

~~A.0/1~~

B.1

DISTRIBUCION RESTRINGIDA

UNIVERSIDAD DE CHILE

NACIONES UNIDAS

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Santiago, Chile

CAPITULO I

ALGEBRA

(Estos apuntes se distribuyen para uso exclusivo de becarios del Centro Latinoamericano de Demografía).

2504

Enero de 1960.-

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

CAPITULO I

ALGEBRA

1.1. Introducción

La experiencia hasta ahora adquirida por el Centro Latinoamericano de Demografía ha señalado la conveniencia de que los estudiantes que concurren a dicho Centro repasen y afiencen antes de su llegada a Santiago conocimientos básicos de Álgebra y de Cálculo Infinitesimal, útiles para un mejor aprovechamiento de las lecciones de Demografía que les serán impartidas.

El estudio de los temas contenidos en estos apuntes, además de capacitarlos para seguir con mayor eficiencia el curso en este Centro, permitirá lograr una mayor homogeneidad en el nivel de conocimientos de los distintos estudiantes, asegurándose de esta manera el desarrollo de un programa más sistemático e integrado.

Como es evidente, estas notas no constituyen un sustituto de algún libro de Álgebra o de Cálculo Infinitesimal. Se ha buscado destacar aquellos aspectos que tienen una relación más directa con los estudios que se realizarán en el futuro en este Centro, aspectos que generalmente aparecen tratados en forma más extensa en los distintos textos. De esta manera se espera que el estudiante gane tiempo y profundice sus conocimientos sólo en esos temas de uso más frecuente en el campo del Análisis Demográfico, y que son precisamente los que se recogen en los tres capítulos que integran estos apuntes. Ellos han sido preparados tomando como guía los dos libros siguientes:

Álgebra de P.K. Rees - F.W. Sparks, Editorial Reverté, México.

Cálculo diferencial e integral de W.A. Granville, Editorial Uteha, México.

Textos que tal como se indica han sido traducidos al castellano y cuya adquisición por parte del estudiante permitirá un conocimiento más completo de estos temas y de otros que habrá de usar en los casos que su análisis sea más complejo.

1.2. Definiciones generales.

Antes de entrar de lleno a tratar los temas de Álgebra conviene definir ciertos conceptos básicos.

Estos conceptos básicos son:

Algebra

Es la rama de las Matemáticas que trata de la cantidad considerada en general, ya sea en forma numérica o bien representada por letras.

Número entero

Es un número empleado en el proceso de contar.

Número racional

Es un número que puede expresarse como el cociente (ó cociente) de dos números enteros.

Número irracional

Es un número real que no puede expresarse como el cociente de dos números enteros. En el álgebra y más allá de él, en el Cálculo Infinitesimal se usan numerosos números de esta naturaleza. Para el Algebra números tales como π , $\sqrt{2}$ son números irracionales. En el Cálculo Diferencial aparece el número "e" los que no pueden expresarse como el cociente de 2 números enteros, sino que solamente pueden calcularse con tantas cifras decimales como se desee.

Valor absoluto

En el caso de un número positivo, el valor absoluto del número es el número mismo, en cambio para el caso en que el número real es negativo, el valor absoluto es el número con signo contrario.

De esta manera el valor absoluto de un número real-positivo ó negativo es el valor que tiene no considerado el signo. Como convención se adopta la de dejar encerrado el número en cuestión por 2 rayitas verticales. De esa manera si "x" e "y" son 2 números reales el valor absoluto de su diferencia es

$$- | x - y |$$

o sencillamente la distancia a que ellos se encuentran

Expresión algebraica

Es un grupo de números y letras combinados entre sí mediante operaciones fundamentales. Por ejemplo

$$a+b ; 2a^2 - 3b^3 , \log a - \log b + \log c ;$$

Término de una expresión algebraica

Es un número ó una letra, ó varios números y varias letras combinadas entre sí mediante operaciones de multiplicación o de división, ó de ambas. Por ejemplo, en la expresión ab/c , las letras a, b y c son términos.

Coeficiente numérico

Es el número que forma parte de un término de una expresión algebraica. Por ejemplo, $3b^2$ es un término de la expresión $2a^2 - 3b^2$ y el número 3 de $3b^2$ es el coeficiente numérico de ese término.

Monomio

Es una expresión algebraica que contiene solamente un término. Por ejemplo, $2a^2$; e^{-rt} ; son monomios.

Binomio

Es una expresión algebraica que contiene 2 términos solamente. Por ejemplo, $3a+4b$; $\log a - \log b$; son expresiones binomiales.

Polinomio

Es una expresión algebraica que contiene más de 2 términos. Por ejemplo, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $x^2 - xy + y^2$; $a+a^2+a^3+a^4+a^5$, son expresiones polinomiales.

1.3.- Operaciones fundamentales

Las operaciones fundamentales que podemos realizar en Algebra son las mismas que ya hemos realizado en la Aritmética. Estas, como bien sabemos son:

suma - resta - multiplicación - división

A) Suma y resta

Si los procesos de suma y resta (ó diferencia) se aplican a números positivos, esas se realizan tal como se hace en la Aritmética, en cambio si ellas se aplican a números negativos se hace necesario precisar la forma de operar. Se introduce así el concepto "Suma algebraica" que se realiza según las siguientes reglas:

- suma algebraica de 2 números que tienen mismo signo es igual a la suma de los valores absolutos de esos números, precedida del signo común.
- la suma algebraica de 2 números con signos diferentes es igual a la diferencia de los valores absolutos de esos números precedida del signo del número de mayor valor absoluto.

Por ejemplo, la suma de los términos $2a^2b$ y $3a^2b$ es igual a $5a^2b$, en cambio la suma algebraica de los términos $2x^2y$ y de $-3x^2y$ es igual $-x^2y$, ya que la diferencia de los valores absolutos de esas cantidades es x^2y .

La suma de cantidades tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1

La suma es conmutativa, ésto es, podemos cambiar el orden de los sumando sin alterar el resultado final. En símbolos esta propiedad puede escribirse.

$$x+y = y+x$$

Propiedad 2

La suma es asociativa, ésto es, podemos asociar ó agrupar los términos en subgrupos y determinar la suma de estos grupos. Estos sub-totales al ser sumados dan un total final que es el mismo, cualquiera que sea la forma de agrupar que se use.

En símbolos podemos escribir

$$x+y+z = x+(y+z) = y+(x+z) = z+(x+y)$$

Podemos notar en las últimas relaciones que para indicar "agrupación" de ciertos términos recurrimos a un símbolo algebraico que se denomina "paréntesis".

Un grupo de cantidades puede agruparse, para lo cual se recurre al signo () que se denomina "paréntesis sencillo", ya que diversos grupos de cantidades pueden a su vez agruparse en nuevos grupos para lo cual se recurre al paréntesis [] que se denomina "paréntesis cuadrado" o de "corchetes". Grupos de cantidades encerradas en paréntesis de corchetes pueden a su vez agruparse en nuevos grupos para lo cual se recurre al "paréntesis de llave" { }.

El uso de estos paréntesis permite indicar no solamente las cantidades que se han agrupado, sino que anteponiéndole algún signo, la operación que debe realizarse con ese grupo. Así por ejemplo las cantidades

$$(2a+3b-4c) \quad (a+b+4c)$$

pueden restarse entre si, lo que indicamos en la forma

$$(2a+3b-4c) - (a+b+4c)$$

Otro caso por ejemplo es el siguiente, las cantidades

$$(4a^2-9b^2) \quad (a+b)(2a-3b)$$

las vamos a restar, lo que indicaremos de la manera siguiente

$$(4a^2-9b^2) - (a+b)(2a-3b)$$

Para poder realizar la diferencia de estas cantidades tenemos que realizar el producto de esos 2 binomios y luego eliminar los paréntesis sencillos aplicando la regla siguiente:

- toda cantidad encerrada en un paréntesis sencillo y precedida de signo (+) mantiene los signos de los diversos términos que la componen
- toda cantidad encerrada en un paréntesis sencillo y precedida de signo (-) se puede eliminar el paréntesis siempre que se le cambien los signos a las cantidades interiores que la forman.

Por ejemplo para determinar el valor de la suma algebraica

$$(2a+3b-4c) + (a+b+c) - (3a+4b+5c)$$

debemos cambiarle el signo a los términos de la última expresión con lo cual tenemos

$$2a+3b-4c+a+b+c-3a-4b-5c = -8c$$

Para el caso en que la suma algebraica contenga paréntesis de los 3 tipos, para el cálculo del valor último de la expresión debemos "eliminar" estos paréntesis, empezando con los paréntesis (), siguiendo con los paréntesis [], para terminar finalmente con los de llave. Tal operación recibe el nombre de "resolución de los paréntesis" y es una de las operaciones básicas del álgebra, para cuya realización correcta únicamente basta usar la regla dada anteriormente.

Ejemplo 1

Determinar el valor de la siguiente suma algebraica de términos

$$4a - \left\{ 2b - \left[2c + (-3a - 2b) - (3b - 2c) \right] - 2a \right\} - 3b$$

Solución

Resolvemos primeramente los paréntesis sencillos, lo que nos da

$$4a - \left\{ 2b - \left[2c + 3a - 2b - 3b + 2c \right] - 2a \right\} - 3b$$

Pasemos a resolver enseguida los paréntesis de corchete

$$4a - \left\{ 2b - 2c + 3a + 2b + 3b - 2c - 2a \right\} - 3b$$

finalizando con los de llave

$$4a - 2b + 2c - 3a - 2b - 3b + 2c + 2a - 3b$$

teniéndose finalmente

$$3a - 10b + 4c$$

Ejemplo 2

Determinar el valor de la expresión

$$-(2a+4b) - \left\{ 3a + (2a+c) - [3a-5b+(a-b+2c)] - 4c \right\} - (a+2c)$$

si $a=1$; $b=2$; $c=3$

Solución

Resolviendo los paréntesis sencillos se tiene

$$-2a-4b - \left\{ 3a+2a+c - [3a-5b+a-b + a-b + 2c - 4c] - a - 2c \right\}$$

Pasando a resolver los paréntesis cuadrados

$$-2a - 4b - \left\{ 3a + 2a + c - 3a + 5b - a + b - 2c + 4c - a - 2c \right\}$$

y luego de resolver los paréntesis de llave

$$-2a - 4b - 3a - 2a - c + 3a - 5b + a - b + 2c - 4c + a + 2c$$

con lo cual luego de reducir, tenemos

$$-2a - 10b - c$$

y se hacemos $a = 1$, $b = 2$; $c = 3$ se tiene finalmente - 25

B) Multiplicación

El producto de 2 números "x" e "y" se expresa en la forma xy, esto es, se colocan juntos estos números.

El producto de más números, como ser el producto de los números "x", "y", "z", "t", se indica sencillamente así

$$xyzt$$

juntando todos los números - factores.

Cuando el número de factores es "k" es decir, cuando se quiere indicar que los números

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_k$$

se multiplican, se coloca en la forma

$$\prod_{j=1}^k x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_k$$

indicando el signo \prod , "producto" de los números x_j , para $j=1,2,3, \dots, k$

La multiplicación tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1

La multiplicación es "conmutativa", esto es, el orden de los factores no altera el producto. En símbolos se tiene

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Propiedad 2

La multiplicación es "asociativa" esto es, pueden agruparse ciertos números de términos en un grupo y realizar las multiplicaciones dentro del grupo. Este producto puede multiplicarse posteriormente por el producto de otros subgrupos, llegándose a que el resultado final (ó producto) es el mismo, cualquiera que sea el número de grupos formados y cualquiera que sean los términos incluidos en ellos.

En símbolos se puede indicar esta propiedad en la forma

$$x(yz) = y(xz) = z(xy)$$

Propiedad 3

La multiplicación es "distributiva", esto es, si se multiplica una suma algebraica por un número "a" se puede multiplicar cada término de la suma por el factor "x" y luego realizar la suma algebraica de esos productos con los signos que tenían las cantidades de la expresión algebraica.

En símbolos esta propiedad puede anotarse así

$$x(y + z) = xy + xz$$

Para la determinación final del signo del producto de 2 números debe considerarse la regla siguiente (ó convención).

- el producto de números de igual signo es siempre positivo
- el producto de números de signos diferentes es siempre negativo

Por ejemplo, $(-2)(-3) = 6$ y da el mismo resultado que $(2)(3)$. En cambio $(2)(-3)(-2)(3)$ es siempre negativo igual a -6 .

Cuando los factores que se multiplican son iguales se recurre al artificio de colocar en el lado derecho superior del factor común un número que indica el número de veces que se repite el factor. Tal número recibe el nombre de "exponente" pudiendo ser un número cualquiera.

De esa manera la multiplicación

$$x x x x y y y z z z$$

se indica por la expresión más cómoda y clara

$$x^4 y^3 z^3$$

que nos indica que hay 4 factores iguales a "x"; 3 factores iguales a "y" y 3 factores iguales a "z".

Si el factor común "x" se repite "k" veces se dice que "x" se ha elevado a la potencia "k" ó a k-esima potencia, lo que se denota por

$$x^k$$

de allí se tiene la definición:

"Si "k" es un entero positivo, el símbolo x^k se denomina la k-esima potencia de "x" y es el producto de "k" factores, cada uno de los cuales es igual a "x". La letra "x" recibe el nombre de "base" y "k" el nombre de exponente!"

De esta definición resultan las siguientes leyes aplicables a los productos de potencias de números:

Ley 1 $a^m a^n = a^{m+n}$

Ley 2 $a^n b^n = (ab)^n$

Ley 3 $(a^n)^p = a^{np}$

leyes cuya demostración se basan sencillamente en la definición de "elevación a potencia".

Ejemplo 1

Realizar el producto de los 3 factores siguientes:

$$4 r^2 s^t ; 2 r s^2 ; 6 s^2 t^2$$

Solución

Multiplicamos primeramente los factores puramente numéricos:

$$(4) (2) (6) = 48$$

Pasamos a considerar el factor "r".

El primer multiplicador contiene 2; el segundo 1 y el tercero ninguno, lo que da en total 3 veces.

Para "s" igualmente tenemos $1 + 2 + 2 = 5$

Para "t" igualmente tenemos $1 + 0 + 2 = 3$

de modo que el producto vale

$$48 r^3 s^5 t^3$$

Ejemplo 2

Determinar el valor del producto

$$(-3 x^2 y) (2 xy)^3 (-x^2 y^3) (-3 xy^2)$$

Solución

El producto de los factores es $(-3)(2)(-1)(-3) = 18$ y el producto de los factores literales es x^8y^9 con lo cual el producto es

$$18 x^8 y^9$$

Una vez que se ha conocido la manera de multiplicar monomios entre sí, es relativamente sencillo establecer una regla para multiplicar polinomios entre sí.

Para ello aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación, es decir, multiplicamos cada término del polinomio del primer factor por cada término del polinomio del segundo factor.

Por ejemplo, para determinar el valor del producto

$$(a^2 - 3ab + 2b^2)(2a - 3b)$$

debemos realizar los siguientes productos

$$-2a(a^2 - 3ab + 2b^2) = 2a^3 - 6a^2b + 4ab^2$$

$$-3b(a^2 - 3ab + 2b^2) = -3a^2b + 9ab^2 - 6b^3$$

y luego sumar estos productos

$$2a^3 - 9a^2b + 13ab^2 - 6b^3$$

C) División

Es la cuarta de las operaciones fundamentales. Para poder realizar la división de una cantidad a por una cantidad b, de el divisor debe ser un número diferente de 0, puesto que, si el divisor es 0, el valor del cociente no corresponde a ningún número real.

Para indicar la división de un número a por un número b podemos usar las 2 formas

$$a : b \quad \text{ó} \quad a/b$$

siendo en general más usada esta última. El número a se llama dividendo y el número b se llama divisor y, el resultado de la operación "cuociente" (Puede denominarse también cociente).

La ley de los signos para la división es igual a la dada para el caso de la multiplicación.

"El cociente de 2 números del mismo signo es positivo". El cociente de 2 números de diferente signo es negativo.

Las leyes dadas para la multiplicación pueden repetirse para la división.

Ley 1 $a^m/a^n = a^{m-n}$

Ley 2 $a^n/b^n = (a/b)^n$

Ley 3 para la división, esta ley no existe.

Para realizar la división de un polinomio por un monomio se realizan los siguientes pasos:

- se ordenan tanto el dividendo como el divisor, en orden ascendente ó descendente de las potencias de alguna letra que aparezca en ambos.
- se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y se obtiene de esa manera el primer término del cociente.
- se multiplica el divisor por el primer término del cociente y el producto se sustrae del dividendo.
- el residuo obtenido en el paso anterior se trata como un nuevo divisor y se vuelven a repetir los pasos 2 y 3.
- se continúa de esa manera hasta obtener un residuo en el cual, el mayor exponente de la letra que a la partida se escogió como base, de ordenación, sea menor que el mayor exponente de dicha letra en el divisor.

Veamos 2 ejemplos para aclarar estas etapas.

Ejemplo 1

Realizar la división siguiente

$$(x^3 - 9x^2y - 12y^3 + 17xy^2) : (2x - 3y)$$

Solución

$$(2x^3 - 9x^2y + 17xy^2 - 12y^3) : (2x - 3y) = x^2 - 3xy + 4y^2$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2y \\ \hline - 6x^2y + 17xy^2 - 12y^3 \\ \hline 6x^2y + 9xy^2 \\ \hline 8xy^2 - 12y^3 \\ \hline 8xy^2 - 12y^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ejemplo 2

Realizar la división siguiente

$$(x^3 - 2x^2 + x + 1) : (x^2 - x - 1)$$

Solución

$$(x^3 - 2x^2 + x + 1) : (x^2 - x - 1) = \underline{x - 1} \text{ (cuociente)}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x \\ \hline \end{array}$$

$$-x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + x + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{x} \text{ (residuo)}$$

1.4.- Productos notables y factorización

En la operatoria algebraica es útil - a fin de reducir los cálculos y hacer uso de ciertas fórmulas o relaciones que se conocen bajo el nombre de "productos notables". Estas mismas relaciones pueden servir bastante para los procesos de factorización.

Pasemos revista por lo tanto a las relaciones de mayor interés.

- Producto de 2 binomios

Para determinar los diversos términos que resultan de la multiplicación de los binomios $(ax+by)$ y $(cx+dy)$ se hace uso de la siguiente regla.

El producto de 2 binomios de la forma $(ax+by)$ y $(cx+dy)$ consta de los siguientes términos:

- el primer término es igual al producto de los dos primeros términos de los binomios, o sea acx^2
- el segundo término es la suma algebraica de los productos obtenidos al multiplicar el primer término de cada binomio por el segundo término del otro, o sea $(ad+bc)xy$.
- el tercer término es igual al producto de los 2 segundos términos de los binomios, o sea bdy^2 .

Esto se puede resumir a través de la fórmula

$$(ax + by) (cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 \quad (I)$$

Caso particular

1) Si $a=b=c;d=1$, la relación anterior se transforma en la siguiente:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Esto es

"El cuadrado de un binomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos que lo componen más el doble del producto de esos términos".

2) $a=b=1$; $c=d=-1$, en este caso la relación (I) se reduce a

$$(x + y) (x-y) = x^2 - y^2$$

esto es

"La suma de 2 cantidades "x" e "y" por la diferencia de esas cantidades es igual a la diferencia de los cuadrados de esas cantidades".

Ejemplo 1

Realizar el producto

$$\left(\frac{2x}{5} + \frac{y}{4}\right) \left(\frac{2x}{5} - \frac{y}{4}\right)$$

Solución

$$= \left(\frac{2x}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{4x^2}{25} - \frac{y^2}{16}$$

Ejemplo 2

Realizar el producto

$$[7(2y + 3b) + 2][3(2y + 3b) - 1]$$

Solución

Este es el producto de 2 binomios, de acuerdo la relación () tenemos

$$\begin{aligned} & (7)(3)(2y + 3b)^2 + [(2)(3) - (7)(1)](2y + 3b) - (2)(1) \\ &= 21(2y + 3b)^2 - (2y + 3b) - 2 \\ &= 21(4y^2 + 12by + 9b^2) - (2y + 3b) - 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Realizar el producto

$$[(3c^5 + 2c^3) - (4c^4 + 1)][(3c^5 + 2c^3) + (4c^4 + 1)]$$

Solución

Tenemos el caso de 1 producto de la suma por la diferencia de 2 cantidades, de esa manera en la primera etapa se tiene

$$(3c^5 + 2c^3)^2 - (4c^4 + 1)^2$$

y ahora debemos desarrollar los cuadrados de esos binomios

$$\begin{aligned} & (9c^{10} + 12c^8 + 4c^6) - (16c^8 + 8c^4 + 1) \\ & = \underline{9c^{10} - 4c^8 + 4c^6 - 8c^4 - 1} \end{aligned}$$

- Cubo de un binomio

El cubo del binomio $(x + y)$ está formado por los 4 términos siguientes:

- el cubo del primer término o sea x^3
- el triple del producto del cuadrado del primer término por el segundo, o sea $3x^2y$
- el triple del producto del primer término por el cuadrado del segundo, o sea el término $3xy^2$
- el cubo del segundo término, o sea y^3

Simbólicamente podemos resumir esto en la fórmula.

- Potencia "n" de un binomio

La potencia "n" del binomio $(x + y)$ está formada por los $(n + 1)$ términos siguientes:

- la potencia "n" del primer término, o sea x^n
- "n" veces el producto de la potencia $(n - 1)$ del primer término por el segundo término, o sea $n x^{n-1} y$
- $n(n - 1)/2$ veces el producto de la potencia $(n - 2)$ del primer término por la potencia 2 del segundo, o sea $\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2$
- $n(n - 1)(n - 2)/2 \cdot 3$ veces la potencia $(n - 3)$ del primero por la potencia 3 del segundo, o sea $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^{n-3} y^3$
- y así sucesivamente hasta llegar a la potencia 0 del primero y n del último, o sea y^n

Tal fórmula recibe el nombre de "fórmula del binomio de Newton" y será un tema que veremos con mayor detalle más adelante.

- Producto de "k" binomios de la forma $(x + c)$

Siendo (c) una cte.

Para poder deducir esta fórmula determinaremos las relaciones para el caso sencillo y por mera observación de esos resultados, generalizaremos para el caso en que el número de factores binomiales sea cualquiera. Este proceso de deducción de una fórmula general se denomina "por inducción"

Al multiplicar 2 binomios tenemos

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Al multiplicar 3 binomios se tiene

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

Al multiplicar 4 binomios se tiene

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$$

De esta manera se puede ver que el producto de "k" binomios de la forma $(x + c)$ está formado por $(k + 1)$ términos, de modo que el coeficiente del término x^j o sea de la potencia "j" de "x" es igual a la suma de todos los productos posibles de "j" letras diferentes tomadas de las "k" letras disponibles, sin importar el orden de las letras.

Ejemplo 1

Determinar el producto

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

Solución

El coeficiente de x^4 : 1

El coeficiente de x^3 : $1+2+3+4 = 10$

El coeficiente de x^2 : $(1)(2)+(1)(3)+(1)(4)+(2)(3)+(2)(4)+(3)(4)=35$

El coeficiente de x : $(1)(2)(3)+(1)(2)(4)+(1)(3)(4)+(2)(3)(4)= 50$

El coeficiente de indep. : $(1)(2)(3)(4) = 24$

de esa manera el producto pedido es igual a

$$\underline{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24}$$

- Otros productos

Estos otros productos son los siguientes:

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^n+y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

La demostración de estas relaciones se hace sencillamente por multiplicación del binomio por el trinomio. Estas relaciones se usan bastante cuando se quiere factorizar expresiones, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Factorizar la diferencia $(x^{12} - y^{12})$

Solución

Podemos reemplazar la diferencia de estos cuadrados por el producto de la suma $(x^6 + y^6)$ por la diferencia $(x^6 - y^6)$, de acuerdo la relación ().

En este nuevo producto el segundo factor puede a su vez descomponerse en el producto de la suma $(x^3 + y^3)$ por la diferencia $(x^3 - y^3)$, o sea la factorización hasta este instante es la siguiente:

$$x^{12} - y^{12} = (x^3 - y^3) (x^3 + y^3) (x^6 + y^6)$$

Podemos continuar la factorización ya que

$$x^3 - y^3 = (x - y) (x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y) (x^2 - xy + y^2)$$

$$x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2) (x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

de modo que la diferencia dada puede factorizarse de la manera siguiente:

$$x^{12} - y^{12} = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

Ejemplo 2

Factorizar la expresión

$$(m-n)^3 - 1$$

Solución

Se tiene una expresión de la forma $(x^3 - y^3)$, por lo tanto

$$(m-n)^3 - 1 = [(m-n)-1] [(m-n)^2 + (m-n) + 1]$$

$$= (m-n-1) (m^2 - 2mn + n^2 + m - n + 1)$$

Además de poder factorizar expresiones por uso de los productos notables, en repetidas ocasiones se puede llegar a los factores mediante la agrupación adecuada de ciertos términos a los cuales se les puede aplicar alguna de las fórmulas anteriormente indicadas.

Veamos por lo tanto un par de ejemplos

Ejemplo 1

Factorizar la expresión

$$x^2 - xy - xz + x - y - z$$

Solución

Podemos hacer la siguiente agrupación

$$(x^2 - xy) + (x - y) - (xz + z) = (x(x - y) + (x - y) - z(x + 1))$$

y agrupar las 2 primeras cantidades ya que ellas contienen el factor $(x - y)$, o sea

$$(x - y)(x + 1) - z(x + 1)$$

esta diferencia contiene el factor común $(x + 1)$ y por lo tanto

$$(x + 1)(x - y - z)$$

que es la factorización deseada.

Ejemplo 2

Factorizar la expresión

$$a^2 - x^2 + b^2 - y^2 + 2ab - 2xy$$

Solución

Podemos agrupar los términos en la manera siguiente

$$(a^2 + 2ab + b^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$$

siendo cada expresión un cuadrado perfecto

$$(a + b)^2 - (x + y)^2$$

o sea se tiene ahora la diferencia de 2 cuadrados, que puede descomponerse en el producto de la suma y la diferencia de 2 cantidades, o sea

$$(a + b + x + y)(a + b - x - y)$$

1.5.- Fracciones

Si se dispone de 2 cantidades x e y , el cociente de estas cantidades, o sea la expresión x/y recibe también el nombre de fracción.

En una fracción hay que distinguir 2 miembros, ó componentes: el numerador que es la cantidad que se encuentra sobre la línea de división y el denominador que es la cantidad colocada bajo la línea.

El producto de 2 fracciones (x/y ; v/w) es por definición una fracción en la que el numerador es igual al producto de los numeradores de las fracciones y el denominador al producto de los ^{denominadores} denominadores de las fracciones, o sea

$$\text{producto } \left(\frac{x}{y} ; \frac{v}{w} \right) = \frac{xv}{yw}$$

El cociente de 2 fracciones es una fracción en la que el numerador es igual al producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y el denominador es igual al producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda, o sea

$$\text{cociente } \left(\frac{x}{y} ; \frac{v}{w} \right) = \frac{xw}{yv}$$

Por amplificación de una fracción entenderemos el proceso numérico de multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción por una misma cantidad "k", o sea

$$\frac{x}{y} = \frac{kx}{ky}$$

Lógicamente el proceso de amplificación, deja a la fracción con el mismo valor que tenía antes de la amplificación; pero el proceso se realiza con algún propósito bien determinado.

Por simplificación de una fracción de una fracción entenderemos el proceso numérico de dividir tanto el numerador como el denominador de la fracción por una misma cantidad "k", o sea

$$\frac{x}{y} = \frac{x/k}{y/k}$$

Al igual que el proceso de amplificación, el de simplificación deja la fracción inalterable en cuanto a su valor inicial; pero permite obtener fracciones más sencillas.

El proceso de simplificación de 2 fracciones se hace posible buscando los factores comunes que tienen el numerador y denominador de la fracción y eliminándolos posteriormente.

Ejemplo 1

Simplificar la expresión

$$f = \frac{ax - ay - 2by + 2bx}{ax + 2bx + 2by + ay}$$

Solución

Factorizamos el numerador y el denominador

$$\frac{(a+2b)(x-y)}{(a+2b)(x+y)}$$

notando por lo tanto que existe la cantidad (a+2b) común que puede eliminarse (proceso de simplificación) con lo cual se tiene

$$f = \frac{x-y}{x+y}$$

Ejemplo 2

Simplificar la expresión

$$\frac{(2x+1)x-3}{(2x-1)x-3} \times \frac{(2x-1)x+(2x-1)}{(2x-1)x-1} + \frac{(2x-1)+4}{2(2x-1)-1}$$

Solución

La expresión puede escribirse así

$$\begin{aligned} & \frac{(2x+3)(x-1)}{(2x-3)(x+1)} \times \frac{(2x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} + \frac{2x+3}{2x-3} \\ & = \frac{(2x+3)(x-1)}{(2x-3)(x+1)} \times \frac{(2x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} \cdot \frac{2x-3}{2x+3} = \frac{2x-1}{2x+1} \end{aligned}$$

Adición de fracciones

Se pueden presentar 2 casos:

a) las fracciones tienen mismo denominador

En este caso se suman los numeradores de estas fracciones y se conserva el denominador común a todas ellas.

Ejemplo 1

$$\frac{5a}{x-a} - \frac{x+6a}{x-a} + \frac{2x+3a}{x-a} = \frac{5a - (x+6a) + (2x+3a)}{x-a} = \frac{x-2a}{x-a}$$

Ejemplo 2

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{5}{4} - \frac{7}{4} + \frac{9}{4} - \frac{11}{4} + \frac{13}{4} = \frac{1-3+5-7+9-11+13}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$$

b) las fracciones tienen denominadores diferentes

Para sumar las fracciones en este caso se determina el mínimo común múltiplo de los denominadores diferentes, cantidad que recibe el nombre de "mínimo denominador común" (MDC). Determinado este común denominador se amplifican las fracciones por números tales que los denominadores de ellas sean iguales al MDC. Se suman los numeradores así amplificados tal como en el caso anterior y se mantiene como denominador el MDC.

Ejemplo 1

Calcular el valor de la suma

$$\frac{x-y}{(x+y)(x-2y)} + \frac{x-2y}{(x+y)(x-y)} + \frac{x+y}{(x-y)(x-2y)}$$

Solución

El MDC para estas fracciones es $(x+y)(x-y)(x-2y)$, lo que exige amplificar la primera fracción por $(x-y)$; la segunda por $(x-2y)$ y la tercera por $(x+y)$, con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \frac{[(x-y)^2 + (x-2y)^2 + (x+y)^2]}{(x+y)(x-y)(x-2y)} &= \frac{(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 - y^2)(x-2y)} \\ &= \frac{3x^2 - 4xy + 6y^2}{(x^2 - y^2)(x-2y)} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular el valor de la suma

$$F = \frac{7b}{(a+3b)(a-4b)} - \frac{13b}{(2a+5b)(a-4b)} + \frac{1}{a+3b}$$

Solución

El MDC para estas fracciones es $(a+3b)(a-4b)(2a+5b)$, lo que exige amplificar las fracciones respectivamente por $(2a+5b)$; $(a+3b)$ y $(a-4b)$ con lo que se tiene

$$F = \frac{7b(2a+5b) - 13b(a+3b) + (a+3b)(a-4b)}{(a+3b)(a-4b)(2a+5b)} = \frac{a^2 - 16b^2}{(a+3b)(a-4b)(2a+5b)}$$

Esta expresión puede simplificarse por $(a-4b)$ ya que el numerador lo contiene, teniéndose finalmente

$$F = \frac{a+4b}{(a+3b)(2a+5b)}$$

1.6.- Ecuaciones de primer grado

Definición 1

Se denomina "ecuación" una relación que expresa la igualdad de dos expresiones. Cada una de las expresiones se llaman "miembros" de la ecuación. Por ejemplo

$$P_t = P_o e^{rt}$$

representa una ecuación, ya que nos muestra la igualdad de 2 expresiones. Esta expresión sin embargo, no es una ecuación de primer grado como luego veremos.

Algunas ecuaciones son válidas para todos los valores posibles que puedan adquirir las letras que aparecen. Por ejemplo

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

es válida cualquiera que sean los valores "x" y de "y". Otras ecuaciones como por ejemplo

$$4x+25 = 6x - 32$$

solamente son válidas para algún (o algunos) valor de "x" de sus letras.

Se llega así al concepto de "identidad" en el primer caso y de igualdad ó ecuación en el segundo.

Definición 2

Cualquier conjunto de números que al sustituir letras de valor no conocido en la ecuación hacen a los miembros de éstas iguales, se llama "solución" de la ecuación.

Si la ecuación contiene solamente una incógnita, cada solución se llama "raíz". El procedimiento para obtener las raíces se llama "resolución" de la ecuación.

Definición 3

Dos ecuaciones son "equivalentes" si tienen las mismas soluciones. Por ejemplo, las ecuaciones $5x-2 = 14x-29$; $12x-7 = 65-12x$; son equivalentes, ya que ambas admiten $x=3$ como solución.

Lógicamente si se agrega algebraicamente (se suma o se resta) a ambos miembros de la ecuación una misma cantidad (ó expresión) la ecuación no cambia y las raíces serán las mismas que antes. También se pueden amplificar o simplificar los miembros de una ecuación sin alterar la ecuación pero obteniendo por este proceso una ecuación más sencilla que la primera.

Definición 4

Transposición es el proceso de cambiar de miembro uno ó varios términos de la ecuación, Mediante este proceso la nueva ecuación es equivalente a la primitiva, pero ofrece la ventaja que la raíz puede ser encontrada con mayor facilidad. La transposición de términos solamente exige respetar el "cambio" de signo al término que se cambia de miembro

Ejemplo 1

En la ecuación

$$a + b^2x = a^2x - b$$

podemos trasponer los términos $(-b)$ y (b^2x) pasando el primero al primer miembro y el segundo al segundo miembro, recordando que debemos cambiar sus signos, o sea

$$a + b = a^2x - b^2x = x(a^2 - b^2)$$

Esta nueva ecuación puede simplificarse por $(a+b)$ quedando reducida a

$$1 = x(a-b)$$

lo que nos da para "x" luego de simplificar por $(a-b)$ $x = \frac{1}{a-b}$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación

$$\frac{4}{3x-1} - \frac{2}{2x+3} = \frac{-1}{6x-24}$$

Solución

Dando común denominador al primer miembro y reduciendo se tiene

$$\frac{-(x-15)}{(3x-1)(2x+3)} = \frac{1}{6x-24}$$

lo que nos lleva a la ecuación siguiente

$$(x-15)(6x-24) = (3x-1)(2x+3)$$

que por multiplicación de los binomios nos da:

$$6x^2 - 114x + 360 = 6x^2 + 7x - 3$$

$$121x = 363$$

$$x = \underline{3}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación

$$\frac{x+1}{x-3} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x}{x-3} - \frac{x+1}{(x-3)(x-1)}$$

Solución

El primer miembro se reduce a

$$\frac{2x^2 - 3x - 4}{(x-3)(x-1)}$$

y el segundo miembro a

$$\frac{2x^2 - 3x - 1}{(x-3)(x-1)}$$

con lo que la ecuación desaparece.

1.7.- Uso de ecuaciones de primer grado, la resolución de ciertos problemas

Diversos problemas pueden reducirse a la resolución de una ecuación de primer grado. La mayor dificultad del método está en establecer la conveniente ecuación de primer grado, para lo cual se aconseja lo siguiente:

- leer cuidadosamente el problema de modo que se entienda perfectamente cuál es la situación que plantea,
- identificar las cantidades comprendidas en el problema, tratarse de cantidades conocidas como de las incógnitas por determinar,
- asignar a una de las cantidades desconocidas la letra "x" y expresar las otras (también desconocidas) en función de ella,
- establecer la ecuación y resolverla.

Ejemplo 1

Un obrero puede hacer un determinado trabajo en 4 días y un ayudante suyo, en cambio en 6 días. Cuántos días se demorarán en hacer el trabajo si los dos trabajan conjuntamente?.

Solución

Sea "x" el tiempo (en días) que los 2 juntos terminan el trabajo. De esa manera cada día hacen $1/x$ del trabajo. Esta parte del trabajo diario está hecha por:

- el obrero : que hace $1/4$ de esa parte
- el ayudante: que hace $1/6$ de esa parte

de ese modo la parte $1/x$ es igual a la suma de las contribuciones anteriores, lo que nos da

$$x = \frac{12}{5} = \underline{2,4 \text{ días}}$$

Ejemplo 2

Un terreno rectangular que tiene 420 mts. de perímetro está cercado por una cierre cuyo costo es de \$2,800 por metro en la parte del frente y de \$2,000 por metro en los otros tres lados. Cuáles son las dimensiones del terreno si el costo del cierre frontal fué $\frac{1}{5}$ del costo del resto del cierre?

Solución

Sea x = longitud (en mts.) parte lateral del sitio

$210 - x$ = longitud del frente

de acuerdo las relaciones del costo se tiene

$$(210-x) 2.800 = \frac{1}{5} [2x+(210-x)] 2.000$$

que se reduce a la ecuación

$$7(210-x) = 210 + x$$

$$x = \underline{157,5 \text{ mts.}}$$

con lo cual se trata de un terreno de 52,5 mts. de frente y 157,5 mts. de largo.

Ejemplo 3

Una persona puede remar 2 kms. río arriba y 6 kms. río abajo en el mismo tiempo. Si la velocidad de la corriente es de 2 kms./hr., cuál es la velocidad del bote en aguas tranquilas?

Solución

Sea x = velocidad del bote en aguas tranquilas

$x - 2$ = velocidad río arriba

$x + 2$ = velocidad río abajo

Estas dos velocidades están relacionadas de la manera

$$3(x - 2) = x + 2$$

$$\therefore 2x = 8$$

$$x = \underline{4 \text{ kms./hora}}$$

1.8.- Sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado

En el párrafo 1.7. vimos el caso de resolución de una ecuación de primer grado. Toda ecuación de primer grado puede reducirse a una expresión de la forma

$$Ax + C = 0$$

la que nos da como solución para la ecuación el valor

$$x = -C/A$$

Pero sucede a veces que en el problema aparecen dos incógnitas "x" e "y" ligadas por relaciones del tipo

$$\begin{array}{l} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{array}$$

es decir por el hecho de tener ahora dos incógnitas, debemos disponer de dos ecuaciones diferentes para poder determinar completamente los valores (x, y). Tal sistema de ecuaciones recibe el nombre de "sistema simultáneo de 2 ecuaciones de primer grado".

Evidentemente que el número de incógnitas puede ser cualquiera (k por ejemplo), en cuyo caso debemos de disponer de "k" ecuaciones simultáneas de primer grado, para la completa determinación de cada una de las "k" incógnitas.

La resolución de un sistema simultáneo de ecuaciones de primer grado puede hacerse por diversos métodos, dependiendo la aplicación de uno determinado, de la estructura particular que presente el sistema.

Los métodos de resolución básicos son los siguientes:

- eliminación por adición ó sustracción
- eliminación por sustitución de una variable

En el primer método se busca la igualación de los coeficientes de una de las incógnitas en cada una de las ecuaciones y posteriormente al restar o sumar estas ecuaciones miembro, desaparece la incógnita para el cual los coeficientes eran iguales, quedando el sistema reducido a una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

Ejemplo 1

Resolver el sistema

$$\begin{array}{l} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 3 \end{array}$$

por el método de eliminación por sustracción.

Solución

Para ello amplifiquemos la primera por (5) y la segunda por (9) y luego restamos estas ecuaciones miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} \frac{45}{x} - \frac{15}{y} = 5 \\ \frac{45}{x} + \frac{18}{y} = 27 \end{array}$$

se tiene entonces que

$$\frac{33}{y} = 22$$

con lo cual el valor de y es $3/2$.

Para el cálculo de "x" se amplifica la primera por (2) y la segunda por (3) y se suman estas ecuaciones con lo cual se tiene

$$\begin{array}{r} \frac{18}{x} - \frac{6}{y} = 2 \\ \frac{15}{x} + \frac{6}{y} = 9 \end{array}$$

lo que nos da para "x" el valor $1/3$.

En el segundo método, o sea en el método de eliminación por sustitución se determina en base de una de las ecuaciones el valor de una de las incógnitas en función de la otra.

Este valor de la incógnita se reemplaza en la otra ecuación, con lo cual la nueva ecuación resultante solamente contendrá una sola incógnita y podrá ser resuelta como una ecuación de primer grado.

Ejemplo 2

Resolver el sistema

$$\begin{array}{r} ax + (a - b)y = b \\ bx + (a + b)y = -a \end{array}$$

Solución

De la primera ecuación aislamos la incógnita "x":

$$x = [C - (a-b)y]/a$$

lo que sustituimos en la segunda ecuación llegando a

$$\frac{b}{a} [b - (a-b)y] + (a+b)y = -a$$

con lo cual $y = -1$

Este valor lo sustituimos en la expresión para " \bar{x} " obteniéndose

$$x = \frac{[b + (a-b)]}{a} = \frac{1}{a}$$

Ejemplo 3

Resolver el sistema.

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy \end{cases}$$

Solución

Este sistema de ecuaciones, las cantidades por determinar son " a " y " b ". De la primera ecuación obtenemos como valor de " a "

$$a = (\sum y - b\sum x)/n$$

lo que sustituido en la segunda ecuación nos da para " b ".

$$\frac{1}{n} \sum x (\sum y - b\sum x) + b\sum x^2 = \sum xy$$

o sea

$$b = \frac{(\frac{\sum xy}{n} - \sum x \sum y / n)}{[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}]}$$

Los sistemas de ecuaciones simultáneas pueden extenderse más allá de 2 incógnitas. El sistema

$$\begin{cases} na + b\sum x + c\sum x^2 = \sum y \\ a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 = \sum xy \\ a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 = \sum x^2 y \end{cases}$$

es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que aparece en la teoría de "mínimos cuadrados". Para su resolución puede seguirse cualquiera de los métodos ya indicados anteriormente. Para el caso en que el sistema tenga más de 4 incógnitas se han desarrollado sistemas bastante ingeniosos de resolución, que se verán con mayor detalle en Metodología Estadística.

1.9.- Problemas en que aparecen un sistema de ecuaciones simultáneas de 1 grado

En el planteamiento de muchos problemas aparece más de una cantidad desconocida y por lo tanto el problema - en su parte algebraica - puede reducirse a la resolución de un sistema de ecuaciones simultáneas. La resolución del sistema se hará tal como se indicó en el párrafo anterior, debiéndose tener un número de ecuaciones igual al número de incógnitas por determinar.

Ejemplo 1

La suma de los dígitos de un número de 2 cifras es 11. Si los dígitos se invierten, el número se incrementa en 45. Cuál es el número que cumple con esta condición?

Solución

Sean "x" e "y" cada uno de los dígitos de un número comprendido entre 10 y 99. De esa manera el número es igual a

$$\begin{array}{l} 10x + y \\ \text{con la condición} \quad x + y = 11 \quad (1) \\ \text{y el número con los dígitos en orden inverso es} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10y + x \\ \text{con lo cual se tiene} \quad (10y + x) - (10x + y) = 45 \end{array}$$

o sea

$$-9x + 9y = 45 \quad (2)$$

o sea que debemos resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ x - y = -5 \end{array} \right\}$$

cuya resolución nos da $x = 3; y = 8$, o sea el número en referencia es 38;

Ejemplo 2

Un pintor y su ayudante aplican una primera mano de pintura a una casa en $3 \frac{2}{5}$ días.

Si la aplicación de la segunda mano requiere cuatro días de los cuales sólo tres trabajó el ayudante. Cuánto tiempo emplea o/u en aplicar una mano?. Considérese que la aplicación de cada una de las manos requiere igual tiempo.

Solución

Sea x = tiempo empleado por maestro en dar una mano

y = tiempo empleado por ayudante en dar una mano

Para la primera mano tenemos

$$\frac{3.6}{x} + \frac{3.6}{y} = 1$$

Para la segunda mano tenemos

$$\frac{4.0}{x} + \frac{3.0}{y} = 1$$

cuya solución es

$$x = \underline{6 \text{ días}} ; y = \underline{9 \text{ días}}$$

Ejemplo 3

Determinar la suma de los cubos de los "n", primeros números de la escala natural de números, si se acepta que esta suma S es de la forma

$$S = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$$

Solución

Si la fórmula para S es cierta, debe satisfacer la suma de la siguiente secuencia

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \dots$$

teniéndose por lo tanto el siguiente sistema

$1 = a + b + c + d$
$9 = 16a + 8b + 4c + 2d$
$36 = 81a + 27b + 9c + 3d$
$100 = 256a + 64b + 16c + 4d$

La resolución de este sistema la hacemos por el sistema de eliminación, por sustracción. Para ello multiplicamos la primera por +2, +3 y +4, respectivamente y la restamos a las otras ecuaciones obteniendo

$7 = 14a + 6b + 2c$
$33 = 78a + 24b + 6c$
$96 = 252a + 60b + 12c$

En este nuevo sistema volvemos a usar el sistema de eliminación por sustracción. Multiplicamos la primera por 3 y 6 y la restamos a las otras dos, con lo que obtenemos

$$\begin{array}{l} 12 = 36a + 6b \\ 54 = 168a + 24b \end{array}$$

En este sistema de 2 ecuaciones multiplicamos la primera por 4 y restándola a la segunda se tiene

$$6 = 24a$$

lo que nos da el valor de "a" = 1/4.

Con este valor de "a" podemos calcular "b" a través de

$$6b = 12 - 36a$$

obteniéndose b = 1/2 y de allí en la ecuación

$$7 = 14a + 6b + 2c$$

podemos calcular "c"

$$c = 1/4$$

y finalmente de la ecuación

$$1 = a + b + c + d$$

obtenemos para "d" el valor 0. La suma S toma entonces la forma

$$S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

que puede reducirse a

$$S = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

o sea, "el cuadrado de la suma de los (n) primeros números".

1.10.- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de determinantes.

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas puede presentarse en forma simbólica muy sencilla mediante la introducción de los "determinantes". Desde el punto de vista práctico (cuando el número de incógnitas es superior a 3) queda un proceso operatorio bastante pesado, cual es el cálculo de estos determinantes.

Para introducir los determinantes veamos cuál es la solución del sistema simultáneo siguiente

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}$$

Multiplicando la primera ecuación por "b₂" y la segunda por "b₁" luego de restar miembro a miembro se tiene

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$$

con lo cual la incógnita "x" vale

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Multiplicando la primera por "a₂" y la segunda por "a₁" luego de restar miembro a miembro tenemos

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)y = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

lo que nos da para "y" el valor

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

La observación de estas soluciones nos muestran que ambas poseen un denominador común y que los numeradores son diferentes.

Preocupemosnos ahora únicamente de los primeros miembros de las ecuaciones simultáneas. Los coeficientes de las incógnitas presentan la siguiente distribución

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

y si esta distribución la encerramos entre 2 líneas verticales y le anteponeamos la letra D y la igualamos con los denominadores de "x" e "y" tenemos

$$D = \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

y hemos así definido un proceso de cálculo que es el siguiente:

"El valor de D se obtiene multiplicando el elemento superior izquierdo por el inferior derecho y restando de ese producto el producto de los otros elementos".

Esta operación puede recordarse con mayor facilidad por medio del diagrama siguiente

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right|$$

- +

De allí aparece la expresión "determinante" de segundo orden que es una ordenación cuadrangular de 4 números a_1, a_2, b_1, b_2 en la forma

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right|$$

y cuyo valor se calcula con la regla dada más arriba. Las letras a_1, a_2, b_1 y b_2 se denominan "elementos" del determinante.

Volviendo a considerar los numeradores de "x" y de "y" si introducimos los determinantes

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

los valores "x" e "y" quedan expresados por las relaciones

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

notando que los determinantes D_x y D_y se han obtenido sustituyendo los coeficientes de "x" y luego los de "y" por los correspondientes coeficientes de 2 miembros de las ecuaciones. Así para encontrar el valor de "x" sustituimos "a" por "m" y "c" por "n" las correspondientes cantidades del segundo miembro y dejamos sin cambiar los coeficientes "b" y "d" para "y". Este determinante es D_x . De manera análoga se forma el determinante del numerador de "y".

Ejemplo 1

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 8x + 9y = 6 \end{cases}$$

de acuerdo a la "regla de Crámer".

Solución

Se tiene los siguientes valores para los determinantes

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 24 = 12; \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0; \quad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8$$

de modo que las soluciones son

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{12} = 0 \qquad ; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 2

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - y = b \\ 2x - y = a + b \end{cases}$$

Solución

Se tiene los siguientes valores para los determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = \underline{1} \quad D_x = \begin{vmatrix} b & -1 \\ a+b & -1 \end{vmatrix} = -b + (a+b) = \underline{a}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 2 & a+b \end{vmatrix} = a + b - 2b = a - \underline{b}$$

con lo cual la solución del sistema es

$$x = \frac{D_x}{D} = \underline{a} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} = a - \underline{b}$$

Para el caso en que se tiene un sistema de 3 ecuaciones de primer grado del tipo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

la solución se puede presentar en la forma

$$x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} \quad ; \quad z = \frac{D_z}{D}$$

siendo

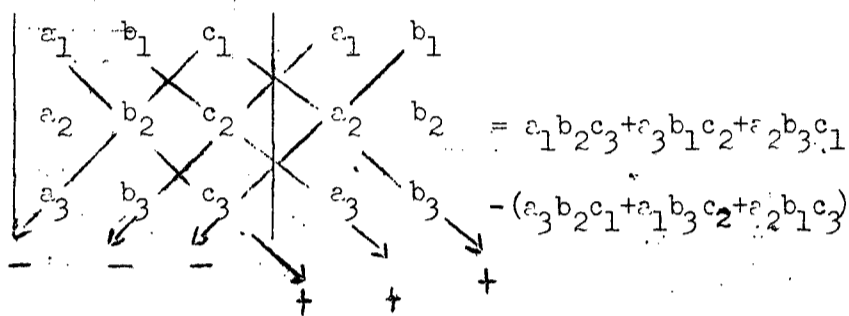
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

El problema está ahora en la determinación de los valores de estos determinantes de 3 x 3 elementos. Para el cálculo de ellos se aplica la regla de Sarrus que consiste en lo siguiente:

- se agregan al determinante 2 columnas adicionales formadas por los elementos de la primera y segunda columna
- se determinan los productos de los 3 términos que forman cada una de las 6 diagonales con 3 términos, siendo el producto

positivo para las diagonales que comienzan en términos de la primera línea y negativo para los que terminan en términos de la tercera línea.

Esto puede representarse gráficamente así



Ejemplo 1

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - z + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

Solución

Los determinantes necesarios valen:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (9-3-6) - (-9-2-6) = 17$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (9-2-10) - (-6+15) = -12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (15+4) - (-15-2) = 36$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-6-15) - (-10+4) = 27$$

y por lo tanto los valores de x, y, z que satisfacen al sistema son:

$$x = \frac{-12}{17} ; y = \frac{36}{17} ; z = \frac{27}{17}$$

Ejemplo 2

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 4b \\ 2x + y - z = 3a \\ x - 2y + 2z = -a \end{cases}$$

Solución

Los determinantes necesarios valen

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-20} \quad D_x = \begin{vmatrix} 4b & 1 & 3 \\ 3a & 1 & -1 \\ -a & -2 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-20a} \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4b & 3 \\ 2 & 3a & -1 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix} = \underline{-20b}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4b \\ 2 & 1 & 3a \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = \underline{20a - b}$$

1.11.- Exponentes y radicales

En este párrafo se ampliarán algunos de los conceptos ya anotados en el párrafo 1.3 cuando se dieron ciertas leyes en la resolución de multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

Elevación a potencia

Consiste en multiplicar un número denominado "base" varias veces por si mismo. Si el número es "a" la potencia "n" de este número es

1) $a^n = (a)(a)(a)\dots\dots(a)$ (n factores)

En base de esta definición se tiene las siguientes relaciones:

2) $a^m a^n = a^{m+n}$

3) $(ab)^n = a^n b^n$

4) $(a^m)^n = a^{mn}$

5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

7) $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

Veamos lo que expresa cada una de estas relaciones

La relación (2) expresa lo siguiente:

el producto de 2 potencias a^m y a^n que tienen una base común "a" es igual a una potencia que tiene "a" como base y como exponente, la suma de aquellos exponentes".

La relación (3) expresa:

"Si una base está elevada a un exponente "n" y esta base es igual al producto de una serie de factores, la expresión es también igual al producto de cada uno de los factores elevados al exponente "n" común".

La relación (4) expresa:

"La elevación a la potencia "n" de una base que previamente se ha elevado a la potencia "m" es igual a la base elevada a un exponente igual al producto de los exponentes".

La relación (5) expresa:

"El cociente de 2 potencias que tiene una base común es igual a la base común elevada a la diferencia de los exponentes".

La relación (6) expresa:

"La elevación a la potencia "n" del cociente de 2 números "a" y "b" es igual al cociente de las potencias "n" de cada uno de ellos".

La relación (7) expresa:

"Toda base "a", no nula (diferente de cero) elevada a la potencia 0, es igual a la unidad (1).

En base de estas relaciones puede realizarse con relativa comodidad la simplificación de expresiones potenciales.

Ejemplo 1

Simplificar la siguiente expresión potencial

$$\left(\frac{14x^5 y^4 z^9}{7x^2 y^7 z^8} \right)^5$$

Solución

Realizamos primeramente las simplificaciones dentro del paréntesis, con lo cual obtenemos

$$\left(\frac{2x^3 z}{y^3} \right)^5$$

y posteriormente elevamos a la potencia 5, llegándose

$$32 \frac{x^{15}}{y^{15}} z^5$$

Ejemplo 2

Simplificar la expresión

$$\frac{(5a^4 b^2 c^3)^4 (4a^3 b^4 c^2)^4}{(10a^8 b^5 c^5)^4}$$

Solución

Por tratarse de potencias que tienen el mismo exponente, podemos colocar todo dentro de un paréntesis. Reducir esta nueva expresión y posteriormente elevar a 1 exponente común.

Colocamos entonces todo dentro de un paréntesis

$$\left(\frac{5 a^4 b^2 c^3 \cdot 4 a^3 b^4 c^2}{10 a^8 b^5 c^5}\right)^4 = \left(\frac{2}{2a}\right)^4 = \frac{b^4}{16 a^4}$$

Exponentes enteros negativos

Las relaciones anteriores presuponían que los exponentes eran enteros positivos, pero puede demostrarse que las relaciones son válidas también para el caso de exponentes negativos.

Si "a" se eleva al exponente (-n), ello quiere decir que se tiene la equivalencia

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Esta equivalencia es fácil de demostrar, ya que si multiplicamos a^{-n} por la unidad, o sea el valor $\left(\frac{a^n}{a^n}\right)$ tenemos

$$a^{-n} = a^{-n} \left(\frac{a^n}{a^n}\right) = \frac{a^{-n+n}}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

de allí que la elevación a la potencia (-n) de la base "a" es por definición

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

siempre que la base (a) sea un número distinto de cero.

Con la introducción de los exponentes negativos, la división de 2 potencias se transforma en el producto de 2 potencias; una, con un exponente positivo y la otra con un exponente negativo. Veremos ejemplos:

Ejemplo 1

Determinar el valor de la expresión

$$\left(\frac{2^{-6} c^{-3} y^0}{64^{-1} c^2 y^{-3}}\right)^{-2}$$

Solución

La expresión anterior puede escribirse así

$$(2^{-6+6} c^{-3-2} y^{0+3})^{-2} = (2^0 c^{-5} y^3)^{-2} = (c^{-5} y^3)^{-2} = \underline{\underline{c^{-10} y^6}}$$

Ejemplo 2

Determinar el valor de la expresión

$$\frac{xy^{-2} - x^{-1}}{y^{-2} + x^{-1}y^{-1}}$$

Solución

Podemos amplificar la fracción por (xy^2) , con lo cual obtenemos

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \underline{\underline{x - y}}$$

Ejemplo 3

Simplificar la fracción

$$f = \frac{y^{-2} + 3x^{-1}y^{-1} + 2x^{-2}}{x^{-1}y^{-2} + x^{-2}y^{-1}}$$

Solución

Amplificamos por $x^2 y^2$, con lo cual obtenemos

$$f = \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x + y} = \frac{(x + 2y)(x + y)}{x + y} = \underline{\underline{x + 2y}}$$

Ejemplo 4

Simplificar el valor de la expresión

$$F = 2(3x + 1)^{-1}(x + 2)^{-3} + 3(3x + 1)^{-2}(x + 2)^{-2}$$

Solución

Factoricemos con $(3x + 1)^{-2}(x + 2)^{-3}$, de modo que la expresión se reduce a

$$(3x + 1)^{-2}(x + 2)^{-3} [2(3x + 1) + 3(x + 2)] = \underline{\underline{\frac{9(x + 1)}{(3x + 1)^2(x + 2)^3}}}$$

Raíces de los números

Cuando escribimos $4^2 = 16$, decimos que 16 es el cuadrado o la segunda potencia de 4 y, que 4 es la "raíz cuadrada" de 16. Análogamente puede decirse, puesto que $6^5 = 7776$, que 6 es la "raíz quinta" de 7776, de esa manera en general se tendrá la definición.

Definición

"Un número "a" es la raíz enésima de "b", si $a^n = b$ ".

Puesto que $(-a)^2 = a^2$, es evidente que cualquier número positivo tiene 2 raíces cuadradas, una positiva y otra negativa, y ambas de igual valor absoluto. Además, puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo, no existe raíz cuadrada "real" para $(-a)$ ni ninguna raíz de orden par para un número negativo, De allí que se hace necesario introducir lo que se denomina "números imaginarios" que desde el punto teórico cumplen con la condición que sus potencias pares dan números negativos.

Cuando existe una raíz enésima real positiva de un número, se le llama la "raíz enésima principal". En caso de no existir raíz enésima principal positiva de un número, pero de haber raíz enésima real negativa, a esta se denomina Raíz enésima principal.

La notación usual para la raíz enésima de "a" es $\sqrt[n]{a}$. El símbolo se llama "radical".

Según la definición anterior

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Si "a" no es la potencia enésima de un número racional, el valor de $\sqrt[n]{a}$ no se puede expresar "exactamente" como un entero o como una fracción. Frecuentemente se puede expresar en otras formas, pero nunca con exactitud sin hacer uso del radical. Sin embargo, si $\sqrt[n]{a}$ es real, se puede expresar su valor "aproximadamente" como una fracción decimal.

Exponentes fraccionarios

Se puede entonces ampliar más aún las definiciones acerca de los exponentes y obtener una interpretación para los exponentes fraccionarios. Si se considera que la relación (4) es válida para $m=1/n$, se tiene

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Por lo tanto $a^{1/n}$ es un número cuya potencia enésima es "a" y en consecuencia de acuerdo con la definición de raíz enésima se tiene las relaciones equivalentes

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

De esta manera se tienen los exponentes fraccionarios que se definen como la potencia de un radical. El denominador del exponente es el índice del radical y, el numerador indica la potencia a la cual se eleva el radical.

Si $\sqrt[p]{a}$ es un número real, entonces

$$a^{q/p} = (a^{1/p})^q = (a^q)^{1/p}$$

y la ley se satisface para $m = q$; $n = 1/p$;

Si se emplea la forma radical para las expresiones

$$(a^{1/p})^q \quad \text{y} \quad (a^q)^{1/p}$$

se tiene

$$a^{q/p} = (p\sqrt[p]{a})^q = p\sqrt[p]{a^q} \quad (6)$$

Si $\sqrt[p]{a}$ es racional, es más conveniente usar la primera expresión radical de (6). De lo contrario la forma del segundo radical.

Ejemplo 1

Escribir sin radicales la siguiente expresión

$$\sqrt[3]{25 a^3 b^2}$$

Solución

Aplicamos el exponente $1/3$ a cada uno de los factores del sub-radical

$$25^{1/3} \cdot a^{3/3} \cdot b^{2/3} = \frac{5^{2/3} a b^{2/3}}{1}$$

Ejemplo 2

Escribir sin radicales la siguiente expresión

$$12 \sqrt{\frac{27 a^4 x^8}{64 b^9 y^{18}}}$$

Solución

Aplicamos el exponente 1/12 a cada una de las expresiones del sub radical

$$\frac{3^{3/12} a^{4/12} x^{8/12}}{2^{6/12} b^{9/12} y^{18/12}} = \frac{3^{1/4} a^{1/3} x^{2/3}}{2^{1/2} b^{3/4} y^{3/2}}$$

los radicales cumplen con las siguientes relaciones:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Ejemplo 1

Realizar la siguiente multiplicación de radicales

$$\sqrt[3]{9x^2 y^4} z \quad \sqrt[3]{12xy^4} z$$

Solución

Ambos factores tienen radicales de mismo índice, por lo tanto multiplicamos las cantidades sub radicales y luego extraemos raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{108x^3 y^8 z^2} = 3 x^{2/3} \cdot x y^{8/3} z^{2/3}$$

Ejemplo 2

Multiplicar los radicales

$$\sqrt[3]{5xy^4} \quad \sqrt[3]{25x^2 y} \quad \sqrt[3]{x^2 y^5} \quad \sqrt[3]{xy}$$

Solución

Por tener todos los radicales el mismo índice, podemos escribir

$$\sqrt[3]{5xy^4 \cdot 25x^2 y \cdot x^2 y^5 \cdot xy} = \sqrt[3]{125 \cdot x^6 \cdot y^{11}} = 5x^2 y^3 \sqrt[3]{y^2}$$

Ejemplo 3

Realizar la división

$$\frac{\sqrt{6c^3d} \cdot \sqrt{3cd^5}}{\sqrt{36c^7d^2}}$$

Solución

Por tener todos los radicales el mismo índice, podemos escribir

$$\frac{\sqrt{6c^3d} \cdot \sqrt{3cd^5}}{\sqrt{36c^7d^2}} = \sqrt{\frac{d^4}{2c^3}} = \frac{d}{c} \sqrt{\frac{1}{2c}}$$

Ejemplo 4

Realizar la división

$$\frac{\sqrt{72u^3v^9}}{\sqrt{27u^5w^5} \cdot \sqrt{32v^7w^3}}$$

Solución

Por tener todos los radicales el mismo índice, podemos escribir

$$\sqrt{\frac{72u^3v^9}{27u^5w^5 \cdot 32v^7w^3}} = \sqrt{\frac{4}{3u^2v^2w^8}} = \frac{2}{uvw^4\sqrt{3}}$$

Racionalización de los denominadores

Quando se tiene una fracción en cuyo denominador aparecen radicales se pueden eliminar estos radicales por el proceso denominado "racionalización de radicales" quedando por lo tanto en el denominador números enteros solamente.

La racionalización de los denominadores se hace con el propósito de dejar en forma más sencilla y cómoda la expresión. Además mediante este proceso pueden sumarse fracciones en cuyos denominadores aparecen radicales diferentes.

Ejemplo 1

Racionalizar la fracción

$$F = \frac{\sqrt[3]{(x+y)^2}}{\sqrt[3]{(x^2-y^2)(x-y)}}$$

Solución

La cantidad sub radical en el denominador es igual a $(x-y)^2(x+y)$, expresión que para que sea un cubo perfecto debe amplificarse por $(x-y)(x+y)^2$. De esa manera se tiene la equivalencia

$$F = \frac{\sqrt[3]{(x+y)^2}}{\sqrt[3]{(x^2-y^2)(x-y)}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-y)(x+y)^2}}{\sqrt[3]{(x-y)(x+y)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(x-y)(x+y)^4}}{\sqrt[3]{(x-y)^3(x+y)^3}} = \frac{\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}}{x-y} = \frac{\sqrt[3]{x^2-y^2}}{x-y}$$

Ejemplo 2

Racionalizar la fracción

$$\frac{x+y - 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Solución

El numerador es un cuadrado perfecto, de modo que se tiene

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \underline{\underline{\sqrt{x} - \sqrt{y}}}$$

Ejemplo 3

Racionalizar la fracción

$$\frac{2a - b + \sqrt{ab}}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

Solución

El numerador es el producto de los factores $(2\sqrt{a} - \sqrt{b})$ y $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ y por lo tanto se tiene

$$\frac{2a - b + \sqrt{ab}}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \underline{\underline{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}$$

Ejemplo 4

Racionalizar la expresión

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6} - 1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Solución

Amplificamos por la cantidad $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, con lo cual obtenemos

$$\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{6-1})(1+\sqrt{2+\sqrt{3}})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 - 2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

1.12.- Ecuaciones de 2º grado

Definición

"Ecuación de 2º grado es una ecuación con una incógnita en la que dicha incógnita aparece elevada a la segunda potencia, pero no a otra mayor"

Si la ecuación contiene la primera y la segunda potencia de la incógnita se llama "ecuación completa de 2º grado" y si solamente contiene la segunda potencia de la incógnita se denomina "ecuación simple de 2º grado".

Por ejemplo, la ecuación $3x^2 - 2x + 6 = 0$ es una ecuación completa de 2º grado, en cambio la ecuación $5x^2 - 54 = 0$ es una ecuación simple de 2º grado.

Solución de una ecuación incompleta

Para solucionar la ecuación incompleta

$$ax^2 - c = 0$$

se pasa la constante "c" al segundo miembro y luego se la divide por el coeficiente de x^2 , con lo cual se tiene

$$x^2 = c/a$$

Una vez que ésto se ha realizado, se extrae la raíz cuadrada de la cantidad c/a resultando 2 raíces reales de igual valor absoluto y de distinto signo, si la cantidad c/a es positiva.

Si el cociente de las cantidades "a" y "c" es negativo la ecuación admite 2 raíces imaginarias. Introduciendo el símbolo "i" para denotar la raíz cuadrada (-1) o sea si

$$i = \sqrt{-1}$$

las raíces (x_1, x_2) estarán dadas por la relación

$$x_1 = \frac{c}{a} i \quad , \quad x_2 = -\frac{c}{a} i$$

Solución de la ecuación completa

Una ecuación completa de 2º grado es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si a esta ecuación le sumamos la cantidad $(\frac{c^2}{4a})$ a cada uno de los miembros, la ecuación sigue manteniendo las mismas raíces que la ecuación

original, pero ahora el primer miembro puede expresarse como un cuadrado perfecto. En efecto se tiene

$$a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c = \frac{b^2}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

con lo cual la ecuación original que era completa se ha transformado en una ecuación incompleta, cuya solución es

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de esta manera las raíces de la ecuación completa de 2º grado están dadas por la relación

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que lo expresa lo siguiente:

"El valor "x", solución de una ecuación completa de 2º grado, es igual al coeficiente de la primera potencia de "x" con signo contrario, más-menos la raíz cuadrada del cuadrado de ese coeficiente menos 4 veces el producto del coeficiente de x² por el término constante, todo dividido por el doble del coeficiente de x²".

La realidad de las raíces de la ecuación dependerá del signo de la cantidad sub radical. Para que las raíces sean reales es necesario que esta cantidad sea positiva, o sea que b² sea mayor que 4ac, esto es, el cuadrado del coeficiente de la primera potencia de "x" debe ser mayor que 4 veces el producto de los otros 2 coeficiente.

Ejemplo 1

Determinar las raíces de la ecuación

$$10x^2 - 45 = 0$$

Solución

La ecuación incompleta puede escribirse

$$\begin{aligned} 10x^2 &= 45 \\ x^2 &= 9/2 \\ x &= \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Determinar las raíces de la ecuación de 2º grado

$$8x^2 + 50 = 0$$

Solución

La ecuación incompleta puede escribirse

$$\begin{aligned} 8x^2 &= -50 \\ x^2 &= -\frac{25}{4} \\ x &= \pm \frac{5}{2} i \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Determinar las raíces de la ecuación

$$2a^2 x^2 - abx - 3b^2 = 0$$

Solución

Aplicamos la fórmula de la solución para una ecuación completa de 2º grado

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{(ab)^2 + 4(3b^2)(2a^2)}}{2(2a^2)} = \frac{ab \pm \sqrt{25 a^2 b^2}}{4a^2} = \frac{ab \pm 5ab}{4a^2}$$

$$x_1 = \frac{ab + 5ab}{4a^2} = \frac{6ab}{4a^2} = \frac{3}{2} \frac{b}{a}$$

$$x_2 = \frac{ab - 5ab}{4a^2} = -\frac{4ab}{4a^2} = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo 4

Qué puede decirse acerca de la realidad de las raíces de la ecuación?

$$14 = 54x^2 - 51x$$

Solución

Para detectar la realidad de las raíces de esta ecuación completa de 2º grado se debe determinar el valor de la cantidad sub radical. La ecuación de 2º grado puede escribirse

$$54x^2 - 51x - 14 = 0$$

con lo cual

$$a = 54 ; b = - 51 ; c = - 14$$

de allí que

$$b^2 - 4ac = (51)^2 - 4(54)(-14) = (51)^2 + (54)(56)$$

cantidad positiva la que nos indica que las raíces son reales.

Ejemplo 5

Para qué valores del parámetro "k" las raíces de la ecuación son reales?.

$$x^2 - (2+k)x + \frac{k(k+5)}{4} = 0$$

Solución

La cantidad sub-radical vale

$$\left(\frac{2+k}{2}\right)^2 - \frac{k(k+5)}{4} = 1 - \frac{k}{4}$$

cantidad que debe ser positiva, lo que exige que k sea menor que 4

Ejemplo 6

Resolver la ecuación

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$$

Solución

Pasando la cantidad $\sqrt{x-2}$ al segundo miembro y elevando al cuadrado tenemos

$$(2x+3) = (4 - \sqrt{x-2})^2 = 16 + x - 2-8\sqrt{x-2}$$

$$x - 11 = - 8\sqrt{x - 2}$$

volviendo a elevar al cuadrado

$$(x - 11)^2 = 64(x - 2)$$

que se reduce a la ecuación de 2º grado

$$x^2 - 86x + 249 = 0$$

cuyas raíces son

$$x_1 = 83 ; x_2 = \underline{3}$$

Al substituir el valor $x = 83$, notamos que la ecuación original no se satisface, y por lo tanto ésta es una raíz extraña (no útil) introducida por haber elevado 2 veces sucesivas al cuadrado.

1.13.- Razones, proporciones y variaciones

Razón

entre dos números "a" y "b" es el cociente que se obtiene al dividir "a" por "b".

De esta manera la razón de "a" a "b" es a/b , ó como se escribe frecuentemente, $a:b$, en donde los puntos indican división.

Si "a" y "b" son magnitudes de la misma especie, se deben expresar en la misma unidad para que a/b tenga sentido. Esto es, para obtener la razón de 3 cms. a 2 dms., se convierten 2 dms. en 20 cms., y la razón deseada es $3/20$. En tales casos la razón a/b representa un número abstracto y es la respuesta a la pregunta qué múltiplo o fracción de "b" es "a"?

Aún cuando frecuentemente en la división intervienen cantidades de la misma especie, también existen razones de magnitudes de distintas naturalezas (Física, por ejemplo).

Al no representar "a" ni "b" cantidades de la misma especie, la razón $a:b$ representa la porción de "a" que corresponde a una unidad de "b". La velocidad "v" de un cuerpo se expresa como

$$v = s/t$$

y cumple con esta condición.

Proporciones

Es la igualdad de 2 razones. De esta manera si a/b es la primera razón y c/d la segunda razón, la proporción es la igualdad de estas razones o sea

$$a/b = c/d$$

En una proporción los términos "b" y "c" se denominan medios y los términos restantes extremos. Al escribir la proporción en la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

los elementos "a" y "c" reciben el nombre de antecedentes y los restantes (b, d) el de consecuentes.

Las propiedades de las proporciones son las siguientes:

Propiedad 1

"En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos"

En símbolos

$$ad = bc$$

Propiedad 2

"Si $a/b = c/d$, entonces $a/c = b/d$ y también $b/a = d/c$ ".

Esto equivale a decir que se puede intercambiar los medios entre sí o los extremos entre sí sin alterar el valor de la proporción.

Propiedad 3

"Si $a/b = c/d$, entonces se tiene

$$(a+b)/b = (c+d)/d ; (a-b)/b = (c-d)/d ; (a+b)/(a-b) = (c+d)/(c-d)$$

La primera relación equivale a decir:

"La suma del antecedente y del consecuente de una razón es a su antecedente (ó consecuente) como la suma del antecedente y del consecuente de la otra razón es a su antecedente (ó consecuente)".

La segunda relación es semejante a la anterior bastando cambiar la palabra "suma" por "resta".

La tercera relación nos dice que:

"Para una proporción $a/b = c/d$, la suma del antecedente y consecuente de una razón es a la diferencia de esos términos como la suma del antecedente y consecuente de la otra razón es la diferencia de esos términos".

Si en una proporción los medios son iguales, este valor común recibe el nombre de "media proporcional" de "a" y "d", teniéndose

$$b^2 = ad$$

La cantidad "d" en la relación anterior recibe el nombre de "tercera proporcional" entre "a" y "b".

En la relación general

$$ad = bc$$

cualquier término es cuarta proporcional de los otros tres.

Ejemplo 1

Qué número debe sumarse a 7 y sustraerse de 3 para obtener dos números cuya razón sea 3:1?

Solución

Sea x el número pedido. De acuerdo los datos del problema debe tenerse

$$\frac{7+x}{3-x} = \frac{3}{1}$$

$$\text{ó } 7+x = 3(3-x)$$

$$4x = 2$$

$$x = 1/2$$

Ejemplo 2

Si $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$; $x + y = 14$, encuéntrese los valores de "x" y de "y".

Solución

De la razón deducimos que $\frac{x+y}{x} = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$

con lo cual

$$3(x+y) = 7x \quad \text{ó} \quad 7x = 3(14)$$

$$x = 6$$

y por lo tanto de $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ deducimos que

- 50 -

$$4x = 3y$$

$$y = \frac{4}{3} x = \frac{4}{3} (6) = \underline{8}$$

Ejemplo 3

Encuéntrese la cuarta proporcional para la siguiente triada de números

$$a = 5 ; b = 9 ; c = 10$$

Solución

Se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con lo cual $d = \frac{bc}{a} = \frac{(9)(10)}{(5)} = \underline{18}$

Ejemplo 4

Encuéntrese la media proporcional para el siguiente par de números

$$a = 4 ; d = 36$$

Solución

La media proporcional vale

$$b^2 = ad \quad \delta \quad b = \sqrt{ad} = \sqrt{(4)(36)} = \underline{12}$$

Variaciones

Sucede con frecuencia casos en que aparecen dos cantidades que pueden variar ("variables" como se las llama) pero de modo que su razón se mantiene constante e igual a "k".

De esta manera si "a" y "b" son estas cantidades se tendrá

$$a = k b$$

en cuyo caso se dirá que "a" varía directamente y proporcionalmente a "b". Tal caso constituye el caso de "variación directa". Puede presentarse el caso en que el aumento de "a" significa una disminución de "b" ó que una disminución de "a" esté acompañada con un aumento de "b". Este caso es el de variación inversa y puede denotarse por la relación.

$$a = \frac{k}{b}$$

Puede ser que una cantidad "a" varíe directamente con "b" y "c" pero inversamente con "d", en este caso entre "a", "b", "c" y "d" existirá la relación de variación

$$a = \frac{kbc}{d}$$

siendo "k" la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1

La cantidad de carbón que consume un barco que viaja con una velocidad uniforme es directamente proporcional a la distancia recorrida y al cuadrado de la velocidad. Si el barco gasta 50 toneladas de carbón al recorrer 130 Kms. con velocidad de 25 Kms. Qué cantidad de combustible empleará si hace un recorrido de 200 Kms. con una velocidad de 35 Kms.?

Solución

- Sea C = consumo de carbón
 D = distancia recorrida
 V = velocidad del barco
 K = cte. proporcionalidad

de acuerdo al enunciado del problema se tiene

$$C = K D V^2$$

La constante de proporcionalidad se determinará para valores desde C, D, V^2 ; sean estos valores C_0, D_0, V_0 , de allí que

$$C = C_0 \cdot \frac{D}{D_0} \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 50 \cdot \frac{D}{130} \cdot \left(\frac{V}{25}\right)^2$$

de modo que para el caso pedido se tiene

$$C = 50 \cdot \left(\frac{200}{130}\right) \cdot \left(\frac{35}{25}\right)^2 = \underline{150,8 \text{ tons.}}$$

Ejemplo 2

El tiempo de exposición que se requiere para obtener un buen negativo, es directamente proporcional al cuadrado de los números "f" del obturador de la cámara fotográfica. Si se necesitan 1/25 seg. cuando el obturador tiene f/16 qué tiempo de exposición se requiere en las mismas condiciones para el obturador f/8?

Solución

- Sea T = tiempo de exposición
 f = número del obturador
 T_0 = tiempo de exposición para un número f_0 dado.

de allí que

$$\begin{aligned} T &= K f^2 \\ T_0 &= K f_0^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$T = T_0 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{f}{16}\right)^2$$

Para el foco pedido $f = 8$ se tendrá como tiempo de exposición

$$T = \frac{1}{25} \left(\frac{8}{16}\right)^2 = \frac{1}{100} \text{ seg.}$$

1.14.- Logaritmos

Si en la relación

$$a^x = N$$

se den por conocidas las cantidades "a" y "N", la resolución de esta ecuación es un problema que puede enunciarse así:

Cuál es el logaritmo de N en la base "a"?

De esta manera el logaritmo de un número N en una base "a" cualquiera es sencillamente el "exponente" al cual debe elevarse esa base para obtener el número N.

Por ejemplo, 3 es el logaritmo de 8 en la base 2, ya que

$$2^3 = 8$$

La notación que se usa para indicar el logaritmo de un número N en la base "a" es la siguiente

$$\log_a N$$

De esa manera para el ejemplo numérico anterior tenemos

$$\log_2 8 = 3$$

Las bases que se usan con más frecuencia son las dos:

- la base 10, lo que da origen a los denominados logaritmos comunes ó de Briggs.
- la base e, que veremos con mayor detalle en el Capítulo 2 sobre Cálculo Diferencial, lo que da origen a los "logaritmos Neperianos ó naturales".

El uso del 10 como base es de gran utilidad ya que permite, para números que solamente difieren en el orden decimal (por ejemplo, 2,4 y 2400), encontrar fácilmente el logaritmo, variando para ello únicamente la parte entera.

Es lógico pensar que el logaritmo de un número positivo N en la base 10 contará de una parte entera y de una parte decimal si el número es mayor que 10, ya que en ese caso el exponente al cual debe elevarse

la base 10 es mayor que 1. Por ejemplo el logaritmo de 47 debe ser igual a 1 aumentado en cierta cantidad decimal.

Cualquiera que sea la base de los logaritmos, la parte entera del logaritmo recibe el nombre de "característica" y la parte decimal el de "mantisa". De esa manera en la expresión

$$\log 47 = 1,6721\dots$$

la parte entera (1) es la característica y la parte 1,6721... es la mantisa, que contendrá tanto decimales como sean los que contienen la tabla de la cual se ha tomado esa mantisa.

Cuando la base de los logaritmos es 10 se omite el subíndice entre la palabra "log" y el número "N". Para el caso en que se tiene "e" como base se puede colocar esta letra entre "log" y "N" o bien cambiar la "l" minúscula por una "L" mayúscula. O sea

$$\log_e N = \text{Log } N$$

$$\text{ó } e^{\text{Log } N} = N$$

Ejemplo 1

Encuéntrese el valor de los logaritmos de los siguientes números:

a) $\log 81$

e) $\log_{81} 3$

b) $\log^9 1000$

f) $\log_a a^6$

c) $\log_{64} 8$

g) $\log_b 1/3$

d) $\log_{125} 5$

h) $\log_{b^3} b^6$

Solución

a) $x = \log_9 81$ ó sea $9^x = 81 \therefore x = 2$

b) $-x = \log 1000$ ó sea $10^x = 1000 \therefore x = 3$

c) $x = \log_{64} 8$ ó sea $64^x = 8 \therefore x = \frac{1}{2}$

d) $-x = \log_{125} 5$ ó sea $125^x = 5 \therefore x = \frac{1}{3}$

e) $x = \log_{81} 3$ ó sea $81^x = 3 \therefore x = \frac{1}{4}$

f) $x = \log_{a^2} a^6$ ó sea $(a^2)^x = a^6 \therefore x = 3$

g) $x = \log_{b^{1/3}} b^6$ ó sea $(b^{1/3})^x = b^6 \therefore x = 18$

h) $x = \log_{b^3} b^6$ ó sea $(b^3)^x = b^6 \therefore x = 2$

Ejemplo 2

Encuéntrese el valor de N en los casos siguientes:

- a) $\log_2 N = 2$
- b) $\log_5 N = 3$
- c) $\log N = 10$

Solución

- a) $2^2 = N \therefore N = 4$
- b) $5^3 = N \therefore N = 125$
- c) $10^{10} = N$

El valor de la característica depende esencialmente de la parte entera del número "N" para el cual se busca el logaritmo. De esa manera los logaritmos de los números

- 0,0023456
- 0,23456
- 2,3456
- 234,56

todos ellos tienen una mantisa común y, lo único que los diferencia es la característica. La mantisa por lo tanto se tomará de una tabla de logaritmos (4, 5, 6, 7 ó más decimales) por ejemplo, de la tabla de logaritmos editada por el Dr. Bruhns (D. Van Nostrand Co, New York) se tiene para la mantisa 3702540. La determinación de la característica depende de cual de los números se trata. La regla es que, la característica para el caso en que el número contiene cifras enteras, es igual al número de estos dígitos disminuido en 1 y para el caso en que el número no contiene cifras enteras es igual al número de 0 que aparece desde el 0 anterior a la coma hasta la primera cifra significativa de la parte decimal. Esta última característica debe considerarse "negativa" es decir debe restarse a la mantisa para obtener el valor real del logaritmo

pero en lugar de realizar la resta se coloca el número delante de la man ti sa, agregándole una raya sobre él para indicar que es negativo.

De esa manera los logaritmos de los números más arriba indicados son:

$$\log 0,0023456 = \bar{3},3702540$$

$$\log 0,23456 = \bar{1},3702540$$

$$\log 2,3456 = 0,3702540$$

$$\log 234,56 = 2,3702540$$

La determinación del logaritmo de un número por lo tanto se rea l i z a de la siguiente manera:

- determinar la característica del logaritmo de acuerdo con la re g l a anterior,
- se busca la mantisa en una tabla de logaritmos, si es que se dispone de una tabla en la que aparece el número N,

Si en la tabla no aparece el número N, se toma de la tabla las man t i s as de los número más vecinos - inferior y superior al número N, dado - y por un proceso de interpolación lineal se determina la mantisa del número N que no aparece en la tabla.

Por ejemplo

Para buscar el logaritmo del número $N = 23456$ en una tabla en que aparecen los logaritmos de los números entre 100 y 1.000. ("Tablas Est ad is t ic as" de R.A. Fisher - F. Yates - E. Aguilar Madrid, 1959) procedemos de la siguiente manera:

- este número tiene 5 cifras enteras, por lo tanto su caracte r is t i c a es 4,
- los números más vecinos del número 23456 son 23400 y 23500, cuyas mantisas son 36922 y 37107, mantisas que difieren en 185.

Establecemos la siguiente regla de tres simple:

Si cuando los números pasan de 23400 a 23500 (o sean varían en 100) sus mantisas varían de 36922 a 37107 (o sea varían en 185) por 100 unidades de cambio en N hay 185 en la mantisa, en cuánto debemos aumentar la mantisa del número 23400 para que ella represente a la man t i s a del número 23456?

Este aumento debe ser

$$\frac{185}{100} 56 = \underline{104}$$

o sea proporcional, con lo cual la mantisa del número 23456 será

$$36922 + 104 = \underline{37026}$$

teniéndose finalmente $\log 23456 = 4,37026$

que es más o menos igual a la mantisa indicada en la tabla de Bruhns, en la que se dan las mantisas con 7 decimales.

Este proceso de determinación de la mantisa para el logaritmo de un número que no aparece en la tabla se realiza con relativa facilidad haciendo uso de las tablas de "Partes Proporcionales" que siempre se colocan al lado de las mantisas.

Por ejemplo, para la determinación del logaritmo del número $N = 4.287.445$ usando la tabla de Bruhns tenemos que interpolar entre las mantisas de los números 4.287.400 y 4.287.500 que son 6321940 y 6322041 respectivamente y que difieren por lo tanto en 101

Usando la tabla de 101 buscamos en la línea 4 cuál es el número escrito y luego frente a 5, agregamos estos números a la mantisa 6321940 en la forma

$$\begin{array}{r} 6321940 \\ 40,4 \\ \hline 5,05 \end{array}$$

y sumamos, con lo cual obtenemos $\log 4.287.445 = \underline{6,6321985}$

que es el valor del logaritmo buscado

Ejemplo 1

Encontrar los logaritmos de los siguientes números

a) 98,501

b) 0,88923

usando la tabla de logaritmos de Bruhns

Solución

a) En la página 183 encontramos para la mantisa 0.9934406, o sea que

$$\log 98,501 = \underline{1,9934406}$$

b) En la página 163 encontraremos la mantisa 0.9490141, o sea que

$$\log 0,88923 = \underline{\bar{1},9490141}$$

Ejemplo 2

Encontrar los logaritmos de los siguientes números

- a) 21583,42
- b) 0,134698

usando la tabla de logaritmos de Bruhns

Solución

- a) En la página 29, tenemos

$$\begin{aligned} \log 21583,00 &= 4,3341118 \\ \log 21584,00 &= 4,3341319 \end{aligned} \quad \text{) dif } \underline{201}$$

En la tabla P.P. para 201 y la parte 0,42 tenemos

$$\begin{array}{r} 201 \times 0,42 = 80,4 \\ \quad \quad \quad 4,02 \\ \hline 84,42 \quad (84) \end{array}$$

que lo agregamos a $4,3341118$

$$\therefore \log 21583,42 = \underline{4,3341202}$$

- b) En la página 12 de la tabla obtenemos

$$\begin{aligned} \log 0,134690 &= \bar{1},1293354 \\ \log 0,134700 &= \bar{1},1293676 \end{aligned} \quad \text{) dif } \underline{322}$$

haciendo uso de la tabla de 322 tenemos

$$\begin{array}{r} \bar{1},1293354 \\ 322 \times 0,8 \rightarrow + \quad 257,6 \\ \hline \log 0,134698 = \underline{\bar{1},1293612} \end{array}$$

Búsqueda del antilogaritmo

Si se conoce el logaritmo de un número N desconocido, el que ha resultado de un proceso de cálculo, la búsqueda de este número "N" es esencial para determinar el valor de este proceso. Tal determinación se conoce como "Búsqueda del antilogaritmo".

Puede suceder que la mantisa tenga un valor que corresponde exactamente a una mantisa dada en cuyo caso el antilogaritmo está dado directamente.

En los casos corrientes será que la mantisa (M) no corresponda a ningún número de la tabla sino que se tendrá 2 mantisas (M_1, M_2) que encierran a aquella y que corresponden respectivamente a los números N_1 y N_2 . En este por un proceso de interpolación directa se busca el antilogaritmo.

Se determina la diferencia entre las mantisas que encierran a la mantisa del número N desconocido y se determina además la diferencia entre la mantisa del límite inferior y la mantisa del número N_1 , si los números N_1 y N_2 son los que tienen las mantisas M_1 y M_2 el antilogaritmo del número N cuya mantisa es M será

$$N_1 + \frac{M - M_1}{M_2 - M_1} (N_2 - N_1)$$

Por ejemplo, la mantisa $M = 6291598$ está comprendida entre las mantisas $M_1 = 6291547$ y $M_2 = 6291649$ que corresponden a los números $N_1 = 42575$ y $N_2 = 42576$, de modo que el antilogaritmo para la mantisa $M = 6291598$ es

$$N = 42575 + \frac{6291598 - 6291547}{6291649 - 6291547} (1) = 42575 + \frac{58}{102} = \underline{42575,57}$$

Para evitar este tipo de planteamiento se usan las tablas de Partes Proporcionales, ubicando la tabla a usar por diferencia entre las mantisas M_1 y M_2 y buscando los números que dan valores más cercanos para la diferencia $M - M_1$

Ejemplo 1

Encontrar el antilogaritmo para 2,837|5632

Solución

En la página 123 de la tabla de Bruhns, encontramos 68796 como antilogaritmo. Ya que la característica es 2, el número pedido es

$$\underline{687,96}$$

Ejemplo 2

Encontramos el antilogaritmo para 2,994|4302

Solución

Las mantisas más vecinas y sus respectivos antilogaritmos son (página 183).

$$\begin{array}{r}
 M_1 = 9944271 \qquad N_1 = 98725 \\
 M_2 = 9944315 \qquad N_2 = 98726 \\
 \hline
 M_2 - M_1 = \quad 44 \qquad N_2 - N_1 = \quad 1
 \end{array}$$

por otra parte

$$M - M_1 = 9944302 - 9944271 = \underline{31}$$

de allí que

$$(M - M_1) \frac{N_2 - N_1}{M_2 - M_1} = \frac{31}{44} = 0,7 \text{ y la mantisa } .9944302 \text{ corresponde}$$

al antilogaritmo $N = 987257$, y como la característica es 2, el antilogaritmo pedido es:

$$\underline{987,257}$$

Propiedades de los logaritmos

La determinación del valor de expresiones en que aparecen productos, cuocientes de expresiones monomias se puede realizar con relativa facilidad y a veces es la única manera a través del uso de los logaritmos de estas expresiones. Para determinar el logaritmo del resultado se usan las siguientes propiedades:

Propiedad 1

"El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los números".

En símbolos si "a" y "b" son 2 números, entonces

$$\text{Log } (ab) = \text{log } a + \text{log } b$$

Demostración

Por definición

$$10^{\text{log } a} = a$$

$$10^{\text{log } b} = b$$

multiplicando miembro a miembro estas relaciones

$$10^{\text{log } a + \text{log } b} = ab$$

pero por definición

$$10^{\text{log } (ab)} = ab$$

de modo que $\text{log } (ab) = \text{log } a + \text{log } b$

Propiedad 2

"El logaritmo del cociente de dos números a/b es igual a la diferencia de los logaritmos de los números".

En símbolos $\log (a/b) = \log a - \log b$

Demostración

En lugar de multiplicar miembro a miembro las relaciones anteriores para "a" y "b", las dividimos miembro a miembro, con lo cual se tiene

$$10^{\log a - \log b} = a/b$$

pero por definición

$$10^{\log(a/b)} = a/b$$

igualando los primeros miembros de estas ecuaciones se tiene

$$\log (a/b) = \log a - \log b$$

que demuestra la propiedad indicada.

Propiedad 3

"El logaritmo de la potencia de un número es igual al producto del exponente de la potencia por el logaritmo del número".

En símbolos

$$\log (a^k) = k \log a$$

Demostración

$$\log (a^2) = \log (a \cdot a) = \log a + \log a = 2 \log a$$

$$\log (a^3) = \log (a^2 \cdot a) = \log a^2 + \log a = 2 \log a + \log a = 3 \log a$$

$$\log (a^4) = \log (a^3 \cdot a) = \log a^3 + \log a = 3 \log a + \log a = 4 \log a$$

con lo cual se ve que la propiedad es cierta

Ejemplo 1

Calcular el valor de la expresión $x = \sqrt[3]{\left[\frac{(1,25)(31,4)}{(4,21)(61,3)}\right]^2}$

Solución

Tomando logaritmos de ambos miembros tenemos

$$\log x = \frac{2}{3} (\log 1,25 + \log 31,4 - \log 4,21 - \log 61,3) =$$

$$= \frac{2}{3} (0,09691000 + 1,4969296 - 0,6242821 - 1,7874605) = \frac{2}{3} (-0,8179030)$$

$$= -0,5452687 = \underline{\underline{-1,4547313}}$$

Ejemplo 2

Calcular el valor de la expresión

$$x = \sqrt{\frac{0,6241 \sqrt{4728}}{1247 (8,732)^3}}$$

Solución

Tomando logaritmos tenemos

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{2} \log 0,6241 + \frac{1}{4} \log 4728 - \frac{1}{2} \log 1247 - \frac{3}{2} \log 8,732 \\ &= \frac{1}{2} (1,7951846) + \frac{1}{4} (3,6746775) - \frac{1}{2} (3,0958665) - \frac{3}{2} (0,9411137) \\ &= -0,1024072 + 0,9186694 - 1,5479332 - 1,4116706 = -2,1433416 \end{aligned}$$

$$\log x = \underline{\underline{3,85616584}}$$

$$x = \underline{\underline{0,0071885}}$$

Ejemplo 3

Resolver $\log_6 (x + 3)(x - 2) = 1$

Solución

Esta ecuación es equivalente a

$$6^1 = (x + 3)(x - 2)$$

ó sea

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} \quad x' = 3 \quad x'' = -4$$

la raíz útil es $x = 3$

Ejemplo 4

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3^x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución

De la 2ª ecuación deducimos que

$$y = 2x - 3$$

lo que reemplazamos en la 1ª

$$3^x + (2x - 3) = 2 = 3^{3x - 3}$$

de allí que

$$x = \frac{1}{3} \frac{\log 2}{\log 3} = 1$$

$$y = \frac{-2}{3} \frac{\log 2}{\log 3} = 1$$

1.15.- Progresiones

Progresión es una secuencia de números cada uno de los cuales puede obtenerse del que le precede mediante la aplicación de alguna ley determinada. Por ejemplo la secuencia:

2 4 6 8 10 12

es una progresión muy sencilla ya que cada término se obtiene aumentando en 2 unidades el término anterior.

Por ejemplo la secuencia

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512

es una secuencia tal que cada término se obtiene duplicando el término anterior a él.

Por ejemplo la secuencia

x 2x² 3x³ 4x⁴ 5x⁵

es una secuencia obtenida de modo que el coeficiente número se obtiene aumentando en 1 unidad el coeficiente del término anterior y el coeficiente literal amplificándolo por "x" el del término precedente.

De las secuencias que se usan con mayor frecuencia conviene discutir las 2 siguientes.

Progresión aritmética

que es una secuencia de números relacionados de tal manera que cada uno, después del primero, se puede obtener del que le precede sumando a este una cantidad fija llamada "diferencia común".

Progresión geométrica

que es una secuencia de números relacionados de tal manera que cada uno, después del primero, se puede obtener del que le precede multiplicando éste por una cantidad fija, llamada "razón" de la progresión.

Pasemos por lo tanto a considerar con un poco de mayor detalle estos dos tipos.

Término general y suma de términos de una progresión aritmética (P.A.)

Si "a" es el primer término de una P.A. y "d" es la diferencia común los términos de la progresión son

Orden	1	2	3	4	5	n
Término	a	a+d	a+2d	a+3d	a+4d	a + (n - 1)d

observándose entonces que el término de orden "n" se obtiene sumando al término inicial "a", un número (n - 1) de veces la diferencia constante "d".

La suma de términos de una progresión aritmética se obtiene escribiendo la serie ordenada en su orden natural y en sentido inverso, o sea así

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots + a + (n-1)d$$

$$S = a + (n-1)d + a + (n-2)d + a + (n-3)d + \dots + a$$

si se suman ambos miembros se tiene

$$2S = 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + \dots + 2a + (n-1)d$$

notando por lo tanto que el segundo miembro aparece "n" veces la cantidad 2a + (n-1)d y por lo tanto

$$2S = n a + n(n-1)d$$

$$S = na + n(n-1)d/2$$

o sea que "la suma S de los "n" términos de una P.A. cuyo primer término es "a" y cuya diferencia constante "d" es igual a "n" veces el primer término más n(n-1)/2 veces la diferencia común".

También ya que el último término de la P.A. es

$$l = a + (n-1)d$$

la suma S es igual a "n" veces la semi-suma de los términos extremos de la serie"

$$S = (a + l)n/2$$

Ejemplo 1

Determinar la suma de los "n" primeros números impares de la escala natural de números.

Solución

La serie en referencia tiene la suma

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots$$

es decir se trata de una P.A. en la que $a = 1$; $d = 2$, por lo tanto la suma de los n primeros números es

$$S = n(1) + n(n-1) \frac{2}{2} = n + n(n-1) = \underline{n^2}$$

o sea la suma da un cuadrado perfecto. Esta propiedad de los números impares se usa en la extracción de raíz cuadrada con una máquina de cálculo.

Ejemplo 2

Determinar los valores de "a" y "d" en una P.A. para la cual

$$y_2 = 20 \quad ; \quad y_6 = 0$$

Solución

Las condiciones del problema son

$\begin{aligned} a + d &= 20 \\ a + 5d &= 0 \end{aligned}$
--

restando miembro a miembro obtenemos

$$4d = 20 \quad \therefore \quad d = \underline{-5}$$

y de allí que

$$a = \underline{25}$$

Ejemplo 3

Determinar la suma de los términos de una P.A. para la cual se tiene

$$a = 6 \quad ; \quad l = 9 \quad ; \quad n = 6$$

Solución

De acuerdo la relación

$$S' = (a + b) \frac{n}{2}$$

Tenemos

$$S = (6 + 9) \frac{6}{2} = \underline{45}$$

Ejemplo 4

Determinar la suma de los términos de P.A. para la cual

$$y_2 = 5 ; d = 2 ; n = 6$$

Solución

El primer término es "a" y el término E es a + 5d de allí que la suma "S" es igual a

$$S = \frac{[a + (a+5d)] \cdot 6}{2} = 3(2a + 5d) = 3[2(a+d) + 3d] = 3(2 \times 5 + 3 \times 2) = 48$$

Ejemplo 5

Determinar el primer término el número "n" de ellos para una P.A. en la que se tiene

$$l = 17 ; d = 4 ; S = 45$$

Solución

Las ecuaciones de condición son

$$\begin{array}{l} a + 4(n-1) = 17 \\ na + 2n(n-1) = 45 \end{array}$$

que lleva a la ecuación de 2º grado en "n"

$$2n^2 - 19n + 45 = 0$$

cuya solución útil es n = 5, con lo cual a = 1

Interpolación de medios aritméticos

Conocidos el primer y último término de una P.A. a veces resulta de interés conocer los términos intermedios. Los términos que quedan comprendidos entre estos valores extremos se denominan "medios aritméticos". Caso corriente de este tipo de problema lo constituye la determinación de la población para los años de un período intercensal.

Si

y_1 = primer término de la P.A.

y_n = último término de la P.A.

entonces la "diferencia común" vale:

$$d = (y_n - y_1) / (m + 1)$$

esto es, la diferencia entre los valores extremos dividido por el número m de términos por interpolar más 1. Obviamente que

$$n = m + 2$$

siendo " n " el total de términos de la P.A. obtenida luego de introducir los " m " medios aritméticos.

Ejemplo 1

Colóquense cuatro medios aritméticos entre 3 y 13.

Solución

La diferencia común es igual a

$$d = \frac{13 - 3}{5} = \underline{2}$$

de modo que los medios aritméticos son: 5, 7, 9, 11.

Término general y suma de términos de una Progresión Geométrica. (P.G.)

Si

a es el primer término de una P.G.

r la razón de la progresión

la secuencia tiene los siguientes términos

Orden	1	2	3	4	5	6	n
Término	a	ar	ar^2	ar^3	ar^4	ar^5	ar^{n-1}

notándose por lo tanto que el término de orden " j " es igual al primer término multiplicado por la potencia $(j-1)$ de la razón " r ", o sea en símbolos

$$y_j = a \cdot r^{j-1}$$

Para determinar la suma de los "n" primeros términos de una P.G. tenemos

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

y restando miembro a miembro para

$$S - rS = a - ar^n$$

con lo cual

$$S = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Ejemplo 1

Determinar el primer término y la razón de una P.G. para la cual

$$y_3 = 3 ; y_4 = -1$$

Solución

Las ecuaciones de condición son

$$3 = ar^2$$

$$-1 = ar^3$$

dividiendo miembro a miembro obtenemos $r = -1/3$, con lo cual

$$a = 27$$

Ejemplo 2

Determinar el último término de una P.G. para la cual $a = 3$;
 $r = -2$; $n = 4$

Solución

El término de orden n es

$$l = ar^{n-1}$$

$$= 3(-2)^3 = -24$$

Ejemplo 3

Determinar la suma de los términos de una P.G. para la cual se conoce $a = 18$; $r = 1/2$; $y_n = 9/8$.

Solución

La suma de los "n" primeros términos de una P.G. es

$$S = \frac{a r^n - 1}{r - 1} = \frac{a r^{n-1} (r) - a}{r - 1} = \frac{r y_n - a}{r - 1} =$$
$$= \frac{(9/8)(1/2) - 18}{1/2 - 1} = \frac{119}{811}$$

Ejemplo 3.

En un cultivo de bacterias, el número de éstas se duplica cada 2 horas. Si en un comienzo el cultivo tiene n bacterias, cuántas habrá después de 24 horas?

Solución

Se puede elevar un registro de esta duplicación así

Tiempo (en horas)	0	2	4	6	8	...	2j
No. bacterias	n	2n	4n	8n	16n		2 ^j n

con lo cual se colige que al cabo de (2j) horas, la población de bacterias será de 2^j n. si hacemos j = 12, se tiene 2¹² n = 4096 n

Ejemplo 4

Cuántos ancestros tiene una persona en las siete generaciones inmediatas que le preceden?

Solución

Se trata de una P.G. en que r = 2. El número de ancestros por parte de la madre es igual a la suma de una P.G. con a=1, n=7, o sea 2⁷ - 1 = 127. Por parte del padre hay otro número igual, de modo que el total de ancestros es 2(127) = 254.

Ejemplo 5

Demuéstrese que los productos de los términos correspondientes de 2 progresiones geométricas, forman también una P.G. Igual cosa sucede para el cociente de esos términos.

Solución

Sean

$$\begin{array}{cccccc} a & ar & ar^2 & ar^3 & \dots & ar^{n-1} \\ b & bs & bs^2 & bs^3 & \dots & bs^{n-1} \end{array}$$

las 2 P.G.

La progresión producto tiene los siguientes términos

$$ab \quad ab(rs) \quad ab(rs)^2 \quad \dots \quad (ab)(rs)^{n-1}$$

es decir una P.G. de primer término (ab) y de razón (rs) .

Interpolación de medios geométricos

Conocidos el primero y último de una P.G. se puede determinar los términos restantes.

En efecto si

y_1 , primer término de la P.G.

y_n , último término de la P.G.

entonces la razón "r" está dada por la relación

$$r = \frac{y_n}{y_1}^{\frac{1}{n-1}}$$

y, por lo tanto, los medios geométricos de la P.G. son

$$y_1 r \quad y_1 r^2 \quad y_1 r^3 \quad y_1 r^4 \quad \dots \quad y_1 r^{n-2}$$

Este proceso de interpolación se denominará "interpolación de medios geométricos", y en general se resuelve recurriendo al uso de los logaritmos para encontrar la raíz $(m+1)$ del cociente y_n/y_1 . Un caso que ocurre con bastante frecuencia es la determinación de la población de un área para los años de un período intercensal.

Ejemplo 1

Encontrar cinco medios aritméticos entre 3 y 192.

Solución

La P.G. tendrá 7 términos luego que se hayan interpolado los 5 medios geométricos. Por lo tanto, la razón r de la progresión es igual a

$$r = \left(\frac{192}{3}\right)^{1/6} = (64)^{1/6} = \underline{2}$$

y los 5 medios geométricos pedidos son

$$6 \quad 12 \quad 24 \quad 48 \quad 96$$

Ejemplo 2

Interpolar 13 medios aritméticos entre los términos 102 y 453.

Solución

El número $n = 15$, de allí que

$$r = \left(\frac{453}{102}\right)^{1/14}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 1/14 (\log 453 - \log 102) = (2.6560982 - 2.0086002)/14 = \\ &= 0.046/2499 \end{aligned}$$

$$\therefore r = \underline{\underline{1.11237}}$$

con lo cual se puede calcular los medios geométricos pedidos.

Ejemplo 3

Interpolar 10 medios aritméticos entre los términos 864 y 236.

Solución

El número $n = 12$, de allí que

$$r = \left(\frac{236}{864}\right)^{1/11}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 1/11 (\log 236 - \log 864) = (2.3729120 - 2.9365137)/11 = \\ &= \underline{\underline{-1.948/7635}} \end{aligned}$$

$$\therefore r = \underline{\underline{0.88872}}$$

con lo cual se puede calcular los medios geométricos pedidos.

Serie geométrica

Es una secuencia infinita de términos en P.G. con una razón "r" comprendida entre -1 y +1. De esta manera cada término de la serie es menor (en valor absoluto) que el término que le precede. Es de interés en este tipo de serie la suma de todos los términos de la serie, la que es igual a

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

esto es "la suma S de los infinitos términos de una serie geométrica es igual al primer término de la serie dividido por (1-r)".

Ejemplo 1

Si una pelota rebota $3/5$ de la distancia recorrida en su caída, qué distancia total recorrerá antes de alcanzar su estado de reposo, si se la ha dejado caer de una altura de 10 mts.?

Solución

Aplicamos la fórmula de la suma de términos para una serie geométrica

$$S = \frac{10}{1 - 3/5} = \underline{\underline{25}} \text{ mts.}$$

Ejemplo 2

Un comerciante tiene almacenado 500 Kg. de un producto que semanalmente pierde la mitad de peso de la semana anterior. Si en la primera semana perdió 20 Kg. de peso cuando el Kg. del producto era de \$ 200.-. Puede compensar esta pérdida vendiendo su producto a \$ 240.- el Kg?

Solución

La pérdida total de peso es

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{20}{1 - 1/2} = 40 \text{ Kg}$$

Ejemplo 1

Desarrollar el binomio

$$(2x - a)^7$$

Solución

$$\begin{aligned} (2x-a)^7 &= (2x)^7 + 7(2x)^6 a + \frac{7 \cdot 6}{2!} (2x)^5 a^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} (2x)^4 a^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} (2x)^3 a^4 \\ &+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} (2x)^2 a^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} (2x) a^6 + a^7 \\ &= 128 x^7 + 448 ax^6 + 672a^2 x^5 + 560a^3 x^4 + 280a^4 x^3 + 84a^5 x^2 + 14ax^6 + a^7 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Desarrollar el binomio

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$$

Solución

Se tiene que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^7 = x^7 + 7x^5 + \frac{21}{x^3} + 35x + \frac{35}{x} + \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^7}$$

Ejemplo 3

Determinar el valor de $(1.03)^5$.

Solución

Se tiene

$$\begin{aligned} (1.03)^5 &= (1+0.03)^5 = 1 + 5(0.03) + 10(0.03)^2 + 10(0.03)^3 + 5(0.03)^4 + (0.03)^5 \\ &= 1 + 0.15 + 0.009 + 0.00027 + 0.00000405 + 0.000000243 = 1.159274 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Determinar el valor aproximado de $\sqrt[5]{245}$

Solución

Se tiene que

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{245} &= (243+2)^{\frac{1}{5}} = (243)^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}(243)^{-\frac{4}{5}}(2) + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)}{2!}(243)^{-\frac{9}{5}}(2)^2 + \dots \\ &= 3 + \frac{2}{405} - \frac{16}{984150} + \dots \\ &= 3 + 0.00494 - 0.00002 = 3.00492 \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Determinar el valor aproximado de la raíz cuadrada de 5

Solución

Se tiene que

$$\begin{aligned}
(4+1)^{\frac{1}{2}} &= 4^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\binom{1}{2}} 4^{\frac{1}{2}-1} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!} 4^{\frac{1}{2}-2} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} 4^{\frac{1}{2}-3} + \dots \\
&= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots \\
&\Rightarrow 2 + 0.25 - 0.015625 + 0.001953 + \dots \approx \underline{2.23633}
\end{aligned}$$

1.16.- Permutaciones y combinaciones

La demostración de la fórmula del binomio y el desarrollo de diversos problemas entre los cuales juegan un papel importante los problemas del Cálculo de Probabilidades exige el conocimiento de ciertas fórmulas que se refieren ya sea a permutaciones, ya sea a combinaciones de hechos.

Antes de entrar a preocuparnos de definir y encontrar esas diversas fórmulas consideraremos el siguiente principio fundamental:

"Si un primer suceso puede verificarse de m₁ maneras diferentes y si después de haber ocurrido éste, puede verificarse un segundo suceso de m₂ maneras diferentes, entonces los 2 sucesos pueden verificarse en el orden mencionado de m₁ m₂ maneras diferentes".

Este principio puede ampliarse para el caso de "k" sucesos cada uno de los cuales puede suceder de m_j maneras diferentes. Los "k" sucesos pueden verificarse de m₁ m₂ m₃ m_k maneras diferentes.

Por ejemplo la lista de un restaurant indica que 4 entradas, 5 sopas, 6 carnes y 7 postres. De cuántas maneras se puede ordenar una comida consistente de una entrada, una sopa, 2 carnes y un postre?

La resolución de este problema se hace por el principio general.

Permutación

Toda ordenación de un conjunto de "n" elementos se llama "permutación" del conjunto.

Así por ejemplo, si se tiene tres letras A, B y C éstas pueden ordenarse de las siguientes maneras:

Solución

De acuerdo a la fórmula de una combinación tenemos

$$C_8^{50} = \frac{50!}{8! 42!} = \frac{43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \underline{536.878.650}$$

Para la búsqueda más rápida (pero aproximada) hay tablas de los logaritmos de estos coeficientes.

Ejemplo 4

Demostrar que

$$C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$$

y de allí deducir la fórmula del binomio.

Solución

Aceptamos que es cierta la ley para n , o sea, que se tiene

$$(x+a)^n = x^n + C_1^n x^{n-1} a + C_2^n x^{n-2} a^2 + \dots + C_k^n x^{n-k} a^k + \dots + a^n$$

por lo tanto

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a) = x^{n+1} + C_1^n x^n a + C_2^n x^{n-1} a^2 + \dots + C_k^n x^{n-k} a^k + \dots + x^n a + C_1^n x^{n-1} a^2 + \dots + C_{k-1}^n x^{n-k+1} a^k + \dots + a^{n+1}$$

$$\text{de allí} \quad = x^{n+1} + (C_1^n + 1)x^n a + (C_2^n + C_1^n)x^{n-1} a^2 + \dots + (C_k^n + C_{k-1}^n)x^{n-k+1} a^k + \dots + a^{n+1}$$

con lo cual el coeficiente de $x^{n-k+1} a^k$ es igual a

$$C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$$

puesto que

$$C_k^n + C_{k-1}^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} (n-k+1+k)$$

$$= \frac{n! n}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_k^{n+1}$$

con lo cual queda probado la fórmula del binomio.

4
6

7
8
9

10
11
12

13
14
15

16
17

