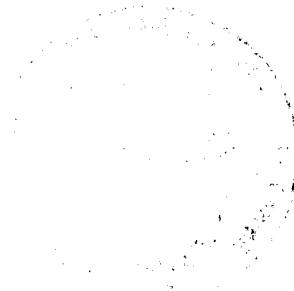


DOC PM 90161-00
(2760)

B/G
c.2

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CURSO DE 1959

A. A. / 3



CAPITULO III

INTEGRACION NUMERICA

2395



(Apuntes de clase del Prof. Albino Bocaz)

CAPITULO III

INTEGRACION NUMERICA

1. Definición

Por integración numérica se entiende el proceso de cálculo del área de una curva cuya función analítica no se conoce exactamente o cuya función no puede integrarse por medio de las fórmulas clásicas del Cálculo Integral.

En el análisis de los datos de población es corriente encontrarse con este tipo de curvas, es decir se dispone de una serie de observaciones sobre un fenómeno determinado y es muy difícil o imposible encontrar la ley matemática que describa exactamente este suceso. Debido a esta razón se divide el intervalo de observación en pequeños trozos dentro de los cuales es más seguro que los datos sigan leyes determinadas y se calculan las áreas parciales encerradas por estas series de curvas y el eje de las abscisas.

La suma de todas estas áreas parciales nos da finalmente una estimación del área verdadera, con una aproximación respecto del verdadero valor tan cercana como se quiera, lo que es posible comprobar únicamente para casos en que se conoce exactamente la integral.

Por lo tanto, de acuerdo a esta descripción, la integración numérica puede considerarse como un proceso de cálculo aproximado de la integral de una función, con una aproximación suficiente para los fines prácticos a que se dedica la cifra, tal como sucede en las aplicaciones con las cifras de población en el campo de la Demografía o en el de la Estadística.

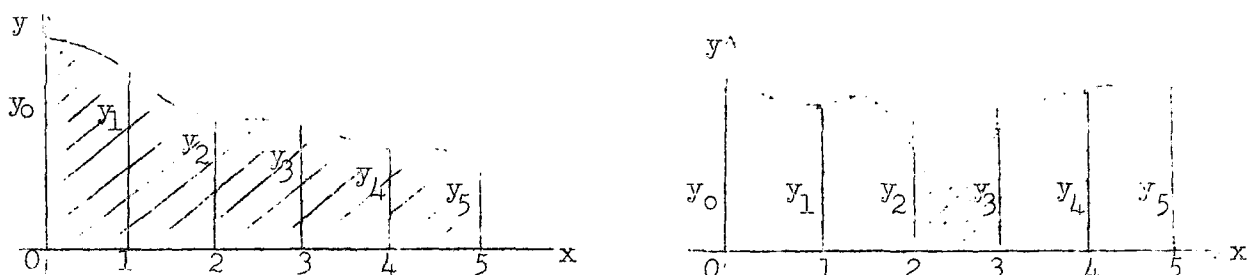
Las fórmulas de integración aproximada reciben también el nombre de "fórmulas de cuadratura" y prestan una ayuda importantísima en el campo de las Matemáticas Aplicadas, como son los campos de la Demografía, de la Matemática Actuarial, de la Estadística, etc.

De esta manera, si se dispone de la siguiente serie de valores observados:

x	0	1	2	3	4	5
y_x	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

para un suceso determinado será en general muy difícil, y aún más, es posible que no sea necesario conocer exactamente, la ley que describe esta serie. La integra-

ción numérica es la búsqueda del área aproximada encerrada por la curva y el eje de las abscisas tal como se indica en los gráficos siguientes:



indicando en el primero el caso en que interesa toda el área y en el segundo un área particular dentro del intervalo de observación.

2. Fórmulas de integración numérica de uso frecuente.

Diversas contribuciones se han hecho para resolver este problema entre las cuales describiremos las siguientes fórmulas:

- Fórmula de Newton
- Fórmula de Euler - Mc Laurin
- Fórmula de Gregory

cada una de las cuales posee ventajas desde el punto de vista matemático, entre las que pueden citarse:

- posibilidad de deducir cuantos valores, antes y después del intervalo de integración, son necesarios para obtener la seguridad requerida;
- mayor o menor rapidez en los procesos de cálculo numérico.

Fórmula de Newton.

Para la serie de valores observados pueden calcularse los términos

$$y_0; \Delta y_0; \Delta^2 y_0; \Delta^3 y_0; \Delta^4 y_0; \dots \quad (1)$$

lo que permite expresar los valores observados por la serie

$$y_x = y_0 + C_1^x \Delta_0 + C_2^x \Delta_0^2 + C_3^x \Delta_0^3 + C_4^x \Delta_0^4 + \dots \quad (2)$$

como se sabe que

$$C_n^x = \frac{1}{n!} \sum_j S_n^j x^j$$

siendo S_n^j los "números de Stirling de la. clase", es posible realizar el cálculo aproximado de la integral de los datos observados desde el origen hasta un punto "a" (entero y positivo) de la escala por la relación

$$\int_0^a y_x dx = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(a) \Delta_0^j \quad (4)$$

siendo

$$f_j(a) = \int_0^a c_j^x dx = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n S_j^k \frac{a^{k+1}}{k+1} \quad (5)$$

una función que depende únicamente de "a", que puede tabularse dado que los valores de estas funciones son:

$$\left. \begin{aligned} 2 f_1(a) &= a^2 \\ 12 f_2(a) &= a^2(a-3) \\ 24 f_3(a) &= a^2(a-2)^2 \\ 720 f_4(a) &= a^2(6a^3 - 45 a^2 + 110 a - 90) \\ 1440 f_5(a) &= a^2(a-4)(2a^3 - 16 a^2 + 41 a - 36) \\ 60480 f_6(a) &= a^2(12 a^5 - 210 a^4 + 1428 a^3 - 4725 a^2 + 7672 a - 5040) \\ 120960 f_7(a) &= a^2(a-6)(3a^5 - 54 a^4 + 376 a^3 - 1272 a^2 + 2112 a - 1440) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Si por alguna razón el valor de "a" es fraccionario, las funciones permiten el cálculo sin ninguna dificultad tan importante.

Coefficientes para los valores que se indican

(Amplificados en 120.960)

a	y_0	Δ_0	Δ_0^2	Δ_0^3	Δ_0^4	Δ_0^5	Δ_0^6	Δ_0^7
1	120960	60480	-10080	5040	-3192	2268	-1726	1375
2	241920	241920	40320	-	-1344	1344	-1184	1024
3	362880	544320	272160	45360	-4536	2268	-1566	1215
4	483840	967680	806400	322560	37632	-	-1024	1024
5	604800	1512000	1764000	1134000	357000	39900	-2750	1375
6	725760	2177280	3265920	2903040	1487808	399168	35424	-
7	846720	2963520	5433120	6174000	4387656	1889244	432866	36799

Para el caso en que se desee hacer uso de las funciones es conveniente preparar una tabla de coeficientes que evite la división por 120.960, lo que se ha hecho en la tabla siguiente:

Tabla de coeficientes para:

a	y_0	Δ_0	Δ_0^2	Δ_0^3	Δ_0^4	Δ_0^5	Δ_0^6	Δ_0^7
1	1	0.5	-0.0833	0.0042	-0.0264	0.0187	-0.0143	0.0114
2	2	2.0	0.3333	-	-0.0111	0.0111	-0.0098	0.0085
3	3	4.5	2.2500	0.0375	-0.0375	0.0187	-0.0129	0.0100
4	4	8.0	6.6667	0.2667	0.3111	-	-0.0085	0.0085
5	5	12.5	14.5833	0.9375	2.9514	0.3299	-0.0227	0.0114
6	6	18.0	27.0000	2.4000	12.3000	3.3000	0.2929	-
7	7	24.5	44.9167	5.1042	36.2736	15.6187	3.5786	0.3042

Puede, aún más, prepararse una tabla de coeficientes que evite el cálculo de las diferencias finitas y que use solamente los valores observados y_x . Estos coeficientes dependerán no solamente de "a", sino del grado "k" de la curva de interpolación usada. Los coeficientes que resultan se dan en la tabla siguiente:

Tabla de coeficientes para:

a	k	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
1	1	0.5000	0.5000						
	2	0.4167	0.6667	-0.0833					
	3	0.3750	0.7917	-0.2083	0.0417				
	4	0.3486	0.8972	-0.3667	0.1472	-0.0264			
	5	0.3299	0.9910	-0.5542	0.3347	-0.1201	0.0187		
	6	0.3156	1.0766	-0.7682	0.6201	-0.3342	0.1044	-0.0143	
	7	0.3042	1.1562	-1.0069	1.0180	-0.7320	0.3431	-0.0938	0.0114
2	2	0.3333	1.3333	0.3333					
	3	0.3333	1.3333	0.3333	0.0000				
	4	0.3222	1.3778	0.2667	0.0444	-0.0111			
	5	0.3111	1.4333	0.1556	0.1556	-0.0667	0.0111		
	6	0.3013	1.4921	0.0089	0.3513	-0.2135	0.0698	-0.0098	
	7	0.2929	1.5513	-0.1690	0.6476	-0.5098	0.2476	-0.0690	0.0085
	3	3	0.3750	1.1250	1.1250	0.3750			
4		0.3375	1.2750	0.9000	0.5250	-0.0375			
5		0.3187	1.3687	0.7125	0.7125	-0.1312	0.0187		
6		0.3058	1.4464	0.5183	0.9714	-0.3254	0.0964	-0.0129	
7		0.2958	1.5167	0.3074	1.3230	-0.6770	0.3074	-0.0833	0.0100
4		4	0.3111	1.4222	0.5333	1.4222	0.3111		
	5	0.3111	1.4222	0.5333	1.4222	0.3111	0.0000		
	6	0.3026	1.4730	0.4063	1.5915	0.1841	0.0508	-0.0085	
	7	0.2942	1.5323	0.2286	1.8878	-0.1122	0.2286	-0.0677	0.0085
5	5	0.3299	1.3021	0.8681	0.8681	1.3021	0.3299		
	6	0.3071	1.4385	0.5270	1.3223	0.9611	0.4663	-0.0227	
	7	0.2958	1.5181	0.2883	1.7206	0.5632	0.7050	-0.1023	0.0114
6	6	0.2929	1.5429	0.1929	1.9429	0.1929	1.5429	0.2929	
	7	0.2929	1.5429	0.1929	1.9429	0.1929	1.5429	0.2929	0.0000
7	7	0.3042	1.4490	0.5359	1.2108	1.2108	0.5359	1.4490	0.3042

a = ancho del intervalo de integración
 k+1 = número de valores (y_x) considerados

Ejemplo 1

50

Determinar el valor $\int_{45}^{50} l_x dx$ dada la información

45

x	25	30	35	40	45	50	55	60
l_x	91335	90078	88573	86650	84069	80487	75557	68924

Solución:

La regla de trapecios nos da:

$$(84069 + 80487) 2.5 = \underline{413.890}$$

Usando una curva de 7o. grado (para este problema no es necesario, solamente se hace para indicar como se usa la tabla de multiplicadores) el área buscada está dada por:

$$\int_{45}^{50} l_x dx = \int_{25}^{50} l_x dx - \int_{25}^{45} l_x dx$$

y en base de los coeficientes de la tabla se tiene:

$$\begin{aligned} & \underline{0.0016} l_{25} - \underline{0.0142} l_{30} + \underline{0.0597} l_{35} - \underline{0.1672} l_{40} + \underline{0.6754} l_{45} \\ & + \underline{0.4764} l_{50} - \underline{0.0346} l_{55} + \underline{0.0029} l_{60} \end{aligned}$$

y aplicando estos multiplicadores a los valores observados se encuentra

$$\begin{aligned} & 5 [0.0016(91335) - 0.0142(90078) + 0.0597(88573) - 0.1672(86650) + 0.6754(84069) \\ & + 0.4764(80487) - 0.0346(75557) + 0.0029(68924)] = \underline{411.885} \end{aligned}$$

siendo 411.857 el verdadero valor.

Ejemplo 2

Determinar el valor de $\int_{30}^{50} l_x dx$ dada la información:

x	25	30	35	40	45	50	55	60
l_x	91335	90078	88573	86650	84069	80487	75557	68924

Solución:

La regla de los trapecios nos da

$$5 \left[\frac{(90078+80487)}{2} + 88573 + 86650 + 84069 \right] = 5(344575) = \underline{1.722.875}$$

en cambio usando los multiplicadores de la tabla tenemos:

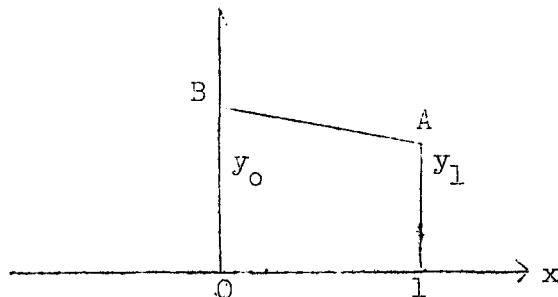
$$5(-0.0084 \cdot 91335 + 0.3619 \cdot 90078 + 1.2952 \cdot 88573 + 0.7026 \cdot 86650 + 1.2952 \cdot 84069 + 0.3619 \cdot 80487 - 0.0085 \cdot 75557) = \underline{1.724.021}$$

siendo el verdadero valor 1.724.003.

3. Casos de interés práctico.

Regla de los trapecios. (Caso de 1 franja).

Se refiere al caso en que el área buscada es el área comprendida entre dos valores observados sin tomar en consideración la información dada por los otros valores vecinos. En este caso entre los dos puntos puede trazarse una línea recta de interpolación y el área buscada es el área del trapecio OLAB, según se indica en la figura:



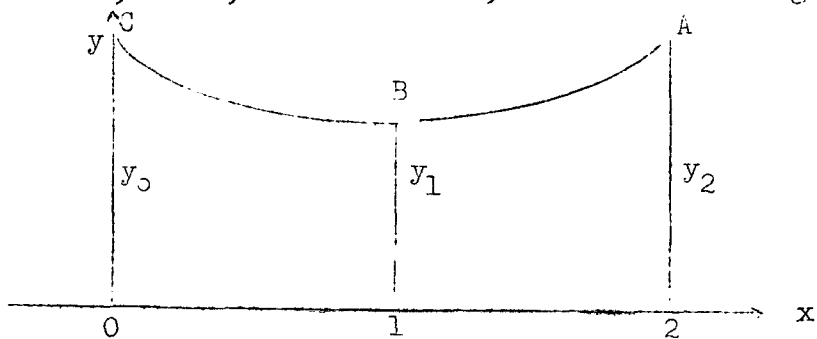
Esta relación puede deducirse en base de los coeficientes de la tabla. Efectivamente el área buscada es:

$$R.T. = \int_0^1 y_x dx = y_0 + \frac{\Delta_0}{2} = y_0 + (y_1 - y_0)/2 = (y_0 + y_1)/2 \quad (7)$$

lo que corresponde como bien se sabe al área del trapecio OLAB, ya que esa área es igual a la semi-suma de las bases por la altura.

Regla de Simpson. (Caso de 2 franjas).

Es el área determinada por la curva que pasa por 3 puntos sucesivos y el eje de las abscisas, o sea, el área O12ABC, indicada en la figura:



La integral que se busca es:

$$\int_0^2 y_x dx$$

de modo que para $a=2$, en base de los coeficientes de la tabla se tiene:

$$R.S. = \int_0^2 y_x dx = 2 y_0 + 2 \Delta_0 + \frac{\Delta_0^2}{3} = (y_0 + 4y_1 + y_2)/3 \quad (8)$$

fórmula que recibe el nombre de "fórmula de Simpson".

Regla de los 3/8. (Caso de 3 franjas).

Cuando se conocen 4 puntos equidistantes en el intervalo de integración, la integral toma el valor ($a = 3$):

$$\int_0^3 y_x dx = 3y_0 + 9/2 \Delta_0 + 9/4 \Delta_0^2 + 3 \frac{\Delta_0^3}{8} \quad (9)$$

que puede reducirse a:

$$R. \frac{3}{8} = \int_0^3 y_x dx = \frac{3}{8} [(y_0 + y_3) + 3(y_1 + y_2)] \quad (10)$$

fórmula que recibe el nombre de "regla de los 3/8" debido a que este número es el coeficiente que encabeza la relación que da el área.

Fórmula de Boole. (Caso de 4 franjas).

Corresponde al caso en que para el intervalo de integración se conocen 5 puntos. En este caso el área podría calcularse por la regla de los trapecios aplicada en cada una de las fajas, o bien 2 veces la fórmula de Simpson, siendo los resultados, respectivamente:

$$R.T. = 1/2(y_0 + y_4) + (y_1 + y_2) + y_3 \quad (11)$$

$$R.S. = 1/3(y_0 + y_4) + 4/3(y_1 + y_2) + 2/3 y_3 \quad (12)$$

Puede suceder (y esto constituye una notable ventaja práctica) que la sencilla regla de los trapecios dé valores aceptables; pero en algunos casos (área de una curva usando valores distancados en 5 años) esta fórmula no es lo suficientemente exacta, por lo cual puede obtenerse valores más vecinos a los verdaderos usando una parábola de 4o. grado.

En este caso, de acuerdo a la tabla de coeficientes, se tiene:

$$\int_0^4 y_x dx = 4 y_0 + 8 \Delta y_0 + 20/3 \Delta^2 y_0 + 8/3 \Delta^3 y_0 + 14/45 \Delta^4 y_0 \quad (13)$$

que puede reducirse a la forma:

$$\int_0^4 y_x dx = 2/45 [7(y_0 + y_4) + 32(y_1 + y_3) + 12y_2] \quad (14)$$

relación que recibe el nombre de "fórmula de Boole" que da valores muy semejantes a los obtenidos usando la fórmula de Simpson.

Caso de 5 franjas (6 valores observados).

Cuando el intervalo de integración se divide en 5 franjas, el área de la curva queda dada aproximadamente por la relación:

$$\int_0^5 y_x dx = 5 y_0 + 25/2 \Delta y_0 + 175/12 \Delta^2 y_0 + 75/8 \Delta^3 y_0 + 425/144 \Delta^4 y_0 + 95/288 \Delta^5 y_0 \quad (15)$$

que puede reducirse a:

$$\int_0^5 y_x dx = 5/288 [19(y_0+y_5) + 75(y_1+y_4) + 50(y_2+y_3)] \quad (16)$$

Para evitar el uso de estos multiplicadores puede usarse otras 2 formas de integración:

- Para edades centrales.

Para las 2 primeras y las 2 últimas franjas se aplica la regla de Simpson y para la faja central la regla de los trapecios, con lo cual el área vale:

$$\int_0^5 y_x dx \doteq (2 y_0 + 8 y_1 + 5 y_2 + 5 y_3 + 8 y_4 + 2 y_5)/6 \quad (17)$$

- Para edades extremas.

Para las dos primeras franjas la regla de Simpson y para las franjas del extremo, la regla de los 3/8, con lo cual el área toma la forma:

$$\int_0^5 y_x dx \doteq (8 y_0 + 32 y_1 + 17 y_2 + 27 y_3 + 27 y_4 + 9 y_5)/24 \quad (18)$$

Ejemplo 1

Determinar el valor de $\int_{20}^{40} \frac{1}{x} dx$ con la siguiente información:

x	20	25	30	35	40	45
y _x	92435	91335	90078	88573	86650	84069

y usando las aproximaciones siguientes:

- Regla de los Trapecios
- Fórmula de las 5 franjas
- Fórmula para edades centrales.

Solución:

La regla de los trapecios nos da:

$$R.T. = \left[\frac{(92435+84069)}{2} + 91335 + 90078 + 88573 + 86650 \right] (5) = 438888 \cdot 5 = \underline{2.194.440}$$

La regla de las 5 franjas nos da:

$$= \frac{25}{288} (19 \cdot 176504 + 75 \cdot 177985 + 50 \cdot 178651) = \underline{2.225.260}$$

Y, finalmente la regla mixta:

$$= \frac{2 \cdot 176504 + 8 \cdot 177985 + 5 \cdot 178651}{1.2} = \frac{2669143}{2} = \underline{2.225.120}$$

siendo el verdadero valor 2.225.258, con lo cual las fórmulas mantienen las diferencias relativas de 818; 2; 140; respectivamente.

Puede decirse entonces que la regla mixta da una seguridad bastante aceptable y no representa de ninguna manera una mayor dificultad de aplicación como la regla de los trapecios.

Ejemplo 2.

Determinar el valor de $\int_{80}^{105} \frac{1}{x} dx$ con la siguiente información:

x	80	85	90	95	100	105
y _x	22883	11073	3796	857	123	11

y usando las aproximaciones siguientes:

- Regla de los Trapecios
- Regla de las 5 franjas
- Regla mixta para edades extremas

Solución:

La regla de los trapecios nos da:

$$5 \left(\frac{22883+11}{2} + 11073 + 3796 + 857 + 123 \right) = \underline{136.480}$$

Usando la regla de las 5 franjas se tiene:

$$= \frac{1}{11,52} (19 \cdot 22894 + 75 \cdot 11196 + 50 \cdot 4653) = \underline{130.845}$$

7 Y con la regla mixta se encuentra:

$$\int_{80}^{105} y_x dx = (8 \cdot 22883 + 32 \cdot 11073 + 17 \cdot 3796 + 27 \cdot 857 + 27 \cdot 123 + 9 \cdot 11) / 4.8 = \underline{130.919}$$

siendo el verdadero valor 131.114, obtenemos nuevamente con la regla mixta el resultado más satisfactorio, desde el punto de vista de la exactitud y del operacional.

Caso de 6 franjas (7 valores observados).

En este caso el intervalo de integración se divide en 6 franjas y el área, en base de la parábola de 6o. grado está dada por la relación:

$$\int_0^6 y_x dx = 6 y_0 + 18 \Delta_0 + 27 \Delta_0^2 + 24 \Delta_0^3 + 123/10 \Delta_0^4 + 33/10 \Delta_0^5 + 41/140 \Delta_0^6 \quad (19)$$

que puede reducirse a:

$$= 1/140 \left[41(y_0+y_6) + 216(y_1+y_5) + 27(y_2+y_4) + 272 y_3 \right] \quad (20)$$

Si el coeficiente de la 6a. diferencia se reemplaza por el valor aproximado 3/10, luego de reducir, se tiene:

$$\int_0^6 y_x dx \doteq 0.3(y_0+y_2+y_4+y_6) + 1.5(y_1+y_5) + 1.8 y_3 \quad (21)$$

relación que se conoce como la "Fórmula de Weddle" y cuyo uso es tan cómodo como la regla de los trapecios.

Si en lugar de reemplazar el coeficiente 41/100 por 3/10 se hace por el valor 7/25, se llega a la relación:

$$\int_0^6 y_x dx \doteq 0.28(y_0+y_6) + 1.62(y_1+y_5) + 2.20 y_3 \quad (22)$$

fórmula que recibe el nombre de "Fórmula de Hardy!". Esta relación puede obtenerse también, haciendo pasar una parábola de 4o. grado por los puntos $(0, y_0)$; $(1, y_1)$; $(3, y_3)$; $(5, y_5)$; $(6, y_6)$.

Como en el caso de las fórmulas para 5 fajas, se pueden calcular fórmulas usando las reglas anteriores, como, por ejemplo, la regla de los 3/8 y aún la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

Si se usa la regla de Simpson, se tiene:

$$\left[(y_0+y_6) + 4(y_1+y_3+y_5) + 2(y_2+y_4) \right] / 3 \quad (23)$$

Y, si se usa la regla de los 3/8, se tiene:

$$3/8 \left[(y_0+2 y_3 + y_6) + 3 (y_1+y_2+y_4+y_5) \right] \quad (24)$$

Las compararemos a través de los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.

Determinar el valor de $\int_{15}^{45} \frac{1}{x} dx$ dada la información:

x	15	20	25	30	35	40	45
y _x	93235	92435	91335	90078	88573	86650	84069

usando las reglas siguientes:

- Regla de los trapecios
- Regla de las 6 franjas
- Regla de Weddle
- Regla reiterada de los 3/8

Solución:

La regla de los trapecios nos da:

$$\begin{aligned} R.T. &= (93235 + 84069)2.5 + (92435 + 91335 + 90078 + 88573 + 86650)5.0 \\ &= \underline{2.688.615} \end{aligned}$$

A su vez, la regla de las 6 franjas nos lleva a:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{28} \left[\underline{41}(93235+84069) + \underline{216}(92435+86650) + \underline{27}(91335+88573) \right. \\ &\quad \left. + \underline{272}(90078) \right] = \underline{2.689.663} \end{aligned}$$

La fórmula aproximada de Weddle:

$$\begin{aligned} R.W. &= \left[0.3(93235+91335+88573+84069) + 1.5(92435+86650) + 1.8(90078) \right] 5 \\ &= 53794.9(5) = \underline{2.689.748} \end{aligned}$$

La regla reiterada de los 3/8:

$$3/1.6(357460 + 1076979) = \underline{2.689.584}$$

Como el verdadero valor es 2.689.577, se puede afirmar entonces, que, en base a su sencillez y aproximación, la regla de los 3/8 es bastante aceptable para cálculos de rutina.

Ejemplo 2.

Determinar el valor de $\int_{75}^{105} \frac{1}{x} dx$ dada la información:

x	75	80	85	90	95	100	105
y_x	36735	22883	11073	3796	857	123	11

usando la regla reiterada de los 3/8 y la regla de los trapecios.

Solución:

La regla de los trapecios nos da:

$$5\left(\frac{36735+11}{2} + 22883 + 11073 + 3796 + 857 + 123\right) = 5 \cdot 57104 = \underline{285.520}$$

y la regla de los 3/8 nos lleva a:

$$3/1.6(44338 + 3 \cdot 34936) = \underline{279648}$$

como el verdadero valor es 280.006, se tiene que la regla reiterada de los 3/8 es bastante mejor que la regla de los trapecios.

Nota: Debe indicarse que los coeficientes que multiplican los valores observados y_x , cuando se usan las fórmulas de las franjas, fueron primeramente calculados por Cotes usando la fórmula de interpolación de Newton, y, por lo tanto reciben el nombre de "números de Cotes".

Los ejemplos anteriores llaman la atención sobre el hecho de que el uso de mezclas o reiteración de las fórmulas para los casos sencillos (regla de trapecios, regla de Simpson y regla de los 3/8) rinden aproximaciones tan eficientes, como si se usaran los multiplicadores de Cotes basados en parábolas de grado superior.

Veamos, por lo tanto, los dos últimos casos: caso de 8 franjas y caso de 10 franjas.

Caso de 8 franjas (9 valores observados).

Para este caso pueden usarse las fórmulas siguientes:

- Regla de los trapecios (7 veces)
- Regla de Simpson y regla de los 3/8
- Regla de los 3/8 y regla de Boole

Si se aplican las reglas de Simpson y de los 3/8, se obtienen fórmulas más sencillas.

Para edades centrales, se obtiene:

$$\int_0^7 y_x dx \doteq \frac{8(y_0+y_1) + 32(y_1+y_6) + 17(y_2+y_5) + 27(y_3+y_4)}{24} \quad (25)$$

Para edades extremas se llega a:

$$\int_0^y y_x dx \doteq (8 y_0 + 32 y_1 + 16 y_2 + 32 y_3 + 17 y_4 + 27 y_5 + 27 y_6 + 9 y_7) / 24 \quad (26)$$

Ejemplo 1.

Determinar el valor de $\int_{70}^{105} \frac{1}{x} dx$ dada la información:

x	70	75	80	85	90	95	100	105
y _x	49655	36735	22883	11073	3796	857	123	11

Solución:

De acuerdo a la fórmula para edades extremas se tiene:

$$(8 \cdot 49655 + 32 \cdot 36735 + 16 \cdot 22883 + 32 \cdot 11073 + 17 \cdot 3796 + 27 \cdot 857 + 27 \cdot 123 + 9 \cdot 11) / 48 = \frac{2384315}{4.8} = 496732$$

siendo el verdadero valor 496.760, lo que representa una aproximación aceptable.

Ejemplo 2.

Determinar el valor $\int_{35}^{70} \frac{1}{x} dx$ dada la información

x	35	40	45	50	55	60	65	70
y _x	88573	86650	84069	80487	75557	68924	60366	49655

Solución:

De acuerdo a la fórmula de edades centrales se tiene:

$$\begin{aligned} & \left[8(88573+49655) + 32(86650+60366) + 17(84069+68924) + 27(80487+75557) \right] / 4.8 \\ & = 12624405 / 4.8 = \underline{2.630.084} \end{aligned}$$

siendo el valor exacto 2.629.910, lo que es más que suficientemente aceptable.

Caso de 10 franjas (11 valores observados).

En este caso pueden usarse las fórmulas de Simpson y de los 3/8 combinadas de la siguiente manera:

Para edades centrales.

En las franjas de los extremos se usan las fórmulas de Simpson y en las fajas centrales la fórmula de los 3/8, lo que nos lleva a la siguiente relación:

$$\int_0^{10} y_x dx \doteq \left[8(y_0+y_{10}) + 32(y_1+y_9) + 17(y_2+y_8) + 27(y_3+y_4+y_6+y_9) + 18 y_5 \right] / 24 \quad (27)$$

Para edades extremas.

En las fajas de las edades menores se usa 2 veces la fórmula de Simpson y en las fajas de las edades mayores 2 veces la fórmula de los 3/8, lo que nos da:

$$\int_0^{10} y_x dx \doteq \left[8 y_0 + 32(y_1+y_3) + 16y_2 + 17y_4 + 27(y_5+y_6+y_8+y_9) + 18 y_7 + 9 y_{10} \right] / 24 \quad (28)$$

Existe otra fórmula de interés que es la "fórmula de Shovelton", que tiene la forma:

$$\int_0^{10} y_x dx \doteq 5/126 \left[8(y_0 + y_{10}) + 35(y_1 + y_3 + y_7 + y_9) + 15(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 36 y_5 \right] \quad (29)$$

Veamos dos ejemplos de aplicación de estas fórmulas:

Ejemplo 1.

Determinar el valor de $\int_{25}^{70} l_x dx$ dada la información:

x	25	35	35	40	45	50	55	60	65	70	75
y _x	91335	90078	88573	86650	84069	80487	75557	68924	60366	49655	36735

usando las fórmulas mixtas y la fórmula de Shovelton.

Solución:

La forma para edades centrales nos da:

$$(8 \cdot 128070 + 32 \cdot 139733 + 17 \cdot 148939 + 27 \cdot 315200 + 18 \cdot 80487) / 4.8 = \underline{3.747.322}$$

en cambio, la fórmula de Shovelton nos lleva a:

$$R.Sh. \doteq (8 \cdot 128070 + 35 \cdot 295307 + 15 \cdot 308565 + 36 \cdot 80487) / 5.04 = \underline{3.747.284}$$

siendo el verdadero valor 3.747.025. Si hubiésemos aplicado la fórmula de los trapecios habríamos obtenido 3.741.970.

Ejemplo 2.

Determinar el valor de $\int_{55}^{105} l_x dx$ dada la información:

x	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
y _x	75557	68924	60336	49655	36735	22883	11073	3796	857	123	11

usando las correspondientes fórmulas.

Solución:

Usando la fórmula mixta se tiene:

$$(8 \cdot 75557 + 32 \cdot 118579 + 16 \cdot 60336 + 17 \cdot 36735 + 27 \cdot 34936 + 18 \cdot 3796 + 9 \cdot 11) / 4.8 = \underline{1.458.449}$$

y por la fórmula de Shovelton se llega a:

$$R.Sh. = (8 \cdot 75568 + 35 \cdot 122498 + 15 \cdot 109001 + 36 \cdot 22883) / 5.04 = \underline{1.458.488}$$

siendo el verdadero valor 1.458.699. La fórmula de los trapecios nos da 1.460.830.

4. Fórmula de Euler-Mac Laurin.

Esta fórmula permite dar el área de una curva en función de la suma de los valores observados y de las derivadas sucesivas de la función de ajuste.

Para deducir esta fórmula introduciremos previamente los números de Bernouilli, que juegan un rol importante en los procesos de cálculo numérico. Los números de Bernouilli se originan al tratar de desarrollar en serie la función:

$$f(v) = \frac{v}{e^v - 1} \quad (30)$$

Veamos, por lo tanto, la ley que rige la aparición de estos números. La función $f(v)$ para $v = 0$ es una expresión del tipo $0/0$, es decir, una expresión indeterminada, cuya indeterminación se levanta usando la regla de L'Hôpital, o sea, derivando el numerador y el denominador y evaluando el valor de la fracción en el punto considerado. Si después de derivar aún se mantiene la indeterminación se reitera el proceso hasta llegar a obtener un valor determinado. Para el caso nuestro es fácil demostrar que la expresión vale 1, valor que corresponde al valor del coeficiente " a_0 ". Puede demostrarse además que el coeficiente " a_1 " vale $-1/2$ y que los coeficientes cuyo subíndice es impar (3, 5, 7, ...) son todos nulos.

Esto se demuestra de la siguiente manera. Cambiando v por $(-v)$ se tiene que

$$f(-v) = v + f(v) \quad (31)$$

lo que exige las condiciones recién señaladas.

De esta manera la serie buscada debe tener la forma:

$$\frac{v}{e^{v-1}} = 1 - \frac{v}{2} + a_2 v^2 + a_4 v^4 + a_6 v^6 + a_8 v^8 + \dots \quad (32)$$

quedando entonces por determinar el valor de los coeficientes "a_{2j}".

Pasando el denominador al 2o. miembro y usando el conocido desarrollo de e^v se tiene:

$$1 \equiv (1 - \frac{v}{2} + a_2 v^2 + a_4 v^4 + \dots)(1 + \frac{v}{2!} + \frac{v^2}{3!} + \frac{v^3}{4!} + \dots) \quad (33)$$

y, si igualamos a 0 los coeficientes de las potencias impares de "v" se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \text{para el coeficiente } v^3: \quad \frac{1}{4!} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3!} \right) &= \frac{a_2}{2!} \\ \text{para el coeficiente } v^5: \quad \frac{1}{6!} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5!} \right) &= \frac{a_4}{2!} + \frac{a_2}{4!} \\ \text{para el coeficiente } v^7: \quad \frac{1}{8!} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7!} \right) &= \frac{a_6}{2!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_2}{6!} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

.....

Y, si introducimos los coeficientes

$$2!a_2 = B_2; \quad 4!a_4 = B_4; \quad 6!a_6 = B_6; \quad \dots \quad (35)$$

estas relaciones se transforman en las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} C_2^4 B_2 &= 1; \quad C_2^6 B_2 + C_4^6 B_4 = 2 \\ C_2^8 B_2 + C_4^8 B_4 + C_6^8 B_6 &= 3; \quad C_2^{10} B_2 + C_4^{10} B_4 + C_6^{10} B_6 + C_8^{10} B_8 = 4; \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Es decir, en general:

$$\sum_{j=1}^k C_{2j}^{2k+2} B_{2j} = k \quad (37)$$

recibiendo los números B_{2j} el nombre de "números de Bernouilli".

Del uso de esta ley de recurrencia se tienen los valores:

$$B_2 = 1/6 ; B_4 = -1/30 ; B_6 = 1/42 ; B_8 = -1/30 ; \dots \quad (38)$$

con lo cual el desarrollo buscado toma la forma:

$$\frac{v}{e^v - 1} = 1 - v/2 + B_2 \frac{v^2}{2!} - B_4 \frac{v^4}{4!} + B_6 \frac{v^6}{6!} - B_8 \frac{v^8}{8!} + \dots \quad (39)$$

Ahora bien, se demostró que:

$$\Delta \equiv e^D - 1 \quad (40)$$

de manera que,

$$\Delta^{-1} \equiv \frac{1}{D} \frac{D}{e^D - 1} \quad (41)$$

y de acuerdo al desarrollo recién encontrado se puede escribir:

$$\Delta^{-1} \equiv D^{-1} + \sum_1^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} D^{j-1} \quad (42)$$

aplicando esta relación a la función y_x , si la suma se realiza desde $x = a$, hasta $x = b$, se tendrá:

$$\sum_a^b y_x = \int_a^b y_x dx + \sum_1^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \left| D_6^{j-1} - D_a^{j-1} \right| \quad (43)$$

relación que recibe el nombre de fórmula de Euler-Mac Laurin.

Ejemplo 1. *

Determinar el valor aproximado de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

Solución:

Eligiendo un ancho de intervalo de 0.1, ya que

$$y_x = \frac{1}{1+x} ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2} ; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

se tiene:

$$\therefore \frac{1}{0.1} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \dots + \frac{1}{1.9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{0.1}{12} \left(-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} \right)$$

$$+ \frac{0.001}{720} \left(-\frac{6}{2^4} + \frac{6}{1^4} \right) - \dots = 0.50000 - \frac{1}{120} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{720000} \cdot 6 \cdot \frac{15}{16}$$

0.90909

0.83333

0.76923

0.71429

0.66667

0.62500

0.58824

0.55556

0.52632

0.25000

6.93773

$$= 6.93773 + 0.00625 + 0.00001 = \underline{6.93149}$$

Nota: La fórmula de Gregory de la que se hizo mención en el párrafo 2, no se realizará, porque no aporta ninguna ventaja de cálculo.

* Extraído de "Mathematics for Actuarial Students" de Harry Freeman, Parte II, Pág. 190.

5. Integración numérica por medio de sumas lineales de funciones exponenciales.

Este párrafo resume el artículo del mismo nombre publicado en los Anales de Estadística Matemática Vol. 20 de 1949 debido a R.E. Greenwood que tiene un uso justificado para el cálculo de áreas en funciones decrecientes o ascendentes que siguen leyes geométricas en general. Estas leyes son muy frecuentes en el Análisis Demográfico.

De esta manera la integral $\int_{-1}^1 y_x dx$ queda dada aproximadamente por las relaciones

$$\int_{-1}^1 y_x dx \doteq \sum a_j y_j \quad \text{ó} \quad \int_{-1}^1 y_x dx = \sum b_j y_j \quad (44)$$

si se emplean las funciones exponenciales (con origen en el centro del intervalo de integración):

$$f_j(x) = e^{jx} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \quad (45)$$

$$f_j(x) = e^{jx} \quad j = -\frac{k}{2}, -\frac{k}{2} + 1, \dots, 0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2} \quad (46)$$

siendo k el número de fajas en que se ha dividido el intervalo de integración.

Para facilidad en el uso de este tipo de integración se da una tabla de los coeficientes a_j y b_j , para el caso en que el intervalo de integración se divida hasta en $k=6$ fajas. Cuando el número de fajas es par, puede usarse cualquiera de las 2 funciones exponenciales dependiendo el grado de aproximación de la mayor propiedad con que la función exponencial mixta describe la serie empírica o analítica no integrable exactamente.

k	Coeficientes a_j		Coeficientes b_j	
1	$a_0 = 0.656518$ $a_1 = 0.343482$			
2	$a_0 = 0.218050$ $a_1 = 1.497807$ $a_2 = 0.284142$	$b_0 = 0.322606$ $b_1 = 1.354788$ $b_2 = 0.322606$		
3	$a_0 = 0.769864$ $a_1 = 0.336676$ $a_2 = 1.622333$ $a_3 = 0.271127$			
4	$a_0 = -0.274332$ $a_1 = 2.801970$ $a_2 = -0.617904$ $a_3 = 1.834218$ $a_4 = 0.256062$	$b_0 = 0.300964$ $b_1 = 1.464866$ $b_2 = 0.468340$ $b_3 = 1.464866$ $b_4 = 0.300964$		
5	$a_0 = 1.722982$ $a_1 = -2.691107$ $a_2 = 5.313365$ $a_3 = -1.589890$ $a_4 = 1.998345$ $a_5 = 0.246305$			
6	$a_0 = -2.50803$ $a_1 = 10.62384$ $a_2 = -11.64306$ $a_3 = 9.96762$ $a_4 = -2.94055$ $a_5 = 2.16225$ $a_6 = 0.23914$	$b_0 = 0.28332$ $b_1 = 1.60395$ $b_2 = 0.03417$ $b_3 = 2.15715$ $b_4 = 0.03417$ $b_5 = 1.60395$ $b_6 = 0.28332$		

Ejemplo 1.

Determinar el valor de $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ si $I_1 = 95.290$, usando las reglas siguientes:

- la regla de los trapecios con los valores naturales
- la regla de los trapecios con los logaritmos de los números
- la fórmula exponencial para el caso de la faja.

En base de los resultados obtenidos, ¿Cuál fórmula sería recomendable en los cálculos prácticos de rutina?

Solución:

La regla de los trapecios con los valores naturales nos da

$$R.T. = (100000+95290)/2 = \underline{97.645}$$

La misma regla anterior con los logaritmos de los números nos lleva a

$$Arca = \sqrt[10]{100000 \cdot 95290} = \underline{97.617}$$

y finalmente la exponencial nos da

$$Area = (0.343482)(100000) + (0.656518)(95290) = \underline{96.908}$$

siendo el valor verdadero 96058.

Ejemplo 2.

Determinar el valor de $\int_{75}^{105} l_x dx$ dada la información:

x	75	80	85	90	95	100	105
l_x	36735	22883	11073	3796	857	123	11

usando las funciones exponenciales.

Solución:

Por tratarse de un número par de fajas podemos usar los multiplicadores a_j o b_j . Usando los multiplicadores a_j debemos invertir el orden de estos multiplicadores, ya que la curva de los l_x es una curva decreciente y la tabla supone que la curva es creciente. De esa manera, se tiene

$$5 \left[(0.23814)(36735) + (2.14225)(22883) - (2.84055)(11073) + (9.95762)(3796) \right. \\ \left. - (11.64306)(857) + (10.62384)(123) - (2.50821)(11) \right] = \underline{279.558}$$

y usando los coeficientes b_j , se tiene:

y usando los coeficientes b_j se tiene:

$$5 \left[(36735+11)(0.28332) + (22883+123)(1.60395) + (11073+857)(0.03417) + (3796)(2.15715) \right] = \underline{279.538}$$

siendo el verdadero valor 280.006. Nótese que la regla de los 3/8 da una aproximación excelente con un juego de multiplicadores mucho más sencillos (279.648).

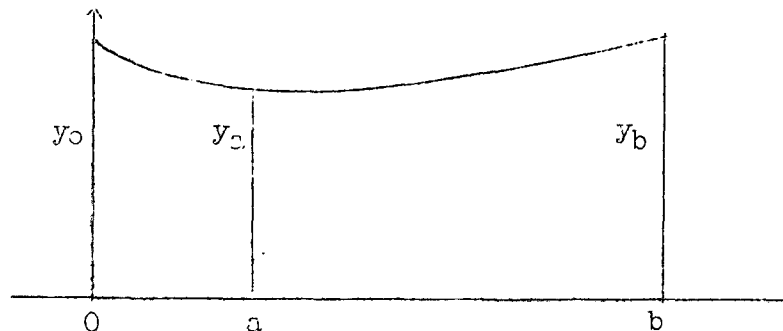
5. Uso de la fórmula de Lagrange cuando los valores observados están desigualmente espaciados.

Las fórmulas anteriores junto con las tablas que se han calculado suponen que el intervalo de integración se divide en franjas de igual ancho o bien que los valores observados están igualmente espaciados.

En algunos problemas de integración (extremos de una tabla abreviada de vida p. ej.) se dispone de valores desigualmente espaciados y, por lo tanto, una solución sería aplicar la regla de los trapecios para cada una de las fajas (de distinto ancho); pero puede suceder que el valor obtenido no tenga una aproximación aceptable.

Por esa razón es conveniente indicar cómo en base de la fórmula de Lagrange se puede calcular el área de la curva.

Consideremos, por lo tanto, un caso bastante frecuente: Se conocen 3 valores, y_0 , y_a , y_b , cuyas distancias respecto al origen son 0 , a , y b , respectivamente, tal como se indica en el gráfico:



La curva de interpolación (parábola de 2o. grado) tiene por ecuación:

$$y_x = \frac{(x-a)(x-b)}{ab} y_0 + \frac{x(x-b)}{a(a-b)} y_a + \frac{x(x-a)}{b(b-a)} y_b$$

y la integral $\int_0^b y_x dx$ vale, por lo tanto

$$\int_0^b y_x dx = \frac{b(3a-b)}{6a} y_0 + \frac{b^3}{6a(b-a)} y_a + \frac{b(2b-3a)}{6(b-a)} y_b$$

pudiendo deducirse fórmulas de integración de la misma naturaleza para el caso en que se disponga de un mayor número de valores observados, desigualmente espaciados.

Ejemplo 1.

Determinar el valor de la integral $\int_0^5 l_x dx$ si se dispone de la información:

x	0	1	5
l_x	100000	95290	94220

mediante el uso de las siguientes reglas:

- regla de los trapecios
- uso fórmula de Lagrange con los valores naturales
- uso fórmula de exponenciales compuestas, aplicada independientemente a cada intervalo: 0-1; 1-5.

Solución:

La regla de los trapecios nos da:

$$R.T. = (100000+95290)/2 + (95290+94220)/2 = \underline{476665}$$

El uso de la fórmula de Lagrange con los valores naturales nos da

$$F.L. = 1/24 (-40 \cdot 100000 + 125 \cdot 95290 + 35 \cdot 94220) = \underline{467.040}$$

y usando la fórmula de las exponenciales compuestas:

$$= \left[0.343482(100000) + 0.656518(95290) \right] + 4 \left[0.343482(95290) + 0.656518(94220) \right]$$

$$= 96908 + 378350 = \underline{475.258}$$

siendo el valor exacto 474.451, es decir, la última hipótesis sobre l_x daría un resultado aceptable.

Ejemplo 2.

Determinar el valor de la integral $\int_0^5 x^2 l_x dx$ si se dispone de la información:

x	0	1	5
l_x	100.000	83.120	74.923

Solución:

La regla de los trapecios nos da:

$$R.T. = (10000 \cdot 0 + 83120 \cdot 1) / 2 + (83120 \cdot 1 + 74923 \cdot 25) / 2 = \underline{3.953.950}$$

El uso de la fórmula de Lagrange:

$$F.L. = 1/24(-40 \cdot 100000 \cdot 0 + 125 \cdot 33120 \cdot 1 + 35 \cdot 74923 \cdot 25) = 75947625 = \underline{3.164.484}$$

Los diversos valores de $(x^2 l_x)$ se encuentran en los Apuntes del Sr. Tabah y son los siguientes:

x	l_x	$x^2 l_x$	Multiplicador fórmula (18)
0	100.000	0	8/24
1	83.120	83.120	32/24
2	61.073	324.292	17/24
3	49.026	711.234	27/24
4	36.979	1.231.664	27/24
5	24.932	1.873.075	9/24

Usando la regla dada para el caso de 5 franjas, los multiplicadores que deben usarse están indicados en la 4a. columna de la tabla, con lo cual el área buscada es:

$$77488725/24 = \underline{3.228.670}$$

valor que consideraremos como el verdadero, es decir, el que se obtendría en el caso de contar con los números " l_x " para las edades 2, 3 y 4. El valor encontrado con el uso de la fórmula de Lagrange no es muy diferente, con lo cual podemos afirmar que el uso de esta fórmula es satisfactorio.

6. Integración osculatriz.

En la aplicación de los métodos demográficos es frecuente encontrarse con que los datos básicos (distribución por edad de la población para un rubro determinado, por ejemplo) presentan ciertas irregularidades que deben corregirse.

Una de las soluciones para la redistribución de la población consiste en determinar "puntos pivotaes" para luego proceder al cálculo de los puntos de interpolación. También a veces por comodidad en los cálculos, es práctico calcular ciertos coeficientes demográficos para edades terminadas en 0 ó 5, o bien, que están distanciadas en 5 años, y surge como un problema posterior determinar el área de la curva descrita por estos puntos.

Como en el caso general deberían calcularse todos los valores de interpolación usando alguna suerte de multiplicadores (de Greville, de Beers, de Sprague, etc.) y luego integrar la superficie aplicando la regla de los trapecios (que da una excelente aproximación) puede realizarse todo este trabajo de una manera más sencilla y rápida preparando tablas de coeficientes en los que previamente se hayan resumido todas estas operaciones.

Para aclarar más el asunto supongamos que deseamos determinar el valor de $\int_5^{35} l_x dx$ para una tabla de vida, de la cual se conocen únicamente los valores pivotaes.

x	5	10	15	20	25	30	35
l_x	94220	93710	93235	92435	91335	90078	88573

Para cada uno de los intervalos extremos (5-15, 25-35) podemos usar los siguientes coeficientes de Beers.

	x+1	x+2	x+3	x+4	x+6	x+7	x+8	x+9
x	6667	4072	2148	819	-404	-497	-389	-191
x+5	4969	8344	10204	10689	8404	6229	3849	1659
x+10	-1426	-2336	-2456	-1666	2344	5014	7534	9354
x+15	-1006	- 976	- 536	- 126	-216	-646	-1006	-906
x+20	1079	1224	884	399	-196	-181	-41	69
x+25	-283	- 328	- 244	- 115	68	81	53	15

y para los intervalos centrales 15-20; 20-25; los siguientes coeficientes:

	x+1	x+2	x+3	x+4
x	117	137	-87	27
x+5	-921	-1101	771	-311
x+10	9234	7194	4454	1354
x+15	1854	4454	7194	9234
x+20	-311	-771	-1101	-921
x+25	27	87	137	117

con lo cual obtendremos todos los valores y_x desde $x=5$ hasta $x=35$.

Podemos, en seguida aplicar la regla de los trapecios para encontrar el área entre 2 valores sucesivos y finalmente realizadas estas evaluaciones se llega a:

Para el área de los dos grupos extremos inferiores:

$$\underline{1.7225} y_x + \underline{6.4347} y_{x+5} + \underline{2.1362} y_{x+10} - \underline{0.5418} y_{x+15} + \underline{0.3237} y_{x+20} - \underline{0.0753} y_{x+25}$$

Para el área de un grupo central:

$$\underline{0.0368} y_{x+5} - \underline{0.3104} y_{x+10} + \underline{2.7736} y_{x+15} + \underline{2.7736} y_{x+20} - \underline{0.3104} y_{x+25} + \underline{0.0368} y_{x+30}$$

Para el caso de nuestro ejemplo tenemos:

Para intervalo 5-15: 937159 (937.166)

Para intervalo 15-20; 20-25: 464318 (464319); 459512 (459509);

Para intervalo 25-35: 900344 (900360)

Todo esto da un total de 2.761.337, siendo el verdadero valor 2.761.354, lo que representa una excelente aproximación y cuya facilidad de cálculo puede obtenerse con la confección de tablas de coeficientes.

Ejemplo 1.

Determinar el valor de $\int_5^{105} l_x dx$ con la siguiente información:

x	l_x
5	94.220
10	93.710
15	93.235
20	92.435
25	91.335
30	90.078
35	88.573
40	86.650
45	84.069
50	80.487

x	l_x
55	75.557
60	68.924
65	60.366
70	49.655
75	36.735
80	22.383
85	11.073
90	3.796
95	857
100	123
105	11

Solución:

Para el área de los 4 grupos extremos, es decir, los grupos 5-15 y 95-105, se tiene:

$$\begin{array}{l}
 l_5 + l_{105} = 94220 + 11 = 94.231 \quad (1.7225) \\
 l_{10} + l_{100} = 93710 + 123 = 93.833 \quad (6.4347) \\
 l_{15} + l_{95} = 93235 + 857 = 94.092 \quad (2.1362) \\
 l_{20} + l_{90} = 92435 + 3796 = 96.231 \quad (-0.5413) \\
 l_{25} + l_{85} = 91335 + 11073 = 102.408 \quad (0.3237) \\
 l_{30} + l_{80} = 90078 + 22383 = 112.961 \quad (-0.0753)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} = \underline{939.605}$$

siendo el verdadero valor 939.389, y debiéndose esta diferencia, únicamente, al grupo 95-105. Para las edades centrales tenemos que formar las sumas auxiliares:

$$\begin{array}{l}
 S_0 = l_5 + l_{10} + \dots + l_{80} = 1.208.912 \quad (0.0368) \\
 S_1 = S_0 + (l_{85} - l_5) = 1.125.765 \quad (-0.3104) \\
 S_2 = S_1 + (l_{90} - l_{10}) = 1.035.851 \quad (2.7736)
 \end{array}$$

$$S_3 = S_2 + (l_{95} - l_{15}) = 943.473 \quad (2.7736)$$

$$S_4 = S_3 + (l_{100} - l_{20}) = 851.161 \quad (-0.3104)$$

$$S_5 = S_4 + (l_{105} - l_{25}) = 759.837 \quad (0.0368)$$

Multiplicando estas sumas por los coeficientes de Beers, indicados dentro de los paréntesis, se tiene 4.948.665, siendo el verdadero valor 4.948.636.

De esa manera el valor de la integral de l_x en el intervalo ($x=5$; $x=105$) es 5.888.270, siendo el verdadero valor 5.888.025, lo que es una aproximación aceptable.

Ejemplo 2.

Determinar el valor de $\int_5^{105} l_x dx$ para los datos de la tabla de vida para ambos

sexos en el año 1940 de la República de Chile.

Solución:

La tabla nos da los valores pivotaes que se necesitan para el cálculo de:

x	l_x	x	l_x
5	72.117	60	38.534
10	70.875	65	32.323
15	69.786	70	24.979
20	67.590	75	17.132
25	64.654	80	10.007
30	61.675	85	4.941
35	58.721	90	1.872
40	55.611	95	556
45	52.218	100	128
50	48.432	105	12
55	43.930		

De esa manera para los grupos 5-15 y 95-105, se tiene:

$$72129(1.7225) + 71003(6.4347) + 70342(2.1362) - 69462(0.5418) + 69595(0/3237) - 71682(0.0753) = \underline{710886}$$

Y, para los grupos centrales, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} S_0 = 788.584 (0.0368) \\ S_1 = 721.408 (-0.3104) \\ S_2 = 652.405 (2.7736) \\ S_3 = 583.175 (2.7736) \\ S_4 = 515.713 (-0.3104) \\ S_5 = 451.071 (0.0368) \end{array} \right\} = \underline{3.088.622}$$

con lo cual el valor de $\int_5^{105} l_x dx$ es aproximadamente 3.799.508. La tabla completa de vida calculada por O. Cabello, J. Vildósola y M. Latorre da el valor de 3.799.336, lo que puede considerarse aceptable.

Ejemplo 3.

Determinar la vida media al nacer para el año 1940 para la población de ambos sexos de EE.UU., si aparte de la información dada en el ejemplo 1, se dispone de la información adicional:

x	l_x
0	100.000
1	95.290
5	94.220

Solución:

Para calcular las áreas $\int_0^1 l_x dx$, $\int_1^5 l_x dx$ usaremos la interpolación exponencial,

de manera que tendremos:

$$\int_0^1 l_x dx \doteq 0.343482(100.000) + 0.656518(95.290) = 96.908$$

$$\int_1^5 l_x dx \doteq 4 [0.343482(95290) + 0.656518(94220)] = 378.350$$

contra los verdaderos valores: 96.058 y 378.393. La mayor diferencia se encuentra para el primer año de vida. (La tabla completa de la cual se han tomado estos datos, indica que L_0 se determinó en base de la mortalidad observada en los 12 primeros meses de vida.)

Sumando estos valores el área $\int_5^{105} \frac{1}{x} dx$ dada en el ejemplo 1 se tiene que

$\int_0^{105} \frac{1}{x} dx$ vale aproximadamente 6.363.528, lo que nos da como vida media al nacer

un número de 63.64 años. La tabla completa da 63.62.

Ejemplo 4.

Determinar la vida media al nacer para la población chilena de ambos sexos del año 1940, si se dispone aparte de los datos dados en el ejemplo 2, de los siguientes:

x	$\frac{1}{x}$
0	100.000
1	80.289
5	72.217

Solución:

Se tiene que

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = 0.343482(100.000) + 0.656518(80289) = 87.059$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx = 4[0.343482(80289) + 0.656518(72217)] = 299.958$$

lo que agregado a $\int_5^{105} \frac{1}{x} dx$ nos da 4.186.525, con lo cual la vida media al nacer en

1940 era de 41.86 años. El valor dado por la tabla completa es 41.83.