

LS/m

151370000 20 22 00 09 20 00

Fecha recibida: _____

ARCHIVO de DOCUMENTOS

Original NO SALE de la oficina



CELADE

DOC PAL

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Enrique Carrasco

MODELOS MATEMATICOS PARA
AJUSTAR CURVAS CUMULATIVAS
DE FECUNDIDAD

Santiago de Chile

Serie C, N° 137

Febrero de 1972

00002.00=No pedido DOCPAL(NACCESO) 1972=Fecha publ.

CARRASCO, Enrique (Au)

Modelos matematicos para ajustar curvas cumulativas de fecundidad.

Febrero 1972; pags:30

Editorial: CELADE. Santiago CL

Serie C 137

Idioma:Es Distr:General Impresion:Mimeo

Pais/region principal:ZZ Pais tratados:ZZ

Descriptores:<MODELO DE POBLACION> <MODELO DE GOMPERTZ*> <MODELO ANALITICO>

<AJUSTE DE CURVAS> <AJUSTE DE DATOS*> <FECUNDIDAD ACUMULADA*>

Proyecto: <CELADE>

Categ. Revista: <FECGEN:MEDICION>

Fechas datos demogr: 9999-9999

No. de Ref= 4

(Inf. interna para DOCPAL: ISIS=00082 LS - m Dfd)

CELADE

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Enrique Garrasco B.

Serie C, N° 137.
Febrero, 1972.
300.

MODELOS MATEMATICOS PARA AJUSTAR
CURVAS CUMULATIVAS DE FECUNDIDAD

Las opiniones y datos que figuran en este trabajo son responsabilidad del autor, sin que el Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE) sea necesariamente partícipe de ellos.

I N D I C E

	<u>Página</u>
INTRODUCCION.....	1
1. Primer modelo de ajuste: Curva de Gompertz.....	4
2. Segundo modelo de ajuste.....	16
3. Algunos usos de los modelos propuestos.....	27
ANEXO 1.....	29
ANEXO 2.....	31
ANEXO 3.....	33

Índice de cuadros y gráficos

Cuadros

1. Tasas de fecundidad cumulativa por grupos quinquenales de edades observadas y ajustadas con el primer modelo, primera variante.....	7
2. Tasas de fecundidad cumulativa por edades de la cohorte 1915-1919 de Buenos Aires, Rfo y México observadas y ajustadas con el primer modelo, segunda variante.....	11
3. Tasas de fecundidad cumulativa por grupos quinquenales de edades, observadas y ajustadas con el segundo modelo.....	19
4. Tasas de fecundidad cumulativa por edades de la cohorte 1915-1919 de Buenos Aires, Rfo y México, observadas y ajustadas con el segundo modelo.....	21
5. Comparación de las desviaciones cuadráticas entre valores ajustados y observados al aplicar los distintos modelos de ajuste.....	26
6. Estimación de F_{47} de la cohorte 1915-1919 de Buenos Aires, Rfo y México, aplicando la segunda variante del primer modelo.....	28

Gráficos

1. Valores (por cien) observados y ajustados de acuerdo a la primera variante del primer modelo, de "modelos empíricos" de fecundidad.....	8
2. Valores observados y ajustados con la segunda variante del primer modelo, de la fecundidad cumulativa de la cohorte 1915-1919 de Buenos Aires, Rfo de Janeiro y México.....	12
3. Valores (por cien) observados y ajustados (con el segundo modelo) de "modelos empíricos" de fecundidad cumulativa.....	20
4. Valores observados y ajustados (con el segundo modelo) de la fecundidad cumulativa de la cohorte 1915-1919 de Buenos Aires, Rfo de Janeiro y México.....	22

4
4
4

4
4

INTRODUCCION

El registro de hechos demográficos no siempre es íntegro y cabal, ya sea que se obtenga a través de censos de población, encuestas, o estadísticas vitales. Entonces, es previo a cualquier análisis demográfico un conocimiento de los datos que se van a manejar, mediante alguna evaluación. Algunas veces esta evaluación indica que es necesario modificar, esto es, corregir o ajustar los datos básicos, o ambas cosas.

Como ejemplo de corrección de datos puede señalarse el cálculo de la omisión censal y su aplicación para obtener cifras correctas. En este caso, un cálculo independiente de las cifras permite obtener un dato corregido.

Cuando se habla de ajuste de datos se señala que una serie de datos observados se reemplaza por otra más suave y regular. El procedimiento para obtener cifras ajustadas varía según la naturaleza del dato y, a veces, de la particular situación a que se refiere. Ese procedimiento puede referirse a un simple ajuste "a ojo" o "a mano alzada" como una técnica más o menos sofisticada.

Si para cierta variable es posible aplicar siempre el mismo procedimiento de ajuste, cualquiera que sea la situación considerada, diremos que estamos frente a un "modelo de ajuste". El modelo puede presentar parámetros, especialmente si se basa en métodos estadísticos o matemáticos. Por parámetro o constante arbitraria se entenderá aquel valor al que se le puede asignar determinado valor numérico, que conservará durante el proceso de análisis.

En el estudio de la fecundidad resulta de particular interés disponer de modelos de ajuste, por cuanto los datos recolectados generalmente presentan errores que requieren de un ajuste y porque a través del modelo puede intentarse algún análisis de la fecundidad o puede indicarse un procedimiento de interpolación y extrapolación, etc.

El propósito de este estudio es el de presentar dos modelos de ajuste de la fecundidad femenina, que corresponden a enfoques distintos del problema. Ambos modelos se refieren a fecundidad acumulativa. El primer modelo de ajuste corresponde a la aplicación de la función de Gompertz; el segundo, a una función que reproduce los valores de la fecundidad acumulativa para las edades inferior y superior del período de vida reproductiva y que recurre además a una expresión polinomial.

Al considerar fecundidad acumulativa (trátase de la acumulación de tasas de fecundidad por edad, f_n - previamente multiplicadas por la amplitud del intervalo de edad n , ó de número medio de hijos tenidos) se supone que se está obviando el problema de la declaración errónea de la edad: de la madre y del hijo, en el caso de tasas acumuladas, y sólo del hijo en el caso de número medio de hijos. Sin embargo, el problema de la omisión de hijos tenidos sigue presente.

Al realizar un ajuste es necesario tener claro que no se persigue reproducir todos o casi todos los puntos observados. Con el ajuste se intenta lograr valores más o menos regulares, que perfilen una curva suave. Esta consideración nos conduce al problema del número de parámetros que debe contener un modelo de ajuste: Ni tan pocos que el modelo resulte demasiado rígido, ni tantos que sea tan flexible. En el caso de los modelos tratados aquí, el número de parámetros que requiere cada uno de ellos es comentado en su oportunidad.

Cabe advertir, además, que al trabajar con fecundidad acumulativa en vez de fecundidad no acumulada, si los datos acumulados ajustados cumplen alguna condición de ajuste (por ej. mínimos cuadrados), los valores desacumulados (tasas de fecundidad por edad) no necesariamente cumplen con esa condición.

Una última consideración dice relación con la validez empírica de los modelos presentados. Es posible diseñar un modelo de ajuste que cumpla una serie de requisitos, pero que una vez aplicado no dé buenos resultados. También es posible que el diseño propuesto sea probado en pocos casos o en casos no representativos de todas las situaciones posibles, de manera que los resultados así obtenidos tengan validez parcial.

De acuerdo con esta última consideración, los modelos aquí propuestos fueron probados para una gran variedad de situaciones, que contemplaban:

- distintos niveles y patrones de fecundidad (niveles altos y bajos; fecundidad de cúspide temprana, intermedia y tardía)
- fecundidad transversal y longitudinal (o por cohortes). Esto es, fecundidad que mujeres de distinta edad presentan en el mismo período de tiempo, y fecundidad que mujeres de igual edad presentan en distintos períodos de tiempo
- fecundidad obtenida de distintas fuentes: encuestas de fecundidad, cuyos valores pueden considerarse de buena calidad; censos de población, en los que puede encontrarse omisión de hijos y mala declaración de la edad; tasas de fecundidad obtenidas con nacimientos registrados en estadísticas vitales y mujeres dadas por el censo de población respectivo.

Sin embargo, todos los casos de aplicación considerados aquí corresponden a países o ciudades de América Latina cuyos datos han sido obtenidos de 1950 a esta fecha. No obstante, se piensa que son bastante representativas las cifras en cuanto a nivel y patrón de la fecundidad.

Los casos de aplicación son los siguientes:

- a) Fecundidad acumulativa de la cohorte de mujeres que nacieron durante 1915-1919, entrevistadas en las ciudades de Buenos Aires, Río de Janeiro y México. Estos datos fueron obtenidos en las encuestas de fecundidad realizadas en 1964 en dichas ciudades. Estas tres encuestas forman parte del Programa de Encuestas Comparativas de Fecundidad en América Latina, zonas urbanas, que comprendió siete ciudades.

La fecundidad de Buenos Aires es de nivel bajo y cúspide tardía; la de Río de Janeiro es moderadamente alta y temprana y la de México es alta y temprana. Puesto que los datos de estas encuestas referentes a fecundidad fueron obtenidos con especial cuidado tanto en la recolección de la información como en su elaboración, los valores de fecundidad acumulativa observados son bastante regulares.

- b) Tasas de fecundidad por edad (que se acumulan para la aplicación de los modelos de ajuste) de Costa Rica (1963) y El Salvador (1961). Estas tasas se obtuvieron con datos de estadísticas vitales (hijos) y de censos (mujeres). En ambos casos la fecundidad es alta y temprana.
- c) Número medio de hijos tomados, declarados en los censos de Brasil (1950) y de Cuba (1953).
- d) Finalmente, una situación que puede considerarse como resumen, en cuanto a nivel y patrón: modelos empíricos de fecundidad que aparecen en el Boletín de Población Nº 7 de las Naciones Unidas. De los modelos sólo se consideraron aquellos de cúspide temprana y tardía (se excluyó la intermedia) clasificados cada uno en nivel alto y bajo. Las categorías de cúspide y de nivel, recién mencionadas, corresponden a las utilizadas en ese Boletín y se adoptaron para los otros casos de aplicación tratados en este documento. Se habla de nivel bajo o alto de las tasas de fecundidad, según que la tasa bruta de reproducción a que dan lugar esas tasas sea menor o mayor que 2,0; y se dice que las tasas describen una cúspide temprana o tardía, según que el máximo de la distribución de esas tasas se ubique en el grupo de edades 20-24 ó 25-29 años.

1. Primer modelo de ajuste: Curva de GompertzA. Presentación del modelo

El primer modelo se obtiene al aplicar la función de Gompertz^{1/} para el ajuste de la fecundidad acumulativa por edad^{2/}. La función de Gompertz está definida por la expresión

$$Y_x = K a^{b^x}$$

en que, K , a y b son parámetros que deben determinarse y x representa la edad.

La solución clásica para determinar los parámetros consiste en elegir tres pivotes equidistantes (Y_0, Y_1, Y_2). Se cumple, entonces: $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = n$. Consideremos $z = x - x_0$, se tiene:

$$Y_z = K a^{b^z}$$

Aplicando logaritmo a la expresión anterior, obtenemos:

$$\log Y_z = \log K + b^z \log a \quad (1)$$

$$\text{Para } z = 0, \text{ se tiene } \log Y_0 = \log K + \log a \quad (2)$$

$$z = 1 \quad \log Y_1 = \log K + b^n \log a \quad (3)$$

$$z = 2 \quad \log Y_2 = \log K + b^{2n} \log a \quad (4)$$

De (2) y (3), se deduce

$$\log a = \frac{\log Y_1 - \log Y_0}{b^n - 1} \quad (5)$$

De (3) y (4), se deduce

$$\log a = \frac{\log Y_2 - \log Y_1}{b^n(b^n - 1)} \quad (6)$$

^{1/} Utilizado entre otros por:

Martin, Peter: "Une application des fonctions de Gompertz à l'étude de la fécondité d'une cohorte".
Population, 1967, número 6.

^{2/} Se entenderá por fecundidad acumulativa por edad tanto a la que resulta de acumular tasas de fecundidad (f_x) multiplicadas por la amplitud del intervalo correspondiente (n) como al número medio de hijos por mujer.

Iguando los segundos miembros de (5) y (6), queda:

$$b^n = \frac{\log Y_2 - \log Y_1}{\log Y_1 - \log Y_0} \quad (7)$$

De (2) se deduce

$$\log K = \log Y_0 - \log a$$

Entonces, para efectos de cálculo, las expresiones (7), (5) y (2) nos permiten determinar los parámetros de la función de ajuste.

B. Limitaciones de la función de Gompertz para el ajuste de la fecundidad cumulativa

El procedimiento descrito en el párrafo anterior presenta las siguientes limitaciones:

En primer lugar, la elección de los pivotes para determinar los parámetros es arbitraria. Si se dispone de datos para grupos quinquenales de edades, las posibilidades de elección de pivotes son relativamente restringidas. Pero si se desea ajustar datos para edades individuales, la elección arbitraria es muy notoria.

En segundo lugar, el procedimiento no cumple ningún criterio estadístico de ajuste (o mejor dicho, no necesariamente lo cumple en el caso de la fecundidad). Por definición, no reproduce el área observada (ni parcial ni totalmente), no considera todos los valores observados, no cumple condición de desvíos mínimos, etc.

En tercer lugar, no reproduce los valores de las edades extremas de la función de fecundidad cumulativa. Pero que se reproduzca el valor de la fecundidad cumulativa para la edad superior del período de vida fértil, no significa forzosamente una ventaja, ya que a menudo ese valor (como otros de las edades avanzadas) presenta serios errores: generalmente subestima el nivel de la fecundidad debido principalmente a la omisión de hijos por parte de las mujeres.

Por último, los parámetros de la función no tienen una interpretación inmediata o sencilla con vistas a un análisis demográfico. No se tienen referencias, por ejemplo, del tipo de fecundidad que implica (precoz, intermedia o tardía), ni se hace referencia a medidas estadísticas de posición o dispersión.

C. Consideraciones analíticas de la función de Gompertz

A pesar de las limitaciones que hemos señalado de la función de Gompertz para el ajuste de la fecundidad cumulativa, puede justificarse su uso. En efecto, dicha función presenta características analíticas (máximo,

mínimo, curvatura, etc.) adecuadas para describir la fecundidad acumulativa, aparte de la comprobación empírica. A través de la primera y de la segunda derivadas (y teniendo en cuenta el rango de variación que cada uno de los parámetros presenta en la práctica) puede probarse que se presenta un mínimo para $x = -\infty$ y un máximo para $x = +\infty$. Además, el punto de inflexión queda comprendido en las edades correspondientes al período de vida fértil de una mujer. De manera que en las primeras edades de vida reproductiva la curva es cóncava hacia arriba y luego cóncava hacia abajo.

D. Obtención del primer modelo de ajuste

Conscientes de que la aplicación de la función de Gompertz, tal como se describe en I.A, tiene limitaciones, se trató de superarlas. Esto condujo a la obtención del primer modelo de ajuste. De las limitaciones anotadas, sólo las dos últimas no logran ser superadas.

Como queda claro que según se trato de ajustar tasas de fecundidad acumulativa para edades individuales o para grupos quinquenales varía la arbitrariedad de la elección de los pivotes, fue necesario considerar dos variantes del primer modelo.

E. Primera variante del primer modelo: tasas de fecundidad acumulativa por grupos quinquenales de edades

En este caso se dispone de siete pivotes observados (desde la edad 20 hasta la edad 50 en el caso de tasas acumuladas, ó desde 17,5 hasta 47,5 años, si se trata del número medio de hijos tenidos por mujer). Los pivotes pueden elegirse en forma consecutiva o alternada. La experiencia indica que la última forma es más conveniente. Entonces, se aplica el procedimiento descrito en I.A pero, además, debe considerarse las tres posibles elecciones de pivotes: 20, 30 y 40 años; 25, 35 y 45; y 30, 40 y 50. Se adopta aquel ajuste en que la suma de los cuadrados de las diferencias entre valores observados y ajustados sea la menor de las tres. Este criterio de elección supera, entonces, en parte, la primera y, en parte, la segunda de las limitaciones mencionadas en I.B. Pero conviene aclarar que ese criterio no implica que la función de ajuste cumpla por sí misma la condición de mínimos cuadrados.

F. Resultados obtenidos

Los resultados del ajuste producidos por esta primera variante, pueden observarse en el cuadro y en el gráfico 1. Detalles del cálculo se presentan en el anexo 1.

Puede apreciarse que el ajuste es bastante satisfactorio para cada una de las situaciones consideradas en este estudio. Tal aseveración puede resultar más clara al observar la representación gráfica del ajuste para los modelos empíricos de fecundidad de las Naciones Unidas (Véase gráfico 1). Se presenta gráficamente sólo esta aplicación de ajuste por considerar que ella es un compendio ilustrativo.

Cuadro 1

TASAS DE FECUNDIDAD CUMULATIVA POR GRUPOS QUINQUENALES DE EDADES, OBSERVADAS Y AJUSTADAS CON EL PRIMER MODELO, PRIMERA VARIANTE

Edad	Tasas (por mil)																					
	Cohorte 1915 - 1919 a/						El Salvador (1961) ^{b/}	Costa Rica (1963) ^{b/}	Brasil (1950) ^{c/}	Cuba (1953) ^{c/}	Modelos Empíricos de las Naciones Unidas ^{d/}											
	Buenos Aires		Rfo de Janeiro		México						Cúspide Temprana				Cúspide Tardía							
	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A
20	165	60	325	325	525	567	712	885	592	769	150	240	180	340	11,7	11,7	14,4	16,7	3,4	4,1	5,4	6,4
25	540	540	1 210	1 232	1 610	1 610	2 372	2 372	2 264	2 264	1 100	1 100	910	910	47,8	45,1	41,0	41,0	26,3	26,3	26,6	26,6
30	1 150	1 233	2 100	2 100	2 690	2 749	3 956	4 000	4 053	4 047	2 520	2 520	1 700	1 670	74,8	74,8	64,5	64,9	58,2	57,9	53,3	53,8
35	1 680	1 680	2 620	2 599	3 615	3 615	5 273	5 273	5 514	5 514	3 880	3 960	2 420	2 420	89,6	90,5	82,1	82,1	81,0	81,0	76,3	76,3
40	1 885	1 886	2 830	2 830	4 265	4 160	6 240	6 102	6 630	6 515	5 060	5 060	3 030	3 040	97,2	97,2	93,6	92,6	94,5	93,5	92,1	90,7
45	1 970	1 970	2 945	2 928	4 470	4 470	6 592	6 592	7 126	7 126	5 780	5 780	3 500	3 500	99,8	99,9	98,5	98,5	99,4	99,4	98,8	98,8
50	1 975	2 002	2 975	2 968	4 505	4 638	6 674	6 867	7 208	7 477	6 210	6 210	3 930	3 820	100,0	100,9	100,0	101,6	100,0	102,0	100,0	103,1
$\sum(Y^1 - Y^0)^2$	12 044		1 789		33 950		88 158		117 059		14 530		38 700		8,92		9,01		5,58		12,82	

NOTAS: -O = Tasas observadas, A = Tasas ajustadas

-En la última línea se presenta la suma de las desviaciones cuadráticas entre tasas ajustadas y observadas.

-Las cifras de los modelos están expresadas como aporte relativo (por cien) de las tasas por edad. De manera que los valores ajustados superiores a 100,0 no tienen sentido.

Fuentes: a/ CELADE, PEFAL-U, 1964

b/ Macció, G., "Ajusto e Interpolación" *op.cit.*, cuadros 1 y 2, págs. 6 y 7.

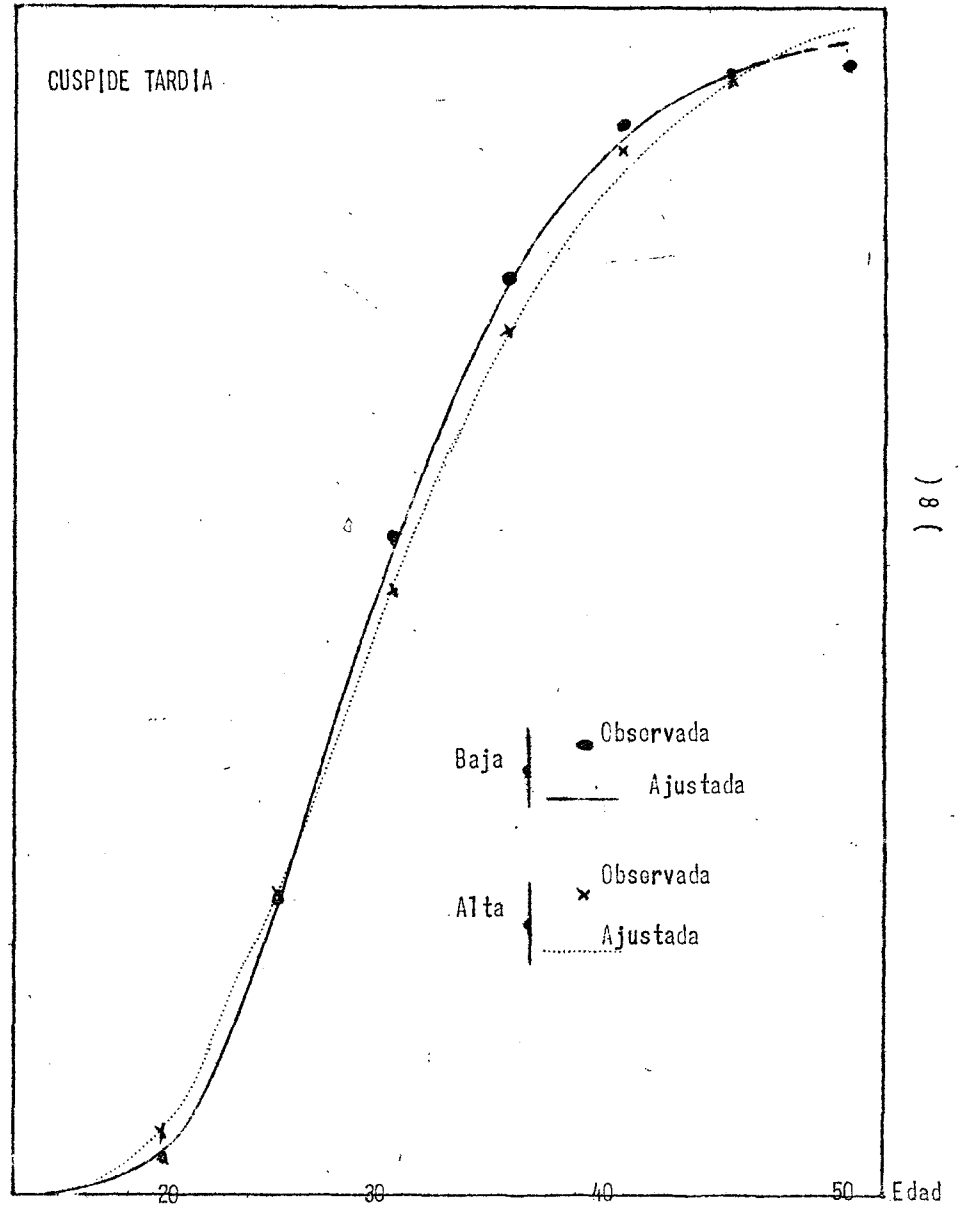
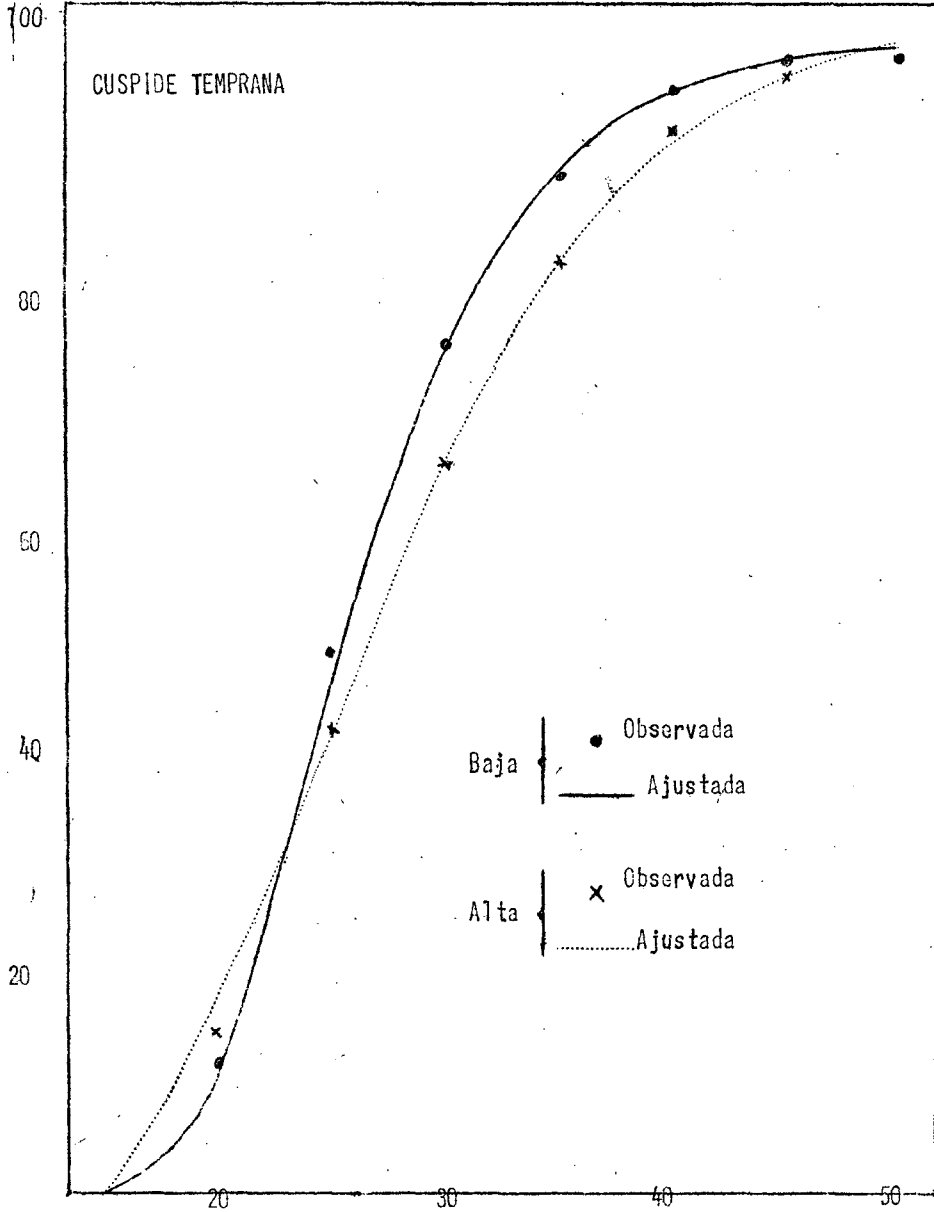
c/ Censo de Población respectivo.

d/ Naciones Unidas: *Boletín de Población, op.cit.*, cuadro 7.6, pág. 125.

Gráfico 1

VALORES (POR CIENTO) OBSERVADOS Y AJUSTADOS DE ACUERDO A LA PRIMERA VARIANTE DEL PRIMER MODELO, DE "MODELOS EMPÍRICOS" DE FECUNDIDAD

Fecundidad
relativa
acumulada



G. Segunda variante del primer modelo de ajuste

En este caso se consideran tasas para edades individuales, es decir, se dispone de treinta a treinta y cinco pivotes (aceptando como edades límites del período de vida reproductiva 15 y 49 años). Pero, como la función de Gompertz no reproduce los valores de las edades límites, se consideran pivotes de 18 a 47 años en las situaciones estudiadas aquí.

Se intentó superar la elección arbitraria de los pivotes tomando en cuenta todos los valores observados. En una primera aproximación se trató de ajustar la fecundidad acumulada aplicando una expresión transformada de la función de Gompertz. Para ello se consideró

$$F_x = K e^{-a} e^{-bx}$$

cuya derivada logarítmica sigue una ley exponencial. Pero, al realizar algunos ensayos, pudo probarse que la derivada numérica de la fecundidad acumulada observada difícilmente seguía una ley exponencial.

El procedimiento que se adoptó finalmente para el caso de edades individuales consiste en imponer la condición de que la suma de los valores ajustados sea igual a la de los observados, por tramos de edad (método de King).

Planteando nuevamente el problema:

$$\log Y_x = \log K + b^x \log a$$

Agrupando los datos en tres intervalos de la misma amplitud ($=m$):

$$S_1 = \sum_{x=1}^m \log Y_x = m \log K + \frac{b^m - 1}{b - 1} \log a$$

$$S_2 = \sum_{x=m+1}^{2m} \log Y_x = m \log K + b^m \frac{b^m - 1}{b - 1} \log a$$

$$S_3 = \sum_{x=2m+1}^{3m} \log Y_x = m \log K + b^{2m} \frac{b^m - 1}{b - 1} \log a$$

Entonces,

$$S_2 - S_1 = \frac{(b^m - 1)^2}{b - 1} \log a$$

$$S_3 - S_2 = b^m \frac{(b^m - 1)^2}{b - 1} \log a$$

Luego,

$$b^m = \frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1}, \quad \log a = \frac{(s_2 - s_1)(b - 1)}{(b^m - 1)^2}$$

$$\log K = \frac{1}{m} \left[s_1 - \frac{b^m - 1}{b - 1} \log a \right]$$

Conviene destacar que este procedimiento de ajuste para tasas por edades individuales puede considerarse también para el caso que se refiere a grupos quinquenales (párrafo I.E.)

H. Resultados obtenidos con la segunda variante

En el cuadro 2 y en el gráfico 2 se presenta el ajuste obtenido con la segunda variante, la que se aplicó a la fecundidad acumulativa de la cohorte de mujeres que nacieron en el lapso 1915 - 1919 (Ciudades de Buenos Aires, Rfo de Janciro y México). El ajuste obtenido es bastante bueno, aunque es justo señalar que los valores observados ya son suficientemente regulares y suaves. Convendría aplicar este procedimiento a algunas situaciones diferentes de las tratadas aquí. Detalles del cálculo se presentan en el anexo 1.

I. Resumen

La aplicación de la curva de Gompertz para ajustar la fecundidad acumulativa proporciona buenos resultados (superando en parte algunas de sus limitaciones) cuando se consideran las variantes expuestas.

Es posible que los tres parámetros (K, a y b) que considera la función de Gompertz sean muchos y que por eso se "adapte" a cada situación produciendo un modelo de ajuste demasiado flexible.

Si alguno de los parámetros varía poco, cualquiera que sea el caso de ajuste tratado, puede adoptarse un valor único para él. De esta manera, al profijar uno de los parámetros, sólo dos de ellos actuarían como tal, evitándose así que el modelo fuera demasiado sensible para propósitos de ajuste.

No obstante, los valores de los parámetros obtenidos para cada ajuste considerado en este estudio no permiten afirmar que alguno de ellos varía poco. Por el contrario, varían bastante. Se presenta a continuación el rango de variación de cada parámetro, expresado por los valores superior e inferior obtenidos en cada ajuste. En el caso de la primera variante se presenta el ajuste basado en los pivotos de las edades 25, 35 y 45 años, que son las edades que generalmente proporcionan el desvío menor entre valores observados y ajustados.

Parámetro	Rango de Variación
b^m	0,140302 0,377266
$\log a$	-0,800574 -0,395358
$\log K$	1,641152 3,897922

Cuadro 2

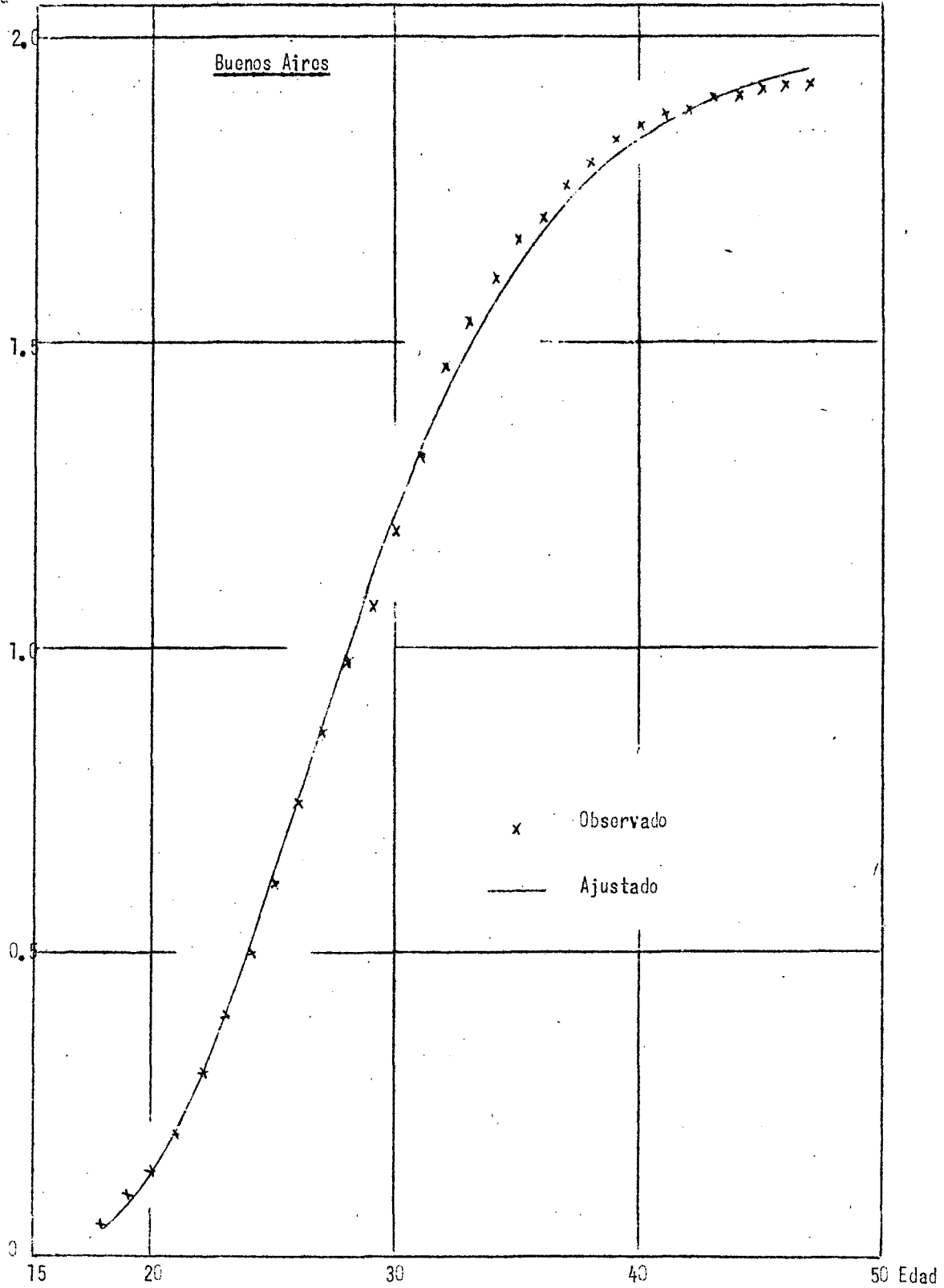
TASAS DE FECUNDIDAD CUMULATIVA POR EDADES DE LA COHORTE 1915-1919
DE BUENOS AIRES, RIO Y MEXICO OBSERVADAS Y AJUSTADAS CON EL PRIMER
MODELO, SEGUNDA VARIANTE

Edad	Buenos Aires		Rio de Janeiro		Mexico	
	O	A	O	A	O	A
18	47	46	131	144	305	339
19	99	83	236	234	462	474
20	132	136	377	354	624	636
21	200	208	514	500	863	822
22	300	296	684	669	1 048	1 029
23	393	400	845	856	1 312	1 253
24	498	515	1 046	1 053	1 516	1 490
25	611	637	1 254	1 254	1 751	1 733
26	743	762	1 437	1 454	2 011	1 978
27	859	887	1 656	1 646	2 209	2 221
28	974	1 008	1 799	1 829	2 459	2 459
29	1 066	1 122	2 007	1 998	2 684	2 688
30	1 191	1 229	2 165	2 153	2 890	2 905
31	1 313	1 326	2 323	2 293	3 102	3 111
32	1 456	1 415	2 421	2 418	3 309	3 302
33	1 531	1 494	2 523	2 529	3 473	3 480
34	1 602	1 564	2 630	2 626	3 650	3 643
35	1 664	1 626	2 721	2 711	3 785	3 793
36	1 700	1 680	2 777	2 785	3 942	3 929
37	1 751	1 726	2 825	2 849	4 077	4 052
38	1 790	1 767	2 902	2 904	4 201	4 163
39	1 828	1 802	2 934	2 951	4 317	4 262
40	1 851	1 832	2 984	2 991	4 406	4 351
41	1 872	1 857	3 011	3 026	4 487	4 431
42	1 875	1 879	3 059	3 055	4 531	4 502
43	1 897	1 898	3 096	3 080	4 580	4 565
44	1 897	1 914	3 122	3 102	4 604	4 621
45	1 913	1 927	3 131	3 120	4 622	4 671
46	1 917	1 939	3 134	3 135	4 635	4 715
47	1 917	1 948	3 141	3 148	4 635	4 754
$\Sigma(Y^A - Y^O)^2$	19 118		5 918		45 474	

Gráfico 2

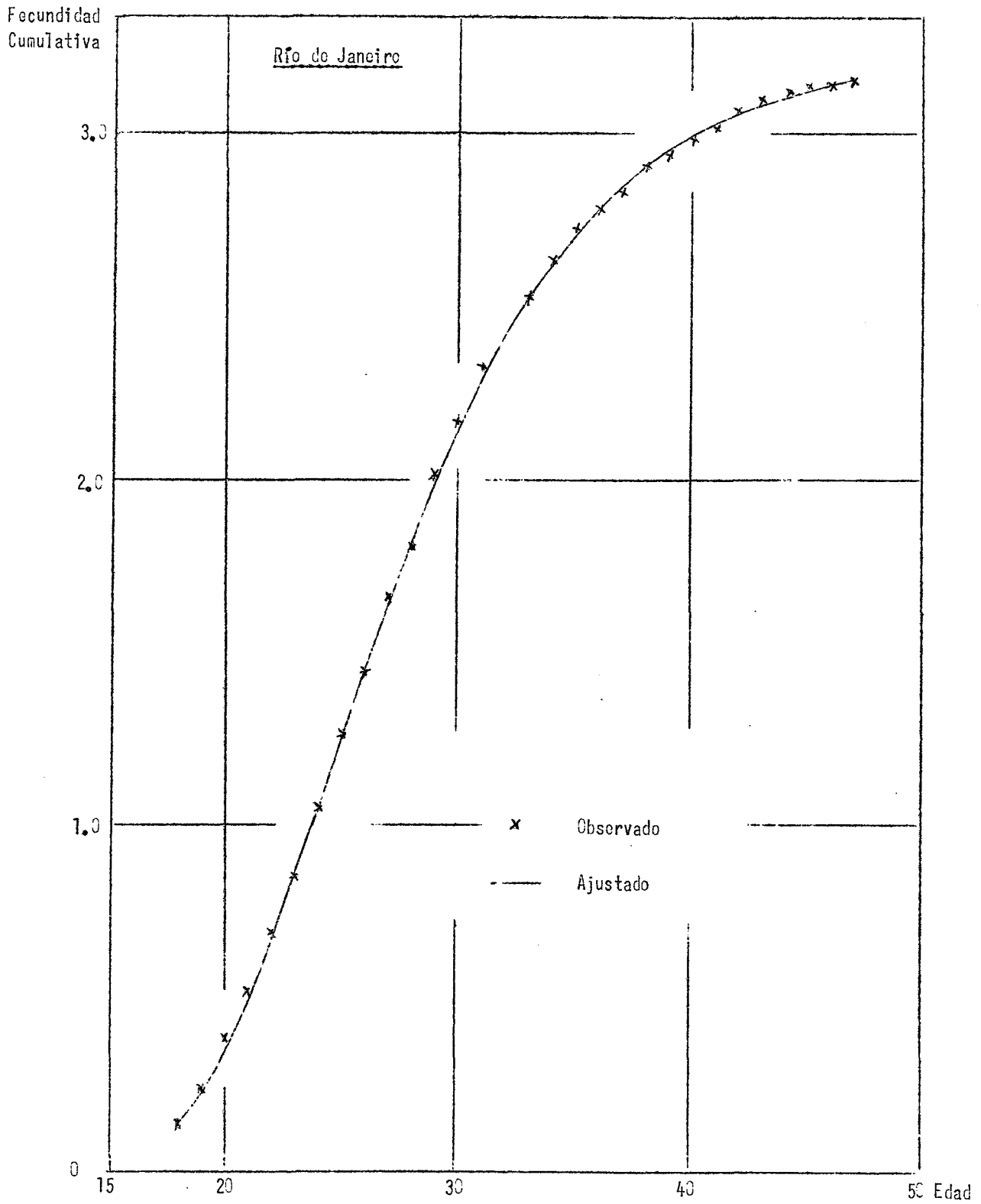
VALORES OBSERVADOS Y AJUSTADOS CON LA SEGUNDA VARIANTE DEL PRIMER MODELO, DE LA FECUNDIDAD CUMULATIVA DE LA COHORTE 1915-1919 DE BUENOS AIRES, RIO DE JANEIRO Y MEXICO

Fecundidad
cumulativa



(Continúa)

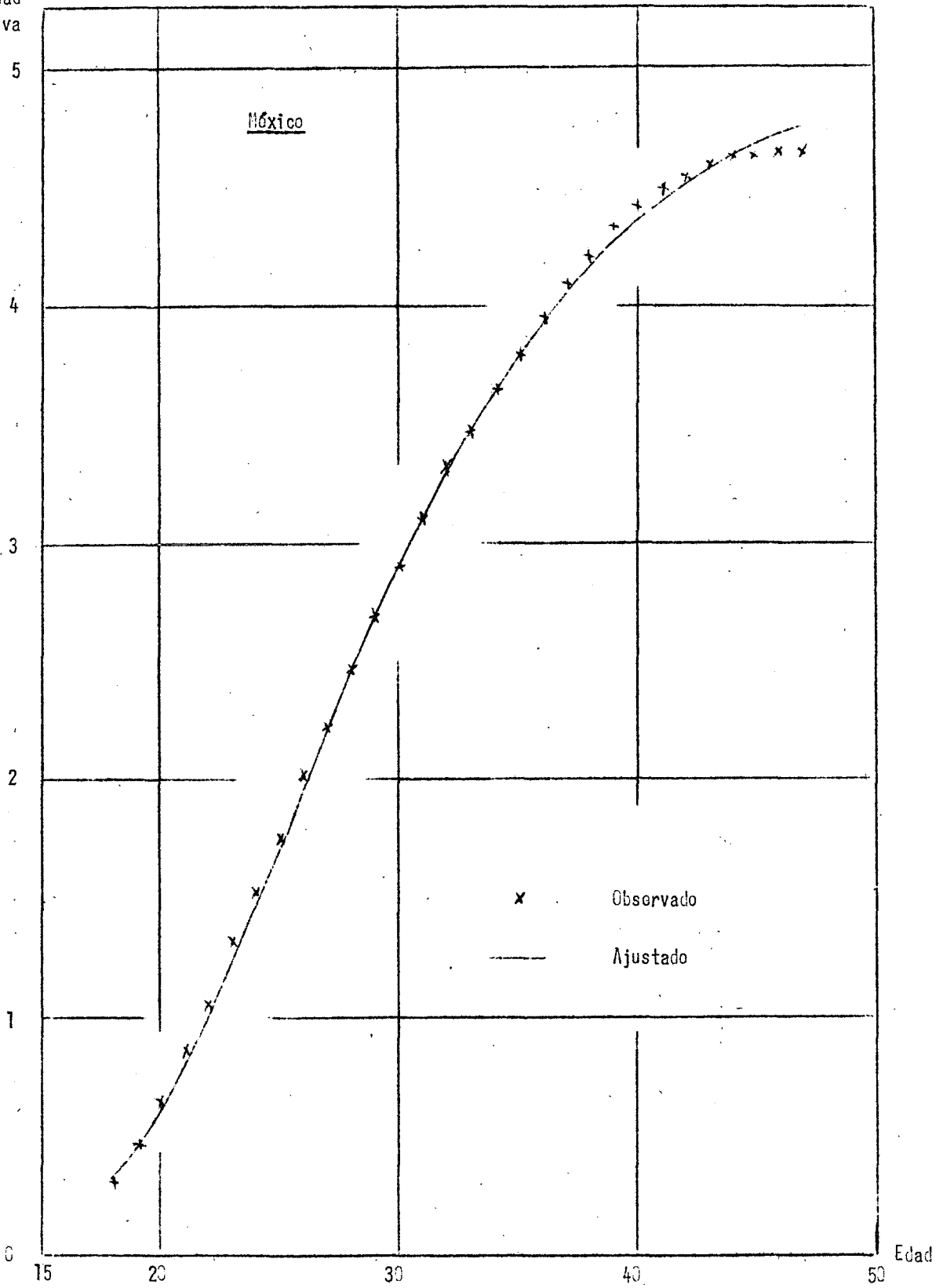
Gráfico 2 (Continuación)



(Continúa)

Gráfico 2 (Conclusión)

Fecundidad
Cumulativa



Como puede resultar de interés considerar un ajuste por "mínimos cuadrados", en la determinación de los parámetros de la función de Gompertz, se presenta un procedimiento alternativo en el anexo 3 que toma en cuenta el principio de mínimos cuadrados.

2. Segundo modelo de ajuste

A. Fundamentos del modelo

La idea básica para el segundo modelo de ajuste consiste en una proposición del profesor Bocaz del CELADE. Se considera una función que reproduzca los valores extremos, es decir, que sea nula para la edad más joven del período de vida reproductiva (15 años en este caso) y que sea igual a un determinado valor F para la edad superior de ese período (50 años).

Por otra parte, el ajuste del tramo de la curva de la fecundidad acumulativa, comprendido entre esas edades límites, se logra mediante un polinomio, de orden no superior al tercero.

Una función que cumple con estos requisitos es

$$F_x = \frac{F}{1 + \frac{(50 - x)^2}{x - 15} g(x)}$$

en que F_x designa la fecundidad acumulativa por edad (x) y en que $g(x)$ representa el polinomio requerido. El ajuste mismo no se realiza para F_x sino para $g(x)$. Si en la expresión anterior despejamos $g(x)$, se tiene:

$$g(x) = (F - F_x) (x - 15) / F_x (50 - x)^2$$

El ajuste puede realizarse también para F_x , imponiendo alguna condición estadística de ajuste. La ventaja de considerar la función $g(x)$ es que ella, en la práctica, sigue una ley polinomial a la que es fácil imponer la condición de mínimos cuadrados (la suma del cuadrado de las diferencias entre valores observados y ajustados debe ser mínima) recurriendo al procedimiento de los polinomios ortogonales.

B. Métodos de ajuste similares

Este método de ajuste tiene cierta analogía con uno propuesto por W. Brass,^{3/} en cuanto considera una función que reproduzca valores de las edades límites de la fecundidad y que el tramo intermedio de la curva se describe mediante un polinomio.

^{3/} Brass, William, "The graduation of fertility distributions by polynomial functions", Population Studies,

Pero en el modelo de Brass no se considera fecundidad acumulativa, sino tasas de fecundidad por edad. De manera que la idea propuesta en 2.A. puede considerarse una ventaja respecto del método de Brass, puesto que la acumulación (tasas acumulativas) produce compensaciones de errores, obteniéndose así valores más suaves. Sin embargo, la acumulación no consigue corregir la "omisión" en la declaración de hijos tenidos.

Anteriormente, en el CELADE se sugirió un modelo de ajuste similar^{4/} que tenía la forma $F(x) = x(k-x)g(x)$. $F(x)$ representa la suma acumulada de las tasas observadas y k es un parámetro que fluctúa alrededor de 50. El ajuste se realiza para la expresión $g(x) = F(x) / x(k-x)$, mediante un polinomio ortogonal de tercer grado y asignando a k distintos valores ($45 \leq k \leq 65$). Se elegía como valor de k , aquél que proporcionaba el menor desvío cuadrático entre valores observados y ajustados (mínimos cuadrados). Este modelo presentó algunas dificultades: a veces se obtuvieron valores de ajuste negativos para $g(x)$ y, en algunos casos, el valor de k no se encontraba en el intervalo previsto ó convergía lentamente, o ambas cosas.

C. Determinación del segundo modelo

El método de ajuste descrito en 2.A. sufrió algunas modificaciones después de observar algunos resultados de aplicación. Pero el método adoptado como segundo modelo de ajuste sigue cumpliendo con la condición de reducir valores extremos y condición de mínimos cuadrados. La función adoptada es

$$F_x = F / \left[1 + (50-x) \left(\frac{x+10}{x-15} \right)^2 z_x \right]$$

Respecto de lo propuesto originalmente se ha agregado el factor $(x+10)^2$ y se han modificado los exponentes de $(x-15)$ y de $(50-x)$, lográndose así que

$$z_x = (x-15)^2 (F/F_x - 1) / (50-x)(x+10)^2$$

sea una curva descendente suave. (Debe recordarse que el ajuste mismo se realiza para esta función z_x , que es una transformación de F_x , y no para la F_x).

Puede ajustarse la función de z_x mediante una parábola de segundo o tercer grados (un orden superior no contribuye a obtener un ajuste notoriamente mejor). Diversas pruebas indicaron que lo más apropiado era una de tercer grado. Por otra parte, como la diferencia entre el valor superior y el inferior de z_x es generalmente grande, el ajuste se realiza para $\log z_x$, pues así el campo de variación es menor.

^{4/} Nacció, Guillermo, Ajuste e interpolación de tasas de fecundidad por edad. (Aplicación a los países de América Central). CELADE, Subsede, Serie AS, número 6.

Resumiendo, el segundo modelo consiste en ajustar una parábola de tercer grado en $\log z_x$, esto es, $g_3(x)$ que representa la función de ajuste de $\log z_x$, tiene la forma

$$g_3(x) = a + b(\log z_x) + c(\log z_x)^2 + d(\log z_x)^3$$

Para determinar la función de ajuste $g_3(x)$ se recurre al uso de polinomios ortogonales (que cumplen condición de mínimos cuadrados). Una vez obtenidos los valores ajustado de $g_3(x)$ se obtienen los correspondientes valores ajustados de z_x y de F_x , en un proceso inverso.

Queda por aclarar el valor que se asigna a F . Se recordará que representa la fecundidad acumulativa a los 50 años. Por lo tanto, no es un parámetro más de los cuatro que utiliza el modelo, ya que puede ser prefijado.

Para la elección de F debemos tener presente que los valores observados de la fecundidad acumulativa pueden verse afectados por la omisión de hijos. De manera que si es posible determinar, previo al ajuste, el monto de esa corrección, obtendremos además de valores suaves, valores correctos de la fecundidad. En ninguno de los ejemplos presentados aquí se consideró una corrección previa por posible omisión y en todos se usó el valor observado a esa edad puesto que esa corrección no forma parte de los objetivos perseguidos, pero se señala ahora con miras a lograr valores adecuados de fecundidad acumulativa. En el anexo 2 se ilustra el procedimiento con un ejemplo de cálculo.

D. Resultados obtenidos

Los cuadros y gráficos 3 y 4 muestran los resultados obtenidos con el segundo modelo de ajuste. Puede afirmarse que el ajuste logrado es bastante bueno para cada una de las situaciones consideradas aquí. Es conveniente repetir lo que se dijo para el primer modelo: tal vez los valores observados que se ajustan aquí sean demasiado suaves como para estar convencidos de que el modelo proporciona un buen ajuste en cualquier situación.

En el caso especial de Costa Rica y El Salvador pueden compararse los resultados obtenidos con este modelo con aquellos logrados mediante el procedimiento descrito en 2.3. Se utiliza como índice de comparación la suma de las desviaciones cuadráticas entre valores observados y ajustados. Entonces, los índices obtenidos con el segundo modelo son notablemente inferiores a los de aquel procedimiento: 107 contra 520 para Costa Rica y 640 contra 1134 para El Salvador.

Cuadro 3

TASAS DE FECUNDIDAD CUMULATIVA POR GRUPOS QUINQUENALES DE EDADES, OBSERVADAS Y AJUSTADAS CON EL SEGUNDO MODELO

Edad	Tasas (por mil)																					
	Cohorte 1915-1919 ^{a/}						El Salvador		Costa Rica		Brasil		Cuba		Modelos Empíricos Naciones Unidas ^{d/}							
	Buenos Aires		Rfo de Janeiro		México		(1961) ^{b/}		(1963) ^{b/}		(1950) ^{c/}		(1953) ^{c/}		Cúspide Temprana				Cúspide Tardía			
	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	O	A	Baja		Alta		Baja		Alta	
10	165	157	325	320	525	529	712	720	592	590	150	150	160	160	11,7	11,6	14,4	14,5	3,4	3,4	5,4	5,2
15	540	596	1 210	1 243	1 610	1 588	2 372	2 322	2 254	2 201	1 100	1 050	910	870	47,8	48,7	41,0	40,7	26,3	26,3	25,6	23,2
20	1 150	1 132	2 100	2 096	2 690	2 688	3 956	3 960	4 053	4 030	2 520	2 570	1 700	1 740	74,8	74,5	64,5	64,5	58,2	58,2	53,3	50,2
25	1 600	1 626	2 620	2 596	3 615	3 640	5 273	5 329	5 514	5 518	3 800	3 940	2 420	2 440	89,6	89,1	82,1	82,4	81,0	81,0	76,3	76,2
30	1 885	1 902	2 830	2 841	4 265	4 254	6 240	6 217	6 630	6 632	5 060	5 000	3 030	3 000	97,2	97,3	93,6	93,4	94,5	94,5	92,1	92,6
35	1 970	1 970	2 945	2 944	4 470	4 470	6 592	6 593	7 126	7 125	5 780	5 790	3 500	3 500	99,8	99,8	98,5	98,5	99,4	99,4	98,8	98,8
40	1 975	1 975	2 975	2 975	4 505	4 505	6 674	6 674	7 208	7 208	6 210	6 210	3 930	3 930	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
(F ^A -F ^O) ²	6 729		1 828		1 714		6 364		843		12 300		2 900		1,17		0,23		3,00		21,47	

Fuentes: a/ CELADE, PECSAL-U, 1964.

b/ Macció, G., "Ajuste e interpolación" *op.cit.*, cuadros 1 y 2, pág. 6 y 7.

c/ Censo de población respectivo.

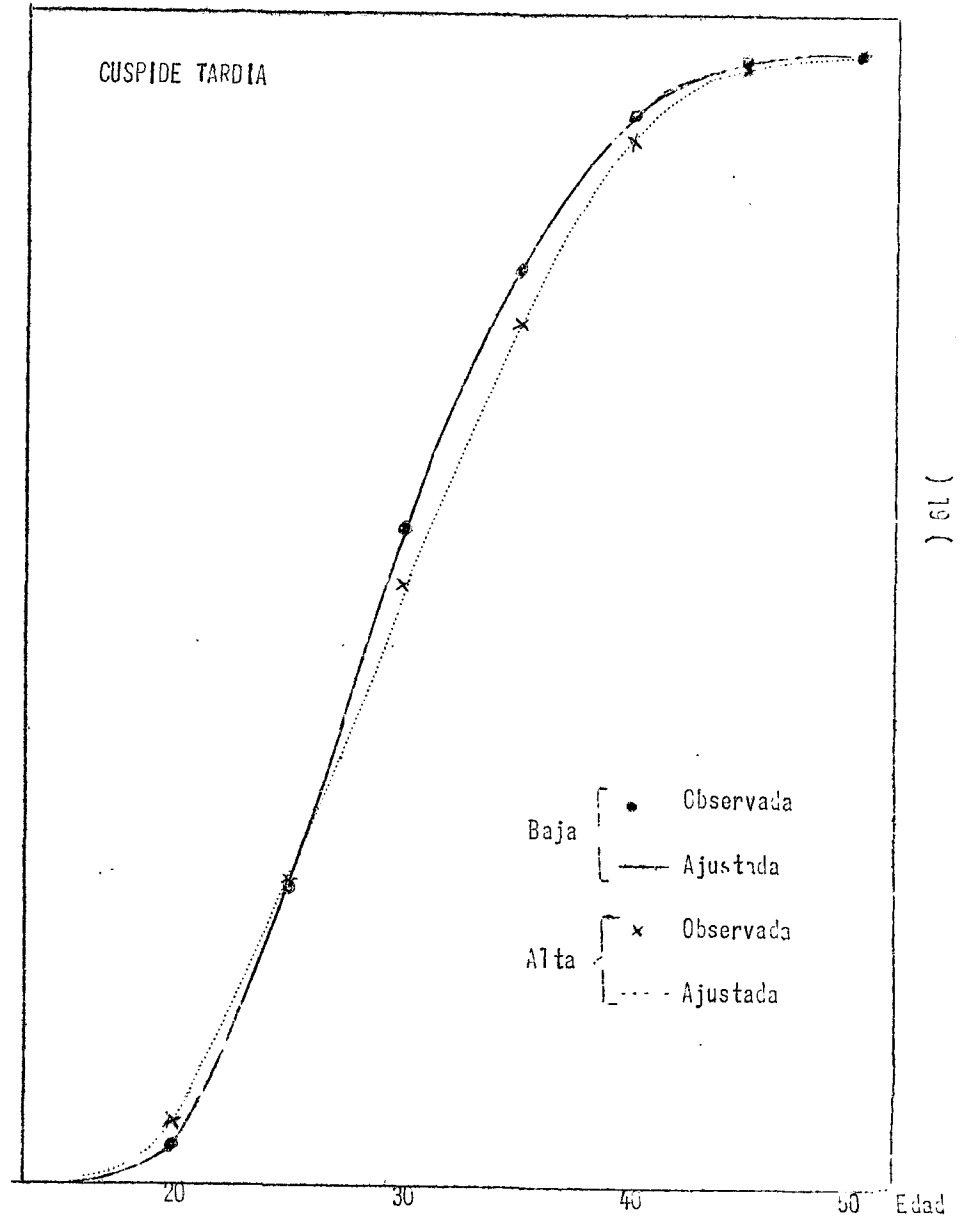
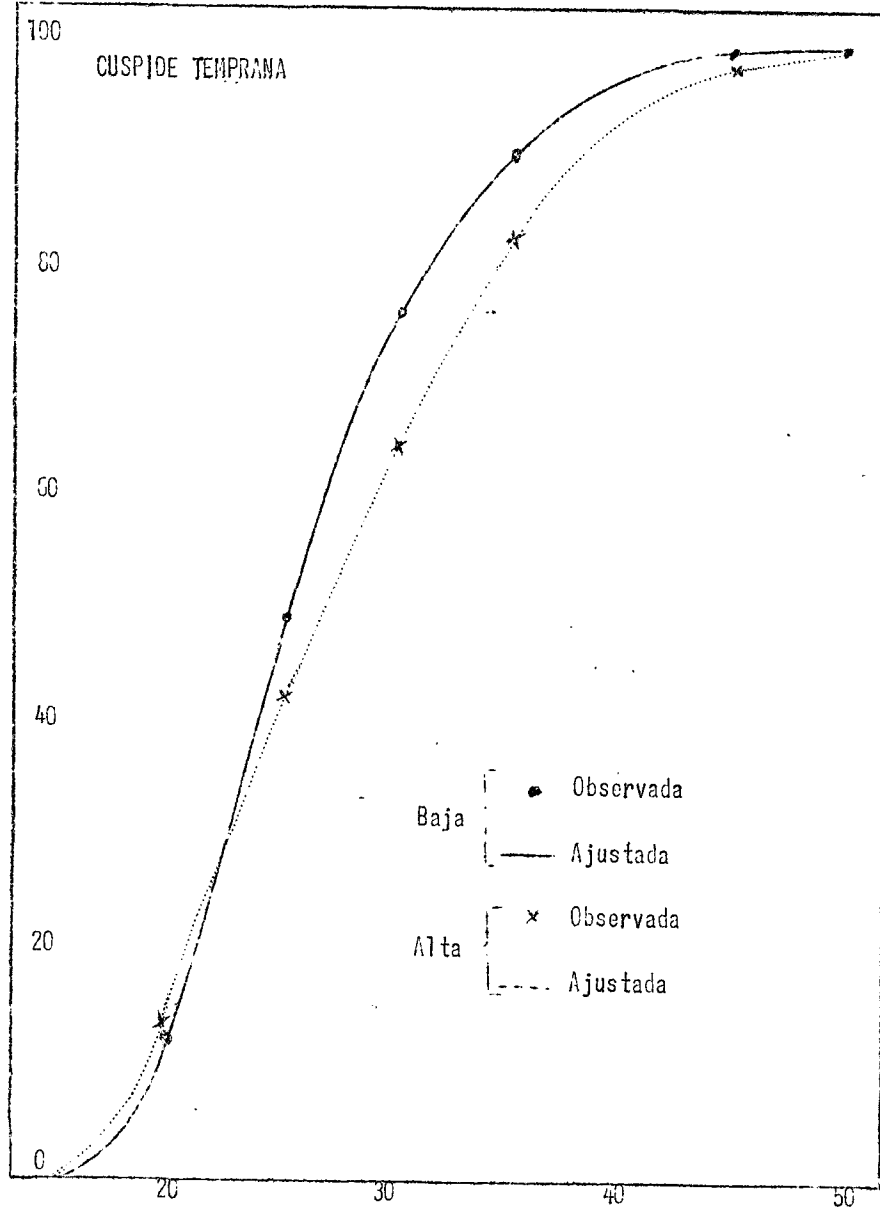
d/ Naciones Unidas: *Boletín de Población*, *op.cit.*, cuadro 7.6, pág. 125.

) 10 (

Gráfico 3

VALORES (POR CIENTO) OBSERVADOS Y AJUSTADOS (CON EL SEGUNDO MODELO) DE "MODELOS EMPIRICOS" DE FECUNDIDAD CUMULATIVA

Fecundidad
relativa
acumulada



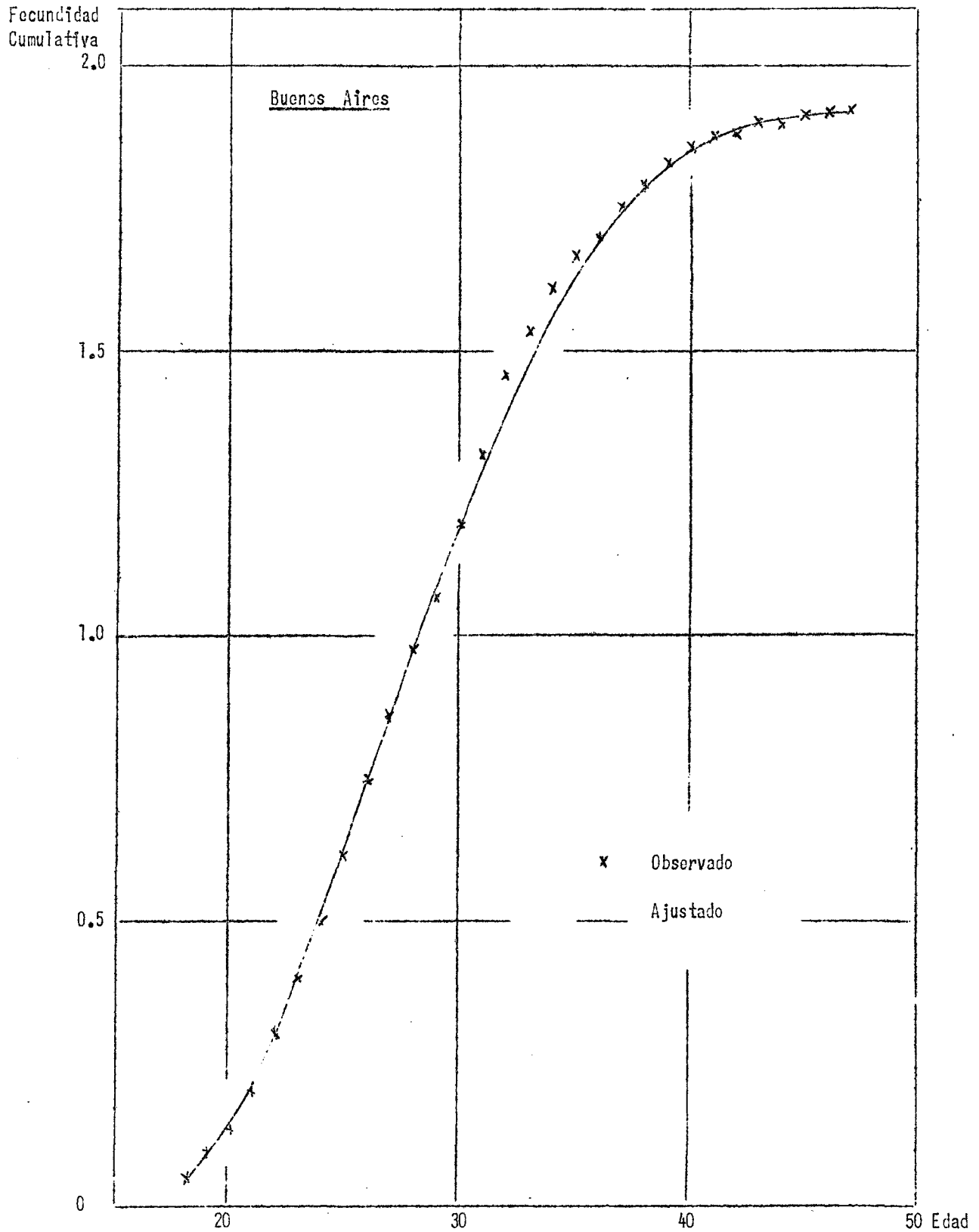
Cuadro 4

TASAS DE FECUNDIDAD CUMULATIVA POR EDADES DE LA COHORTE 1915-1919
DE BUENOS AIRES, RIO Y MEXICO. OBSERVADAS Y AJUSTADAS CON EL SEGUNDO MODELO

Edad	Buenos Aires		Rio de Janeiro		México	
	O	A	O	A	O	A
18	47,4	43,4	131,2	114,2	305,4	255,1
19	99,4	84,5	235,6	236,2	462,4	441,1
20	131,6	144,0	377,0	366,5	623,6	667,3
21	199,8	218,0	513,8	538,8	863,4	901,8
22	300,4	308,3	683,6	732,8	1 047,6	1 147,0
23	393,4	410,8	845,2	935,4	1 312,2	1 386,0
24	498,4	521,6	1 046,0	1 136,8	1 516,4	1 616,8
25	610,6	636,3	1 253,6	1 326,4	1 751,4	1 831,5
26	743,4	755,4	1 437,0	1 508,4	2 011,2	2 041,9
27	859,0	872,4	1 656,4	1 676,9	2 208,6	2 241,5
28	973,6	988,0	1 799,2	1 832,2	2 459,0	2 436,6
29	1 066,4	1 099,8	2 007,0	1 976,0	2 684,2	2 630,2
30	1 191,0	1 205,2	2 164,8	2 109,0	2 890,2	2 816,2
31	1 312,8	1 306,0	2 323,4	2 233,2	3 102,0	3 007,5
32	1 456,0	1 398,6	2 420,6	2 350,6	3 309,2	3 195,3
33	1 531,4	1 404,6	2 522,6	2 450,9	3 473,4	3 384,3
34	1 601,8	1 563,6	2 630,2	2 562,5	3 649,8	3 571,3
35	1 664,4	1 632,7	2 721,4	2 658,6	3 785,2	3 751,9
36	1 700,2	1 693,7	2 777,0	2 746,3	3 942,0	3 923,5
37	1 751,2	1 745,7	2 825,0	2 825,7	4 077,2	4 078,3
38	1 798,0	1 789,4	2 902,2	2 897,2	4 201,2	4 216,2
39	1 828,4	1 824,6	2 934,4	2 956,6	4 317,2	4 331,2
40	1 850,8	1 852,1	2 984,2	3 007,5	4 406,2	4 424,4
41	1 872,0	1 873,1	3 011,4	3 040,1	4 486,6	4 497,9
42	1 875,0	1 888,0	3 050,6	3 078,9	4 530,6	4 548,6
43	1 897,2	1 899,0	3 096,4	3 101,3	4 580,0	4 584,4
44	1 897,2	1 906,3	3 122,0	3 117,0	4 604,0	4 606,2
45	1 913,2	1 918,8	3 131,0	3 127,9	4 622,2	4 620,3
46	1 916,6	1 916,4	3 134,0	3 134,0	4 635,0	4 634,4
47	1 916,6	1 916,6	3 141,0	3 141,0	4 635,0	4 635,0
$\Sigma(F^A - F^O)^2$:	12 263		64 997		37 528	

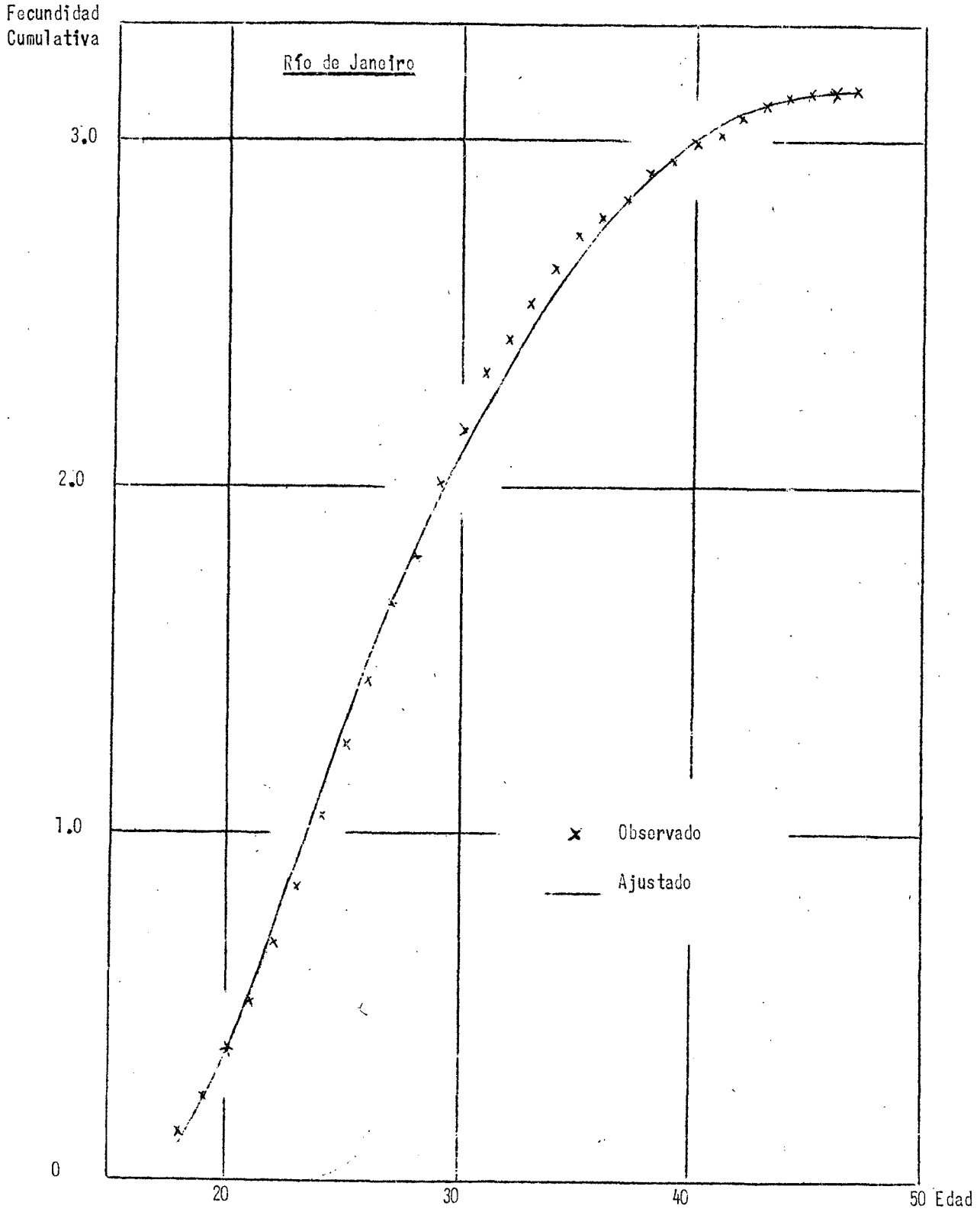
Gráfico 4

VALORES OBSERVADOS Y AJUSTADOS (CON EL SEGUNDO MODELO) DE LA FECUNDIDAD CUMULATIVA DE LA COHORTE 1915-1919 DE BUENOS AIRES, RIO DE JANEIRO Y MEXICO



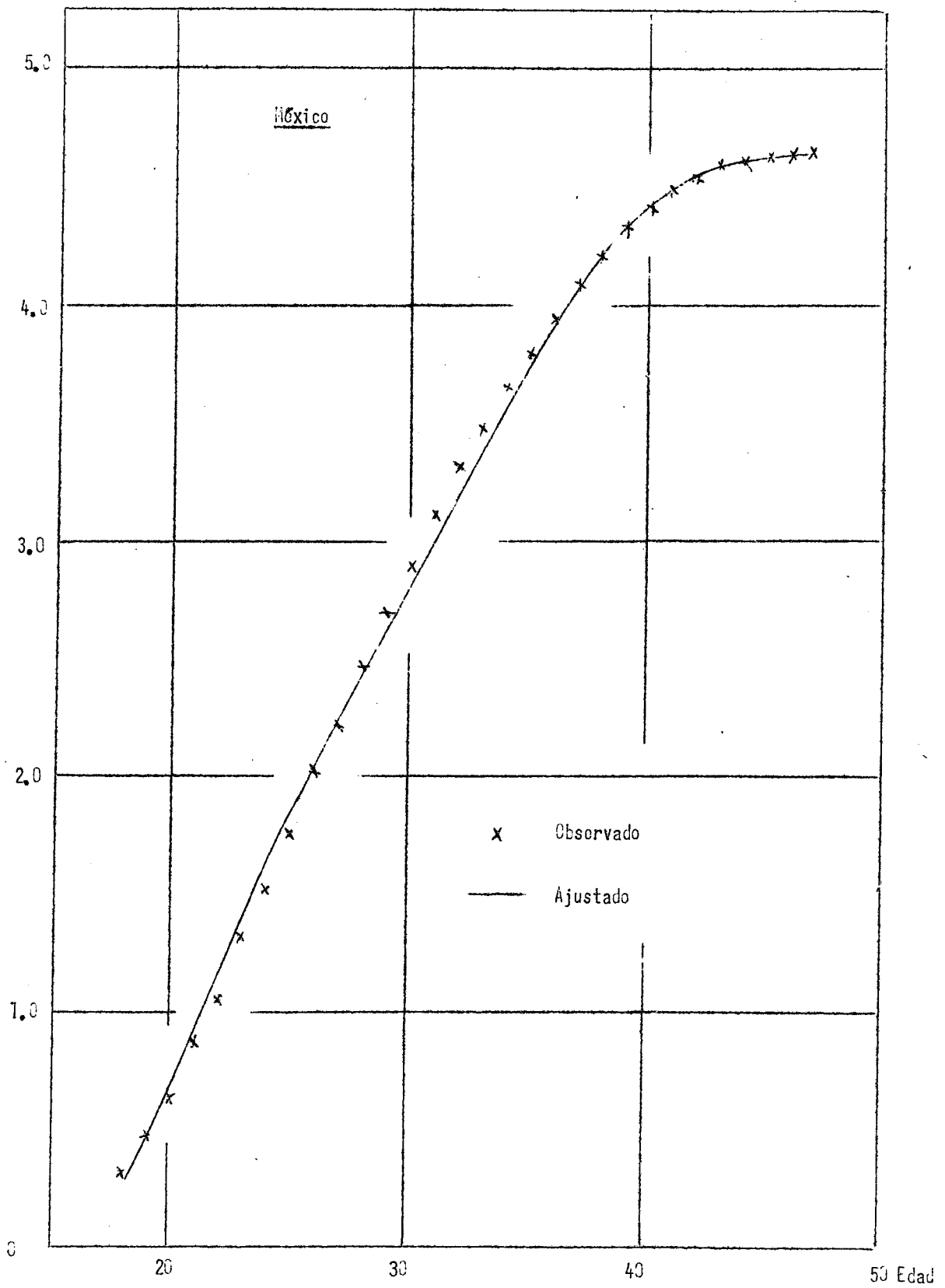
(Continúa)

Gráfico 4 (Continuación)



(Continúa)

Gráfico 4 (Conclusión)



E. Consideraciones finales sobre el segundo modelo

Aunque en la práctica se obtienen buenos resultados con este modelo, el procedimiento es algo complejo y laborioso: se requieren varias etapas de cálculo (tal como puede apreciarse en el anexo 2); debe recurrirse a polinomios ortogonales y a logaritmos, conjuntamente. Lo laborioso se hace más notorio cuando debe ajustarse fecundidad acumulativa para edades individuales.

Por otro lado, es posible que los cuatro parámetros que implica el modelo (coeficientes de regresión del polinomio ortogonal de tercer grado) sean tantos como para que resulte un procedimiento de ajuste demasiado flexible. En un esfuerzo similar al mencionado en l.l. se estudió la posibilidad de prefijar algunos de los parámetros, pero nuevamente se observa que varían mucho.

Ahora bien, si no se desea un ajuste demasiado riguroso (por ejemplo, porque se desea hacer un ensayo del modelo ante un caso específico) puede ajustarse la función z_x definida en 2.C. mediante una ley exponencial de la forma $e^{\alpha+\beta x}$, que es mucho más sencilla de determinar y que también proporcionó un buen ajuste.

F. Resumen comparativo de los dos modelos de ajuste

Resulta útil hacer una confrontación de ventajas, bondades y limitaciones de los modelos presentados en este documento.

Ambos se aplican a la fecundidad acumulativa por edad. Por esto se supone que en el caso de tasas de fecundidad acumuladas se compensan los errores de mala declaración de la edad. En el caso de número medio de hijos este error persiste.

Otro error de declaración que persiste en ambos modelos es la omisión de hijos tenidos. Entonces, mientras no se corrija esta omisión, los modelos propuestos sólo sirven para redistribuir la fecundidad. Claro está que la naturaleza de la omisión es distinta según se trate de tasas acumuladas o de número medio de hijos:

- En el caso de tasas acumuladas, debe estudiarse si la omisión varía o no con la edad de la mujer. Si no varía (o es aproximadamente la misma en cada edad) bastará multiplicar cada tasa por el mismo factor de corrección para disponer de valores adecuados.
- En el caso de número medio de hijos, la omisión se produce preferentemente para las mujeres de edad avanzada (a partir de 30 ó 35 años generalmente).

Si de la fecundidad acumulativa se pretenden obtener tasas de fecundidad por edad, debemos tener presente que estas últimas no tienen por qué ser todo lo suave y regulares que son las primeras, puesto que la desacumulación puede resultar demasiado sensible.

Este mismo razonamiento aplicado dentro de cada modelo nos conduce al hecho de que aunque el segundo modelo de ajuste cumple condición de mínimos cuadrados para la función $g(x)$, no lleva siempre a valores ajustados de F_x mejores que los del primer modelo, porque la condición de mínimos no necesariamente se cumple para F_x .

Entonces, la única ventaja clara del segundo modelo respecto del primero es que puede reproducir los valores de las edades límites del período de vida fértil. La condición de reproducir valores extremos, puede servir, entre otras, para estimar en forma más segura la fecundidad de valores extremos apoyándose en un tramo confiable de edades intermedias. El primer modelo tiene la ventaja de ser más simple de usar que el segundo.

Una manera simple de comparar los resultados de ajuste proporcionados por cada modelo es a través de las desviaciones cuadráticas entre valores observados y ajustados, las que se presentan en el cuadro 5.

De la comparación no puede afirmarse rotundamente que uno de los modelos resulte mejor que el otro, por cuanto las desviaciones del uno no resultan siempre mayores o siempre menores que las del otro.

Cuadro 5

COMPARACION DE LAS DESVIACIONES CUADRATICAS ENTRE VALORES AJUSTADOS
Y OBSERVADOS AL APLICAR LOS DISTINTOS MODELOS DE AJUSTE

	Primer modelo		Segundo modelo
	1a. variante	2a. variante	
<u>1. Cohorte 1915-1919</u>			
- Buenos Aires	$\left\{ \begin{array}{l} F_x \\ 5^F_x \end{array} \right.$	19 118	12 263
		12 044	6 729
- Rfo de Janeiro	$\left\{ \begin{array}{l} F_x \\ 5^F_x \end{array} \right.$	5 918	64 997
		1 263	1 828
- México	$\left\{ \begin{array}{l} F_x \\ 5^F_x \end{array} \right.$	45 474	87 528
		33 959	1 714
<u>2. Tasas de fecundidad por edad</u>			
- El Salvador (1961)		88 158	6 364
- Costa Rica (1963)		117 059	843
<u>3. Número medio de hijos</u>			
- Brasil (1950)		14 500	12 300
- Cuba (1953)		38 700	4 500
<u>4. Modelos empíricos Naciones Unidas</u>			
- Temprana baja		8,92	1,17
- Temprana alta		9,01	0,23
- Tardía baja		5,58	0,00
- Tardía alta		12,82	21,47

F_x : fecundidad cumulativa para edades individuales

5^F_x : fecundidad cumulativa para grupos quinquenales de edades.

3. Algunos usos de los modelos propuestos

A. Estimación de la fecundidad acumulativa para las edades [límites del período de vida fértil]

Los modelos propuestos permiten estimar con cierta seguridad la fecundidad de edades extremas del período de vida fértil. Se presenta a continuación la aplicación en el caso de datos por edades individuales para estimar fecundidad final.

El hecho de que los modelos funcionen bien para cualquier nivel o patrón de fecundidad no basta para inferir que proporcione adecuadas estimaciones como las tratadas aquí, pero ayudan a justificar su aplicación para determinarlas. En cambio, si aplicadas a datos conocidos produce buenas estimaciones, podríamos fundamentar su aplicación con tales propósitos.

De los dos modelos, el primero resulta el más simple en este caso. Supongamos que se conoce la fecundidad acumulativa de una cohorte hasta la edad 35. Se elige esta edad para nuestro ejemplo porque, en promedio, a esa edad ya se tiene alrededor del 75 por ciento de la fecundidad total. Si suponemos que de esa edad en adelante la cohorte se verá afectada por la tendencia que implica la curva de ajuste, puede estimarse la fecundidad final basándose en los parámetros de la fecundidad hasta 35 años.

Tal como puede apreciarse en el anexo 1, la expresión del primer modelo $b^x \log a$ permite realizar fácilmente la extrapolación, dado que el valor correspondiente a 35 años se va multiplicando por potencias de b y se van obteniendo los valores correspondientes.

En el cuadro 5 se muestra la estimación de F_{47} de la cohorte 1915-1919 de Buenos Aires, Rfo de Janeiro y México, (cuyo valor observado se conoce). Se realizaron dos estimaciones: una apoyándose en los pivotes de las edades de 18 a 35 años y la otra de 20 a 34 años. Las diferencias obtenidas en cada estimación, respecto del valor observado, reflejan el efecto de los pivotes de las edades de 18, 19 y 35 años.

Las estimaciones proporcionadas por el primer modelo son muy cercanas a los valores observados y parece ser que la distinta elección de pivotes no implica una estimación muy diferente.

B. Estimación de un patrón de sesgos en la declaración de hijos tenidos

Para esto debe formularse la hipótesis de que es más frecuente que la mujer olvide declarar hijos que tuvo a una edad joven (15-20 años tal vez).

Para verificar tal hipótesis, nos apoyamos en los pivotes de las edades 20 a 34 ó 20 a 39 años. También se utilizaría la expresión $b^x \log a$, puesto que al ir dividiendo el valor de esa expresión por potencias de b , tendríamos la estimación requerida, que según sea mayor o menor que el valor observado (y en cuánto) nos daría una indicación para el estudio de la calidad de la información obtenida.

Cuadro 6

ESTIMACION DE F_{47} DE LA COHORTE 1915-1919 DE BUENOS AIRES, RIO Y MEXICO,
 APLICANDO LA SEGUNDA VARIANTE DEL PRIMER MODELO

Edad	Buenos Aires			Rio de Janeiro			Mexico		
	F^O_x	F^E_x		F^O_x	F^E_x		F^O_x	F^E_x	
		10-35	20-34		10-35	20-34		10-35	20-34
45	1 913	2 091	2 111	3 131	3 164	3 202	4 622	4 597	4 660
46	1 917	2 110	2 131	3 134	3 161	3 220	4 635	4 620	4 713
47	1 917	2 126	2 147	3 141	3 195	3 236	4 635	4 660	4 753

Notas: F^O_x = Tasas observadas
 F^E_x = Tasas estimadas

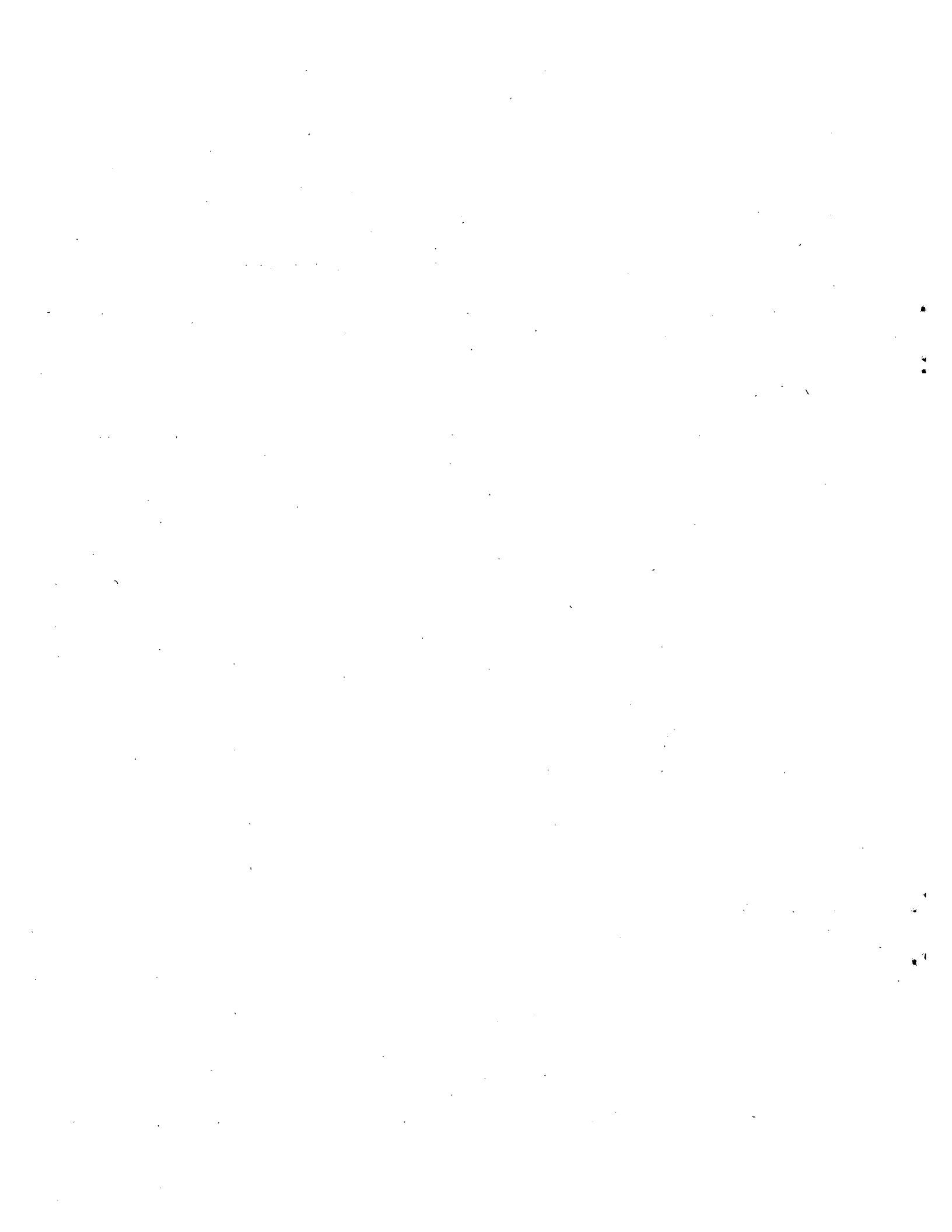


Tabla 1.1.

APLICACION DE LA PRIMERA VARIANTE DEL PRIMER MODELO DE AJUSTE A LA COHORTE DE MUJERES DE CIUDAD DE MEXICO, QUE NACIERON DURANTE 1915-19

	Edad (x)	Y_x^0 (por mil)	z	b^z	$b = \log a$	$\log_5 Y_x^A$	Y_x^A	$\delta = Y_x^0 - Y_x^A $
x_0	20	525	-5	1,951924	-0,929608	2,753431	567	42
	25	1 610	0	1,000000	-0,476293	3,206026	1 610	0
	30	2 690	5	0,512315	-0,244012	3,439107	2 749	59
x_1	35	3 615	10	0,262467	-0,125011	3,550100	3 615	0
	40	4 265	15	0,134466	-0,064045	3,519074	4 100	165
x_2	45	4 470	20	0,069089	-0,032011	3,650300	4 470	0
	50	4 505	25	0,035293	-0,016010	3,656209	4 630	133
								$\sum \delta^2 = 33959$

$$Y_x^A = K \cdot a^{b^z}, \quad z = x - x_0$$

$$\log Y_x^A = \log K + b^z \log a \quad x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = n = 10$$

$$b^n = (\log Y_2 - \log Y_1) / (\log Y_1 - \log Y_0) = (3,650300 - 3,550100) / (3,550100 - 3,206026) = 0,262467$$

$$\log a = (\log Y_1 - \log Y_0) / (b^n - 1) = 0,351202 / -0,737533 = -0,476293$$

$$\log K = \log Y_0 - \log a = 3,683119$$

Y_x^0 = Fecundidad cumulativa observada por grupos quinquenales de edades

Y_x^A = Fecundidad cumulativa ajustada

Nota: Si se desea obtener fecundidad cumulativa ajustada para edades individuales, basta determinar $b = \sqrt[5]{0,512315}$, y completar la columna b^z . Las siguientes columnas se obtienen de manera similar a lo indicado en la Tabla.

APLICACION DE LA SEGUNDA VARIANTE DEL PRIMER MODELO DE AJUSTI

Edad (x)	$\log Y_x^0$	$b^x \cdot \log a$	$\log Y_x^A$	Y_x^A	Y_x^0
18	2,404300	-1,171540	2,530606	339	305
19	2,664642	-1,026165	2,675981	474	462
20	2,795195	-0,898829	2,803317	636	624
21	2,936011	-0,787294	2,914852	822	863
22	3,020361	-0,689599	3,012547	1 029	1 040
23	3,117934	-0,604027	3,098119	1 253	1 312
24	3,180699	-0,529074	3,173072	1 490	1 516
25	3,243206	-0,463422	3,238724	1 733	1 751
26	3,303412	-0,405916	3,296230	1 978	2 011
27	3,344196	-0,355546	3,346600	2 221	2 239
28	3,390759	-0,311427	3,390719	2 459	2 459
29	3,428703	-0,272702	3,429364	2 688	2 684
30	3,460098	-0,238933	3,463213	2 905	2 890
31	3,491642	-0,209204	3,492862	3 111	3 102
32	3,519697	-0,183314	3,518932	3 302	3 309

$$S_1 = \sum_{x=18}^{27} \log Y_x^0 = 30,090826$$

$$S_2 = \sum_{x=23}^{32} \log Y_x^0 = 35,178901$$

$$S_3 = \sum_{x=30}^{37} \log Y_x^0 = 36,531659$$

$$b^{10} = (S_3 - S_2) / (S_2 - S_1) = 0,265826$$

$$b = \sqrt[10]{0,265826} = 0,875911$$

Tabla 1.2.

EN LA COHORTE DE MUJERES DE CIUDAD DE MEXICO, QUE NACIERON DURANTE 1915 - 1919

$\delta = \frac{Y_x^0 - Y_x^A}{Y_x^A}$	Edad (x)	$\log Y_x^0$	$b^x \cdot \log a$	$\log Y_x^A$	Y_x^A	Y_x^0	$\delta = \frac{Y_x^0 - Y_x^A}{Y_x^A}$
34	33	3,540705	-0,160567	3,541579	3 480	3 473	7
12	34	3,562293	-0,140642	3,561504	3 643	3 650	7
12	35	3,578056	-0,123190	3,578956	3 793	3 785	8
41	36	3,595717	-0,107903	3,594243	3 929	3 942	13
19	37	3,610341	-0,094513	3,607633	4 052	4 077	25
59	38	3,623353	-0,082705	3,619361	4 163	4 201	38
26	39	3,635182	-0,072512	3,629634	4 262	4 317	55
18	40	3,644044	-0,063514	3,638632	4 351	4 436	55
33	41	3,651956	-0,055633	3,646513	4 431	4 487	56
12	42	3,656194	-0,048730	3,653416	4 502	4 531	29
0	43	3,660065	-0,042683	3,659463	4 555	4 580	15
4	44	3,663135	-0,037307	3,664759	4 621	4 604	17
15	45	3,664830	-0,032740	3,669390	4 671	4 622	49
9	46	3,666050	-0,028504	3,673452	4 715	4 635	80
7	47	3,666050	-0,025125	3,677021	4 754	4 635	119
						$\sum \delta^2 = 45474$	

) 30((

$$\log a = (S_2 - S_1)(b-1)/(b^m - 1)^2 = -1,171540$$

$$\log K = \frac{1}{10} (S_1 - (b^{10} - 1)) \log a / (b - 1) = 31,702146$$

$$Y_x^A = K \cdot a^{b^x}$$

$$\log Y_x^A = \log K + b^x \log a$$

..

Tabla 2.1.

APLICACION DEL SEGUNDO MODELO DE AJUSTE A LA COHORTE DE MUJERES DE CIUDAD DE MEXICO, QUE NACIERON DURANTE 1915-19

Edad (x)	h _x (1)	F/F _x - 1 (2)	Z _x ⁰ = (1)/(2) (3)	g _x ⁰ log 10 000(3) (4)	Polinomios Ortogonales			g _x ^A (5)	z _x ^A (6)	1+(6)²(1) (7)	F _x ^A	F _x ⁰	δ
					ξ ₁	ξ ₂	ξ ₃						
20	0,000926	7,500052	0,007020	1,846337	-5	-5	-5	1,942493	0,006950	0,514039	529	525	4
25	0,003265	1,790137	0,055071	1,760712	-3	-1	7	1,770095	0,005099	2,037366	1 500	1 610	22
30	0,007031	0,674721	0,074744	1,675145	-1	-4	4	1,677052	0,004754	1,576140	2 600	2 690	2
35	0,013169	0,246195	0,003242	1,570013	1	-4	-4	1,490234	0,003092	1,234794	3 640	3 515	33
40	0,025000	0,056272	0,001407	1,140294	3	-1	-7	1,160411	0,001474	1,050950	4 254	4 265	11
45	0,059504	0,007030	0,000466	0,660306	5	5	5	0,662403	0,000460	1,007730	4 470	4 470	0
50	-	0	-	-	-	-	-	-	-	1,000000	4 505	4 505	0

$\sum \delta^2 = 1 714$

(a) = $\sum g_x \cdot \xi_i$	0,670607	-7,916341	-3,091223	-0,005501
h	6	70	34	100
(a) ÷ n (coeficiente de regresión) :	1,436440	-0,113000	-0,036000	-0,004919

$$F_x^A = F / \left[1 + (50 - x) \left(\frac{x+10}{x-15} \right)^2 g_2(x) \right]$$

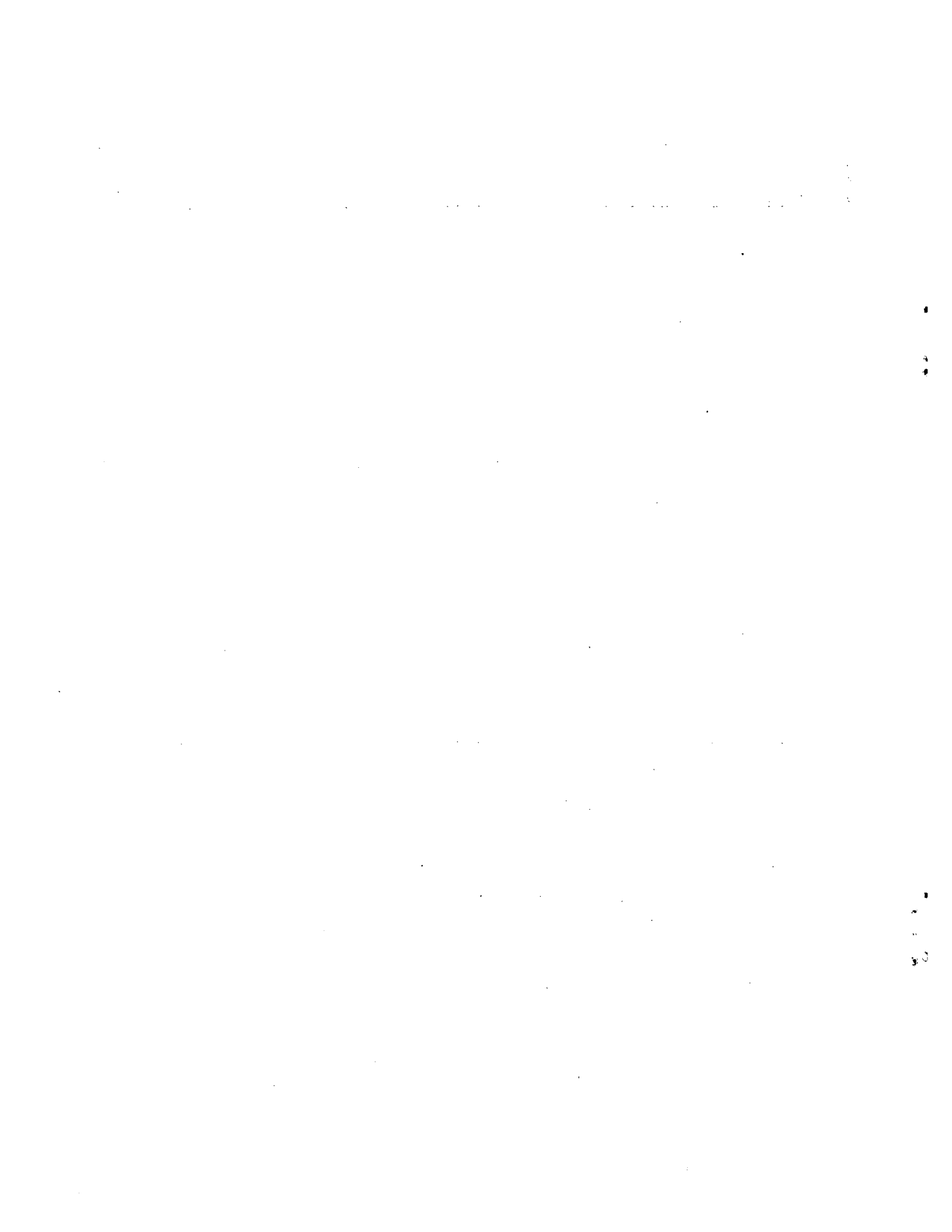
Se elige F = F₅₀ = 4 505

Como el término $h_x = (50-x) \left(\frac{x+10}{x-15} \right)^2$, es independiente de F y F_x, conviene calcularlo aparte, porque siempre será el mismo.

$$z_x^0 = h_x \left(\frac{F}{F_x} - 1 \right) ; g_x^0 = \log z_x^0$$

Para hacer más expedito el cálculo, aquí se eligió g_x⁰ = log 10 000 z_x⁰, lo que se tiene en cuenta posteriormente para obtener z_x^A.

) 31 (



PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO PARA LA DETERMINACION DE LOS PARAMETROS DE LA FUNCION DE GOMPERTZ

En el estudio de la fecundidad resulta interesante conocer la dispersión (variancia) de la distribución de las tasas de fecundidad. Para esto es necesario que la determinación de los parámetros de la función de ajuste considere el principio de "mínimos cuadrados".

Consideremos la conocida expresión

$$\log F_x = \log K + b^x \log a$$

De todos los parámetros, resulta fácil determinar b , por el procedimiento de King, mencionado en 1.6. Por potencias sucesivas de b se obtienen todos los valores b^x necesarios.

Luego puede determinarse $\log K$ y $\log a$, imponiendo condición de mínimos cuadrados, mediante las expresiones

$$\sum \log F_x^0 = n \log K + \log a \sum b^x$$

$$\sum b^x \log F_x^0 = \log K \sum b^x + \log a \sum b^{2x}$$

En que n representa el número de observaciones consideradas.

Este procedimiento puede aplicarse a fecundidad cumulativa por edades individuales o grupos de edades. Se ilustra el procedimiento en la tabla 3.1. para la fecundidad cumulativa de la cohorte 1915-1919 de Buenos Aires, que considera edades individuales.

Es claro que para un determinado b , se obtendrán valores de $\log K$ y $\log a$ que proporcionarán una discrepancia entre valores observados y ajustados.

Entonces, asignando valores de tanteo a b podrá conocerse cuál es el juego de parámetros que representa el menor desvío entre valores observados y ajustados.

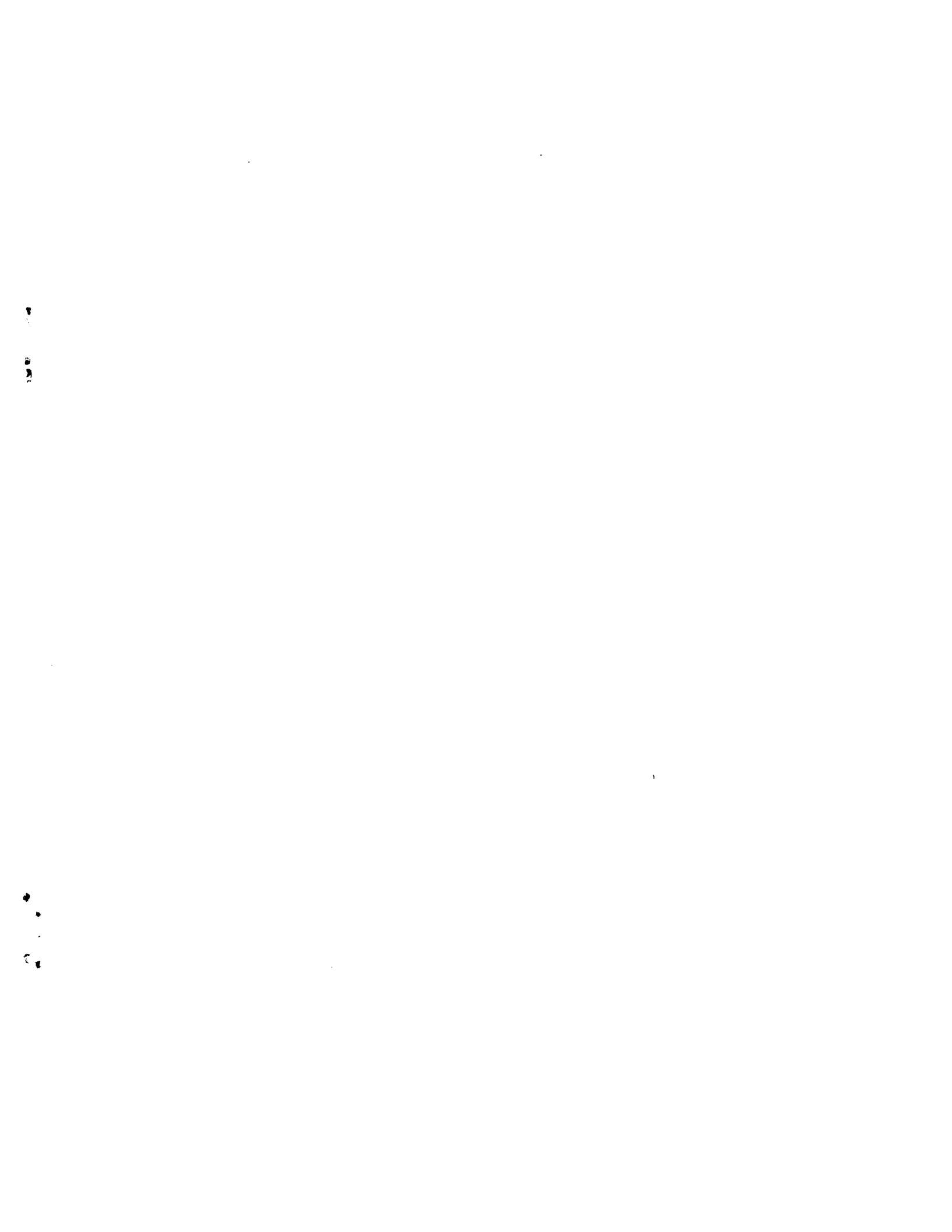
En el ejemplo de la tabla 3.1 sólo se presentan los valores ajustados que resultan al considerar $c = 0,04$ (determinado por el método de King). La suma de los cuadrados de las diferencias entre valores observados y ajustados es de 24 500, superior a 19 110 que se obtuvo con la segunda variante del primer modelo de ajuste presentado en el texto.

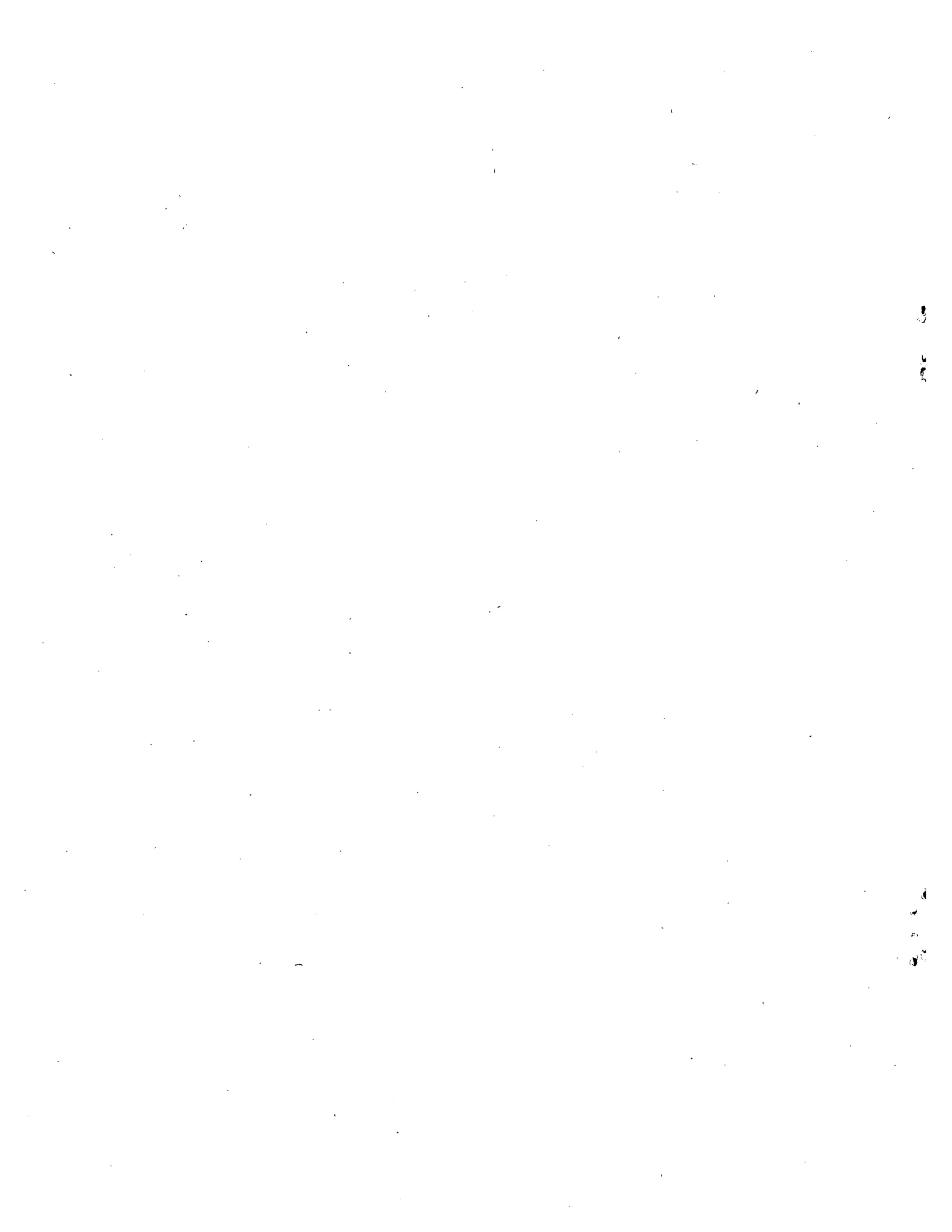
Tabla 3.1.

AJUSTE DE LA FECUNDIDAD CUMULATIVA DE LA COHORTE 1915-1919 DE BUENOS AIRES, CONSIDERANDO EL PRINCIPIO DE MINIMOS CUADRADOS

Edad	x	F_x^0	$\log F_x^0$	b^x	$-\log a b^x$	$\log F_x^T$	F_x^T
18	0	47	1,67210	1,00000	1,63694	1,65717	45
19	1	99	1,99654	0,84300	1,37503	1,91900	83
20	2	132	2,12057	0,70560	1,15502	2,13909	130
21	3	200	2,30133	0,59270	0,97321	2,32390	211
22	4	300	2,47712	0,49707	0,81498	2,47913	301
23	5	393	2,59439	0,41021	0,68458	2,60953	407
24	6	490	2,69723	0,35130	0,57506	2,71905	524
25	7	611	2,78634	0,29509	0,48304	2,81107	647
26	8	743	2,87099	0,24700	0,40576	2,88835	773
27	9	859	2,93399	0,20622	0,34004	2,95327	890
28	10	974	2,98856	0,17491	0,28632	3,00779	1 010
29	11	1 066	3,02776	0,14592	0,24050	3,05361	1 131
30	12	1 191	3,07591	0,12341	0,20201	3,09210	1 231
31	13	1 313	3,11026	0,10366	0,16969	3,12442	1 332
32	14	1 456	3,16316	0,08707	0,14253	3,15140	1 417
33	15	1 531	3,18490	0,07314	0,11973	3,17430	1 494
34	16	1 602	3,20466	0,06143	0,10056	3,19355	1 562
35	17	1 664	3,22115	0,05160	0,08447	3,20964	1 620
36	18	1 700	3,23045	0,04334	0,07394	3,22317	1 672
37	19	1 751	3,24329	0,03641	0,06560	3,23451	1 716
38	20	1 790	3,25205	0,03050	0,05806	3,24405	1 754
39	21	1 820	3,26100	0,02569	0,04205	3,25206	1 787
40	22	1 851	3,26741	0,02150	0,03533	3,25878	1 815
41	23	1 872	3,27231	0,01813	0,02960	3,26443	1 830
42	24	1 875	3,27300	0,01523	0,02493	3,26910	1 859
43	25	1 897	3,27807	0,01279	0,02094	3,27317	1 876
44	26	1 897	3,27807	0,01074	0,01750	3,27653	1 890
45	27	1 913	3,28172	0,00902	0,01476	3,27935	1 903
46	28	1 917	3,28262	0,00750	0,01241	3,28170	1 913
47	29	1 917	3,28262	0,00637	0,01043	3,28360	1 922

$b = 0,84$, $\log a = -1,63694$, $\log K = 3,29411$, $\sum \delta^2 = 24 500$.

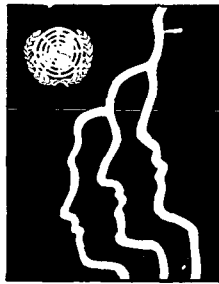




8

9

10
11
12



CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CELADE

Sede: J.M. Infante 9. Casilla 91. Teléfono 257806
Santiago (Chile)

Subsede: Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
Apartado Postal 5249
San José (Costa Rica)