distribución restringida

albino bocaz

CALCULO DIFERENCIAL

Capítulo II

Serie B, n° 2

CAPITULO II

CALCULO DIFERENCIAL

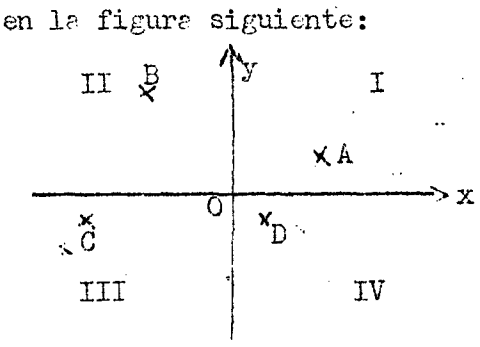
2.1. Coordenadas rectangulares

Cualquier punto de un plano necesita ser ubicado exactamente en él, no solamente para conocer específicamente su ubicación, sino para determinar su posición relativa con respecto a otros puntos del plano.

El plano sobre el cual se encuentran los puntos puede dividirse en 4 sectores mediante 2 líneas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto O, denominado origen del sistema. Cualquier punto del plano puede ser ubicado en él si se conocen sus distancias a cada uno de estos ejes, ejes que reciben el nombre de "ejes de coordenadas".

La distancia de un punto P al eje horizontal se denomina ordenada de P y la distancia al eje vertical abscisa de P.

Esto puede verse en la figura siguiente:



En esta figura hay 4 puntos: A, B, C, D, cuyas coordenadas o distancias a los ejes son (a,b); (-c,d);(-e,-f);(g,-h), notándose, por lo tanto, que para las 4 secciones en que ha quedado dividido el plano se tiene los siguientes signos para las coordenadas de puntos situados en ellos:

Cuadrante	Abscisa	Ordenada
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

De esta manera los ejes reciben los nombres de:

- el eje horizontal OX: eje de las abscisas
- el eje vertical OY: eje de las ordenadas

considerándose que éstas coordenadas son positivas si se toman desde el origen hacia el sentido que indica la flecha colocada en uno de los extremos de los ejes y negativas si se toman en sentido contrario. De esta manera, los ejes de coordenadas son "ejes dirigidos" en el sentido que indica la flecha.

2.2. Funciones y gráficos

Una fórmula, y también una ecuación, establecen las relaciones que existen entre combinaciones de letras y números. Algunas de estas letras pueden representar valores que no cambian nunca, pueden emplearse para cantidades que no cambian durante un cierto problema, y otras más, pueden tener valores que varían dentro de un cierto intervalo.

Por ejemplo, si la población de cierto país en 1940 era 5.125.000 habitantes y en 1950 de 6.040.000, si la población en ese período de tiempo y para el futuro crece según una ley geométrica, la población en un instante "t" cualquiera estará dada por la relación

$$P_t = 5.125.000 \left(\frac{6040000}{5125000}\right)^{t/10}$$

con origen en el año 1940.

El crecimiento relativo de esta población es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{10} \log \frac{6040000}{5125000}$$

relación en la que aparecen, a la izquierda, 2 cantidades variables

P población en un instante "t" cualquiera

dP/dt velocidad de variación de P

en tanto que los valores de la derecha quedan fijos. De allí, que la cantidad es siempre la misma.

Esto nos lleva a las siguientes definiciones:

Intervalo de una variable

Frecuentemente la investigación se limita a una parte únicamente de la escala de los números. Se puede restringir el campo de la variable de modo que no tome sino valores entre "a" y "b" pudiendo incluirse o no estos valores extremos como valores alcanzables por la variable. Se usa el símbolo (a,b) para indicar el intervalo de variación.

(En inglés se usa el término "range" para intervalo de la amplitud de variación de la variable).

Por ejemplo en la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ que se usa para calcular el volumen de una esfera, cualquiera que sea la esfera considerada, la cantidad π es una constante numérica o absoluta, aproximadamente igual a 3,1416; las cantidades r y V son variables, siendo el campo de variación de estos números todos los números positivos.

Variable

Una variable es un símbolo que representa una cantidad que puede tomar diferentes valores dentro de un intervalo dado.

Constante

Una constante es un símbolo que representa una cantidad que no cambia para el problema considerado.

Puede suceder que la constante no solamente permanezca fija para el problema considerado sino que lo sea para cualquier tipo de problema. En este caso la constante recibe el nombre de "*constante absoluta*" o "*numérica*". Por ejemplo, 2, 5, 7, π, $\sqrt{2}$, e, ...

Las constantes arbitrarias o parámetros son constantes que pueden adquirir un número cualquiera de valores numéricos, pero el valor que toman para un problema determinado permanece invariable para ese problema. Se las designa corrientemente por las primeras letras del alfabeto: a, b, c, ...

Variación continua

Se dice que una variable "x" varía de modo continuo en un intervalo (a,b) cuando partiendo "x" del valor "a" va tomando todos los valores posibles hasta llegar a su valor mayor "b".

Gráfico de una ecuación lineal

Se dice que se ha trazado el gráfico (o locus) de una ecuación de dos variables x e y, cuando se ha dibujado la figura que describen todos los juegos de P de coordenadas (x,y) que satisfacen la ecuación que liga a las dos variables.

Por ejemplo, la ecuación entre las variables x e y

$$3x - 5y = 15$$

da origen a una línea recta bien determinada, o sea, que los puntos de coordenadas (x,y) que satisfacen esta relación están sobre una línea recta.

En general, puede decirse que toda ecuación lineal entre las variables x e y, o sea, una ecuación del tipo

$$Ax + By + C = 0$$

da como gráfico una línea recta.

Para el trazado de una línea recta bastará encontrar ciertos valores particulares (x,y) que satisfagan la ecuación, resultando ser muy fáciles de calcular aquellos puntos en que la recta corta los ejes de coordenadas.

De ese modo para encontrar la intersección con el eje OX bastará hacer y=0 en la ecuación , y para encontrar la intersección sobre el eje OY bastará hacer x=0, y de allí calcular el valor correspondiente de y.

Por ejemplo, para el gráfico de la ecuación

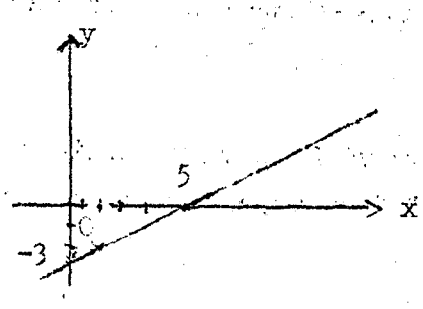
$$3x - 5y = 15$$

determinamos las intersecciones sobre los ejes de coordenadas.

Para x=0 se tiene y=-3

Para y=0 se tiene x= 5

de modo que la recta corta al eje OX a la distancia 5 desde el origen y al eje OY a la distancia -3. Esta situación se indica en el gráfico siguiente:



Una ecuación de una curva en un plano xy es una ecuación en x e y, cuyo gráfico es la curva dada. Si dos ecuaciones tienen el mismo gráfico, en general las ecuaciones difieren solamente en características no esenciales desde nuestro punto de vista. Por lo tanto, una curva puede estar dada en un número infinito de relaciones diferentes; nos refereriremos a una cualquiera de todas ellas como ecuación de la curva.

Por ejemplo la ecuación $3x - 5y = 15$ es la ecuación de la línea recta AB. AB también es el gráfico de la ecuación $6x - 10y = 30$, ya que las ecuaciones anteriores tienen las mismas soluciones. De esa manera, $6x - 10y = 30$ es también una ecuación para AB.

En la relación

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{10}\log\frac{6040000}{5125000}$$

podemos ver que si P toma un valor determinado, el valor de dP/dt queda automáticamente determinado con las cifras decimales que se desee. Tal situación se describe matemáticamente mediante la proposición "dP/dt es una función de P".

Definición

Una variable es función de otra, si por lo menos uno de los valores de la primera queda determinado cada vez que se asigne un valor a la segunda.

La variable a la que se asignan diferentes valores recibe el nombre de "variable independiente" (puede denominarse argumento) y la otra el de variable dependiente.

Es frecuente que las funciones se escriban sin mostrar explícitamente la variable dependiente. Por ejemplo, la expresión $(x^2 - 2x - 2)$ es una variable ya que su valor cambia cuando cambia x. Además, su valor está determinado para cada número definido que se asigne a x. Por lo tanto, es una función de x. La proposición "función de x" se representa corrientemente por el símbolo f(x) y que se lee f de x. La letra encerrada en el paréntesis es la variable independiente de la función. Así en el caso recién señalado:

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 2$$

teniéndose, entonces también:

$$f(z) = z^2 - 2z - 2$$

$$f(3) = 3^2 - 2(3) - 2 \quad V$$

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} - 2(\frac{1}{x}) - 2$$

Si en el mismo ejemplo se tiene otra función tal como $(3x^2 - 1)$ se la designa por otra función como por ejemplo $g(x)$ o cualquier otra letra diferente de f. Puede usarse la misma letra "f" y recurrir al uso de subíndices, como ser:

$$f_1(x) = x^2 - 2x - 2; \qquad f_2 = 3x^2 - 1$$

Este procedimiento tiene la ventaja de indicarnos con cuántas funciones diferentes estamos trabajando, mucho más fácilmente que el primer procedimiento.

Ejemplo 1

Si $f(x) = x(x-1)(x+6)(x-1/2)(x+5/4)$

encontrar el valor de $f(0)$; $f(1)$; $f(-6)$; $f(1/2)$; $f(-5/4)$

Solución:

Cada uno de estos valores anulan algún factor del producto de esos 5 factores. Por lo tanto, para los valores señalados la función toma el valor 0.

Ejemplo

Si $f(m_1) = \dfrac{m_1 - 1}{m_1 + 1}$, demostrar que

$$\frac{f(m_1) - f(m_2)}{1 + f(m_1)\, f(m_2)} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Solución:

Dada la condición tenemos que

$$f(m_1) - f(m_2) = \frac{m_1 - 1}{m_1 + 1} - \frac{m_2 - 1}{m_2 + 1} = \frac{2(m_1 - m_2)}{(m_1+1)(m_2+1)}$$

$$1 + f(m_1)\, f(m_2) = 1 + \frac{(m_1 - 1)(m_2 - 1)}{(m_1 + 1)(m_2 + 1)} = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1) + (m_1 - 1)(m_2 - 1)}{(m_1 + 1)(m_2 + 1)} =$$

$$= \frac{2(1 + m_1 m_2)}{(m_1 + 1)(m_2 + m_1)}$$

y, por lo tanto

$$\frac{f(m_1) - f(m_2)}{1 + f(m_1)\, f(m_2)} = \frac{2(m_1 - m_2)}{2(1 + m_1 m_2)} = \underline{\underline{\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}}$$

Ejemplo 3

Si $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$, demostrar que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

Solución:

Se tiene que

$$f(x) + f(y) = \log \frac{1 - x}{1 + x} + \log \frac{1 - y}{1 + y} = \log \frac{(1 - x)(1 - y)}{(1 + x)(1 + y)}$$

pero

$$f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right) = \log \frac{1 - \frac{x+y}{1+xy}}{1 + \frac{x+y}{1+xy}} = \log \frac{1 + xy - (x+y)}{1 + xy + (x+y)} = \log \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}$$

con lo cual queda demostrada la relación.

Funciones de 2 o más variables

En Geometría se conoce el teorema según el cual el área S de un triangulo es igual al semiproducto de la base "b" por la altura "h". Un ejemplo de este tipo puede ilustrar la siguiente definición.

Definición

Si una variable "w" está relacionada con otras x, y, z, ... de tal modo que al asignar valores definidos a x, y, z,... se obtiene por lo menos un valor de "w"; se dice entonces que "w" es función de las variables x, y, z....

Esta relación se expresa simbólicamente por medio de

$$w = f(x,y,z,\ldots)$$

Ejemplo 1

La función

$$m(x,y,z)$$

puede representar el número de matrimonios que tienen z hijos, siendo x la edad de la mujer e y la edad del cónyuge.

Ejemplo 2

La función

$$M(x,z)$$

puede representar el número de matrimonios que tienen "z" hijos o más y donde la cónyuge tiene x años.

2.3. Representación gráfica de funciones

El modo según el cual una función varía de acuerdo con los cambios de la variable independiente, es un tema importante no solamente en el Algebra sino en el Cálculo Infinitesimal. Este comportamiento puede estudiarse por medio de la representación gráfica de los valores correspondientes de la función "y" y de la variable independiente "x" para el caso en que se tratara de una función de 2 variables.

La representación gráfica de las funciones se puede efectuar por medio del sistema de ubicación de puntos ya indicado anteriormente. Este sistema de representación de puntos en el plano fué ideado por René Descartes (1596-1650) y expuesto por primera vez en su libro titulado "La Geometríe" que fué publicado en 1637. De allí que este sistema de representación se le denomine en su honor, sistema cartesiano.

Tenida la función que relaciona las variables en consideración, o sea la ecuación de la forma

$$y = f(x)$$

bastará determinar un juego suficiente de valores (x,y) que satisfagan esta ecuación dándose para ello valores de "x" convenientemente espaciados para

evitar perder idea sobre la variación continua de la función.

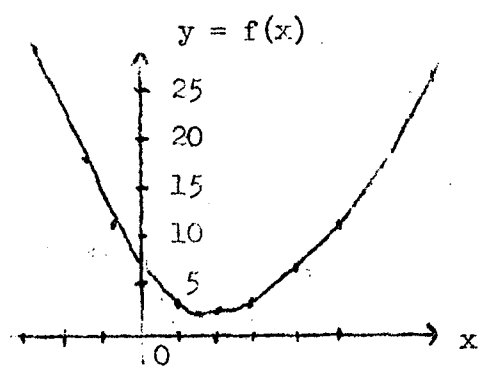
Este juego de valores puede presentarse como en una tabla estadística de dos columnas en la forma siguiente:

x	f(x)
- 3	27
- 2	18
- 1	11
0	6
1	3
2	2
3	3
4	6
5	11

tabla que corresponde a la función

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

Esta serie de puntos se unen por una línea continua, obteniéndose de esta manera el gráfico de la función f(x)



Obviamente que este trazado no será suficiente para conocer el comportamiento de la función en todo su campo de variación; ya que de este último tema se preocupa precisamente el Cálculo Diferencial.

De las relaciones del tipo

$$y = f(x)$$

interesan esencialmente aquellas que se denominan "funciones algebraicas", ya que en ellas la variable "x" aparece solamente en forma potencial. De esta forma potencial, la forma

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

es de mucha importancia tanto por su sencillez como porque sirve para describir variaciones que alcanzan un valor máximo o un valor mínimo. Este asunto se verá con mayor detalle más adelante. La curva se denomina "parábola de 2o. grado".

El gráfico de la función se hace tal como se indicó anteriormente, en cuyo caso se dibujó una parábola de 2o. grado que pasa por un valor mínimo.

- Funciones no definidas por fórmulas

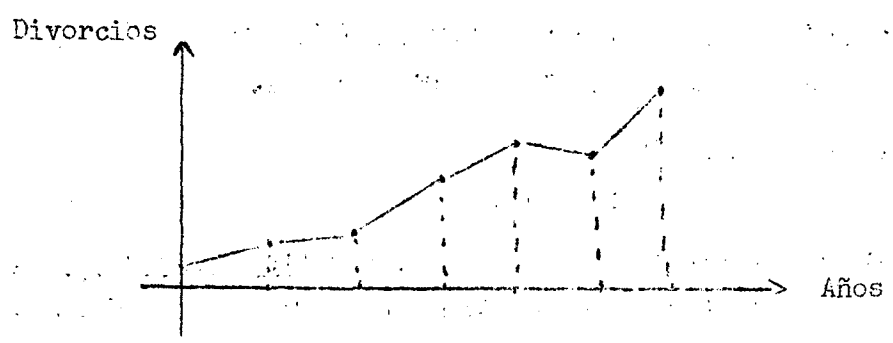
En las matemáticas más elementales se encuentran y dibujan funciones que no están definidas por fórmulas. El caso típico lo constituye una función de la que se dispone información presentada bajo la forma de una tabla de 2 columnas, una para la variable "x"y otra para la variable "y" (series estadísticas, por ejemplo).

Para representar tales funciones se toman los valores "x" como abscisas y los valores "y" como ordenadas y cada línea de la tabla da origen a un punto en el plano. La unión de estos puntos por una curva suave o por una línea de segmentos se hace uniendo los puntos consecutivos, en orden de la magnitud creciente de las abscisas. La decisión acerca de si unir los puntos por una curva suave o dibujar solamente una poligonal, depende del uso que se le dé al gráfico.

Ejemplo 1

Variación del número de divorcios (en o/oo por matrimonios) en los EE.UU. desde 1890 a 1949, según la siguiente tabla:

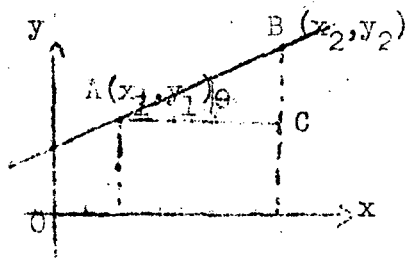
Año	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1949
Divorcios	62	79	88	134	174	165	244



2.4. Inclinación de una línea recta

Si se tiene -en el plano xOy- una línea recta que no sea vertical, la pendiente o inclinación de la línea es por definición la razón de cambio de la ordenada con respecto a la abscisa.

De acuerdo al gráfico



Si AB es una línea recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ tiene una inclinación "m" igual a

$$m = tg\,\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

indicando el signo de "m" si el ángulo θ es mayor o menor que 90°.

Ejemplo 1

Determinar la inclinación de la línea recta que pasa por los puntos $(\overset{x_1}{4}, \overset{y_1}{5})$; $(\overset{x_2}{10}, \overset{y_2}{8})$

Solución:

La tangente del ángulo de inclinación es igual a

$$m = tg\,\theta = \frac{8 - 5}{10 - 4} = 3/6 = 0{,}50$$

$$\underline{\theta = 26^\circ\ 34'}$$

Ejemplo 2

Determinar la inclinación de la línea recta definida por la ecuación

$$3x - 5y + 6 = 0$$

Solución:

La ecuación de la línea puede escribirse así

$$5y = 3x + 6$$

o sea que

$$y = 3/5x + 6/5$$

el coeficiente de (x) nos da el valor de m buscado.

De esa manera tenemos

$$m = tg\,\theta = 3/5 = 0,60$$

$$\theta = \underline{30^{\circ}\ 58'}$$

Para el caso de determinación de inclinaciones en funciones f(x) o de más variables se hace necesario introducir otras ideas, las que nos llevan al tema específico del Cálculo Diferencial.

2.5. Teoría de los límites

Este será el primer tema propiamente del Cálculo Diferencial que consideraremos.

- Definición de límite

" Si una variable "v" toma sucesivamente una serie de valores que la van acercando más y más a un cierto valor constante bien definido "l", de modo que la diferencia absoluta entre "v" y "l" se puede hacer tan pequeña como sea posible, se dice que "v"tiende hacia el límite "l" o que converge hacia el límite "l", lo que se escribe simbólicamente

$$\lim\ v = l \quad o \quad v \longrightarrow l$$

En Geometría, por ejemplo, se presentan casos de esta naturaleza, entre los cuales podemos citar:

a) Cuando el número de lados de un polígono regular inscrito en un círculo dado aumenta indefinidamente, el límite del área del polígono es el área del círculo. En este caso, la variable es siempre inferior a su límite.

b) De la misma manera, el límite del área de un polígono regular circunscrito es también el área del círculo, pero aquí la variable es siempre mayor que el límite.

En Algebra el caso de la suma de términos de una serie geométrica es otro caso de límites.

En todos estos ejemplos la variable no alcanza nunca su límite. Pero esta situación no es siempre así, puesto que de acuerdo a la definición de límite de una variable, es claro que el principio esencial de esta definición es simplemente que el valor numérico (o absoluto) de la diferencia entre la variable y su límite llegue y quede finalmente por debajo de un número positivo cualquiera que elijamos, tan pequeño como sea posible.

-Infinitamente pequeño

Es una variable "v" cuyo límite es cero, es decir si se tiene que

$$\lim v = 0 \quad ó \quad v \longrightarrow 0$$

se dice que "v" es un infinitamente pequeño, esto equivale a decir que los valores numéricos sucesivos de "v" llegan a ser y quedar finalmente por debajo de todo número positivo, tan pequeño como sea posible. Se dice que tal variable llega a ser infinitamente pequeña o que desaparece finalmente.

Si lim v = 1, entonces, la cantidad (v-1) es un infinitamente pequeño.

Recíprocamente, si la diferencia entre una variable y una constante es un infinitamente pequeño, la variable tiende hacia esa constante como límite.

Puede suceder lo contrario, es decir, que la variable "v" se mueva de manera que al final quede por encima de todo número positivo elegido, tan grande como sea posible, se dice que "v crece sin límite" y se escribe

$$\lim v = +\infty \quad ó \quad v \longrightarrow +\infty$$

Si la variable "v" llega a ser y quedar finalmente algebraicamente inferior a todo número negativo elegido, se dice que v decrece sin límite, y se escribe

$$\lim v = -\infty \quad ó \quad v \longrightarrow -\infty$$

El infinito (∞) no es ningún número. Es un concepto que sirve únicamente para caracterizar un modo particular de variación de una variable en virtud de la cual esta variable crece o decrece indefinidamente.

- Límite de una función

Si f(x) es una función de una variable "x" y si la variable "x" tiende a un cierto límite "a" y para ese valor, el valor de la función f(x) es A, se dice entonces que el límite de f(x) cuando x tiende a "a" de una manera cualquiera es A. En símbolos tenemos:

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = A$$

- Funciones continuas y discontinuas

Se dice que una función f(x) es contínua para x = a, si el límite de la función cuando x ⟶ a, en cualquiera forma, es un valor bien fijo y determinado f(a).

La función f(x) es discontínua para x = a si ese valor límite no existe. Por ejemplo, puede tenerse que

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \infty$$

en ese caso la función es discontinua para x = a.

Si en un intervalo (a,b) la función f(x) toma valores bien determinados, para cualquier valor de x comprendido en ese intervalo, se dice entonces que la función f(x) es continua en ese intervalo.

- Teoremas fundamentales sobre límites

El uso de ciertos teoremas sobre límites simplifica bastante la determinación del límite de una función. Estos teoremas son los siguientes:

Teorema 1

El límite de la suma algebraica de un número finito de variables es igual a la suma algabraica de los límites de las diferentes variables.

Teorma 2

El límite del producto de un número finito de variables es igual al producto de los límites de las diferentes variables.

Teorema 3

El límite del cuociente de 2 variables es igual al cuociente de los límites de las variables separadas, con tal que el denominador no sea nulo.

Estos teoremas se demuestran fácilmente si se recurre a las siguientes propiedades de los infinitamente pequeños:

a) la suma de infinitamente pequeños es igualmente un infinitamente pequeño
b) el producto de una constante "c" por un infinitamente pequeño es un infinitamente pequeño.
c) el producto de infinitamente pequeños es un infinitamente pequeño.
d) si "v" es una variable que tiende a "l" como límite, $(l \neq 0)$, el cuociente de un infinitamente pequeño y "v" es también un infinitamente pequeño.

El número "e":- Este es uno de los números de mayor uso en el Análisis infinitesimal. Por definición, el número "e" es el límite al cual tiende la función

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

cuando $x \longrightarrow 0$

La determinación de este valor se puede hacer en base del teorema del binomio. Para ello se desarrolla ese binomio, obteniéndose

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}(x)+\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-1)\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{x}-2)\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{x}-2)(\frac{1}{x}-3)\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1-x}{2!} + \frac{(1-x)(1-2x)}{3!} + \frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)}{4!} + \ldots\ldots$$

expresión que pasa de el límite cuando $x \longrightarrow 0$ nos dá

$$\lim_{x \longrightarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots\ldots\ \infty$$

Podemos calcular un valor aproximado de "e" usando los 11 primeros términos

1+1+0,5+0,16666667+0,04166667+0,00833333+0,00138889+0,00019841+0,00002480
+0,00000276+0,00000028 = 2.71828181 ,

valor exacto hasta la 7ª cifra decimal.

El valor "e" con 15 cifras decimales es el siguiente

2.71828 18284 59045 .....

2.6.- Derivación

Vamos a estudiar ahora el cambio que experimenta una función f(x) para cambios que experimenta la variable "x". Las variaciones que interesarán serán aquellas que se refieran a cambios infinitamente pequeños en la variable (Δx como los designaremos) y su relación con el cambio infinitamente pequeño (Δy) que se espera se produzca en la función.

Entenderemos que "Incremento" de una variable" es la diferencia entre los valores numéricos de una variable que pasa de un valor a otro. De esta manera el incremento puede ser negativo si el valor final de la variable es menor que el anterior.

Usaremos la letra Δ para indicar incremento, pese a que este símbolo también se usa más adelante en los problemas sobre "Diferencias Finitas". Pero en el caso que nos preocupa, éstos serán relativamente pequeños y en el límite los haremos 0.

Si x sufre un incremento Δx, pasará del valor x al valor $x+\Delta x$ lo que contribuirá a que la función f(x) sufra un incremento $\Delta f(x)$. De esta manera tenemos

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Por ejemplo consideremos la función

$$y = x^3$$

si la variable "x" sufre un incremento Δx, la variable dependiente "y" experimentará un incremento Δy, teniéndose

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2.(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

que nos permite expresar el incremento Δy en función del incremento Δx:

$$\Delta y = 3x^2.(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Ya que el incremento (Δy) depende de la magnitud del incremento sufrido por x, y dado que en general interesará conocer la variación de la función para incrementos infinitamente pequeños de la variable "x", es que se expresa el incremento Δy en relación al incremento de la variable independiente. Para el caso recién indicado tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x.(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

Esta relación nos indica que la razón $\Delta y/\Delta x$ está representada por una parábola de 2° grado.

Estos nos lleva a la definición de derivada de la función de una variable.

"La derivada de una función es el límite, cuando existe, de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este último incremento tiende a cero".

En símbolos se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable, o que tiene derivada

La búsqueda de la derivada de una función se llama "derivación"(⊕). Esta determinación puede hacerse incrementando la variable "x" en Δx y reemplazando en la función $f(x)$ este nuevo valor, llegándose entonces al valor $f(x + \Delta x)$. Una vez que se ha obtenido el valor $f(x + \Delta x)$ se resta del valor inicial $f(x)$ y esta diferencia se divide por el incremento Δx. Se busca el límite de la razón obtenida lo que constituye el valor de la derivada de la función

Ejemplo 1

Determinar la derivada de la función

$$y = (a + bx)/x^2$$

Solución

La función puede escribirse

$$y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} = ax^{-2} + bx^{-1}$$

de este modo se tendrá

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^{-2} + b(x + \Delta x)^{-1}$$

y desarrollando esos binomios de exponentes negativos

$$y + \Delta y = \frac{a}{x^2}\left[1 - 2\frac{\Delta x}{x} + \frac{2.3}{2!}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \ldots\right] + \frac{b}{x}\left[1 - \frac{\Delta x}{x} \quad \frac{1.2}{2!}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 \ldots\right]$$

(⊕) El termino usado en inglés es "differentialin"

lo que nos da para el incremento (Δy)

$$\Delta y = -\left(\frac{2a}{x^3} + \frac{b}{x^2}\right) \Delta x + G(\Delta x)^2$$

siendo G una función de $\underline{x}$ y $\underline{\Delta x}$
que luego de dividir por el incremento Δx, la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2} + G \ \Delta x$$

que cuando los incrementos (Δy) y (Δx) tienden a 0,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{-\frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2}}$$

la derivada de la función.

<u>Ejemplo 2</u>

Determinar la derivada de la función

$$y = \frac{x^2}{1 + x}$$

<u>Solución</u>

Tenemos que

$$y + \Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2}{1+x + \Delta x} = \frac{x^2}{1+x} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^2}{1 + \frac{\Delta x}{1+x}}$$

lo que se puede escribir luego de desarrollar los binomios

$$y+\Delta y = y \left[1+2\frac{\Delta x}{x} + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\right] \left[1 - \frac{\Delta x}{1+x} + \left(\frac{\Delta x}{1+x}\right)^2 + \ldots\right] = y \left[1+\frac{2+x}{x(1+x)}\Delta x+\alpha(\Delta x)^2+\beta(\Delta x)^3+\right]$$

con lo cual

$$\Delta y = \frac{x(2+x)}{(1+x)^2} \Delta x + \alpha'(\Delta x)^2 + \beta'(\Delta x)^3 + \ldots\ldots$$

que lleva a la siguiente relación para la razón $\Delta y/\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{x(2+x)}{(1+x)^2} + \alpha' (\Delta x) + \beta'(\Delta x)^2 + \ldots\ldots$$

que al pasar al límite nos da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2+x)}{(1+x)^2}$$

En estos ejemplos se ha indicado como calcular el valor de la derivada de una función si se aplica la definición de ese término. En los problemas de la práctica, sin embargo, este método sería demasiado largo y tal vez conduciría a expresiones demasiado difíciles de manejar.

Por esta razón los procesos de derivación se facilitan mediante el uso de las derivadas de ciertas formas básicas a la que se reducen siempre expresiones más complicadas.

La indicación del proceso de derivación puede indicarse por varios símbolos, siendo los más usados los siguientes:

a) Si la función es "y" la derivada se indica por la expresión

$$\frac{dy}{dx}$$

b) Si la función se escribe en la forma f(x), la derivada se escribe así

$$f'(x)$$

indicando la prima que se trata de la primera derivada de la función.

c) Se puede usar el operador de derivación, o sea el operador D que corresponde simbólicamente a la parte

$$\frac{d}{dx}$$

Así por ejemplo la derivada de la expresión

$$a + bx + c\,x^2$$

puede indicarse sencillamente por

$$D(a + bx + cx^2)$$

Derivadas de las formas elementales

Indicaremos 20 fórmulas básicas para la derivación, demostrando algunas de ellas y dejando otras para el lector.

Fórmula 1

"La derivada de una constante "c" es igual a cero".

En símbolos

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

Fórmula 2

"La derivada de la variable independiente con respecto a la misma es igual a la unidad".

En símbolos

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

Fórmula 3

"La derivada de la suma algebraica de funciones de la variable "x" es igual a la suma algebraica de las derivadas de cada una de las funciones"

En símbolos

$$\frac{d(u + v - w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Demostración

Sea "z" la función "suma algebraica de funciones de x". Dando un incremento a x del orden de Δx, las funciones u, v, w se incrementaran en $\Delta u, \Delta v$ Δw con lo cual se tendrá

$$z + \Delta z = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)$$

lo que nos da para el incremento Δz el valor $\Delta z = \Delta u + \Delta v - \Delta w$ que dividido por Δx nos lleva a

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

que al pasar al límite (propiedad de los límites) nos da

$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Fórmula 4

"La derivada de c veces una función "v" es igual a c veces la derivada de la función.

En símbolos

$$\frac{d(cv)}{dx} = c\,\frac{dv}{dx}$$

Fórmula 5

La derivada del producto de 2 variables "u" y "v" funciones de una variable "x" es igual a la suma de los productos de cada variable por la derivada de la otra".

En símbolos

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

Demostración

Sea $y = uv$

el incremento de "y" debido a un incremento de x será igual a

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

y dividiendo por el incremento (Δx) se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

y luego de pasar al límite

se tendrá $$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

con lo que queda demostrada la fórmula.

Fórmula 6

"La derivada de la enésima potencia de una variable "v" que es función de una variable "x" es igual a "n" veces el producto de potencia (n-1) de la variable por la derivada de esa variable con respecto a x".

En símbolos $$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\,\frac{dv}{dx}$$

Demostración

Sea $y = v^n$, entonces al dar un incremento (Δx) a la variable "x" se tendrá

$$y + \Delta y = (v + \Delta v)^n$$

expresión en la que se puede desarrollar el binomio de acuerdo la fórmula de Newton

$$y + \Delta y = v^n + n\,v^{n-1}\,\Delta v + \frac{n(n-1)}{2!}\,v^{n-2}\,(\Delta v)^2 + \ldots\ldots$$

que puede llevarse a la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\,v^{n-1}\,\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\,v^{n-2}\,\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2 \Delta x + \ldots\ldots$$

para pasar luego al límite haciendo tender Δx y Δv a 0, se obtiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n\,v^{n-1}\,\frac{dv}{dx}$$

lo que demuestra la fórmula.

Fórmula 7

"La derivada de enésima potencia de la variable independiente respecto ella misma es igual a n veces la potencia (n - 1) de esa variable"

En símbolos

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n\, x^{n-1}$$

Fórmula 8

"La derivada del cuociente de dos variables dependientes "u" y "v" de la variable "x" es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo lo cual se divide por el cuadrado de la función del denominador".

En símbolos

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Demostración

Sea $y = u/v$

entonces tenemos que

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v)^{-1}$$

y desarrollando el binomio elevado a la potencia - 1

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\left[v^{-1} - v^{-2}\,\Delta v - v^{-3}\,(\Delta v)^2 \ldots\ldots\ldots\right]$$

lo que puede llevarse a la relación

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v - \Delta u\,\Delta v}{v^2} + G\,(\Delta v)^2$$

con lo cual se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\,\Delta x}{v^2} + G\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2 \Delta x$$

y pasando al límite cuando $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}\right)/x^2$$

Fórmula 9

"La derivada del logaritmo de una función "v" de "x" en la base "a" es igual al modulo del logaritmo por la derivada de "v" dividida por la función "v"".

En símbolos

$$\frac{d}{dx} (\log_a v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot (\log_a e)$$

Demostración

Sea $y = \log_a v$

entonces tenemos que

$$y + \Delta y = \log_a (v + \Delta v)$$

con lo cual el incremento (Δy) vale

$$\Delta y = \log_a \frac{v + \Delta v}{v} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}} \right]^{\frac{\Delta v}{\Delta x}}$$

lo que permite pasar al límite. En esta expresión la cantidad entre paréntesis cuadrado es igual al número "e" y por lo tanto en el límite se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v} \log_a e^{\frac{dv}{dx}} = \frac{1}{v} \log_e e^{\frac{dv}{dx}} \cdot (\log_a e) = \left(\frac{1}{v} \frac{dv}{dx}\right) \log_a e$$

con lo cual queda demostrada la fórmula.

Fórmula 10

"La derivada del logaritmo natural de "v", función de una variable "x" es igual al recíproco de la variable multiplicado por la derivada de ésta con respecto a x".

En símbolos

$$\frac{d}{dx} (\log_e v) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

Fórmula 11

"La derivada de la potencia v-esima de una constante "a", siendo "v" una función de "x", es igual a esa misma potencia por el logaritmo natural de la base y la derivada del exponente".

En símbolos

$$\frac{d(a^v)}{dx} = a^v \log_e a \frac{dv}{dx}$$

Demostración

Sea $y = a^v$, tomando logaritmos naturales de ambos miembros se tiene

$$\log_e y = v \log_e a$$

quedando reducido el problema al caso anterior. Efectivamente tomando la derivada de ambos miembros, en el primer miembro se tiene que aplicar la fórmula anterior en la que "v" se ha cambiado por "y". En el segundo miembro se tiene que aplicar la fórmula 4, con lo cual

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \log_e a \cdot \frac{dv}{dx}$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = y \log_e a \frac{dv}{dx} = a^v \log_e a \cdot \frac{dv}{dx}$$

con lo que queda demostrada la fórmula.

Fórmula 12

"La derivada de la potencia "v" de la base "e" es igual a esa misma potencia por la derivada de "v".

En símbolos

$$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$$

Este caso es un caso particular del anterior

Fórmula 13

Si "u" y "v" son funciones de una variable independiente "x" la derivada de u^v está dada por la relación

$$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \frac{dv}{dx} \log u$$

Fórmula 14

Si $y = f(v)$ y $v = g(x)$ entonces la derivada de "y" con respecto a "x" es igual

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Demostración

Al incrementar x en la magnitud (Δx) se tiene

$$y + \Delta y = f(v + \Delta v)$$

$$v + \Delta v = g(x + \Delta x)$$

de la que se deducen las relaciones

$$\Delta y = f(v + \Delta v) - f(v)$$

$$\Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

con lo cual el cuociente $\Delta y/\Delta x$ vale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta v} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

y al pasar al límite se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Esta fórmula se reconoce como la derivada de una función de función y es muy útil en la derivación de expresiones complejas que se transforman en expresiones de esta naturaleza.

Fórmula 15

"Si $y = f(x)$ y $x = g(y)$ entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{dg}{dy}}$$

La demostración de esta fórmula sigue un camino similar al anterior. La fórmula se reconoce como la fórmula para la derivación de funciones inversas.

Fórmulas 16 - 20

Estas fórmulas, se dan sin demostración y, corresponden a ciertas expresiones trigonométricas básicas.

Fórmula 16 $$\frac{d}{dx}(\text{sen } v) = \cos v \frac{dv}{dx}$$

Fórmula 17 $$\frac{d}{dx}(\cos v) = -\text{sen } v \frac{dv}{dx}$$

Fórmula 18 $$\frac{d}{dx}(\text{tg } v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}$$

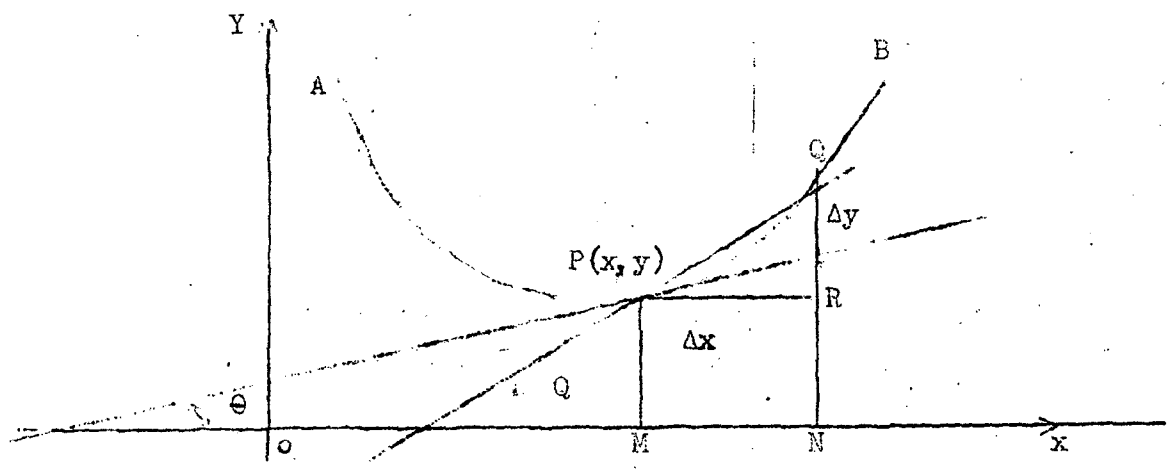
Fórmula 19 $$\frac{d}{dx}(\text{arc sen } v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{dx}$$

Fórmula 20 $$\frac{dx}{dx}(\text{arc tg } v) = \frac{dv}{1 + v^2} \frac{dv}{dx}$$

siendo "v" una función de "x".

2.7.- Significado geométrico de la derivada de una función.

Sea APQB arco de la curva $y = f(x)$, dibujada en el plano XOY, siendo P y Q dos puntos cualquieras sobre ella, tal que la diferencia entre sus abscisas y ordenadas son Δx y Δy respectivamente.



La recta PQ que une estos dos puntos es una secante cuya inclinación está dada por la tangente del ángulo . Tracemos por P y Q verticales que cortan el eje OX en los puntos M y N y la paralela al eje OX por P que corta QN en R.

En base de estos elementos geométricos interpretamos el proceso de derivación.

Primera operación

Incremento de la variable ("x") lo que produce un incremento de la función "y". Se tiene entonces que

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = NQ$$

Segunda operación

Expresión del incremento (Δy) en función del incremento (Δx):

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= NQ - NR = RQ$$

Tercera operación

Cálculo de la razón $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ de los incrementos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{RQ}{RP} = tg$$

Cuarta operación

Límite de la razón $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ cuando ambos incrementos se hacen infinitamente pequeños

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg = tg\ \theta$$

Esto equivale a acercar el punto Q al punto P, con lo cual la secante PQ va cambiando paulatinamente de inclinación hasta llegar a adquirir la inclinación θ, que es la posición límite cuando $\Delta x = 0$. La secante en ese instante ha quedado tangente a la curva en el punto P por superposición de Q sobre P. De ese modo se tiene el siguiente teorema:

Teorema

"El valor de la derivada en un punto cualquiera de una curva es igual al coeficiente angular de la tangente a la curva en ese punto".

Ejemplo 1

Encontrar la inclinación de la tangente a la curva $y = 2x^3 - 6x + 5$ en el punto en que a) $x = 1$; b) en el punto en que $x = 0$.

Solución

La primera derivada de la función es

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6$$

de donde

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \underline{-6}$$

Ejemplo 2

Encontrar las inclinaciones de las tangentes a las curvas $y = 3x^2-1$ e $y = 2x^2+3$ en sus puntos de intersección.

Solución

Las abscisas de los puntos de intersección están dadas por

$$y = 3x^2 - 1 = 2x^2 + 3 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \pm 2$$

Para la primera parábola tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 6x \qquad \theta_1 = \pm 12$$

Para la segunda parábola tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4x \qquad \theta_2 = \pm 8$$

2.8.- Derivación sucesiva

Se ha visto en los 2 ejemplos anteriores que la derivada de una función de "x" es en general una función de "x". Esta nueva función puede derivarse igualmente; en este caso la derivada de la primera derivada se denomina "segunda derivada" de la función primitiva. De la misma manera, la

derivada de la segunda derivada puede deriverse con respecto a la variable independiente lo que constituye la "tercera derivada" y asi sucesivamente hasta la enésima derivada.

Por ejemplo, la función

$$y = 4x^5$$

puede ser derivada 5 veces teniéndose

Para la primera derivada: $y^{I} = 20x^4$

Para la segunda derivada: $y^{II} = 60x^3$

Para la tercera derivada: $y^{III} = 240x^2$

Para la cuarta derivada: $y^{IV} = 480x$

Para la quinta derivada: $y^{V} = 480$

momento en que se tiene una constante y por lo tanto todas las derivadas de orden superior son nulas.

La notación que se usa para indicar la derivada de orden "n" es la siguiente

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

si se denomina "y" a la función de "x". Si a la función se la designa por f(x) se puede usar la siguiente

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad ó \quad f^{(n)}(x)$$

Ejemplo 1

Determinar la derivada de orden "k" para la función

$$y = x^2 e^{bx}$$

Solución

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = (bx^2 + 2x)e^{bx}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (b^2x^2 + 4bx + 2)e^{bx}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = (b^2x^2 + 6bx + 6)be^{bx}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (b^2x^2 + 8bx + 12)b^2e^{bx} \; ; \; \frac{d^5y}{dx^5} = (b^2x^2 + 10bx + 20)b^3 \, e^{bx}$$

de donde se deduce la ley general

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \left[b^2x^2 + 2bkx + k(k-1)\right] b^{k-2} \, e^{bx}$$

o sea que esta función exponencial tiene <u>infinitas derivadas</u>.

<u>Ejemplo 2</u>

Derivar la función $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

cinco veces sucesivas.

<u>Solución</u>

Tenemos

$$y^{I} = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}} \; ; \; y^{II} = (x^2 - 1)\,e^{-\frac{x^2}{2}} \; ; \; y^{III} = -(x^3 - 3x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y^{IV} = (x^4 - 6x^2 + 3)\,e^{-\frac{x^2}{2}} \; ; \; y^{V} = -(x^5 - 10x^3 + 15x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y en general $y^{(k)} = H_k(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Se puede encontrar una ley de recurrencia para los polinomios $H_k(x)$ que multiplican a la función base. Estos polinomios reciben el nombre de <u>polinomios de Tchebycheff - Hermite</u>. En Estadística se mencionan con frecuencia.

<u>Fórmula de Leibnitz</u>

Cuando se tiene que determinar la derivada enésima del producto de 2 funciones "u" y "v" resulta bastante cómodo el hacer uso de una fórmula que permite, conociendo las derivadas de cada una de las funciones por separado, determinar la derivada enésima del producto.

Esta fórmula se debe a Leibnitz y puede deducirse así.

Introduciendo el operador <u>D</u> tenemos

$$D(uv) = uDv + vDu$$

$$D^2(uv) = D(uDv) + D(vDu) = (uD^2v + DuDv) + (DuDv + vD^2u)$$

$$= uD^2v + 2DuDv + vD^2u$$

$$D^3(uv) = uD^3v + 3DuD^2v + 3D^2uDv + vD^3u$$

con lo cual se puede conjeturar que

$$D^n(uv) = uD^nv + C_1^n\, DuD^{n-1}v + C_2^n\, D^2u\, D^{n-2}v + \ldots\ldots + vD^nu = (Du + Dv)^n$$

en base de esta relación calculemos la forma de la derivada (n + 1) para ver si es de la misma forma que lo que hemos conjeturado. Multiplicando por D ambos miembros tenemos

$$D^{n+1}(uv) = uD^{n+1}v + (1 + C_1^n)\, DuD^nv + (C_1^n + C_2^n)\, D^2u\, D^{n-1}v + \ldots +$$

$$(C_{k-1}^n + C_k^n)\, D^ku\, D^{n-k}v + \ldots. + vD^{n+1}n$$

y puesto que

$$C_{k-1}^n + C_k^n = C_k^{n+1}$$

entonces podemos escribir

$$D^{n+1}(uv) = uD^{n+1}v + C_1^{n+1}\, DuD_v^n + C_2^{n+1}\, D^2uD^{n-1}v + \ldots. + vD^{n+1}u$$

que demuestra que la relación es válida para (n+1), o sea que la fórmula de Leibnitz es correcta.

Ejemplo 1

Determinar la derivada de orden "n" para la función

$$y = x^{n-1} \log x$$

Solución

Esta derivada de orden n resulta más sencilla de evaluar, por medio de inducción . En efecto

$$\frac{dy}{dx} = (n-1)x^{n-2} \log x + x^{n-2} \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = (n-1)(n-2)x^{n-3} \log x + dx^{n-3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (n-1)(n-2)(n-3)\ x^{n-4}\ \log x + 6\ x^{n-4}$$

de modo que

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (n-1)!\ \ \log x + 2$$

y por lo tanto

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(n-1)!}{x}$$

Ejemplo 2

Determinar la derivada de orden k para la función

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

Solución

Llamemos $u = 1 - x$

$v = (1+x)^{-1}$

entonces

$$Du = -1 \qquad Dv = -(1+x)^{-2} \qquad D^2v = 2(1+x)^{-3} \qquad D^3v = -2\cdot 3(1+x)^{-4}$$

$$D^k v = (-1)^k\ k!\ (1+x)^{-(k+1)}$$

la fórmula de Leibnitz tiene solamente 2 términos

$$D^k(uv) = uD^k v + k\ Du\ D^{k-1}v = (1-x)(-1)^k k!\ (1+x)^{k+1} - k(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{2(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

2.9.- Máximos y mínimos. Puntos de inflexión.

Cuando se quiera hacer uso de determinadas funciones para describir ciertos hechos experimentales se debe tener un conocimiento más o menos completo de las características más importantes que posee un determinado modelo matemático. El Cálculo Diferencial permite determinar ciertas características importantes de las funciones que nos indican la forma y comportamiento de la función para ciertos valores del argumento.

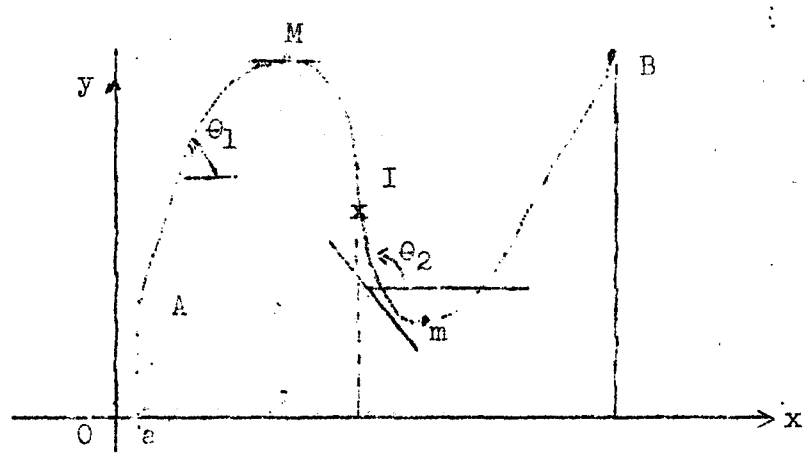
Las características que mayor interés tienen son las siguientes:

- puntos en que la función alcanza un máximo ó un mínimo
- ubicación de los puntos de cambio de curvatura de la función (puntos de inflexión)
- presencia de asíntotas
- puntos de discontinuidad

La determinación de estas particularidades de la función permite darse cuenta de su forma y de la propiedad con que puede adaptarse para describir hechos reales.

- Máximos y mínimos

Consideremos la función f(x) que presente el siguiente gráfico



Podemos notar que la función desde que parte de A va en contínuo aumento hasta el momento en que este aumento llega a un valor mayor, instante desde el cual la función empieza a decrecer hasta que llega a una posición en que nuevamente empieza a incrementarse. Los puntos M y m en que la curva alcanza un valor mayor y menor respectivamente al variar en forma contínua desde A a B reciben los nombres de puntos de máximo y de mínimo respectivamente o sencillamente "máximo" y "mínimo" de la función.

El cálculo diferencial nos permite encontrar la ubicación precisa de estos puntos por medio del razonamiento siguiente:

Al ir la función creciendo, la tangente a la curva va disminuyendo su inclinación hasta el momento en que esta tangente se pone horizontal, en cuyo instante el ángulo de inclinación es 0. A partir de ese instante la tangente a la curva empieza a aumentar de valor hasta que llega un momento que la inclinación alcanza su mayor valor para empezar desde ese instante a decrecer

hasta que se hace 0, momento en el cual la tangente se hace horizontal y la curva ha alcanzado un valor mínimo. Desde ese momento nuevamente la tangente empieza a crecer en forma contínua a medida que la rama de la curva se va al infinito.

Este sencillo razonamiento permite entonces prever que la determinación de máximos o mínimos corresponden a puntos de la curva en que la inclinación de la tangente es 0, o sea a puntos en que la primera derivada de la función es nula. La especificación de que se trata de un máximo en lugar de un mínimo lo dará el hecho de que si la inclinación de la tangente (primera derivada) viene decreciendo o nó. Este decrecimiento (o incremento) de la inclinación evidentemente que lo dará la segunda derivada de la función indicando una segunda derivada negativa que la inclinación venía decreciendo y que el punto en cuestión es un punto de máximo y si la segunda derivada es positiva, lo contrario.

Existe por lo tanto un punto en que la segunda derivada alcanza un valor nulo punto que se denomina "punto de inflexión" ya que en él la curva cambia de curvatura.

Ejemplo 1

Dividir 10 en 2 partes tales que la suma del doble de una de las partes y del cuadrado de la otra sea mínima.

Solución

Sea "x" una parte, por lo tanto la otra es (10-x). De acuerdo la condición del problema tenemos que determinar el mínimo de la función.

$$y = 2(10-x) + x^2$$

Derivando por primera vez tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = 2(x - 1)$$

derivada que se anula para $x = 1$. Esta derivada primera que es una función lineal de "x" para los valores de x menores que 1 es negativa y para valores mayores que 1 es positiva, es decir, la inclinación viene aumentando de valor y por lo tanto la curva pasará por un mínimo.

Nota: Esto puede deducirse también del signo de la segunda derivada (que representa la variación de la primera derivada). La segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

cantidad (incremento $\frac{dy}{dx}$) que es esencialmente positivo.

Ejemplo 2

Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cms. para cada uno y los de los lados de 1 cm. Cuáles son las dimensiones que debe tener la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?.

Solución

Sean x e y las dimensiones del papel. La función que debe hacerse mínima es

$$f = xy = x\left(\frac{18}{x-2} + 4\right) = 18 + 4x + \frac{36}{x-2}$$

con lo cual

$$\frac{df}{dx} = 4 - \frac{36}{(x-2)^2} \qquad (x-2)^2 = \frac{36}{4} \quad \therefore\ x - 2 = 3\ ;\quad x = \underline{5}$$

$$y = 4 + \frac{18}{x-2} = \underline{10}$$

además

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{72}{(x-2)^3}$$

que para $x = 5$ es esencialmente positiva, luego la función pasa por un mínimo.

Ejemplo 3

Determinar las dimensiones del rectángulo de perímetro máximo que puede inscribirse en un círculo.

Solución

Sean x e y los lados del rectángulo inscrito. Entonces debe tenerse

$$x^2 + y^2 = 4R^2$$

La función por hacer mínima es

$$f = 2\left(x + \sqrt{4R^2 - x^2}\right)$$

con lo cual tenemos

$$\frac{df}{dx} = 2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}\right) = 0 \qquad \therefore\ x = \underline{R\sqrt{2}}\ ;\quad y = \underline{R\sqrt{2}}$$

Además

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\,8R^2\,(4R^2 - x^2)^{-3/2}$$

es esencialmente positiva, con lo cual la función para un máximo.

Ejemplo 4

Determinar el punto de inflexión para la cúbica que pasa por los puntos

$$(0,y_o) \; ; \; (1,y_1) \; ; \; (2,y_2) \; ; \; (3,y_3)$$

Solución

La ecuación de la cúbica es

$$y = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}\,y_o + \frac{x(x-2)(x-3)}{2}\,y_1 - \frac{x(x-1)(x-3)}{2}\,y_2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\,y_3$$

es donde se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,(x-2)y_o + (3x-5)y_1 - (3x-4)y_2 + (x-1)y_3$$

haciendo 0 esta segunda derivada obtenemos el punto de inflexión

$$x_{infl} = \frac{2y_o - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{y_o - 3y_1 + 3y_2 - y_3}$$

Nota: Como ejercicio: Determinar la relación que debe existir entre los valores "y" para que el punto de inflexión quede fuera del intervalo (0,3).

Ejemplo 5

Determinar los máximos y mínimos de la función

$$y = (x-3)^2\,(x-2)$$

Solución

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-3)(x-2) + (x-3)^2 = 0$$

lo que nos da $x^{I} = 3$; $x^{II} = 7/3$.

Además

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x - 8/3)$$

se tiene que $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=3}$ es positiva por lo cual la función pasa por un mínimo.

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=7/3}$ es negativa por lo cual la función pasa por un máximo.

Ejemplo 6

Determinar máximos ó mínimos de la función

$$y = a\, e^{kx} + b\, e^{-kx}$$

Solución

Se tiene que

$$y = a\, e^{kx} + b\, e^{-kx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (a\, e^{kx} - b\, e^{-kx})k$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (a\, e^{kx} + b\, e^{-kx})k^2$$

igualando a 0, la primera derivada tenemos

$$ae^{kx} = b\, e^{-kx} \quad ó \quad e^{2kx} = \frac{b}{a} \; ; \; e^{kx} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

con lo cual

$$x = \frac{1}{k} \log \sqrt{\frac{b}{a}}$$

y como la segunda derivada es esencialmente positiva, la primera pasa por un mínimo

Ejemplo 7

Examinar la función

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$$

en lo que respecta a los puntos de inflexión y dirección de la curvatura.

Solución

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = 18x + 24$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18$$

Igualando a 0 la primera derivada tenemos:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^{I} = 2 \; ; \; x^{II} = 4$$

siendo $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativa para $x' = 2$ (máximo) y para $x'' = 4$, positiva (mínimo) de esa manera podemos resumir

x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	Característica	Dirección de la curvatura
0	- 7	+	-		cóncava hacia abajo
2	13	0	-	máximo	
3	11	-	0	punto de inflexión	
4	9	0	+	mínimo	cóncava hacia arriba
6	29	+	+		

Asintotas de una curva

Por definición, una asintota a una curva es la posición límite de una tangente cuyo punto de contacto con la curva tiene coordenadas que están en el infinito. (Si solamente la abscisa del punto del contacto está en el infinito, la asintota es paralela al eje OX, en cambio si la ordenada es infinita se trata de una asintota vertical.

En curvas destinadas a describir los crecimientos de poblaciones vivientes, curvas que poseen asintotas son siempre de utilidad. La presencia de asintota en la función tiene la ventaja que puede ser usado el modelo cuando se presume que para ciertos instantes la población alcanza ciertas posiciones límites de equilibrio.

Ejemplo 1

Determinar la forma de la curva definida por la ecuación

$$y = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}$$

siendo a, b y k ctes. positivas.

Solución

La función varía en forma monótona en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Cuando $t = -\infty$, ya que e^{-bt} es infinitamente grande, entonces $y = 0$.

La primera derivada de la función es

$$\frac{dy}{dt} = by\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

lo que nos indica que la función tiene primera derivada positiva que es nula en los dos extremos y, por lo tanto $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ debe pasar por un valor máximo (punto

de inflexión para la función "y").

Derivando por segunda vez tenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = b\,\frac{dy}{dt}\left(1 - \frac{2y}{k}\right)$$

valor que en el punto de inflexión da $y = k/2$, que corresponde cuando $ae^{-bt} = 1$, o sea cuando

$$t = \frac{1}{b}\log a$$

Ejemplo 2

Determinar la forma de la curva

$$y = k_1 + \frac{k_2}{1 + ae^{-bt}}$$

Solución

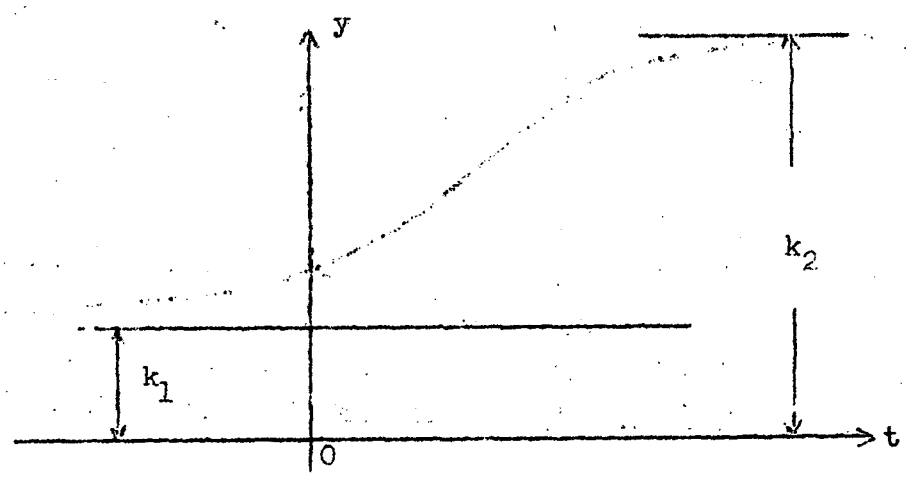
Esta función se denomina "logística con dos asintotas".

La única diferencia con la anterior es que tiene dos asintotas:

Una inferior - igual ak_1

Otra superior - igual ak_2

La forma le da el siguiente gráfico:



2.10.- Formas indeterminadas

Cuando para un valor particular de la variable independiente, una función toma una de las formas

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0.\infty \qquad \infty - \infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

se dice que la forma es indeterminada, y la función no está definida por este valor de la variable independiente por la expresión analítica dada.

Así por ejemplo, supongamos que tenemos el cuociente

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

y que para un cierto valor de la variable, tal como $x = a$ tenemos que

$$f(a) = 0 \quad ; \quad g(a) = 0$$

entonces el valor de "y" toma la forma indeterminada 0/0, es decir, que podemos asignarle el valor que nos plazca. Pero podemos levantar esta indeterminación buscando el límite al cual tiende el cuociente a medida que la variable "x" se acerca al valor "a" y usar este límite - si existe - como valor de la expresión indeterminada.

Para llegar a establecer una regla para levantar la indeterminación recurriremos al teorema de Rolle, que es el siguiente teorema:

"Si una función $f(x)$ se anula cuando $x = a$ y cuando $x = b$, y $f(x)$ y su primera derivada $f'(x)$ son contínuas en el intervalo (a,b), entonces existe por lo menos un valor de "x" para el cual $f'(x)$ es nula".

Este teorema es evidente, puesto que cuando "x" crece desde "a" hasta "b", $f(x)$ no puede crecer constantemente o decrecer constantemente, ya que la función debe anularse para estos valores extremos. De allí que, para un cierto valor de x, al menos, en el intervalo (a,b), $f(x)$ cesa de crecer para empezar a decrecer o vice-versa y, este punto particular es sin duda el punto en que se anula la primera derivada de la función.

En base de este teorema puede demostrarse la conocida "regla de la media" que establece lo siguiente:

"Si una función $f(x)$ adquiere los valores $f(a)$ y $f(b)$ para los valores $x = a$ y $x = b$ de un intervalo (a,b) entonces la diferencia de los valores extremos de la función dividido por el ancho del intervalo es igual a la derivada primera de la función para un valor de "x" comprendido dentro de ese intervalo".

En símbolos se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1) \quad ; \quad a \leq x_1 \leq b$$

Para demostrar esta regla consideremos la siguiente función:

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$$

siendo $Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

esta función se anula para $x = a$, y para $x = b$, por consiguiente la primera derivada de la función - o sea $F'(x)$ - debe anularse para algún valor x_1 de la variable "x" del intervalo (a,b). Pero la primera derivada de la función $F(x)$ es

$$F'(x) = f'(x) - Q$$

relación que para $x = x_1$ se anula, o sea que se tiene

$$f'(x_1) = Q$$

con lo cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1) \quad ; \quad a < x_1 < b$$

Esta regla nos permite dar otra para levantar la indeterminación de la función "y". Efectivamente aplicando el teorema de la media a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tenemos

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(x_1) \quad ; \quad a < x_1 < x$$

$$g(x) = g(a) + (x - a)\, g'(x_2) \quad ; \quad a < x_2 < x$$

y como $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}$$

y si hacemos tender <u>x</u> hacia "<u>a</u>" entonces $x_1 \rightarrow a$; $x_2 \rightarrow a$ y el límite del cuociente $f(x)/g(x)$ es equivalente a la razón de las primeras derivadas de las funciones para $x = a$, o sea que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

regla que se conoce como la "regla que se conoce como la "<u>regla de L'Hôpital</u>".

Esta regla puede enunciarse así:

"Para levantar la indeterminación de un cuociente de la forma 0/0, se deriva por una vez el numerador y el denominador y se determina si este nuevo cuociente para el valor particular de la variable tiene un valor bien específico. "Si ésto no sucediera puede derivarse nuevamente el numerador y el denominador y determinar si ahora la expresión tiene un valor determinado". El

proceso puede continuarse hasta darse cuenta si realmente puede levantarse la indeterminación o nó.

Ejemplo 1

Determinar el límite siguiente

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1}$$

Solución

Derivando numerador y denominador se tiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Ejemplo 2

Determinar el límite siguiente

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

Solución

Se tiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \left(\frac{a^x \log a - b^x \log b}{1}\right)_{x = 0} = \underline{\log a - \log b}$$

Ejemplo 3

Determinar el límite de la expresión

$$y = (1 + nx)^{\frac{1}{x}}$$

cuando $x \to 0$

Solución

Para reducirla a una expresión del tipo $\frac{0}{0}$, calculamos el límite del logaritmo de y:

Tenemos entonces

$$z = \log y = \frac{\log (1 + nx)}{x}$$

derivando una vez el numerador y denominador tenemos.

$$\frac{\frac{n}{1 + nx}}{1}$$

que para $x = 0$ nos da $\underline{n}$, con lo cual la función $\underline{y}$ tiende a $\underline{e^n}$.

2.11.- Desarrollo en serie

Cualquier función de "x" en general puede expresarse en serie de potencias de la variable independiente con el propósito de determinar el valor aproximado de la función para determinados valores del argumento. Se dice "valores aproximados" porque en general las funciones pueden expresarse por una serie infinita de términos, pero ya que estos términos disminuyen de valor se puede detener el desarrollo hasta cierto número de términos y determinar en base de ello un valor aproximado de la función que para propósitos de aplicación será suficiente.

Por ejemplo

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

en este caso se tiene una serie finita de términos

En cambio en el caso

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots\ldots$$

la serie tiene infinitos términos.

Las fórmulas de desarrollo en serie que más se usan son

- la serie de Taylor
- la serie de MacLaurin

siendo esta última un caso particular de la primera.

- Serie de Taylor

La serie de Taylor se basa sencillamente en expresar la función f(x) en serie de potencias de (x - a). Esta fórmula puede deducirse de diferente maneras, siendo una de las que con mayor frecuencia se usan la basada en la "regla del valor medio".

Seguiremos aquí no obstante un proceso de identificación que reporta bastante ventajas.

Supongamos que es posible desarrollar la función f(x) en potencias de (x - a), en ese supuesto tendremos que

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \ldots b \ldots + b_j(x-a)^j + \ldots\ldots\ldots$$

quedando por determinar el valor de estos coeficientes (coeficientes indeterminados).

Para la determinación de estos coeficientes imponemos condiciones lógicas. Efectivamente si hacemos x = a en el primer miembro tenemos f(a) y

en segundo miembro b_o de donde se deduce que debe tenerse

$$b_o = f(a)$$

Podemos derivar una vez ambos miembros de la ecuación inicial con lo cual encontramos

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \ldots\ldots + j\, b_j(x-a)^{j-1} + \ldots\ldots$$

y si hacemos $x = a$ en esta relación llegamos a que debe tenerse

$$b_1 = f'(a)$$

Derivando por segunda vez tenemos

$$f''(x) = 1.2\, b_2 + 2.3\, b_3\,(x-a) + 3.4\,(x-a)^2 + \ldots\ j(j-1)\, b_j(x-a)^{j-2} + \ldots$$

y si volvemos a $x = a$ forzosamente debemos tener

$$b_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

con lo cual ya puede irse viendo la ley que siguen los coeficientes b_j

$$b_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$$

con lo cual se llega a la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots\ldots$$

<u>Nota.</u>- La serie se la conoce como serie de Taylor a pesar que se asegura que se debe a Stirling.

Podemos escribir la serie de Taylor de otra manera, para lo cual reemplazamos "x" por (x+h) con lo cual tenemos

$$f(x+h) = f(h) + \frac{x}{1!}\, f'(h) + \frac{x^2}{2!}\, f''(h) + \frac{x^3}{3!}\, f'''(h) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

<u>Serie de MacLaurin</u>

En un caso particular de la serie de Taylor cuando la función $f(x)$ se desarrolla alrededor del valor $x = 0$. De ese modo cambiando "a" por 0 en la serie de Taylor tenemos.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^j}{j!} f^{(j)}(0) + \ldots$$

relación que constituye la "serie de Mac Laurin". Esta serie tiene la ventaja que el valor de la función y de sus derivadas para $x = 0$ en la mayoría de las veces es muy fácil de calcular.

Todo estudio de la serie de Taylor debe completarse con el análisis de la seguridad obtenida al detener el desarrollo en determinado término. Este asunto queda para estudio particular del lector.

Ejemplo 1

Desarrollar e^x en potencias de x.

Solución

La función $f(x) = e^x$ tiene todas sus derivadas iguales a la función primitiva, o sea que $f^{(n)}(x) = e^x$, y por lo tanto

$$f^{(n)}(0) = 1$$

y la serie correspondiente es

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^j}{j!} + \ldots\ldots\ldots$$

Ejemplo 2

Desarrollar cos x y sen x en series de potencias de "x" y demostrar que se tiene

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Solución

La función cos x tiene derivadas de todos los órdenes pero las derivadas de orden impar para $x = 0$ son todas nulas, ya que se trata del valor de la función sen x para $x = 0$.

De esa manera el desarrollo es de la forma

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$ la función sen x

tiene derivadas de todos órdenes pero las derivadas de orden par para $x = 0$ son todas nulas ya que todas ellas son el valor de sen x para $x = 0$. De esa manera el desarrollo de sen x es

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots$$

En base de estos dos desarrollos tenemos que

$$\cos x + i \text{ sen } x = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots\ldots$$

observando que el segundo miembro es - de acuerdo, ejemplo 1 - el desarrollo de e^{ix} con lo cual queda demostrada la relación de Euler. De esta misma relación fluye la relación de De Moivre

$$\left[r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta) \right]^n = r^n (\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta)$$

para n entero y positivo

Ejemplo 3

Desarrollar en serie de potencias de "x" la función

$$y = \log_e (1 + x)$$

Solución

Se tiene que

$$\frac{d^j y}{dx^j} = (-1)^{j-1}(j-1)!(1+x)^{-j}$$

con lo cual

$$\left(\frac{d^j y}{dx^j}\right)_{x=0} = \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

con lo cual tenemos

$$\log_e (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

Ejemplo 4

Usando el desarrollo en serie de la función

$$y = \log \frac{1+x}{1-x}$$

determinar el valor de log 2

Solución

De acuerdo al ejercicio anterior

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right)$$

haciendo $x = 1/3$ tenemos

$$\log_e 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\,\frac{1}{3^7} + \cdots\cdots\right] = \underline{0.69314718\ldots}$$

2.12.- <u>Método de Newton para la determinación de las raíces reales de una ecuación.</u>

Frecuentemente se tiene una ecuación de la forma

$$f(x) = 0$$

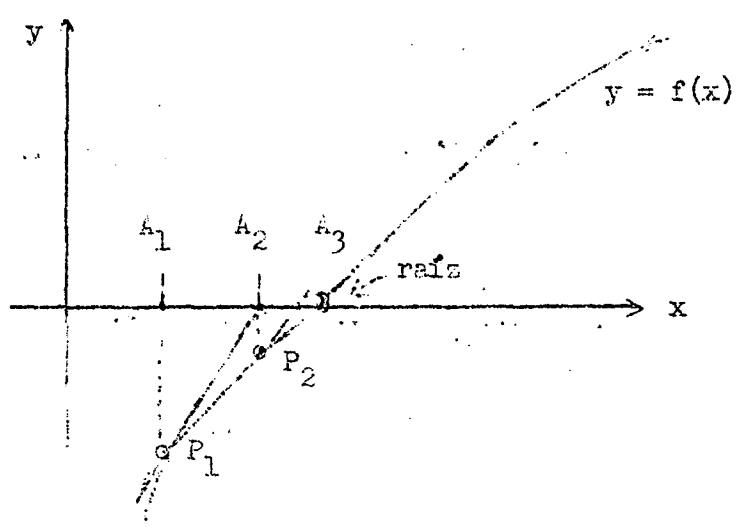
para la cual debe determinarse las raíces reales.

Si la función $f(x)$ es de 2° grado la determinación de las raíces se hace a través de una fórmula bien conocida; pero cuando la ecuación es un polinomio de grado superior o alguna función transcendente la búsqueda de las raíces reales (o de la raíz real) se hace por un método de aproximaciones sucesivas debido a Newton.

Consideremos una función

$$y = f(x)$$

cuya forma está dada por el gráfico siguiente



Supongamos que nos damos un valor x_1 relativamente cerca del valor para el cual se anula la función, o sea un valor no demasiado diferente de la raíz buscada.

Para este valor de "x" la función toma el valor $f(x_1) = A_1P_1$ lo que nos permite determinar el punto P_1 de la curva $f(x)$. Por este punto podemos trazar una tangente a la curva, la que corta el eje de las abscisas en A_2, un punto que queda más cercano de la raíz que el que habíamos presupuestado al comienzo. Este nuevo valor es igual a

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

o sea que dado un valor inicial x_1, si determinamos el valor del cuociente $-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ podemos usar esta cantidad para corregir el valor x_1 de partida y conseguir un segundo valor x_2 más cercano de la raíz buscada.

Para x_2 podemos aplicar la misma operación que para x_1, consiguiendo de esta manera un nuevo valor x_3 dado por la relación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

que se encuentra aún más cerca de la raíz por encontrar. Repitiendo este proceso un cierto número de veces (depende del valor x_1 con que se partió) podemos, con una aproximación práctica determinada, encontrar la raíz de la ecuación o las raíces que interesen. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1

Determinar la raíz real de la ecuación

$$x^3 + 2x - 8 = 0$$

Solución

La raíz de la ecuación está comprendida entre 1 y 2. Usemos un valor $x_1 = 1,5$, el valor x_2 será igual a

$$x_2 = 1,5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.5 + \frac{1.625}{8.75} = 1.5 + 0,186 = \underline{1.686}$$

ya que

$$f'(x) = 3x^2 + 2 = 8.75$$

Usando el valor 1.686 debemos introducir la corrección

$$\Delta x_2 = -\frac{0.1646}{10.5278} = -0{,}016$$

lo que nos lleva al valor

$$x_3 = \underline{1.670}$$

Ejemplo 2

Encontrar la menor raíz para la ecuación

$$e^{-x} - \cos x = 0$$

Solución

Se pide la menor raíz porque esta ecuación tiene infinitas raíces.

Para $x = 1$ se tiene $f(1) = 0.3679 - 0.5403 = -0.1724$

Para $x = 2$ se tiene $f(2) = 0.1353 + 0.4161 = 0.5514$

o sea la función tiene una raíz entre $\underline{x = 1}$ y $\underline{x = 2}$

Usemos el valor $x_1 = 125$, tenemos entonces que

$$f(1{,}25) = 0.2865 - 0.3153 = -0.0283$$

$$f'(1{,}25) = -0.2865 + 0.9490 = 0.6625$$

$$\therefore \quad \Delta x_1 = -0.043$$

$$x_2 = \underline{1.293}$$

2.13.- Funciones hiperbólicas

Se llaman "funciones hiperbólicas" expresiones en que entran funciones exponenciales. De estas funciones las básicas el senh v (seno hiperbólico de v) y el cosh v (coseno hiperbólico de v) que son iguales a las expresiones

$$\operatorname{senh} v = \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}$$

$$\cosh v = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}$$

Se puede demostrar entonces que

$$\cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 = 1$$

una relación parecida a la relación de Pitágoras, entre sen y cos con la única diferencia que tenemos un signo menos en lugar del signo más.

Nota: Para fines de aplicación estas funciónes han sido tabuladas convenientemente.

De estas funciones básicas pueden deducirse la tangente hiperbólica, la cotangente, secante y cosecante hiperbólicas definidas por las relaciones

$$\text{tghv} = \frac{\text{senh v}}{\cosh v} = \frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}} \quad ; \quad \coth v = \frac{1}{\text{tghv}} \quad ; \quad \text{sech } v = \frac{1}{\cosh v} \quad ;$$

$$\text{cosech } v = \frac{1}{\text{senh } v}$$

entre estas funciones se tiene las relaciones de dependencia

$$1 - \text{tgh}^2 v = \text{sech}^2 v \quad ; \quad \coth^2 v - 1 = \text{cosech}^2 v$$

Como en Trigonometría Plana también para las funciones hiperbólicas puedon demostrarse las siguientes relaciones

$$\text{senh } (v + w) = \text{senh } v \cosh w + \cosh v \text{ senh } w$$

$$\cosh (v + w) = \cosh v \cosh w + \text{senh } v \text{ senh } w$$

$$\text{senh } 2 v = 2\text{senh } v \cosh v$$

$$\cosh 2 v = \cosh^2 v + \text{senh}^2 v$$

La razón para llamar "hiperbólicas" a estas funciones está en el hecho que ellas están relacionadas con la hiperbólica. (Una de las cónicas en el plano).

Efectivamente llamando "x" e "y" a las expresiones

$$x = a \cosh v$$

$$y = a \text{ senh } v$$

se ve que los valores "x" e "y" corresponden a los de una hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Si escribimos que $y = \text{senh } v$

podemos aislar el valor de "v" recurriendo a la función inversa.

$$v = \text{senh}^{-1} y$$

que se lee Seno hiperbólico inverso de "y", teniéndose que

$$\text{senh}^{-1} y = \log_e (y + \sqrt{y^2 + 1})$$

para cualquier valor de "y"

De la misma manera se puede introducir el coseno y tangente hiperbólica inversas

$$\cosh^{-1} y = \log (y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\text{tgh}^{-1} y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y}$$

Otra función hiperbólica que se presenta con relativa frecuencia es "el gudermaniano de v" que no es otra cosa que la función arcotangente del senh v, o sea que

$$gd(v) = \text{arctg } (\text{senh } v)$$

La derivada del gudermaniano de "v" es igual a la sech v por la derivada de "v" con respecto a "x" o sea que

$$\frac{d}{dx} (gdv) = \text{sech } v \cdot \frac{dv}{dx}$$

Nota: Si se construye un triángulo rectángulo de catetos 1, senh v, el ángulo opuesto al cateto (senh v) es precisamente el gudermaniano de "v".

Puede demostrarse aparte de ello que entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas existen las siguientes relaciones

$$\text{senh } iz = i \text{ sen } z$$

$$\cosh iz = \cos z$$

$$\text{tgh } iz = i \text{ tg } z$$

lo que permitiría en muchos casos encontrar las derivadas de las funciones hiperbólicas o las integrales de esas funciones.

A fin de simplificar el cálculo de las derivadas de funciones en que aparecen funciones hiperbólicas se da una lista de las derivadas para las principales funciones recién definidas

Función	1ª Derivada
senh x	cosh x
cosh x	- senh x
tgh x	sech^2 x
coth x	$-\text{cosech}^2$ x
sech x	-sechx tgh x
cosech x	-cosech x coth x
senh^{-1} x	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1}$ x	$\frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$
tgh^{-1} x	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1}$ x	$-\frac{1}{x^2-1}$
sech^{-1} x	$\mp\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
cosech^{-1} x	$\pm\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

2.14.- Cambio de variables

Resulta a veces ventajoso transformar una expresión que encierra derivadas de "y" con respecto a "x" por una expresión equivalente que encierra derivadas de "y" con respecto a "x". Otras veces es útil cambiar la variable "y" por una cierta función de otra variable "z" con el objeto de conseguir expresiones más sencillas. Este artificio de cálculo permite resolver ecuaciones diferenciales en forma bastante cómoda o de poder realizar la integración de expresiones, como luego veremos en el Cálculo Integral.

Para el primer caso indicado ya que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ siempre que } \frac{dx}{dy} \neq 0$$

entonces es fácil de demostrar que se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} \quad ; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\,\frac{dx}{dy} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

Para el segundo caso si $y = f(x)$ y reemplazamos y por una función $g(z)$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = g'(z)\frac{dz}{dx} \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = g''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + g'(z)\frac{d^2z}{dx^2}$$

Para mayor aclaración de este tema veamos algunos ejemplos.

Podemos también cambiar la variable independiente "x" por una variable "t" con lo cual podemos llegar muchas veces a relaciones más sencillas.

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big| \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

y así para las derivadas de orden superior. Debe hacerse notar que no es necesario tener las fórmulas para las terceras derivadas y las de orden superior sino que es más práctico ir determinando los valores de las derivadas de cierto orden una vez que se ha calculado la derivada del orden inmediatamente inferior.

<u>Ejemplo 1</u>

Cambiar la variable independiente x por t en la ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

mediante la relación

$$x = e^t$$

<u>Solución</u>

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad ó \quad \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \text{ y como } \frac{dx}{dt} = e^t = x$$

por lo tanto

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

de esto deducimos

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

Ejemplo 2

Cambiar la variable independiente x en y en la ecuación diferencial

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Solución

Reemplazando en esta ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ de acuerdo con las relaciones más arriba indicados se llega a

$$\frac{d^3x}{dy^3} + \frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

Nota: Las relaciones que más arriba se han dado son bastante útiles cuando se trabaja con ecuaciones paramétricas.

Puede también cambiarse simultáneamente la variable dependiente (y) y la variable independiente (x). Por ejemplo es útil muchas veces pasar del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares al sistema polar definido por las relaciones

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

Este cambio es de mucha utilidad, por ejemplo para la evaluación de la constante para una distribución o para otros tipos de integración.

Ejemplo 1

Transformar $\dfrac{x \frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ suponiendo que $x = r \cos \theta$; $y = r \operatorname{sen} \theta$.

Solución

Tenemos que

$$\frac{dx}{d\theta} = r \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \frac{dr}{d\theta}$$

de allí que

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{\left(-r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{dr}{d\theta}\right)^2} \quad x \frac{dy}{dx} - y = \frac{r^2}{-r \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \cdot \frac{dr}{d\theta}}$$

de modo que tenemos finalmente

$$\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}}$$

2.15.- Derivación parcial

Se dice que una función $f(x, y)$ de dos variables independientes es contínua para los valores (a, b) de (x, y) cuando

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

cualquiera que sea la manera como "x" e "y" tienden a sus límites respectivos "a" y "b".

Esta definición se resume a veces brevemente de la manera siguiente:

"Un cambio muy pequeño en una de las variables independientes, o en las dos a la vez, produce un cambio muy pequeño en el valor de la función".

Ya que las variables "x" e "y" son independientes en la expresión

$$z = f(x,y)$$

se puede suponer que "x" varía mientras "y" permanece constante ó inversamente. Puede calcularse la derivada de la función "z" cuando "x" solamente es la que varía, derivada que recibe el nombre de "derivada parcial de z con respecto a x" lo que se denota por los símbolos.

De esta manera podemos escribir en símbolos, la definición de derivada parcial

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

De la misma manera puede escribirse la derivada parcial de z con respecto "y"

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Este tipo de simbología puede ampliarse para el caso en que la función tiene más de dos variables independientes. Por ejemplo, si se tiene la función

$$u = f(x,y,z)$$

habrá tres derivadas parciales de primer orden que pueden denotarse de la manera

$$\frac{\partial u}{\partial x} ; \frac{\partial u}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} ; \frac{\partial f}{\partial z}$$

Nota: Acerca de la interpretación geométrica de la derivación parcial ver el libro de Granville.

Ejemplo 1

Encontrar las derivadas parciales de primer orden de la función

$$u = \log (e^x + e^y)$$

para demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

Solución

Se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y} ; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = \underline{1}$$

Ejemplo 2

Encontrar las derivadas parciales de primer orden de la función

$$u = x^3 + 3x^2y - y^3$$

Solución

Se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

Ejemplo 3

Id. para la función

$$u = (ax^2 + by^2 + cz^2)^n$$

Solución

Se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = n(ax^2 + by^2 + cz^2)^{n-1}\ (2ax) = \frac{2anx\ u}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

y por analogía

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2bn\ y\ u}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2cn\ z\ u}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

Derivadas totales

Supongamos que "u" es una función de 2 variables independientes "x" e "y", o sea que se tiene

$$u = f(x,y)$$

y que estas variables "x" e "y" son funciones de una tercera variable "t".

Demos a "t" un incremento t y sean x,y,u los incrementos sufridos por x,y,u. La cantidad

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

es por definición el incremento total de "u"

Este incremento total puede escribirse en la forma

$$\Delta u = \left[f(x+\Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \right] + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x,y) \right]$$

lo que permite aplicar el teorema de la media a cada una de las dos diferencias del segundo miembro de la relación anterior, De acuerdo a esta regla tenemos

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x\ (x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y).\ \Delta x$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x,y) = f'_y\ (x, y + \theta_2\ \Delta y)\ .\ \Delta y$$

y por lo tanto el incremento total puede escribirse

$$\Delta u = f'_x (x + \theta_1\ \Delta x, y + \Delta y)\ .\ \Delta x + f'_y\ (x, y + \theta_2\ \Delta y)\ .\ \Delta y$$

siendo θ_1 y θ_2 fracciones positivas propias, es decir valores comprendidos entre 0 y 1. Diviendo por t se tiene

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\ .\ f'_x\ (x + \theta_1\ \Delta x, y + \Delta y) + \frac{\Delta y}{\Delta t}\ .\ f'_y\ (x, y + \theta_2\ \Delta y)$$

y haciendo tender Δt a cero, llegamos a la relación

$$\frac{du}{dt} = f'_x(x,y)\,\frac{dx}{dt} + f'_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

o sea que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

De la misma manera se puede demostrar para el caso de una función de 3 variables

$$u = f(x,y,z)$$

para la cual se tendrá

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

y asi para una función de más variables.

Podemos en la relación du/dt reemplazar t por x, en cuyo caso "y" es una función de "x" y "u" es únicamente función de "x", en ese caso tenemos

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

o bien $du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$ (*)

y para el caso de una función de tres variables

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

o bien $du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$ (*)

Ejemplo 1

Determinar el valor de du/dt si $u = \operatorname{sen}(x/y)$, siendo $x = e^t$; $y = t^2$

Solución

Tenemos que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} \cdot e^t - \frac{x}{y^2}\cos x\,y\,(2t)$$

$$\therefore\ \frac{du}{dt} = \frac{t-2}{t^3}\,e^t \cdot \cos\frac{e^t}{t^2}$$

expresado en función de la variable "t" únicamente

(*) El elemento du se denomina "diferencial total".

Ejemplo 2

Determinar el valor de du/dx si $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2 + 1}$, $y = a \operatorname{sen} x$

$z = \cos x$

Solución

Tenemos que

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{a\, e^{ax}(y-z)}{a^2 + 1} + \frac{a\, e^{ax}\cos x}{a^2 + 1} + \frac{e^{ax}\operatorname{sen} x}{a^2 + 1} = e^{ax}\operatorname{sen} x$$

si se reemplaza y por a sen x y z por cos x en la primera relación.

Derivadas parciales sucesivas

Consideremos la función

$$u = f(x,y)$$

en general, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ son funciones de "x" e "y" que pueden derivarse parcialmente tal como se hizo con la función original. Estas derivadas reciben el nombre de "derivadas parciales de segundo orden". Para una función tal como la indicada existen las siguientes segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Estas derivadas parciales pueden volverse a derivar parcialmente, lo que da origen a las terceras derivadas parciales, que para la función recién indicada son

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$$

y así sucesivamente. Esto indica que en general una función de dos variables tendrá $(k + 1)$ derivadas parciales de orden k.

Es interesante anotar que si tenemos la derivada

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

podemos calcular en base de ella la segunda derivada parcial con respecto a "y" para obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

También podíemos haber tenido la derivada parcial

$$\frac{\partial u}{\partial y}$$

y por derivación parcial con respecto a "x" obtener una segunda derivada parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

Estas dos derivadas de segundo orden son iguales, hecho que por su sencillez de demostración no la indicaremos. Podemos por lo tanto decir que

"Las operaciones de derivación con respecto a "x" y con respecto "y" son conmutativas".

Esta propiedad de que el orden de derivación no altera el resultado final nos permite llevar a cabo el cálculo de una derivada parcial de orden superior por el camino que creamos más conveniente usando en cada etapa de derivación la derivación con respecto a la variable que sea más sencilla de calcular, pero derivando el número de veces estrictamente necesario con respecto a cada una de las variables. Por ejemplo, para calcular

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\, \partial y^2\, \partial x^2}$$

debemos derivar dos veces con respecto "x", dos veces con respecto "y" y dos veces con respecto, no importando el orden en que se realicen estas derivaciones parciales.

Ejemplo 1

Por cálculo de las derivadas $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2}$ y $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\, \partial x}$, de la función $u = \text{sen}\,(x^2 y)$ demostrar que el orden de derivación parcial no altera el resultado final.

Solución

Para el cálculo de $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2}$ tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \cos x^2 y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\,2x^3 y\, \text{sen}\, x^2 y \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} = -\,2x^5 y \cos x^2 y$$

Para el cálculo $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\, \partial x}$ tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos x^2 y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\,x^4 \text{sen}\, x^2 y \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\, \partial x} = \underline{-\,2x^5 \cos x^2 y}$$

llegándose a resultados iguales.

Máximos y mínimos para funciones de dos variables.

Se dice que una función $f(x,y)$ pasa por un máximo para $x = a$, $y = b$ cuando el valor de la función $f(a,b)$ es mayor que cualquiera de los que puede tomarse para valores (x,y) vecinos de ellos. De la misma manera se dice que $f(a,b)$ es mínimo para $x = y = b$ cuando $t(a,b)$ es menor que cualquier valor de $f(x,y)$ en que "x" e "y" no difieren mucho de "a" y "b".

Estas definiciones pueden enunciarse de la siguiente manera:

a) $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ = número negativo, $f(a,b)$ es un máximo de $f(x,y)$

b) $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ = número positivo, $f(a,b)$ es un mínimo de $f(x,y)$

Estas relaciones deben cumplirse para todos los valores de "h" suficientemente pequeños lo que nos lleva a la conclusión que la condición de máximo o mínimo exige que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}$$

sean nulas.

Estas relaciones nos dan valores que hacen mínima o máxima la expresión pero se necesita además discriminar de que tipo de valor se trata, lo que se consigue a través de las derivadas de orden superior.

De acuerdo al teorema de Taylor tenemos que

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + R$$

Puesto que las primeras derivadas son nulas se tiene que

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + R$$

y como R es muy pequeño en comparación con "h" y "k", el signo del primer miembro dependerá del signo de la expresión de 2° grado

$$h^2A + 2hkC + k^2B$$

siendo

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; ; \; B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \; ; \; C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

De esta manera para encontrar ~~los máximos~~ y mínimos de una función $f(x,y)$ debe seguirse las siguientes etapas:

1) Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2) Calcular el valor de Δ

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

para ver si es positivo, único caso en que hay posibilidad de máximos y máximos

3) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (ó $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) es negativo, la función pasa por un máximo

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (ó $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) es positivo, la función pasa por un mínimo.

<u>Teorema de Taylor para funciones de dos ó más variables.</u>

El problema básico es desarrollar la función $f(x+h,y+k)$ en potencias de "x" e "y" ó en potencias de "h" y "k", usando para ello las derivadas parciales de la función.

Llamando $F(t)$ a la función

$$F(t) = f(x+ht,\ y+kt)$$

de acuerdo el teorema de Taylor para el caso de una variable tenemos

$$F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2!} F^{II}(0) + \frac{t^3}{3!} F^{III}(0) + \ldots$$

Sustituyendo $(x+ht)$ por α e $(y+kt)$ por β tenemos que

$$F^{I}(t) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{dt} = h\frac{\partial F}{\partial \alpha} + k \cdot \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

puesto que

$$\frac{d\alpha}{dt} = h\ ;\ \frac{d\beta}{dt} = k$$

Como además tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

ya que tenemos

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} = 1$$

se llega a que

$$F'(t) = h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}$$

En base de esta relación podemos determinar la segunda derivada de F(t) llegando a

$$F''(t) = h\frac{\partial F'}{\partial x} + k\frac{\partial F'}{\partial y} = h\left(h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + k\left(h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$$

$$\therefore F''(t) = h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

y de la misma manera para la tercera de F(t)

$$F'''(t) = h^3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3h^2k \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}$$

Introduciendo el símbolo

$$\nabla = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}$$

tenemos que

$$F'(t) = \nabla F \; ; \quad F''(t) = \nabla^2 F \; ; \quad F'''(t) = \nabla^3 F \; ; \; \ldots\ldots$$

y por lo tanto el desarrollo de Taylor, para una función de dos variables, es

$$f(x+h,\ y+k) = f(x,y) + \nabla f(x,y) + \frac{\nabla^2 f(x,y)}{2!} + \frac{\nabla^3 f(x,y)}{3!} + \ldots = \underline{e^{\nabla} f(x,y)}$$

habiendo reemplazado <u>t</u> por el valor <u>1</u>.

Cambiando "x" por "h" e "y" por "k" se tiene también

$$f(x+h,\ y+k) = f(x,y) + \nabla' f(x,y) + \frac{\nabla'^2 f(x,y)}{2!} + \frac{\nabla'^3 f(x,y)}{3!} + \ldots = \underline{e^{\nabla'} f(x,y)}$$

siendo

$$\nabla' = x \frac{\partial}{\partial h} + y \frac{\partial}{\partial k}$$

Máximos y mínimos para funciones de dos variables

Ejemplo 1

Encontrar el mínimo de la función

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - ax - by$$

Solución

1ª Etapa $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - a = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - b = 0$

lo que nos dá

2ª Etapa Cálculo de Δ para lo cual se necesitanlas segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$\therefore \Delta = (2)(2) - (1)^2 = 3$ (positivo)

hay por lo tanto posibilidad de máximo ó mínimo

3ª Etapa ya que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ es positivo, la función pasa por un mínimo, igual a $\frac{ab-a^2-b^2}{3}$

Ejemplo 2

Encontrar el máximo de la función

$$f(x,y) = \frac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Solución

Tomando logaritmos tenemos

$$z = \log f = 2\log (ax + by + c) - \log (x^2 + y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2a}{ax + by + c} - \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2b}{ax + by + c} - \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

con lo cual $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, que reemplazado en la 1ª ecuación nos da $x = \frac{a}{c}$;

$\therefore y = \frac{b}{c}$

Las segundas derivadas son

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2a^2}{(ax + by + c)^2} - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{4x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{2ab}{(ax + by + c)^2} + \frac{4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2b^2}{(ax + by + c)^2} - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{4y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

que para los valores $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ nos dan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(b^2 + c^2)\, c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{2abc^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\, a^2 + c^2)\, c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

con lo cual se deduce $\Delta > 0$ y como $\frac{\partial^2 t}{x^2}$ es negativo, la función pasa por un <u>máximo</u>, igual a $\underline{(a^2 + b^2 + c^2)}$

<u>Máximos y mínimos condicionados. Multiplicador de Lagrange</u>

Sucede a veces que tenemos que determinar el máximo ó mínimo de una función de dos o más variables cuando estas variables cumplen con ciertas condiciones restrictivas.

En este caso resulta más sencillo determinar las primeras derivadas de una función auxiliar formada con la función para la cual se calcula su valor máximo o mínimo, y las funciones de restricción de cada una multiplicada por un coeficiente o multiplicador de Lagrange.

Estas derivadas con la condición que deben ser nulas dan origen a un sistema de ecuaciones que permite expresar los valores de cada una de las variables en función de los multiplicadores y por uso de las relaciones de condición, encontrar los valores de, estos multiplicadores. Estos valores finalmente conducen a los valores de $x, y, z, \ldots$ que hacen máxima o mínima la función.

Veamos un sencillo ejemplo.

<u>Determinar las dimensiones del rectángulo de perímetro máximo que se puede inscribir dentro de un círculo.</u>

Sean (x) e (y) los lados de este rectángulo. Su perímetro (que debe ser máximo) es

$$f(x,y) = 2(x+y)$$

Como este rectángulo debe quedar inscrito en un círculo de radio R los valores "x" e "y" deben satisfacer la condición (restricción)

$$x^2 + y^2 = 4R^2$$

Como existe solamente una condición introducimos solamente un multiplicador λ, con lo cual tenemos la función

$$F(x,y) = 2(x+y) - \lambda (x^2 + y^2 - 4R^2)$$

Derivando parcialmente con respecto las variables <u>x</u> e <u>y</u> se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 - 2\lambda y = 0$$

lo que permite expresar los valores "x" e "y" en función del multiplicador de Lagrange

$$x = y = \frac{1}{\lambda}$$

El valor del multiplicador se obtiene reemplazando estos valores de "x" e "y" en la ecuación de condición

$$x^2 = y^2 = 4R^2$$

obteniéndose

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 4R^2$$

de modo que se concluye:

$$\frac{1}{\lambda} = R\sqrt{2}$$

"<u>El cuadrado inscrito es el rectángulo de perímetro máximo que se puede inscribir en el círculo</u>".

Evidentemente que para este caso tan sencillo habría sido más fácil (posiblemente) haber expresado "y" en función de "x" y haber calculado el máximo para una función de "x" solamente.

<u>Ejemplo 1</u>

<u>Dividir el número 4 en 2 partes tales que la suma del cubo de una parte y de 3 veces el cuadrado de la otra sea máximo.</u>

Solución

Sean (x) e (y) las partes. La ecuación de condición es

$$x + y = 4$$

la función que debe hacerse mínima

$$f(x,y) + x^3 + 3y^2$$

Debemos determinar las primeras derivadas parciales con respecto "x" e "y" de la función auxiliar

$$F = x^3 + 3y^2 - \lambda(x + y - 4)$$

teniéndose

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6y - \lambda = 0$$

con lo cual

$$3.x^2 = 6y = \lambda$$

que sustituído en la ecuación de condición nos lleva a la siguiente ecuación para el multiplicador:

$$\sqrt{\frac{\lambda}{3}} + \frac{\lambda}{6} = 4$$

cuya raíz que nos interesa es $\lambda = 12$

teniéndose entonces

$$\underline{x = 2} \quad ; \quad \underline{y = 2}$$

Ejemplo 2

Demostrar que las dimensiones más económicas para un recipiente rectangular de volumen dado es aquel cuya base es cuadrada y cuya altura es igual a la mitad de lado basal.

Solución

La función por minimizar es

$$f = xy + 2xz + 2yz$$

sujeto a la condición

$$V = xyz$$

Introduciendo el multiplicador λ de Lagrange,

$$F = xy + 2xz + 2yz + \lambda (xyz - V)$$

que nos da

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y + 2z + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= x + 2z + \lambda xz + 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2x + 2y + \lambda x \end{aligned}\right\} \text{ que nos lleva a } \underline{x = y = 2z = -\frac{4}{\lambda}}$$

2.16.- Jacobianos.

Se designa asi determinantes cuyos elementos son derivadas parciales de primer orden. Cuando los elementos son derivadas parciales de segundo orden se llaman Hessianos.

Estos determinantes prestan gran utilidad en los problemas de transformación es decir en los casos - en que por conveniencia - conviene cambiar las variables "x" e "y" por otro juego de variables u y v que guardan con los originales ciertas relaciones del tipo

$$x = f(u,v) \qquad y = g(u,v)$$

Antes de determinar las reglas para la transformación preocupémonos del siguiente problema general:

"Si x, y, z son funciones de la variable u y v que satisfacen cerca del punto (u_1, v_1) en el cual $x = x_1$; $y = y_1$; $z = z_1$ relaciones del tipo

$$F(x,y,z,u,v) = 0 \quad ; \quad G(x,y,z,u,v) = 0 \quad ; \quad H(x,y,z,u,v) = 0$$

cómo se pueden calcular los diferenciales totales: dx y dy?.

Tomando las diferenciales totales de estas funciones tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv = 0 \\[2ex]
\frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \frac{\partial G}{\partial z}\,dz + \frac{\partial G}{\partial u}\,du + \frac{\partial G}{\partial v}\,dv = 0 \\[2ex]
\frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy + \frac{\partial H}{\partial z}\,dz + \frac{\partial H}{\partial u}\,du + \frac{\partial H}{\partial v}\,dv = 0
\end{array}\right|$$

que nos conduce a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: dx, dy y dz.

La solución de este sistema puede darse en forma sencilla usando los determinantes.

Efectivamente si llamamos

$$p = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\[1ex] \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\[1ex] \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,z)} \qquad q = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\[1ex] \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\[1ex] \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\[1ex] \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\[1ex] \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$$

tenemos que la diferencial total dx, vale

$$dx = -\frac{p}{D}\,du - \frac{q}{D}\,dv$$

pudiéndose ver entonces que esta diferencial está expresada por cuocientes de determinantes en que aparecen derivadas parciales de primer orden, o sea por medio de Jacobianos.

Ya que la diferencial total dx también puede expresarse en la forma

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv$$

se deduce que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{p}{D} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{q}{D}$$

y de la misma manera se pue de[illegible] laciones para las derivadas parciales

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,u)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

Ejemplo 1

Dadas las relaciones

$$F = 2x + y - 3z - 2u = 0$$

$$G = x + 2y + z + u = 0$$

encontrar el valor de las derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_u \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_x \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$$

Solución

Usando la sistematización a través de los Jacobianos tenemos

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{4}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{7}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_x = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{7}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5}$$

Ejemplo 2

Dada la transformación

$$x = f(u,v) \qquad y = g(u,v)$$

con Jacobianos $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ demostrar que para las funciones inversas se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

Solución

La transformación es un caso particular de relaciones de condición. Tenemos llamando

$$F = f(u,v) - x = 0$$

$$G = g(u,v) - y = 0$$

que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v} \quad ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}$$

igualmente

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

Los Jacobianos se comportan como las derivadas en ciertos casos; por ejemplo, se puede establecer las siguientes reglas:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,w)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

siendo la primera la "regla de la cadena" y la segunda (caso particular de la primera) establece que el Jacobiano de la transformación inversa es el recíproco del Jacobiano de la transformación.

Las transformaciones de mayor utilidad son:

En el plano

El paso de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, a través de las relaciones

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

Para este tipo de transformación el Jacobiano es igual a r, pudiéndose demostrar que

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos\theta\, dr - r \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ dy &= \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}\right] \qquad \left.\begin{aligned} dr &= \cos\theta\, dx + \operatorname{sen}\theta\, dy \\ d\theta &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\, dx + \frac{\cos\theta}{r}\, dy \end{aligned}\right]$$

estas últimas relaciones se encuentran muy fácilmente usando los resultados del ejercicio 2.

En el espacio tridimensional

El paso de coordenadas cilíndricas a coordenadas esféricas, a través de las relaciones

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad z = z$$

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \; ; \; y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \; ; \; z = \rho\cos\phi$$

El Jacobiano de esta transformación es igual a $\rho^2 \operatorname{sen}\phi$, método cuya demostración se deja como ejercicio.

5-X-61/50
9-XI-62/30