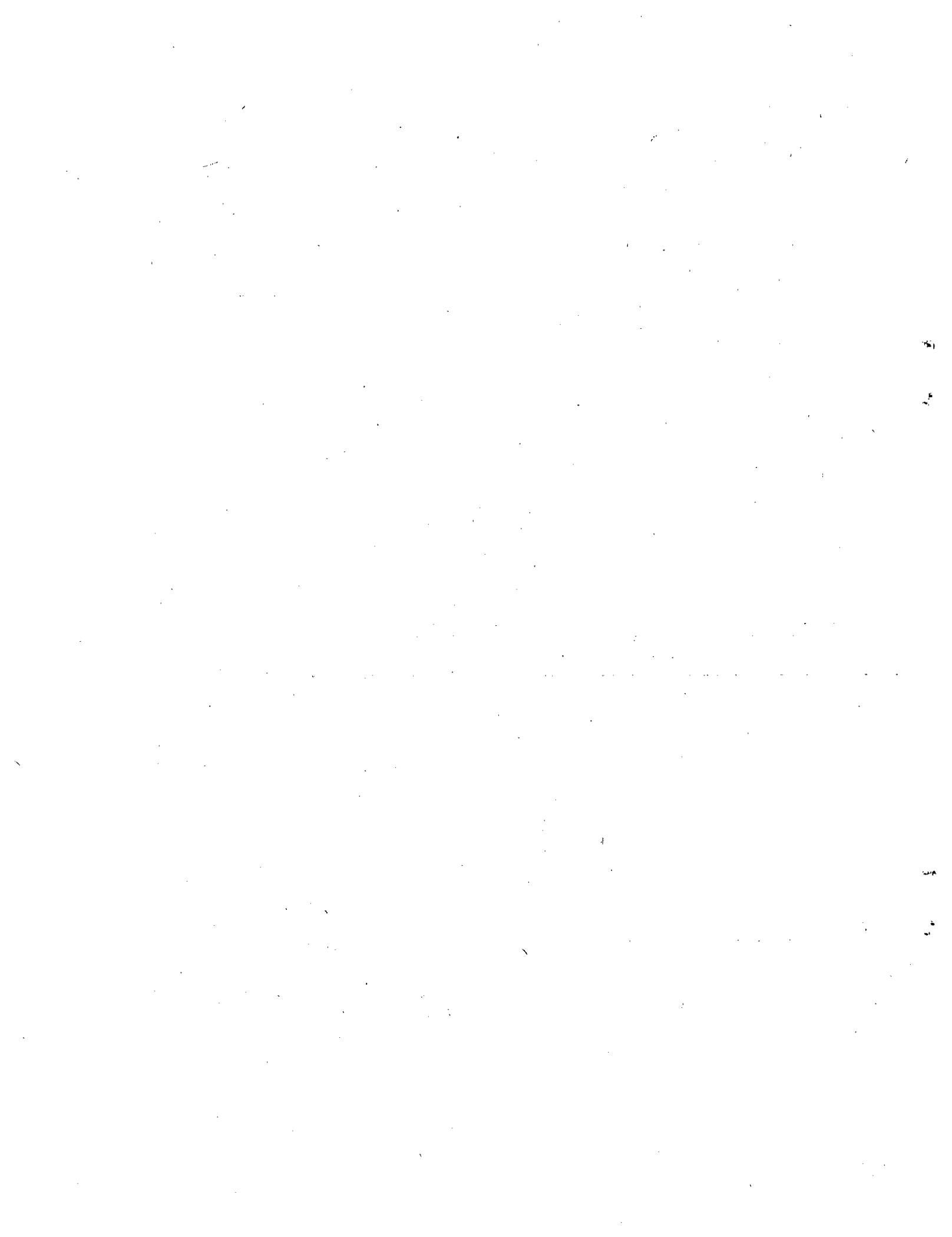


Tabla 3

DISTRIBUCIONES DE LAS DEFUNCIONES POR GRUPOS DE EDAD DE LAS TABLAS MODELO DE MORTALIDAD (NACIONES UNIDAS)
 CORRESPONDIENTES A LOS NIVELES 40, 50, 60 Y 70; Y SUS RESPECTIVOS COMPLEMENTOS CON EL VECTOR e ,
 PARA AMBOS SEXOS, MEDIANTE LA APLICACION DE LA FORMULA:

$${}_n d_x = 0.5122 {}_n d_x^H + 0.4878 {}_n d_x^M$$

Nivel	Nivel 40	Nivel 50	Nivel 60	Nivel 70	Nivel 40	Nivel 50	Nivel 60	Nivel 70
e_o^o	$e_o^o = 40$	$e_o^o = 45$	$e_o^o = 50$	$e_o^o = 55$	$e_o^o = 40$	$e_o^o = 45$	$e_o^o = 50$	$e_o^o = 55$
Edad	${}_n d_x$	${}_n d_x$	${}_n d_x$	${}_n d_x$	$e - {}_n d_x$	$e - {}_n d_x$	$e - {}_n d_x$	$e - {}_n d_x$
Porcentaje								
- 1	18.590	15.932	13.401	10.907	81.410	84.068	86.599	89.093
1 - 4	8.504	6.889	5.465	4.131	91.496	93.111	94.535	95.869
5 - 9	2.436	1.996	1.601	1.235	97.564	98.004	98.399	98.765
10 - 14	1.636	1.367	1.116	0.879	98.364	98.363	98.884	99.121
15 - 24	5.422	4.717	3.986	3.228	94.578	95.283	96.014	96.772
25 - 34	6.484	5.624	4.779	3.903	93.516	94.376	95.221	96.097
35 - 44	7.134	6.293	5.459	4.619	92.866	93.707	94.541	95.381
45 - 54	9.054	8.548	7.930	7.222	90.946	91.452	92.070	92.778
55 - 64	12.175	12.587	12.670	12.521	87.825	87.413	87.330	87.479
65 - 74	14.986	17.328	19.213	20.703	85.014	82.672	80.787	79.297
75 y más	13.579	18.719	24.380	30.652	86.421	81.281	75.620	69.348
Total	100.000	100.000	100.000	100.000	1.000.000	1.000.000	1.000.000	1.000.000



A P E N D I C E I I



Tabla 1

Matriz $P_{s(40-50)}$ (Hombres)

0.863894	0.084060	0.015424	0.007598	0.013206	0.007393	0.004035	0.002415	0.001300	0.000533	0.000142
	0.617607	0.113323	0.055824	0.097027	0.054318	0.029646	0.017744	0.009552	0.003916	0.001043
		0.296353	0.145986	0.253737	0.142047	0.077528	0.046401	0.024978	0.010241	0.002729
			0.207471	0.360603	0.201873	0.110180	0.065944	0.035498	0.014554	0.003877
				0.455003	0.254720	0.139023	0.083207	0.044791	0.018354	0.004892
					0.467379	0.255089	0.152674	0.082185	0.033696	0.008977
						0.478932	0.286647	0.154303	0.063264	0.016854
							0.550114	0.296128	0.121412	0.032346
								0.658228	0.269873	0.071899
									0.789630	0.210370
										1.000000

Tabla 2

Matriz $P_s(50-60)$ (Hombres)

0.850316	0.087121	0.016867	0.008653	0.016162	0.009310	0.005310	0.003403	0.001881	0.000768	0.000209
0.582033	0.112684	0.057808	0.107974	0.062198	0.035475	0.022735	0.012566	0.005131	0.001396	
	0.269600	0.138308	0.258332	0.148810	0.084874	0.054393	0.030066	0.012276	0.003341	
		0.189360	0.353685	0.203738	0.116203	0.074470	0.041163	0.016807	0.004574	
			0.436304	0.251330	0.143347	0.091866	0.050779	0.020733	0.005642	
				0.445860	0.254298	0.162971	0.090082	0.036780	0.010009	
					0.458906	0.294097	0.162562	0.066373	0.018062	
						0.543523	0.300431	0.122664	0.033382	
							0.658153	0.268719	0.073128	
								0.786080	0.213920	
										1.000000

Tabla 3

Matriz $P_s(60-70)$ (Hombres)

0.821463	0.092324	0.019477	0.010638	0.021748	0.013486	0.008511	0.006098	0.003716	0.001597	0.000422
	0.519915	0.109092	0.059584	0.121812	0.075536	0.047671	0.034155	0.020814	0.008945	0.002476
		0.227235	0.124112	0.253730	0.157339	0.099297	0.071144	0.043354	0.018632	0.005157
			0.160608	0.328341	0.203605	0.128495	0.092065	0.056102	0.024111	0.006673
				0.391165	0.242563	0.153081	0.109680	0.066837	0.028724	0.007950
					0.398405	0.251433	0.180148	0.109778	0.047179	0.013057
						0.417943	0.299450	0.182479	0.078423	0.021705
							0.514469	0.313507	0.134734	0.037290
								0.645699	0.277498	0.076803
									0.783227	0.216773
										1.000000

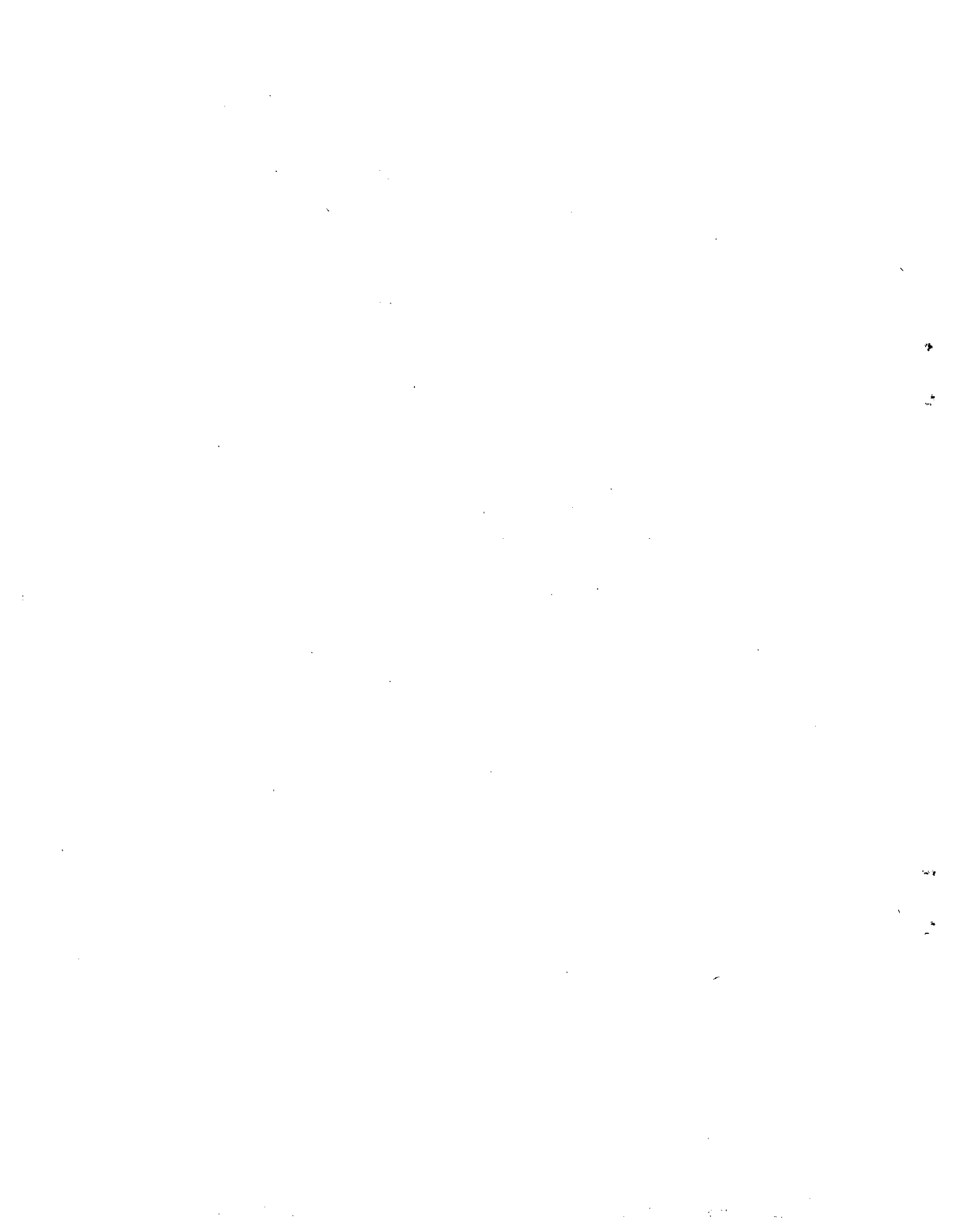


Tabla 5

Matriz $P_s(80-90)$ (Hombres)

0.596669	0.122347	0.034754	0.022863	0.058243	0.045180	0.038428	0.037913	0.027620	0.012611	0.003399
	0.303342	0.086167	0.056618	0.144405	0.112017	0.095277	0.094000	0.068480	0.031267	0.008427
		0.123687	0.081272	0.207282	0.160792	0.136762	0.134929	0.098297	0.044882	0.012097
			0.092745	0.236539	0.183487	0.156065	0.153974	0.112172	0.051216	0.013804
				0.260719	0.202243	0.172019	0.169714	0.123638	0.056452	0.015215
					0.273568	0.232684	0.229566	0.167241	0.076360	0.020581
						0.320311	0.316018	0.230222	0.105117	0.028332
							0.464945	0.338717	0.154654	0.041684
								0.633051	0.289044	0.077905
									0.787695	0.212305
										1.000000

Tabla 6

	<u>Matriz</u>	<u>P_s(90-100)</u>	<u>(Hombres)</u>							
0.587292	0.096711	0.032941	0.023289	0.058757	0.047887	0.047155	0.050560	0.036131	0.015414	0.003863
	0.234333	0.079817	0.056430	0.142369	0.116031	0.114258	0.122508	0.087546	0.037348	0.009360
		0.104245	0.073700	0.185942	0.151542	0.149226	0.160001	0.114340	0.048779	0.012225
			0.082277	0.207581	0.169179	0.166592	0.178622	0.127646	0.054456	0.013647
				0.226191	0.184346	0.181528	0.194636	0.139090	0.059338	0.014871
					0.238232	0.234590	0.251530	0.179747	0.076683	0.019218
						0.307955	0.330192	0.235961	0.100664	0.025228
							0.477125	0.340961	0.145459	0.036455
								0.652090	0.278191	0.069719
									0.799606	0.200394
										1.000000

Tabla 8

	<u>Matriz</u>	<u>P</u>	<u>s(50-60)</u>	<u>(Mujeres)</u>						
0.830258	0.098158	0.019208	0.010531	0.017545	0.010372	0.005793	0.003848	0.002537	0.001325	0.000425
	0.578278	0.113160	0.062041	0.103363	0.061104	0.034128	0.022670	0.014946	0.007806	0.002504
		0.268328	0.147113	0.245097	0.144893	0.080926	0.053755	0.035441	0.018510	0.005937
			0.201065	0.334982	0.198030	0.110604	0.073469	0.048438	0.025298	0.008114
				0.419286	0.247867	0.138439	0.091958	0.060629	0.031665	0.010156
				0.426831	0.238395	0.158354	0.104403	0.054527	0.017490	
					0.415925	0.276278	0.182151	0.095132	0.030514	
						0.473018	0.311862	0.162877	0.052243	
							0.591789	0.309074	0.099137	
								0.757143	0.242857	
										1.000000

Tabla 9

Matriz $P_{s(60-70)}$ (Mujeres)

0.804687	0.101214	0.021436	0.012385	0.022641	0.014473	0.008864	0.006510	0.004559	0.002424	0.000807
	0.518214	0.109752	0.063411	0.115922	0.074101	0.045384	0.053331	0.023342	0.012411	0.004132
		0.227803	0.131617	0.240608	0.153806	0.094199	0.069182	0.048449	0.025760	0.008576
			0.170444	0.311589	0.199180	0.121988	0.089592	0.062742	0.033359	0.011106
				0.375610	0.240104	0.147052	0.108000	0.075633	0.040214	0.013388
					0.384542	0.235513	0.172968	0.121131	0.064405	0.021442
						0.382663	0.281040	0.196814	0.104645	0.034838
							0.455245	0.318811	0.169510	0.056434
								0.585238	0.311168	0.103594
									0.750232	0.249768
										1.000000

Tabla 10

Matriz $P_{s(70-80)}$ (Mujeres)

0.708877	0.120552	0.028257	0.017496	0.037546	0.027567	0.019716	0.016897	0.013039	0.007453	0.002600
	0.414093	0.097062	0.060098	0.128970	0.094692	0.067724	0.058041	0.044789	0.025601	0.008930
		0.165661	0.102573	0.220120	0.161616	0.115588	0.099061	0.076443	0.043695	0.015243
			0.122940	0.263825	0.193706	0.138539	0.118730	0.091621	0.052370	0.018269
				0.300806	0.220858	0.157958	0.135373	0.104464	0.059711	0.020830
					0.315875	0.225914	0.193613	0.149406	0.085400	0.029792
						0.330224	0.283008	0.218390	0.124831	0.043547
							0.422541	0.326065	0.186376	0.065018
								0.564655	0.322752	0.112593
									0.741371	0.258629
										1.000000

Tabla 11

Matriz $P_s(80-90)$ (Mujeres)

0.585494	0.123007	0.032434	0.021603	0.053684	0.046005	0.039438	0.039288	0.032689	0.019718	0.006640
	0.296756	0.078247	0.052117	0.129513	0.110988	0.095145	0.094783	0.078862	0.047570	0.016019
		0.111266	0.074110	0.184165	0.157822	0.135294	0.134779	0.112141	0.067644	0.022779
			0.083388	0.207222	0.177581	0.152232	0.151653	0.126181	0.076112	0.025631
				0.226074	0.193736	0.166081	0.165450	0.137660	0.083037	0.027962
					0.250329	0.214596	0.213780	0.177872	0.107292	0.036131
						0.286253	0.285165	0.237267	0.143120	0.048195
							0.399532	0.332425	0.200519	0.067524
								0.553610	0.333937	0.112453
									0.748084	0.251916
										1.000000

Tabla 12

Matriz $P_{s(90-100)}$ (Mujeres)

0.565449	0.099019	0.029918	0.021526	0.055592	0.051958	0.050973	0.053982	0.042455	0.022505	0.006623
	0.227867	0.068848	0.049536	0.127930	0.119567	0.117300	0.124225	0.097697	0.051789	0.015241
		0.089166	0.064155	0.165683	0.154853	0.151917	0.160885	0.126530	0.067072	0.019739
			0.070435	0.181903	0.170012	0.166789	0.176634	0.138917	0.073639	0.021671
				0.195686	0.182894	0.179427	0.190019	0.149443	0.079218	0.023313
					0.227391	0.223080	0.236249	0.185802	0.098493	0.028985
						0.288737	0.305781	0.240486	0.127480	0.037516
							0.429913	0.338112	0.179230	0.052745
								0.593088	0.314390	0.092522
									0.772624	0.227376
										1.000000

Tabla 13

MATRIZ $P_{S(40-50)}$ (AMBOS SEXOS)

0.857019903	0.088244928	0.016284305	0.008278836	0.019679494	0.007620903	0.004080784	0.002490707	0.001442625	0.000661345	0.000196170
0.617183299	0.113892111	0.057902017	0.095674119	0.053300447	0.028540923	0.017419956	0.010089691	0.004625434	0.001372009	
	0.297510820	0.151252589	0.249921472	0.139232291	0.074555063	0.045504692	0.026335455	0.012082634	0.003589984	
		0.215309492	0.355765582	0.198198485	0.106129839	0.064776360	0.037518663	0.017199744	0.005101836	
			0.453383313	0.252581729	0.133250571	0.082550202	0.047813326	0.021919143	0.006501717	
				0.462081994	0.247432202	0.151020274	0.087471398	0.040099660	0.011894473	
					0.459981260	0.280749616	0.162611024	0.074546045	0.022112056	
						0.519888654	0.301121075	0.138043440	0.040946831	
							0.627190084	0.287523803	0.085286113	
								0.771294323	0.228765677	
									1.000000000	

A P E N D I C E I I I

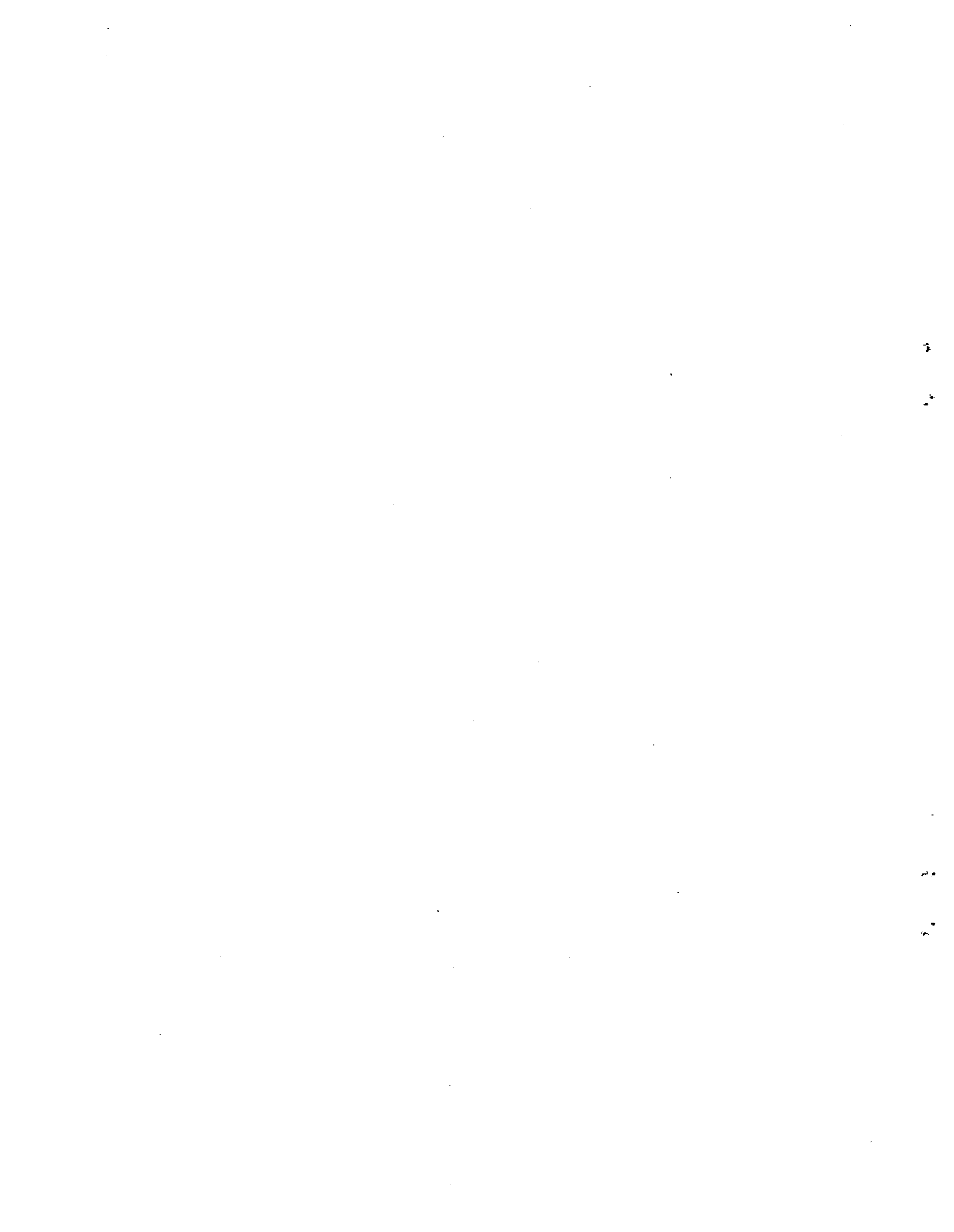


Tabla 1

CALCULO DE LA PROYECCION DE $x^{(50)}$ A 10, 20 Y 30 AÑOS RESPECTIVAMENTE Y DE LOS VECTORES DE ERROR
(DEL ESTIMADO RESPECTO AL TEORICO) CORRESPONDIENTES MEDIANTE LA APLICACION DE $P_s(40-50)$

(Hombres)

Grupos de edad $x, x+n$	Nivel 60			Nivel 70			Nivel 80		
	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)
- 1	14.378	14.608	1.60	11.811	12.620	6.85	8.467	10.902	28.76
1 - 4	5.442	5.633	3.51	4.164	4.707	13.04	3.020	3.968	31.39
5 - 9	1.581	1.613	2.02	1.233	1.342	8.84	0.934	1.126	20.56
10 - 14	1.053	1.060	0.66	0.843	0.881	4.51	0.666	0.737	10.66
15 - 24	3.971	3.934	-0.93	3.277	3.321	1.34	2.622	2.793	6.52
25 - 34	4.729	4.761	0.68	3.916	4.084	4.29	3.149	3.472	10.26
35 - 44	5.674	5.704	0.53	4.843	4.961	2.44	4.069	4.271	4.96
45 - 54	8.651	8.502	-1.72	7.924	7.646	-3.51	7.316	6.762	-7.57
55 - 64	13.613	13.370	-1.79	13.616	12.917	-5.13	13.577	12.143	-10.56
65 - 74	19.157	19.016	-0.74	20.874	20.311	-2.70	22.542	21.017	-6.77
75 y más	21.751	21.799	0.22	27.499	27.210	-1.05	33.638	32.809	-2.46

Tabla 2

CALCULO DE LA PROYECCION DE $x^{(60)}$ A 10, 20 Y 30 AÑOS RESPECTIVAMENTE Y DE LOS VECTORES DE ERROR
 (DEL ESTIMADO RESPECTO AL TEORICO) CORRESPONDIENTE MEDIANTE LA APLICACION DE $P_s(50-60)$
 (Hombres)

Grupos de edad $x, x+n$	Nivel 70			Nivel 80			Nivel 90		
	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)
- 1	11.811	12.226	3.51	8.467	10.396	22.78	5.052	8.840	74.98
1 - 4	4.164	4.420	6.15	3.020	3.638	20.46	1.952	3.023	54.87
5 - 9	1.233	1.282	3.97	0.934	1.050	12.42	0.670	0.868	29.55
10 - 14	0.843	0.857	1.66	0.666	0.701	5.26	0.502	0.578	15.14
15 - 24	3.277	3.333	1.71	2.622	2.763	5.38	1.964	2.286	16.40
25 - 34	3.916	4.028	2.86	3.149	3.388	7.59	2.385	2.827	18.53
35 - 44	4.843	4.902	1.22	4.069	4.182	2.78	3.332	3.532	6.00
45 - 54	7.924	7.843	-1.02	7.316	6.943	-5.10	6.689	6.037	-9.75
55 - 64	13.616	13.295	-2.36	13.577	12.588	-7.28	13.468	11.622	-13.71
65 - 74	20.874	20.487	-1.85	22.542	21.237	-5.79	23.906	21.439	-10.32
75 y más	27.499	27.327	-0.63	33.638	33.112	-1.56	40.080	38.948	-2.82

1
68
1

Tabla 3

CALCULO DE LA PROYECCION DE $x^{(70)}$ A 10, 20 Y 30 AÑOS RESPECTIVAMENTE Y DE LOS VECTORES DE ERROR
 (DEL ESTIMADO RESPECTO AL TEORICO) CORRESPONDIENTES MEDIANTE LA APLICACION DE $P_s(60-70)$
 (Hombres)

Grupos de edad $x, x+n$	Nivel 80			Nivel 90			Nivel 100		
	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)
- 1	8.467	9.702	14.59	5.052	7.970	57.76	2.967	6.547	120.66
1 - 4	3.020	3.261	7.98	1.952	2.596	32.99	0.946	2.090	120.93
5 - 9	0.934	0.964	3.21	0.670	0.764	14.03	0.390	0.612	56.92
10 - 14	0.666	0.662	-0.60	0.502	0.523	4.18	0.317	0.418	31.86
15 - 24	2.622	2.636	0.53	1.964	2.101	6.98	1.244	1.677	34.81
25 - 34	3.149	3.194	1.43	2.385	2.576	8.01	1.582	2.066	30.59
35 - 44	4.069	4.040	-0.71	3.332	3.314	-0.54	2.584	2.689	4.06
45 - 54	7.316	6.971	-4.72	6.689	5.961	-10.88	5.962	4.993	-16.25
55 - 64	13.577	13.040	-3.96	13.468	12.052	-10.51	13.043	10.825	-17.01
65 - 74	22.542	21.953	-2.61	23.906	22.374	-6.40	24.681	22.176	-10.15
75 y más	33.638	33.577	-0.18	40.080	39.769	-0.78	46.284	45.907	-0.81

Tabla 4

CALCULO DE LA PROYECCION DE $x^{(80)}$ A 10, 20 Y 30 AÑOS RESPECTIVAMENTE Y DE LOS VECTORES DE ERROR
(DEL ESTIMADO RESPECTO AL TEORICO) CORRESPONDIENTES MEDIANTE LA APLICACION DE $P_s(70-80)$

(Hombres)

Grupos de edad $x, x+n$	Nivel 90			Nivel 100			Nivel 110		
	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)
- 1	5.052	6.070	20.15	2.967	4.351	46.65	2.041	3.119	52.82
1 - 4	1.952	2.179	11.63	0.946	1.568	62.92	0.433	1.126	160.05
5 - 9	0.670	0.681	1.64	0.390	0.492	26.15	0.191	0.354	85.34
10 - 14	0.502	0.492	-1.99	0.317	0.356	12.30	0.168	0.256	52.38
15 - 24	1.964	2.000	1.83	1.244	1.481	19.05	0.672	1.079	60.56
25 - 34	2.385	2.456	2.98	1.582	1.859	17.51	1.008	1.378	36.71
35 - 44	3.332	3.279	-1.59	2.584	2.554	-1.16	1.959	1.938	-1.07
45 - 54	6.689	6.346	-5.13	5.962	5.258	-11.81	5.060	4.204	-16.92
55 - 64	13.468	12.899	-4.22	13.043	11.735	-10.03	12.117	10.285	-15.12
65 - 74	23.906	23.540	-1.53	24.681	23.798	-3.58	24.619	23.346	-5.17
75 y más	40.080	40.058	-0.05	46.284	46.548	0.57	51.732	52.915	2.29

Tabla 5

CALCULO DE LA PROYECCION DE $x^{(90)}$ a 10 Y 20 AÑOS RESPECTIVAMENTE Y DE
LOS VECTORES DE ERROR (DEL ESTIMADO RESPECTO AL TEORICO)
CORRESPONDIENTES MEDIANTE LA APLICACION DE $P_s(80-90)$

(Hombres)

Grupos de edad $x, x+n$	Nivel 100			Nivel 110		
	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)
- 1	2.967	3.014	1.58	2.041	1.798	-11.91
1 - 4	0.946	1.210	27.91	0.433	0.736	69.98
5 - 9	0.390	0.427	9.49	0.191	0.262	37.17
10 - 14	0.317	0.327	3.15	0.168	0.202	20.24
15 - 24	1.244	1.346	8.20	0.672	0.867	29.02
25 - 34	1.582	1.696	7.21	1.008	1.136	12.70
35 - 44	2.584	2.510	2.86	1.959	1.771	-9.60
45 - 54	5.962	5.586	-6.31	5.060	4.230	-16.40
55 - 64	13.043	12.596	-3.43	12.117	11.139	-8.07
65 - 74	24.681	24.582	-0.40	24.619	24.449	-0.69
75 y más	46.234	46.706	0.91	51.732	53.410	3.24

Tabla 6

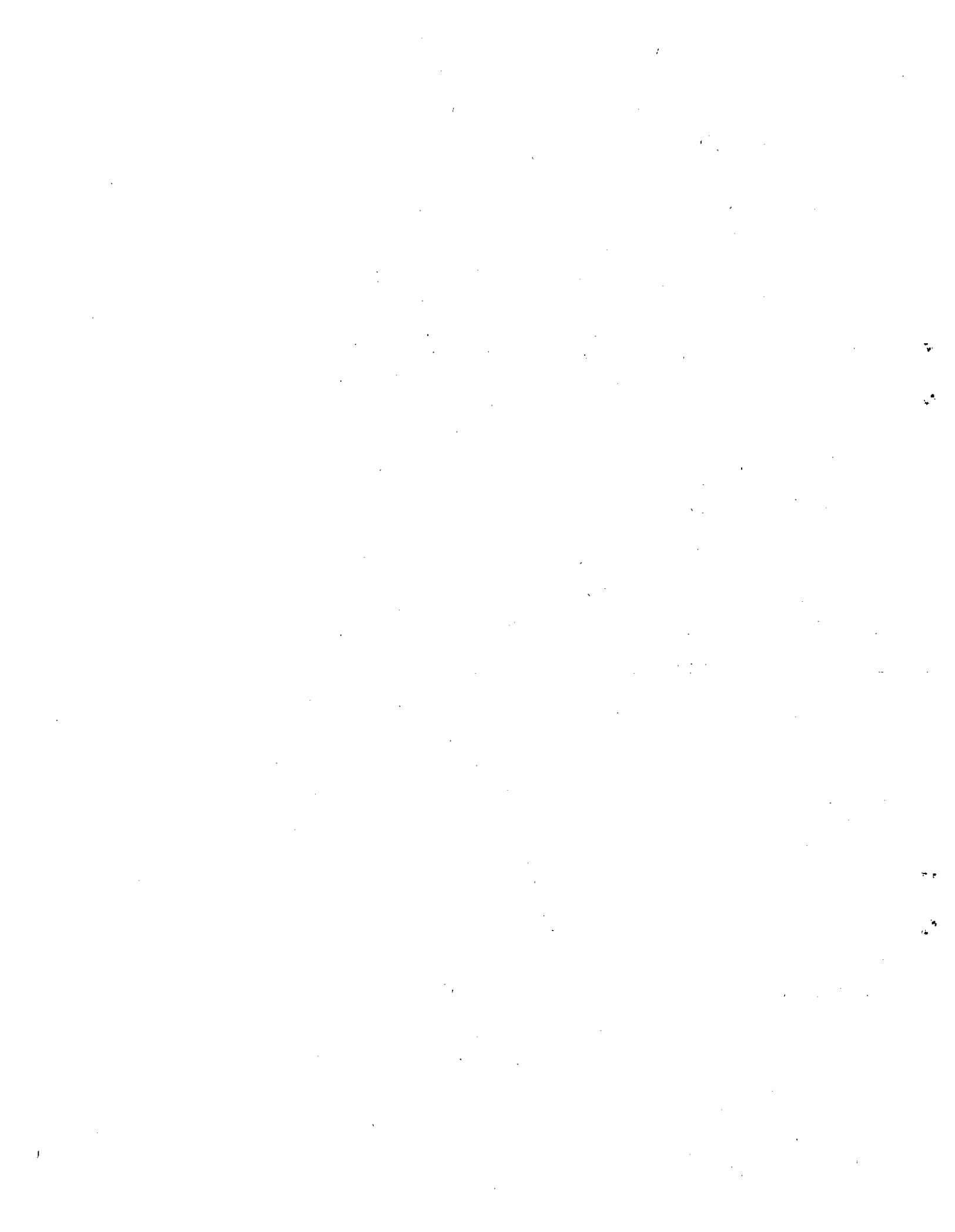
CALCULO DE LA PROYECCION DE $x^{(100)}$ A 10 AÑOS Y DEL
VECTOR DE ERROR (DEL ESTIMADO RESPECTO AL TEORICO)
CORRESPONDIENTE MEDIANTE LA APLICACION DE
 $P_s(90-100)$
(Hombres)

Grupos de edad $x, x+n$	Nivel 110		
	Teórico	Observado	Error (Porcentaje)
- 1	2.041	1.742	-14.65
1 - 4	0.433	0.509	17.55
5 - 9	0.191	0.214	12.04
10 - 14	0.168	0.177	5.36
15 - 24	0.672	0.729	8.48
25 - 34	1.008	0.971	-3.67
35 - 44	1.959	1.752	-10.57
45 - 54	5.060	4.723	-6.66
55 - 64	12.117	11.880	-1.96
65 - 74	24.619	24.803	0.75
75 y más	51.732	52.500	1.48

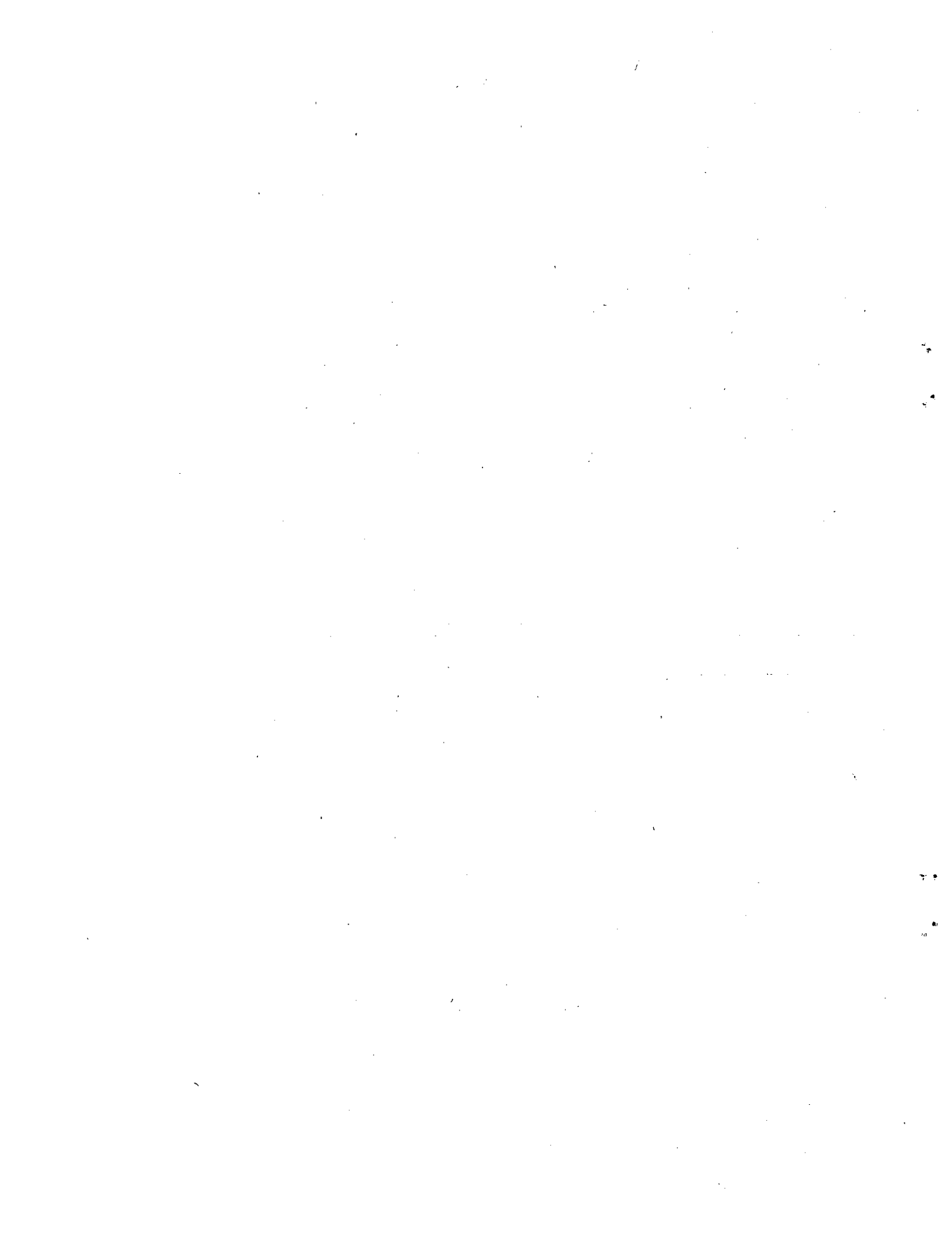
Tabla 7

COMPARACION DE LA ESTRUCTURA TEORICA $x^{(60)}$ CON LOS PROMEDIOS ARITMETICO, GEOMETRICO Y ARMONICO DE LAS PROYECCIONES A 10 AÑOS HECHAS CON $P_s^{(40-50)}$ Y $P_{I(40-50)}$ DE LA ESTRUCTURA INICIAL $x^{(50)}$. (AMBOS SEXOS)

i	Teórico	Media aritmética	Error %	Media geométrica	Error %	Media armónica	Error %
1	13.401	13.442	0.31	13.440	0.29	13.438	0.28
2	5.465	5.479	0.26	5.476	0.20	5.473	0.15
3	1.601	1.600	-0.06	1.599	-0.12	1.598	-0.19
4	1.116	1.101	-1.34	1.100	-1.43	1.100	-1.43
5	3.986	4.000	0.35	4.000	0.35	3.999	0.33
6	4.779	4.794	0.31	4.793	0.29	4.793	0.29
7	5.459	5.478	0.35	5.477	0.33	5.477	0.33
8	7.930	7.958	0.35	7.956	0.33	7.954	0.30
9	12.670	12.786	0.92	12.780	0.87	12.775	0.83
10	19.213	19.404	0.99	19.400	0.97	19.397	0.96
11	24.380	23.962	-1.71	23.958	-1.73	23.954	-1.75



A P E N D I C E IV



1. Método de la tabla cuadrada:

Dada la distribución de las defunciones en un año base (o) por grupos de edad y sexo (con lo cual serán conocidos los marginales de filas y columnas en el año base):

Año base (o)			
Edad	$0.5122 \cdot \frac{d^H}{n \cdot x}$	$0.4878 \cdot \frac{d^M}{n \cdot x}$	$\frac{d}{n \cdot x}$
	Hombres	Mujeres	Total
- 1			
1 - 4			
5 - 9			
.			
.			
.			
.			
75 y más			
	51 220	48 780	100 000

y conocida la distribución de los marginales (por filas y columnas) en otro año t (anterior o posterior), se plantea el problema de conocer las distribuciones de las muertes para cada sexo y por grupos de edad en t:

Año (t)			
Edad	$0.5122 \cdot \frac{d^H}{n \cdot x}$	$0.4878 \cdot \frac{d^M}{n \cdot x}$	$\frac{d}{n \cdot x}$
	Hombres	Mujeres	Total
- 1			
1 - 4			
5 - 9			
.			
.			
.			
.			
75 y más			
	51 220	48 780	100 000

Se supone que el índice de masculinidad al nacimiento es independiente del tiempo y es igual a 105.

La solución adoptada se expresa en la forma lineal:

$$n_x^{dH} = \frac{1}{0.5122} (n_x^W \cdot d_x + n_x^\lambda)$$

donde:

$$n_x^W = 0.5122 \frac{n_x^{dH}}{n_x^d}$$

$$\lambda = 0.4878 \Sigma n_x^W \cdot d_x^M$$

$$n_x^\lambda = 0.4878 n_x^W n_x^d \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\delta = 51220 - \Sigma n_x^W \cdot d_x$$

Tabla 1

CALCULO DE LAS DISTRIBUCIONES $d_{n \cdot x}$ POR SEXO Y GRUPOS DE EDAD POR EL METODO DE TABLA CUADRADA 7 DE LOS VECTORES DE ERROR, POR COMPARACION (ENTRE ABIERTOS Y TEORICOS)

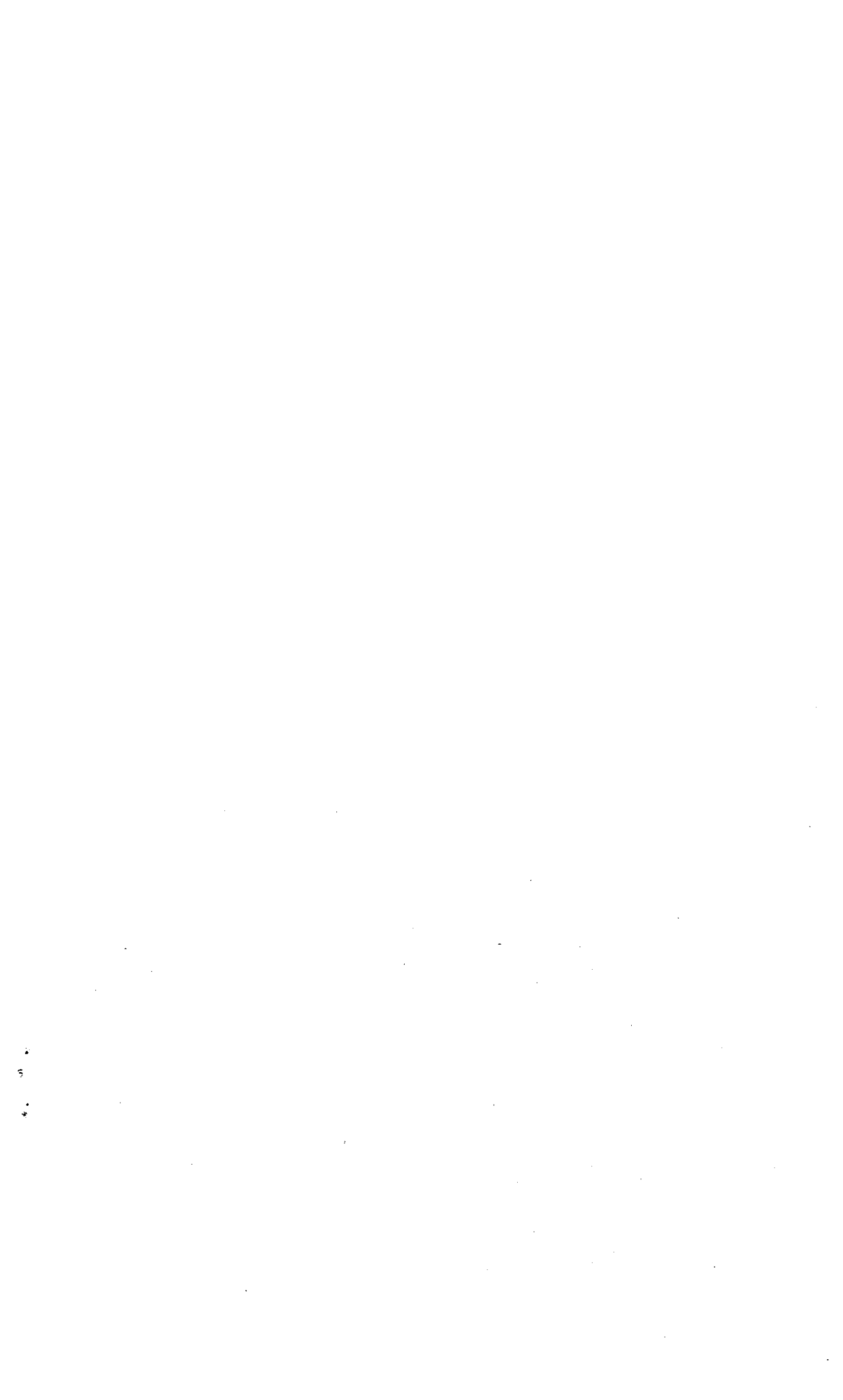
GRUPOS DE EDAD $x, x+n$	NIVEL 50		NIVEL 60		NIVEL 60		NIVEL 60		NIVEL 60		NIVEL 60		NIVEL 60		NIVEL 60	
	0.5122	0.4878			0.5122	0.4878	ABIERTO				TEORICO		ERROR			
	$d_{n \cdot x}^H$	$d_{n \cdot x}^M$	$d_{n \cdot x}$	$d_{n \cdot x}$	$d_{n \cdot x}$	$d_{n \cdot x}$	$d_{n \cdot x}^H$	$d_{n \cdot x}^M$	$d_{n \cdot x}^H$	$d_{n \cdot x}^M$	$d_{n \cdot x}^H$	$d_{n \cdot x}^M$	HOMBRES	MUJERES	(PORCENTAJES)	
	(2)	(3)=(1)+(2)	(4)	(5)=(1)/(3)	(6)=(4)(5)	(7)=(2)(5)	(8)=(7) $\frac{\delta}{\lambda}$	(9)=(6)+(8)	(10)=(4)-(9)							
1	8 661	7 271	15 932	13 442	0.5436	7 307	3 952	58	7 365	6 077	14 379	12 458	14 378	12 375	0.00	0.67
1 - 4	3 493	3 396	6 889	5 479	0.5070	2 778	1 722	26	2 804	2 675	5 475	5 484	5 442	5 489	0.61	-0.09
5 - 9	1 002	994	1 996	1 600	0.5020	803	499	7	810	790	1 581	1 620	1 581	1 621	0.00	-0.06
10 - 14	656	711	1 367	1 101	0.4799	528	341	5	533	568	1 841	1 164	1 053	1 182	-1.14	-1.52
15 - 24	2 354	2 363	4 717	4 000	0.4990	1 996	1 179	17	2 013	1 987	3 990	4 073	3 971	4 001	-1.03	1.80
25 - 34	2 805	2 819	5 624	4 794	0.4988	2 391	1 406	21	2 412	2 382	4 709	4 883	4 729	4 832	-0.42	1.06
35 - 44	3 320	2 973	6 293	5 478	0.5276	2 890	1 568	23	2 913	2 565	5 687	5 258	5 674	5 234	0.23	0.46
45 - 54	4 737	3 811	8 548	7 958	0.5542	4 410	2 112	31	4 441	3 517	8 670	7 210	8 651	7 173	0.22	0.52
55 - 64	6 843	5 744	12 587	12 786	0.5436	6 950	3 122	46	6 996	5 790	13 659	11 870	13 613	11 680	0.34	1.63
65 - 74	8 779	8 549	17 328	19 404	0.5066	9 838	4 331	64	9 894	9 510	19 317	19 496	19 157	19 272	0.84	1.16
75 Y MÁS	8 570	10 149	18 719	23 962	0.4578	10 970	4 646	69	11 039	12 923	21 552	26 492	21 751	27 141	0.91	-2.39
	51 220	48 780	100 000			50 853	24 878	367	51 220	48 780	100 000	100 000	100 000	100 000		

$$\lambda = 0.4878 \cdot \sum_{n \cdot x} W \cdot d_{n \cdot x}^M = 24 878$$

$$\delta = 51 220 - \sum_{n \cdot x} W \cdot d_{n \cdot x} = 51 220 - 50 853 = 367$$

$$\frac{\delta}{\lambda} = 0.01472$$

179



B I B L I O G R A F I A

1. BOCAZ, ALBINO: "Apuntes sobre matrices". CEIAD. Serie B/25.
2. KEMENY, JOHN G.; SNELL, J. LAURIE; THOMPSON, GERALD L.: "Introducción a las matemáticas finitas". Compañía Editorial Continental S.A. Cuarta Reimpresión en Español, octubre de 1965. México.
3. KEMENY, JOHN G.; SCHLEIFER, JR. ARTHUR; SNELL, J. LAURIE; THOMPSON, GERALD L.: "Finite Mathematics, with business applications". Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.Y. 1962. Estados Unidos.
4. BELLMAN, RICHARD: "Introducción al análisis matricial". Editorial Reverté, S.A. 1965. Barcelona. Buenos Aires. México.
5. GORDON, PATRICK: "Théorie des chaines de Markov finies et ses applications". Statistique et Programmes Economiques, Volumen 9; DUNOD, 1965. París.
6. FELLER, WILLIAM: "An introduction to probability theory and its applications". Volumen I. John Wiley and Sons, Inc.. Second Edition 1966. New York. London. Sidney.
7. DYNKIN, E.B.: "Théorie des processus markoviens". Collection Universitaire de Mathématiques. DUNOD. París. 1963
8. ELIZAGA, JUAN CARLOS: "Mortalidad I". CEIAD. Serie B/10. Capítulo V.
9. CAMPBELL, A.A.: "A method of projecting mortality rates based on post war international experience". International Population Reports. Serie P.91, n°5. USA. Bureau of the Census, Washington, 1958.
10. NACIONES UNIDAS: "Métodos para preparar proyecciones de población por sexo y edad". Estudios sobre población, n°25. ST/SCA/Serie A.
11. NOTESTEIN, F.: "The future population of Europe and the Soviet Union, League of Nations, Geneve, 1944.
12. DAMIANI M.P.: "Essai méthodologique sur les perspectives de mortalité". Etudes et conjoncture, revue mensuelle de l'I.N.S.E.E., n°3, Mars 1967 (22° année). París.

