

00099.00

1515 00106

00-66
00099-00
CA

CELADE

00099000

Fecha recibida: _____

ARCHIVO de DOCUMENTOS

Original NO SALE de la oficina

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Distribución interna

Albino Bocaz



Serie B, No 5 Rev. 1.
Abril, 1971.
300.

INTERPOLACION

INDICE

	<u>Página</u>
1. Introducción	1
2. Definición de interpolación	1
3. La interpolación lineal	2
4. La interpolación parabólica	3
5. La fórmula de Gregory-Newton	4
6. La fórmula de Lagrange	7
7. La fórmula de Newton de diferencias divididas	13
8. Fórmula de diferencias invertidas	17
9. La interpolación osculatrix	21
10. Los multiplicadores de Grabbill	28
11. La interpolación de suavidad óptima	34
12. Cambio de la variable dependiente (y_x)	44
13. Cambio de la variable independiente (x)	48

Indice de cuadros

1. Tabla de multiplicadores de Lagrange para interpolación cúbica	9
2. Tabla de multiplicadores de Lagrange para interpolación quíntica	11

En el segundo caso, en cambio, se trata de una interpolación inversa, o sea, cuando dada una serie de valores (x, y_x) se trata de estimar (x) para un valor de y_x previamente establecido.

En muchos casos se acepta que la variable (x) es una variable independiente o más bien una variable controlada o argumento y la segunda variable (y_x) es la variable dependiente o función de (x) .

3. La interpolación lineal

La forma relativamente sencilla de interpolar, en general, tratándose de series empíricas y siempre que no se desee recurrir a una fórmula matemática es trazar un gráfico de la función. Este gráfico nos permite ver objetivamente la forma de variación de la función (y_x) e incluso nos puede permitir observar fallas en la información que estamos usando. Es recomendable siempre dibujar la función (y_x) aunque posteriormente recurramos a interpolación con base en una fórmula matemática para saber de antemano qué tipo de función es más adecuada.

Una vez que ha trazado el gráfico (x, y_x) , uniendo los puntos dados mediante una curva suave se puede leer en el gráfico el valor de interpolación deseado.

Por otra parte, cuando se recurre al uso de una fórmula matemática la determinación del valor de interpolación mediante una función compleja puede conducir a un valor parecido al que se obtiene por el uso de una fórmula sencilla. En otros casos los valores pueden resultar tan diferentes que se justifique el uso de la fórmula más compleja.

Es recomendable de todas maneras recurrir al uso de fórmulas relativamente sencillas o que si éstas son complejas (estructuralmente) se pueden tabular multiplicadores adecuados para realizar la interpolación mecánicamente.

Desde este punto de vista la interpolación más sencilla que se puede hacer es a través del uso de la función

$$y_x = a + b x \quad (1)$$

y cuando se recurre al uso de este tipo de función se dice que se está haciendo una "interpolación lineal". Si se dispone una serie de valores (x, y_x) es útil usar una escala adecuada para deducir la fórmula de interpolación. Por ejemplo, en el caso que se mencionó antes con respecto a la proyección de población femenina mexicana, tomaremos la abscisa del valor para 1970 como "origen" (0) y como unidad de escala para la variable tiempo la distancia común -5 años- entre los valores de la proyección.

Con este cambio de escala la serie queda así

x	-2	-1	0	1	2
y_x	18 035	31 376	25 310	29 702	34 343

con lo cual se trata de interpolar en el intervalo 0-1, el valor y_x para $x=0,2$.

Dado que se trata de una interpolación lineal que debe reproducir los valores y_0 e y_1 , la función lineal debe cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} y_0 &= a \\ y_1 &= a+b \end{aligned} \quad (2)$$

con lo cual la función y_x queda así:

$$y_x = (1-x)y_0 + xy_1 \quad (3)$$

pudiendo notarse que los multiplicadores $(1-x)$ y (x) para y_0 e y_1 cumplen la condición

$$(1-x) + (x) = 1 \quad (4)$$

o sea se trata de factores de ponderación de los pivotes dados.

En el caso que nos preocupa dado que $x=0,2$, los factores de ponderación son 0,8 y 0,2 respectivamente, el valor estimado para 1971 es igual a

$$(0,8) 25 310 + (0,2) 29 702 = 26 188$$

4. La interpolación parabólica

En algunos casos puede interesar reproducir (exactamente) los valores pivotaes más allá del intervalo $(0-1)$ y no solamente los valores y_0 e y_1 que limitan este intervalo.

En este caso puede recurrirse al uso de funciones del tipo

$$y_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (5)$$

en que el grado de (x) depende del número de valores pivotaes que trata de reproducir. Considerando que cada valor pivotal (y_i) conduce a una ecuación de condición del tipo

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + dx_i^3 + \dots \quad (6)$$

se puede deducir que el exponente de (x) es igual al número de (n) valores pivotaes que se quiere reproducir menos 1. En otros términos una parábola de grado $(n-1)$ reproduce -desde el punto de interpolación- n valores pivotaes (y_x) .

Trátase de valores igualmente o desigualmente espaciados el número de condiciones dependerá del número de puntos a reproducir y la solución del sistema de ecuaciones simultáneas podrá sistematizarse en ambos casos, conduciendo como luego veremos a las fórmulas de Gregory-Newton y de Newton de diferencias divididas, según el caso.

El uso de funciones parabólicas de grado (n) tiene la ventaja que permite -cualquiera que sea la ubicación de los puntos pivotaes- determinar un sistema de multiplicadores de esos valores de modo que en forma sistemática se puede realizar la interpolación en un caso de rutina.

Por otra parte, el uso de la función parabólica tiene la desventaja que en ciertos casos no produce buenos valores de interpolación cuando se trata de valores (y_x) que presentan bruscos cambios entre los valores adyacentes, presentándose casos en que su uso conduce a valores negativos totalmente inadmisibles o a valores positivos que no reflejan la verdadera evolución de los valores de interpolación.

También presentan el inconveniente que no satisfacen ciertas restricciones de extremos (que valga 0 ó 1) en la derivación o que alcance un máximo o mínimo en la ubicación adecuada. Parte de estos problemas se pueden solucionar con un cambio de variable, sea en la variable dependiente (cambio de y_x) o de la variable independiente (cambio de x).

5. La fórmula de Gregory-Newton

Se deducirá la fórmula de Gregory-Newton considerando el siguiente caso particular.

Determinar la ecuación de la parábola de tercer grado (cúbica) que reproduce la siguiente serie:

x	-1	0	1	2
y_x	y_{-1}	y_0	y_1	y_2

La ecuación de la parábola cúbica es la siguiente:

$$y_x = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (7)$$

Para $x=-1, 0, 1, 2$ debe satisfacer las condiciones

$$\begin{aligned} y_{-1} &= a - b + c - d \\ y_0 &= a \\ y_1 &= a + b + c + d \\ y_2 &= a + 2b + 4c + 8d \end{aligned} \quad (8)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones simultáneas podemos restar las ecuaciones en forma sucesiva

$$\begin{aligned} y_0 - y_{-1} &= b - c + d \\ y_1 - y_0 &= b + c + d \\ y_2 - y_1 &= b + 3c + 7d \end{aligned} \quad (9)$$

Por la conveniencia de introducir la expresión

) 5 (

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x \quad (10)$$

que se denominará diferencia finita de primer orden y que permite escribir el sistema de ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} \Delta y_{-1} &= b-c+d \\ \Delta y_0 &= b+c+d \\ \Delta y_1 &= b+3c+7d \end{aligned} \quad (11)$$

Podemos reiterar el proceso de diferenciación lo que permite eliminar "b" y tener

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{-1} &= \Delta y_0 - \Delta y_{-1} = 2c \\ \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = 2c + 6d \end{aligned} \quad (12)$$

y al realizar por tercera vez la diferenciación, se llega a

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 6d \quad (13)$$

con lo cual

$$d = \Delta^3 y_0 / 3! \quad (14)$$

y que nos da además

$$\begin{aligned} c &= (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0) / 2 \\ b &= \Delta y_0 - \Delta^2 y_0 / 2 + \Delta^3 y_0 / 6 \end{aligned} \quad (15)$$

Si reemplazamos los valores de los parámetros a, b, c, d en la relación (7) se puede escribir la parábola cúbica en la forma

$$y_x = y_0 + \frac{x}{1!} \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 y_0 \quad (16)$$

o lo que es lo mismo

$$y_x = y_0 + c_1^x \Delta y_0 + c_2^x \Delta^2 y_0 + c_3^x \Delta^3 y_0 \quad (17)$$

Esta fórmula puede generalizarse para un cierto número cualquiera de puntos (x, y_x) igualmente espaciados, como puede verse con el siguiente razonamiento.

La expresión (17) puede escribirse así

$$y_x = (1 + c_1^x \cdot \Delta + c_2^x \cdot \Delta^2 + c_3^x \cdot \Delta^3) y_0 \quad (18)$$

o bien

$$y_x = (1 + \Delta)^x y_0$$

con las restricciones $\Delta^4 y_0 = \Delta^5 y_0 = \dots = 0$ para el caso de una parábola cúbica o reproducción de 4 valores pivotaes.

Podemos considerar que Δ es un operador lineal e introducir el operador E

$$E = 1 + \Delta \quad (19)$$

con lo cual la cúbica nos queda en la forma simbólica

$$y_x = E^x y_0 \quad (20)$$

que se reconoce como fórmula de Gregory-Newton y en la cual el desarrollo del binomio se detiene hasta la diferencia de orden (n-1), siendo (n) el número de valores pivotaes dados.

Puesto que entre los operadores E y Δ se tiene la relación

$$\Delta = E - 1 \quad (21)$$

es posible expresar las diferencias finitas en función directa de los valores pivotaes teniéndose:

$$\Delta y_x = (E-1) y_x = y_{x+1} - y_x$$

$$\Delta^2 y_x = (E-1)^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x \quad (22)$$

$$\Delta^3 y_x = (E-1)^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$

de ese modo para $x=0$ se tendrá

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 \quad (23)$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

.....

denominadas diferencias gufas y que son las que deben calcularse para la fórmula de Gregory-Newton.

Para el ejemplo numérico analizado en la interpolación lineal se tiene:

$$\Delta y_0 = 29\ 702 - 25\ 310 = 4\ 392$$

$$\Delta^2 y_0 = 34\ 343 - 2(29\ 702) + 25\ 310 = 249$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^3 y_{-1} = 34\ 343 - 3(29\ 702) + 3(25\ 310) - 21\ 376 = -209$$

y por tanto la cúbica que pasa por los puntos $(-1, y_{-1}); (0, y_0); (1, y_1); (2, y_2)$ es

$$y_x = 25\ 310 + 4\ 392 C_1^x + 249 C_2^x - 209 C_3^x$$

— que para $x=0,2$ nos da

$$y_{0,2} = 25\ 310 + 0,2(4\ 392) + 0,08(249) + 0,048(-209) = \underline{26\ 158}$$

el valor interpolado para 1971.

6. La fórmula de Lagrange

Puesto que las diferencias finitas pueden expresarse en función de los valores pivotaes (y_x) y que los coeficientes binomiales C_k^x pueden expresarse como funciones de (x) es posible escribir la fórmula de Gregory-Newton en la forma

$$y_x = \sum f_k(x) y_k \quad (24)$$

siendo $f(x)$ funciones de grado $(n-1)$ en (x) , cuando se tienen (n) valores pivotaes igualmente espaciado.

Tal forma de escribir la fórmula de Gregory-Newton se debe a Lagrange y presenta la ventaja frente a la anterior — que prefijado el número de valores pivotaes (y_x) que se desea hacer participar para interpolar un valor determinado — se pueden ponderar estos valores pivotaes y determinar cómodamente el valor de interpolación deseado.

La deducción de la fórmula de Lagrange para el caso de interpolación cúbica y quíntica (parábolas de tercer y quinto grado respectivamente) se hace de la siguiente manera.

Caso de cúbica

Los valores pivotaes son los siguientes

x	-1	0	1	2
y_x	y_{-1}	y_0	y_1	y_2

y la parábola tiene que tener la forma

$$y_x = L_{-1}(x) y_{-1} + L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 \quad (25)$$

notando que las funciones "ponderativas" deben anularse para cualquier valor de (x) distinto de la abscisa del pivote al cual pondera la función. Por otra parte, estas funciones ponderativas deben valer 1 cuando en ella se reemplaza la abscisa del pivote correspondiente.

De esa manera la ecuación de la cúbica tiene que ser la siguiente

$$y_x = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} y_{-1} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} y_0 + \frac{(x+1)x(x-2)}{-2} y_1 + \frac{(x+1)x(x-1)}{6} y_2 \quad (26)$$

que puede tabularse para valores diferentes de (x) en el intervalo $(0-1)$. En la tabla 1 se indican los multiplicadores de Lagrange para x variando desde 0 a 1, con cambios en (x) de 0,02 suficientes para interpolar en casos de apareamiento corriente.

Ejemplo. Interpolare los valores de 1971, 1972, 1973 y 1974 en la serie

Año	1960	1965	1970	1975	1980
Población	18 035	21 376	25 310	29 702	34 343

Solución

Los multiplicadores necesarios son

Año	x	21 376	25 310	29 702	34 343	Población
1971	0,2	-0,0480	0,8640	0,2160	-0,0320	
1972	0,4	-0,0640	0,5720	0,4480	-0,0560	
1973	0,6	-0,0560	0,4480	0,6720	-0,0640	
1974	0,8	-0,0320	0,2160	0,8640	-0,0480	

Nota. La ecuación de una cúbica por 4 puntos puede escribirse en forma más adecuada para el cálculo de los multiplicadores usando la siguiente escala:

v	-3	-1	1	3
y_v	y_{-3}	y_{-1}	y_1	y_3

y quedando por tanto la ecuación en la forma

$$y_v = \frac{(v^2-1)(v-3)}{-48} y_3 + \frac{(v^2-9)(v-1)}{16} y_{-1} + \frac{(v^2-9)(v+1)}{-16} y_1 + \frac{(v^2-1)(v+3)}{48} y_3 \quad (27)$$

$$\text{con } v = 2x-1$$

y pudiendo verse fácilmente que cuando se hace el cambio de (v) por (-v) las funciones ponderativas se invierten en el orden en que multiplican a los valores pivotaes y que aclaran el uso de los multiplicadores para $x > 0,50$.

De la misma manera para una parábola de quinto grado -escrita a la manera de Lagrange- y siempre que se trate de valores igualmente espaciados se tendrá

v	-5	-3	-1	1	3	5
y_v	y_{-5}	y_{-3}	y_{-1}	y_1	y_3	y_5

$$y_v = \frac{(v^2-1)(v^2-9)(v-5)}{-3840} y_{-5} + \frac{(v^2-1)(v^2-25)(v-3)}{768} y_{-3} + \frac{(v^2-9)(v^2-25)(v-1)}{-384} y_{-1} \\ + \frac{(v^2-9)(v^2-25)(v+1)}{384} y_1 + \frac{(v^2-1)(v^2-25)(v+3)}{-768} y_3 + \frac{(v^2-1)(v^2-9)(v+5)}{3840} y_5 \quad (28)$$

Cuadro 1

TABLA DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA INTERPOLACION CUBICA

x	C_{-1}	C_0	C_1	C_2	x
0,00	0	100 000	0	0	1,00
0,02	-647	98 960	2 020	-333	0,98
0,04	-1 254	97 843	4 077	-666	0,96
0,06	-1 824	96 651	6 169	-996	0,94
0,08	-2 355	95 386	8 294	-1 325	0,92
0,10	-2 850	94 050	10 450	-1 650	0,90
0,12	-3 309	92 646	12 634	-1 971	0,88
0,14	-3 732	91 177	14 843	-2 288	0,86
0,16	-4 122	89 645	17 075	-2 598	0,84
0,18	-4 477	88 052	19 328	-2 903	0,82
0,20	-4 800	86 400	21 600	-3 200	0,80
0,22	-5 091	84 692	23 888	-3 489	0,78
0,24	-5 350	82 931	26 189	-3 770	0,76
0,26	-5 580	81 119	28 501	-4 040	0,74
0,28	-5 779	79 253	30 822	-4 301	0,72
0,30	-5 950	77 350	33 150	-4 550	0,70
0,32	-6 093	75 398	35 482	-4 787	0,68
0,34	-6 208	73 405	37 815	-5 012	0,66
0,35	-6 293	71 373	40 147	-5 222	0,64
0,38	-6 361	69 304	42 476	-5 419	0,62
0,40	-6 400	67 200	44 800	-5 600	0,60
0,42	-6 415	65 064	47 116	-5 765	0,58
0,44	-6 406	62 899	49 421	-5 914	0,56
0,46	-6 376	60 707	51 713	-6 044	0,54
0,48	-6 323	58 490	53 990	-6 157	0,52
0,50	-6 250	56 250	56 250	-6 250	0,50
	C_2	C_1	C_0	C_{-1}	x

representándose en la tabla 2 los multiplicadores correspondientes para (x) variando de 0 a 1, con espaciamiento de 0,02.

Ejemplo. Interpolación los valores de 1971, 1972, 1973 y 1974 dada la serie

Año	1960	1965	1970	1975	1980
Población	18 035	21 376	25 310	29 702	34 343

Solución. Puesto que se dispone de 5 valores pivotaes la parábola de interpolación es de cuarto grado. Notando por otra parte que en una parábola de cuarto grado las diferencias quinta y superiores son nulas es posible estimar un valor pivotal "ficticio" para 1985 usando la condición señalada

$$\Delta^5 y_x = 0 \quad (29)$$

o lo que es lo mismo

$$y_{x+5} = 5y_{x+4} - 10y_{x+3} + 10y_{x+2} - 5y_{x+1} + y_x \quad (30)$$

lo que da 1985 el valor

$$y_{1985} = 5(34\ 343) - 10(29\ 702) + 10(25\ 310) - 5(21\ 376) + 1(18\ 035) = \underline{38\ 950}$$

y los valores de interpolación deseados son

x	18 035	21 376	25 310	29 702	34 343	38 950	
0,2	0,0081	-0,0739	0,8870	0,2218	-0,0493	0,0063	26 157
0,4	0,0116	-0,0998	0,6989	0,4659	-0,0874	0,0108	27 022
0,6	0,0108	-0,0874	0,4659	0,6989	-0,0998	0,0116	27 902
0,8	0,0063	-0,0493	0,2218	0,8870	-0,0739	0,0081	28 797

La fórmula de Lagrange puede usarse también en los casos que se dispone de valores pivotaes desigualmente espaciados, imponiendo a las funciones $L_i(x)$ las condiciones que se anulen para cualquier valor de $x=i$ distinto del valor (y_i) al cual pondera y tomando el valor de 1 cuando $x=i$.

Caso 1. Así por ejemplo en el caso siguiente:

x	0	1	5	10
y_x	y_0	y_1	y_5	y_{10}

La ecuación de la parábola cúbica está dada por

$$y_x = \frac{(x-1)(x-5)(x-10)}{-50} y_0 + \frac{x(x-15)(x-10)}{35} y_1 + \frac{x(x-1)(x-10)}{-100} y_5 + \frac{x(x-1)(x-5)}{450} y_{10} \quad (31)$$

Cuadro 2

TABLA DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA INTERPOLACION QUINTICA

x	C ₋₂	C ₋₁	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	
0,00	0	0	1 000 000				1,00
0,02	983	-9 734	992 837	20 262	-5 014	666	0,98
0,04	1 931	-18 936	984 694	41 029	-10 048	1 331	0,96
0,06	2 842	-27 611	975 593	62 272	-15 086	1 991	0,94
0,08	3 714	-35 761	965 557	83 961	-20 116	2 645	0,92
0,10	4 546	-43 391	954 608	106 068	-25 121	3 292	0,90
0,12	5 336	-50 506	942 770	128 560	-30 088	3 928	0,88
0,14	6 085	-57 109	930 068	151 406	-35 002	4 553	0,86
0,16	6 789	-63 209	916 528	174 577	-39 849	5 164	0,84
0,18	7 449	-68 810	902 177	198 039	-44 613	5 759	0,82
0,20	8 064	-73 920	887 040	221 760	-49 280	6 336	0,80
0,22	8 633	-78 546	871 146	245 708	-53 835	6 894	0,78
0,24	9 156	-82 696	854 523	269 849	-58 263	7 431	0,76
0,26	9 632	-86 378	837 200	294 151	-62 549	7 944	0,74
0,28	10 060	-89 601	819 207	318 580	-66 680	8 433	0,72
0,30	10 442	-92 374	800 572	343 102	-70 639	8 895	0,70
0,32	10 777	-94 706	781 328	367 684	-74 412	9 329	0,68
0,34	11 065	-96 609	761 506	392 291	-77 986	9 734	0,66
0,36	11 305	-98 091	741 135	416 888	-81 344	10 106	0,64
0,38	11 500	-99 165	720 249	441 443	-84 474	10 446	0,62
0,40	11 648	-99 840	698 880	465 920	-87 360	10 752	0,60
0,42	11 751	-100 129	677 060	490 285	-89 989	11 022	0,58
0,44	11 808	-100 042	654 823	514 503	-92 347	11 255	0,56
0,46	11 822	-99 593	632 201	538 541	-94 420	11 449	0,54
0,48	11 792	-98 794	609 228	562 364	-96 194	11 604	0,52
0,50	11 719	-9 656	585 938	585 938	-97 656	11 719	0,50
	C ₃	+C ₂	C ₁	C ₀	C ₋₁	C ₋₂	x

Nota. Los valores están amplificados en 1 000 000 y los valores de interpolación se calculan a través de la relación:

pudiendo verse que las funciones $L_i(x)$ cumplen la condición "ponderativa"

$$\sum L_i(x) = 1 \quad (32)$$

Además si se tiene que realizar una interpolación de rutina en el intervalo 1-5 será conveniente tabular la función en ese intervalo. Al hacerlo se llega al siguiente juego de multiplicadores

x	y_0	y_1	y_5	y_{10}
2	-0,4800	1,3333	0,1600	-0,1333
3	-0,5600	1,1667	0,4200	-0,0267
4	-0,3300	0,6667	0,7200	-0,0267

notándose que los multiplicadores tienen signos positivos y negativos que se alternan más allá de los valores "positivos" que multiplican a los valores pivotaes que encierran el intervalo en donde se está efectuando la interpolación.

Caso 2. Se trata de interpolar en el intervalo 1-5 dado los siguientes valores pivotaes

x	1	5	10	15
y_x	y_1	y_5	y_{10}	y_{15}

En este caso la ecuación de la parábola es

$$y_x = \frac{(x-5)(x-10)(x-15)}{-504} y_1 + \frac{(x-1)(x-10)(x-15)}{125} y_5 + \frac{(x-1)(x-5)(x-15)}{-225} y_{10} + \frac{(x-1)(x-5)(x-10)}{700} y_{15} \quad (33)$$

y los 3 valores pivotaes se calculan usando el siguiente juego de multiplicadores

x	y_1	y_5	y_{10}	y_{15}
2	0,6190	0,5200	-0,1733	0,0343
3	0,3333	0,3400	-0,2133	0,0400
4	0,1310	0,9900	-0,1457	0,0257

Ejemplo numérico. Usando el cambio de variable

$$y_x = \sqrt{x+k} \log. \frac{1}{1+x} \quad (34)$$

aplicar los multiplicadores anteriores para interpolar la siguiente serie de valores de una tabla de vida

x	1	5	10	15
l_x	89 173	86 354	85 760	85 332

Solución. Adoptando $k=0,40$ para el parámetro (k) se tienen los siguientes valores pivotaes:

x	1	5	10	15
y_x	1,08351	1,06201	2,51468	3,00105

y luego de interpolar se encuentra

x	1	2	3	4
y_x	1,08351	1,30608	1,50088	1,69355
l_x	89 173	87 449	86 810	86 518
$2x$	19,33	7,31	3,36	1,90

que comparados con los valores de la tabla detallada

x	1	2	3	4
$9x$	19,76	6,55	3,27	2,31

se ve que el cambio de variable es relativamente adecuado.

7. La fórmula de Newton de diferencias divididas

En el caso de interpolación con valores desigualmente espaciados puede interesar, a veces, saber si a un cierto determinado grado de la función parabólica prácticamente los valores de interpolación no cambian significativamente si se aumenta el grado de la función.

En esos casos se hace necesario usar otra fórmula (o manera de escribir) la parábola de interpolación que no sea la fórmula ponderativa de Lagrange, en la que de antemano se decide cuantos valores pivotaes se van a usar.

Supongamos que deseamos usar una parábola de tercer grado para interpolar valores en la serie siguiente:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y_x	y_0	y_1	y_2	y_3

) 14 (

y supongamos que la parábola tiene la forma analítica siguiente

$$y_x = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Debiendo reproducirse los valores pivotaes observados, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} y_0 &= a + bx_0 + cx_0^2 + dx_0^3 \\ y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 \\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 \\ y_3 &= a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3 \end{aligned} \quad (35)$$

Este sistema de ecuaciones simultáneas puede resolverse eliminando sucesivamente los diversos parámetros, lo que logra hacerse restando las ecuaciones en forma sucesiva tal como se hizo para el caso cuando se dedujo la fórmula de Gregory-Newton.

Al realizar la diferencia entre ecuaciones sucesivas se encuentra:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= b(x_1 - x_0) + c(x_1^2 - x_0^2) + d(x_1^3 - x_0^3) \\ y_2 - y_1 &= b(x_2 - x_1) + c(x_2^2 - x_1^2) + d(x_2^3 - x_1^3) \\ y_3 - y_2 &= b(x_3 - x_2) + c(x_3^2 - x_2^2) + d(x_3^3 - x_2^3) \end{aligned} \quad (36)$$

y para dejar con coeficiente 1 al parámetro (b) debemos dividir por la distancia a que se encuentran los valores pivotaes sucesivos, o sea

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} &= b + c(x_1 + x_0) + d(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= b + c(x_2 + x_1) + d(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \\ \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} &= b + c(x_3 + x_2) + d(x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (37)$$

pudiendo verse que en el primer miembro de estas ecuaciones aparecen las diferencias finitas de valores sucesivos de y_x divididas por la distancia a que se encuentran esos valores pivotaes (o puntos), resultando de esto que sea lógico denominar esas cantidades diferencias divididas de primer orden.

Si se adopta la notación

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (38)$$

el sistema queda así

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= b + c(x_1 + x_0) + d(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) \\ \Delta y_1 &= b + c(x_2 + x_1) + d(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \\ \Delta y_2 &= b + c(x_3 + x_2) + d(x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (39)$$

Si se reitera el proceso de diferenciación (dividida) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = c + d(x_0 + x_1 + x_2) \\ \Delta^2 y_1 &= \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = c + d(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned} \quad (40)$$

o sea un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas en que en el primer miembro aparecen las diferencias divididas de segundo orden.

Al volver a diferenciar, se logra

$$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0} = \Delta^3 y_0$$

o sea que "d" es igual a la tercera diferencia dividida quita (con respecto al primer valor observado).

Al reemplazar este valor de "d" en la primera ecuación de (40), de allí los valores de "c" y "d" en la primera ecuación de (39) y finalmente los valores de b, c y d en la primera ecuación de (35) se tiene

$$\begin{aligned} a &= y_0 - x_0 \Delta y_0 + x_0 x_1 \Delta^2 y_0 - x_0 x_1 x_2 \Delta^3 y_0 \\ b &= \Delta y_0 - (x_0 + x_1) \Delta^2 y_0 + (x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) \Delta^3 y_0 \\ c &= \Delta^2 y_0 - (x_0 + x_1 + x_2) \Delta^3 y_0 \\ d &= \Delta^3 y_0 \end{aligned} \quad (41)$$

se llega a la expresión

$$y_x = y_0 + (x - x_0) \Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1) \Delta^2 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \Delta^3 y_0 \quad (42)$$

que representa un caso particular de la fórmula de Newton de diferencias divididas.

La estructura matemática de la función nos permite generalizar la expresión anterior. Así, por ejemplo, si se dispone de 2 valores pivotaes más (x_4, y_4) ; (x_5, y_5) los términos siguientes serían

$$\begin{aligned} & (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \Delta^4 y_0 \\ & (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \Delta^5 y_0 \end{aligned} \quad (43)$$

correspondiendo la expresión total a la ecuación de una parábola de quinto grado.

Nota. La fórmula de Newton de diferencias divididas puede escribirse usando la siguiente fórmula de recurrencia:

$$V_k(x) = V_k(x_k) + (x-x_k) V_{k+1}(x) \quad (44)$$

con $y_x = V_0(x)$

$$\begin{aligned} V_0(x_0) &= y_0 \\ V_1(x_1) &= \Delta y_0 \\ V_2(x_2) &= \Delta^2 y_0 \\ V_3(x_3) &= \Delta^3 y_0 \end{aligned} \quad (45)$$

forma que nos permite llegar a otra fórmula de interpolación como luego veremos.

Ejemplo. Dada la serie

x	1	5	10	15
y _x	1,08351	1,86201	2,51468	3,00105

Se pide

- formar la tabla de diferencias divididas,
- escribir la fórmula de Newton correspondiente para interpolar en el intervalo 1-5.
- determinar los valores de interpolación.

Solución. Se tiene

a)	x	y _x	Δy_x	$\Delta^2 y_x$	$\Delta^3 y_x$
	1	1,08351			
	5	1,86201	0,19462		
	10	2,51468	0,13053	-0,00712	
	15	3,00105	0,09727	-0,00333	0,00027

b) $y_x = 1,08351 + (x-1) 0,19462 + (x-1)(x-5)(-0,0712) + (x-1)(x-5)(x-10)(0,00027)$

c)	para $x=2$; $y_2=1,30597$
	" $x=3$; $y_3=1,50879$
	" $x=4$; $y_4=1,69359$

3. Fórmula de diferencias invertidas

Ya antes se indicó una manera alternativa de escribir la fórmula de Newton de diferencias divididas usando la relación de recurrencia

$$V_k(x) = V_k(x_k) + (x-x_k) V_{k+1}(x)$$

con $y_x = V_0(x)$

$$V_i(x_i) = \Delta^i y_0$$

Esto sugiere la posibilidad de introducir otra ley de recurrencia de las funciones $v_k(x)$ en la forma

$$V_k(x) = V_k(x_k) + \frac{x-x_k}{V_{k+1}(x)} \quad (46)$$

lo que nos conduce a la expresión

$$y_x = av + \frac{x-x_0}{a_1 + \frac{x-x_1}{a_2 + \frac{x-x_2}{a_3 + \dots}}} \quad (47)$$

que puede escribirse en la forma más compacta

$$y_x = av + \frac{x-x_0}{a_1 + \frac{x-x_1}{a_2 + \frac{x-x_2}{a_3 + \dots}}} \quad (48)$$

y a la cual se denomina "fracción continua"

Las cantidades $v_k(x_k)$ se determinan imponiendo la condición que la fracción continua reproduzca los valores observados.

La condición de reproducción de los valores y_0 y y_1 nos lleva a las relaciones:

$$y_0 = v_0(x_0) \quad ; \quad y_1 = y_0 + \frac{x_1-x_0}{v_1(x_1)}$$

con lo cual

$$v_1(x_1) = \frac{x_1-x_0}{y_1-y_0} = \nabla y_0$$

y podemos adoptar en general

$$\nabla y_i = \frac{x_{i+1}-x_0}{y_{i+1}-y_0} \quad (49)$$

1. Introducción

El presente apunte sobre interpolación tiene por objeto indicar las fórmulas más usadas en este proceso numérico y su aplicación en diversos casos de interpolación que aparece en el trabajo demográfico. En muchas oportunidades las fórmulas de interpolación no pueden usarse directamente sino que se hace necesario cambiar las variables. Tales se indican con diversas aplicaciones y los resultados a que conducen esos cambios de variable. Tratándose de casos de interpolación de rutina (interpolación repetida en forma sistemática en números grandes de veces) es necesario disponer de tablas de multiplicadores para realizar tal proceso numérico en forma rápida y por ese motivo se indican a través del texto numerosas tablas de multiplicadores para esos casos.

Las aplicaciones numéricas que se indican después de haber pasado una determinada fórmula de interpolación toman en cuenta casos reales del trabajo demográfico y como tal se interpola en problemas de mortalidad, de fecundidad, de proyecciones de población, etc. con el objeto de justificar el uso de esas fórmulas.

2. Definición de interpolación

Supongámos que disponemos de una serie de pares de valores (x, y_x) que corresponden a una serie de valores determinados por la observación o por algún cálculo previo en el trabajo demográfico rutinario. Puede también corresponder la serie a una función matemática que se encuentra tabulada en alguna tabla matemática. En cualquiera de esos casos puede presentarse la necesidad de estimar para un valor de (x) no tabulado, el valor de y_x que le corresponde. También puede presentarse el problema inverso, esto es, para un valor y_x no tabulado estimar el valor de (x) que le corresponde.

Así, por ejemplo, cierta proyección de la población femenina de México estima los siguientes valores de población (en miles) para el período 1960-1980.

Año	1960	1965	1970	1975	1980
Población	18 035	21 376	25 310	29 702	34 343

En este caso puede interesar, por ejemplo, estimar la población para 1971 o bien en que momento (año), la citada población femenina alcanza 30 000.

En el primer caso se dice que se trata de una interpolación directa o sea, que cuando se trata de deducir una serie de valores (x, y_x) un valor y_x no tabulado si es que se establece el valor de (x) .

Expresión que puede denominarse "diferencia dividida inversa" con respecto al origen, ya que siempre se resta con respecto a los valores (x_0, y_0) .

Para la reproducción del valor y_2 debe tenerse

$$y_2 = y_0 + \frac{x_2 - x_0}{v_1(x_1)} + \frac{x_2 - x_1}{v_2(x_2)}$$

con lo cual

$$v_2(x_2) = \frac{x_2 - x_1}{\nabla y_1 - \nabla y_0} = \nabla^2 y_0$$

y adoptando en general, la notación

$$\nabla^2 y_i = \frac{x_{i+2} - x_1}{\nabla y_{i+1} - \nabla y_0} \quad (50)$$

Para $x=x_3$ se tiene

$$y_3 = y_0 + \frac{x_3 - x_0}{v_1(x_1)} + \frac{x_3 - x_1}{v_2(x_2)} + \frac{x_3 - x_2}{v_3(x_3)}$$

de donde se deduce

$$v_3(x_3) = \frac{x_3 - x_2}{\nabla^2 y_1 - \nabla^2 y_0} = \nabla^3 y_0$$

y en general las diferencias invertidas de orden 3 con respecto al origen

$$\nabla^3 y_i = \frac{x_{i+3} - x_2}{\nabla^2 y_{i+1} - \nabla^2 y_0} \quad (51)$$

Ejemplo. Dada la serie

x	60	65	70	75
l_x	24 194	19 015	13 329	8 092

Interpolar los valores del intervalo 65-70 usando el cambio de variable

$$y_x = \frac{l_x}{l-x} = \frac{x}{w-x}$$

con $w = 105$

Solución. La tabla de diferencias divididas invertidas con respecto al origen es la siguiente :

) 19 (

x	$\frac{1(1-x)}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x}}$	y_x	∇y_x	$\nabla^2 y_x$	$\nabla^3 y_x$
60	0,31916	8,9443	2,8547			
65	0,23400	10,2774	2,4131	-11,3225		
70	0,16043	11,8332	1,8900	-10,4613	5,8059	
75	0,09769	13,6931	1,3354	-9,3795	6,9300	4,4480

La ecuación de la función de interpolación es:

$$y_x = 2,8547 + \frac{x-60}{-11,3225} + \frac{x-65}{5,8059} + \frac{x-70}{4,4480}$$

y los valores de interpolación son

x	66	67	68	69
y_x	17 969	16 926	15 886	14 853

Ejemplo 2. Dada la serie

x	0	1	2
y_x	1	r	r^2

determinar la curva de interpolación correspondiente usando las fracciones continuas.

Solución. La tabla de diferencias divididas inversas, con respecto al origen, es la siguiente:

x	y_x	∇y_x	$\nabla^2 y_x$
0	1		
1	r	$1/(r-1)$	
2	r^2	$-2/(r^2-1)$	$-(r+1)$

con lo cual

$$y_x = 1 + \frac{x}{1/(r-1)} + \frac{1-x}{r+1}$$

Aplicación numérica. Interpolar geoméricamente (en forma aproximada) en el intervalo 1970-1975 en la siguiente proyección de población

Año	1960	1965	1970	1975	1980
Población	10 035	21 376	25 310	29 702	34 343

Usando los valores pivotaes que encierran el intervalo, se tiene

$$r = \frac{25\ 310}{21\ 376} = 1,17353$$

de lo cual

$$y_x/y_0 = 1 + \frac{0,16070\ x}{1-0,07394\ x}$$

los valores de interpolación son los siguientes:

Año	x	y_x/y_0	y_x
1971	0,2	1,03262	26 136
1972	0,4	1,06624	26 986
1973	0,6	1,10090	27 864
1974	0,8	1,13664	28 768

Ejemplo 3. Aplicar las fracciones continuas a la ley geométrica modificada

$$y_x = a + bc^x$$

Solución. En esta ley se cumple que las diferencias finitas Δy_x están en progresión geométrica, ya que

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = (a+bc^{x+1}) - (a+bc^x) = b(c-1)c^x$$

Esto indica que es posible interpolar en el intervalo 0-1 cuando se dispone de los valores pivotaes $(0, y_0); (1, y_1); (2, y_2)$ usando la ley geométrica modificada.

Es fácil ver que

$$c^x = 1 + \frac{x}{1/(r-1)} + \frac{1-x}{(r+1)}$$

y dado que

$$y_0 = a+b; \quad y_1 = a+bc$$

los valores de interpolación en el intervalo 0-1 están dados por

$$y_x = y_0 + \frac{c^x - 1}{c-1} \Delta y_0$$

Aplicación numérica. Dada la serie

$\frac{x}{1-x}$	$\frac{60}{24\ 194}$	$\frac{65}{19\ 015}$	$\frac{70}{13\ 829}$
-----------------	----------------------	----------------------	----------------------

interpolar en el intervalo 60-65 usando el cambio de variable

$$y_x = 1/(1-1_x)$$

Solución. Para el cálculo de (r) debemos calcular los Δy_x

x	y_x	Δy_x
0	0,31916	
1	0,23480	-0,08436
2	0,16048	-0,07432

$r = 0,88099$

con lo cual

$$c^x = 1 + \frac{x}{-8,40266} + \frac{1-x}{1,88099}$$

y los valores c^x en el intervalo 0-1 son los siguientes

x	$x/(c^x-1)$	c^x-1
0,2	-8,40266+0,42531	-0,02507
0,4	-8,40266+0,31898	-0,04948
0,6	-8,40266+0,21265	-0,07326
0,8	-8,40266+0,10633	-0,09643

y finalmente los valores de interpolación son

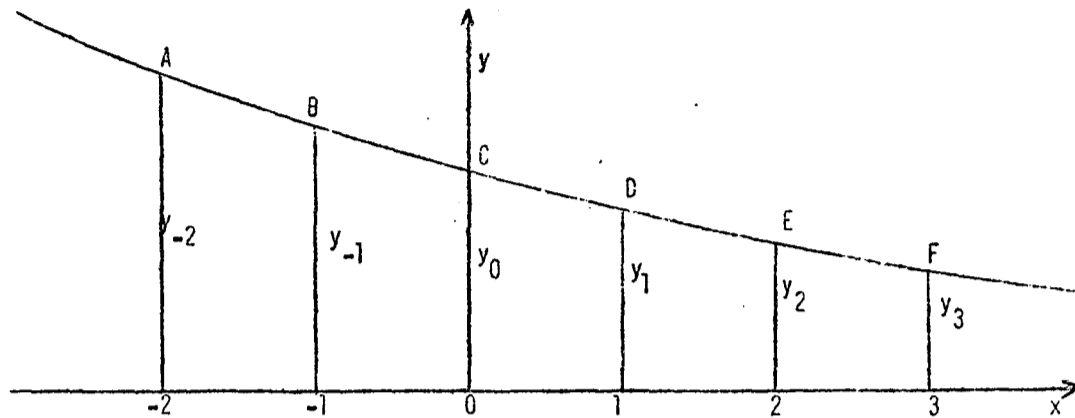
x	$(c^x-1)/(c-1)$	y_x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^0}$
0,2	0,2107	0,30139	23 159	23 130
0,4	0,4158	0,28408	22 123	22 098
0,6	0,6156	0,26723	21 087	21 076
0,8	0,8103	0,25080	20 051	20 047

que pueden compararse con los valores de la tabla de vida detallada (l_x^0) pudiendo verse que la solución es adecuada.

9. La interpolación osculatriz

En este tipo de interpolación los valores interpolados en el intervalo (0-1) se determinan usando un arco parabólico que reproduzca los valores (y_0, y_1) y que frente a las abscisas (0,1) se tenga igual tangente (primera derivada) e igual curvatura (segunda derivada) que los arcos parabólicos que pasan por 5 puntos consecutivos.

Veamos esto gráficamente. Se tiene los puntos A, B, C, D, E, F, igualmente espaciados tal como se indica en la figura.



La curva de interpolación que se trata de determinar debe pasar por los puntos C y D y debe tener las mismas primeras y segundas derivadas que las funciones parabólicas de cuarto grado que pasan respectivamente por los puntos ABCDE y BCDEF frente a los puntos C y D.

La ecuación de la parábola que pasa por BCDEF tiene por ecuación

$$y_x = (y_0 + C_1^x \Delta y_0 + C_2^x \Delta^2 y_0 + C_3^x \Delta^3 y_0) + C_4^x \Delta^4 y_{-1} \quad (52)$$

indicando la expresión del paréntesis que, obviamente, la parábola pasa por CDEF quedando demostrado que pasa además por B.

Las primeras y segundas derivadas de esta función para $x=1$ dan

$$\begin{aligned} (Dy_x)_1 = \theta_1 &= \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} - \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \\ (D^2 y_x)_1 = r_1 &= \Delta^2 y_0 - \frac{2}{4!} \Delta^4 y_{-1} \end{aligned} \quad (53)$$

y de la misma manera la parábola ABCDE nos dará frente a C las primeras y segundas derivadas siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \Delta y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} - \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!} + \frac{2}{4!} \Delta^4 y_{-2} \\ r_0 &= \Delta^2 y_{-1} - \frac{2}{4!} \Delta^4 y_{-2} \end{aligned} \quad (54)$$

o sea expresiones análogas a las anteriores en que únicamente se ha corrido el subíndice en una unidad.

La parábola de interpolación osculatrix que se trata de determinar la deduciremos modificando la parábola de quinto grado que pasapor los 6 puntos por una función de $\Delta^5 y_{-2}$ de modo que siga cumpliendo la condición de pasar por C y D y que además cumpla las condiciones de osculación ya señaladas.

La ecuación de esa parábola tiene que ser de la forma

$$y_x = (y_0 + C_1^x \Delta y_0 + C_2^x \Delta^2 y_0 + C_3^x \Delta^3 y_0 + C_4^x \Delta^4 y_{-1}) + C_5^{x+1} \Delta^5 y_{-2} + f(x) \Delta^5 y_{-2} \quad (55)$$

indicando la cantidad entre paréntesis la condición que la parábola pasa por BCDEF y el término agregado $(C_{5}^{x+1} \Delta^5 y_{-2})$ que pasa por A y el último término $f(x) \Delta^5 y_{-2}$ para lograr imponer las condiciones de osculación.

La primera y segunda derivada de la función anterior frente a C son respectivamente

$$\begin{aligned} \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{2}{3!} \Delta^3 y_0 - \frac{6}{4!} \Delta^4 y_{-1} - \frac{6}{5!} \Delta^5 y_{-2} + f'(0) \Delta^5 y_{-2} \\ \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{-1} + \frac{1}{12} \Delta^5 y_{-2} + f''(0) \Delta^5 y_{-2} \end{aligned} \quad (56)$$

que deben igualarse a θ_0 y r_0 , lo que exige que la función $f(x)$ cumpla las condiciones

$$\begin{aligned} f'(0) &= -1/30 \\ f''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

De la misma manera la primera y segunda derivada de la parábola de quinto grado señalada en (55) frente a D tiene las siguientes primer y segunda derivadas

$$\begin{aligned} \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} - \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + 2 \frac{\Delta^4 y_{-1}}{4!} + \frac{4}{5!} \Delta^5 y_{-2} + f'(1) \Delta^5 y_{-2} \\ \Delta^2 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{-1} + f''(1) \Delta^5 y_{-2} \end{aligned} \quad (58)$$

que al igualarse a θ_1 y r_1 donde -por simetría- a las siguientes condiciones para la función $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= -1/30 \\ f''(1) &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Dado que la parábola modificada (55) debe pasar por C y D, debe tenerse además para función $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

con lo cual la función de $f(x)$ siendo una función de quinto grado, ésta debe ser del tipo

$$f(x) = x(1-x)(a+bx+cx^2+dx^3) \quad (61)$$

en la que los parámetros a , b , c y d deben satisfacer las condiciones (57) y (59), que exige que estos parámetros tengan los valores

$$\begin{aligned} a = b = 1/30 \\ c = 3/10 ; d = -1/5 \end{aligned} \quad (62)$$

lo que conduce finalmente a que $f(x)$ es igual a

$$f(x) = x(x-\frac{1}{2})(x-1)(3x^2-3x-1)/15 \quad (63)$$

puediendo comprobarse que se tiene

$$f(x) = f(1-x) \quad (64)$$

De allí que la parábola osculatrix por C y D tiene por ecuación

$$y_x = f_5(x) + \frac{x(x-\frac{1}{2})(x-1)(3x^2-3x-1)}{15} \Delta^5 y_{-2} \quad (65)$$

siendo $f_5(x)$ la quíntica por ABCDEF, que se encuentra tabulada en el cuadro 2. La idea de usar principios de osculación para interpolar valores en el intervalo 0-1 se debe a Sprague que la introdujo en 1880 en los procesos de interpolación de rutina. La idea permite obtener valores de interpolación que presentan una mayor continuidad cuando se pasa de un intervalo al siguiente o subsiguiente.

Se pueden calcular los valores de $f(x)$ para x variando de 0,1 en 0,1 tomando en cuenta que puede usarse este tipo de interpolación para valores pivotaes distanciados en 5 ó 10 unidades.

Los valores de $f(x)$ en este sentido son los siguientes:

x	$f(x)$	x
0,1	-0,003048	0,9
0,2	-0,004736	0,8
0,3	-0,004564	0,7
0,4	-0,002752	0,6
0,5	0	0,5

y luego de usar los multiplicadores de Lagrange de la quíntica dada en el cuadro 2, se llega al siguiente juego de multiplicadores de Sprague:

x	y_{-2}	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3	x
0,1	0,0076	-0,0586	0,9851	0,0756	-0,0099	0,0002	0,9
0,2	0,0128	-0,0976	0,9344	0,1744	-0,0256	0,0016	0,8
0,3	0,0150	-0,1152	0,8462	0,2975	-0,0478	0,0043	0,7
0,4	0,0144	-0,1136	0,7264	0,4384	-0,0736	0,0080	0,6
0,5	0,0117	-0,0977	0,5859	0,5859	-0,0977	0,0117	0,5

Ejemplo 1. Interpolar en el intervalo 5-10 con los multiplicadores de Sprague disponiendo de la serie

x	1	5	10	15	20	25
y_x	74 674	64 385	61 730	59 667	56 733	53 285

Solución. En este caso no se pueden aplicar directamente los multiplicadores de Sprague ya que necesitamos los niveles "teóricos" y_0^* y y_{-5}^* compatibles con la serie observada.

Para estimar los valores pivotaes teóricos suponemos que

$$\Delta^6 y_x = 0$$

lo que origina las relaciones

$$y_{-10}^* = 21 y_0^* - 70 y_5^* + 105 y_{10}^* - 84 y_{15}^* + 35 y_{20}^* - 6 y_{25}^*$$

$$y_{-5}^* = 6 y_0^* - 15 y_5^* + 20 y_{10}^* - 15 y_{15}^* + 6 y_{20}^* - y_{25}^*$$

Por otra parte el valor y_1 en base de los multiplicadores de Sprague puede expresarse así:

$$y_1 = 0,0128 y_{-10}^* - 0,0976 y_{-5}^* + 0,9344 y_0^* + 0,1744 y_5^* - 0,0256 y_{10}^* + 0,0016 y_{15}^*$$

y reemplazando los valores de los pivotes ficticios y_{-10} y y_{-5} se puede determinar el valor y_0 . Este queda dado por la relación:

$$y_1 = 0,6176 y_0^* + 0,7424 y_5^* - 0,6336 y_{10}^* + 0,3904 y_{15}^* - 0,1376 y_{20}^* + 0,0208 y_{25}^*$$

y de allí se deduce que y_{-5}^* está dado por

$$y_{-5}^* = 9,7150 y_1 - 22,2124 y_5 + 26,1554 y_{10} - 18,7926 y_{15} + 7,3368 y_{20} - 1,2022 y_{25}$$

Ahora se pueden aplicar los multiplicadores de Sprague, lo que conduce al siguiente juego de multiplicadores-

x	y_1	y_5	y_{10}	y_{15}	y_{20}	y_{25}
6	-0,0337	0,7674	0,4091	-0,2045	0,0738	-0,0121
7	-0,0440	0,5431	0,6985	-0,2724	0,0883	-0,0135
8	-0,0415	0,3492	0,8601	-0,2174	0,0567	-0,0071
9	-0,0259	0,1696	0,9500	-0,1114	0,0188	-0,0010

Para el caso numérico indicado se encuentra

x	$\frac{l_x^T}{x}$	$\frac{l_x^0}{x}$
6	63 487	63 685
7	62 837	63 094
8	52 345	62 585
9	61 990	62.138

que comparados con los valores de la tabla completa presentan errores relativos del orden del 0,3 por ciento.

Ejemplo 2. Si se supone que los valores pivotaes corresponden a la suma acumulada de grupos decenales de edad, determinar los multiplicadores de Sprague para desglosar esos grupos decenales en edades simples.

Solución. Supongamos que se tiene

$$y_{-2} = 0 \quad ; \quad y_1 = D_1 \quad ; \quad y_0 = D_1 + D_2$$

$$y_1 = D_1 + D_2 + D_3 \quad ; \quad y_2 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \quad ; \quad y_3 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5$$

entonces la acumulación hasta la primera edad del grupo decenal D_3 o sea la cantidad $(D_1 + D_2 + D_{3,1})$ es igual a

$$0,0076(0) - 0,0586 D_1 + 0,9851 (D_1 + D_2) + 0,0756 (D_1 + D_2 + D_3) \\ - 0,0991 (D_1 + D_2 + D_3 + D_4) + 0,0002 (D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5)$$

que puede expresarse directamente en función de los D_i , notando que para ese objetivo basta sumar los coeficientes de Sprague desde y_3 hacia y_{-2} .

Se tiene

$$D_1 + D_2 + D_{3,1} = 0,9924 D_1 + 1,0510 D_2 + 0,0659 D_3 - 0,0097 D_4 + 0,0002 D_5$$

con lo cual

$$D_{3,1} = -0,0076 D_1 + 0,0510 D_2 + 0,0659 D_3 - 0,0097 D_4 + 0,0002 D_5$$

De la misma manera la acumulación hasta la segunda edad del grupo decenal D_3 o sea la cantidad $(D_1 + D_2 + D_{3,1} + D_{3,2})$ es igual

$$0,0128(0) - 0,0976 D_1 + 0,9344 (D_1 + D_2) + 0,1744 (D_1 + D_2 + D_3) \\ - 0,0256 (D_1 + D_2 + D_3 + D_4) + 0,0016 (D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5)$$

de donde se deduce que

$$D_{3,2} = -0,0052 D_1 + 0,0338 D_2 + 0,0844 D_3 - 0,0144 D_4 + 0,0014 D_5$$

de modo que al realizar todas las interpolaciones necesarias se obtiene el siguiente juego de multiplicadores de Sprague

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
$D_{3,1}$	-0,0076	0,0510	0,0660	-0,0096	0,0002
$D_{3,2}$	-0,0052	0,0338	0,0844	-0,0144	0,0014
$D_{3,3}$	-0,0022	0,0154	0,1036	-0,0195	0,0027
$D_{3,4}$	0,0006	-0,0010	0,1188	-0,0221	0,0037
$D_{3,5}$	0,0027	-0,0133	0,1272	-0,0203	0,0037

notándose que la suma de los multiplicadores para cada edad $D_{3,i}$ es igual a 0,1000.

Nota 1. Para obtener las otras edades del grupo decenal D_3 basta invertir el orden de los multiplicadores o sea que se invierten los multiplicadores de $D_{3,i}$ se obtiene el grupo $D_{3,(10-i)}$.

Nota 2. Para obtener las edades individuales en el caso de grupos quinquenales basta sumar los coeficientes decenales de 2 en 2, obteniéndose

$Q_{3,i} \backslash Q_j$	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
$Q_{3,1}$	-0,0128	0,0848	0,1504	-0,0240	0,0016
$Q_{3,2}$	-0,0016	0,0144	0,2224	-0,0416	0,0064
$Q_{3,3}$	0,0064	-0,0336	0,2544	-0,0336	0,0064
$Q_{3,4}$	0,0064	-0,0416	0,2224	0,0144	-0,0016
$Q_{3,5}$	0,0016	-0,0240	0,1504	0,0848	-0,0128

Aplicación numérica. Dada la proyección de población

Año	1960	1965	1970	1975	1980
Población	18 035	21 376	25 310	29 702	34 343

interpolamos los valores del intervalo 1970-1975.

Solución. Las cantidades (Q_i) en este caso son las (Δy_x). Con los datos se puede calcular los (Δy_x)

3 341 3 934 (4 392) 4 641

faltando una (Δy_x) para poder aplicar los multiplicadores. Adoptando la condición $\Delta^4(\Delta y_x) = 0$ se tiene para la (Δy_x) que falta el valor

$$4 641(4) - 4 392(6) + 3 934(4) - 3 341 = 4 607$$

De acuerdo que el problema queda reducido a descomponer (4 392) en 5 incrementos o partes.

Aplicando los multiplicadores se encuentra

847 865 880 894 906

y los valores de interpolación se consiguen sumando a 25 310 los valores anteriores en forma acumulativa

Año	1971	1972	1973	1974
Población	26 157	27 022	27 902	28 796

19. Los multiplicadores de Grabill

Estos multiplicadores representan un caso particular de los multiplicadores de Sprague determinados con el propósito de reducir el número de valores pivotaes a usar. Suponiendo que Q_1 depende linealmente de los otros Q_i de modo que

$$Q_1 = 4Q_2 - 6Q_3 + 4Q_4 - Q_5$$

que es equivalente a suponer que

$$\Delta^4 Q_1 = 0 \quad (66)$$

se logra reducir un grupo quinquenal en los cálculos. Con la condición señalada se obtiene el siguiente juego de multiplicadores

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$Q_{2,1}$	0,0336	0,2272	-0,0752	0,0144
$Q_{2,2}$	0,0080	0,2320	-0,0480	0,0080
$Q_{2,3}$	-0,0080	0,2160	-0,0080	0,0000
$Q_{2,4}$	-0,0160	0,1840	0,0400	-0,0080
$Q_{2,5}$	-0,0176	0,1408	-0,0912	-0,0144

puediendo entonces aplicarse estos multiplicadores de rutina para lo que se denomina "desglosar grupo semi-extremo", esto es, para desglosar un grupo quinquenal dado si se usa el grupo en referencia, un grupo hacia atrás y 2 grupos hacia adelante.

Nota 1. Aunque es más difícil aceptar que se cumpla la condición

$$\Delta^4 D_1 = 0 \quad (67)$$

que es equivalente a

$$D_1 = 4D_2 - 6D_3 + 4D_4 - D_5$$

es posible determinar multiplicadores para descomponer grupos decenales usando el grupo decenal de referencia, un grupo decenal hacia atrás y dos grupos decenales hacia adelante. El juego de multiplicadores semi-extremo en este caso es el siguiente:

	D_1	D_2	D_3	D_4
$D_{2,1}$	0,0206	0,1116	-0,0400	0,0078
$D_{2,2}$	0,0130	0,1156	-0,0352	0,0066
$D_{2,3}$	0,0066	0,1168	-0,0283	0,0049
$D_{2,4}$	0,0014	0,1152	-0,0197	0,0031
$D_{2,5}$	-0,0025	0,1110	-0,0095	0,0010
$D_{2,6}$	-0,0055	0,1050	0,0015	-0,0010
$D_{2,7}$	-0,0073	0,0966	0,0138	-0,0031
$D_{2,8}$	-0,0087	0,0874	0,0262	-0,0049
$D_{2,9}$	-0,0088	0,0760	0,0394	-0,0066
$D_{2,10}$	-0,0088	0,0648	0,0518	-0,0078

Nota 2. Si se suman los multiplicadores para las 5 primeras edades individuales del grupo decenal D_2 se encuentra

$$Q_2 = 0,0391 D_1 + 0,5702 D_2 - 0,1327 D_3 + 0,0234 D_4 \quad (68)$$

que puede representar una fórmula adecuada para dividir grupos decenales de edad en grupos quinquenales.

Ejemplo 1.

Una población estable modelo masculina tiene una tasa intrínseca de crecimiento de 2 por ciento y una esperanza de vida al nacimiento de 51,83 años (nivel 15, Oeste Coale-Demeny) y los grupos decenales de edad son los siguientes:

Edades	$10 N_x$	Edades	$10 N_x$
0-9	26,90	50-59	6,76
10-19	21,09	60-69	4,13
20-29	16,56	70-79	1,82
30-39	12,77	80 y más	0,38
40-49	9,59		

usando la fórmula (68) descomponer estos grupos decenales en grupos quinquenales.

Solución

Al aplicar los multiplicadores de la fórmula (68) se encuentra el primer grupo quinquenal y el otro grupo quinquenal se obtiene por diferencia. Los resultados son los siguientes:

Edades	$5N_x^T$	$5N_x^O$	Edades	$5N_x^T$	$5N_x^O$
10-14	11,18	11,15	40-44	5,17	5,16
15-19	9,91	9,94	45-49	4,42	4,43
20-24	8,80	8,80	50-54	3,72	3,72
25-29	7,76	7,76	55-59	3,04	3,04
30-34	6,81	6,82	60-64	2,39	2,38
35-39	5,96	5,95	65-69	1,74	1,75

podiendo verse un buen acuerdo con los valores de la tabla II, pág. 122 incluida en el Manual 4 de Naciones Unidas "Métodos para establecer mediciones demográficas fundamentales a partir de datos incompletos".

Ejemplo 2.

Dados los grupos decenales siguientes:

Edades	$10N_x$	Edades	$10N_x$
0-9	3 034,9	50-59	481,0
10-19	1 916,7	60-69	264,3
20-29	1 345,7	70-79	125,6
30-39	988,1		
40-49	676,0	80 y más	48,0

determinar los grupos quinquenales correspondientes usando la fórmula (68).

Solución

Luego de aplicar la citada fórmula se encuentra

Edades	$5N_x^T$	$5N_x^O$	Edades	$5N_x^T$	$5N_x^O$
10-14	1 056,1	1 053,9	40-44	366,4	369,8
15-19	860,6	862,8	45-49	309,6	306,2
20-24	727,0	734,6	50-54	268,6	264,8
25-29	618,7	611,7	55-59	212,4	216,2
30-34	537,6	539,1			
35-39	450,5	449,5			

indicándose los valores quinquenales obtenidos del Censo (${}_5^0D_x$).

Ejemplo 3.

De una tabla de vida detallada se han formado los siguientes grupos decenales

Edades	10^D_x	Edades	10^D_x
20-29	6 866	60-69	10 365
30-39	6 878	70-79	8 998
40-49	8 223	80-89	4 197
50-59	10 572	90-99	616

Se pide determinar los grupos quinquenales usando la fórmula (68).

Solución

El uso de la citada fórmula nos da

Edades	${}_5^D T_x$	${}_5^D O_x$	Edades	${}_5^D T_x$	${}_5^D O_x$
30-34	3 346	3 326	55-59	5 387	5 793
35-39	3 532	3 552	60-64	5 228	5 179
40-44	3 797	3 759	65-69	5 137	5 186
45-49	4 426	4 464	70-74	4 993	4 937
50-54	5 185	4 779	75-79	4 005	4 061

indicándose los valores ${}_5^D O_x$ de la tabla detallada.

Ejemplo 4.

Dado los grupos decenales

Edades	10^N_x	Edades	10^N_x
0- 9	3 034,9	50-59	481,0
10-19	1 916,7	60-69	264,3
20-29	1 345,7	70-79	125,6
30-39	988,1	80 y más	48,0
40-49	676,0		

aplicar los multiplicadores de Grabbill para determinar los grupos quinquenales.

Solución

Al aplicar los multiplicadores citados se obtienen 5 subgrupos, cada uno formado por 2 edades individuales. De estos 5 subgrupos se pueden tomar los 4 últimos y aplicar a ellos nuevamente los multiplicadores de Grabill que separa en 5 subgrupos cada uno de los anteriores. Tomando los 2 primeros y la mitad del tercero de estos nuevos subgrupos, se logra formar -aproximadamente- la edad individual del tercer subgrupo obtenido cuando se aplicaron por primera vez los multiplicadores de Grabill. Sumando estos coeficientes con los coeficientes de los 2 primeros subgrupos se logra una fórmula para separar grupos decenales de edades en grupos quinquenales.

Todo esto puede verse en la siguiente tabla:

	D_1	D_2	D_3	D_4
$Q_{3,1} + Q_{3,2}$	0,0336	0,2272	-0,0752	0,0144
$Q_{3,3} + Q_{3,4}$	0,0080	0,2320	-0,0480	0,0080
$Q_{3,5} + Q_{4,1}$	-0,0080	0,2160	-0,0080	0,0000
$Q_{4,2} + Q_{4,3}$	-0,0160	0,1840	0,0400	-0,0080
$Q_{4,4} + Q_{4,5}$	-0,0176	0,1408	0,0912	-0,0144

En la tabla se indican los multiplicadores de Grabill. Enseguida el vector

$$(-0,0080 \quad 0,5400 \quad -0,0360 \quad 0,0040)$$

representa la suma de la segunda y tercera línea de multiplicadores más la mitad de la tercera. Estos coeficientes se aplican a las 4 últimas líneas de multiplicadores y se obtiene

$$(-0,0039 \quad 0,1087 \quad -0,0050 \quad 0,0002)$$

que representa aproximadamente $Q_{3,5}$, quinta edad del primer grupo quinquenal de D_2 . Sumando estos coeficientes con los coeficientes de las 2 primeras líneas se logra finalmente

$$Q_3 = 0,0377 D_1 + 0,5679 D_2 - 0,1282 D_3 + 0,0226 D_4 \quad (69)$$

Para el caso numérico dado se obtiene

Multiplicadores de Grabill para tramo extremo.

Los multiplicadores de Grabill para tramo extremo pueden transformarse en multiplicadores para tramo extremo aceptando que la quinta diferencia finita de los coeficientes es nula, o lo que es lo mismo

$$C_1 = 5C_{i+1} - 10C_{i+2} + 10C_{i+3} - 5C_{i+4} + C_{i+5} \quad (70)$$

De esa manera se llega al siguiente juego de multiplicadores para tramo extremo

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄
Q _{1,1}	0,3616	-0,2768	0,1488	-0,0336
Q _{1,2}	0,2640	-0,0960	0,0400	-0,0080
Q _{1,3}	0,1840	0,0400	-0,0320	0,0080
Q _{1,4}	0,1200	0,1360	-0,0720	0,0160
Q _{1,5}	0,0704	0,1968	-0,0848	0,0176

Usando por otra parte el mismo argumento dado en el ejemplo 4, se llega al siguiente juego

$$Q_1 = 0,7262 D_1 - 0,3666 D_2 + 0,1794 D_3 - 0,0390 D_4 \quad (71)$$

para descomponer grupos decenales de edad en los quinquenales correspondientes.

Ejemplo

Dada la serie

Edades	10 ^N _x	Edades	10 ^N _x
5-14	4 718	55-64	10 972
15-24	6 382	65-74	10 123
25-34	6 744	75-84	6 862
35-44	7 311	85-94	7 893
45-54	9 243		

determinar los grupos quinquenales correspondientes y comparar con los de la tabla detallada.

Solución

Aplicando la relación (71) se encuentra

Edades	$5N_x^T$	$5N_x^O$	Edades	$5N_x^T$	$5N_x^O$
5-9	2 011	2 655	35-39	3 494	3 552
15-19	3 113	2 934	45-49	4 238	4 464
25-29	3 448	3 418	55-59	5 414	5 793

puediendo verse que los resultados no son adecuados.

11. La interpolación de suavidad óptima

En este tipo de interpolación se impone la condición que los valores interpolados den una varian-
cia mínima para la quinta diferencia finita de ellos.

Suponiendo que se tienen valores pivotaes distanciados de 5 en 5 -distancia común que se puede
tomar como unidad- la condición de suavidad óptima es que

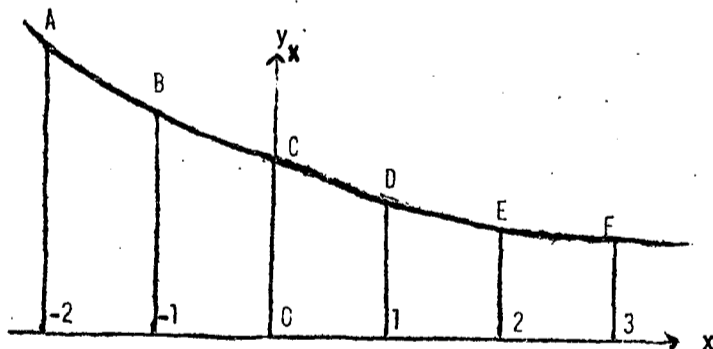
$$\sum \text{Var} (\delta^5 y_x) \tag{72}$$

sea la menor posible.

Al igual que el caso de interpolación osculatriz (Fórmula de Sprague) deduzcamos la corrección

$$f(x) \Delta^5 y_{-2} \tag{83}$$

que debe hacerse a los valores dados por la qúntica ABCDEF



cumpla con la condición señalada en (72) y reproduzca los valores (y_0, y_1) .

Los valores de interpolación en el intervalo 0-1 se consiguen de la tabla 2

x	y_{-2}	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	0	1 000 000	0	0	0
0,2	8 064	-73 920	887 040	221 760	-49 280	6 336
0,4	11 648	-99 840	698 880	465 920	-87 360	10 752
0,6	10 752	-87 360	465 920	698 880	-99 840	11 648
0,8	6 336	-49 280	221 760	887 040	-73 920	8 064
1,0	0	0	0 1000 000	0	0	0

y de allí se puede deducir la quinta diferencia finita de los valores interpolados, la que resulta ser igual a

x	$\delta^5 y_x$
0	$320 \Delta^5 y_{-2}$
0,2	$-6 016 \Delta^5 y_{-2} + 6 336 \Delta^5 y_{-1}$
0,4	$21 248 \Delta^5 y_{-2} - 20 928 \Delta^5 y_{-1}$
0,6	$-20 928 \Delta^5 y_{-2} + 21 248 \Delta^5 y_{-1}$
0,8	$6 336 \Delta^5 y_{-2} - 6 016 \Delta^5 y_{-1}$
1,0	$320 \Delta^5 y_{-1}$

y si a los valores pivotaes $y_{0,2}$; $y_{0,4}$; $y_{0,6}$; $y_{0,8}$ hay que hacerlo los ajustes

$$a \Delta^5 y_{-2}; \quad b \Delta^5 y_{-2}; \quad c \Delta^5 y_{-2}; \quad d \Delta^5 y_{-2}$$

es fácil ver que debe tenerse (por simetría)

$$\begin{aligned} a &= -d \\ b &= -c \end{aligned}$$

(74)

quedando de esta manera las diferencias quintas de los valores interpolados en la forma

x	$\delta^5 y_x$
0	$(320 + 10a - 20b) \Delta^5 y_{-2}$
0,2	$(-6016 - 11a + 15b) \Delta^5 y_{-2} + (6336 + a) \Delta^5 y_{-1}$
0,4	$(21248 + 10a - 6b) \Delta^5 y_{-2} + (20928 - 5a + b) \Delta^5 y_{-1}$
0,6	$(-20928 - 5a + b) \Delta^5 y_{-2} + (21248 + 10a - 6b) \Delta^5 y_{-1}$
0,8	$(6336 + a) \Delta^5 y_{-2} + (-6016 - 11a + 15b) \Delta^5 y_{-1}$
1,0	$(320 + 10a - 20b) \Delta^5 y_{-1}$

Estas diferencias quintas son del tipo

$$\alpha_i \Delta^5 y_{-2} + \beta_i \Delta^5 y_{-1} \quad (75)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} & \beta_i y_4 + (\alpha_i - 5\beta_i) y_3 + (-5\alpha_i + 10\beta_i) y_2 + (10\alpha_i - 10\beta_i) y_1 \\ & + (-10\alpha_i + 5\beta_i) y_0 + (5\alpha_i - \beta_i) y_{-1} - \alpha_i y_2 \end{aligned}$$

y dado que se puede suponer que los valores interpolados discrepan de los verdaderos en desvíos aleatorios e_x de variancia σ^2 , la variancia de una expresión del tipo (75) será igual a

$$2 \cdot 520^2 (\alpha_i^2 + \beta_i^2 - \frac{5}{3} \alpha_i \beta_i) \quad (76)$$

con lo cual la suma de las variancias de la quinta diferencia finita será igual a

$$\sum (\alpha_i^2 + \beta_i^2) - \frac{5}{3} \sum \alpha_i \beta_i \quad (77)$$

que debe minimizarse para (a) y (b).

Al derivarse parcialmente respecto esos parámetros se encuentra

$$\begin{aligned} -4 \ 313 \ 152 &= 2 \ 692a - 2 \ 855b \\ -2 \ 679 \ 616 &= 2 \ 855a - 4 \ 032b \end{aligned} \quad (78)$$

lo que nos da como solución (o ajustes)

$$a = -3 \ 603$$

$$b = -1 \ 885$$

llegando de esta manera a los multiplicadores de Greville para tramo central que se dan a continuación

x	y_{-2}	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3
0,2	0,0117	-0,0921	0,9234	0,1854	-0,0311	0,0027
0,4	0,0136	-0,1096	0,7184	0,4464	-0,0776	0,0033
0,6	0,0033	-0,0776	0,4464	0,7184	-0,1096	0,0136
0,8	0,0027	-0,0311	0,1854	0,9234	-0,0921	0,0117

Por procedimiento parecido y el uso de una relación de recurrencia, Greville ha determinado multiplicadores para el intervalo (-1,0); (-2,-1) tendiéndose de ese juego de multiplicadores para tramo extremo y semi-extremo.

	y_{-2}	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3
-1,8	0,6763	0,4409	-0,0466	-0,1966	0,1559	-0,0379
-1,6	0,4177	0,7019	-0,1236	-0,2026	0,1749	-0,0433
-1,4	0,2221	0,9039	-0,1726	-0,1266	0,1249	-0,0317
-1,2	0,0851	1,0529	-0,1346	-0,0446	0,0559	-0,0147
-0,8	-0,0420	0,8404	0,2104	-0,0056	-0,0276	0,0004
-0,6	-0,0514	0,6314	0,4044	-0,0476	-0,0266	0,0090
-0,4	-0,0400	0,3904	0,7424	-0,0096	-0,0096	0,0064
-0,2	-0,0195	0,1679	0,9314	-0,0366	0,0049	0,0019

Nota 3. Los multiplicadores de Greville para tramo central pueden modificarse si se supone que los valores pivotaes cumplen la condición restrictiva

$$\Delta^5 y_2 = 0$$

llegándose al siguiente juego de multiplicadores de tramo semi-extremo

$x \backslash y_x$	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3
0,2	-0,0336	0,3064	0,3024	-0,0096	0,0144
0,4	-0,0416	0,5024	0,5024	-0,1456	0,0224
0,6	-0,0336	0,3504	0,0064	-0,1536	0,0224
0,8	-0,0176	0,1504	0,9504	-0,1056	0,0144

y si se prolongan estos multiplicadores hacia atrás (extrapolan) usando la condición $\Delta^5 C_1 = 0$, se llega a los multiplicadores de tramo extremo

$x \backslash y_x$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
0,2	0,6304	0,6304	-0,4256	0,1024	-0,0336
0,4	0,3744	0,9004	-0,5616	0,2304	-0,0416
0,6	0,1904	1,1424	-0,4096	0,1904	-0,0336
0,8	0,0704	1,1264	-0,2016	0,1024	-0,0176

Ejemplo 1.

Se tiene la siguiente serie de valores pivotaes

x	5	10	15	20	25	30
y _x	y ₅	y ₁₀	y ₁₅	y ₂₀	y ₂₅	y ₃₀

si se supone que la función (y_x) cumple las condiciones de extremo

$$y_0 = 1 ; y_{105} = 0$$

determinar los multiplicadores de Greville "modificados" por el uso del siguiente cambio de variable

$$y_x = \frac{1-x}{1-1_x} \sqrt{\frac{x}{105-x}}$$

para interpolar en los intervalos 5-10 y 10-15.

Solución

Los valores $\sqrt{\frac{x}{105-x}}$ necesarios son los siguientes

x	$\sqrt{x/ax}$	x	$\sqrt{x/105x}$	x	$\sqrt{x/105x}$
5	0,223667	6	0,246183	11	0,342684
10	0,324443	7	0,267261	12	0,359211
15	0,408248	8	0,287183	13	0,375905
20	0,485071	9	0,306186	14	0,392232
25	0,559017				
30	0,632456				

Lo que conduce al siguiente juego de multiplicadores:

x	Z ₅	Z ₁₀	Z ₁₅	Z ₂₀	Z ₂₅	Z ₃₀
6	0,6143	0,5916	-0,0773	-0,3874	0,3540	-0,0974
7	0,3495	0,9492	-0,1964	-0,3677	0,3658	-0,1025
8	0,1729	1,1116	-0,2454	-0,2138	0,2431	-0,0998
9	0,0621	1,1157	-0,1795	-0,0707	0,1021	-0,0304
11	-0,0274	0,8046	0,2606	-0,0079	-0,0451	0,0155
12	-0,0320	0,5703	0,5505	-0,0643	-0,0414	0,0173
13	-0,0238	0,3370	0,8053	-0,1156	-0,0143	0,0108
14	-0,0111	0,1389	0,9694	-0,1071	0,0070	0,0031

con $Z_x = y_x / (1 - y_x)$

Ejemplo 2

Dada la serie

x	5	10	15	20	25	30
l_x	63 405	61 730	59 667	56 733	53 285	49 067

interpolarse los valores en los 2 primeros intervalos.

Solución

Aplicando los multiplicadores de Greville modificados por $\sqrt{x/105-x}$ se encuentra

x	l_x^I	l_x^O	x	l_x^I	l_x^O
5	(63 405)	(63 405)	10	(61 730)	(61 730)
6	63 629	63 635	11	61 352	61 343
7	63 030	63 094	12	60 970	60 957
8	62 543	62 585	13	60 569	60 557
9	62 121	62 130	14	60 130	60 131

que representan valores relativamente adecuados con los de la tabla detallada.

Ejemplo 3

Dada la serie

x	5	10	15	20	25	30
l_x	65 716	63 231	61 245	58 190	54 472	50 005

interpolarse los valores en los 2 primeros intervalos.

Solución

Usando el juego de multiplicadores determinados en el ejemplo 1, se encuentra

) 40 (

x	l_x^T	l_x^0	x	l_x^T	l_x^0
5	(65 176)	(65 176)	10	(63 261)	(63 261)
6	65 006	65 078	11	62 905	62 891
7	64 462	64 534	12	62 539	62 519
8	64 013	64 064	13	62 149	62 129
9	63 621	63 646	14	61 720	61 707

que representa una adecuada solución si se los compara con los valores (l_x^0) de la tabla detallada.

Ejemplo 4

Interpolar los valores del intervalo 1970-1975 y 1975-1980 disponiendo de la siguiente proyección de población

Año	1960	1965	1970	1975	1980
Población	18 035	21 376	25 310	29 702	34 343

Solución

Los multiplicadores que se usan son los siguientes

Año	18 035	21 376	25 310	29 702	34 343	Población
1971	0,0144	-0,1056	0,9504	0,1584	-0,0176	26 157
1972	0,0224	-0,1536	0,8064	0,3584	-0,0336	27 022
1973	0,0224	-0,1456	0,5824	0,5824	-0,0416	27 902
1974	0,0144	-0,0896	0,3024	0,8064	-0,0336	28 796
1975				1,0000		(29 702)
1976	-0,0176	0,1024	-0,2816	1,1264	0,0704	30 618
1977	-0,0336	0,1904	-0,4896	1,1424	0,1904	31 543
1978	-0,0416	0,2304	-0,5616	0,9984	0,3744	32 473
1979	-0,0336	0,1824	-0,4256	0,6384	0,6384	33 407
1980					1,0000	(34 343)

Ejemplo 5

Interpolar en el intervalo 15-20 de la serie

x	10	15	20	25	30	35
l_x	61 730	59 667	56 733	53 285	49 867	46 541

usando el cambio de variable sugerido en el ejemplo 1.

Solución

En este caso los multiplicadores de tramo central resultan ser los siguientes

x	z_{710}	z_{715}	z_{720}	z_{725}	z_{730}	z_{735}
16	-0,0321	0,8169	0,2499	-0,0074	-0,0412	0,0140
17	-0,0379	0,5865	0,5346	-0,0605	-0,0383	0,0158
18	-0,0285	0,3504	0,7917	-0,1101	-0,0133	0,0099
19	-0,0135	0,1458	0,9612	-0,1030	0,0056	0,0029

y por tanto los valores de interpolación son

x	16	17	18	19
1_x^1	59 136	58 577	57 989	57 372
1_x^0	59 159	58 606	58 011	57 385

Ejemplo 6

Interpolación en el tramo extremo 15-20 de la serie

x	15	20	25	30	35	40
1_x	59 667	56 733	53 285	49 867	46 541	42 989

usando el cambio de variable

$$y_x = \frac{1_x}{1 - 1_x} \sqrt{\frac{x}{105 - x}}$$

Solución

En este caso, los multiplicadores para la variable $z_x = 1_x / (1 - 1_x)$ son los siguientes

x	z_{715}	z_{720}	z_{725}	z_{730}	z_{735}	z_{740}
16	0,6512	0,5136	-0,0614	-0,2933	0,2600	-0,0701
17	0,3880	0,8629	-0,1636	-0,2915	0,2814	-0,0773
18	0,1993	1,0493	-0,2121	-0,1760	0,1942	-0,0547
19	0,0739	1,0866	-0,1601	-0,0600	0,0841	-0,0245

que nos conduce a los siguientes valores de interpolación

x	16	17	18	19
l_x^I	59 159	58 602	58 010	57 384
l_x^O	59 159	58 606	58 011	57 385

puediendo verse que la reproducción con los valores de la tabla detallada es bastante adecuada.

Ejemplo 7

Si se supone que los valores pivotaes $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3$ corresponden a la suma acumulada de frecuencias de una serie determinada, esto es, que

$$y_{-2} = 0; \quad y_{-1} = Q_1; \quad y_0 = Q_1 + Q_2; \quad y_1 = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$y_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4; \quad y_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$

determinar los multiplicadores de Greville para tramo extremo, semi-extremo y central para descomponer grupos quinquenales de edad.

Solución

Tal como se indicó en el ejemplo 2 de uso de los multiplicadores de Sprague, la obtención de los multiplicadores pedidos se hace sumando desde atrás hacia adelante esos multiplicadores y restando después los valores obtenidos para acumulaciones sucesivas.

Se llega a los juegos siguientes

Caso de tramo extremo y semi-extremo ...					
x	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
0	0,3237	-0,1252	-0,0786	0,1180	-0,0379
1	0,2586	-0,0744	0,0076	0,0136	-0,0054
2	0,1956	-0,0064	0,0376	-0,0384	0,0116
3	0,1370	0,0680	0,0300	-0,0520	0,0170
4	0,0851	0,1380	0,0034	-0,0412	0,0147
5	0,0420	0,1936	-0,0248	-0,0192	0,0084
6	0,0094	0,2264	-0,0396	0,0024	0,0014
7	-0,0114	0,2296	-0,0284	0,0136	-0,0034
8	-0,0205	0,2020	0,0130	0,0100	-0,0045
9	-0,0195	0,1484	0,0798	-0,0068	-0,0019

Caso de tramo central

x	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
10	-0,0117	0,0804	0,1570	-0,0284	0,0027
11	-0,0020	0,0160	0,2200	-0,0400	0,0060
12	0,0050	-0,0280	0,2460	-0,0280	0,0050
13	0,0060	-0,0400	0,2200	0,0160	-0,0020
14	0,0027	-0,0284	0,1570	0,0804	-0,0117

Ejemplo 8

Usando los multiplicadores de Greville para descomponer los tramos extremo, semi-extremo y central, determinar multiplicadores para descomponer, en forma aproximada, grupos decenales de edad en grupos quinquenales.

Solución

Usando las mismas ideas del ejemplo 4 cuando se aplicaron los multiplicadores de Grabinl se encuentra

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅
Q ₁	0,6875	-0,2117	-0,0530	0,1159	-0,0387
Q ₃	0,0474	0,5365	-0,0819	-0,0104	0,0384
Q ₅	-0,0117	0,0858	0,5300	-0,0858	0,0117

12. Cambio de la variable dependiente (y_x)

En diversos problemas de interpolación señalados en los ejemplos numéricos dados se ha podido notar que frecuentemente se ha interpolado haciendo un cambio en la variable dependiente. Entre otras razones esos cambios se han hecho para tener valores que varían más suavemente y de esa manera se obtienen mejores valores de interpolación.

Algunos de los cambios sugeridos se basan en el hecho de que muchas veces la función y_x que se desea usar para la interpolación debe cumplir ciertas condiciones de extremo o bien ciertas condiciones de máximo o mínimo.

Así por ejemplo en el caso de una tabla de vida se sabe que l_x debe ser igual a 1 para $x=0$ y debe anularse cuando $x=w$ (105 adoptado frecuentemente). De allí que un cambio natural de la variable dependiente es

$$y_k = \frac{l_x}{1 - l_x} \frac{x^m}{(w-x)^n}$$

en la que se puede regular el valor de los parámetros (m) y (n) para que los valores de interpolación sean adecuados. Estos parámetros (m) y (n) deben elegirse además con la condición de que tengan valores sencillos para evitar el uso de logaritmos en los cálculos o hacer menos fatigosa la obtención de los valores y_x de interpolación en la escala natural.

Por otra parte dado que frecuentemente los valores de interpolación resultan no-negativos, el cambio $l_x/(1-l_x)$ permite obtener siempre valores entre 0 y 1.

Por comodidad y por verificación empírica de los resultados se ha visto que puede elegirse $m=n=1/2$, en especial porque la extracción de raíz cuadrada puede realizarse muy cómodamente en las máquinas de cálculo actuales.

Otro caso distinto se presenta cuando se trata de interpolar tasas de actividad (a_x) según la edad (x) bajo el supuesto que los valores pivotaes disponibles no adolecen de error de medición.

Dado que las tasas de actividad son nulas para ciertos valores extremos de la edad puede elegirse el cambio de variable

$$y_x = \frac{a_x}{1 - a_x} \frac{1}{(x-\alpha)^m (\beta-x)^n}$$

siendo α y β los límites de variación de la actividad según la edad.

En el caso de tasas de fecundidad según la edad se presenta el mismo caso que las tasas de actividad, esto es, que la fecundidad (f_x) varía en un cierto intervalo (α, β) y que más allá de él puede considerarse que prácticamente la función f_x es nula.

Ello sugiere por lo tanto el cambio de variable

$$y_x = \frac{f_x}{1-f_x} \frac{1}{(x-\alpha)^m (\beta-x)^n}$$

en la que los parámetros m y n tendrán valores diferentes que para el caso de las tasas de actividad debido al distinto grado de asimetría e intervalo de variación de la variable dependiente y en que $\alpha = 15$; $\beta = 50$.

Veamos ahora algunas aplicaciones numéricas de las situaciones señaladas en los párrafos anteriores.

Ejemplo 1

Interpoliar tasas de actividad en el intervalo 25-35 dado

x	15	25	35	45	55	65
a_x	0,6717	0,9870	0,9934	0,9961	0,9932	0,9727

Solución

Usaremos los multiplicadores de Lagrange de interpolación cúbica dados en la tabla 1, adoptando además $m=3$, $n=1$, -10 ; -80 .

Los multiplicadores en este caso son los siguientes

	y_{15}	y_{25}	y_{35}	y_{45}	
y_{26}	-0,0285	0,9405	0,1045	-0,0165	y_{34}
y_{27}	-0,0480	0,8640	0,2160	-0,0320	y_{33}
y_{28}	-0,0595	0,7735	0,3315	-0,0455	y_{32}
y_{29}	-0,0640	0,6720	0,4480	-0,0560	y_{31}
y_{30}	-0,0625	0,5625	0,5625	-0,0625	

y los valores pivotaes y_x son

x	15	25	35	45
y_x	2,5182	4,0901	21,407	1,7020

que nos lleva a los siguientes valores de interpolación

x	26	27	28	29	30	31	32	33	34
y_x	3,9706	3,8209	3,6461	3,4511	3,2411	3,0210	2,7951	2,5707	2,3507
a_x	0,9887	0,9900	0,9910	0,9918	0,9923	0,9928	0,9930	0,9930	0,9933

Ejemplo 2

Determinar las tasas de fecundidad en los tres primeros intervalos de la serie

x	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
1000 fx	80,2	219,4	251,3	218,7	140,3	62,2	14,7

usando los multiplicadores de Greville y el cambio de variable

$$y_x = \frac{fx}{1-x} / (x-15)^2 (50-x)$$

Solución

Los valores y_x necesarios para la interpolación son los siguientes

x	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5
1000 y_x	0,42924	0,18170	0,09547	0,05223	0,02579	0,01169

y luego de aplicar los multiplicadores de Greville se tiene

x	1000 y_x	1000 fx	x	1000 y_x	1000 fx
17,5	(0,42924)	(80,2)	25,5	0,11979	244,5
18,5	0,36072	122,2	26,5	0,10556	248,8
19,5	0,30251	157,4	27,5	0,09547	(251,3)
20,5	0,25387	184,7	28,5	0,08536	250,6
21,5	0,21393	204,8	29,5	0,07593	246,6
22,5	(0,18170)	(219,4)	30,5	0,06715	239,3
23,5	0,15607	230,1	31,5	0,05920	229,7
24,5	0,13585	230,2	32,5	0,05223	(218,7)

Ejemplo 3

Para los hombres de Panamá, en 1950, se tienen las siguientes proporciones de solteros por grupos decenales de edad

Edades	p_x	x
15-24	0,8438	20
25-34	0,3682	30
35-44	0,2182	40
45-54	0,1935	50
55-64	0,2000	60

interpolando las proporciones de solteros en el intervalo 15-25, usando una cúbica y el cambio de variable

$$y_x = \frac{p_x}{1 - p_x} \left(\frac{x-15}{105-x} \right)$$

Solución

Los valores pivotaes necesarios son los siguientes

x	20	30	40	50	60
y _x	0,31776	0,11656	0,10735	0,15266	0,25000

y para interpolar en el tramo extremo usando interpolación cúbica debemos "extrapolar" los multiplicadores (c_i) de Lagrange para tramo central aplicando la condición de una parábola de tercer grado.

Con el uso de esta condición se logra el siguiente juego de multiplicadores

x	y ₋₁	y ₀	y ₁	y ₂
-0,9	0,8265	0,2755	-0,1305	0,0285
-0,8	0,6720	0,5040	-0,2240	0,0480
-0,7	0,5355	0,6885	-0,2835	0,0595
-0,6	0,4160	0,8320	-0,3120	0,0640
-0,5	0,3125	0,9375	-0,3125	0,0625
-0,4	0,2240	1,0080	-0,2880	0,0560
-0,3	0,1495	1,0465	-0,2415	0,0455
-0,2	0,0880	1,0560	-0,1760	0,0320
-0,1	0,0385	1,0395	-0,0945	0,0165

y los siguientes valores de interpolación, para las proporciones de solteros

x	p _x	x	p _x
20	(0,6430)	25	0,5974
21	0,7996	26	0,5443
22	0,7519	27	0,4945
23	0,7013	28	0,4480
24	0,6490	29	0,4057
25	0,5974	30	(0,3632)

Nota: Es importante destacar que si se cambia y_x por $\sqrt{y_x}$ y se interpola linealmente pueden conseguirse en algunos casos resultados casi iguales a los de una interpolación cúbica ó quíntica.

Por ejemplo en el caso de la aplicación numérica dada en página , cuando se recurrió al uso de interpolación con base a una quíntica, al interpolar linealmente en $\sqrt{y_x}$ (que para 1970 y 1975 valen respectivamente 159,0912 y 172,3427) se obtienen los valores

Año	1971	1972	1973	1974
Pob.	26 160	27 025	27 903	28 796

que comparados con los valores 26 157, 27 022, 27 902 y 28 797 nos indican lo adecuado de los resultados y la sencillez de la interpolación.

13. Cambio de la variable independiente (x)

En estos casos se trata de cambio de la variable (x) por una función de ella. Los cambios más corrientemente usados son

- $\sqrt{x+c}$
- $\log(x+c)$
- $1/(x+c)$

o cualquier otro tipo de función de (x) que -empíricamente- pueda probarse que conduce a valores de interpolación adecuados.

Si se dispone de valores igualmente espaciados estos cambios dejan los valores pivotaes (y_x) desigualmente espaciados y de allí que ninguno de los multiplicadores calculados para valores desigualmente espaciados que pueden usarse para la interpolación.

Si se trata de interpolación de rutina -y aunque esto no fuera el caso- conviene determinar los coeficientes de ponderación que deben aplicarse a los pivotes dados. Estos coeficientes deben sumar 1 y pueden deducirse aplicando la fórmula de Lagrange para valores pivotaes desigualmente espaciados.

Caso de \sqrt{x} (c = 0)

Este cambio de variable lo consideraremos en los siguientes tipos de datos:

<u>Caso 1</u>	x	0	1	5	10
	y_x	y_0	y_1	y_5	y_{10}
<u>Caso 2</u>	x	1	5	10	15
	y_x	y_1	y_5	y_{10}	y_{15}
<u>Caso 3</u>	x	5	10	15	20
	y_x	y_5	y_{10}	y_{15}	y_{20}
<u>Caso 4</u>	x	10	15	20	25
	y_x	y_{10}	y_{15}	y_{20}	y_{25}
<u>Caso 5</u>	x	12,5	17,5	22,5	27,5
	y_x	$y_{12,5}$	$y_{17,5}$	$y_{22,5}$	$y_{27,5}$
<u>Caso 6</u>	x	17,5	22,5	27,5	32,5
	y_x	$y_{17,5}$	$y_{22,5}$	$y_{27,5}$	$y_{32,5}$

Caso 1

En este caso los multiplicadores para interpolar son los siguientes

x	y_0	y_1	y_5	y_{10}
2	-0,0842	0,7602	0,4000	-0,0760
3	-0,0746	0,4671	0,7084	-0,1009
4	-0,0388	0,2053	0,9080	-0,0745

Aplicación numérica

x	0	1	5	10
l_x^1	100 000	74 674	64 385	61 730

los valores de interpolación son los siguientes

x	2	3	4
l_x^1	69 410	66 802	65 313
l_x^0	68 902	66 541	65 325

que pueden ser comparados con los valores l_x^0 de la tabla completa.

Caso 2

En este caso los multiplicadores son los siguientes:

x	y_1	y_5	y_{10}	y_{15}
6	-0,0282	0,7848	0,3094	-0,0660
7	-0,0338	0,5567	0,5813	-0,1042
8	-0,0269	0,3402	0,7949	-0,1082
9	-0,0141	0,1512	0,9371	-0,0742

Aplicación numérica

x	1	5	10	15
l_x^1	74 674	64 385	61 730	59 667

los valores de interpolación luego de aplicar ese juego de multiplicadores son

x	6	7	8	9
l_x^1	63 585	62 985	62 508	62 102
l_x^0	63 685	63 094	62 585	62 138

que pueden compararse con los valores l_x^0 de la tabla detallada.

Caso 3

Los multiplicadores son los siguientes

x	y_5	y_{10}	y_{15}	y_{20}
11	-0,0293	0,8057	0,2765	-0,0529
12	-0,0367	0,5871	0,5360	-0,0864
13	-0,0303	0,3681	0,7547	-0,0925
14	-0,0164	0,1675	0,9142	-0,0353

Aplicación numérica

x	5	10	15	20
l_x	64 385	61 730	59 667	56 733

nos conduce a los siguientes valores de interpolación

x	11	12	13	14
l_x^T	61 346	60 958	60 555	60 127
l_x^0	61 343	60 957	60 557	60 131

Caso 4

Los multiplicadores son los siguientes:

x	y_{10}	y_{15}	y_{20}	y_{25}
16	-0,0350	0,8242	0,2568	-0,0460
17	-0,0447	0,6127	0,5087	-0,0767
18	-0,0376	0,3913	0,7301	-0,0838
19	-0,0206	0,1810	0,8998	-0,0602

Aplicación numérica

x	10	15	20	25
l_x	61 730	59 667	56 733	53 285

nos conduce a los siguientes valores de interpolación

x	16	17	18	19
l_x^T	59 135	58 572	57 982	57 369
l_x^0	59 159	58 606	58 011	57 385

Caso 5

Los multiplicadores en este caso son los siguientes:

x	$y_{12,5}$	$y_{17,5}$	$y_{22,5}$	$y_{27,5}$
13,5	0,6392	0,6049	-0,3273	0,0832
14,5	0,3773	0,9508	-0,4335	0,1054
15,5	0,1942	1,0995	-0,3816	0,0879
16,5	0,0731	1,1017	-0,2228	0,0480
18,5	-0,0368	0,8296	0,2512	-0,0440
19,5	-0,0472	0,6205	0,5006	-0,0739
20,5	-0,0398	0,3984	0,7226	-0,0812
21,5	-0,0220	0,1852	0,8955	-0,0587

Aplicación numérica

x	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
a_x	3,0	39,7	90,2	97,0	97,7	97,9

nos da los siguientes valores de interpolación

x	a_x	x	a_x
12,5	(3,0)	17,5	(39,7)
13,5	4,5	18,5	51,2
14,5	10,0	19,5	62,6
15,5	18,3	20,5	73,0
16,5	28,5	21,5	82,4
17,5	(39,7)	22,5	(90,2)

Caso 6

En este caso los multiplicadores son los siguientes:

x	$y_{17,5}$	$y_{22,5}$	$y_{27,5}$	$y_{32,5}$
18,5	0,6473	0,5794	-0,3007	0,0740
19,5	0,3866	0,9219	-0,4035	0,0950
20,5	0,2011	1,0780	-0,3593	0,0802
21,5	0,0764	1,0915	-0,2121	0,0442
23,5	-0,0391	0,8369	0,2436	-0,0414
24,5	-0,0506	0,6311	0,4896	-0,0701
25,5	-0,0430	0,4083	0,7124	-0,0777
26,5	-0,0239	0,1912	0,8892	-0,0565

Ejemplo numérico

x	17,5	22,5	27,5	32,5
1000 f_x	80,2	219,4	251,3	218,7

nos da las siguientes tasas de fecundidad

x	1000 f _x	x	1000 f _x
17,5	(80,2)	22,5	(219,4)
18,5	119,7	23,5	232,6
19,5	152,6	24,5	242,1
20,5	179,9	25,5	248,8
21,5	202,0	26,5	251,1
22,5	(219,4)	27,5	(251,3)

Nota 1:

Los multiplicadores anteriores permiten determinar fórmulas de integración aproximada que puede ser de utilidad considerar

Para el caso

x	5	10	15	20
y _x	y ₅	y ₁₀	y ₁₅	y ₂₀

luego de aplicar regla de trapecios se encuentra

$$\int_{10}^{15} y_x dx = -0,1127 y_5 + 2,4284 y_{10} + 2,9814 y_{15} - 0,2971 y_{20}$$

De la misma manera para el caso

x	15	20	25	30
y _x	y ₁₅	y ₂₀	y ₂₅	y ₃₀

se tiene la fórmula de integración aproximada siguiente

$$\int_{15}^{20} y_x dx = 1,7995 y_{15} + 4,2078 y_{20} - 1,3140 y_{25} + 0,3067 y_{30}$$

En el caso numérico siguiente:

x	5	10	15	20	25	30	35
1	64 385	51 730	59 667	56 733	53 285	49 867	46 541

se c...

x	10	15	20	25
${}^5L_x^I$	303 624	291 251	275 094	257 850
${}^5L_x^O$	303 686	291 361	275 096	257 805