CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

NACIONES
UNIDAS

UNIVERSIDAD
DE CHILE

B

TABLAS DE MORTALIDAD

Apuntes de clase del Prof. Somoza para ser distribuidos exclusivamente entre los becarios de este Centro.

TABLAS DE MORTALIDAD

1. La tabla de mortalidad es el instrumento mediante el cual se miden las probabilidades de vida y de muerte. Se considerará, en primer lugar qué funciones contiene una tabla y el significado de cada una de ellas.

2. El número de vivientes l_x representa el número de personas que, de acuerdo con la tabla de mortalidad, alcanzan la edad x entre las l_a personas que llegan a la edad a, siendo ésta la más joven para la que se conocen valores de l_x. En particular $a = 0$ indica el número anual de nacimientos supuesto en la tabla de mortalidad.

Es l_x una función positiva, no-creciente. Por razones teóricas es conveniente suponer que se trata de una función continua y derivable. Los valores de l_x que aparecen tabulados se calculan del modo que se indica más adelante, es decir, mediante la utilización de funciones con las que l_x está relacionada. No resultan de la observación directa de una población.

El subíndice indica la edad exacta alcanzada por el grupo inicial l_a.

Será conveniente utilizar la letra x para designar un número entero de años y otra letra, t ó n por ejemplo, para indicar un número de años ya sea entero o fraccionario. Así, l_{x+t} simboliza el número de personas que, a lo largo de un año, alcanzan la edad $x+t$, donde x es un entero y t un número entero o fraccionario. Estas l_{x+t} personas son las sobrevivientes del total l_0 nacido hace $x+t$ años; son también los sobrevivientes de las l_{x+t-1} personas que alcanzaron la edad $x+t-1$ el año anterior, de las l_{x+t-2} que cumplieron la edad $x+t-2$ hace dos años, y así sucesivamente.

El valor numérico de l_a, esto es, el valor de l_x para la edad a (la más baja considerada en la tabla) se conoce como la raíz de la tabla de mortalidad. Se acostumbra a fijar como raíz una potencia entera de 10, tal como 100.000 o 1.000.000, aunque no es ésta una condición necesaria de una tabla de mortalidad. Es habitual también presentar los valores de la función l_x en números enteros a lo largo de la mayor parte, o toda la extensión, de la tabla. Cuando se procede de este modo es necesario adoptar el valor de la raíz lo suficientemente grande para que el resultado de cualquier cálculo basado en la función tabulada tenga un grado de exactitud adecuado a los usos más corrientes que se hagan de la tabla de mortalidad. Como, en general, la precisión requerida de los cocientes de las l_x es del orden de 4 o 5 dígitos, es suficiente tener valores de la función l_x también con 5 cifras significativas. Resulta, por lo tanto, que la raíz 100.000 es la mayormente utilizada en las tablas construídas para ser empleada en demografía. Con esa raíz, y con la exactitud indicada, los valores de l_x aparecen en números enteros a lo largo de casi toda la tabla.

Algunas tablas de mortalidad son construídas en forma tal que, a medida que x crece, se alcanza un punto (una edad) para el cual $l_x = 0$. La edad que corresponde a ese punto se designa con ω. Otras se apoyan en la hipótesis que l_x nunca alcanza el valor 0, sino que tiende asintóticamente hacia ese valor a medida que x crece.

ω es, más precisamente, la edad entera más joven para la que $l_x = 0$.

La idea de una edad de la que pueda decirse que la vida es posible en todas las edades inferiores pero imposible en todas las superiores no está de acuerdo con los hechos. Para evitar esa limitación estricta es que a veces se utiliza la hipótesis de que l_x es asintótica. Aún adoptando este supuesto habrá siempre una edad entera para la cual la función l_x será tan pequeña que podrá ser tratada como si fuera nula en cualquier aplicación que se haga de la tabla, sin que ello afecte los resultados. Efectivamente, en la utilización de la tabla no tiene importancia práctica alguna que l_x alcance un valor cero o llegue a ser tan pequeña como se desee, sin llegar a anularse.

3. Muertes d_x representa el número de las muertes que se producen entre los componentes del grupo l_x antes de alcanzar la edad $x+1$.

Esta función se define así:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{1}$$

Utilizando la notación de diferencias finitas d_x puede expresarse en esta forma: $-\Delta l_x$.

Si la diferencia se calcula para un intervalo de n años, en lugar de un año, puede escribirse la relación más general:

$$_nd_x = l_x - l_{x+n} \tag{2}$$

que representa el número de muertes de los componentes del grupo l_x entre las edades exactas x y $x+n$.

Se deduce fácilmente de la (1) que:

$$(3) \qquad l_x = \sum_{t=0}^{\omega - x - t - 1} d_{x+t}$$

o, como se escribe corrientemente,

$$l_x = \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t}$$

4. <u>Tasa de mortalidad</u> q_x simboliza la probabilidad de que una persona de edad exacta x muera dentro del año que sigue el momento en que alcanza esa edad. Se denomina tasa de mortalidad.

Conforme con la tabla de mortalidad, l_x personas alcanzan la edad exacta x, d_x mueren antes de cumplir la edad $x+1$, se desprende luego que

$$(4) \qquad q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

La tasa q_x no se calcula generalmente conforme con la expresión anterior sino, más bien, se emplea esa relación para obtener el valor de l_{x+1} conocidos q_x y l_x. Es en efecto

$$(5) \qquad l_{x+1} = l_x - l_x \cdot q_x$$

Si, por lo tanto, se dispone de los valores de q_x para cada edad a partir de 0, se puede iniciar el cálculo de la función l_x a partir de cualquier raíz apropiada l_0. Multiplicando este valor por q_0 se obtiene d_0, el número de muertes esperadas en el primer año de vida.

La diferencia entre l_0 y d_0 proporciona, según la expresión (5), el número de sobrevivientes a la edad 1. Nuevamente, el producto $l_1 \cdot q_1$ representa el número de muertes entre las edades exactas 1 y 2; restando ese valor de l_1 se llega al que corresponde a l_2. Siguiendo de este modo sucesivamente, edad por edad, se llega hasta la edad ω para la que se tiene $l_\omega = 0$. Previamente deberá ser $l_{\omega-1} \cdot q_{\omega-1} = d_{\omega-1} = l_{\omega-1}$ ó sea $q_{\omega-1} = 1$. Es ω la última edad de la tabla, esto es el año de vida que inicia el grupo de sobrevivientes $l_{\omega-1}$ pero que ninguno de sus componentes alcanza a terminar.

5. <u>Probabilidad de sobrevivir un año</u> p_x es la probabilidad de que una persona de edad exacta x sobreviva un año, es decir, que alcance con vida la edad $x+1$. En el conjunto de l_x personas, l_{x+1} sobreviven a la edad $x+1$, por lo tanto, el valor de la probabilidad p_x está dado por:

$$(6) \qquad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Toda vez que cada componente del grupo l_x: o sobrevive a la edad $x+1$, o muere antes de alcanzar esa edad, deberá ser cierto que

$$p_x + q_x = 1$$

Una forma más general de la probabilidad de sobrevivencia es:

$$(7) \qquad {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

La relación $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ es una función que expresa la hipótesis sobre mortalidad en la forma de una proporción esperada de sobrevivientes. Es la probabilidad de sobrevivir a la edad $x+n$ de un individuo de edad x extraído al azar de un grupo numeroso de personas, l_x, que se supone expuesto a la mortalidad que refleja la tabla. Si una muestra de m personas es extraída al azar, el número esperado de sobrevivientes a la edad $x+n$ será $m \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$ pero el número verdadero de sobrevivientes está sujeto a variaciones atribuibles al azar. Para valores suficientemente grandes de m estos errores accidentales son pequeños en relación con el valor esperado.

6. Con las funciones que se han presentado pueden calcularse distintas probabilidades de sobreviviencia o de muerte de una persona, conocida su edad. He aquí algunos casos:

a) la probabilidad ${}_np_x$ vale, según (7), $\frac{l_{x+n}}{l_x}$. Se llegó a este valor considerando dos eventualidades excluyentes y que agotan todas las posibilidades: que una persona de edad exacta x muera dentro de los n años que siguen al momento en que alcanza esa edad, o sobreviva a la edad $x+n$. Resulta evidente que esa probabilidad puede expresarse como el producto de dos. Por ejemplo, la probabilidad de una persona de edad x de sobrevivir dos años, $n=2$, puede considerarse compuesta de dos que corresponden a las eventualidades:

i) sobrevivir un año, y

ii) habiendo alcanzado la edad $x+1$, vivir un año más.

La primera vale $\frac{l_{x+1}}{l_x}$; la segunda $\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}$. El producto de esas dos probabilidades da la que corresponde a la eventualidad compuesta que se examina. Es

$$ {}_2p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} $$

$$ = p_x \cdot p_{x+1} $$

Es, en general:

$$ (8) \qquad {}_np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \; \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} $$

$$ = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1} $$

Otra forma de presentar esta misma relación:

$$ (9) \qquad {}_np_x = {}_tp_x \cdot {}_{n-t}p_{x+t} \qquad t \leqslant n $$

b) ${}_{n|}q_x$ representa la probabilidad de morir en el $(n+1)^{o}$ año, de una persona de edad exacta x, contado desde el momento en que alcanza esta edad. Entre las l_x personas de edad x, d_{x+n} mueren en el $(n+1)^{o}$ año, con edades entre $x+n$ y $x+n+1$, por lo tanto:

$$ (10) \qquad {}_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x} $$

Puede también llegarse a esta relación razonando así: la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva n años es ${}_np_x$; la probabilidad de que, habiendo alcanzado la edad $x+n$, muera antes de llegar a $x+n+1$ es q_{x+n}. El producto de esas dos probabilidades proporciona el valor ${}_{n|}q_x$.

$$ (11) \qquad {}_{n|}q_x = {}_np_x \cdot q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \; \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} = \frac{d_{x+n}}{l_x} $$

c) La probabilidad de que una persona de edad x muera dentro de los n años que siguen al momento en que alcanza esa edad se simboliza con ${}_nq_x$. Entre las l_x personas con edad x, l_{x+n} sobreviven a la edad $x+n$ y el número de los que mueren antes de alcanzar esa edad es $l_x - l_{x+n}$. Se deduce, por lo tanto, que

$$(12) \qquad {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$$= 1 - {}_np_x$$

Esta última expresión resulta evidente desde que una persona de edad x, a lo largo de n años, o sobrevive o muere. Debe por lo tanto, ser

$${}_np_x + {}_nq_x = 1$$

La probabilidad ${}_nq_x$ puede también expresarse como una suma de probabilidades de muertes anuales. Esto es:

$$(13) \qquad {}_nq_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x$$

$$= \frac{1}{l_x}\,(d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{x+n-1})$$

d) ${}_{n|m}q_x$ representa la probabilidad de morir durante un período de m años, con edades entre $x+n$ y $x+n+m-1$, que corresponde a una persona de edad actual x. Del grupo l_x con edad actual x, hay l_{x+n} personas que sobreviven a la edad $x+n$ y $l_{x+n} - l_{x+n+m}$ que mueren durante los m años que siguen al momento de alcanzar la edad $x+n$. La probabilidad considerada es, por lo tanto:

$$(14) \qquad {}_{n|m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$$

$$= {}_np_x - {}_{n+m}p_x$$

Esta probabilidad puede también ser obtenida como el producto de dos: $_{n}p_{x}$, la probabilidad de alcanzar la edad $x+n$ que tiene una persona de edad exacta x, y $_{m}q_{x+n}$, la de morir dentro de m años que corresponde a cada componente del grupo l_{x+n}.

$$(15) \quad {}_{n|m}q_{x} = {}_{n}p_{x} \cdot {}_{m}q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} \quad \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_{x+n}}$$

Otra vez:

$$(16) \quad {}_{n|m}q_{x} = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_{t|}q_{x}$$

$$= \frac{1}{l_{x}} \sum_{t=n}^{n+m-1} d_{x+t}$$

$$= \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_{x}}$$

7. Debe ser cuidadosamente observada la notación utilizada para designar las probabilidades.

Con la letra p se simboliza una probabilidad de sobrevivencia. Con la q, una de muerte. Un subíndice a la derecha indica la edad, en el momento actual, de la persona considerada. Un subíndice a la izquierda denota el número de años que comprende la probabilidad. Ejemplos: $_{n}p_{x}$, $_{n}q_{x}$ se refieren a plazos de n años. No se indica el número de años cuando el plazo considerado es de un año. Se escribe, en estos casos, p_{x}, q_{x}. El subíndice de la izquierda seguido por una barra vertical indica un período de diferimiento, es decir, el plazo por el que se difiere la eventualidad considerada. Ejemplo $_{n|}q_{x}$ indica la probabilidad de morir en un año a la edad $x+n$, de una persona de edad actual x. La eventualidad de morir se difiere por n años.

8. <u>La fuerza de la mortalidad</u>. De l_{x} personas de edad x, $l_{x+1/m}$ sobreviven a la edad $x+1/m$ y $l_{x} - l_{x+1/m}$ mueren en la primera m-ésima parte del año. La probabilidad de morir en ese intervalo para cada componente del grupo inicial es, lógicamente,

$$_{1/m}q_{x} = \frac{l_{x} - l_{x+1/m}}{l_{x}}$$

Esta probabilidad depende no sólo de la edad x, sino también de la amplitud del intervalo que se considere, esto es de m. Será suficiente tomar m convenientemente grande para que la probabilidad anterior sea todo lo pequeña que se desee, cualquiera sea la edad x considerada. Una medida de la mortalidad en un año se obtiene multiplicando por m la tasa de mortalidad definida anteriormente para un enésimo de año.

Puede escribirse, simbolizando con $q_x^{(m)}$ ese producto,

$$(17) \quad q_x^{(m)} = m \cdot {}_{1/m}q_x = \frac{(l_x - l_{x+1/m}) \cdot m}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1/m}}{1/m \cdot l_x}$$

El límite de esa expresión cuando m tiende hacia infinito, $\frac{1}{m} \to 0$, es la función que se denomina fuerza de la mortalidad, o tasa instantánea de mortalidad, y se simboliza con μ_x.

$$(18) \quad \mu_x = \lim_{m \to \infty} \cdot \frac{l_x - l_{x+1/m}}{1/m} \cdot \frac{1}{l_x}$$

En tanto $q_x^{(m)}$ es una función de x y m, la μ_x es sólo una función de la edad x . $q_x^{(m)}$ refleja la mortalidad, en un año, a la luz de lo que sucede a lo largo de un período (m) μ_x es una función anual basada en el comportamiento de la función l_x en un momento.

Es fácil identificar el límite (18) con la derivada de la función $-l_x$ dividida por la propia función. Es decir:

$$(19) \quad \mu_x = - \frac{dl_x}{dx} \; \frac{1}{l_x}$$

Y considerando que $\frac{df(x)}{dx.f(x)} = \frac{d.lg.f(x)}{dx}$ resulta

$$(20) \quad \mu_x = - \frac{d}{dx} \; lg.l_x$$

La fuerza de la mortalidad es, conforme con lo anterior, una tasa anual "nominal" de mortalidad. Esa tasa resulta de suponer que la intensidad con que se experimenta la mortalidad en una edad dada se mantiene constante a lo largo de un año. Se toma el año como el intervalo de tiempo más conveniente para medir esa fuerza. Los valores que se obtienen son puramente teóricos, como lo es también la idea de la existencia de una intensidad de mortalidad variable en forma contínua con la edad. Si se tiene en cuenta la forma en que se define la intensidad de la mortalidad no resulta sorprendente que alcance valores superiores a la unidad para valores de x que corresponden a los extremos de la tabla de mortalidad: la edad 0 y las edades más avanzadas.

De la expresión (20) resulta inmediatamente:

(21) $$\frac{d.l_x}{dx} = -\mu_x . l_x$$ luego,

(22) $$d.l_x = -\mu_x . l_x . dx$$

Integrando la expresión (22) entre los límites x y ∞ se deduce:

(23) $$l_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

El gráfico de la función $l_x . \mu_x$, la derivada de $-l_x$, es llamada la curva de las muertes. Esta función está estrechamente vinculada con la d_x, lo que resulta evidente de las siguientes relaciones:

(24) $$d_x = l_x - l_{x+1} = \int_0^{\infty} l_{x+t}\, \mu_{x+t} \cdot dt - \int_1^{\infty} l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$= \int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$\doteq l_{x+1/2} \cdot \mu_{x+1/2}$$

La última relación aproximada es adecuada siempre que $l_x \mu_x$ no difiera mucho de una función lineal entre x y $x+1$.

El número de personas que, conforme con la tabla de mortalidad, se espera que mueran en el pequeño intervalo de edades x, $x+\delta x$ es $l_x - l_{x+\delta x}$. Este valor tiende hacia

$$-\frac{dl_x}{dx}\,\delta x = l_x\, \mu_x \cdot \delta x \qquad \text{con} \qquad \delta x \longrightarrow 0$$

La probabilidad de que una persona de edad x muera en el intervalo $x+t$, $x+t+\delta t$ tiende hacia

$$\frac{l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot \delta t}{l_x} = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot \delta t \qquad \text{con } \delta x \longrightarrow 0$$

De esta expresión resulta:

(25) $${}_nq_x = \frac{1}{l_x} \int_0^n l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$= \int_0^n {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

Para $n = 1$ resulta:

(26) $$q_x = \frac{1}{l_x} \int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$= \int_0^1 {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

Para $n = \infty$

(27) $$\lim_{n \to \infty} {}_nq_x = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$= \int_0^\infty {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt = 1$$

Puede expresarse la probabilidad de sobrevivencia ${}_np_x$ en función de la fuerza de la mortalidad.

Partiendo de la relación (20)

$$\mu_x = -\frac{d}{dx} \lg . l_x$$

Resulta

(28) $$\int_0^n \mu_{x+t} dt = - \int_0^n d.lg.l_{x+t}$$

$$= lg.l_x - lg.l_{x+n}$$

$$= - lg._n p_x$$

(29) $$\therefore \quad {}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \cdot dt}$$

Comparación de las funciones μ_x y c_x. La tasa instantánea de mortalidad, μ_x, es mayor que la función c_x en las primeras y últimas edades de la tabla de mortalidad. Entre los 10 y los 75 años, aproximadamente, es, en general, $\mu_x < c_x$. Resulta interesante examinar la relación que existe entre estas dos funciones.

Se ha visto que

(24) $$d_x = l_x \cdot q_x = \int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

Si $l_x \mu_x$ crece monótonamente en el intervalo $(x, x+1)$ resulta:

$$l_x \mu_x < \int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt = l_x \cdot q_x$$

$$\therefore \quad \mu_x < c_x$$

Contrariamente, si $l_x \cdot \mu_x$ decrece monótonamente en el intervalo $(x, x+1)$ resulta

$$\mu_x > c_x$$

Se ha señalado anteriormente que l_x es una función positiva y decreciente para todo valor de x. Por lo tanto, su derivada, l'_x, es siempre negativa. Podrá ser i) creciente o ii) decreciente.

i) Si en el intervalo $(x, x+1)$ l'_x es creciente, su derivada, l''_x, es positiva y entonces l_x es convexa hacia el eje de las abscisas (ya que por ser $l_x > 0$ resulta $l_x \cdot l''_x > 0$ condición para que l_x sea convexa).

ii) Si en $(x,x+1)$ l'_x es decreciente, l''_x es negativa y l_x cóncava. Por lo tanto, en los intervalos en que l_x es convexa hacia el eje de las abscisas -primera y última parte de la tabla- su derivada segunda es positiva y su primera derivada creciente. En esos intervalos, según (21),

$$l'_x = -\mu_x \cdot l_x \quad \text{creciente}$$

$\therefore$ $\mu_x \cdot l_x$ decreciente, y, conforme con lo visto más arriba, es en este caso $\mu_x > q_x$

Contrariamente, en los intervalos en que l_x es cóncava hacia el eje de las abscisas(edades intermedias) su derivada segunda es negativa y su derivada primera decreciente. Se tiene,en este caso:

$$l'_x = -\mu_x \cdot l_x \quad \text{decreciente}$$

$\therefore$ $\mu_x \cdot l_x$ creciente y, por lo tanto,

$$\mu_x < q_x$$

9. <u>Población estacionaria.</u> Si en una población hipotética se dan estas condiciones: a) el número de nacimientos que ocurren cada año es constante, y esa situación se ha mantenido, por lo menos, durante ω años; b) los nacimientos se distribuyen uniformemente a lo largo del año, y c) las probabilidades de sobrevivencia permanecen constantes, entonces, el número de personas con edades comprendidas entre x y x+1 años, es decir, con edad cumplida x, que se simboliza con N_x, está dado por

$$N_x = B \int_0^1 \frac{l_{x+t}}{l_0} \, dt$$

donde B simboliza el número anual de nacimientos. Cuando $B = l_0$ esta expresión se simplifica. En este caso se utiliza el símbolo L_x para representarla. Es

$$(30) \qquad L_x = \int_0^1 l_{x+t} \cdot dt$$

Se puede llegar a estas expresiones considerando, en primer lugar, cuál sería el número de personas con edad alcanzada x, si los nacimientos se distribuyeran uniformemente en m subperíodos de año. Es fácil deducir que dependería del momento en que ocurrieran los nacimientos dentro de cada subperíodo. Si, en un caso extremo, se supone que los nacimientos se producen al inicio de cada subperíodo, el valor será:

$$\frac{B}{m} \left({}_{x+1}p_0 + {}_{x+\frac{m-1}{m}}p_0 + {}_{x+\frac{m-2}{m}}p_0 + \dots + {}_{x+\frac{1}{m}}p_0 \right)$$

$$= \frac{B}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{l_{x+\frac{j}{m}}}{l_0}$$

Si, por el contrario, la hipótesis es que los nacimientos ocurren al final de cada subperíodo, el número de personas con edad alcanzada x en un momento dado será:

$$\frac{B}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{l_{x+i/m}}{l_o}$$

Resulta evidente que si no se hace hipótesis alguna sobre el momento en que ocurren los nacimientos dentro de cada período, el número de personas con edad x, que se designa con N_x, estará comprendido entre la primera suma - que constituye un mínimo - y la segunda - un máximo -. Es, por lo tanto:

$$\frac{B}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{l_{x+i/m}}{l_o} \leqslant N_x \leqslant \frac{B}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{l_{x+i/m}}{l_o}$$

El límite de estas dos sumas cuando el número de subperíodos aumenta tendinedo hacia infinito ($m \longrightarrow \infty$) es el mismo y vale la integral indicada más arriba.

10.- Considérese la (30):

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}.dt$$

Resulta evidente que si L_x tiene una forma matemática conocida, por ejemplo si es un polinomio en x de grado n, el valor de L_x puede calcularse exactamente. Generalmente esto no sucede, es decir, l_x no sigue una ley matemática conocida. Sin embargo, el cálculo de la función L_x puede efectuarse con suficiente exactitud admitiendo que la l_x, en el intervalo (x, x+1) - también en el (x, x+5) - es una función lineal. Esta hipótesis resulta inadecuada solamente para el primer año de vida. En menor medida, tampoco es satisfactoria para los intervalos de edades de 1 a 5 años y los que corresponden a las edades finales de las tablas.

Es, conforme con (2),

$$l_{x+t} = l_x - {}_t d_x$$

Si se admite que l_x, en el intervalo (x, x+1) es una función lineal puede escribirse:

$$l_{x+t} = l_x - t.d_x \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Luego
$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} . dt$$

$$= \int_0^1 (l_x - t . d_x) . dt$$

$$= l_x - \frac{1}{2} \; d_x$$

(31)
$$= \frac{1}{2} \; (l_x + l_{x+1})$$

$$= l_{x+1/2} \; .$$

En muchas tablas de mortalidad los valores de l_x están tabulados a intervalos de cinco años. Conforme con la misma hipótesis anterior $-l_x$ función lineal en el intervalo $(x, x+5)$ - que equivale a suponer que las muertes se distribuyen uniformemente a lo largo de los cinco años de vida, entre las edades x y $x+5$, se tiene:

$$l_{x+t} = l_x - \frac{{}_5d_x}{5} \; t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 5$$

$${}_5L_x = \int_0^5 l_{x+t} . dt$$

$$= \int_0^5 (l_x - \frac{{}_5d_x}{5} \; t) . dt$$

$$= 5.l_x - \frac{{}_5d_x}{5} \; \frac{25}{2}$$

$$= 5.l_x - \frac{5}{2} \; {}_5d_x$$

$$= \frac{5}{2} \; (l_x + l_{x+5})$$

11. La población total en una comunidad en la que se cumplieran las condiciones establecidas anteriormente (número constante de nacimientos, distribución uniforme de los nacimientos en el año, mortalidad constante) estaría dada, lógicamente, por la suma de los valores de L_x. Esa suma se representa por la letra T_x (cuando los nacimientos son l_o)

Es:

$$T_x = \sum_{x=x}^{\omega} L_x \qquad (32)$$

$$= \int_0^{\omega} l_{x+t} \cdot dt$$

y representa el número de personas en la comunidad con edades superiores a x años. Si la suma se hace a partir de la edad 0, el número total de personas es:

$$T_o = \sum_{x=0}^{\omega} L_x$$

La relación entre el número de nacimientos anuales (l_o) y el número total de habitantes de la comunidad (T_o) proporciona la tasa anual de natalidad, que se simboliza con una letra b.

$$b = \frac{l_o}{T_o}$$

12. <u>Muertes en una población estacionaria</u>. Para determinar el número de muertes de edad x cumplida, a lo largo de un año, en la población que se viene analizando se utilizarán estos símbolos:

D_x representará el número de muertes con edades entre x y x+1 (x edad cumplida) que se registra en un año. Resulta fácil deducir que ese conjunto puede descomponerse en dos:

${}_{\delta}D_x$ constituído por las muertes provenientes del grupo L_x (personas de edad cumplida x) en el momento inicial del año considerado, y

${}_{\alpha}D_x$ constituído por las muertes provenientes del grupo L_{x-1} (personas que cumplen la edad x durante el año considerado).

Es $D_x = {}_{\delta}D_x + {}_{\alpha}D_x$

Se ha visto anteriormente que

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} \cdot dt = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} l_{x+i/m}$$

Luego, tomando m suficientemente grande, puede hacerse $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} l_{x+i/m}$ tan próximo a L_x como se desee.

$$L_x \doteq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} l_{x+i/m}$$

Las personas que mueren antes de cumplir la edad $x+1$ provenientes de ese grupo de individuos, con edad alcanzada x al inicio del año de observación, se representan con el símbolo ${}_\delta D_x$.

Son

$${}_\delta D_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} l_{x+i/m} \cdot {}_{1-i/m}q_{x+i/m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (l_{x+i/m} - l_{x+1})$$

El otro conjunto de muertes, ${}_\alpha D_x$, se forma con las que provienen del grupo de los que alcanzan la edad x durante el año de observación, entre los componentes de L_{x-1}, personas con edad $x-1$ en el momento inicial. Puede deducirse que resulta igual a:

$${}_\alpha D_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} l_{x-1+i/m} \cdot {}_{1-i/m}p_{x-1+i/m} \cdot {}_{i/m}q_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (l_x - l_{x+i/m})$$

Por lo tanto,

$$D_x = {}_\delta D_x + {}_\alpha D_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (l_x - l_{x+1}) = (l_x - l_{x+1}) = d_x$$

El valor d_x, puede observarse, no depende de m.

Conocido el número de muertes con edad x, se calcula por suma el total de muertes con edad superior a x. Es:

$$l_x = \sum_{t=0}^{\omega} d_{x+t} \quad \text{según la expresión (3).}$$

El número total de las muertes, considerando todas las edades, resulta:

$$l_0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x$$

La tasa cruda de mortalidad se define como el cociente de las muertes anuales y el total de habitantes de una población, considerada en un momento intermedio del año. En la población que se analiza el número de habitantes es independiente del momento que se considere ya que es siempre igual a T_o. La tasa cruda de mortalidad, que se simboliza con la letra m, vale por lo tanto:

$$m = \frac{l_o}{T_o}$$

Este resultado podía haberse anticipado: si el número de nacimientos anuales es l_o y la población tiene un número de habitantes, T_o, constante, es necesario que el número anual de muertes sea también igual a l_o, y la tasa de mortalidad igual a la de natalidad. ($m = b$)

La tasa de incremento natural, definida como la diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad, que se designa con la letra r ($r = b - m$) es, evidentemente, nula. La población hipotética en la que se dan estas condiciones se denomina "población estacionaria".

13. Tasa central de mortalidad. En la población estacionaria, según se ha visto, las muertes anuales de personas con edad alcanzada x son d_x; el número de personas con edad x en cualquier momento L_x; el cociente entre las dos cantidades proporciona la tasa central de mortalidad, que se simboliza con m_x. Por definición es:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} \tag{33}$$

En la práctica, cuando se considera la experiencia de mortalidad de la población de un país, los datos estadísticos disponibles son:

a) información de un censo que proporcione el número de personas en un momento clasificadas por edad alcanzada. Frecuentemente la distribución está dada por grupos de edades a intervalos quinquenales, en lugar de por edades individuales.

b) el número de muertes, distribuídas por edad, en cada año.

Para el estudio de la mortalidad pueden emplearse los resultados de más de un censo. Sin embargo, la elaboración de una tabla de mortalidad se basa generalmente en los resultados de un solo censo de población, asimilando al número de personas censadas con edad x con la función L_x de la tabla, y a las muertes registradas en un período alrededor de la fecha del censo, debidamente promediadas para que reflejen la experiencia de un año, con las muertes d_x de una población estacionaria.

La similitud entre la tasa observada de mortalidad por edades en una población real - determinada en las condiciones que se dejan indicadas - y la m_x de una población estacionaria, es de gran importancia práctica. Si se postula la distribución uniforme de las muertes en el año de vida $(x,x+1)$, o sea, si se supone que la función l_x es lineal entre x y $x+1$ el valor de L_x, según se ha visto, está dado por

$$L_x = l_x - \frac{1}{2}\, d_x \tag{31}$$

En este caso, el valor de m_x resulta:

$$m_x = \frac{d_x}{l_x - 1/2d_x} = \frac{2\,.\,q_x}{2 - q_x} \tag{34}$$

De esta relación resulta:

$$q_x = \frac{2\,.\,m_x}{2 + m_x} \tag{35}$$

La probabilidad de sobrevivencia puede escribirse, conforme con esa hipótesis, en función de la tasa central de mortalidad. Resulta:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1/2} - 1/2\, d_x}{l_{x+1/2} + 1/2\, d_x} = \frac{2 - m_x}{2 + m_x} \tag{36}$$

Las relaciones (35) y (36) tienen mucha importancia práctica. Si los valores de m_x para cada edad son obtenidos de la información proporcionada por un censo y por los registros de muertes, mediante ellas pueden calcularse los valores correspondientes a q_x ó p_x. Comenzando luego con cualquier raíz conveniente de l_0 se obtienen l_x y d_x. Estos valores serán correctos si lo son los valores observados de m_x, excepto en lo que se refiere a las primeras (0-5 años) y últimas edades. En estos intervalos, como se ha señalado anteriormente, no se verifica la hipótesis de una distribución uniforme de las muertes a lo largo del intervalo de vida.

Las tasas de mortalidad por edades que resultan de la observación muestran frecuentemente variaciones muy irregulares de edad en edad, que se deben generalmente a errores en la declaración de la edad, tanto de la población en el censo como de las muertes en los registros. Por esta razón es necesario corregir la información original cuidadosamente y adoptar un procedimiento de ajustamiento de los valores observados a fin de lograr una serie de tasas de mortalidad por edad que varíe en forma regular y que, al mismo tiempo, conserve cualquiera característica real de la experiencia que se analiza. Este ajustamiento esta encaminado a lograr la expresión de la ley real de mortalidad subyacente en la información errada proporcionada por los datos censales y las estadísticas de muertes.

14.- Las funciones L_x y m_x han sido presentadas e interpretadas en relación con la idea de población estacionaria. Este supuesto, sin embargo, no es necesario para asignar a estas funciones una clara significación. Pueden interpretarse conforme con la idea de que l_x representa el número de sobrevivientes de una generación de individuos constituída por l_0 nacimientos ocurridos en un año.

Vista así, L_x proporciona el número de años que se espera que vivan los componentes del grupo l_0 entre las edades x y $x+1$. Puede repetirse el razonamiento que condujo a la relación (30), es decir, comenzar la estimación de ese valor considerando que las muertes en el año de vida considerado se distribuyen en m subperíodos; suponer luego que dentro de cada subperíodo las muertes ocurren al inicio o, alternativamente al final, y por último definir el tiempo de vida entre x y $x+1$ como el límite al que tienden las expresiones obtenidas cuando el número de subperíodos se hace más y más grande.

Desde este punto de vista, la función T_x, proporciona el total de años de vida (años enteros y fracción de año) que se espera que vivan los componentes del grupo l_x, desde el momento en que alcanzan la edad x hasta aquél en que muere el último sobreviviente.

La función m_x es una relación entre el número de muertes que ocurren en el año de vida limitado por las edades x y $x+1$, y el tiempo vivido en el mismo lapso, por los que alcanzan la edad x.

$$(37)\quad m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\cdot \mu_{x+t}\cdot dt}{\int_0^1 l_{x+t}\cdot dt} = \mu_{x+\theta} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

Puede la m_x, conforme con (37), ser interpretada como una media ponderada de los valores de la fuerza de la mortalidad. Los pesos en esa ponderación son los individuos que alcanzan la edad x+t.

Cuando el intervalo de vida que se analiza es de n años, en lugar de un año, la expresión de la tasa central de mortalidad es:

(38) $$ {}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} $$

15. <u>Esperanza de vida</u>. T_x representa el número de años que se espera que vivan los componentes de un conjunto de l_x personas que alcanzan la edad x, después de cumplida esta edad. El tiempo de vida que se espera que viva cada componente de ese grupo, si el tiempo total se distribuye uniformemente entre todos sus integrantes, es lo que se denomina esperanza de vida a la edad x. Esta función se simboliza $\overset{o}{e}_x$ y vale, lógicamente,

(39) $$ \overset{o}{e}_x = \frac{T_x}{l_x} $$

La esperanza de vida al nacer, o vida media, corresponde al caso particular de x = 0.

$$ \overset{o}{e}_o = \frac{T_o}{l_o} $$

Puede escribirse el valor de $\overset{o}{e}_x$ como el promedio de los años vividos desde la edad x hasta el momento en que se alcanza la edad x+t de muerte, por las l_x personas que integran el grupo inicial.

Es:

(40) $$ \overset{o}{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt $$

$$ = \frac{1}{l_x} \left(- \int_0^\infty t \frac{d \cdot l_{x+t}}{dt} dt \right) $$

$$ = \frac{-1}{l_x} \int_0^\infty t \cdot dl_{x+t} = \frac{T_x}{l_x} $$

Si $L_x = 1/2(l_x + l_{x+1})$ resulta:

$$(41) \qquad \overset{o}{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=x}^{\omega} L_t$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{t=x}^{\omega} 1/2(l_t + l_{t+1})$$

$$= 1/2 + \sum_{t=1}^{\omega} \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= 1/2 + p_x + {}_2p_x + \dots$$

16. En una población estacionaria el número de personas con edad alcanzada x es L_x. Al cabo de un año el total de sobrevivientes de ese grupo está dado por L_{x+1}. La relación entre esas dos cantidades $\frac{L_{x+1}}{L_x}$ mide la probabilidad de sobrevivencia de un año que corresponde a un individuo medio del grupo L_x. Se simboliza ese factor con P_x. Es, por lo tanto:

$$(42) \qquad P_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}$$

Si el grupo comprende personas con edades entre x y x+n-1 años cumplidos y el plazo considerado es de m años, la expresión anterior se transforma en la más general:

$${}_mP_{(x-x+n-1)} = \frac{{}_nL_{x+m}}{{}_nL_x}$$

que mide la probabilidad de sobrevivir m años de un individuo medio del grupo ${}_nL_x$.

Si la amplitud del intervalo de edades coincide con el plazo que se considera, se puede escribir la expresión más usual:

$$(43) \qquad {}_nP_{(x-x+n-1)} = \frac{{}_nL_{x+n}}{{}_nL_x}$$

Factores de esta forma (particularmente ${}_5P_{(x-x+4)}$) son los que se aplican a grupos reales de personas con edades cumplidas entre x y x+n-1 años a fin de obtener los números esperados de sobrevivientes al cabo de n años. Procediendo de ese modo con los individuos de cada grupo de edades se obtiene, por suma de los resultados, el número de sobrevivientes de la población total.

Dentro de n años una población podrá tener un grupo de personas con edad menor a n años cumplidos proveniente de los nacimientos producidos en el intervalo de tiempo de la proyección. Para calcular el número de sobrevivientes de esos nacimientos se procede también a aplicar a la población real relaciones que se obtienen para una población estacionaria. En ésta el número de nacimientos en el intervalo de n años vale $n \cdot l_o$; el de sobrevivientes con menos de n años cumplidos ${}_nL_o$ y el factor de sobrevivencia aplicable a cada nacimiento ocurrido en el intervalo resulta $\frac{{}_nL_o}{nl_o}$.

Bibliografía

Spurgeon, E.F., F.I.A. - Life Contingencies, Cambridge University Press, 1946. Capítulo I y XII.

Hooker, P.F. y Longley-Cook, L.H. - Life and other Contingencies, Cambridge University Press, 1953. Capítulo 1, 2 y 14.

10-VI-60-100
17-IV-63-30