



NACIONES
UNIDAS

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

SANTIAGO, CHILE



UNIVERSIDAD
DE CHILE

D.5/6 Rev.1

DISTRIBUCION RESTRINGIDA

ALGUNOS MODELOS TEORICOS Y NUMERICOS DE POBLACION

- Estas páginas constituyen la primera parte de un
trabajo preparado por el Profesor León Tabah -

2380

Mayo de 1962.

(Ha colaborado en la redacción de esta
primera parte el Sr. Jorge Arévalo,
becario de Argentina 1961-1962)

Este trabajo está sujeto a modificaciones.
Se reproduce para consulta exclusiva del
personal y estudiantes del Centro Latino-
americano de Demografía.





PRIMERA PARTE: LOS MODELOS TEORICOS

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Consideraremos una población cerrada, es decir una población cuyo efectivo varía solamente con los nacimientos y las defunciones, excluyéndose la inmigración y la emigración. Cada individuo sale de la población solamente por defunción y el efectivo sólo crece por nacimiento de niños cuyos padres pertenecen a la población.

Habrá que tener siempre presente en las páginas siguientes esta hipótesis recién enunciada y muy cómoda, pero a veces fuera de la realidad.

Consideramos la población en dos instantes t y $t + \Delta t$. Tendremos que considerar los efectivos $N(t)$ y $N(t + \Delta t)$ y los números:

- n_1 , efectivo de individuos que pertenecen a la población al instante t y que no le pertenecen más al instante $t + \Delta t$,
- n_2 , efectivo de individuos que pertenecen a la población al instante $t + \Delta t$ y que no le pertenecían al instante t ,
- n_{12} , efectivo "permanente", es decir número de individuos que pertenecen a la población a la vez en los instantes t y $t + \Delta t$.
- $n_{\bar{1}2}$ efectivo de individuos que nacieron entre t y $t + \Delta t$ y que fallecieron antes de $t + \Delta t$.

La evolución del efectivo de la población se caracteriza por las ecuaciones siguientes:

$$N(t) = n_{12} + n_1$$

$$N(t + \Delta t) = n_{12} + n_2$$

$$\Delta N(t, t + \Delta t) = n_2 - n_1$$

En un estudio matemático en lugar de tratar de interpretar $\Delta N(t, t + \Delta t)$ directamente, será más fácil interpretar las variaciones de $\Delta N(t, t + \Delta t)$ procediendo a la descomposición

$$\Delta N(t, t + \Delta t) = n_2 - n_1$$

o, lo que llega a ser lo mismo, a la descomposición

$$\Delta N(t, t + \Delta t) = B - D$$

siendo B y D los nacimientos y las defunciones que ocurren en el intervalo de tiempo Δt , ya que

$$B = n_2 + n_{\bar{1}2} \quad \text{y} \quad D = n_1 + n_{\bar{1}2}$$

Si llamamos $B(t) \Delta t$ al número de nacimientos ocurridos durante el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ y $D(t) \Delta t$ al número de defunciones ocurridas durante el mismo intervalo, tendremos:

$$N(t + \Delta t) - N(t) = B(t) \Delta t - D(t) \Delta t$$

Suponiendo que pueden reemplazarse los crecimientos finitos por diferenciales obtenemos la ecuación:

$$\frac{d N(t)}{dt} = B(t) - D(t)$$

$$\frac{d N(t)}{N(t) dt} = \frac{B(t)}{N(t)} - \frac{D(t)}{N(t)}$$

$$= b(t) - d(t) = r(t)$$

donde $b(t)$, $d(t)$ y $r(t)$ son respectivamente las tasas de natalidad, de mortalidad y de incremento en el momento t .

Además de estas tres funciones se suele en general considerar también las tres funciones siguientes que dependen de la edad x :

- $c(x, t)$ proporción de individuos de edad x en el tiempo t .
- $p(x, t)$ probabilidad, evaluada al nacimiento, de que un individuo sobreviva al tiempo t y a la edad x .
- $\psi(x, t)$ tasas de fecundidad en la edad x en el tiempo t .

En las páginas que siguen consideraremos algunos modelos teóricos de poblaciones dividiéndolos en dos tipos según se conozca la ley de fecundidad $\psi(x, t)$ o no. Estos modelos han sido construidos al suponer independientes del tiempo dos de las seis funciones anteriores. Se ha tratado, en estas condiciones, de ver:

- si las demás funciones son también independientes del tiempo,
- cuales son las relaciones fundamentales que existen entre los distintos componentes.

Proponemos llamar "poblaciones estables" aquellas en las cuales tanto la estructura por edad como las tasas de natalidad, de mortalidad y de incremento permanecen inalteradas con el tiempo. Veremos que en estas poblaciones existen algunas relaciones analíticas entre la estructura por edad y los componentes, o entre los componentes.

En los casos más sencillos en los cuales no se hace supuesto alguno sobre la ley de fecundidad se supondrán independientes del tiempo las funciones siguientes:

- Modelo 1: La estructura por edad y las tasas de supervivencia.
Modelo 2: La estructura por edad y la tasa de incremento.
Modelo 3: La estructura por edad y la tasa de mortalidad.
Modelo 4: La estructura por edad y la tasa de natalidad.
Modelo 5: Las tasas de supervivencia y la tasa de incremento.
Modelo 6: Las tasas de supervivencia y la tasa de natalidad.
Modelo 7: Las tasas de supervivencia y la tasa de mortalidad.
Modelo 8: Las tasas de natalidad y de mortalidad.
Modelo 9: Las tasas de natalidad y de incremento.
Modelo 10: Las tasas de mortalidad y de incremento.

Veremos que los modelos 1, 2, 3, 5 y 6 conducen de manera exacta o aproximada a las mismas relaciones fundamentales y que las funciones $b(t)$, $d(t)$, $r(t)$, $c(x,t)$ y $p(x,t)$, son independientes del tiempo. Son poblaciones estables en el sentido que hemos acordado a ese vocablo. Sin embargo existe entre ellas la diferencia que en los modelos 1, 2 y 3 estas funciones quedan inalteradas con el tiempo desde el momento en que se cumple la constancia de las funciones previstas en las hipótesis. En cambio los modelos 5 y 6 tienen la particularidad de que la función $c(x,t)$ y las demás funciones que no figuran en las hipótesis llegan a permanecer constantes solamente después de un cierto tiempo.

En cuanto a los modelos 4, 7, 8, 9 y 10, veremos que las hipótesis que los rigen no permiten llegar a condiciones similares: no son necesariamente estables. En estos modelos el hecho de haber supuesto $c(x,t)$ y $b(t)$ o $p(x,t)$ y $d(t)$ independientes de t no son suficientes para que nos permitan llegar a relaciones claras entre la estructura y los componentes y para que las funciones que no fueron consideradas en las hipótesis sean constantes con el tiempo. También es evidente que si consideramos constantes dos de las tres funciones $b(t)$, $d(t)$ y $r(t)$ esto constituye una condición insuficiente para que las funciones que dependen de la edad, $c(x,t)$ y $p(x,t)$, queden sin modificación con el tiempo.

En los casos en que se hace el supuesto que la ley de fecundidad $\psi(x,t)$ y una de las otras cinco funciones anteriormente citadas son independientes del tiempo se han construido cinco modelos, llegando así a un número total de 15 modelos que representan todas las combinaciones de las seis funciones tomadas de a dos.

En estos cinco modelos se suponen independientes del tiempo:

- Modelo 11: Las tasas de fecundidad por edades y las tasas de supervivencia.
Modelo 12: Las tasas de fecundidad por edades y la estructura por edad.

Modelo 13: Las tasas de fecundidad por edades y la tasa de incremento.

Modelo 14: Las tasas de fecundidad por edades y la tasa de natalidad.

Modelo 15: Las tasas de fecundidad por edades y la tasa de mortalidad.

Veremos que es solamente en el caso del modelo 11 que las seis funciones son independientes del tiempo. Sin embargo la permanencia estable de las funciones no se logra inmediatamente sino después de un intervalo de tiempo. El estado estable se alcanza de manera asintótica. Cuando éste es té alcanzado todas las relaciones encontradas para los modelos 1, 2, 3, 5 y 6 se aplican también a este modelo.

Muchas de las relaciones, a las cuales se llegara fueron encontradas por A. Lotka en su estudio de 1907 ^{1/} y de 1925 con L. Dublin ^{2/} por L. Bortkiewicz en 1931 ^{3/}. Bortkiewicz en una comunicación al Congreso del Instituto Internacional de Estadística de 1911, utilizando las estadísticas demográficas de Alemania para el período 1891-1900 llegó a la conclusión que una población constantemente sometida a la misma ley de mortalidad, con una tasa de incremento constante, lo que corresponde al modelo 5, tiende a largo plazo a tener una estructura por edades que permanece fija, con tasas generales de mortalidad y de natalidad constantes. En cambio, Lotka en su estudio de 1907 sobre la población de Inglaterra de 1871-1880 buscó las tasas de incremento y de natalidad que corresponden a una determinada estructura por edad y a una determinada tabla de mortalidad, lo que corresponde a nuestro modelo 1 y que Lotka llamó poblaciones "malthusianas". Luego, en su artículo de 1925, con la colaboración de L. Dublin, Lotka buscó la tasa de incremento y la estructura por edad que correspondían a ciertas tasas específicas de mortalidad y de fecundidad, con aplicación a los Estados Unidos de 1920, o sea por un camino muy distinto al que había seguido en su estudio de 1907 o al estudio de Bortkiewicz. Esta manera de plantear el problema corresponde a lo que hemos llamado el modelo 11. Más recientemente, en 1935, W. Cramer aplicó las fórmulas de Lotka para la población de Suecia del año 1910.

Dividiremos esta primera parte de los modelos teóricos en dos: las poblaciones para las cuales se desconoce la ley de fecundidad y las poblaciones para las cuales se conoce la ley de fecundidad. En realidad esta división está ya claramente distinguida en la obra clásica de Lotka en la cual este autor ha resumido sus investigaciones: "Theorie analytique des associations biologiques" ^{4/}.

- ^{1/} Lotka, A. Relation between Birth Rates and Death Rates, Science, 1907, XXVI, p. 21.
- ^{2/} Lotka, A. On the True Rates of Natural Increase in a Population. Journ. of the Americ. Statist. Ass., 1925, XXV, p.305.
- ^{3/} Bortkiewicz, L. von - Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der stationären und in der Progressiven Bevölkerung, zugleich ein Beitrag zur Frage Berechnung der "Verlebten Zeit". Bulletin de l'Institut International de Statistique, 1911, Vol. XIX, premiere section, Part II, p. 63-138.
- ^{4/} Lotka, A. Theorie analytique des Associations biologiques. 2^{eme} partté. Paris, 1939. Hermann y cie, 1 Vol. 149 p.

II. POBLACIONES PARA LAS CUALES SE DESCONOCE LA LEY DE FECUNDIDAD.

II.1. Modelo 1. Poblaciones con tasas de supervivencia y estructura por edad constantes.

Hipótesis de una mortalidad independiente del tiempo.

Sea $p(x,t)$ la probabilidad, evaluada al momento del nacimiento, de que un individuo sobreviva al instante t y a la edad x . El nacimiento de este individuo tiene, luego, lugar al instante $t - x$.

Supongamos ahora que la mortalidad no ha variado con el tiempo, los que nos permite escribir $p(x)$ en vez de $p(x,t)$. Las probabilidades de supervivencia son las mismas cualquiera sea la época considerada. En la práctica, para calcular $p(x)$ se aísla un número de recién nacidos l_0 y se calcula las relaciones

$$\frac{l_x}{l_0}$$

del número de sobrevivientes en la edad x, l_x , con el número inicial de nacimientos l_0 . El número l_0 es la raíz de la tabla de supervivencia. Habitualmente se toma 100 000 nacidos como raíz de las tablas de supervivencia.

Para más comodidad en la presentación de los cálculos que siguen tomaremos $l_0 = 1$ de modo que l_x se confunde con $p(x)$.

Es obvio que al nacer es $p(0) = 1$ y en la edad extrema de la vida humana (ω) es $p(\omega) = 0$. Entre estos dos puntos la curva de $p(x)$ sigue habitualmente un camino del tipo (1) o del tipo (2) del gráfico 1 según el nivel alto o bajo de la mortalidad general.

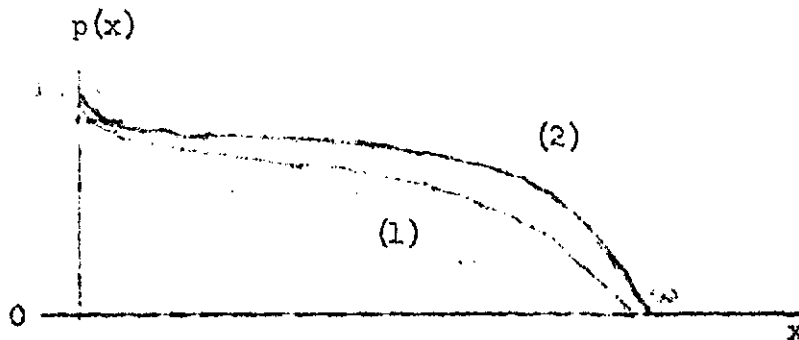


Gráfico 1

Hipótesis de una estructura por edad independiente del tiempo.

Consideramos individuos nacidos durante el intervalo de tiempo $(t-x, t-x+dx)$. Al nacimiento el número de esos individuos fué $B(t-x) dx$. Durante el intervalo de tiempo $(t, t+dt)$, cuando alcanzaron una edad comprendida entre $x-dx$ y $x+dx$ el número de ellos que sobrevivieron es $B(t-x) p(x) dx$. Si integramos con respecto a x esta expresión obtenemos el efectivo total al instante t :

$$N(t) = \int_0^{\omega} B(t-x) p(x) dx$$

En cuanto al número de individuos de edades comprendidas entre x_1 y x_2 llega a ser:

$$N(x_1 - x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} B(t - x) p(x) dx$$

Llamamos $c(x, t) dx$ la proporción de los individuos de edades comprendidas entre x y $x + dx$ en la cantidad total. Tenemos:

$$c(x, t) dx = \frac{B(t - x)}{N(t)} \cdot p(x) dx$$

y, como todos los individuos tienen una edad entre 0 y ω :

$$\int_0^{\omega} c(x, t) dx = 1$$

Al nacimiento tenemos $c(0, t) = \frac{B(t)}{N(t)} \cdot p(0)$ y, puesto que $p(0) = 1$, $c(0, t) = \frac{B(t)}{N(t)} = b(t)$. Dentro de una curva de reparticiones por edades, la ordenada en el origen es la tasa de natalidad (gráfico 2).

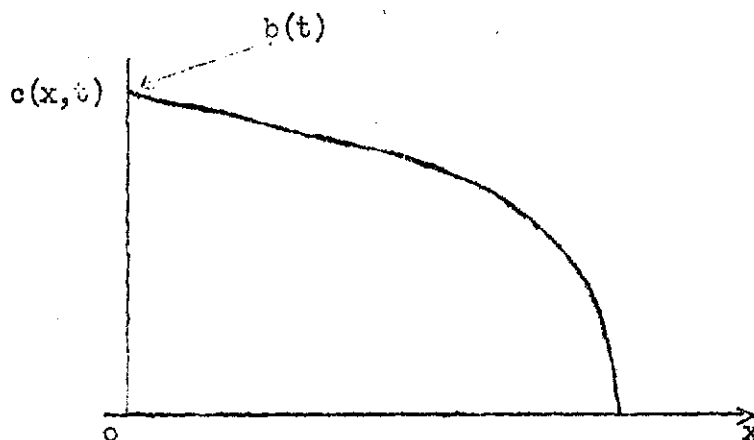


Gráfico 2

Hagamos ahora, la suposición de que la estructura por edad es independiente del tiempo

$$c(0) = b$$

es entonces, constante.

Puede también, demostrarse que la tasa de mortalidad d es constante. En efecto, durante el intervalo de tiempo $dt = dx$, el número de las defunciones que ocurren entre los sobrevivientes $p(x)$ es $-d p(x)$, de modo que la tasa instantánea de mortalidad para la edad x $\mu(x)$ se escribe:

$$\mu(x) = - \frac{d p(x)}{p(x) dx} = - \frac{d \log p(x)}{dx}$$

La tasa instantánea de mortalidad es la derivada, cambiada de signo, del logaritmo de la función $p(x)$.

Para el conjunto de la población, la tasa de mortalidad se escribe:

$$d(t) = -\int_0^{\infty} c(x,t) \frac{d \text{Log } p(x)}{dx} dx$$

Si en esta ecuación $c(x,t)$ es independiente del tiempo, la tasa de mortalidad general llega también a ser independiente del tiempo y la escribiremos d .

Siendo las tasas de natalidad y de mortalidad constantes, la tasa de incremento, diferencia entre estas dos, es también constante y la cifra de la población sigue un camino exponencial:

$$N(t) = N(0) e^{rt}$$

Obtenemos la misma ley exponencial para los nacimientos y las defunciones. En efecto la tasa de natalidad se escribe:

$$b = \frac{B(t)}{N(t)} = \frac{B(0)}{N(0) e^{rt}}$$

y, entonces:

$$B(t) = b N(0) e^{rt}$$

y, si escribimos $b N(0) = B(0)$:

$$B(t) = B(0) e^{rt}$$

De la misma manera obtenemos

$$D(t) = D(0) e^{rt}$$

Así vemos que si la estructura por edad y las tasas de supervivencia a cada edad permanecen constantes, el efectivo de la población, los números de nacimientos y de defunciones siguen una ley exponencial con la misma tasa de incremento.

Relaciones fundamentales en estas poblaciones.

La proporción de los individuos de edad $(x, x+dx)$ llega a ser:

$$c(x) dx = \frac{B(t-x)}{N(t)} p(x) dx = \frac{B(0) e^{(t-x)r}}{N(0) e^{rt}} p(x) dx$$

$$c(x) = b e^{-rx} p(x) \quad (1)$$

y, como

$$\int_0^{\omega} c(x) dx = 1$$

la tasa de natalidad se expresa por:

$$b = 1 / \int_0^{\omega} e^{-rx} p(x) dx \quad (2)$$

Hemos dado en el cuadro llas distribuciones por edades teóricas y registradas para Inglaterra en el período 1871-1880 (calculadas por A. Lotka). Alemania en el período 1891-1900 (calculadas por L. Bortkiewicz), Suecia en el año 1910 (calculadas por H. Cramer) y en el cuadro para Colombia alrededor del año 1951 (calculadas por nosotros, véase el detalle del cálculo en el cuadro N° 2). Como puede verse, la concordancia entre distribuciones teóricas y observadas es muy satisfactoria para cada población.

Caso particular de una población estacionaria.

Consideramos ahora una población de un tipo particular, donde la tasa de crecimiento es cero ($r = 0$). Luego, la ecuación (1) se transforma en:

$$c_{r=0}(x) = b p(x)$$

En una población estacionaria, sometida constantemente a la misma mortalidad, el número de individuos de cada edad es proporcional a la probabilidad de sobrevivencia que indica la tabla de mortalidad.

En cuanto a la tasa de natalidad, llega a ser:

$$b_{r=0} = 1 / \int_0^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{e_0}$$

donde e_0 es llamado "esperanza de vida al nacimiento" y representa el número medio de años vividos por un grupo de individuos que serían sometidos, hasta la extinción del grupo, a las mismas tasas específicas de mortalidad.

Empleando los símbolos actuariales la esperanza de vida se expresa por e_0 y se formula de la siguiente manera:

$$e_0 = \frac{1}{l_0} \int_0^{\infty} l_x dx$$

Cuadro N° 1

COMPARACION ENTRE DISTRIBUCIONES POR EDADES REGISTRADAS Y CALCULADAS EN LA HIPOTESIS DE UN ESTADO ESTABLE DE LA POBLACION (AMBOS SEXOS)

| Grupos de edades | Alemania (1891-1900) | | Suecia (1910) | |
|------------------|----------------------|--------------|---------------|--------------|
| | Observada | calculada | Observada | Calculada |
| 0 - 9 | 244 | 244 | 218 | 218 |
| 10 - 19 | 198 | 198 | 192 | 185 |
| 20 - 29 | 164 | 170 | 156 | 155 |
| 30 - 39 | 134 | 131 | 125 | 129 |
| 40 - 49 | 105 | 101 | 102 | 107 |
| 50 - 59 | 78 | 78 | 88 | 86 |
| 60 - 69 | 50 | 51 | 66 | 65 |
| 70 - 79 | 22 | 23 | 40 | 40 |
| 80 y + | 4 | 5 | 13 | 15 |
| Total | 999 | 1 001 | 1 000 | 1 000 |

| Grupos de edades | Inglaterra (1871-1880) | |
|------------------|------------------------|------------|
| | Observada | Calculada |
| 0 - 4 | 136 | 138 |
| 5 - 9 | 120 | 116 |
| 10 - 14 | 107 | 106 |
| 15 - 19 | 97 | 96 |
| 20 - 24 | 89 | 87 |
| 25 - 34 | 147 | 149 |
| 35 - 44 | 113 | 117 |
| 45 - 54 | 86 | 86 |
| 55 - 64 | 59 | 60 |
| 65 - 74 | 33 | 32 |
| 75 y + | 13 | 12 |
| Total | 1 000 | 999 |

Fuente: A. Lotka - Théorie analytique des associations biologiques - Deuxième partie. Paris, 1939, Hermann et Cie. 149 p.

Cuadro N° 2

COMPARACION ENTRE LA ESTRUCTURA POR EDADES DE LA POBLACION DE COLOMBIA Y LA ESTRUCTURA POR EDADES DE UNA POBLACION TEORICA QUE TENGA IGUAL NATALIDAD E IGUAL TABLA DE VIDA QUE LAS DE COLOMBIA ALREDEDOR DEL AÑO 1951 (POBLACIONES REDUCIDAS EN 100 000). LAS POBLACIONES ESTABLES TEORICAS CORRESPONDEN A ESPERANZAS DE VIDA AL NACIMIENTO DE 44 AÑOS PARA HOMBRES Y 46 AÑOS PARA MUJERES, A TASAS DE INCREMENTO 0.0275 PARA HOMBRES Y PARA MUJERES.

| Grupos de Edades | Hombres | | Mujeres | |
|------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|
| | Población al 9 V 1951 a/ | Población teórica | Población al 9 V 1951 a/ | Población teórica |
| 0 - 4 | 17 634 | 18 578 | 17 477 | 17 956 |
| 5 - 9 | 14 139 | 14 514 | 14 033 | 14 455 |
| 10 - 14 | 12 174 | 12 365 | 12 128 | 12 311 |
| 15 - 19 | 10 235 | 10 546 | 10 126 | 10 476 |
| 20 - 24 | 8 814 | 8 902 | 8 711 | 8 828 |
| 25 - 29 | 7 496 | 7 460 | 7 401 | 7 389 |
| 30 - 34 | 6 278 | 6 237 | 6 190 | 6 167 |
| 35 - 39 | 5 338 | 5 193 | 5 263 | 5 132 |
| 40 - 44 | 4 475 | 4 289 | 4 430 | 4 254 |
| 45 - 49 | 3 639 | 3 494 | 3 640 | 3 498 |
| 50 - 54 | 2 902 | 2 788 | 2 952 | 2 836 |
| 55 - 59 | 2 291 | 2 160 | 2 386 | 2 248 |
| 60 - 64 | 1 673 | 1 601 | 1 800 | 1 716 |
| 65 - 69 | 1 206 | 1 109 | 1 348 | 1 230 |
| 70 - 74 | 768 | 691 | 897 | 797 |
| 75 - 79 | 464 | 367 | 570 | 441 |
| 80 - 84 | 260 | 154 | 339 | 194 |
| 85 - 89 | 134 | 44 | 175 | 60 |
| 90 - 94 | 56 | 7 | 94 | 11 |
| 95 y + | 24 | 1 | 40 | 1 |
| Totales | 100 000 | 100 000 | 100 000 | 100 000 |

a/ Población de Colombia censada el 9 de mayo de 1951 ajustada por:

- 1) Sub-enumeración de los niños
- 2) Irregularidades en ciertas edades (método de King-Karup).

Como $r = 0$ tenemos $b = d$. En una población estacionaria la tasa de natalidad, como la tasa de mortalidad, es igual al recíproco de la esperanza de vida al nacimiento.

El estado estacionario es el que se obtendría si las tasas de natalidad y de mortalidad permanecieran iguales durante un largo tiempo.

Representación gráfica.

De una manera general podemos escribir:

$$\Psi = b \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx$$

Derivamos Ψ con respecto a la variable r :

$$\frac{d\Psi}{dr} = - b \int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx$$

Siendo todos los términos que figuran dentro del signo integral positivo $\frac{d\Psi}{dr}$ es necesariamente negativo y Ψ es entonces una función decreciente de r .

Por otra parte tenemos:

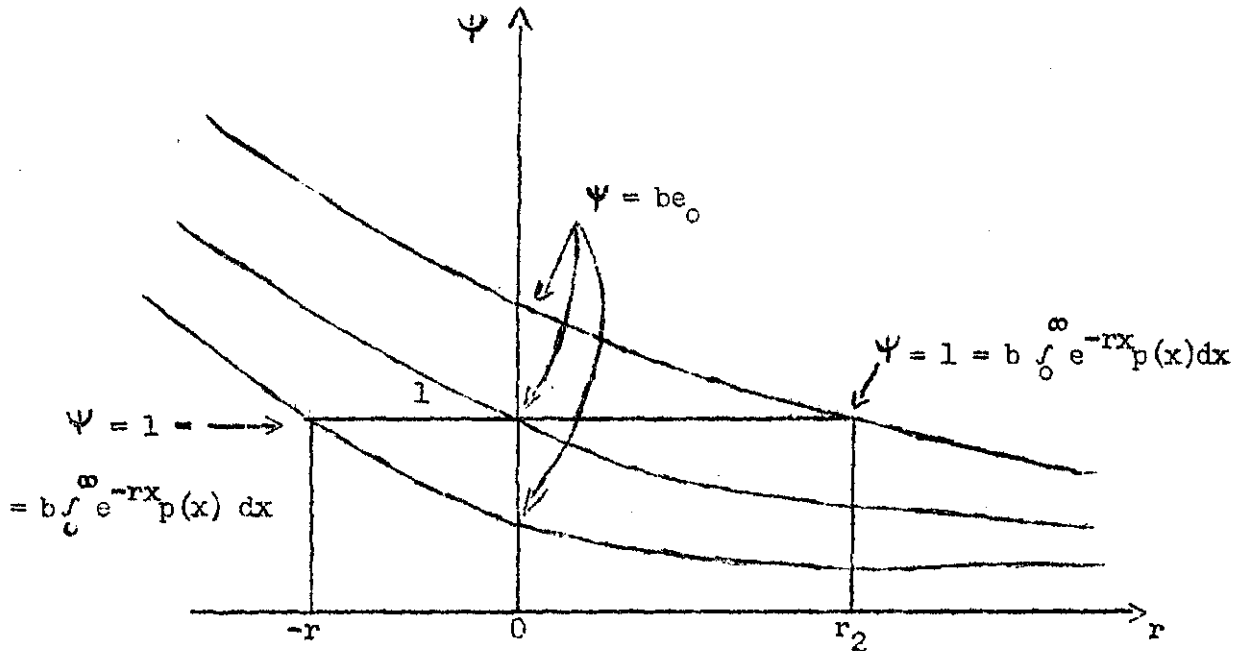
$$\Psi = 0 \quad \text{cuando} \quad r = + \infty$$

$$\Psi = + \infty \quad \text{cuando} \quad r = - \infty$$

$$\Psi = b e_0 \quad \text{cuando} \quad r = 0$$

La curva de Ψ puede adoptar varias formas como las que indica el gráfico 3. Como aparece evidente en este gráfico r será positivo si e_0 es mayor que $\frac{1}{b}$ y negativo si e_0 es menor que $\frac{1}{b}$. Vale decir, que las poblaciones crecientes tienen una esperanza de vida al nacimiento mayor que $\frac{1}{b}$ y las poblaciones decrecientes tienen una esperanza de vida al nacimiento menor que $\frac{1}{b}$. Recordemos que $\frac{1}{b}$ es la esperanza de vida al nacimiento en la población estacionaria.

Gráfico N° 3



Edad media de la población.

La edad media juega un papel importante como se verá más adelante. Sea \bar{x} esta edad media. Vamos a expresarla en función de la tasa de incremento y de algunas funciones de la tabla de mortalidad.

El número de individuos de edad $(x, x + dx)$, durante el tiempo t es, como ya lo hemos visto anteriormente:

$$c(x) N(t) dx = b e^{-rx} p(x) N(t) dx$$

El número de años vividos por este grupo es:

$$x b e^{-rx} p(x) N(t) dx$$

De manera que la edad media de la población es:

$$\bar{x} = \frac{b N(t) \int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx}{b N(t) \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx}$$

Transformamos esta expresión para que sea más fácil de calcular. Para esto indicaremos dos procedimientos que nos permiten llegar al mismo resultado:

1^{er} método: desarrollo en serie de Taylor

Desarrollamos e^{-rx} en serie de Taylor en la expresión de \bar{x} . Obtengamos:

$$\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx = \int_0^{\infty} p(x) dx - \frac{r}{1!} \int_0^{\infty} x p(x) dx + \frac{r^2}{2!} \int_0^{\infty} x^2 p(x) dx - \dots$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx = \int_0^{\infty} x p(x) dx - \frac{r}{1!} \int_0^{\infty} x^2 p(x) dx + \frac{r^2}{2!} \int_0^{\infty} x^3 p(x) dx - \dots$$

Llamaremos

$$v_i = \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} x^i p(x) dx$$

al momento respecto al origen de la función $\frac{p(x)}{e_0}$. En particular el momento de orden 0 es 1.

Tenemos luego:

$$\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx = e_0 v_0 - \frac{r}{1!} e_0 v_1 + \frac{r^2}{2!} e_0 v_2 - \frac{r^3}{3!} e_0 v_3 + \dots$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx = e_0 v_1 - \frac{r}{1!} e_0 v_2 + \frac{r^2}{2!} e_0 v_3 - \frac{r^3}{3!} e_0 v_4 + \dots$$

Nos encontramos entonces delante del problema de la división entre dos polinomios. Esta división nos conduce al resultado siguiente:
te:

$$\begin{aligned} \bar{x} = & v_1 - r (v_2 - v_1^2) + \frac{r^2}{2!} (v_3 - 3v_1 v_2 + 2v_1^3) - \frac{r^3}{3!} (v_4 - 4v_1 v_3 - 3v_2^2 + \\ & + 12v_1^2 v_2 - 6v_1^4) + \dots \end{aligned}$$

Se llaman cumulantes k_i las cantidades definidas de la manera siguiente:
te:

$$k_1 = \nu_1$$

$$k_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \nu_2 - k_1^2$$

$$k_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \nu_3 - k_1(\nu_2 + 2k_2)$$

$$k_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 - 3\nu_2^2 + 12\nu_1^2\nu_2 - 6\nu_1^4 = \nu_4 - k_1(\nu_3 + 3k_3) - 3\nu_2 k_2$$

etc. ...

y, en forma más general, los momentos y cumulantes siguen entre si la relación de recurrencia siguiente:

$$\nu_i - k_i = \sum_1^{i-1} C_j^{i-1} \nu_j k_{i-j}$$

donde C_j^{i-1} es el número de combinaciones de j números tomados en grupos de $i-1$ veces. k_i es llamado cumulante de orden i de la función $\frac{p(x)}{e_0}$

La edad media \bar{x} se escribe, en función de los cumulantes:

$$(3) \quad \bar{x} = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} - k_4 \frac{r^3}{3!} + \dots = -\frac{1}{r} \sum_1^{\infty} \frac{(-r)^i}{i!} k_i$$

2º método: introducción de las funciones generadoras de los momentos y de los cumulantes

Estas funciones están destinadas a proporcionar por un procedimiento relativamente rápido, que vamos a recordar brevemente, los momentos o los cumulantes de una función y permitir así definir con el mayor detalle posible la distribución de la función considerada. Las llamaremos por más comodidad, F. G. M. y F. G. C. respectivamente. 1/

Sea $f(x)$ una función para la cual se desea calcular algunos momentos o cumulantes, a y b los valores inferiores y superiores de x y t una variable auxiliar.

La F. G. M. de la función $f(x)$ se define por:

$$M(t) = \int_a^b e^{tx} f(x) dx$$

1/ BOGAZ, ALBINO. Estadística. (apuntes de clase). A.1/4-1. Centro Latinoamericano de Demografía. Marzo, 1960.
KENDALL, M.G. The Advanced Theory of Statistics. London-Griffin. 1947. Págs. 60.

y la F. G. C. por el logaritmo natural de la F. G. M., sea por:

$$K(t) = \log \int_a^b e^{tx} f(x) dx$$

El momento de orden i se obtiene al cabo de derivar la F. G. M. i veces y luego haciendo $t = 0$. Si $M(t)$ se desarrolla en potencias de t , el momento de orden i es también igual al coeficiente de

$$\frac{t^i}{i!}$$

en el desarrollo.

De la misma manera el cumulante de orden i se obtiene al cabo de derivar i veces la F. G. C. y luego haciendo $t = 0$. El cumulante de orden i es también el coeficiente de

$$\frac{t^i}{i!}$$

al desarrollar en serie el logaritmo de la F. G. M. Los cumulantes se definen entonces en términos de momentos y es evidente que el cumulante de orden i existe en la medida en que existen momentos de orden i y de órdenes menores. Formalmente los cumulantes se definen al identificar los coeficientes de t en la igualdad:

$$k_1 t + \frac{k_2 t^2}{2!} + \frac{k_3 t^3}{3!} + \dots = \log (1 + \nu_1 t + \frac{\nu_2 t^2}{2!} + \frac{\nu_3 t^3}{3!} + \dots)$$

Esta identificación nos lleva a las relaciones anteriormente indicadas entre los momentos y cumulantes.

Consideramos ahora la función $\frac{p(x)}{e_0}$. La F. G. M. de esta función, tomando para la variable auxiliar $t = -r$ es:

$$M(-r) = \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx$$

y la F. G. C.:

$$K(-r) = \log \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx - \log e_0$$

La derivada con respecto a r de $M(-r)$ es:

$$\frac{dM(-r)}{dr} = - \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx$$

de modo que:

$$\frac{dM(-r)}{M(-r)dr} = \frac{d \log M(-r)}{dr} = \frac{dK(-r)}{dr} = - \bar{x}$$

y entonces:

$$\bar{x} = - \frac{d}{dr} (-k_1 r + k_2 \cdot \frac{r^2}{2!} - k_3 \frac{r^3}{3!} + \dots)$$

que luego de derivar con respecto a r nos conduce al mismo resultado que el que hemos obtenido al desarrollar en serie de Taylor numerador y denominador de la expresión de \bar{x} :

$$\bar{x} = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} - k_4 \frac{r^3}{3!} + \dots = - \frac{1}{r} \sum \frac{(-r)^i}{(i-1)!} k_i$$

Para calcular los cumulantes se debería antes obtener los momentos como ya lo hemos comentado.

Edad media de una población estacionaria.

Recordando que en una población estacionaria $r = 0$ la ecuación anterior llega a ser:

$$\bar{x}_{r=0} = k_1 = \lambda_1$$

En los cuadros donde están indicadas las edades medias en poblaciones teóricas las que corresponden a tasas de incremento iguales a cero se refieren, entonces, a poblaciones estacionarias.

Relación entre la edad media, la tasa de incremento y las tasas de supervivencia.

Si en la expresión de la edad media limitamos el desarrollo al término de segundo grado en r , lo que en la práctica puede admitirse ya que r pasa muy raras veces 3 %, obtenemos:

$$\frac{k_2}{2} r^2 - k_2 r + k_1 - \bar{x} = 0$$

La tasa de incremento r es la raíz:

$$r = \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - 2 k_3 (k_1 - \bar{x})}}{k_3} \quad (4)$$

Mediante esta expresión se podría obtener r conociendo la edad media \bar{x} (o sea, la estructura por edad) y las tasas de supervivencia de la población estudiada, o de una población que tuviera un nivel sanitario parecido.

Algunas propiedades de la edad media.

La edad media de una población cuya estructura por edad y cuya mortalidad permanecen constantes se expresa de la manera siguiente, como ya lo hemos visto:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx}$$

Cuando la tasa de incremento r varía esta edad media varía también, pero en el sentido contrario a r .

La población tiene una edad media tanto más alta cuando más baja es la tasa de incremento. En efecto la derivada con respecto a r de \bar{x} es:

$$\frac{d \bar{x}}{d r} = - \frac{\int_0^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) e^{-rx} dx}{\int_0^{\infty} p(x) e^{-rx} dx}$$

Esta expresión es necesariamente negativa ya que cada término que figura dentro de las integrales es positivo.

Otra propiedad: Si, con igual nivel de mortalidad, r varía, la proporción de los individuos de edad x pasa por un mínimo o un máximo cuando $x = \bar{x}$. En efecto derivamos

$$c(x) = \frac{e^{-rx} p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx}$$

con respecto a r ; obtenemos:

$$\frac{d c(x)}{dr} = \frac{-x e^{-rx} p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx} + \frac{\int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx}{\left[\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx \right]^2} e^{-rx} p(x)$$

Esta expresión es igual a cero cuando $x = \bar{x}$. Si entonces se consideran las curvas de las $c(x)$ correspondientes a un determinado nivel de mortalidad, escribiendo en las abscisas la tasa r y en las ordenadas las proporciones $c(x)$, estas curvas pasan por un mínimo o por un máximo que corresponde a la edad media de la población. En otras palabras en este punto máximo o mínimo el valor de x considerado es también la edad media en una población que tuviera el valor de r que corresponde a este punto y al nivel de mortalidad considerado (gráfico 4).

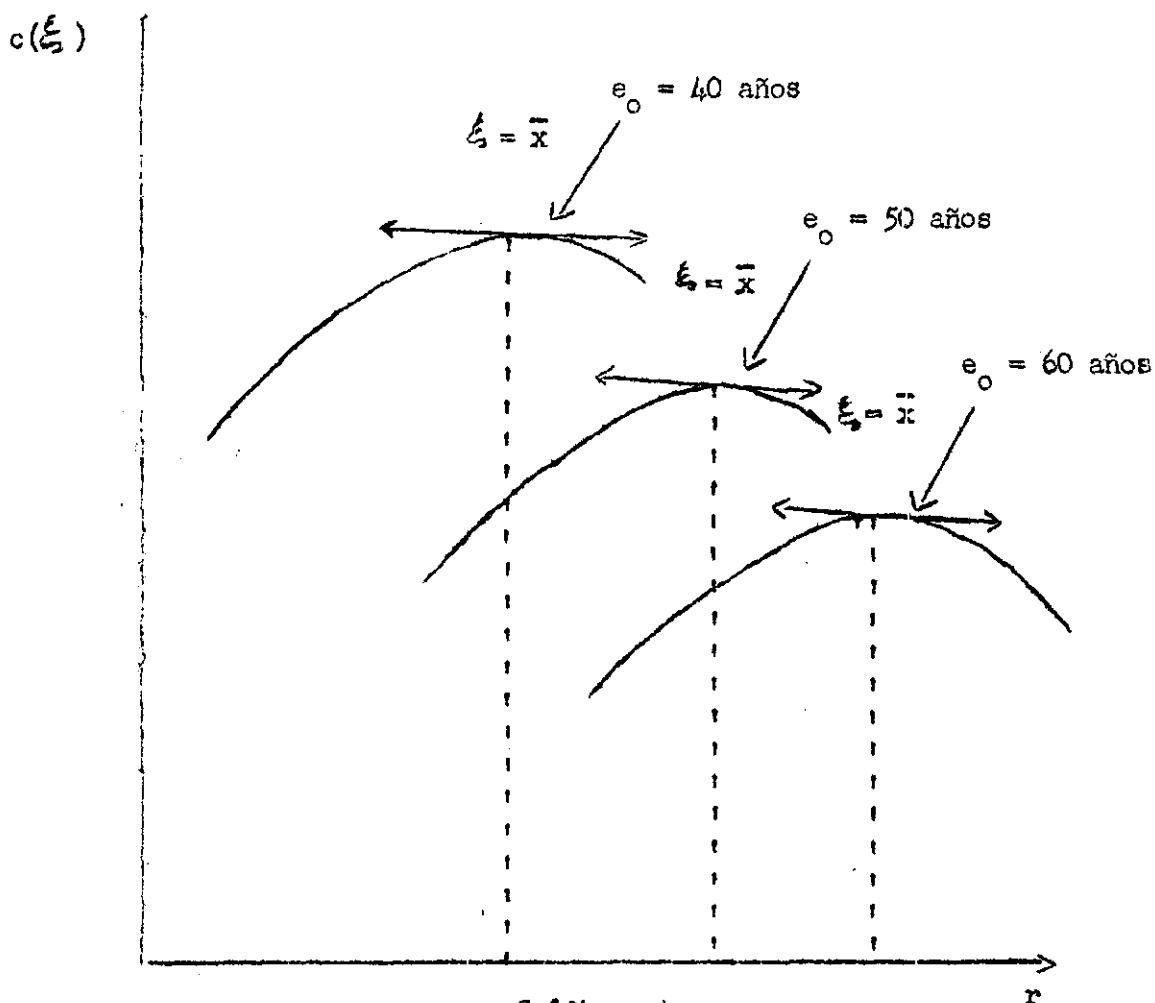


Gráfico 4

Si dibujamos las curvas de las proporciones de los individuos para una edad $x = \xi$ determinada, en poblaciones que corresponden a distintos e_0 y a distintos r , esta familia de curvas describe en los máximos o los mínimos la curva de las edades medias. El mismo gráfico podría dibujarse para otra edad x . Esta observación podría servir para algunos problemas de estimación. En efecto, ya que para una pareja de valores de ξ y de $c(\xi)$ existe una sola población que responde al modelo que consideramos en este capítulo, la estimación de e_0 y r podría obtenerse al ubicar en las distintas familias de curvas, la línea que en su máximo corresponde a los valores ξ y de $c(\xi)$ considerados.

Otra forma de la relación entre la tasa de natalidad, la tasa de incremento y las tasas de supervivencia.

Hemos visto una relación entre la tasa de natalidad, la tasa de incremento y las tasas de supervivencia mediante la relación:

$$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx}$$

El cálculo de b según esta fórmula puede hacerse evaluando la integral por uno de los métodos usuales de integración. El procedimiento más sencillo y a veces suficiente consiste en agrupar los datos por grupos quinquenales de edad, por lo menos a partir del grupo 5 - 9 años, y luego aplicar la fórmula de los trapecios.

Otro procedimiento puede resultar de una transformación de la fórmula de la edad media dejando aparecer los cumulantes de la función

$$\frac{p(x)}{e_0}$$

En efecto, volvamos a la fórmula fundamental

$$\frac{1}{b} = \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx$$

Si derivamos $1/b$ con respecto a la variable r obtenemos:

$$\frac{d \frac{1}{b}}{dr} = - \int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx$$

de manera que la edad media

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-rx} p(x) dx}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx}$$

llega a escribirse:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= - \frac{d \frac{1}{b}}{\frac{1}{b} dr} \\ &= \frac{d \text{Log } b}{dr} \end{aligned}$$

Integrando las dos partes de esta ecuación obtenemos:

$$\text{Log } b = \int \bar{x} \, dr + c$$

donde c es una constante que puede escribirse:

$$c = (\text{Log } b)_{r=0} = \log \frac{1}{e_0}$$

ya que la tasa de natalidad en una población estacionaria es igual al recíproco de la esperanza de vida al nacimiento.

Volviendo a la expresión de \bar{x} en función de los cumulantes de la función $\frac{p(x)}{e_0}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Log } b - \log \frac{1}{e_0} &= \int_0^r \left[k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} - k_4 \frac{r^3}{3!} + \dots \right] dr \\ &= k_1 \frac{r}{1!} - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} - k_4 \frac{r^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

y finalmente

$$b = \frac{e^{k_1 \frac{r}{1!} - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} - k_4 \frac{r^4}{4!} + \dots}}{e_0} = \frac{e^{-\sum \frac{(-r)^i}{i!} k_i}}{e_0} \quad (5)$$

Podría llegarse a este resultado mediante los F. G. M. y F. G. C. de manera más directa. Hemos visto, en efecto, que tomando para la variable auxiliar $t = -r$, la F. G. M. de

$$\frac{p(x)}{e_0}$$

escribe:

$$M(-r) = \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) \, dx$$

como

$$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) \, dx} \quad (2)$$

y

$$K(-r) = \text{Log } M(-r)$$

Obtenemos finalmente:

$$b = \frac{1}{e_0} e^{-K(-r)} = \frac{e^{-k_1 \frac{r}{1!} - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} - k_4 \frac{r^4}{4!} + \dots}}{e_0} \quad (5)$$

Aplicación numérica.

Consideraremos una población cuya estructura por edad y cuyas tasas de supervivencia permanecen constantes con el tiempo. Veremos que las tasas de natalidad, de mortalidad y de incremento permanecen también constantes desde el momento en que $c(x)$ y $p(x)$ no varían con el tiempo y que se cumplan las relaciones anteriormente demostradas entre la estructura y los componentes.

1) Elección de la estructura por edad y de la mortalidad.

Tomaremos en el cuadro el ejemplo de la estructura por edad, reducida a 100.000, de la población de Colombia, sexo femenino, de 1950. Esta estructura no es exactamente la que arrojó el censo de 1951, siendo los datos brutos alterados por omisiones y errores de declaración de edad, sino una que parece ajustarse mejor a la realidad, y que además tenga la propiedad de ser tal que combinada con la mortalidad elegida se mantenga inalterable con el tiempo.

Supondremos que esta población está sometida a la mortalidad que indican las tablas modelos de mortalidad que se describen más adelante, en el capítulo , para el nivel de esperanza de vida al nacimiento de 46 años. Las relaciones de supervivencia a este nivel de mortalidad se indican en la columna 3 del cuadro ^W3. Estas relaciones miden las probabilidades de pasar de un grupo quinquenal de edad al grupo quinquenal siguiente en el intervalo de 5 años.

Si aplicamos estas relaciones de supervivencia a la población de 1950 obtenemos, en la columna 4, la población de 5 años y más, por grupos quinquenales de edad, en 1955, que resulta de los 100.000 individuos considerados en 1950.

La población de 0 - 4 años en 1955 se obtuvo de la manera siguiente:

Llamemos α_{0-4} la relación entre el número de individuos en 1950 de 0 - 4 años N_{0-4}^{50} con respecto al número de individuos de todas las edades en 1950 $N_{0-\omega}^{50}$:

$$\alpha_{0-4} = \frac{N_{0-4}^{50}}{N_{0-\omega}^{50}}$$

Cuadro N° 3

EJEMPLO ILUSTRATIVO DEL MODELO 1. ESTRUCTURA POR EDAD DE LA POBLACION DE COLOMBIA EN 1950, SEXO FEMENINO, SOMETIDA A UNA MORTALIDAD CONSTANTE

| Grupos de Edades | Distribución por 100 000 en 1950 | Relaciones de supervivencia | Efectivos en 1955 | Distribución por 100 000 en 1955 | Efectivos en 1960 | Distribución por 100 000 en 1960 |
|------------------|----------------------------------|-----------------------------|-------------------|----------------------------------|-------------------|----------------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 0 - 4 | 17 956 | 0.9237 | 20 603 | 17 956 | 23 640 | 17 956 |
| 5 - 9 | 14 455 | 0.9772 | 16 586 | 14 455 | 19 031 | 14 455 |
| 10 - 14 | 12 311 | 0.9763 | 14 125 | 12 311 | 16 208 | 12 311 |
| 15 - 19 | 10 476 | 0.9669 | 12 019 | 10 476 | 13 790 | 10 476 |
| 20 - 24 | 8 828 | 0.9604 | 10 129 | 8 828 | 11 621 | 8 828 |
| 25 - 29 | 7 389 | 0.9575 | 8 478 | 7 389 | 9 728 | 7 389 |
| 30 - 34 | 6 167 | 0.9548 | 7 075 | 6 167 | 8 118 | 6 167 |
| 35 - 39 | 5 132 | 0.9511 | 5 888 | 5 132 | 6 755 | 5 132 |
| 40 - 44 | 4 254 | 0.9436 | 4 881 | 4 254 | 5 600 | 4 254 |
| 45 - 49 | 3 498 | 0.9302 | 4 014 | 3 498 | 4 606 | 3 498 |
| 50 - 54 | 2 836 | 0.9095 | 3 254 | 2 836 | 3 734 | 2 836 |
| 55 - 59 | 2 248 | 0.8758 | 2 579 | 2 248 | 2 960 | 2 248 |
| 60 - 64 | 1 716 | 0.8226 | 1 969 | 1 716 | 2 259 | 1 716 |
| 65 - 69 | 1 230 | 0.7438 | 1 412 | 1 230 | 1 620 | 1 230 |
| 70 - 74 | 797 | 0.6353 | 915 | 797 | 1 050 | 797 |
| 75 - 79 | 441 | 0.5035 | 506 | 441 | 581 | 441 |
| 80 - 84 | 194 | 0.3543 | 222 | 194 | 255 | 194 |
| 85 - 89 | 60 | 0.2078 | 69 | 60 | 79 | 60 |
| 90 - 94 | 11 | 0.1130 | 12 | 11 | 14 | 11 |
| 95 - 99 | 1 | 0.0000 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Total | 100 000 | | 114 737 | 100 000 | 131 650 | 100 000 |

Como la estructura por edad se supone independiente del tiempo tenemos también:

$$\alpha_{0-4} = \frac{N_{0-4}^{55}}{N_{0-4}^{55} + N_{5-\omega}^{55}}$$

Ya que en esta relación conocemos α_{0-4} y $N_{5-\omega}^{55}$ podemos despejar N_{0-4}^{55} .
Encontramos:
 $N_{0-4}^{55} = 20\ 603.$

Las estructuras de 1950 y 1955 son idénticas como puede comprobarse al comparar las columnas 3 y 5, lo que era de esperar ya que, como lo hemos dicho, la estructura por edad inicial ha sido por construcción elegida de tal modo que combinada con la mortalidad al nivel $e_0 = 46$ años se mantenga constante.

Puede comprobarse en las columnas 5 y 7 que al repetirse la misma operación la estructura de 1960 es idéntica a la de 1955 y a la de 1950.

2) Tasa de incremento.

La población inicial de 100 000 pasó a ser 114 737 en 1955 y 131 650 en 1960. El aumento relativo de 1950 a 1955 es igual al aumento relativo de 1955 a 1960. Este incremento corresponde a una evolución exponencial con una tasa de incremento de 0.0275.

3) Tasa de natalidad.

Calculemos la tasa de natalidad mediante la fórmula (5)

$$b = \frac{e^{k_1 \frac{r}{1!} - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} - \dots}}{e_0}$$

Al nivel $e_0 = 46$ años los cuatro primeros acumulantes de la tabla modelo de mortalidad, sexo femenino, son (Tabla N°12):

- $k_1 = 33.1759$
- $k_2 = 456.29$
- $k_3 = 3630.6$
- $k_4 = -177309$

Encontramos para las aproximaciones sucesivas:

$$1^{\text{era}} \text{ aproximación : } b = \frac{k_1 r}{e_0} = 54.13 \text{ o/oo}$$

$$2^{\text{da}} \text{ aproximación : } b = \frac{k_1 r - k_2 \frac{r^2}{2!}}{e_0} = 45.55 \text{ o/oo}$$

$$3^{\text{ra}} \text{ aproximación : } b = \frac{k_1 r - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!}}{e_0} = 46.13 \text{ o/oo}$$

$$4^{\text{ta}} \text{ aproximación : } b = \frac{k_1 r - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} - k_4 \frac{r^4}{4!}}{e_0} = 46.33 \text{ o/oo}$$

Vemos que con una tasa de incremento del orden de 0.0275 se debe calcular la tasa de natalidad mediante la fórmula (5) hasta por lo menos la tercera aproximación.

Esta tasa de natalidad es independiente del tiempo ya que varía solamente con la mortalidad y con la tasa de incremento, las cuales son constantes por construcción, o como resultado de las hipótesis.

4) Número de los nacimientos.

Para 1950 el número de los nacimientos es $100\ 000 \times 0.04633 = 4\ 633$.

En 1955 y en 1960 el número de los nacimientos puede obtenerse indistintamente al aplicar las dos fórmulas:

$$B(t) = B(0) e^{rt}$$

$$B(t) = b N(0) e^{rt}$$

Estas dos fórmulas conducen a los mismos resultados o sea: 5 316 nacimientos en 1955, 6 099 nacimientos en 1960.

5) Tasa de mortalidad y número de defunciones.

La tasa de mortalidad resulta de la diferencia:

$$b - r = d$$

obtenemos $d = 18.83 \text{ o/oo}$, constante con el tiempo.

El número de defunciones al aplicar la fórmula:

$$D(t) = d N(0) e^{rt}$$

indica 1 833 defunciones para 1950, 2 157 defunciones para 1955 y 2 470 defunciones para 1960.

6) Edad media.

Al aplicar la fórmula (3):

$$\bar{x} = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} - k_4 \frac{r^3}{3!} + \dots$$

con los valores de r y de los cumulantes anteriormente indicados encontramos:

1^{era} aproximación : $\bar{x} = k_1 = 33.18$ años

2^{da} aproximación : $\bar{x} = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} = 20.63$ años

3^{ra} aproximación : $\bar{x} = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} = 22.00$ años

4^{ta} aproximación : $\bar{x} = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} - k_4 \frac{r^3}{3!} = 22.61$ años

Vemos que la serie converge lentamente cuando r es del orden de 0.0275 y no podemos conformarnos con la segunda, aún mismo la tercera aproximación.

Como la estructura por edad es supuesta fija la edad media es también constante.

7) Relación entre la estructura por edad y los componentes.

Hemos visto que existe la relación siguiente entre la proporción de individuos de edad x , la tasa de natalidad, la tasa de incremento y la tasa de supervivencia a la edad x :

$$c(x) = b e^{-rx} p(x)$$

Cuadro N° 4

EJEMPLO DE CALCULO DE UNA ESTRUCTURA POR EDAD TEORICA QUE CORRESPONDE A UNA TASA DE INCREMENTO $r = 0.0275$ Y UNA MORTALIDAD MODELO AL NIVEL $e_0 = 46$ AÑOS, SEXO FEMENINO

| Grupos de Edades | $L_n x$ | e^{-rx} | (2) x (3) | Distribución por 100 000 |
|------------------|---------|-----------|-----------|--------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 0 - 4 | 417 001 | 0.933560 | 389 295 | 17 956 |
| 5 - 9 | 385 190 | 0.813629 | 313 402 | 14 455 |
| 10 - 14 | 376 422 | 0.709105 | 266 923 | 12 311 |
| 15 - 19 | 367 510 | 0.618009 | 227 124 | 10 476 |
| 20 - 24 | 355 363 | 0.538616 | 191 404 | 8 828 |
| 25 - 29 | 341 295 | 0.469422 | 160 210 | 7 389 |
| 30 - 34 | 326 803 | 0.409117 | 133 701 | 6 167 |
| 35 - 39 | 312 043 | 0.356559 | 111 262 | 5 132 |
| 40 - 44 | 296 773 | 0.310753 | 92 223 | 4 254 |
| 45 - 49 | 280 043 | 0.270832 | 75 845 | 3 498 |
| 50 - 54 | 260 488 | 0.236039 | 61 485 | 2 836 |
| 55 - 59 | 236 925 | 0.205716 | 48 739 | 2 248 |
| 60 - 64 | 207 493 | 0.179288 | 37 201 | 1 716 |
| 65 - 69 | 170 690 | 0.156256 | 26 671 | 1 230 |
| 70 - 74 | 126 965 | 0.136182 | 17 290 | 797 |
| 75 - 79 | 80 663 | 0.118687 | 9 574 | 441 |
| 80 - 84 | 40 615 | 0.103440 | 4 201 | 194 |
| 85 - 89 | 14 390 | 0.090151 | 1 297 | 60 |
| 90 - 94 | 2 990 | 0.078570 | 235 | 11 |
| 95 - 99 | 338 | 0.068476 | 23 | 1 |
| Total | | | 2 168 106 | 100 000 |

Heimos indicado en el cuadro 4 una forma de calcular la estructura por edad teórica que corresponde a una tasa de incremento $r = 0.0275$ y a una mortalidad de las tablas modelos al nivel $e_0 = 46$ años. Estos datos corresponden aproximadamente a la población femenina de Colombia en 1950.

El cálculo se hizo por grupos quinquenales de edad.

En la columna 1 se indican los grupos quinquenales de edad.

En la columna 2 los valores de ${}_nL_x$ basándose en la relación:

$${}_nL_x = \int_0^n l_{x+t} dt$$

Estos valores de ${}_nL_x$ son reproducidos de la Tabla N° 7.

En la columna 3 los valores de e^{-rx} , tomando para x la edad media de cada grupo quinquenal por edad, o sea 2,5 años, 7,5 años, etc..

En la columna 4 los productos de las columnas 2 y 3.

En la columna 5 la distribución por 100 000 de las cifras de la columna 4.

La tasa de natalidad no se necesita tomar en consideración para el cálculo de la estructura por edad ya que en la fórmula (1) aparece como un coeficiente constante para cada edad.

Notamos que el total de la columna 4 nos indica 2 168 106. El recíproco dividido por 100 000 corresponde a la tasa de natalidad:

$$b = \frac{1}{\int e^{-rx} p(x) dx}$$

encontramos $b=46.12$ ‰, o sea, un valor prácticamente igual a lo que arrojó la fórmula (5) en su tercera aproximación.

8) Cálculo de la tasa de natalidad y de la tasa de incremento basándose en el conocimiento de $c(x)$ y de $p(x)$.

Heimos visto la relación siguiente:

$$c(x) = b e^{-rx} p(x) \quad (1)$$

que puede también escribirse:

$$\text{Log } \frac{c(x)}{p(x)} = \text{Log } b - rx$$

Si disponemos de la relación $\frac{c(x)}{p(x)}$ para algunas edades podemos entonces, por ejemplo, mediante un ajustamiento por mínimos cuadrados, obtener b y r . En un gráfico de coordenadas semi-logarítmicas la ordenada al origen indica $\text{Log } b$ y la pendiente $-r$.

No es preciso disponer de la relación $\frac{c(x)}{p(x)}$ para todas las edades, sino para algunas. En realidad vale más eliminar $\frac{c(x)}{p(x)}$ del cálculo los datos relativos a edades extremas: 0 - 4 años en razón de la subenumeración frecuente en este grupo de edad y para las edades avanzadas en razón de los errores de declaración de edad propios a esas edades, y en general en el sentido de un envejecimiento casi sistemático.

Hemos indicado en el cuadro N° 5 un ejemplo de tal cálculo para Colombia, en 1950. El ejemplo está indicado aquí a título puramente ilustrativo, con el propósito de indicar la operatoria del cálculo.

La ecuación de regresión obtenida es la siguiente:

$$\text{Log } \frac{c(x)}{p(x)} = 3.127594 - 0.02558 x$$

Lo que conduce a los resultados siguientes:

$$b = 0.04382$$
$$r = 0.02558$$

9) Estimación de la omisión censal de los niños y corrección de la estructura por edades para las edades avanzadas.

Si se aplica la ecuación de regresión anterior, obtenida mediante los datos relativos a los grupos de edades comprendidas entre 5 y 49 años podemos completar, por extrapolación, la estructura por edades para los grupos marginales: 0 - 4 años y de 50 - 54 años en adelante. Disponemos así de un método que puede resultar cómodo para estimar la omisión censal de los niños y para corregir la estructura en las edades avanzadas.

Un ejemplo de cálculo está indicado en el cuadro No. 6.

Vemos, en este cuadro, que la proporción de niños de 0 - 4 años es 17 143 por 100 000 en lugar de 16 316 por 100 000 observada en el censo. La omisión censal es

$$\frac{17\ 143 - 16\ 316}{16\ 316} = 4.92 \%$$

Cuadro N° 5

EJEMPLO DE ESTIMACION DE LA TASA DE NATALIDAD Y DE LA TASA DE INCREMENTO A PARTIR DE $c(x)$ Y DE $p(x)$. COLOMBIA, DATOS AJUSTADOS POR ERRORES DE DECLARACION DE EDAD, SEXO FEMENINO, 1950

| Grupos de Edades | $c(x, x+4)$ | L_x | $\frac{c(x, x+4)}{L_x}$ | $\log \frac{p(x, x+4)}{L_x} - y$ | x | $x y$ | x^2 |
|------------------|-------------|---------|-------------------------|----------------------------------|-------|-------------|----------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 5-9 | 14 033 | 385 190 | 0.03643 | - 3.312362 | 7.5 | - 24.842715 | 56.25 |
| 10-14 | 12 128 | 376 422 | 0.03221 | - 3.435478 | 12.5 | - 42.943475 | 156.25 |
| 15-19 | 10 126 | 367 510 | 0.02755 | - 3.591753 | 17.5 | - 62.855678 | 306.25 |
| 20-24 | 8 711 | 355 363 | 0.02451 | - 3.708674 | 22.5 | - 83.445165 | 506.25 |
| 25-29 | 7 401 | 341 295 | 0.02168 | - 3.833212 | 27.5 | -105.413330 | 756.25 |
| 30-34 | 6 190 | 326 803 | 0.01894 | - 3.966479 | 32.5 | -128.910568 | 1 056.25 |
| 35-39 | 5 263 | 312 043 | 0.01686 | - 4.082811 | 37.5 | -153.105413 | 1 406.25 |
| 40-44 | 4 430 | 296 773 | 0.01492 | - 4.205052 | 42.5 | -178.714710 | 1 806.25 |
| 45-49 | 3 640 | 280 043 | 0.01299 | - 4.343575 | 47.5 | -206.319813 | 2 256.25 |
| Suma | | | | - 34.479396 | 247.5 | -986.550867 | 8 306.25 |
| Media | | | | - 3.831044 | 27.5 | | |

$$- r = \frac{\sum xy - \bar{x} \sum y}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = \frac{-986.550867 + 948.183390}{8306.25 - 6806.25} = \frac{-38.367477}{1500.00} = -0.02558$$

$$r = 0.02558$$

$$\log_e b = 3.831044 + 0.02558 (27.5) = -3.831044 + 0.703450 = 3.127594$$

$$b = 0.04382$$

Cuadro N° 6

EJEMPLO DE ESTIMACION DE LA OMISION CENSAL DE LOS NIÑOS DE 0 - 4 AÑOS Y DE CORRECCION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD PARA LAS EDADES AVANZADAS, COLOMBIA, SEXO FEMENINO, 1950

| Grupos de Edades | \bar{x} | $\text{Log}_e b - \bar{r}\bar{x}$ | $\frac{c(x, x+4)}{5L_x}$ | $5L_x$ | $c(x, x+4)$ calculadas | $c(x, x+4)$ en el censo |
|------------------|-----------|-----------------------------------|--------------------------|---------|------------------------|-------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 0 - 4 | 2,5 | - 3.191544 | 0.04111 | 417 001 | 17 143 | 16 316 |
| 50 - 54 | 52,5 | - 4.470544 | 0.01144 | 260 488 | 2 980 | 3 108 |
| 55 - 59 | 57,5 | - 4.598444 | 0.01007 | 236 925 | 2 386 | 1 871 |
| 60 - 64 | 62,5 | - 4.726344 | 0.00886 | 207 493 | 1 838 | 2 070 |
| 65 - 69 | 67,5 | - 4.854244 | 0.00780 | 170 690 | 1 331 | 1 121 |
| 70 - 74 | 72,5 | - 4.982144 | 0.00686 | 126 965 | 871 | 1 012 |
| 75 - 79 | 77,5 | - 5.110044 | 0.00604 | 80 663 | 487 | 485 |
| 80 - 84 | 82,5 | - 5.237944 | 0.00531 | 40 615 | 216 | 439 |
| 85 - 89 | 87,5 | - 5.365844 | 0.00467 | 14 390 | 67 | 153 |
| 90 - 94 | 92,5 | - 5.493744 | 0.00411 | 2 990 | 12 | 106 |
| 95 - 99 | 97,5 | - 5.621644 | 0.00362 | 338 | 1 | 72 |

Nota sobre la última aplicación numérica: relación entre los cumulantes de las funciones $c(x)$ y de $p(x)$.

Puede resolverse el problema de la estimación de r y de b a partir de $c(x)$ y $p(x)$ notando que en la ecuación (1):

$$c(x) = b e^{-rx} p(x)$$

las dos funciones $c(x)$ y $p(x)$ juegan un papel semejante.

Tenemos, en efecto:

$$p(x) = \frac{1}{b} c(x) e^{rx}$$

y, para todas las edades x :

$$b e_0 = \int_0^{\infty} c(x) e^{rx} dx$$

La parte derecha de esta ecuación puede escribirse $M'(r)$, función generadora de los momentos de la función $c(x)$.

Ahora bien, habíamos encontrado, con la ecuación (5)

$$b e_0 = e^{-K(-r)}$$

de modo que obtenemos:

$$\text{Log } b e_0 = K'(r)$$

$$\text{Log } b e_0 = -K(-r)$$

$$K'(r) = -K(-r)$$

La función generadora de los cumulantes de la función $c(x)$ es igual a la función generadora de los cumulantes de $p(x)$, cambiada de signo, tomando en la primera, como variable r y en la segunda $-r$.

Desarrollando las dos F.C.G. obtenemos:

$$\text{Log } b e_0 = k_1' r + k_2' \frac{r^2}{2!} + k_3' \frac{r^3}{3!} + \dots$$

$$\text{Log } b e_0 = k_1 r - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} - \dots$$

donde k_i' es el cumulante de orden i de la función $c(x)$. Restando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$(k'_1 - k_1) r + \frac{k'_2 + k_2}{2} r^2 + \frac{k'_3 - k_3}{6} r^3 - \dots = 0$$

Si disponemos de las funciones $c(x)$ y $p(x)$ puede calcularse r resolviendo una ecuación de primer o de segundo grado. Luego, conociendo r , puede calcularse b mediante la fórmula (1) o (5).

A veces este método puede resultar más satisfactorio que el de calcular r y b basándose en la ecuación

$$\log \frac{c(x)}{p(x)} = \log b - r x$$

como lo hicimos en la aplicación numérica 8.

Tomamos los mismos datos que en esa aplicación numérica. Los valores de los tres primeros cumulantes de la función $c(x)$, obtenidos a partir de los datos del cuadro Nº 3 son:

$$k'_1 = 22.270$$

$$k'_2 = 328.49775$$

$$k'_3 = 1243.79$$

los tres primeros cumulantes de la función $\frac{p(x)}{e_0}$, ya calculados son:

$$k_1 = 33.1759$$

$$k_2 = 456.29$$

$$k_3 = 3630.6$$

Resolviendo la ecuación:

$$(k'_2 - k_1) r + \frac{k'_2 + k_2}{2} r^2 = 0$$

obtenemos $r = 0.0277$.

Resolviendo la ecuación:

$$(k'_1 - k_1) r + \frac{k'_2 + k_2}{2} r^2 + \frac{k'_3 - k_3}{6} r^3 = 0$$

obtenemos $r = 0.0283$.

Estos valores se acercan más al valor $r = 0.0275$ encontrado en la aplicación numérica 2 que el valor $r = 0.02558$ obtenido con la ecuación

$$\text{Log } \frac{c(x)}{p(x)} = \text{Log } b - r x$$

en la aplicación numérica 8.

Notamos que puede escribirse en otra forma la relación que existe entre los cumulantes de la función $c(x)$ y de la función $p(x)$.

Volvamos, en efecto, a la ecuación:

$$c(x) = b e^{-rx} p(x)$$

Pasando a las F.G.M. de ambas funciones tenemos:

$$M'(t) = b e_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-rx} p(x) dx}{e_0}$$

siendo t una variable auxiliar.

Pasando a las F.G.C. tenemos:

$$K'(t) = \log b e_0 + K(t - r)$$

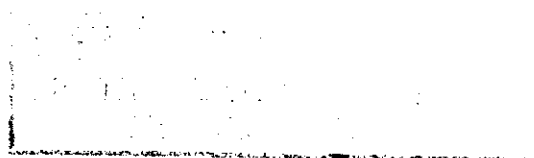
Desarrollamos las F.G.C.:

$$k'_1 t + k'_2 \frac{t^2}{2!} + k'_3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \log b e_0 + k_1 (t-r) + k_2 \frac{(t-r)^2}{2!} + k_3 \frac{(t-r)^3}{3!} + \dots$$

Si hacemos, en la parte derecha

$$\text{Log } b e_0 = k_1 r - k_2 \frac{r^2}{2!} + k_3 \frac{r^3}{3!} - \dots$$

y si identificamos los coeficientes de iguales potencias de t en ambas partes obtenemos:



$$k'_1 = k_1 - k_2 \frac{r}{1!} + k_3 \frac{r^2}{2!} - \dots = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \frac{(-r)^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$k'_2 = k_2 - k_3 \frac{r}{1!} + k_4 \frac{r^2}{2!} - \dots = \sum_{i=2}^{\infty} k_i \frac{(-r)^{i-2}}{(i-2)!}$$

$$k'_3 = k_3 - k_4 \frac{r}{1!} + k_5 \frac{r^2}{2!} - \dots = \sum_{i=3}^{\infty} k_i \frac{(-r)^{i-3}}{(i-3)!}$$

etc. ...

Por un procedimiento similar obtenemos:

$$k_1 = \sum_{i=1}^{\infty} k'_i \frac{(r)^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$k_2 = \sum_{i=2}^{\infty} k'_i \frac{(r)^{i-2}}{(i-2)!}$$

etc.

Se podría pensar en utilizar estas relaciones para estimar la mortalidad de una población si disponemos de su estructura por edad y de los valores de k_1 , k_2 y k_3 de las tablas modelos de mortalidad. Podría, por ejemplo, calcularse los cumulantes de $c(x)$; luego dar a r algunos valores apropiados y calcular así valores teóricos de k_1 , k_2 y k_3 con las ecuaciones anteriores. Se buscaría finalmente para que nivel de mortalidad tenemos mayor aproximación entre los valores de las tablas modelos y los valores teóricos. Valdría la pena intentar tal cálculo con un ejemplo práctico.

II.2. Modelo 2. Poblaciones con estructura por edad y tasas de incremento constantes.

Relaciones fundamentales.

Supondremos esta vez, contrariamente a lo que se consideró en el modelo anterior que las tasas de supervivencia no son independientes del tiempo pero que a la vez $c(x)$ y r son constantes.

Llamaremos $P(x-1, t-1)$ la probabilidad para un individuo que tenía la edad $x-1$ en el tiempo $t-1$, de sobrevivir al tiempo t . Si $N(x,t)$ es el número de individuos de edad x al instante t $P(x-1, t-1)$ se define de la manera siguiente:

$$P(x-1, t-1) = \frac{N(x,t)}{N(x-1, t-1)}$$

Si la estructura por edad es independiente del tiempo y si el efectivo global de la población sigue una ley exponencial, el efectivo de cada edad aumenta también necesariamente en forma exponencial, con la misma tasa de incremento que el efectivo global. Sea r esa tasa, tenemos:

$$N(x, t+s) = N(x, t) e^{sr}$$

donde s es una constante.

La probabilidad para un individuo de pasar de la edad $x-1$ en el tiempo t a la edad x en el tiempo $t+1$ se escribe entonces:

$$P(x-1, t) = \frac{N(x, t+1)}{N(x-1, t)} = \frac{N(x, t) e^r}{N(x-1, t-1) e^r} = P(x-1, t-1)$$

La probabilidad de sobrevivir de una edad a la siguiente es entonces independiente del tiempo.

Si las probabilidades $P(x)$ de sobrevivir de una edad a la siguiente son independientes del tiempo, también las probabilidades de alcanzar la edad x , $p(x)$, son independientes del tiempo ya que tenemos:

$$p(x) = P(0) P(1) \dots P(x)$$

De modo que el modelo considerado supone finalmente que a la vez $c(x)$ y $p(x)$ permanecen constantes y nos encontramos entonces delante del mismo problema que el analizado en el modelo 1 y se puede entonces llegar a las mismas conclusiones y a las mismas relaciones fundamentales. Suponer que una

población tenga su estructura por edad y las tasas de supervivencia constantes llega a lo mismo que suponer que la estructura por edad y la tasa de incremento son constantes.

En particular llegamos a la conclusión que el estado estable es alcanzado desde el momento en que se cumplan las hipótesis, o sea desde el momento en que $c(x)$ y r permanecen constantes, $p(x)$, b , d permanecen también constantes y las relaciones que existen entre la estructura y los componentes se verifican inmediatamente.

Aplicación numérica.

Consideraremos el mismo ejemplo numérico que el indicado en el cuadro 3 que sirvió al modelo 1 pero supondremos que las cifras de este cuadro se obtuvieron de otra manera.

Supondremos que la población en 1950 por grupos quinquenales de edad, reducida a 100 000, que figura en la columna 2, aumente con una tasa de incremento anual de 0.0275 para cada grupo de edad. La población de 1955 figura en la columna 4. Al relacionar el efectivo de un grupo de edad en 1955 por el efectivo del grupo de edad más joven de 5 años en 1950 obtenemos las relaciones de supervivencia que figuran en la columna 3. A partir de entonces todos los cálculos realizados para el modelo 1 se aplican íntegramente aquí.

II.3. Modelo 3. Poblaciones con estructura por edad y tasa de mortalidad constantes.

Este caso es en realidad muy sencillo. En efecto si $c(x)$ es independiente de t la tasa de natalidad es constante ya que $c(0) = b$. Y si b y d son constantes $r = b - d$ lo es también. Este modelo se convierte entonces en el anterior, construido con la hipótesis de $c(x)$ y r constantes, el cual a su vez es equivalente al modelo 1. Todas las relaciones y todas las propiedades que fueron encontradas son también válidas en este caso.

II.4. Modelo 4. Poblaciones con estructura por edad y tasa de natalidad constantes.

La población no es necesariamente estable.

Si la estructura por edad es independiente del tiempo también la tasa de natalidad permanece constante con el tiempo ya que $c(0) = b$. Daría entonces lo mismo, en este modelo, suponer que la estructura por edad sola es independiente del tiempo.

Notamos que el hecho de que la estructura por edad permanezca fija no permite estimar la tasa de natalidad ya que en la práctica la proporción de individuos que tienen la edad cero es desconocida.

De todos modos el solo conocimiento de los $c(x)$ no es suficiente para determinar los demás elementos, $r(t)$, $d(t)$, $p(x,t)$ y las relaciones que existen entre ellos. Si no se agrega otra hipótesis sobre la constancia en el tiempo de $p(x,t)$ o de $r(t)$, por ejemplo, la población queda indeterminada.

Ejemplo numérico.

Puede mostrarse, con un ejemplo numérico que si la estructura por edad permanece sin alteraciones en el tiempo las tasas de supervivencia no son necesariamente constantes. Tal es así que en el cuadro N° 7 representamos en la columna 2 la estructura por edad de una población (sexo femenino) construida según las relaciones encontradas en el modelo 1, con una tabla modelo de mortalidad correspondiente a una esperanza de vida al nacimiento de 46 años y una tasa de incremento de 0.0275. En la columna 3 de este cuadro se representa esta población cinco años después, crecida en todos los grupos de edad en 10 %. En la columna 4 se representa la misma población diez años después del tiempo de partida, pero esta vez crecida en 15 % en todos los grupos de edad con respecto al tiempo $t = 5$.

Se han calculado las relaciones de supervivencia relativas al primer intervalo de cinco años en la columna 5 y las mismas relaciones relativas al segundo intervalo de cinco años en la columna 6, al relacionar en dos fechas sucesivas los efectivos que corresponden a individuos nacidos durante el mismo quinquenio. Vemos, al comparar las columnas 5 y 6 que la mortalidad varió considerablemente al pasar del primer intervalo de cinco años al segundo. Las esperanzas de vida al nacimiento que corresponde a las probabilidades de supervivencia anteriormente calculadas son aproximadamente 28,5 años para el primer quinquenio y 42,5 años para el segundo. Es solamente en caso de que la tasa de incremento hubiese permanecido constante en los dos intervalos de tiempo que las tasas de supervivencia hubiesen quedado constantes, como se ha visto en el modelo 2.

Recordamos que la tasa de natalidad, como ya se calculó en el modelo 1, es 46,33 por 1 000. Esta tasa permaneció constante a lo largo de la proyección que acabamos de realizar.

Cuadro N° 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO DE POBLACION CON ESTRUCTURA POR EDAD Y TASA DE NATALIDAD CONSTANTE

| Grupos de Edades | Población en el tiempo $t = 0$ a/ | Población en $t = 5$ | Población en $t = 10$ | Relaciones de supervivencia en el 1º quinquenio | Relaciones de supervivencia en el 2º quinquenio |
|------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------------------|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 0 - 4 | 17 956 | 19 752 | 22 715 | 0.88549 | 0.92572 |
| 5 - 9 | 14 455 | 15 900 | 18 285 | 0.93683 | 0.97943 |
| 10 - 14 | 12 311 | 13 542 | 15 573 | 0.93607 | 0.97865 |
| 15 - 19 | 10 476 | 11 524 | 13 253 | 0.92698 | 0.96910 |
| 20 - 24 | 8 828 | 9 711 | 11 168 | 0.92070 | 0.96231 |
| 25 - 29 | 7 389 | 8 128 | 9 345 | 0.91812 | 0.95989 |
| 30 - 34 | 6 167 | 6 784 | 7 802 | 0.91535 | 0.95695 |
| 35 - 39 | 5 132 | 5 645 | 6 492 | 0.91173 | 0.95323 |
| 40 - 44 | 4 254 | 4 679 | 5 381 | 0.90456 | 0.94571 |
| 45 - 49 | 3 498 | 3 848 | 4 425 | 0.89193 | 0.93243 |
| 50 - 54 | 2 836 | 3 120 | 3 588 | 0.87200 | 0.91153 |
| 55 - 59 | 2 248 | 2 473 | 2 844 | 0.83941 | 0.87747 |
| 60 - 64 | 1 716 | 1 887 | 2 170 | 0.78846 | 0.82458 |
| 65 - 69 | 1 230 | 1 353 | 1 556 | 0.71301 | 0.74575 |
| 70 - 74 | 797 | 877 | 1 009 | 0.60853 | 0.63625 |
| 75 - 79 | 441 | 485 | 558 | 0.48299 | 0.50515 |
| 80 - 84 | 194 | 213 | 245 | 0.34021 | 0.35681 |
| 85 - 89 | 60 | 66 | 76 | 0.20000 | 0.21212 |
| 90 - 94 | 11 | 12 | 14 | 0.09091 | 0.08333 |
| 95 - 99 | 1 | 1 | 1 | 0.00000 | 0.00000 |
| Total | 100 000 | 110 000 | 126 500 | | |

a/ Esta población corresponde a un modelo estable con $e_0 = 46$ años y $r = 0.0275$, sexo femenino.

II.5. Modelo 5. Poblaciones con tasas de supervivencia y tasa de incremento constante.

Haremos esta vez el supuesto que la población crece de manera exponencial con una tasa de incremento igual a r y que las probabilidades de sobrevivencia $p(x,t)$ son independientes del tiempo. Supongamos además que estas condiciones hayan prevalecido durante un largo período de tiempo. Veremos más adelante cual debería ser la duración de este período para que el razonamiento que sigue sea válido.

Curva del número de los nacimientos.

Demostraremos primero la proposición siguiente en su forma general.

Si el efectivo de la población $N(t)$ sigue una trayectoria determinada y si los $p(x,t)$ permanecen constantes con el tiempo, los nacimientos siguen en primera aproximación la misma trayectoria que la población total con la diferencia que se encuentra reducida por la esperanza de vida al nacimiento y desplazada en la representación gráfica hacia la izquierda en k_1 primer cumulado con respecto al origen de la función

$$\frac{p(x)}{e_0}$$

el cual depende únicamente de la mortalidad.

Veremos luego el caso particular de que $N(t)$ sigue una función exponencial.

Hemos ya visto la relación siguiente entre el efectivo durante el tiempo t y los nacimientos ocurridos en los tiempos anteriores

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) dx$$

Comenzaremos por suponer que en esta relación $N(t)$ y $B(t)$ pueden, en términos generales, representarse por las series:

$$N(t) = \alpha_0 \varphi(t) + \frac{\alpha_1}{1!} \varphi'(t) + \frac{\alpha_2}{2!} \varphi''(t) + \dots$$

$$B(t) = \beta_0 \varphi(t) + \frac{\beta_1}{1!} \varphi'(t) + \frac{\beta_2}{2!} \varphi''(t) + \dots$$

donde $\varphi(t)$ es una función de t cuyas derivadas sucesivas son $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, etc.... y $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \beta_0, \beta_1, \beta_2$ etc. ... son parámetros.

Introduciremos más adelante la hipótesis que $N(t)$ se reduce a $\alpha_0 \varphi(t)$

y luego más específicamente a una fórmula exponencial, como se supone en las poblaciones estables.

Las derivadas sucesivas de $B(t)$ son:

$$B'(t) = \beta_0 \varphi'(t) + \frac{\beta_1}{1!} \varphi''(t) + \dots$$

$$B''(t) = \beta_0 \varphi''(t) + \dots$$

Aplicaremos a $B(t-x)$ en $N(t) = \int_0^\infty B(t-x) p(x) dx$ la fórmula de Taylor:

$$N(t) = \int_0^\infty \left[B(t) - \frac{x}{1!} B'(t) + \frac{x^2}{2!} B''(t) - \dots \right] p(x) dx$$

y substituímos en esta ecuación $B(t)$ y sus derivadas sucesivas por las expresiones anteriormente indicadas. Obtenemos:

$$N(t) = e_0 \left[\beta_0 \varphi(t) - \frac{1}{1!} (\beta_0 \nu_1 - \beta_1) \varphi'(t) + \frac{1}{2!} (\beta_0 \nu_2 - 2\beta_1 \nu_1 + \beta_2) \varphi''(t) - \dots \right]$$

donde $\nu_1 = \frac{1}{e_0} \int_0^\infty x^i p(x) dx$, es el momento de orden i con respecto al origen de $\frac{p(x)}{e_0}$.

Si igualamos los coeficientes de $\varphi(t)$ y de sus derivadas sucesivas en las dos expresiones de $N(t)$ obtenemos:

$$\alpha_0 = \beta_0 e_0$$

$$\alpha_1 = \beta_1 e_0 - \beta_0 e_0 \nu_1 = e_0 (\beta_1 - \beta_0 \nu_1)$$

$$\alpha_2 = \beta_0 e_0 \nu_2 - 2\beta_1 e_0 \nu_1 + \beta_2 e_0 = e_0 (\beta_0 \nu_2 - 2\beta_1 \nu_1 + \beta_2) \text{ etc. } \dots$$

De manera general puede escribirse la igualdad simbólica:

$$\alpha_i = (\beta - \nu)^i e_0 \quad \text{con } i > 0$$

substituyendo convencionalmente, en el desarrollo del binomio, las potencias por índices.

Cuando $N(t)$ se reduce a $N(t) = \alpha_0 \varphi(t)$ obtenemos las relaciones siguientes entre los coeficientes de $\varphi(t)$ y sus derivadas sucesivas en $N(t)$ y $B(t)$:

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{e_0}$$

$$\beta_1 - \beta_0 k_1 = 0; \beta_1 = \beta_0 k_1$$

$$\beta_0 k_2 - 2\beta_1 k_1 + \beta_2 = 0; \beta_2 = 2\beta_1 k_1 - \beta_0 k_2 = \beta_1 k_1 - \beta_0 k_2$$

$$\beta_3 = \beta_2 k_1 - 2\beta_1 k_2 + \beta_0 k_3$$

etc. ...

Estas fórmulas pueden simplificarse si hacemos el cambio de variables:

$$t = t' - k_1$$

La función $B(t)$ se escribe entonces:

$$B(t) = \beta'_0 \varphi(t') + \frac{\beta'_1}{1!} \varphi'(t') + \frac{\beta'_2}{2!} \varphi''(t') + \dots$$

y encontramos, por un proceso similar al que hemos seguido antes de hacer el cambio de variable y de suponer que $N(t)$ se escribe sencillamente $N(t) = \alpha_0 \varphi(t)$, una serie de igualdades cuya forma general simbólica se escribe:

$$\alpha_i = (\beta^i - \mu)^i e_0$$

donde μ_i es el momento centrado de orden i de la función $\frac{p(x)}{e_0}$:

$$\mu_i = \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} (x - k_1)^i p(x) dx$$

Si, en estas igualdades, anulamos μ_1 y hacemos $N(t) = \alpha_0 \varphi(t)$, obtenemos finalmente:

$$\beta'_0 = \frac{\alpha_0}{e_0}$$

$$\beta'_1 = 0$$

$$\beta'_2 = -k_2 \beta'_0$$

$$\beta'_3 = k_3 \beta'_0$$

etc. ...

Tomando en cuenta estas relaciones entre los coeficientes de $N(t)$ y de $B(t)$ obtenemos para el número de los nacimientos en el tiempo t :

$$B(t) = \frac{\alpha_0}{e_0} \left[N(t + k_1) - \frac{k_2}{2!} N''(t + k_1) + \frac{k_3}{3!} N'''(t + k_1) - \dots \right] \quad (6)$$

y, en primera aproximación:

$$B(t) = \frac{\alpha_0}{e_0} N(t + k_1)$$

lo que nos proponíamos demostrar.^{1/}

Esta primera aproximación es en la práctica en general insuficiente como lo comprobaremos en la aplicación numérica.

Supongamos ahora que $N(t)$ sea una función exponencial y se escribe por la fórmula:

$$N(t) = N(0) e^{rt}$$

Encontramos para el número de los nacimientos:

$$B(t) = \frac{N(0)}{e_0} e^{r(t + k_1)} \left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \dots \right] \quad (7)$$

^{1/} Otra demostración basada en el uso de los operadores y de la F.G.C. figura en BOCAZ, Albino. Estadística. (Apuntes de clase). A.1/4-1. Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile, Marzo, 1960. Pág. 145.

Designamos por H la expresión:

$$H = \frac{N(0)}{e_0} \left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \dots \right]$$

obtenemos:

$$B(t) = H e^{r(t + k_1)}$$

El número de los nacimientos sigue una función exponencial, con igual tasa de incremento que el efectivo global, pero se pasa de la curva de B(t) a la de N(t) por una doble transformación: se multiplica B(t) por $\frac{N(0)}{H}$ y se hace la traslación $t=t'-k_1$.

La parte entre corchetes de H:

$$\left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \dots \right]$$

puede tener relativa importancia cuando r es mayor que 1% como lo veremos en la aplicación numérica.

En cuanto a la tasa de natalidad llega a ser:

$$b = \frac{e^{k_1 r}}{e_0} \left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \dots \right] = \frac{H e^{rk_1}}{N(0)} \quad (8)$$

La tasa de natalidad es entonces independiente del tiempo y su expresión es parecida a la que se encontró para el modelo 1:

$$b = \frac{e^{k_1 r} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \frac{k_4}{4!} r^4 + \dots}{e_0} \quad (5)$$

En la práctica estas dos fórmulas conducen a resultados muy similares.

Observaciones

1) Acabamos de ver que si los $p(x)$ son constantes y si $N(t)$ sigue con el tiempo una trayectoria exponencial el número de los nacimientos sigue la misma trayectoria que la población total pero desplazada hacia la izquierda y reducida por un coeficiente constante. Notamos que la recíproca de ese teorema no es exactamente real. Esta recíproca es la siguiente: si el número de los nacimientos sigue una trayectoria exponencial y si las tasas de supervivencia son constantes, el efectivo global de la población sigue, exactamente esta vez, la misma ley exponencial, sin ninguna reducción o desplazamiento.

En efecto, al tiempo t el número de individuos de edad x , $N(x,t)$ es:

$$N(x,t) = B(t-x) p(x) = B(t) e^{-rx} p(x)$$

y la población total:

$$N(t) = B(t) \int_0^{\infty} e^{-rx} p(x) dx$$

Al tiempo $t+1$ el número de individuos de edad x es:

$$N(x,t+1) = B(t+1-x) p(x) = B(t) e^{-r(x-1)} p(x)$$

de modo que:

$$N(x,t+1) = e^r N(x,t)$$

2) La fórmula (6) es absolutamente general, es válida aún cuando $N(t)$ sigue no solamente una ley exponencial sino también una ley logística, o una función de segundo o de tercer grado.

Curva del número de las defunciones.

Podemos considerar al número de defunciones que ocurren en el intervalo $t, t+dt$ $D(t)dt$, como la diferencia entre el número de nacimientos $B(t)$ y la derivada del efectivo de la población:

$$D(t)dt = B(t)dt - dN(t)$$

Escribamos de nuevo $B(t)$ y $N(t)$ bajo las formas:

$$B(t) = \beta_0 \phi(t) + \frac{\beta_1}{1!} \phi'(t) + \frac{\beta_2}{2!} \phi''(t) + \dots$$

$$N(t) = \alpha_0 \phi(t) = N(0) \phi(t),$$

lo que nos ha permitido llegar a las relaciones:

$$\beta_0 = \frac{N(0)}{e_0}$$

$$\beta_1 = \beta_0 k_1$$

$$\beta_2 = \beta_1 k_1 - \beta_0 k_2$$

$$\beta_3 = \beta_2 k_1 - 2\beta_1 k_2 + \beta_0 k_3$$

etc. ...

Haciendo, en estas condiciones, la diferencia $B(t) - N'(t)$ y suponiendo que $N(t)$ sigue un camino exponencial $N(t) = N(0) e^{rt}$, llegamos a la ecuación:

$$D(t) = \frac{N(0)}{e_0} e^{rt} \left[1 + \frac{r}{1!} (k_1 - e_0) + \frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) + \frac{r^3}{3!} (k_1^3 - 3k_1 k_2 + k_3) + \dots \right] \quad (9)$$

Si designamos por G la expresión:

$$G = \frac{N(0)}{e_0} \left[1 + \frac{r}{1!} (k_1 - e_0) + \frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) + \dots \right]$$

obtenemos:

$$D(t) = G e^{rt}$$

Vemos entonces que el número de defunciones sigue la misma ley exponencial que el efectivo global de la población, salvo que la curva esta reducida por el factor

$$G = \frac{N(0)}{e_0} \left[1 + \frac{r}{1!} (k_1 - e_0) + \frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) + \dots \right]$$

Las curvas de $N(t)$, $B(t)$ y $D(t)$ están representados en el gráfico en base al ejemplo numérico que se indica más adelante.

En cuanto a la tasa de mortalidad ésta se escribe:

$$d(t) = \frac{1}{e_0} \left[1 + \frac{r}{1!} (k_1 - e_0) + \frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) + \dots \right] = \frac{G}{N(0)} \quad (10)$$

La tasa de mortalidad es como la tasa de natalidad, independiente del tiempo.

Llegamos entonces a la conclusión de que una población cuyo efectivo global aumenta en forma exponencial y cuyas tasas de supervivencia permanecen constantes tiene sus tasas de natalidad y de mortalidad constantes también; el efectivo global, el número de nacimientos y de defunciones aumentan con la misma velocidad.

Estructura por edad.

La proporción de individuos de edad x en el tiempo t es:

$$c(x,t) = \frac{B(t-x)}{N(t)} p(x)$$

Si el efectivo de la población sigue una trayectoria exponencial el número de los nacimientos es dado por la ecuación (7) de modo que obtenemos:

$$c(x,t) = b e^{-rx} p(x)$$

Encontremos así la misma relación que la (1) del modelo 1, indicando que la estructura por edad x se expresa en forma independiente del tiempo.

La fórmula (3) que expresa la edad media en función de la tasa de incremento y de los cumulantes de la función $\frac{p(x)}{e_0}$ encontrada en el modelo 1 es evidentemente también válida en el presente modelo.

Tiempo para que esté alcanzado el estado estable. La noción de tasa intrínseca de natalidad y de mortalidad.

Las fórmulas encontradas en el modelo 1, se aplican exactamente, o en primera aproximación, en las condiciones supuestas para este modelo 5. Existe sin embargo una diferencia importante entre estos dos tipos de modelos. Es que en las dos primeras se supuso que la estructura por edad era constante desde el momento inicial y las relaciones fundamentales que se encontraron son válidos desde este momento.

En cambio, en el presente modelo las mismas relaciones fundamentales no se cumplen necesariamente y la estructura por edad no permanece fija necesariamente desde el momento en que se cumple la hipótesis de la constancia de $p(x)$ y de r .

Esta constancia debe haber prevalecido durante un largo período anterior para que el estado estable sea logrado. Veámoslo con un ejemplo esquemático.

Supongamos que una población se caracteriza durante unos cien años por una tasa de incremento r_1 constante y una serie $p_1(x)$ también constante. La estructura por edad al cabo de los cien años será el reflejo de esas condiciones en cuanto a su forma y tendremos una serie $c_1(x)$ constante. Las tasas de natalidad y de mortalidad, b_1 y d_1 , serán indicadas por las fórmulas (8) y (10).

Supongamos, ahora, que de manera repentina los $p_1(x)$ pasen a otros valores $p_2(x)$ mientras r_1 permanece sin alteraciones y que estas nuevas condiciones se mantengan constantes. Las tasas de natalidad y de mortalidad, y la estructura por edad se van modificando lentamente hasta que se logre el nuevo estado estable caracterizado por r_1 y $p_2(x)$ y en el cual las tasas de natalidad y de mortalidad b_2 y d_2 serán indicadas por las fórmulas (8) y (10). Durante el período transitorio las tasas b_1 y d_1 se van a modificar paulatinamente, tendiendo hacia las tasas b_2 y d_2 . Entre las dos situaciones estables las tasas b_2 y d_2 se llaman "tasas intrínsecas". Representan, en efecto, las tasas hacia las cuales tienden las de natalidad y de mortalidad si las tasas de supervivencia y la tasa de incremento observadas durante el período transitorio se mantuvieran constantes.

El tiempo que se requiere para que las tasas b_1 y d_1 alcancen, los valores b_2 y d_2 , o sea para que se logre la nueva situación estable corresponde al intervalo de tiempo que transcurre para que las primeras generaciones sometidas a la nueva ley de mortalidad $p_2(x)$ se hayan enteramente extinguido, o sea unos cien años teóricamente. Pero en la práctica el estado estable se alcanza después que las nuevas generaciones hayan alcanzado unos 50 o 60 años ya que la importancia de los efectivos mayores de esas edades en el efectivo global es en general pequeña.

Notamos que las tasas intrínsecas b_2 y d_2 no tienen necesariamente que ser alcanzadas. Pueden, en efecto, tener un valor puramente teórico; son las tasas hacia las cuales tienden asintóticamente las tasas observadas en un momento determinado en la hipótesis de que los $p(x)$ y r observados en el mismo momento se mantengan constantes en el futuro. Pero puede muy bien suceder que $p(x)$ y r varíen y que por lo tanto las tasas b_2 y d_2 no se observen nunca.

Veremos, por fin, más adelante que modificaciones en mortalidad tienen relativamente pocos efectos sobre la estructura por edad de modo que un cambio en este factor si tiene consecuencias sobre la tasa de incremento, altera en cambio muy poco la estructura por edad estable.

Aplicación numérica.

Consideramos de nuevo el ejemplo de la población de Colombia, sexo femenino, en 1950. Vamos a suponer esta vez que la población ha mantenido constantes, durante largo tiempo, sus tasas de supervivencia al nivel $e_0 = 46$ años de las tablas modelos de mortalidad y su tasa de incremento al nivel $r = 0,0275$.

1) Número de nacimientos.

El número de los nacimientos se obtiene mediante la fórmula (7):

$$B(t) = H e^{r(t + k_1)}$$

donde

$$H = \frac{N(0)}{e_0} \left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \frac{k_4}{4!} r^4 + \dots \right]$$

Al nivel $e_0 = 46$ años los 4 primeros acumulantes de la tabla modelo de mortalidad, sexo femenino, son (Tabla N° 12):

$$k_1 = 33.159$$

$$k_2 = 456.29$$

$$k_3 = 3\,630.6$$

$$k_4 = -177\,309$$

Si la población total sigue una ley exponencial $N(t) = N(0) e^{rt}$ con $N(0) = 100\,000$ y $r = 0.0275$ obtenemos

$$H = \frac{N(0)}{e_0} \left[\frac{1}{1!} - \frac{k_2}{2!} r^2 + \frac{k_3}{3!} r^3 - \frac{k_4}{4!} r^4 + \dots \right]$$

$$H_1 = \frac{N(0)}{e_0} = \frac{100\,000}{46} = 2\,174, \text{ en } 1^{\text{a}} \text{ aproximación}$$

$$H_2 = H_1 - H_1 \frac{k_2}{2!} r^2 = 1\,799, \text{ en } 2^{\text{a}} \text{ aproximación}$$

$$H_3 = H_2 + H_1 \frac{k_3}{3!} r^3 = 1\,826, \text{ en } 3^{\text{a}} \text{ aproximación}$$

$$H_4 = H_3 - H_1 \frac{k_4}{4!} r^4 = 1\,835, \text{ en } 4^{\text{a}} \text{ aproximación}$$

y para los nacimientos: $B(t) = H e^{r(t + k_1)}$

| t | 1 ^a aproximación $B(t)=H_1 e^{r(t+k_1)}$ | 2 ^a aproximación $B(t)=H_2 e^{r(t+k_1)}$ | 3 ^a aproximación $B(t)=H_3 e^{r(t+k_1)}$ | 4 ^a aproximación $B(t)=H_4 e^{r(t+k_1)}$ |
|----|--|--|--|--|
| 0 | 5 413 | 4 480 | 4 547 | 4 569 |
| 10 | 7 127 | 5 897 | 5 986 | 6 015 |
| 20 | 9 383 | 7 764 | 7 881 | 7 919 |
| 30 | 12 352 | 10 221 | 10 375 | 10 426 |
| 40 | 16 262 | 13 457 | 13 658 | 13 726 |
| 50 | 21 408 | 17 715 | 17 981 | 18 070 |

Vemos que la primera aproximación difiere bastante de las demás y que, en el caso una población similar a la de Colombia, es incorrecto decir que la curva de los nacimientos es igual a la población total reducida por la esperanza de vida al nacimiento. El factor de reducción H es algo más complejo.

2) Número de defunciones.

Aplicando la fórmula (9)

$$G = \frac{N(0)}{e_0} \left[1 + \frac{r}{1!} (k_1 - e_0) + \frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) + \frac{r^3}{3!} (k_1^3 - 3k_1 k_2 + k_3) + \dots \right]$$

$$G_1 = \frac{N(0)}{e_0} = \frac{100\ 000}{46} = 2\ 174$$

$$G_2 = G_1 + G_1 \left[\frac{r}{1!} (k_1 - e_0) \right] = 1\ 407$$

$$G_3 = G_2 + G_1 \left[\frac{r^2}{2!} (k_1^2 - k_2) \right] = 1\ 937$$

$$G_4 = G_3 + G_1 \left[\frac{r^3}{3!} (k_1^3 - 3k_1 k_2 + k_3) \right] = 1\ 897$$

y para las defunciones: $D(t) = G e^{rt}$

| t | 1 ^a aproximación $D(t) = G_1 e^{rt}$ | 2 ^a aproximación $D(t) = G_2 e^{rt}$ | 3 ^a aproximación $D(t) = G_3 e^{rt}$ | 4 ^a aproximación $D(t) = G_4 e^{rt}$ |
|----|--|--|--|--|
| 0 | 2 174 | 1 407 | 1 937 | 1 897 |
| 10 | 2 862 | 1 852 | 2 550 | 2 497 |
| 20 | 3 768 | 2 439 | 3 357 | 3 288 |
| 30 | 4 960 | 3 210 | 4 420 | 4 328 |
| 40 | 6 530 | 4 226 | 5 819 | 5 298 |
| 50 | 8 597 | 5 564 | 7 660 | 7 502 |

Las curvas del efectivo de la población, del número de los nacimientos y de las defunciones están indicadas en el gráfico 5.

Vemos en este gráfico con coordenadas semi-logarítmicas que las tres curvas de $N(t)$, $B(t)$ y $D(t)$ son paralelas, indicando así que las tasas de incremento son iguales. Puede pasarse de la curva de $D(t)$ a la curva de $N(t)$ multiplicando:

$$D(t) \text{ por } \frac{N(0)}{G}.$$

Puede también pasarse de la curva $B(t)$ a la curva de $N(t)$ por una doble transformación: debe multiplicarse

$$B(t) \text{ por } \frac{N(0)}{H},$$

y luego hacer la traslación $t = t' - k_1$. Vemos en efecto, en el gráfico, que las curvas de

$$\frac{B(t) N(0)}{H}$$

se encuentran a la izquierda de la curva de $N(t)$ y a una distancia constante $-k_1$.

3) Tasa de natalidad.

La fórmula $b = \frac{H}{N(0)} e^{rk_1}$ indica para la tasa de natalidad:

| | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 ^a aproximación | 2 ^a aproximación | 3 ^a aproximación | 4 ^a aproximación |
| $b = \frac{H_1 e^{rk_1}}{N(0)}$ | $b = \frac{H_2 e^{rk_1}}{N(0)}$ | $b = \frac{H_3 e^{rk_1}}{N(0)}$ | $b = \frac{H_4 e^{rk_1}}{N(0)}$ |

por mil 54.13 44.80 45.47 45.69

Estos resultados son similares a los obtenidos en el modelo 1, mostrando claramente que las fórmulas de los modelos 1 y 5 son equivalentes.

4) Tasa de mortalidad.

Se obtiene por la fórmula (10): $d(t) = \frac{G}{N(0)}$

1^a aproximación 2^a aproximación 3^a aproximación 4^a aproximación

$$d = \frac{G_1}{N(0)}$$

$$d = \frac{G_2}{N(0)}$$

$$d = \frac{G_3}{N(0)}$$

$$d = \frac{G_4}{N(0)}$$

por miles 21.74

14.07

19.37

18.97

5) Estructura por edad.

La proporción de individuos de edad x se calcula mediante la fórmula (1):

$$c(x) = b e^{-rx} p(x)$$

Esta fórmula fué ya utilizada en el modelo 1 (cuadro N° 2). Como los valores de b , r y $p(x)$ son iguales en ambos casos los resultados son idénticos.

1 000 000
 900 000
 800 000
 700 000
 600 000
 500 000
 400 000
 300 000
 200 000
 Log-N(t)
 Log-B(t)
 Log-D(t)

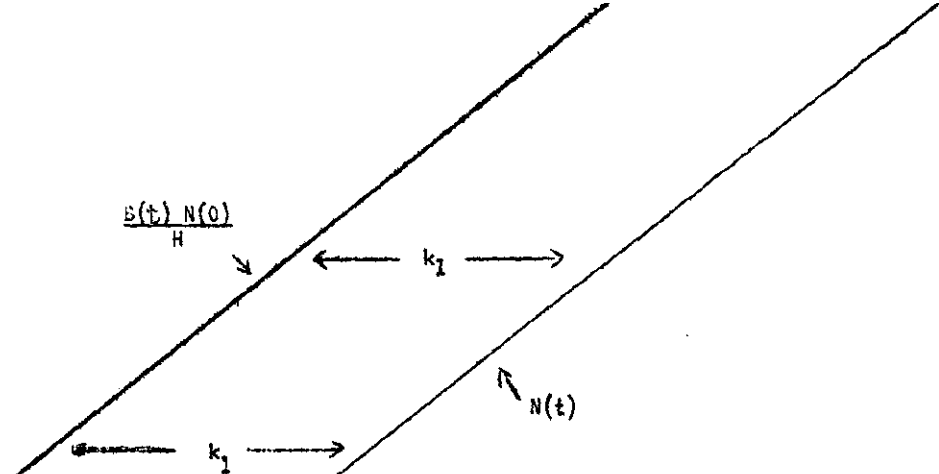
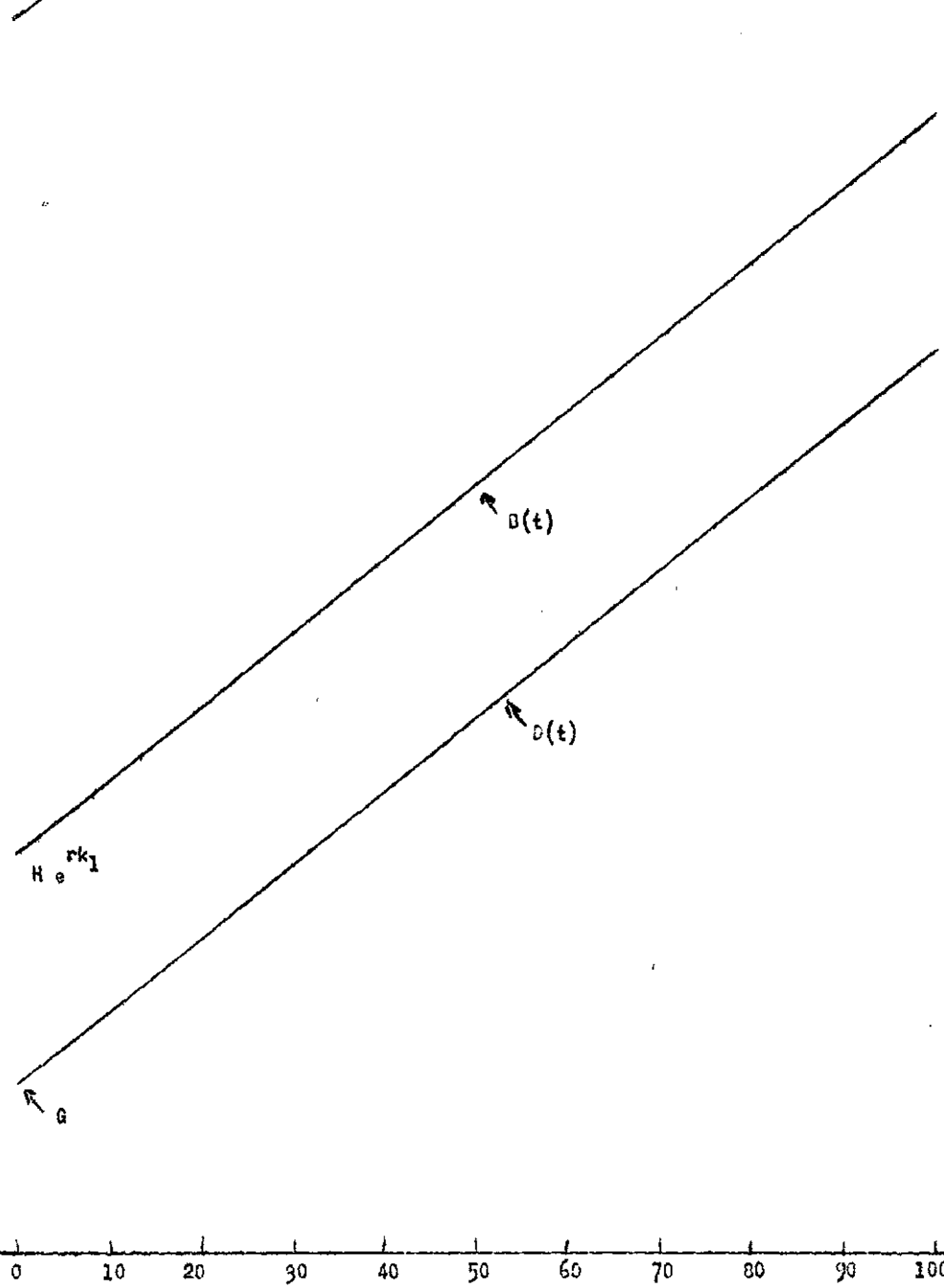


GRAFICO 5 : EVOLUCION DEL EFECTIVO GLOBAL, DEL NUMERO DE NACIMIENTOS Y DE DEFUNCIONES EN UNA POBLACION DONDE $p(x)$ Y r PERMANECEN CONSTANTES EN EL TIEMPO

100 000
 90 000
 80 000
 70 000
 60 000
 50 000
 40 000
 30 000
 20 000
 10 000
 9 000
 8 000
 7 000
 6 000
 5 000
 4 000
 3 000
 2 000
 10000



t años

II.6. Modelo 6. Poblaciones con tasas de supervivencia y tasas de natalidad constantes.

Evolución del efectivo global.

Supondremos esta vez que b y $p(x)$ son independientes del tiempo. Este caso es muy similar al que hemos considerado cuando supusimos en el modelo 3, r y $p(x)$ constantes. Hemos escrito $B(t)$ en la forma siguiente:

$$B(t) = \beta_0 \varphi(t) + \frac{\beta_1}{1!} \varphi'(t) + \frac{\beta_2}{2!} \varphi''(t) + \dots$$

Si $N(t)$ se representa por:

$$N(t) = \alpha_0 \varphi(t)$$

hemos encontrado las relaciones siguientes entre los coeficientes α_1 y β_1 :

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{e_0}$$

$$\beta_1 = \beta_0 k_1$$

$$\beta_2 = \beta_1 k_1 - \beta_0 k_2$$

$$\beta_3 = \beta_2 k_1 - 2\beta_1 k_2 + \beta_0 k_3$$

.....

Hagamos la relación $\frac{B(t)}{N(t)}$ que se supone constante e igual a b :

$$b = \frac{B(t)}{N(t)} = \frac{1}{e_0} \left[1 + k_1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + \frac{1}{2!} (k_1^2 - k_2) \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} + \dots \right]$$

Primera aproximación.

En la primera aproximación conservamos en el segundo miembro de la ecuación anterior solamente los términos hasta la primera derivada de $\varphi(t)$:

$$b = \frac{1}{e_0} \left(1 + k_1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right) = \frac{1}{e_0} \left(1 + k_1 \frac{N'(t)}{N(t)} \right)$$

que puede transformarse en:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{d \operatorname{Log} N(t)}{d t} = \frac{b e_0 - 1}{k_1}$$

y de allí:

$$N(t) = C e^{\frac{b e_0 - 1}{k_1} t}$$

donde la constante C resulta igual a $N(0)$. Es fácil verlo haciendo $t = 0$

El efectivo de la población aumenta en forma exponencial con una tasa de incremento

$$r = \frac{b e_0 - 1}{k_1} \quad (11)$$

Esta tasa de incremento es distinta de la que se encontró cuando supusimos en el modelo 1 $\phi(x)$ y $p(x)$ constantes.

Segunda aproximación.

Conservamos, en el desarrollo de b , términos hasta la segunda derivada de $\phi(t)$:

$$b = \frac{1}{e_0} \left[1 + k_1 \frac{N'(t)}{N(t)} + \frac{1}{2!} (k_1^2 - k_2) \frac{N''(t)}{N(t)} \right]$$

Nos encontramos entonces delante de la resolución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden y con coeficientes constantes. La ecuación anterior se escribe:

$$N''(t) + \frac{2 k_1}{k_1^2 - k_2} N'(t) - \frac{2 (b e_0 - 1)}{k_1^2 - k_2} N(t) = 0$$

Buscamos integrales particulares de la forma:

$$N(t) = e^{s t}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$s^2 + \frac{2k_1}{k_1^2 - k_2} s - \frac{2(b e_0 - 1)}{k_1^2 - k_2} = 0$$

Las raíces de esta ecuación de segundo grado son reales y distintas. Si s_1 y s_2 son estas raíces, la integral general tiene por expresión:

$$N(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

Las raíces s_1 y s_2 responden a la siguiente fórmula:

$$s_{1,2} = \frac{1}{k_1^2 - k_2} \left[-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 2(k_1^2 - k_2)(b e_0 - 1)} \right] \quad (12)$$

Como en la práctica s_2 , raíz negativa, es mucho mayor, en valor absoluto, a la raíz positiva s_1 , el término

$$c_2 e^{s_2 t}$$

puede en general despreciarse con respecto al término

$$c_1 e^{s_1 t}$$

Si hacemos $c_1 = N(0)$ para $t = 0$ debemos tener $c_2 = 0$. Obtenemos:

$$N(t) = N(0) e^{s_1 t}$$

donde $s_1 = r$ es la tasa de incremento de la población.

La población aumenta en forma exponencial con una tasa r .

Otras relaciones.

Ya que $p(x)$ y r son constantes volvemos al planteamiento del modelo 5 el cual, a su vez, es similar al modelo 1. Todas las relaciones que fueron encontradas para estos dos modelos son entonces también válidas en el presente esquema.

Tiempo para que esté alcanzado el estado estable.

Como en el modelo anterior el estado estable está alcanzado cuando las primeras generaciones sometidas a las condiciones previstas en las hipótesis, en cuanto a mortalidad y a natalidad, se hayan extinguido, o sea después de unos cien años. En la práctica, el nuevo equilibrio se logra de manera ya satisfactoria después de unos 50 o 60 años. Mientras tanto las tasas de incremento, de natalidad y de mortalidad que se calculan mediante las fórmulas anteriores se llaman intrínsecas. Esos valores indican los niveles a los cuales se aproximan asintóticamente las tasas observadas si las condiciones de mortalidad y de natalidad se mantuviesen constantes.

Aplicación numérica.

Consideremos de nuevo una población cuya mortalidad corresponde a la tabla modelo de mortalidad para el nivel $e_0 = 46$ años, sexo femenino, y cuya tasa de natalidad es $b = 46,33$ o/oo. Si esta población es del tipo considerado en el modelo 1, o sea si $c(x)$ y $p(x)$ son independientes del tiempo, su tasa de incremento será $r = 0.0275$, como lo hemos visto.

Supongamos que esta población mantenga constantes $p(x)$ y b , sin hacer ninguna hipótesis en cuanto a su estructura por edad. Obtenemos, al aplicar la primera aproximación de la fórmula (11), para la tasa de incremento:

$$r = \frac{b e_0 - 1}{k_1} = 0.03410$$

siendo $k_1 = 33.1759$.

Este resultado difiere bastante de la tasa de 0.0275 que se obtendría en las condiciones que prevé el modelo 1.

En segunda aproximación, aplicando la fórmula (12) obtenemos:

$$s_1 = 0.0270$$

$$s_2 = -0.1300$$

Encontramos entonces una tasa de incremento muy poco distinta de la que se obtendría si la población siguiera el modelo 1, o sea $r = 0.0275$.

II.7. Modelo 7. Poblaciones con tasas de supervivencia y tasa de mortalidad constantes.

Evolución del efectivo global.

Supongamos d y $p(x)$ independientes del tiempo. El interés de este modelo es que se considera, en el punto de partida, funciones relativas únicamente a la mortalidad. Podemos considerar que el número de defunciones que ocurren en un intervalo $t, t + dt$, $D(t)dt$, como la diferencia entre el número de nacimientos $B(t)dt$ y la derivada del efectivo de la población:

$$D(t) dt = B(t) dt - dN(t)$$

Escribamos, como en el modelo 3:

$$B(t) = \beta_0 \varphi(t) + \frac{\beta_1}{1!} \varphi'(t) + \frac{\beta_2}{2!} \varphi''(t) + \dots$$

$$N(t) = \alpha_0 \varphi(t) = N(0) \varphi(t)$$

lo que nos permitió llegar a las relaciones:

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{e_0}$$

$$\beta_1 = \beta_0 k_1$$

$$\beta_2 = \beta_1 k_1 - \beta_0 k_2$$

$$\beta_3 = \beta_2 k_1 - 2\beta_1 k_2 + \beta_0 k_3$$

Hagamos la relación $\frac{D(t)}{N(t)}$ que se supone constante e igual a d :

$$d = \frac{D(t)}{N(t)} = \frac{B(t)}{N(t)} - \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{1}{e_0} \left[1 + (k_1 - e_0) \frac{N'(t)}{N(t)} + \frac{1}{2!} (k_1^2 - k_2) \frac{N''(t)}{N(t)} + \dots \right]$$

Primera aproximación.

En primera aproximación conservamos en el segundo miembro de la ecuación anterior solamente los términos que contienen derivadas de $N(t)$ hasta la derivada prima de $N(t)$:

$$d = \frac{N(0)}{e_0} \left[1 + (k_1 - e_0) \frac{N'(t)}{N(t)} \right]$$

que puede transformarse en:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{d \operatorname{Log} N(t)}{dt} = \frac{d e_0 - 1}{k_1 - e_0}$$

y de allí:

$$N(t) = C e^{\frac{d e_0 - 1}{k_1 - e_0} t}$$

donde la constante C resulta ser igual a $N(0)$. Es fácil verlo haciendo $t = 0$.

El efectivo de la población aumenta en forma exponencial con una tasa de incremento

$$r = \frac{d e_0 - 1}{k_1 - e_0}$$

muy distinta esta vez a la que se encontró en el modelo 1 cuando se supusieron $c(x)$ y $p(x)$ constantes o en el modelo 3 cuando se supuso $p(x)$ y r constantes.

Segunda aproximación.

En el desarrollo de d , conservamos, términos hasta la segunda derivada de $N(t)$:

$$d = \frac{1}{e_0} \left[1 + (k_1 - e_0) \frac{N'(t)}{N(t)} + \frac{1}{2} (k_1^2 - k_2) \frac{N''(t)}{N(t)} \right]$$

Lo que se escribe:

$$N''(t) + \frac{2(k_1 - e_0)}{k_1^2 - k_2} N'(t) - \frac{2(d e_0 - 1)}{k_1^2 - k_2} N(t) = 0$$

La ecuación característica de esta ecuación diferencial lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes, se escribe, al buscar integrales particulares de la forma $N(t) = e^{st}$:

$$s^2 + \frac{2(k_1 - e_0)}{k_1^2 - k_2} s - \frac{2(d e_0 - 1)}{k_1^2 - k_2} = 0$$

En la práctica las raíces de esta ecuación son imaginarias. Las escribiremos en la forma:

$$s_1 = \alpha + i\beta \qquad s_2 = \alpha - i\beta$$

donde:

$$\alpha = \frac{e_0 - k_1}{k_1^2 - k_2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{k_1^2 - k_2} \sqrt{(k_1 - e_0)^2 + 2(k_1^2 - k_2)(d e_0 - 1)}$$

La integral general puede escribirse sin ningún símbolo imaginario:

$$N(t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

donde A y B son dos constantes arbitrarias. Como $t = 0$ $N(0) = 1$ y A es entonces igual a 1. Las raíces complejas introducen oscilaciones en la evolución del número de los nacimientos. Como $\alpha > 0$ la amplitud de las oscilaciones va aumentando de período en período. Es inútil seguir más adelante la demostración ya que vemos que la hipótesis de la constancia de las funciones de mortalidad d y $p(x)$ no son suficientes para que la población se asemeje a los modelos anteriores. No estamos ya en las condiciones de las poblaciones "estables" y las relaciones entre los componentes varían de manera compleja a medida que transcurre el tiempo. Una comprobación de eso resulta del hecho que no se puede proyectar una población para la cual se conoce solamente los $p(x)$ y d .

II.8. Modelos 8, 9 y 10. Poblaciones con tasas de natalidad y de mortalidad constantes, o con tasas de natalidad y de incremento constantes, o con tasas de mortalidad y de incremento constantes.

Estos casos no requieren muchas explicaciones. El hecho mismo de que ninguna de las funciones supuestas constantes en las hipótesis se expresan en función de la edad implica que no se puede determinar las funciones que precisamente dependen de la edad, o sea la estructura por edad y las tasas de supervivencia. Suponer que una población tenga sus tasas de natalidad y de mortalidad constantes, por ejemplo, no permite afirmar que en esta población la estructura por edad y las tasas de supervivencia permanecen sin alteraciones con el tiempo. Sería fácil mostrarlo con un ejemplo numérico.

III. POBLACIONES PARA LAS CUALES SE CONOCE LA LEY DE FECUNDIDAD.

III.1. Modelo 11. Poblaciones con tasas de fecundidad por edades y tasas de supervivencia constantes.

Se trata, con estas hipótesis, del esquema clásico llamado por A. Lotka "poblaciones con estructuras por edades estables".

Evolución del efectivo global, del número de los nacimientos y de las defunciones.

Consideramos mujeres nacidas durante el intervalo de tiempo $(t-x, t-x+dx)$. Al nacimiento el número de esas mujeres fué $B(t-x) dx$. Durante el intervalo de tiempo $(t, t+dt)$, cuando esas mujeres alcanzaron una edad comprendida entre $x-dx$ y $x+dx$ el número de ellas que sobrevivieron es $B(t-x) p(x,t) dx$ y el número de hijas tenidas es $B(t-x) p(x,t) \varphi(x,t) dx dt$, donde $p(x,t)$ es la tasa de supervivencia para la edad x en el tiempo t y $\varphi(x,t)$ la tasa de fecundidad femenina para esa misma edad y en el mismo tiempo. Supondremos, en este modelo, que las funciones $\varphi(x,t)$ y $p(x,t)$ han quedado siempre independientes del tiempo y escribiremos sólo $\varphi(x)$ y $p(x)$.

Si integramos con respecto a x , entre 15 y 50 años, el producto $B(t-x) \varphi(x) p(x) dx dt$, obtenemos la ecuación de Lotka:

$$B(t) = \int_{15}^{50} B(t-x) \varphi(x) p(x) dx \quad (13)$$

Esta ecuación indica que las funciones $\varphi(x)$ y $p(x)$ intervienen siempre por sus productos en lo que se refiere a la variación de los nacimientos.

Es evidente que la función $B(t)$, aunque casi seguramente continua, no puede expresarse por la misma función de t en cada punto de su desarrollo. Una única función utilizada entre las edades extremas de la fecundidad no puede pretender más que una representación aproximada de $B(t)$. Sin embargo, esta hipótesis es muy cómoda y la adoptaremos, suponiendo que la misma función para $B(t)$ puede substituirse en ambos lados de la ecuación anterior. Para esto escribamos que $B(t)$ puede expresarse por una serie de exponenciales:

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots \quad (14)$$

de modo que la ecuación (13) se escribe:

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} \int_{15}^{50} e^{-r_1 x} \varphi(x) p(x) dx + Q_2 e^{r_2 t} \int_{15}^{50} e^{-r_2 x} \varphi(x) p(x) dx + \dots \quad (15)$$

Identificando término a término los coeficientes de $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$, ... en los miembros derechos de las ecuaciones (14) y (15) llegamos a:

$$\int_{15}^{50} e^{-r_n x} \varphi(x) p(x) dx = 1$$

donde $n = 1, 2, \dots$

Verificando esta igualdad para r_1, r_2, \dots se llega a la conclusión que las constantes r_n son raíces de la ecuación:

$$\int_{15}^{50} e^{-rx} \varphi(x) p(x) dx = 1 \quad (16)$$

que admite una sola raíz real ρ que se verifica para un determinado valor de r y no se verifica para un valor diferente. En efecto, sea ρ' una raíz real. Si $\rho' > \rho$ tendremos:

$$e^{-\rho' x} \varphi(x) p(x) < e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) \text{ y entonces } \int_{15}^{50} e^{-\rho' x} \varphi(x) p(x) dx < 1$$

Análogamente esta integral es mayor que 1 para $\rho' < \rho$.

La ecuación (16) admite un número infinito de raíces complejas, que toman la forma:

$$\rho_n = u_n + i v_n \quad \text{con} \quad i = \sqrt{-1}$$

Escribiendo estas raíces bajo la forma trigonométrica, aplicando la fórmula de Euler, tenemos:

$$e^{\rho_n t} = e^{u_n t} (\cos v_n t + i \operatorname{sen} v_n t)$$

La ecuación (15) llega entonces a escribirse:

$$B(t) = Q_0 e^{\rho t} + \sum_{n \neq \rho} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t + i \sum_{n \neq \rho} Q_n e^{u_n t} \operatorname{sen} v_n t$$

Como $B(t)$ es necesariamente real y en la práctica u_n es negativo el límite de esta expresión, cuando t tiende hacia el infinito es:

$$B(t) = Q \rho e^{\rho t}$$

Así vemos que las raíces complejas introducen oscilaciones en la evolución del número de nacimientos. El término

$$\sum_{n \neq \rho} Q_n e^{u_n t} \cos v_n t$$

expresa esas oscilaciones que van amortiguándose alrededor del término aperiódico $Q \rho e^{\rho t}$. Después de este momento los nacimientos siguen una ley exponencial. Veremos, en la aplicación práctica, cuanto tiempo se necesita para que las oscilaciones desaparezcan.

Si usamos esta ecuación para los nacimientos en la expresión del efectivo total de la población:

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-x) p(x) dx$$

$$N(t) = Q \rho e^{\rho t} \int_0^{\infty} e^{-\rho x} p(x) dx = K e^{\rho t}$$

donde

$$K = Q \rho \int_0^{\infty} e^{-\rho x} p(x) dx$$

En cuanto a los coeficientes Q_n ellos dependen de las condiciones iniciales en las que se encuentra la población.

Así los nacimientos y el efectivo total aumentan en forma exponencial con igual tasa de incremento. La tasa de natalidad es entonces constante y nos encontramos en las mismas condiciones que en el modelo 6, en el cual supusimos $p(x)$ y b independientes del tiempo, semejante a su vez a los modelos 1, 2, 3 y 5, como lo hemos visto anteriormente. Las relaciones que hemos encontrado en estos modelos se aplican entonces anteriormente a este caso, reemplazando r por ρ .

La tasa intrínseca de incremento.

La tasa de incremento ρ tiene las propiedades siguientes:

- es independiente de la estructura por edad del momento inicial, o de cualquier otro momento ya que depende solamente de las funciones

$\Psi(x)$ y $p(x)$ entre las edades 15 y 50 años.

- mide la velocidad de aumento del efectivo de la población, del número de nacimientos y de defunciones, desde el momento en que se alcanza el equilibrio estable. Es entonces un valor asintótico, similar en su significación a la tasa intrínseca de incremento definida en el modelo 5.

La tasa neta y bruta de reproducción.

Designamos por Ψ la función:

$$\Psi = \int e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) dx$$

Si hacemos $\rho = 0$ obtenemos una expresión $\Psi = R = \int \varphi(x) p(x) dx$ que se llama "tasa neta de reproducción". Su cálculo consiste en la suma de los productos $\varphi(x) p(x)$ de las tasas de fecundidad por edades, por las tasas de supervivencia. Es entonces una tasa estandarizada de fecundidad, tomando como población tipo los números de mujeres supervivientes que indica la tabla de mortalidad.

Notamos que R se presenta bajo la forma de una suma de productos de las funciones $\varphi(x)$ y $p(x)$, consideradas en las hipótesis, y es entonces independiente de la estructura por edad de la población. Una vez que en las hipótesis se fijan $\varphi(x)$ y $p(x)$ R queda también implícitamente determinado.

Como $\varphi(x)$ y $p(x)$ son independientes del tiempo, R también tiene esa característica, al igual que la tasa intrínseca de incremento.

Relación entre la tasa de reproducción y la tasa intrínseca de incremento.

Llamamos \bar{x}_n la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos. Tiene por expresión:

$$\bar{x}_n = \frac{\int x e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) dx}{\int e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) dx}$$

ya que el número de madres de edad $(x, x+dx)$ en el tiempo t es:

$$N(t) c(x) \varphi(x) dx = N(t) b e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) dx$$

y que el número de años vividos por esas madres al momento t es:

$$x N(t) c(x) \varphi(x) dx = N(t) x b e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) dx$$

Ahora bien, $M''(t)$ función generadora de los momentos (F.G.M.) de la función

$$\frac{\varphi(x) p(x)}{R}$$

se escribe, tomando para la variable auxiliar $t = -\rho$:

$$M''(-\rho) = \frac{1}{R} \int e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) dx$$

y la función generadora de los cumulantes (F.G.C.):

$$K''(-\rho) = \text{Log} \int e^{-\rho x} \varphi(x) p(x) dx - \text{Log} R$$

de modo que:

$$\frac{d M''(-\rho)}{M''(-\rho) d\rho} = \frac{d \text{Log} M''(-\rho)}{d\rho} = \frac{d K''(-\rho)}{d\rho} = - \bar{x}_m$$

Si se toma en cuenta la fórmula (16) en las expresiones de la F.G.M. y de la F.G.C. se tiene:

$$M''(-\rho) = \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad K''(-\rho) = - \text{Log} R$$

Llamamos T la expresión:

$$T = \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \bar{x}_m d\rho \quad (17)$$

designada por Lotka "intervalo medio entre dos generaciones" y cuya significación veremos más adelante.

Al integrar las expresiones que figuran en las igualdades:

$$\frac{d \text{Log} M''(-\rho)}{d\rho} = \frac{d K''(-\rho)}{d\rho} = - \bar{x}_m$$

se tiene:

$$K''(-\rho) = - \text{Log} R = -\rho T$$

y finalmente

$$R = e^{\rho T} \quad (18)$$

Obtenemos así una relación de importancia fundamental entre la tasa neta de reproducción y la tasa intrínseca de incremento.

Podemos escribir bajo otras formas \bar{x}_m y T tomando en cuenta la definición de la F.G.C.:

$$K''(-\rho) = -\frac{k''_1 \rho}{1!} + \frac{k''_2 \rho^2}{2!} - \frac{k''_3 \rho^3}{3!} + \dots = \sum \frac{(-\rho)^i}{i!} k''_i$$

donde k''_i es el cumulante de orden i de la función $\frac{\varphi(x) p(x)}{R}$.

Con esta manera de escribir $K''(-\rho)$ obtenemos:

$$\bar{x}_m = -\frac{1}{\rho} \sum \frac{(-\rho)^i}{(i-1)!} k''_i \quad (19)$$

$$T = -\frac{1}{\rho} \sum \frac{(-\rho)^i}{i!} k''_i \quad (20)$$

y

$$-\text{Log } R = \sum \frac{(-\rho)^i}{i!} k''_i \quad (21)$$

Recordemos que existe entre los momentos ν''_i y los cumulantes k''_i de la función

$$\frac{\varphi(x) p(x)}{R}$$

las relaciones siguientes:

$$k''_1 = \nu''_1$$

$$k''_2 = \nu''_2 - k''_1^2$$

$$k''_3 = \nu''_3 - k''_1 (\nu''_2 + 2 k''_2)$$

$$k''_4 = \nu''_4 - k''_1 (\nu''_3 + 3 k''_3) - 3 \nu''_2 k''_2$$

etc.....

y en forma más general la ecuación de recurrencia

$$V_i^n - k_i^n = \sum_1^{i-1} C_j^{i-1} V_j^n k_{i-j}^n$$

donde C_1^{i-1} es el número de combinaciones de j números tomados en grupos de $i - 1$ veces.

Significación del intervalo medio entre dos generaciones.

La tasa neta de reproducción puede considerarse como la relación entre el número de los nacimientos ocurridos en el tiempo t , $B(t)$, y el número de nacimientos ocurridos θ años atrás $B(t - \theta)$:

$$R = \frac{B(t)}{B(t - \theta)}$$

Como los nacimientos siguen una trayectoria exponencial, con una tasa de incremento ρ , la relación anterior se escribe:

$$\frac{B(t)}{B(t - \theta)} = \frac{B(0) e^{\rho t}}{B(0) e^{\rho(t - \theta)}} = e^{\rho \theta}$$

La comparación de (18) y de esta última relación nos permite escribir:

$$\theta = T \quad R = \frac{B(t)}{B(t - T)} \quad (22)$$

La tasa neta de reproducción en el tiempo t es igual a la relación entre los nacimientos ocurridos en el tiempo t y los nacimientos que hubieran ocurrido T años atrás en el supuesto que la fecundidad y la mortalidad hubieran permanecido constantes.

Vemos así que la expresión T llamada clásicamente "intervalo medio entre dos generaciones" se confunde con el intervalo de tiempo que se necesita para que el número de los nacimientos sea multiplicado por el coeficiente R , en el caso de que permanezcan constantes las tasas de fecundidad por edades y las probabilidades de sobrevivencia.

Siendo T dependiente de los cumulantes de la función

$$\frac{\psi(x) p(x)}{R}$$

el valor que toma varía según los niveles de $\psi(x)$ y de $p(x)$ durante el periodo fértil de las mujeres. Pero, en la práctica, T varía en general muy poco: entre los límites 27 y 30 años como lo comprobaremos más adelante. Su valor es muy parecido al de la edad media de las madres al nacimiento de sus hijos \bar{x}_m cuya fórmula se escribe:

$$\bar{x}_m = -\frac{1}{\rho} \sum \frac{(-\rho)^i}{(i-1)!} k_i$$

La expresión de \bar{x}_m es exactamente igual a la de \bar{x} salvo que en la primera aparecen los cumulantes k_i de la función

$$\frac{p(x) \psi(x)}{R}$$

y en la segunda los cumulantes k_i de la función $\frac{p(x)}{e_0}$.

La diferencia $\bar{x}_m - T$, es en primera aproximación:

$$\bar{x}_m - T = -\frac{\rho}{2} k_2$$

Esta diferencia es siempre negativa cuando ρ es positivo. En la práctica k_2 es del orden de 50 años, ρ pasa raras veces del 3 %, de modo que $\bar{x}_m - T$ parece tener un máximo de -1 año.

El orden de crecimiento de los factores cuando ρ es positivo es el siguiente:

$$\bar{x}_m < T < k_1$$

Si $\rho = 0$ tenemos: $\bar{x}_m = T = k_1$ y si ρ es negativo: $k_1 < T < \bar{x}_m$

Hagamos una observación que merece interés. La ecuación (22) nos indica que la tasa neta de reproducción mide la variación de los nacimientos - y también del efectivo de la población ya que éste evoluciona al mismo ritmo que los nacimientos - durante el intervalo de tiempo T , al suponer que las funciones $\psi(x)$ y $p(x)$ permanecen constantes. En cuanto a la tasa intrínseca de incremento, mide también el aumento o disminución de los nacimientos o de la población en el supuesto que $\psi(x)$ y $p(x)$ permanecen también constantes, pero esta vez durante el intervalo de tiempo dt y no durante el intervalo T . En la práctica ρ mide la variación durante un año y R durante T años, en las mismas condiciones de fecundidad y de mortalidad.

La solución de Lotka.

La solución propuesta por Lotka, para determinar la tasa intrínseca de incremento, consiste en conservar los términos de segundo grado en la parte derecha de la ecuación

$$- \text{Log } R = \sum \frac{(-x)^i}{i} k_i'' \quad (23)$$

anulando los términos siguientes. Esto supone que el producto $\varphi(x) p(x)$ sigue una trayectoria normal de Laplace - Gauss. En realidad $\varphi(x) p(x)$ no es normal, pero no difiere suficientemente, por lo general, como para descartar esta hipótesis. Obtenemos entonces una ecuación de segundo grado en φ cuyas raíces son:

$$\varphi = \frac{k_1'' \pm \sqrt{k_1''^2 - 2 k_2'' \text{Log } R}}{k_2''}$$

Se toma, en esta fórmula, la raíz que contenga el signo negativo delante del radical. Esta es la solución propuesta por Lotka.

La solución de Wicksell. Comparación con la de Lotka.

Una solución de la ecuación (16), diferente de la de Lotka, fué propuesta por Wicksell en 1931 ^{1/} al suponer que el producto $\varphi(x) p(x)$ puede ser representado por una curva de frecuencia de Pearson, tipo III, en lugar de una curva de Laplace - Gauss. Usando los mismos símbolos que anteriormente, el producto $\varphi(x) p(x)$ se escribe, en este caso:

$$\varphi(x) p(x) = R \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}$$

con

$$\alpha = \frac{k_1''}{k_2''} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{k_1''^2}{k_2''} = k_1'' \alpha$$

^{1/} S.D. Wicksell. Nuptiality, fertility and reproductivity
Skandinavisk actuaritidskrift, 1931.

Se reemplaza esta expresión de $\psi(x)$ $p(x)$ en la ecuación

$$\int_0^{\infty} \psi(x) p(x) dx = 1$$

y se integra. Se llega entonces a la solución:

$$\rho' = \gamma \left[\frac{1}{R^3} - 1 \right]$$

que es la solución de Wicksell.

La solución ρ de Lotka y la solución ρ' de Wicksell no difieren mucho en la práctica 1/.

En efecto la fórmula:

$$\rho = \frac{k_1'' - \sqrt{k_1''^2 - 2 k_2'' \text{Log } R}}{k_2''}$$

se escribe:

$$\rho = \gamma \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\beta} \text{Log } R} \right]$$

Para comparar estas dos soluciones desarrollamos ρ y ρ' en serie; obtenemos:

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta} \text{Log } R + \frac{\gamma}{2\beta^2} \text{Log}^2 R + \frac{\gamma}{2\beta^3} \text{Log}^3 R + \dots$$

$$\rho' = \frac{\gamma}{\beta} \text{Log } R + \frac{\gamma}{2\beta^2} \text{Log}^2 R + \frac{\gamma}{6\beta^3} \text{Log}^3 R + \dots$$

La diferencia $\rho - \rho'$ es de tercer orden y se escribe:

$$\rho - \rho' = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\beta^3} \text{Log}^3 R$$

1/ L. Henry y P. Vincent.- Rythme maximum d'accroissement d'une population stable. Population - Paris. 1947. 662-680

La diferencia relativa se escribe, si tomamos en el denominador la parte principal de ρ , o sea $\rho = \frac{\beta}{3} \text{Log } R$:

$$\frac{f - \rho_1}{\rho} = \frac{\text{Log}^2 R}{3\beta^2}$$

De hecho para la mayoría de los países que se encuentran en una situación estable, o cercana a ésta, β es del orden 16 o 17 y no es nunca menor de 15; en tonces:

$$\frac{f - \rho_1}{\rho} < \frac{\text{Log}^2 R}{600}$$

Esta diferencia relativa es muy pequeña, aún cuando R es grande y muestra que las soluciones de Lotka y de Wicksell son muy parecidas. Puede adoptarse para el cálculo de ρ la una o la otra de esas ecuaciones sin introducir errores sensibles.

Notamos que se podría también llegar a la solución de Wicksell por medio de la función generadora de los momentos de la distribución:

$$f(x) p(x) = R \frac{\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\beta x}$$

Esta función es

$$M(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\beta}$$

Si en esta ecuación se hace $t = -r$ y si se identifica $M(-r)$ con $\frac{1}{R}$, como lo hemos ya visto en la página 66, se llega a la relación de Wicksell $\frac{1}{R}$.

1/ Ver: BOCAZ, A. Estadística (Apuntes de clase) A.1/4-1, Centro Latinoamericano de Demografía. Santiago, Marzo de 1960, página 143.

Relación entre la tasa de natalidad y la tasa neta de reproducción.

Restando las ecuaciones (21) y (5) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\text{Log} \left(b \frac{e_0}{R} \right) &= \sum_i \frac{(-\rho)^i}{i!} (k_i - k''_i) \\
 b &= \frac{R}{e_0} e^{-\sum_i \frac{(-\rho)^i}{i!} (k_i - k''_i)} \quad (23)
 \end{aligned}$$

Como, en la práctica, los cumulantes de la función

$$\frac{\psi(x) p(x)}{R}$$

son relativamente de poca importancia con respecto a los cumulantes

$$\frac{p(x)}{e_0}$$

por lo menos a partir de $i = 2$, la ecuación (23) puede escribirse bajo la forma aproximada:

$$b = \frac{R}{e_0} e^{-\sum_i \frac{(-\rho)^i}{i!} (k_i - k''_i)} \quad (24)$$

Una aproximación más gruesa, pero a veces suficiente, haciendo

$$\text{Log} \left(b \frac{e_0}{R} \right) = 0 \quad (25)$$

ya que los términos sucesivos que figuran en el exponente son alternativamente negativos y positivos, conduce a la relación siguiente entre la tasa de natalidad, la esperanza de vida al nacimiento y la tasa neta de reproducción:

$$b = \frac{R}{e_0}$$

Las fórmulas (23), (24) y (25) permiten pasar de una tasa de natalidad a una tasa neta de reproducción, o viceversa.

La fórmula (5) del modelo 1 nos había indicado que puede obtenerse la tasa de natalidad de una población estable conociendo solamente la tasa de incremento y las tasas de sobrevivencia. Vamos, ahora, que el cálculo de la tasa neta de reproducción de una población estable exige disponer, además, de algunos datos acerca de la repartición de los nacimientos según la edad de las madres, salvo si se utiliza la fórmula abreviada (25). En consecuencia dos poblaciones estables que tienen la misma tabla de vida no tendrán por lo tanto necesariamente igual tasa neta de reproducción. Sucederá así solamente si tienen igual repartición de los nacimientos según las edades de las madres.

La medida de la tasa de reproducción mediante la estructura por edad.

El índice de Thompson.

Puede demostrarse que la tasa neta de reproducción es equivalente a la relación siguiente:

$$R = \frac{q_1}{q_2} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} c(x) dx}{\int_{\beta_1}^{\beta_2} c(x) dx} \quad / \quad \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(x) dx}{\int_{\beta_1}^{\beta_2} p(x) dx}$$

donde α_1 y α_2 son límites de edades jóvenes y β_1 y β_2 límites de edades de mujeres en edad de reproducción. En la mayoría de los casos se elige en edades cumplidas $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 4$ $\beta_1 = 15$ y $\beta_2 = 49$.

Una demostración de esta relación que se revela de gran interés para los países donde las estadísticas vitales son deficientes, ya que permite el cálculo de la tasa neta de reproducción mediante datos censales, se indica en el Apéndice.

Notamos que una vez estimada R mediante la estructura por edad puede pasarse a la estimación de la tasa de natalidad con la fórmula (25).

Posición respectiva de la tasa neta de reproducción y de la tasa intrínseca de incremento.

Designamos por Ψ la función:

$$\Psi = \int e^{-rx} \psi(x) p(x) dx$$

Sabemos ya que ρ es la raíz real de esta ecuación cuando $\Psi = 1$. Derivamos Ψ con respecto a la variable r:

$$\frac{d\Psi}{dr} = - \int x e^{-rx} \psi(x) p(x) dx$$

La función Ψ se confunde con R cuando $r = 0$.

La derivada de Ψ es necesariamente negativa ya que todo los términos que figuran dentro del integral son positivos. Ψ es entonces una función decreciente de r .

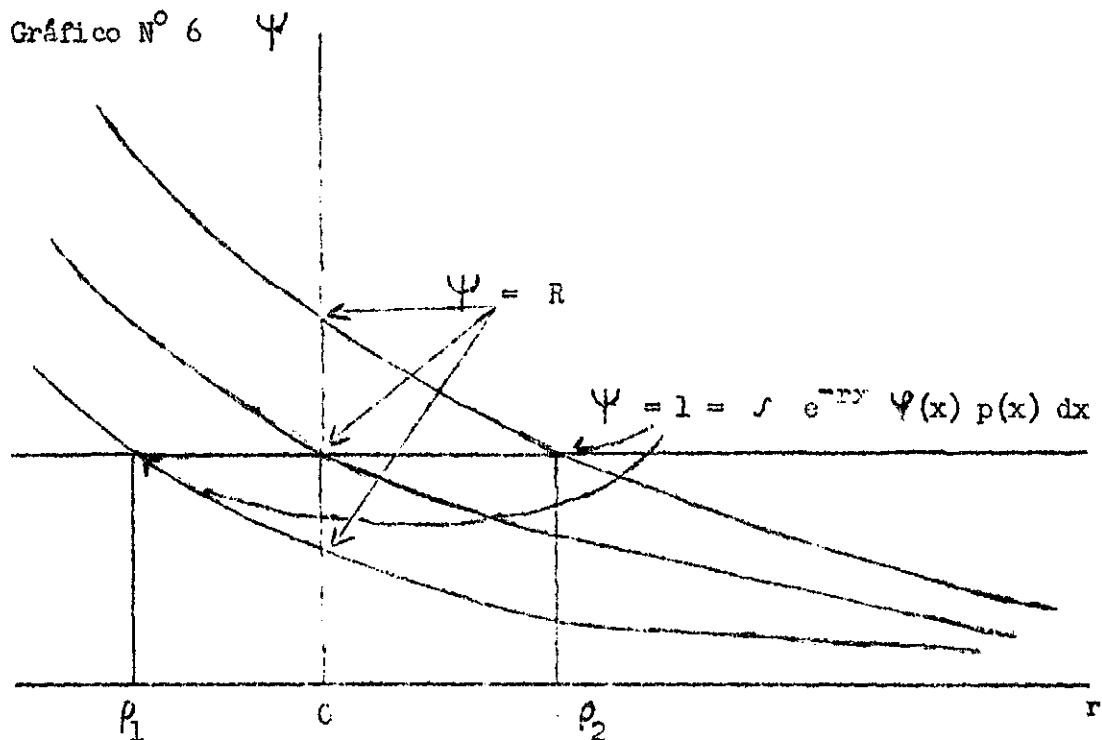
Por otra parte tenemos:

$$\Psi = 0 \quad \text{cuando } r = +\infty$$

$$\Psi = +\infty \quad \text{cuando } r = -\infty$$

$$\Psi = R \quad \text{cuando } r = 0$$

La curva de Ψ puede adoptar las tres formas que



indica el gráfico 6: puede cortar el eje de las ordenadas arriba del punto 1 o en este mismo punto o por debajo.

Cuando la curva de Ψ corta el eje de las ordenadas por arriba de 1 cruza entonces la línea horizontal de ordenada 1 en un punto que corresponde a un valor de ρ necesariamente positivo. Cuando la curva de Ψ corta el eje de las ordenadas en el punto 1 Ψ se confunde entonces a la vez con R y con 1: $\Psi = R = 1$. Cuando Ψ corta el eje de las ordenadas por abajo de 1 cruza la línea horizontal de ordenada 1 en un punto que corresponde a un valor de ρ necesariamente negativo.

Tenemos entonces:

$$\rho > 0 \quad \text{para } R > 1$$

$$\rho = 0 \quad \text{para } R = 1$$

$$\rho < 0 \quad \text{para } R < 1$$

Relación entre la tasa bruta de reproducción y la tasa neta de reproducción.

Veamos una relación interesante entre la tasa bruta y la tasa neta de reproducción. Esta relación ha sido aplicada muy a menudo en la construcción de las poblaciones modelos que figuran en la segunda parte de este trabajo.

Recordemos las fórmulas de las tasas brutas y netas de reproducción:

$$R' = \int_0^{\infty} \varphi(x) \, dx$$

$$R = \int_0^{\infty} \varphi(x) p(x) \, dx$$

Hagamos el supuesto de que la función de supervivencia sea lineal entre las edades límites de la reproducción o sea más o menos entre 15 y 50 años, para las mujeres. Esta hipótesis parece aceptable en primera aproximación para los distintos niveles de mortalidad que pueden encontrarse. Formulamos la hipótesis de la manera siguiente:

$$p(x) = p(x_0) \left[1 - \beta (x - x_0) \right]$$

donde β es un parámetro y x_0 una edad cualquiera entre 15 y 50 años. La tasa neta de reproducción llega entonces a escribirse

$$R = \int_0^{\infty} p(x_0) \left[1 - \beta (x - x_0) \right] \varphi(x) \, dx$$

Llamemos δ la edad definida de la manera siguiente:

$$\delta = \frac{\int_0^{\infty} x \varphi(x) \, dx}{\int_0^{\infty} \varphi(x) \, dx} \quad (26)$$

δ es el momento de orden 1 de la función

$$\frac{\varphi(x)}{R'}$$

Según la expresión (26) la edad δ indica la edad media de las madres en una población teórica que tuviera la fecundidad que indican las tasas $P(x)$ pero que comprendería igual número de mujeres en cada año de edad durante el período fértil.

En la práctica δ tiene un valor cercano al intervalo medio entre dos generaciones T o al de la edad media de las madres \bar{x}_m . Tenemos $(\bar{x}_m < T < \delta)$ si $\rho > 0$ y $T < \bar{x}_m < \delta$ si $\rho < 0$.

Podemos, en la ecuación de R , igualar δ con x_0 , ya que x_0 es un valor cualquiera entre 15 y 30 años. Haciendo esta substitución encontraremos:

$$R = R' p(\delta) \quad (27)$$

Vemos que con la aproximación hecha $p(x)$ lineal durante el período fértil, la tasa neta de reproducción es el producto de la tasa bruta de reproducción por la probabilidad de supervivencia a una edad próxima a la edad media de las madres.

La utilidad práctica de esta relación es triple:

1) Pasar rápidamente de una tasa bruta de reproducción a una tasa neta conociendo únicamente la probabilidad de supervivencia a la edad δ , o sea a una edad comprendida entre 28 y 30 años en casi todas las poblaciones.

Indicamos, a continuación, con tres ejemplos, los valores de la tasa neta de reproducción obtenidos según el cálculo completo y según la fórmula aproximada (27)

| | $e_0 = 30$ | $e_0 = 40$ | $e_0 = 55$ |
|---|------------|------------|------------|
| Tasa bruta de reproducción + | 3,50 | 3,50 | 3,50 |
| Tasa neta de reproducción según cálculo completo ++ | 1.608 | 2.073 | 2.685 |
| Edad δ | 30.30 | 30.30 | 30.30 |
| $p(\delta)$ +++ | 0.46066 | 0.59324 | 0.76839 |
| Tasa neta de reproducción según fórmula (27) | 1.612 | 2.076 | 2.689 |

- + Las tasas de fecundidad por grupos de edad de 15-19 años en adelante son: 94.6 ; 302.0 ; 335.9 ; 298.1 ; 241.3 ; 126.5 ; 36.6.
- ++ Las probabilidades de supervivencia de las mujeres utilizadas en el cálculo, corresponden a las tablas modelos de mortalidad.
- +++ Valor interpolado para la edad $\delta = 30.30$ en las tablas modelos de mortalidad.

Notamos que esta relación es válida en cualquier tipo de población, ya sea estable o no, ya que por definición, las tasas de reproducción no son influidas por las estructuras por edades y dependen únicamente de las condiciones del momento en cuanto a la fecundidad y la mortalidad. No importa, entonces, que las tasas de fecundidad y de mortalidad hayan cambiado en el pasado.

2) Facilitar los cálculos cuando se desea encontrar una serie de tasas netas de reproducción mediante una misma tabla de fecundidad y diferentes niveles de mortalidad. De esta manera, podemos apreciar rápidamente el efecto de una modificación de la mortalidad sobre el nivel de la tasa neta de reproducción.

Un ejemplo de cálculo de este tipo está indicado en el cuadro N° 8 para Chile. Se ha tomado la tabla de fecundidad corregida del subregistro de los nacimientos de Chile, en 1952 y se ha multiplicado la tasa bruta de reproducción ($R' = 2.389$) por las probabilidades de supervivencia a los 30 años de las diferentes tablas modelos de mortalidad.

Este cálculo nos indica como tendrá que variar la tasa neta de reproducción de Chile en caso que la fecundidad se mantenga constante y que la mortalidad siga bajando. Obtenemos así un límite superior a la tasa neta de reproducción para Chile ya que es poco probable que la fecundidad aumente.

Cuadro N° 8

EFEECTO DE UNA MODIFICACION DE LA MORTALIDAD SOBRE LA TASA NETA DE REPRODUCCION (LA TABLA DE FECUNDIDAD UTILIZADA ES LA DE CHILE EN 1952. LAS TABLAS DE MORTALIDAD, CARACTERIZADAS POR LAS ESPERANZAS DE VIDA AL NACIMIENTO SON LAS TABLAS MODELOS)

| e_0 | R | e_0 | R |
|-------|-------|-------|-------|
| 30 | 1.109 | 52 | 1.761 |
| 32 | 1.175 | 54 | 1.813 |
| 34 | 1.239 | 56 | 1.866 |
| 36 | 1.302 | 58 | 1.917 |
| 38 | 1.364 | 60 | 1.969 |
| 40 | 1.424 | 62 | 2.021 |
| 42 | 1.483 | 64 | 2.072 |
| 44 | 1.540 | 66 | 2.124 |
| 46 | 1.597 | 68 | 2.174 |
| 48 | 1.653 | 70 | 2.222 |
| 50 | 1.707 | | |

3) Otra utilidad de la relación (27) es la de permitir la estimación de la tasa intrínseca de incremento sin la obligación de pasar por los largos cálculos de los momentos y de los cumulantes de la función

$$\frac{\psi(x) p(x)}{R}$$

como lo ha mostrado A.J. Coale ^{1/}.

El procedimiento es el siguiente:

- Se suponen conocidos los valores de B y R'. Puede, por lo tanto, estimarse:

$p(\delta)$ mediante la fórmula (2i).

Luego se busca, en la tabla de mortalidad el valor de δ que corresponde al valor de $p(\delta)$ estimado

Finalmente se determina ρ en base de la fórmula (1a):

$$R = e^{\rho T}$$

donde se substituye T por δ . Esta substitución es aceptable ya que sabemos que δ difiere poco de T.

Comprobemos este procedimiento abreviado en el caso de Chile, año 1952:

Tenemos:

$R' = 2.380$ (valor calculado después de la corrección por subregistro de los nacimientos).

$R = 1.856$.

De modo que:

$$p(\delta) = \frac{1.856}{2.380} = 0.77983$$

La tabla de mortalidad de Chile para el período 1951-1953 ^{2/} indica:

$p(29) = 0.78056$

$p(30) = 0.77218$

Una interpolación lineal nos indica:

$p(29,1) = 0.77983$

Obtenemos:

$$\rho = \frac{\log R}{\delta} = \frac{0.617345}{29.1} = 0.0212$$

El valor exacto, encontrado con el método clásico, indica $\rho = 0.0215$. El error es menor que 1.5 % y puede despreciarse. Ya que $T < \delta$ el valor encontrado para ρ será siempre levemente subestimado. El cálculo de la tasa intrínseca obtenida según el procedimiento clásico está indicado en el cuadro N° 15 de la aplicación numérica.

^{1/} Coale, A.J. Population Index, April 1955. Pag. 94-97.

^{2/} Bocaz, A. "Tabla de vida para 1952". Estadística Chilena XVII, 56, mayo-junio, 154-156.

Aplicación numérica.

1) Cálculo de la tasa bruta y de la tasa neta de reproducción.

Indicamos, en el cuadro N° 9 un ejemplo de cálculo de tasas brutas y netas de reproducción para Colombia en 1950. Se ha adoptado una relación $k = 0.4878$ entre nacimientos de sexo femenino y nacimientos de ambos sexos. La mortalidad corresponde a la tabla modelo de mortalidad al nivel $e_0 = 46$ años.

Obtenemos: $R' = 3.250$ y $R = 2.189$.

Cuadro N° 9

EJEMPLO DE CALCULO DE TASA BRUTA Y NETA DE REPRODUCCION EN COLOMBIA, AÑO 1950

| Grupos de edades | Número de mujeres a/ | Número de nacimientos b/ | $\Psi(x)$ por 1 000 | $p(x)$ | $\Psi(x)p(x)$ por 1 000 |
|------------------|----------------------|--------------------------|---------------------|--------|-------------------------|
| 15 - 19 | 561 721 | 64 433 | 114.7 | 73 530 | 84.34 |
| 20 - 24 | 483 227 | 163 236 | 337.8 | 71 102 | 240.18 |
| 25 - 29 | 410 557 | 134 578 | 327.8 | 68 290 | 223.85 |
| 30 - 34 | 343 379 | 90 172 | 262.6 | 65 396 | 171.73 |
| 35 - 39 | 291 955 | 57 282 | 196.2 | 62 446 | 122.52 |
| 40 - 44 | 245 746 | 18 650 | 75.9 | 59 394 | 45.08 |
| 45 - 49 | 201 922 | 3 533 | 17.5 | 56 051 | 9.81 |
| Total | | | 1 332.5 | | 897.51 |

$$R' = k \sum \Psi(x) = (0.4878) (5) (1.3325) = 3.250$$

$$R = k \sum \Psi(x)p(x) = (0.4878) (5) (0.39751) = 2.189$$

a/ datos censales ajustados;

b/ nacimientos corregidos por el subregistro

2) Cálculo de la tasa intrínseca de incremento, de la edad media de las madres y del intervalo medio entre dos generaciones.

En el cuadro N° 10 se indica un ejemplo de cálculo de ρ , \bar{x}_m y T para Colombia, sexo femenino, en 1950. Encontremos, en la primera aproximación $\rho = 0.0275$. Las segundas y terceras aproximaciones indican respectivamente $\rho = 0.0282$ y $\rho = 0.0281$.

Obtenemos, además, en el mismo cuadro:

$$\bar{x}_m = 27.19 \text{ años y } T = 27.84 \text{ años}$$

Cuadro N° 10

EJEMPLO DE CALCULO DE TASA INTRINSECA DE INCREMENTO, DE EDAD MEDIA DE LAS MADRES Y DE INTERVALO MEDIO ENTRE DOS GENERACIONES, COLOMBIA, SEXO FEMENINO, 1950

| Grupos de edades | Edad pivotal (x) | $\psi(x)p(x)$ | $x \psi(x) p(x)$ | $x^2 \psi(x) p(x)$ | $x^3 \psi(x) p(x)$ |
|------------------|------------------|---------------|------------------|--------------------|--------------------|
| 15 - 19 | 17.5 | 84.34 | 1 475.95 | 25 829.13 | 452 009.69 |
| 20 - 24 | 22.5 | 240.18 | 5 404.05 | 121 591.13 | 2 735 800.31 |
| 25 - 29 | 27.5 | 223.85 | 6 155.83 | 169 286.56 | 4 655 380.47 |
| 30 - 34 | 32.5 | 171.73 | 5 581.23 | 181 389.81 | 5 895 168.91 |
| 35 - 39 | 37.5 | 122.52 | 4 594.50 | 172 293.75 | 6 461 015.63 |
| 40 - 44 | 42.5 | 45.08 | 1 915.90 | 81 425.75 | 3 460 594.38 |
| 45 - 49 | 47.5 | 9.81 | 465.98 | 22 133.81 | 1 051 356.09 |
| | | 897.51 | 25 593.49 | 773 949.94 | 24 711 325.48 |

$$V''_1 = \frac{25\,593.49}{897.51} = 28.5161$$

$$V''_2 = \frac{773\,949.94}{897.51} = 862.3302$$

$$V''_3 = \frac{24\,711\,325.48}{897.51} = 27\,533.2035$$

$$k''_1 = 28.5161$$

$$k''_2 = 862.3302 - 813.1680 = 49.1622$$

$$k''_3 = 27\,533.2035 - 3(862.3302)(28.5161) + 2(28.5161)^3 = 139.0809$$

$$\log_e R = \log_e 2.1890 = 2.302585 \quad \log_{10} 2.1890 = 0.783445$$

(continuación cuadro N° 10)

1ª aproximación de ρ

$$\rho = \frac{\log_e R}{k''_1} = \frac{0.783445}{28.5161} = 0.0275$$

2ª aproximación de ρ

$$\log_e R = \rho k''_1 - \frac{\rho^2}{2} k''_2 \quad \therefore \quad \frac{k''_2}{2} \rho^2 - k''_1 \rho + \log_e R = 0$$

$$\rho = \frac{k''_1 - \sqrt{k''_1{}^2 - 2 k''_2 \log_e R}}{k''_2}$$

$$\rho = \frac{28.5161 - \sqrt{813.1630 - 77.0318}}{49.1622} = 0.0282$$

3ª aproximación de ρ

$$\log_e R = \rho k''_1 - \frac{\rho^2}{2} k''_2 + \frac{\rho^3}{6} k''_3$$

En $\frac{\rho^3}{6} k''_3$ se adopta el valor de la segunda aproximación de ρ y se resuelve una ecuación de segundo grado en ρ :

$$\frac{k''_2}{2} \rho^2 - k''_1 \rho + \log_e R - \frac{\rho^3}{6} k''_3 = 0$$

Se obtiene:

$$\rho = 0.0281$$

$$\bar{x}_m = k''_1 - k''_2 \rho + k''_3 \frac{\rho^2}{2} = 27.1851$$

$$T = k''_1 - k''_2 \frac{\rho}{2} + k''_3 \frac{\rho^3}{6} = 27.8437$$

Se comprueba así numéricamente que para una tasa intrínseca de incremento positiva tenemos:

$$\bar{x}_m < T < k''_1$$

3) Solución de Wicksell.

La solución de Wicksell conduce exactamente al mismo resultado que la solución de Lotka.

En efecto, si en

$$\rho = r \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right)$$

hacemos

$$r = \frac{k_1''}{k_2''} = \frac{28.5161}{49.1622} = 0.58004$$

$$\rho = k_1'' r = 28.5161 \times 0.58004 = 16.5405$$

$$R = 2.189$$

obtenemos $\rho = 0.0281$ que es exactamente lo que arrojó la solución de Lotka.

4) Solución gráfica.

Siguiendo la idea expresada en el gráfico 6, cuando se analizó la posición respectiva de la tasa neta de reproducción y de la tasa intrínseca de incremento, se ha estimado esta última tasa para Colombia mediante un procedimiento gráfico.

El gráfico ha sido preparado mediante los datos que figuran en el cuadro de la página 84.

En la columna 2 de este cuadro figuran los productos $\psi(x) p(x)$ para las edades centrales de los grupos quinquenales de edad ya obtenidos anteriormente.

En las columnas 3 a 6 se indica los valores de la función e^{-rx} para $r = 0.020 ; 0.025 ; 0.030 ; 0.035$ en las edades centrales. Se han elegido estos valores porque se piensa a priori que la tasa debe estar comprendida en el intervalo bastante amplio $0.020 - 0.035$.

En las columnas 7 a 10 se indica los productos $e^{-rx} \psi(x) p(x)$ para las edades centrales.

Los totales de estas columnas multiplicadas por 5 y por el coeficiente $k = 0.4878$, que indica la relación entre nacimientos femeninos con respecto a nacimientos de ambos sexos, determinan cuatro valores de la función Ψ : 1.249; 1.089; 0.951 y 0.831.

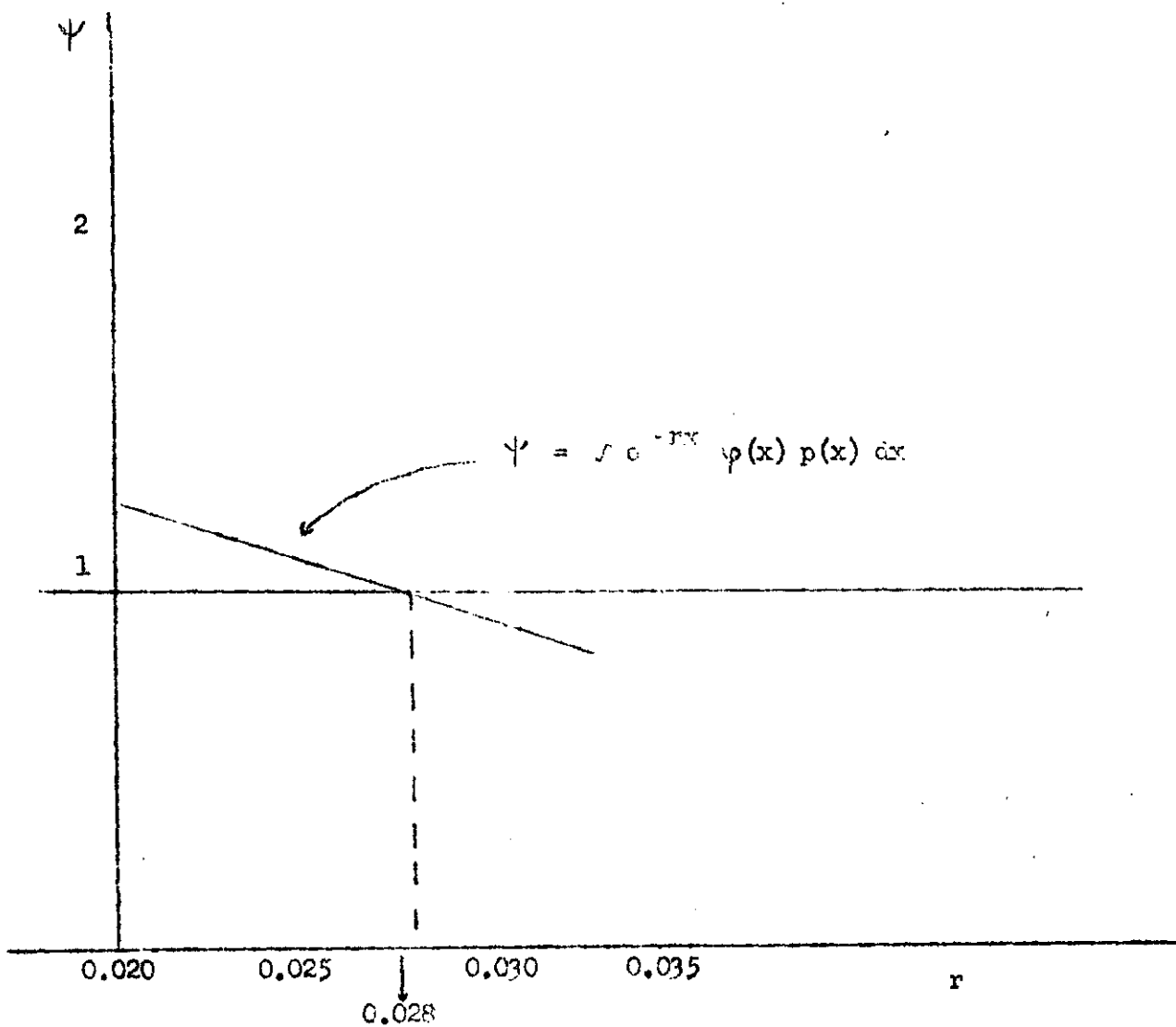
Estos cuatro valores fueron llevados al gráfico 7. La curva que los reúne corta la horizontal de ordenada 1 en un punto que corresponde a una tasa intrínseca de incremento levemente mayor que 0.0280. La solución analítica había conducido a 0.0281.

CUADRO DESTINADO A PREPARAR LA RESOLUCIÓN GRÁFICA PARA LA ESTIMACIÓN DE LA TASA INTRÍNSECA DE INCREMENTO. COLOMBIA. 1950.

| e^{-rx} | | | | | |
|--|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Edad | $\psi(x) p(x)$ | ($r=0.020$) | ($r=0.025$) | ($r=0.030$) | ($r=0.035$) |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 15 - 19 | 84.34 | 0.70469 | 0.64565 | 0.59156 | 0.54199 |
| 20 - 24 | 240.18 | 63763 | 56977 | 50916 | 45498 |
| 25 - 29 | 223.85 | 57695 | 50283 | 43824 | 38194 |
| 30 - 34 | 171.73 | 52205 | 44375 | 37719 | 32061 |
| 35 - 39 | 122.52 | 47237 | 39160 | 32465 | 26915 |
| 40 - 44 | 45.08 | 42742 | 34559 | 27943 | 22594 |
| 45 - 49 | 9.81 | 38674 | 30498 | 24051 | 18966 |
| $e^{-rx} \psi(x) p(x) dx \times 1.000$ | | | | | |
| | (7) | (8) | (9) | (10) | |
| 15 - 19 | 59.43 | 54.45 | 49.89 | 45.71 | |
| 20 - 24 | 153.15 | 136.85 | 122.29 | 109.28 | |
| 25 - 29 | 129.15 | 112.56 | 98.10 | 85.50 | |
| 30 - 34 | 89.65 | 76.21 | 64.77 | 55.06 | |
| 35 - 39 | 57.87 | 47.98 | 39.78 | 32.98 | |
| 40 - 44 | 19.27 | 15.58 | 12.60 | 10.19 | |
| 45 - 49 | 3.79 | 2.99 | 2.36 | 1.86 | |
| Total | 512.31 | 446.62 | 389.79 | 340.58 | |
| Total $\times 5$ $\times 0.4878$ | 1 249 | 1 089 | 951 | 831 | |

Gráfico 7

DETERMINACION GRAFICA DE LA TASA INTRINSECA DE INCREMENTO
COLOMBIA. 1950.



5) Cálculo de la tasa intrínseca de natalidad.

Basándose en los mismos datos obtenemos para la tasa intrínseca de natalidad:

1^a aproximación:

$$b = \frac{R}{e_0} = \frac{2.189}{46} = 0.04759$$

2^a aproximación:

$$b = \frac{R}{e_0} e^{\rho(k_1 - k''_1)} = 0.4759 e^{0.1309} = 0.4759 \times 1.140 = 0.5425$$

3^a aproximación:

$$b = \frac{R}{e_0} e^{\rho(k_1 - k''_1) - \frac{\rho^2}{2}(k_2 - k''_2)} = 0.05425 \times 0.8518 = 0.04621$$

4^a aproximación:

$$b = \frac{R}{e_0} e^{\rho(k_1 - k''_1) - \frac{\rho^2}{2}(k_2 - k''_2) + \frac{\rho^3}{6}(k_3 - k''_3)} = 0.04621 \times 1.013 = 0.04631$$

Como las aproximaciones sucesivas son alternadas la segunda nos aleja siempre bastante del resultado final. Cuando la tasa de incremento no es muy elevada (inferior a 2 %) la primera aproximación es muy suficiente.

6) Tiempo en que se alcanza el estado estable.

Tomaremos el ejemplo de una población estable con los niveles de fecundidad y de mortalidad de Colombia en 1950 y supondremos, mediante una proyección, que a partir de un tiempo $t = 0$ esta población está constantemente sometida a la fecundidad de Francia en 1958, manteniéndose constante la mortalidad inicial.

El propósito de este cálculo es ver cuanto tiempo se requiere para que se modifique el estado inicial hasta llegar a un nuevo equilibrio caracterizado por un nivel de fecundidad muy distinto del punto de partida. Se ha elegido dos situaciones que podríamos calificar extremas a fin de medir con más claridad el intervalo de tiempo que pueda separar estas dos etapas.

Para aliviar los cálculos se consideró solamente la población femenina. Las tasas de fecundidad por edades, del estado estable inicial son las que

figuran en el cuadro N° 9. En cuanto a la mortalidad se optó, como en los ejemplos numéricos anteriores, por la tabla de mortalidad modelo correspondiente a una esperanza de vida al nacimiento de 46 años para mujeres.

Durante la proyección las tasas de fecundidad utilizadas, que corresponden a las de Francia en 1958, son las siguientes:

| Edad | Tasas de fecundidad, por 1 000 | |
|---------|---|---|
| | Punto de partida (tasas de Colombia) | Durante la proyección (tasas de Francia) |
| 15 - 19 | 114.7 | 20.9 |
| 20 - 24 | 337.8 | 154.1 |
| 25 - 29 | 327.8 | 173.9 |
| 30 - 34 | 262.6 | 107.9 |
| 35 - 39 | 196.2 | 61.1 |
| 40 - 44 | 75.9 | 17.0 |
| 45 - 49 | 17.5 | 1.7 |

Las tasas brutas y netas de reproducción, la tasa intrínseca de incremento las tasas intrínsecas de natalidad y de mortalidad, las estructuras por grandes grupos de edades que corresponden al instante $t = 0$ y a la población límite final son:

| | <u>Población inicial</u> | <u>Población límite final</u> |
|---------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| R^t | 3.250 | 1.3088 |
| R | 2.189 | 0.886 |
| ρ | 0.0281 | - 0.0043 |
| b | 0.0463 | 0.0189 |
| d | 0.0182 | 0.0232 |
| Estructura por grandes grupos de edad | | |
| 0 - 14 | 44 722 | 22 829 |
| 15 - 49 | 45 744 | 49 047 |
| 50 y + | 9 534 | 28 124 |
| Total | 100 000 | 100 000 |

Vemos cuan distintas son la situación de partida y la situación límite final. De una población con estructura joven, y tasas elevadas de natalidad y de incremento debemos llegar, al final de la proyección, a una población bastante envejecida, con una tasa moderada de natalidad y una tasa de incremento negativa.

Entre la situación estable que prevalece antes de que se inicie la proyección y la situación límite estable del final de la proyección el efectivo global, el número de los nacimientos y la tasa de natalidad experimentan oscilaciones que van amortiguándose alrededor de una curva exponencial como puede comprobarse en el cuadro N° 11.

Estas oscilaciones desaparecen totalmente después del año 130 o 140, pero en la práctica puede considerarse que después de unos 80 años las tasas de natalidad, mortalidad y de incremento se mantienen constantes.

En cuanto a la estructura por edad, se modifica paulatinamente en el sentido de un envejecimiento constante debido al descenso de la fecundidad, como puede apreciarse en el cuadro N° 12; donde figuran las proporciones por grandes grupos de edad a intervalos de 20 años de la proyección y en el gráfico N° 8, donde figura la evolución de la estructura por grupos quinquenales. Veamos, aquí también, que después de unos 80 o 100 años las modificaciones en las estructuras son muy poco marcadas. Hemos tratado de precisar más el momento en que la estructura proyectada y la estructura límite final se confunden enteramente. Para esto se aplicó el test de Kolmogorov-Smirnov que suele usarse para estimar el grado de acuerdo entre una distribución de valores observados con alguna distribución teórica. El test consiste en comparar las distribuciones de frecuencias acumuladas, luego determinar el punto en que la diferencia entre las dos distribuciones, teórica y observada, es mayor y finalmente calcular la probabilidad de tal divergencia.

En el presente estudio se calculó la frecuencia acumulada por grupos quinquenales de edad de la estructura límite estable y de las estructuras de la población proyectada entre el tiempo $t = 80$ y el tiempo $t = 150$. Se buscó los grupos de edad para los cuales las desviaciones son máximas y se calcularon las probabilidades de observar estas desviaciones. Los resultados están indicados en el cuadro N° 13.

Vemos que las diferencias máximas se observan en los grupos de edad comprendidos entre 55 - 59 años y 70 - 74 años. Esas diferencias van disminuyendo constantemente a lo largo de la proyección entre $t = 80$ y $t = 145$. Las probabilidades de que tales diferencias sean debidas al azar van disminuyendo, siendo menores a 0.01 a partir del tiempo $t = 120$.

Es entonces después de 120 a 140 años de la proyección que la estructura se confunde con la estructura límite estable. La suma de las diferencias absolutas entre las proporciones de los grupos quinquenales de edad es de 5.142 % en $t = 80$ y disminuye a 0.456 % en $t = 140$, como puede apreciarse en el cuadro N° 14.

Hemos visto, sin embargo, que desde el tiempo $t = 80$ las tasas de natalidad, de mortalidad y de incremento son prácticamente constantes y se confunden con las tasas intrínsecas, a pesar de que en este momento la suma de las diferencias absolutas, con la estructura límite estable, en los grupos quinquenales, pasa de 5 %. Esto parece indicar que diferencias en las estructuras por edad de poblaciones estables que alcanzan este nivel de 5 % no se acompañan por variaciones apreciables en los niveles de natalidad y de mortalidad, siempre y cuando las diferencias en las estructuras no afecten exclusivamente a algunos grupos de edad.

Cuadro N° 13

APLICACION DEL TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV A LA COMPARACION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD LIMITE FINAL Y DE LA ESTRUCTURA EN DISTINTOS TIEMPOS DE LA PROYECCION

| t | 80 | 100 | 120 | 125 | 130 | 135 | 140 | 145 | 150 |
|--|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Grupo de edad en que la desviación es máxima | 60-64 | 65-69 | 60-64 | 65-69 | 70-74 | 60-64 | 65-69 | 55-59 | 60-64 |
| Desviación por 100 000 | 901 | 382 | 170 | 159 | 108 | 97 | 89 | 60 | 65 |
| Probabilidades de observar esas desviaciones | > 0.20 | 0.10 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |

Cuadro N° 14

COMPARACION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD AL TIEMPO t = 80 Y AL TIEMPO t = 140 DE LA PROYECCION CON EL ESTADO LIMITE ESTABLE

| Grupos de edad | Estructura límite estable | Estructura al tiempo t = 80 | Diferencias con la estructura estable | Estructura al tiempo t = 140 | Diferencias con la estructura estable |
|----------------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| 0 - 4 | 7 910 | 8 031 | - 121 | 7 917 | - 7 |
| 5 - 9 | 7 465 | 7 500 | - 35 | 7 469 | - 4 |
| 10 - 14 | 7 454 | 7 336 | + 118 | 7 445 | + 9 |
| 15 - 19 | 7 435 | 7 268 | + 167 | 7 417 | + 18 |
| 20 - 24 | 7 345 | 7 343 | + 2 | 7 335 | + 10 |
| 25 - 29 | 7 208 | 7 458 | - 250 | 7 222 | - 14 |
| 30 - 34 | 7 051 | 7 344 | - 293 | 7 081 | - 30 |
| 35 - 39 | 6 879 | 6 853 | + 26 | 6 896 | - 17 |
| 40 - 44 | 6 685 | 6 289 | + 396 | 6 661 | + 24 |
| 45 - 49 | 6 444 | 6 032 | + 412 | 6 397 | + 47 |
| 50 - 54 | 6 124 | 6 231 | - 107 | 6 110 | + 14 |
| 55 - 59 | 5 691 | 6 407 | - 716 | 5 741 | - 50 |
| 60 - 64 | 5 093 | 5 593 | - 500 | 5 166 | - 73 |
| 65 - 69 | 4 280 | 4 082 | + 198 | 4 296 | - 16 |
| 70 - 74 | 3 253 | 2 647 | + 606 | 3 198 | + 55 |
| 75 - 79 | 2 111 | 1 466 | + 645 | 2 062 | + 49 |
| 80 - 84 | 1 086 | 1 546 | - 460 | 1 085 | + 1 |
| 85 - 89 | 393 | 478 | - 85 | 406 | - 13 |
| 90 - 94 | 83 | 87 | - 4 | 87 | - 4 |
| 95 - 99 | 10 | 9 | + 1 | 9 | + 1 |
| Suma absoluta | | | 5 142 | | 456 |

CUADRO Nº 15

CALCULO DE LAS TASAS BRUTAS Y NETAS DE REPRODUCCION, Y
DE LA TASA INTRINSECA DE INCREMENTO. CHILE, 1952

| EDAD DE LA MADRE | EDAD PIVOTAL x | TASA DE FE- CUNDIDAD o/oo $\psi(x)$ | TASA DE SUPER- VIVENCIA p(x) | $\psi(x) p(x)$ | $x\psi(x) p(x)$ | $x^2 \psi(x) p(x)$ |
|------------------|-------------------|--|------------------------------------|----------------|-----------------|--------------------|
| 13 - 14 | 14.0 | 4.3 | 0.82529 | 3.548 | 49.679 | 695.504 |
| 15 - 19 | 17.5 | 74.8 | 0.81733 | 61.136 | 1 069.885 | 18 722.986 |
| 20 - 24 | 22.5 | 227.4 | 0.80294 | 182.589 | 4 108.243 | 92 495.458 |
| 25 - 29 | 27.5 | 238.2 | 0.78577 | 187.170 | 5 147.186 | 141 547.623 |
| 30 - 34 | 32.5 | 197.5 | 0.76813 | 151.706 | 4 930.435 | 160 239.124 |
| 35 - 39 | 37.5 | 147.3 | 0.74852 | 110.257 | 4 134.626 | 155 048.906 |
| 40 - 44 | 42.5 | 73.1 | 0.72590 | 53.063 | 2 255.190 | 95 845.558 |
| 45 - 49 | 47.5 | 19.5 | 0.69973 | 13.644 | 648.125 | 30 785.945 |

$k = 0.4878$ (relación entre nacimientos femeninos y nacimientos de ambos sexos)

$R' = k \sum \psi(x) = 2.389$

$R = k \sum \psi(x) p(x) = 1.856$

$R\psi''_1 = k \sum x \psi(x) p(x) = 54.423$

$R\psi''_2 = k \sum x^2 \psi(x) p(x) = 1 694.870$

$k''_1 = \psi''_1 = 1.856$

$k''_2 = \psi''_2 - \psi''^2_1 = 53.346$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\frac{k''_2}{2} \rho^2 - k''_1 \rho + \text{Log } R = 0$$

obtenemos:

$$\rho = \frac{k''_1 - \sqrt{k''_1{}^2 - 2 k''_2 \text{Log } R}}{k''_2} = 0.0215$$

a/ Obtenidos luego de corregir el subregistro de los nacimientos, la subenumeración censal y los errores de declaración de edad de las mujeres.

III.2. Modelo 12. Poblaciones con tasas específicas de fecundidad y estructura por edad constante.

Si las funciones $\psi(x)$ y $c(x)$ son independientes del tiempo, la tasa de natalidad lo es también ya que puede representarse por la suma de los productos $c(x) \psi(x)$ durante el período fértil:

$$b = \int_{15}^{49} \psi(x) c(x) dx$$

También la tasa bruta de reproducción definida por la relación:

$$R' = \int_{15}^{49} \psi(x) dx$$

es constante.

Pero, por lo tanto, las tasas de supervivencia no permanecen necesariamente sin alteraciones como en el modelo 4 cuando $c(x)$ y b fueron supuestos constantes y la población no es estable en el sentido que hemos dado a este vocablo. El sólo hecho de conocer la estructura por edad y las tasas de fecundidad no permite conocer los demás datos: la mortalidad o la tasa de incremento. Por lo tanto es imposible proyectar una población para la cual se conoce la estructura por edad presente y futura y las tasas de fecundidad.

Es posible construir una población cuya estructura por edad permanece constante, cuyas tasas de fecundidad $\psi(x)$ permanecen también constantes, pero cuyo efectivo total no varía necesariamente en forma exponencial y cuyas tasas de incremento no son tampoco necesariamente constantes, como lo veremos en el ejemplo numérico que se indica más adelante.

Para que la población pueda considerarse como estable se debería verificar la relación siguiente entre las tasas de supervivencia $p(x)$ y la tasa de incremento r :

$$p(x) = \frac{c(x)}{b} e^{rx} = \frac{c(x)}{c(0)} e^{rx}$$

Esta relación se deduce de la siguiente, ya encontrada en el modelo 1:

$$c(x) = b e^{-rx} p(x)$$

Ejemplo numérico.

La imposibilidad de proyectar en el porvenir una población para la cual se conoce solamente la estructura por edad y las tasas de fecundidad muestra claramente que no existen relaciones funcionales entre los componentes.

Podemos mostrar que una población con estructura por edad y tasas específicas de fecundidad constantes no es necesariamente estable, basándose en el mismo ejemplo numérico, que en el modelo 4 cuadro N° 7, cuando hemos mostrado que una población con estructura por edad y tasa de natalidad constante puede tener grandes variaciones en la mortalidad.

Recordamos que se representan en el cuadro 7:

- en la columna 1 los grupos de edad,
- en la columna 2 la estructura por edad de una población estable que corresponde a $r = 0,0275$ y $e_0 = 46$ años, sexo femenino, reducida a 100 000, la tasa de natalidad es $b = 46,33$ por 1 000,
- en la columna 3 la misma población cinco años después, aumentada en todos los grupos de edad en 10 %,
- en la columna 4 la población en el tiempo $t + 10$, aumentada en 15% con respecto al tiempo $t + 5$,
- en las columnas 5 y 6 las relaciones de supervivencia durante el primer y el segundo quinquenio.

La mortalidad ha variado bastante entre los dos quinquenios como puede apreciarse al comparar estas dos últimas columnas. Las esperanzas de vida al nacimiento que les corresponden son respectivamente 28,5 años y 42,5 años. La tasa de natalidad permaneció constante al nivel $b = 46,33$ por el solo hecho de que la estructura es independiente del tiempo.

Ahora bien, podemos suponer que los nacimientos resultan de las tasas de fecundidad por grupos quinquenales de edad siguiente:

| <u>Grupo de edad</u> | <u>Tasa de fecundidad por 1 000</u> |
|----------------------|-------------------------------------|
| 15 - 19 años | 113,3 |
| 20 - 24 | 333,6 |
| 25 - 29 | 323,8 |
| 30 - 34 | 259,4 |
| 35 - 39 | 193,8 |
| 40 - 44 | 75,0 |
| 45 - 49 | 17,3 |

Si asociamos a esta serie de tasas de fecundidad una relación $k = 0,4878$ de nacimientos femeninos por 1 nacimiento de ambos sexos encontramos una tasa bruta de reproducción de 3,2. Puede suponerse que este conjunto de índices de fecundidad se aplicó a lo largo de la proyección de 10 años, y tendremos el mismo número de nacimientos que al aplicar la tasa constante de natalidad $b = 46,33$ por 1 000. Vemos entonces que una estructura por edad constantes asociada a un conjunto de tasas constantes de fecundidad no se acompaña necesariamente de una mortalidad constante, o de una tasa constante de incremento.

III.3. Modelo 13. Poblaciones con tasas de fecundidad por edades y tasa de incremento constantes.

Si una población tiene tasas de fecundidad por edades y una tasa de incremento constantes, su estructura por edad, así, como las probabilidades de su pervivencia a las distintas edades, pueden variar sin que pueda fijarse una regla determinada a estas variaciones.

El conocimiento de $\psi(x)$ y de r no permite estimar los demás datos demográficos, en particular la estructura por edad, las tasas de supervivencia, las tasas de natalidad y de mortalidad. La población queda indeterminada. Aún cuando conociéramos la estructura por edad no se podría proyectar esta estructura si tuviéramos solamente $\psi(x)$ y r .

Existen muchas maneras de ilustrar ésto con modelos numéricos. Hemos indicado un ejemplo en el cuadro N° 16.

En la columna 2 de este cuadro se representa la estructura por edad de una población construida según las fórmulas del modelo 1, con una tabla de mortalidad correspondiente a una esperanza de vida al nacimiento $e_0 = 46$ años, sexo femenino, una tasa de incremento de 0.0275, una tasa de natalidad de 46.33 por mil.

En las columnas 3 y 4 se representa esta misma población proyectada en el tiempo $t = 5$ y $t = 10$, con la sola condición que la tasa de incremento haya permanecido constante al nivel inicial, o sea $r = 0.0275$, y que las tasas de fecundidad por edades sean las siguientes:

| <u>Grupos de edad</u> | <u>Tasas de fecundidad (en o/oo)</u> |
|-----------------------|--------------------------------------|
| 15 - 19 | 113.3 |
| 20 - 24 | 333.6 |
| 25 - 29 | 323.8 |
| 30 - 34 | 259.4 |
| 35 - 39 | 193.8 |
| 40 - 44 | 75.0 |
| 45 - 49 | 17.3 |

Las relaciones de supervivencia que corresponden al primer y al segundo quinquenio están indicadas en las columnas 5 y 6. Vemos que son diferentes mostrando así los cambios de mortalidad que han ocurrido. La esperanza de vida al nacimiento de 46 años en el punto de partida, pasa a 40.7 durante el primer quinquenio y a 42, durante el segundo. La tasa de natalidad varió levemente, en razón del cambio en la estructura por edad asociado a tasas de fecundidad constantes.

Vemos entonces que una población con tasas específicas de fecundidad y tasa de incremento constante no tiene necesariamente su estructura por edad, sus tasas de natalidad y de mortalidad constantes.

Cuadro N° 16

EJEMPLO DE POBLACION CON TASAS DE INCREMENTO Y TASAS DE FECUNDIDAD
POR EDADES, CONSTANTES

| Grupos de Edades | Población en t = 0 | Población en t = 5 | Población en t = 10 | Relaciones de supervivencia en el primer quinquenio | Relaciones de supervivencia en el segundo quinquenio |
|------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---|--|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| | | | | $P_b = 0.84207$ | $P_b = 0.80638$ |
| 0 - 4 | 17 956 | 20 816 | 22 986 | 0.93323 | 0.88893 |
| 5 - 9 | 14 455 | 16 757 | 18 504 | 0.98734 | 0.97482 |
| 10 - 14 | 12 311 | 14 272 | 16 335 | 0.96491 | 0.97393 |
| 15 - 19 | 10 476 | 11 879 | 13 900 | 0.95552 | 0.98611 |
| 20 - 24 | 8 828 | 10 010 | 11 714 | 0.94914 | 0.97942 |
| 25 - 29 | 7 389 | 8 379 | 9 804 | 0.94641 | 0.97661 |
| 30 - 34 | 6 167 | 6 993 | 8 183 | 0.94357 | 0.97369 |
| 35 - 39 | 5 132 | 5 819 | 6 809 | 0.93998 | 0.96993 |
| 40 - 44 | 4 254 | 4 824 | 5 644 | 0.93230 | 0.96206 |
| 45 - 49 | 3 498 | 3 966 | 4 641 | 0.91938 | 0.94881 |
| 50 - 54 | 2 836 | 3 216 | 3 763 | 0.89380 | 0.92724 |
| 55 - 59 | 2 248 | 2 549 | 2 982 | 0.86566 | 0.89329 |
| 60 - 64 | 1 716 | 1 946 | 2 277 | 0.81294 | 0.83864 |
| 65 - 69 | 1 230 | 1 395 | 1 632 | 0.73496 | 0.75771 |
| 70 - 74 | 797 | 904 | 1 057 | 0.62735 | 0.64712 |
| 75 - 79 | 441 | 500 | 585 | 0.49887 | 0.51400 |
| 80 - 84 | 194 | 220 | 257 | 0.35052 | 0.35909 |
| 85 - 89 | 60 | 68 | 79 | 0.20000 | 0.22059 |
| 90 - 94 | 11 | 12 | 15 | 0.09091 | 0.08333 |
| 95 - 99 | 1 | 1 | 1 | --- | --- |
| Total | 100 000 | 114 526 | 131 168 | | |

III.4. Modelos 14 y 15. Poblaciones con tasas específicas de fecundidad y tasa de natalidad o de mortalidad constantes.

En realidad hay poco que decir de este tipo de población. Es evidente que el solo conocimiento de $\varphi(x)$ y de b o de d no permite ni conocer los demás datos demográficos ni, por lo tanto, formular hipótesis sobre la evolución de estos en el futuro. La población queda casi enteramente indeterminada y su proyección hacia el futuro no es realizable.

IV. COMPARACION DE POBLACIONES QUE DIFIEREN EN FECUNDIDAD Y EN MORTALIDAD.

Consideraremos, en este capítulo, poblaciones estables que difieren en algunos aspectos (fecundidad, mortalidad, o fecundidad y mortalidad), con el propósito de utilizar eventualmente las relaciones encontradas en la construcción de las poblaciones numéricas modelos y ver si nos pueden también servir en algunos problemas de estimación.^{1/}

IV.1. Comparación de dos poblaciones estables que difieren solamente en fecundidad.

Supongamos, en primer término que dos poblaciones estables que corresponden al modelo II anteriormente estudiado y que llamamos I y II, tengan las mismas probabilidades de sobrevivencia a cada edad $p(x)$ pero diferentes tasas específicas de fecundidad $\psi(x)$.

Si se observan series de tasas de fecundidad por edades $\psi(x)$ relativas a diferentes países en diferentes épocas, se llega a la conclusión que en general dos poblaciones en las cuales el comportamiento de las parejas es muy distinto en cuanto a la descendencia tienen valores de $\psi(x)$ que a partir de los 20 - 24 años son tanto más marcados cuanto más elevadas son las edades de las madres que se consideren. Esta observación, de carácter muy general y por supuesto muy aproximada, permite formular de la manera siguiente las diferencias en fecundidad que pueden existir entre las dos poblaciones llamadas I y II:

$$I \psi(x) = II \psi(x) e^{u x} \quad (28)$$

donde u es un parámetro.

Esta forma de expresar las diferencias de fecundidad tiene la ventaja de poder ser introducida cómodamente en las fórmulas de las poblaciones estables.

Se demuestra en efecto que, en tal hipótesis:

1) La diferencia entre las tasas intrínsecas de incremento $\Delta \rho$ es igual al parámetro u .

Efectivamente, la ecuación (16) se escribe, para las dos poblaciones:

$$\int_0^{\infty} e^{-I \rho x} I \psi(x) p(x) dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-II \rho x} II \psi(x) p(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(II \rho + u)x} I \psi(x) p(x) dx = 1$$

^{1/} Muchas de las relaciones que se exponen en esta parte han sido descritas en el artículo siguiente: A.J.Coale, "The effects of changes on mortality and fertility on age composition". The Milbank Memorial Fund Quarterly, Jan. 1956. 79-114.

Lo que nos lleva a:

$$\Delta^p = I^p - II^p = u$$

2) La relación entre las estructuras por edad llega a convertirse en:

$$\frac{I^c(x)}{II^c(x)} = \frac{I^b}{II^b} e^{-\Delta^p x} \quad (29)$$

La relación es igual a $\frac{I^b}{II^b}$ para la edad cero y luego decrece en forma exponencial. Si dos poblaciones tienen igual mortalidad pero difieren en fecundidad, tienen distintas estructuras por edad: la más vieja es la que tiene menor tasa de natalidad. Vemos que diferencia de envejecimiento de dos poblaciones que tienen igual mortalidad se debe a diferencias en natalidad: a menor natalidad mayor proporción de individuos en las edades elevadas.

Hemos representado en el gráfico 9 las relaciones $\frac{I^c(x)}{II^c(x)}$ tomando para $I^c(x)$ la población estable que corresponde a una mortalidad modelo $e_0 = 46$ y $r = 0.0275$ y para $II^c(x)$ las estructuras por edad de poblaciones estables con igual mortalidad y tasas de incremento que van variando de 0.0100 a 0.0400.

3) Existe una relación sencilla entre las tasas brutas de reproducción y las tasas intrínsecas de incremento de las dos poblaciones que comparamos.

En efecto, las tasas brutas de reproducción I^R y II^R se escriben:

$$I^R = \int_0^{\infty} I^p(x) dx = \int_0^{\infty} e^{\Delta^p x} II^p(x) dx$$

$$II^R = \int_0^{\infty} II^p(x) dx$$

Ahora bien, llamamos II^{ψ}_i el momento de orden i de la función $\frac{II^p(x)}{II^R}$.

Encontramos, al desarrollar $e^{\Delta^p x}$ en serie de Taylor:

$$I^R = II^R \left[1 + \sum_1 \frac{(\Delta^p)^i}{i!} II^{\psi}_i \right] \quad (30)$$

En la práctica, puede elegirse la población de referencia II de tal manera que $\Delta\rho = u$ sea pequeño y, en consecuencia, podemos conformarnos con la aproximación:

$$I^{a'} = II^{R'} \left[1 + \Delta\rho \frac{I^{III}}{II} \right] \quad (31)$$

Esta relación permite calcular rápidamente, y con pocos datos, la tasa bruta de reproducción de una población para la cual se conoce la tasa intrínseca de incremento, o inversamente calcular la tasa intrínseca de incremento a partir de la tasa bruta de reproducción. Basta tomar, para la población de referencia, por ejemplo la población llamada II, una población estable de igual mortalidad y para la cual conocemos la distribución de las edades de las madres al nacimiento de sus hijos. Esta población podría ser una población imaginaria, calculada en forma enteramente teórica, como las que presentamos más adelante en las aplicaciones numéricas.

Notamos que en las fórmulas (30) y (31) puede reemplazarse la tasa bruta de reproducción R' por la neta R y $\frac{I^{III}}{II}$ por $\frac{I^{II}}{II}$, ya que las dos poblaciones que comparamos tienen igual mortalidad.

4) Relación entre la tasa de natalidad y la proporción de niños.

Sumamos de la edad 0 a la edad x_j las dos partes de la ecuación (29):

$$\int_0^{x_j} I^c(x) dx = \frac{I^b}{II^b} \int_0^{x_j} II^c(x) e^{-\Delta\rho x} dx$$

y desarrollamos en la segunda parte de esta ecuación $e^{-\Delta\rho x}$ en serie de Taylor, obtenemos:

$$\int_0^{x_j} I^c(x) dx = \frac{I^b}{II^b} \left[\int_0^{x_j} II^c(x) dx - \frac{\Delta\rho}{II} \int_0^{x_j} x II^c(x) dx + \dots \right]$$

Si las dos poblaciones no difieren mucho en la tasa de incremento esta última expresión se escribe:

$$\frac{\int_0^{x_j} I^c(x) dx}{\int_0^{x_j} II^c(x) dx} = \frac{I^b}{II^b} \quad (32)$$

La relación entre las tasas de natalidad es igual a la relación entre las proporciones de niños de 0 a x_j años en las dos poblaciones.

Esta sencilla fórmula es de gran utilidad en la práctica. Permite, en efecto, el cálculo de b conociendo la proporción de niños de 0 a 4 años, por ejemplo, o, inversamente la proporción de niños, y eventualmente corregir los datos censales frecuentemente deficientes en este aspecto, a partir de la tasa de natalidad.

5) Relación entre la tasa de natalidad y la tasa de incremento.

Sumemos de la edad 0 a la edad ∞ las dos partes de la ecuación (29):

$$\int_0^{\infty} I^c(x) dx = \frac{I^b}{II^b} \int_0^{\infty} II^c(x) e^{-\Delta^p x} dx$$

y desarrollando en la segunda parte $e^{-\Delta^p x}$ en serie de Taylor:

$$\int_0^{\infty} I^c(x) dx = \frac{I^b}{II^b} \left[\int_0^{\infty} II^c(x) dx - \frac{\Delta^p}{1!} \int_0^{\infty} x II^c(x) dx + \dots \right]$$

$$II^b = I^b \left[1 - \frac{\Delta^p}{1!} II^{\nu}_1 + \dots \right] \quad (33)$$

donde II^{ν}_i es el momento de orden i de la función $II^c(x)$.

Si no seguimos en la serie que figura en la segunda parte más allá del término que contiene Δ^p vemos la posibilidad de calcular la tasa de natalidad I^b a partir del solo conocimiento de la tasa de incremento I^p . Basta para ésto tomar para la población de referencia II una población modelo construida a partir de componentes que no parezcan alejarse demasiado de los de la población I . Veremos un ejemplo de tal cálculo en las aplicaciones numéricas al final de este capítulo.

IV.2. Comparación de dos poblaciones estables que difieren solamente en mortalidad.

Esta comparación nos servirá para definir en el capítulo que sigue las poblaciones cuasi-estables.

Es difícil describir en una fórmula única las diferencias en mortalidad que pueden observarse entre dos poblaciones, para todas las edades.

Supongamos en primer término que dos poblaciones estables, que llamaremos I y II , tengan iguales tasas de fecundidad por edades $\psi(x)$, pero diferentes tasas de mortalidad por edades.

Puede, por ejemplo, suponerse que el logaritmo de la relación entre las probabilidades de supervivencia a cada edad, de las dos poblaciones, es una función lineal de la edad:

$$\text{Log} \frac{{}_{I}p(x)}{{}_{II}p(x)} = - v x \quad (34)$$

donde v es un parámetro.

Esta hipótesis puede en general aceptarse entre 10 y 60 años cuando los niveles de mortalidad de las poblaciones I y II no difieren mucho, como puede fácilmente comprobarse con las tablas modelos de mortalidad. A título ilustrativo hemos indicado en el gráfico 10, en coordenadas semi-logarítmicas, las relaciones

$$\text{Log} \frac{{}_{I}p(x)}{{}_{II}p(x)}$$

tomando para la población I la mortalidad modelo $e_0 = 40$ años y para la población II, $e_0 = 36$ años y $e_0 = 44$ años (sexo femenino). Vemos que entre 10 y 60 años las curvas se acercan mucho a líneas rectas.

Notamos que una forma más satisfactoria de expresar la relación que existe entre las tasas de supervivencia de dos poblaciones para todas las edades, y no sólo para un grupo de edades, como lo acabamos de hacer, consiste en la fórmula siguiente:

$$\text{Log} \frac{{}_{I}p(x)}{{}_{II}p(x)} = e^{-hx}$$

de modo que la curva de $\text{LogLog} \frac{{}_{I}p(x)}{{}_{II}p(x)}$ es lineal.

Varios ensayos, en base a las tablas modelos de mortalidad, muestran que una ley de este tipo parece aproximarse bastante bien a las relaciones que existen entre varias tablas modelos de mortalidad, cuando se consideran mortalidades que no difieren mucho (las esperanzas de vida al nacimiento no deben diferir en más de 10 a 15 años). Pero esta forma de expresar las diferencias de mortalidad a distintos niveles de estado sanitario si bien es más satisfactoria que la forma propuesta con la fórmula (34) tiene en cambio la desventaja de complicar mucho los cálculos cuando se introduce en las fórmulas de poblaciones estables.

La hipótesis formulada con (34) llega a suponer que la diferencia entre las fuerzas de mortalidad en las dos poblaciones, es constante:

$${}_{II}\mu(x) = {}_{I}\mu(x) - v$$

siendo ${}_{I}\mu(x)$ y ${}_{II}\mu(x)$ las tasas instantáneas de mortalidad a la edad x en las dos poblaciones.

En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} I^{\mu}(x) &= - \frac{\text{derivada de } I^p(x)}{I^p(x)} \\ II^{\mu}(x) &= - \frac{\text{derivada de } II^p(x)}{II^p(x)} \\ &= - \frac{\text{derivada de } I^p(x) \cdot e^{vx} + v I^p(x) e^{vx}}{I^p(x) e^{vx}} = I^{\mu}(x) - v \end{aligned}$$

Las curvas de las tasas instantáneas de mortalidad son paralelas.

Se demuestra que, en tal hipótesis:

1 - Las tasas de incremento difieren en la misma medida que las tasas instantáneas de mortalidad:

$$\Delta^p = I^p - II^p = II^{\mu}(x) - I^{\mu}(x) = -v$$

Efectivamente, la ecuación (16) se escribe, para las dos poblaciones:

$$\int_0^{\infty} e^{-I^p x} \psi(x) I^p(x) dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-II^p x} \psi(x) II^p(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(II^p - v)x} \psi(x) I^p(x) dx = 1$$

y, restando estas dos expresiones:

$$\int_0^{\infty} \left[e^{-I^p x} - e^{-(II^p - v)x} \right] \psi(x) I^p(x) dx = 0$$

como $p(x)$ y $\psi(x)$ son siempre positivas, tenemos necesariamente:

$$\Delta^p = I^p - II^p = -v$$

Gráfico N° 9

RELACIONES ENTRE LAS ESTRUCTURAS POR EDAD DE LA POBLACION ESTABLE, SEXO MASCULINO, CORRESPONDIENTE A $e_0 = 46$ Y $r = 0.0275$ Y DE UNA SERIE DE POBLACIONES ESTABLES DE IGUAL MORTALIDAD Y DIFERENTES TASAS DE INCREMENTO INSCRITAS EN LAS RECTAS

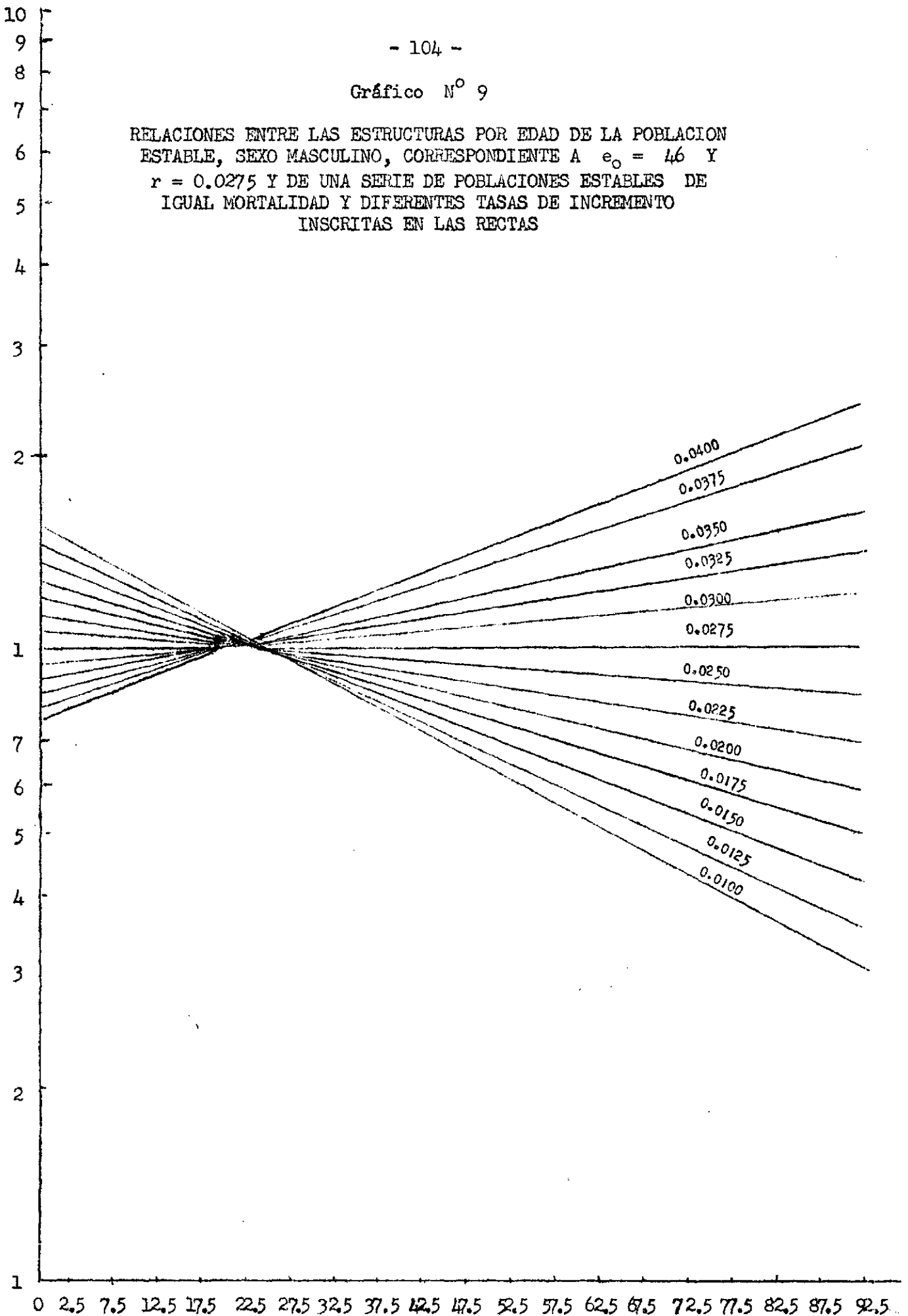


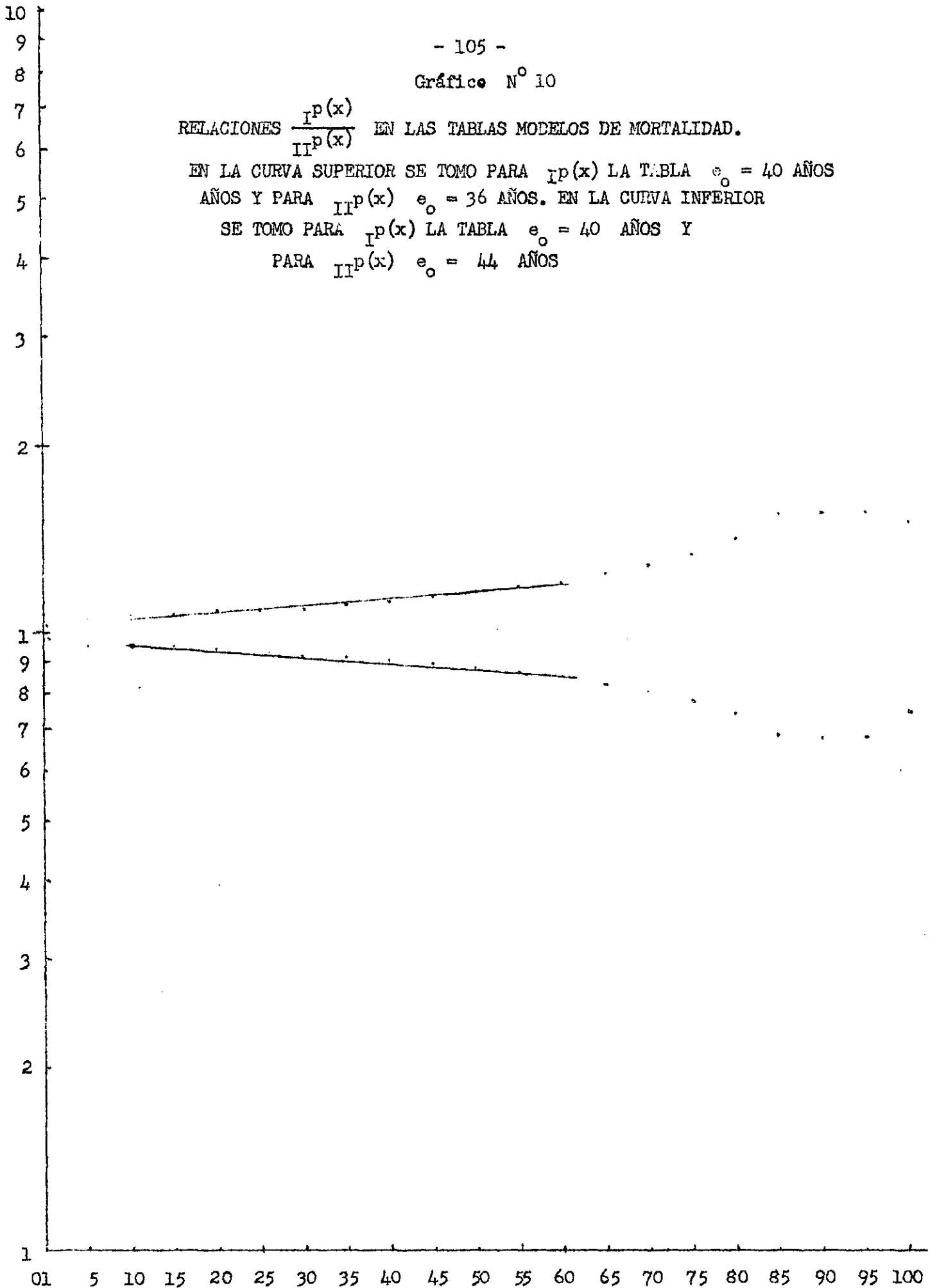
Gráfico N° 10

RELACIONES $\frac{I^p(x)}{II^p(x)}$ EN LAS TABLAS MODELOS DE MORTALIDAD.

EN LA CURVA SUPERIOR SE TOMO PARA $I^p(x)$ LA TABLA $e_0 = 40$ AÑOS
AÑOS Y PARA $II^p(x)$ $e_0 = 36$ AÑOS. EN LA CURVA INFERIOR

SE TOMO PARA $I^p(x)$ LA TABLA $e_0 = 40$ AÑOS Y

PARA $II^p(x)$ $e_0 = 44$ AÑOS



2 - Las estructuras por edades de las dos poblaciones son idénticas:

$$I^c(x) = II^c(x)$$

Efectivamente las estructuras por edades se escriben:

$$I^c(x) = \frac{e^{-I^p x} I^p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-I^p x} I^p(x) dx}$$

$$II^c(x) = \frac{e^{-II^p x} II^p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-II^p x} II^p(x) dx} = \frac{e^{-(I^p + v)x} e^{vx} I^p(x)}{\int_0^{\infty} e^{-(I^p + v)x} e^{vx} I^p(x) dx} = I^c(x)$$

Las diferencias en mortalidad no tienen consecuencias sobre las estructuras por edad.

Esto explica que en muchos países subdesarrollados, donde el nivel de la fecundidad es muy parecido, siendo de tipo natural, o poco malthusiano, y las costumbres en cuanto al matrimonio no muy diferentes, las estructuras por edades difieren poco de un país a otro, o con el tiempo aún cuando difieren los niveles sanitarios. Es esta observación la que nos va a servir, en el capítulo que sigue, para definir las poblaciones cuasi-estables.

A título ilustrativo hemos indicado en el Cuadro N° 17 las estructuras por edad de dos poblaciones estables I y II cuyas tasas de fecundidad por edades son:

| | | |
|--------------|-------|------|
| 15 - 19 años | 82.6 | o/oo |
| 20 - 24 " | 286.8 | " |
| 25 - 29 " | 274.0 | " |
| 30 - 34 " | 234.0 | " |
| 35 - 39 " | 82.3 | " |
| 40 - 44 " | 92.1 | " |
| 45 - 49 " | 25.6 | " |

pero cuyas mortalidades son distintas. En la población I la mortalidad corresponde a la tabla modelo $e_0 = 42$ años y en la población II $e_0 = 56$ años, sexo masculino. Las tasas de incremento son respectivamente $I^r = 0.02$ y $II^r = 0.0275$ y las tasas de natalidad $I^b = 0.04141$ y $II^b = 0.3968$.

Vemos que las estructuras no difieren mucho, a pesar de que las diferencias en mortalidad e incremento son bastante marcadas. Las diferencias entre las estructuras se deben exclusivamente al hecho de que las diferencias en mortalidad no se expresan exactamente en todas las edades por la fórmula (34)

Cuadro N° 17

COMPARACION DE LAS ESTRUCTURAS POR EDAD DE DOS POBLACIONES ESTABLES DE IGUAL FECUNDIDAD Y DIFERENTE MORTALIDAD

| Grupo de edad | Estructura de la población I <u>1/</u> | Estructura de la población II <u>2/</u> | Relación entre las estructuras |
|---------------|--|---|--------------------------------|
| 0 - 4 | 15 834 | 15 423 | 0.964 |
| 5 - 9 | 13 076 | 13 796 | 0.948 |
| 10 - 14 | 11 547 | 11 890 | 0.971 |
| 15 - 19 | 10 201 | 10 243 | 0.996 |
| 20 - 24 | 8 911 | 8 770 | 1.016 |
| 25 - 29 | 7 725 | 7 480 | 1.033 |
| 30 - 34 | 6 677 | 6 375 | 1.047 |
| 35 - 39 | 5 743 | 5 422 | 1.059 |
| 40 - 44 | 4 896 | 4 588 | 1.067 |
| 45 - 49 | 4 111 | 3 847 | 1.069 |
| 50 - 55 | 3 381 | 3 176 | 1.065 |
| 55 - 59 | 2 693 | 2 561 | 1.052 |
| 60 - 64 | 2 047 | 1 993 | 1.027 |
| 65 y + | 3 158 | 3 436 | 0.919 |
| Total | 100 000 | 100 000 | |

1/ Población estable construída con una mortalidad modelo $e_0 = 42$ años y las tasas de fecundidad por edades indicadas en el texto. Tenemos además, en esta población: $I^b = 0.0414$ y $I^p = 0.02$.

2/ Población estable construída con una mortalidad modelo $e_0 = 56$ años y las tasas de fecundidad por edades indicadas en el texto. Tenemos además: $II^b = 0.0397$ y $II^p = 0.0275$.

3 - Las tasas de natalidad de las dos poblaciones son iguales:

$$I^b = II^b$$

Efectivamente, al hacer la relación entre las estructuras por edad de las dos poblaciones obtenemos:

$$\frac{I^c(x)}{II^c(x)} = \frac{I^b}{II^b} e^{-(I^p - II^p + v)x}$$

y, ya que $\rho_I - \rho_{II} = \Delta f = -v$ y que $I^c(x) = II^c(x)$:

$$I^b = II^b$$

Acabamos de ver que dos poblaciones estables que corresponden a las características siguientes: $Ie_0 = 42$, $I\beta = 0.02$ y $IIe_0 = 56$, $II\beta = 0.0275$, tienen, en efecto, tasas de natalidad bastante similares: $I^b = 0.0414$ y $II^b = 0.0397$.

4 - Quando las diferencias entre la mortalidad a edades jóvenes son muy pronunciadas, . . . equivalen a una diferencia de signo contrario entre las tasas de fecundidad, o entre las tasas netas de reproducción. Esto explica que un descenso en la mortalidad infantil llega a ser exactamente igual, en cuanto a sus consecuencias sobre la estructura por edad, a un aumento de la tasa de reproducción.

Supongamos, por ejemplo, que las tasas de supervivencia sean proporcionales después de una edad x' , de modo que tenemos:

$$I^p(x) = \alpha II^p(x) \quad \text{para } x > x'$$

La relación entre las estructuras por edad llega a ser:

$$\frac{I^c(x)}{II^c(x)} = \alpha \frac{I^b}{II^b} e^{-\Delta\beta x} \quad \text{para } x > x'$$

y las tasas netas de reproducción difieren en la relación α :

$$\frac{R}{I} = \alpha \frac{R}{II} \quad (35)$$

Notamos que habríamos llegado exactamente al mismo resultado si, como lo hizo A.J. Coale^{1/}, en lugar de suponer que las dos poblaciones difieren sólo en mortalidad infantil hubiéramos supuesto que las mortalidades son iguales, pero que en la población I, las tasas de fecundidad por edades superan, a cada edad, las tasas de la población II en la relación:

$$I^{\psi}(x) = \alpha II^{\psi}(x)$$

Esto demuestra claramente que una diferencia entre las mortalidades infantiles equivale a una diferencia de signo contrario entre las tasas de fecundidad. Si en un país la mortalidad infantil revela un descenso y si éste es el único cambio que ocurre en esta población, la baja de la mortalidad infantil llega a ser exactamente igual a un aumento de la fecundidad.

Esta observación es de gran importancia práctica ya que en casi todos los países llamados subdesarrollados se observa una baja importante de la mortalidad infantil. Este movimiento actúa, entonces, sobre la estructura por edad y sobre la tasa de incremento, en el mismo sentido que un aumento de la natalidad, o compensa, como lo veremos cuando tratemos de las poblaciones en "leve transición",

^{1/} A.J. Coale op. cit.

en una medida más o menos grande, un posible descenso de la fecundidad. Es muy probable que en Chile, por ejemplo, el descenso de la mortalidad infantil oculte en gran parte el efecto del descenso de la fecundidad sobre la estructura por edad, descenso que parece haber empezado hace unos veinte años. Esto explica por que, en este país, a pesar del descenso de la fecundidad, la base de la pirámide por edad no se estrechó al pasar del censo de 1940 al de 1952 y al de 1960.

Hemos visto con la fórmula (35) que, podemos ir más allá y establecer una relación cuantitativa entre ambos movimientos: descenso de la mortalidad infantil y aumento en la fecundidad. Supongamos, por ejemplo, que en un país la mortalidad infantil pasa de un 150 por mil a un 100 por mil y que no ocurren otros cambios en la situación demográfica de este país durante largo tiempo. Obtenemos entonces $\alpha = 1.0588$. Aplicando la relación (35) encontramos que el descenso de la mortalidad infantil es equivalente a un aumento de un 5.9 % de las distintas tasas de fecundidad por edades y luego de las tasas brutas y netas de reproducción.

Puede también ponerse en evidencia una relación entre el descenso de mortalidad infantil y el aumento que correspondería en la tasa de incremento.

Supongamos que las dos poblaciones que comparamos tengan igual intervalo medio entre dos generaciones T . Aplicando la relación (18) a ambos obtenemos:

$$I R = e^{I \rho T}$$

$$II R = e^{II \rho T}$$

y tomando en cuenta la relación (35):

$$\frac{(I \rho - II \rho) T}{e} = \alpha$$

de modo que:

$$\text{Log}_e \alpha = \Delta \rho T \quad (36)$$

Obtenemos así una relación entre:

- la diferencia entre las mortalidades infantiles;
- la diferencia entre las tasas de incremento;
- el intervalo medio entre dos generaciones.

Supongamos, por ejemplo, que las dos poblaciones tengan las características siguientes:

| | <u>Población I</u> | <u>Población II</u> |
|--|--------------------|---------------------|
| Tasa de mortalidad infantil | 0.100 | 0.150 |
| Intervalo medio entre dos generaciones | 30 años | 30 años. |
| Tasa de incremento | ? | 0.015 |

La aplicación de la fórmula (36) nos indica una tasa de incremento para la población I que se expresa de la manera siguiente:

$$I^p = 0.0150 + \frac{\text{Log}_e 1.0588}{30} = 0.0169$$

El pasaje de una tasa de mortalidad infantil de 150 por mil a 100 por mil hace aumentar la tasa de incremento de 1.5 % a 1.69 %. Recordamos que, en cuanto a la estructura por edad, es como si la tasa de natalidad hubiera aumentado en 5.88 %.

5 - Notamos, para terminar, que si las dos poblaciones que se comparan difiriesen no en edades jóvenes o adultas sino en edades elevadas, por ejemplo en edades que superan los 50 años, tendríamos $\Delta P = 0$ ya que las tasas de fecundidad por edad son iguales así como las tasas de supervivencia de las mujeres en el período fértil. Las dos poblaciones tendrían iguales tasas de reproducción e iguales tasas de incremento.

IV.3. Comparación de dos poblaciones que difieren a la vez en fecundidad y en mortalidad.

Esta comparación nos servirá para definir las poblaciones "en transición" en el capítulo que sigue.

Si dos poblaciones difieren a la vez en fecundidad y en mortalidad, según las hipótesis previstas por las ecuaciones (28) y (34) se demuestran las siguientes relaciones, al seguir los mismos razonamientos que en los párrafos anteriores.

- 1) La diferencia entre las tasas de incremento es:

$$\Delta P = u - v$$

- 2) Las tasas netas de reproducción difieren en la forma siguiente:

$$I^R = II^R \left[1 + \sum_i \frac{(\Delta P)^i}{i!} \frac{II^{\nu}_i}{II^R} \right] \quad (37)$$

siendo II^{ν}_i el momento de orden i de la función $\frac{II^{\nu}(x) II^p(x)}{II^R}$ en la población II.

En primera aproximación se tiene

$$I^R = II^R \left[1 + \Delta P \frac{II^{\nu}_1}{II^R} \right] \quad (38)$$

3) Las relaciones entre las estructuras por edad nos llevan a:

$$\frac{I^c(x)}{II^c(x)} = \frac{I^b}{II^b} e^{-u x} \quad (39)$$

o sea, las relaciones entre las proporciones de individuos de cada edad son in dependiente de las diferencias en mortalidad e influenciadas solamente por las di-ferencias en fecundidad.

4) En primera aproximación tenemos la relación siguiente entre la tasa de natalidad y la proporción de niños hasta la edad x_j :

$$\frac{\int_0^{x_j} I^c(x) dx}{\int_0^{x_j} II^c(x) dx} = \frac{I^b}{II^b} \quad (40)$$

5) Tenemos en primera aproximación la relación siguiente entre la tasa de natalidad y la tasa de incremento:

$$II^b = I^b \left[1 - \frac{\Delta I}{I} \quad II^{j-1} + \dots \right] \quad (33)$$

Aplicaciones numéricas.

1) Cálculo de la tasa de natalidad y de la tasa de incremento de Colombia basándose en la estructura por edad.

Utilicemos la relación (29):

$$\frac{I^c(x)}{II^c(x)} = \frac{I^b}{II^b} e^{-\Delta t x}$$

tomando como población I la de Colombia y como población II, una estable cons-truida con una mortalidad modelo $e_0 = 46$ y $r = 0.02$. La tasa de natalidad de esta población es 38.76 por mil.

El cálculo está indicado en el cuadro N° 18.

En la columna 2 de este cuadro figura la estructura por edad ajustada del sexo femenino de la población de Colombia. En la columna 3 la estructura por edad de la población estable teórica. En la columna 4 la relación entre las dos estructuras.

Ajustando por mínimos cuadrados las cifras que figuran en esta columna 4 se obtiene la ecuación siguiente:

$$y = 1.1939 e^{0.0074348 x}$$

Tenemos entonces $\Delta p = 0.0074348$ y ${}_I r = 0.02 + 0.00743 = 0.02743$.

Para la tasa de natalidad ${}_I b = 1.1939 \times 0.03876 = 0.04628$.

Cuadro N° 18

CALCULO DE LA TASA DE INCREMENTO Y DE LA TASA DE NATALIDAD DE COLOMBIA, SEXO FEMENINO, A PARTIR DE LA ESTRUCTURA POR EDAD

| Grupos de edades | Estructura de Colombia en 1950 | Estructura de una población estable $1/$ | Relación entre las dos estructuras | $1.1939e^{0.0075x}$ |
|------------------|--------------------------------|--|------------------------------------|---------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 0 - 4 | 17 826 | 15 347 | 1.162 | 1.172 |
| 5 - 9 | 14 377 | 12 829 | 1.121 | 1.129 |
| 10 - 14 | 12 267 | 11 343 | 1.080 | 1.086 |
| 15 - 19 | 10 458 | 10 020 | 1.044 | 1.047 |
| 20 - 24 | 8 829 | 8 765 | 1.007 | 1.008 |
| 25 - 29 | 7 404 | 7 618 | 0.972 | 0.972 |
| 30 - 34 | 6 109 | 6 601 | 0.938 | 0.934 |
| 35 - 39 | 5 160 | 5 702 | 0.905 | 0.899 |
| 40 - 44 | 4 286 | 4 909 | 0.873 | 0.869 |
| 45 - 49 | 3 531 | 4 190 | 0.843 | 0.836 |
| 50 - 54 | 2 868 | 3 528 | 0.813 | 0.806 |
| 55 - 59 | 2 277 | 2 903 | 0.784 | 0.774 |
| 60 - 64 | 1 742 | 2 299 | 0.758 | 0.749 |
| 65 - 69 | 1 251 | 1 712 | 0.731 | 0.720 |
| 70 - 74 | 812 | 1 152 | 0.705 | 0.693 |
| 75 - 79 | 415 | 662 | 0.681 | 0.667 |
| 80 - 84 | 198 | 303 | 0.653 | 0.644 |
| 85 - 89 | 61 | 95 | 0.635 | 0.620 |
| 90 - 99 | 12 | 20 | 0.600 | 0.583 |
| Total | 100 000 | 100 000 | | |

$1/$ Las características de esta población estable figuran en el texto.

2) Cálculo de las tasas brutas y netas de reproducción de Colombia en 1950 basándose en el conocimiento de la tasa de incremento.

Utilizaremos la fórmula (31):

$${}_I R' = {}_{II} R' \left[1 + ({}_I p - {}_{II} p) {}_{II} \int_0^1 \right]$$

donde ${}_I R'$ es la tasa bruta de reproducción y ${}_I p$ la tasa de incremento de Colombia y donde ${}_{II} R'$, ${}_{II} p$ y ${}_{II} \int_0^1$ son respectivamente la tasa bruta de reproducción, la tasa de incremento y el momento de orden 1 de la función $\frac{{}_{II} f(x)}{{}_{II} R}$ de una población estable teórica con: $e_0 = 46$ años (sexo femenino) $p = 0.030$, $b = 0.04897$, $d = 0.01897$, $R' = 3.43$ y $R = 2.31$. Esta población teórica figura en las tablas numéricas de la segunda parte de este trabajo. Las tasas de fecundidad por edad, obtenidas por interpolación entre dos poblaciones modelos

con $R^I = 3.25$ y $R^I = 3.50$ son las siguientes:

| <u>Edad</u> | <u>Tasas por 1 000</u> |
|-------------|------------------------|
| 15 - 19 | 117.8 |
| 20 - 24 | 352.2 |
| 25 - 29 | 345.8 |
| 30 - 34 | 279.6 |
| 35 - 39 | 210.6 |
| 40 - 44 | 82.0 |
| 45 - 49 | 18.3 |

Obtenemos a partir de estas tasas $II \int_0^{\infty} x \Psi(x) dx = 40.8342$.

Adoptamos para la tasa de incremento de Colombia el valor encontrado en las aplicaciones numéricas del modelo I o sea $I^p = 0.0275$. Es el único dato que se supone disponible. Tenemos $\Delta^p = I^p - II^p = -0.0025$. La aplicación de la fórmula (31) conduce a:

$$I^{R^I} = 3.43 - 0.0025 \times 40.834 = 3.33$$

El valor obtenido directamente a partir de las tasas de fecundidad en las aplicaciones del modelo II había sido $I^R = 3.25$, o sea poco distinto.

Podemos calcular la tasa neta de reproducción reemplazando en la fórmula (31) las tasas brutas por las netas y el momento $II \int_0^{\infty} x \Psi(x) dx$ de la función

$$\frac{II \int_0^{\infty} x \Psi(x) dx}{II^R}$$

por el momento $II \int_0^{\infty} x \Psi(x) dx$ de la función $\frac{II \int_0^{\infty} x \Psi(x) dx}{II^R}$.

Obtenemos $II \int_0^{\infty} x \Psi(x) dx = 27.0756$ y para la tasa neta de reproducción:

$$I^R = 2.31 - 0.0025 \times 27.076 = 2.24$$

El valor obtenido directamente a partir de las tasas de fecundidad y de las tasas de supervivencia en las aplicaciones del modelo II es 2.19, también bastante cercano.

Notamos que este cálculo supone conocido el nivel de la mortalidad de Colombia ya que hemos elegido la población II entre poblaciones estables teóricas que tuvieran igual mortalidad que la de Colombia, o sea $e_0 = 46$ años.

Si no se conociera el nivel de la mortalidad debería utilizarse la fórmula (3E) en lugar de la fórmula (31). Recordamos que, el uso de esta fórmula muy aproximada, es válido solamente en la medida en que la población de referencia II no tenga una mortalidad muy diferente de la población I. Para su aplicación se debería entonces tener una idea aproximada del nivel de la mortalidad de la población estudiada.

3) Estimación de la tasa de natalidad de Colombia a partir del conocimiento de la tasa de incremento.

Utilizaremos la relación (33) limitada a términos que no contengan potencias de Δ^p mayores que 1:

$$II^b = I^b \left[1 - \Delta^p II^{\nu}'_1 \right]$$

Tomaremos para la población I la de Colombia, sexo masculino, donde se supone sabido que la tasa de incremento $I^p = 0.0275$. Es el único dato que sirve para la estimación de la tasa de natalidad I^b con la fórmula (33) ya que los demás datos de esta fórmula se refieren a una población teórica llamada II.

Tomaremos para esta última una población estable con $e_0 = 44$ años, sexo masculino y $II^p = 0.0325$. La tasa de natalidad de esta población es $II^b = 0.05270$ y el momento de orden 1 de la función $II^c(x)$ es $II^{\nu}'_1 = 20.357$.

Aplicando la fórmula (33) obtenemos:

$$\begin{aligned} I^b &= II^b \left[1 + (I^p - II^p) II^{\nu}'_1 \right] \\ &= 0.05270 (1 - 0.050 \times 20.357) \\ &= 0.0473 \end{aligned}$$

El valor esperado es 0.0474 bastante cercano a pesar de que hemos elegido para la población II una población distinta a la vez en mortalidad y en tasa de incremento con respecto a la población de Colombia.

4) Estimación de la omisión censal de los niños de 0 a 4 años en Colombia en 1951.

Utilizaremos la fórmula (32):

$$\frac{I^b}{II^b} = \frac{\int_0^4 I^c(x) dx}{\int_0^4 II^c(x) dx}$$

en la cual adoptaremos para la población I la de Colombia, sexo masculino, en 1951 y para la población II la de una estable con las características siguientes:

$e_0 = 44$ años, $II\hat{f} = 0.0325$. La proporción de niños de 0 a 4 años en esta población teórica es 0.19833 y la tasa de natalidad de 0.05270.

Supongamos que sea conocida la tasa de natalidad de Colombia al nivel $I^b = 0.0463$.

La aplicación de la fórmula (32) nos conduce a:

$$\int_0^4 I^c(x) dx = \frac{0.0470}{0.0527} 0.19833 = 0.1769$$

El censo de Colombia de 1951 arrojó una cifra de 5 579 259 hombres de los cuales 951 333 tenían de 0 a 4 años. El número esperado de niños de 0 a 4 años es:

$$5\ 579\ 259 \times 0.1769 = 986\ 971$$

La omisión censal es entonces estimada en

$$986\ 971 - 951\ 333 = 35\ 638$$

Lo que representa un 3.6 % de la cifra esperada.

Notamos que esta omisión es la que específicamente se refiere al grupo de edades 0 a 4 años. No está comprendida en esta cifra la omisión independiente de la edad, o sea la omisión censal que ha podido ocurrir de grupos enteros de población.

